

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Aleksandra Maj

Nr albumu: 248424

**Wybór struktury i estymacja
parametrów macierzy korelacji
komponentów losowych w liniowym
modelu z efektami losowymi**

**Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA
w zakresie MATEMATYKA STOSOWANA**

Praca wykonana pod kierunkiem
dra inż. Przemysława Biecka
Zakład Statystyki Matematycznej
MIM UW

Czerwiec 2011

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pracy przedstawiona jest teoria dotycząca estymacji współczynników liniowych modeli z efektami mieszanymi, porównywania ich oraz testowania jakości dopasowania i doboru struktury komponentów losowych w modelu. Przedstawiony jest również szereg kryteriów mierzących jakość dopasowania modelu do danych: GIC , $PRESS$, CCC , R^2 , R_W^2 oraz R_{LR}^2 . Oprócz teorii zaprezentowane są wyniki studium symulacyjnego, którego celem było zbadanie skuteczności wyboru struktur korelacji komponentów losowych modelu na podstawie części opisanych kryteriów. Symulacje zostały przeprowadzone przy użyciu pakietu środowiska R o nazwie `lmmfit`, który powstał specjalnie na potrzeby pracy.

Słowa kluczowe

liniowy model z efektami losowymi, liniowy model mieszany, analiza danych panelowych, macierz kowariancji komponentów losowych, struktura korelacji efektów losowych, kryterium GIC , współczynnik $PRESS$ dla liniowych modeli mieszanych, współczynnik CCC dla liniowych modeli mieszanych, współczynniki R^2 dla liniowych modeli mieszanych, struktura korelacji błędów losowych, rozkład Cholesky'ego, rozkład SVD

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.2 Statystyka

Klasyfikacja tematyczna

62H12 Estimation
62J20 Diagnostics
62J99

Tytuł pracy w języku angielskim

The choice of structure and parameters estimation of correlation matrix of random factors in linear model with random effects

Spis treści

Wprowadzenie	9
1. Podstawowe pojęcia	11
1.1. Definicje	11
2. Liniowe modele mieszane	15
2.1. Formuła modelu	15
2.1.1. Macierzowa formuła modelu	16
2.2. Rozkłady zmiennej objaśnianej	17
2.2.1. Rozkład warunkowy zmiennej objaśnianej	17
2.2.2. Rozkład bezwarunkowy zmiennej objaśnianej (rozkład brzegowy)	17
2.3. Estymacja parametrów modelu	18
2.3.1. Estymacja metodą największej wiarygodności (ang. <i>maximum likelihood method (ML)</i>)	18
2.3.2. Estymacja metodą ograniczonej największej wiarygodności (ang. <i>restricted maximum likelihood method (REML)</i>)	20
2.3.3. Regularyzowana i ważona metoda najmniejszych kwadratów (ang. <i>penalized weighted least squares (PWLS)</i>)	20
2.4. Parametryzacja macierzy kowariancji	23
2.4.1. Parametryzacja macierzy R_i	23
2.4.2. Parametryzacja macierzy D	24
3. Dopasowanie modelu i struktury korelacji	27
3.1. Diagnostyka liniowego modelu mieszanego	27
3.1.1. Badanie normalności efektów losowych b_i	27
3.1.2. Diagnostyka reszt	27
3.2. Testowanie istotności współczynników	28
3.2.1. Testowanie hipotez dotyczących efektów stałych	28
3.2.2. Testowanie hipotez dotyczących efektów losowych b	29
3.3. Wybór modelu	30
3.3.1. Kryteria informacyjne: GIC, AIC i BIC	30
3.3.2. Współczynnik <i>PRESS</i> dla modeli mieszanych	31
3.3.3. Współczynniki R^2 dla modeli mieszanych	32
3.3.4. Współczynnik <i>CCC</i> dla modeli mieszanych	35
3.4. Struktury korelacji komponentów losowych	36
3.4.1. Struktury korelacji błędów losowych ε	36
3.4.2. Struktury korelacji efektów losowych b	37

4. Liniowe modele mieszane w R	39
4.1. Pakiet <code>nlme</code> - funkcja <code>lme()</code>	39
4.2. Pakiet <code>lmmfit</code>	40
4.2.1. Funkcje <code>structStep()</code> i <code>structStepR2()</code>	41
4.3. Analiza danych symulowanych	45
4.3.1. Opis symulacji	45
4.3.2. Wyniki symulacji	47
4.3.3. Wnioski i podsumowanie symulacji	54
Podsumowanie	59
A. Wyniki symulacji, tabele	61
B. Zawartość płyty CD	77
Bibliografia	79

Spis rysunków

4.1. Porządek struktur korelacji błędów losowych ε	41
4.2. Porządek struktur korelacji efektów losowych b	42
4.3. Porządek liniowych modeli mieszanych wyznaczony przez struktury komponentów losowych	43
4.4. Porównanie kryteriów, wybór prawidłowych struktur komponentów losowych, start z prawdziwego modelu	48
4.5. Porównanie kryteriów, wybór prawidłowych struktur komponentów losowych, start z modelu o innych strukturach	49
4.6. Porównanie kryteriów, wybór prawidłowej struktury efektów losowych b , start z prawdziwego modelu	50
4.7. Porównanie kryteriów, wybór prawidłowej struktury efektów losowych b , start z modelu o innych strukturach	51
4.8. Porównanie kryteriów, wybór prawidłowej struktury błędów losowych ε , start z prawdziwego modelu	52
4.9. Porównanie kryteriów, wybór prawidłowej struktury błędów losowych ε , start z modelu o innych strukturach	53
4.10. Wybór struktur korelacji komponentów losowych dla modeli bazowych	56
4.11. Wybór struktur korelacji komponentów losowych dla modeli bazowych, c.d. .	57

Spis tablic

4.1.	Wybrane argumenty funkcji <code>lme()</code>	39
4.2.	Uzyskiwanie informacji z hipotetycznego obiektu <code>lme.fit</code> dopasowanego za pomocą funkcji <code>lme()</code>	40
4.3.	Funkcje pakietu <code>lmmfit</code> wyznaczające współczynniki jakości dopasowania dla liniowego modelu mieszanego	41
4.4.	Funkcja <code>structStep()</code> wyznaczająca struktury korelacji komponentów losowych poprzez minimalizację kryterium GIC lub <i>PRESS</i>	44
4.5.	Funkcja <code>structStepR2()</code> wyznaczająca struktury korelacji komponentów losowych poprzez maksymalizację współczynnika dopasowania	44
A.1.	Wybór modelu, porównanie kryteriów, wybór prawidłowych struktur komponentów losowych	62
A.2.	Wybór modelu, porównanie kryteriów, wybór prawidłowej struktury efektów losowych	63
A.3.	Wybór modelu, porównanie kryteriów, wybór prawidłowej struktury błędów losowych	64
A.4.	Wybór modelu, model bazowy m1	65
A.5.	Wybór modelu, model bazowy m2	68
A.6.	Wybór modelu, model bazowy m3	71
A.7.	Wybór modelu, model bazowy m4	74

Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie teorii dotyczącej estymacji współczynników liniowych modeli z efektami mieszanymi, porównywania ich oraz testowania jakości dopasowania i doboru struktury komponentów losowych w modelu. Dla uproszczenia zapisu, w dalszej części pracy liniowy model z efektami mieszanymi nazywany będzie modelem mieszanym. Trzeba jednak zwrócić uwagę, że modele z efektami losowymi są szerszą grupą modeli niż modele mieszane, ponieważ nie muszą one zawierać efektów stałych.

W teorii klasycznych modeli liniowych współczynniki modelu traktuje się jako wartości nieznane, ale stałe i określone dla całej populacji. W liniowych modelach mieszanych, będących uogólnieniem modeli liniowych, oprócz współczynników traktowanych jako stałe (nazywanych efektami stałymi), znajdują się jeszcze tak zwane efekty losowe. Są to współczynniki modelu, których ocena wartości nie jest istotna w analizie, natomiast istotna jest ocena ich zmienności. Poprzez założenie, że współczynniki te są realizacjami pewnej zmiennej losowej, można właśnie tę zmienność badać.

Przyjęcie, które współczynniki mają być traktowane jako losowe, a które jako stałe jest rzeczą arbitralną i często bywa kontrowersyjne, ponieważ każdy z tych rodzajów współczynników ma zupełnie inną interpretację. Często jako losowe traktuje się zmienne jakościowe, które występują tylko na kilku poziomach ze wszystkich możliwych poziomów występowania danej zmiennej, na przykład: mamy dane o ocenach i poziomach inteligencji uczniów z dziesięciu szkół. Chcielibyśmy zbadać jaki wpływ ma poziom inteligencji na ocenę ucznia. Wiadomo, że sposoby nauczania różnią się między szkołami, więc, chcąc również uwzględnić efekt szkoły w modelu, możemy potraktować ją jako efekt losowy (w kraju jest więcej niż dziesięć szkół). Takie potraktowanie efektu szkoły pozwala uwzględnić zmienność ocen uczniów między szkołami, a nie ocenić wpływ konkretnej szkoły na poziom ocen. Gdybyśmy potraktowali efekt szkoły jako efekt stały, moglibyśmy wskazać, w której szkole poziom ocen jest wyższy lub niższy niż w innych.

Poprzez możliwość uwzględnienia zmienności między grupami, modele mieszane znajdują niezwykle szerokie zastosowanie w naukach przyrodniczych, finansach czy medycynie. W szczególności są one przydatne do analizy danych panelowych. Dane panelowe charakteryzują się tym, że zebrane są informacje o podmiotach obserwowanych przez kilka okresów czasu (ang. *repeated measurements*), na przykład: zbieramy dane o ciśnieniu krwi stu konkretnych pacjentów przez rok, wykonując pomiary co miesiąc. Analizując dane tego typu nie interesuje nas wpływ danej jednostki na badaną zmienną, ale ogólne zróżnicowanie między obserwowanymi jednostkami. Efekt jednostki traktujemy wtedy jako losowy.

Oprócz teorii dotyczącej liniowych modeli mieszanych, w pracy zaprezentowane są wyniki studium symulacyjnego, którego celem było zbadanie skuteczności wyboru struktur korelacji komponentów losowych modelu na podstawie kryteriów: AIC, BIC, *PRESS* (ang. *predicted residual sum of squares*), *CCC* (ang. *concordance correlation coefficient*), R_W^2 oraz R_{LR}^2 (współczynniki *PRESS*, *CCC* oraz R_W^2 występują w dwóch wersjach: brzegowej i warunkowej).

Praca została podzielona na cztery rozdziały, jednak koncepcyjnie składa się z dwóch części: pierwszej - wprowadzenie i teoria liniowych modeli mieszanych oraz drugiej - obsługa liniowych modeli mieszanych w środowisku R oraz studium symulacyjne przeprowadzone z wykorzystaniem właśnie tego środowiska.

Pierwszy rozdział zawiera podstawowe pojęcia i definicje związane z liniowymi modelami mieszanymi. Rozdział drugi jest poświęcony sformułowaniu modelu mieszanego oraz teoretycznemu opisowi metod estymacji współczynników modelu: metodzie ML (ang. *maximum likelihood*), REML (ang. *restricted maximum likelihood*) oraz PWLS (ang. *penalized weighted least squares*). W rozdziale trzecim znajduje się opis diagnostyki modelu mieszanego oraz testowania hipotez dotyczących istotności współczynników modelu. W rozdziale tym zawarte są również szczegółowe opisy kryteriów używanych do badania jakości dopasowania modelu do danych i pomocnych przy wyborze modelu, takich jak: kryteria informacyjne GIC (ang. *generalized information criterion*), AIC i BIC, współczynnik *PRESS*, współczynniki R^2 oraz współczynnik *CCC* dla modeli mieszanych.

Rozdział czwarty stanowi odrębną część pracy. Znajduje się w nim opis pakietu `nlme` autorstwa D. Batesa i J. Pinheiro, który pozwala wykonywać odpowiednie analizy w środowisku R oraz opis pakietu `lmmfit`, który powstał specjalnie na potrzeby tejże pracy. Pakiet ten zawiera funkcje wyznaczające wszystkie współczynniki i kryteria jakości dopasowania modelu do danych opisane w pracy oraz funkcje dokonujące automatycznego doboru struktur korelacji błędów losowych i korelacji efektów losowych przy ustalonych efektach stałych i losowych w modelu mieszanym pogrupowanym przez jedną zmienną. Pakiet `lmmfit` dostępny jest pod adresem:

<http://cran.r-project.org/web/packages/lmmfit/index.html>

W rozdziale czwartym znajduje się również opis studium symulacyjnego, które zostało przeprowadzone za pomocą wyżej wymienionych pakietów. Celem studium jest zbadanie skuteczności części opisanych w pracy współczynników jakości dopasowania modelu w wyborze struktur korelacji komponentów losowych modelu.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

W rozdziale tym przedstawione zostały podstawowe definicje i pojęcia używane w niniejszej pracy.

1.1. Definicje

Definicja 1.1.1 (Macierz idempotentna) *Macierzą idempotentną* nazywamy kwadratową macierz A , taką że

$$A^2 = AA = A.$$

Jeśli macierz A jest macierzą symetryczną idempotentną, to wtedy

$$A^T A = A.$$

Definicja 1.1.2 (Macierz nieujemnie określona) Niech A będzie macierzą symetryczną, jeśli dla każdego niezerowego wektora x zachodzi:

$$x^T A x \geq 0,$$

to A nazywamy *macierzą nieujemnie określoną* (lub *dodatnio pół określoną*).

Definicja 1.1.3 (Macierz dodatnio określona) Niech A będzie macierzą symetryczną, jeśli dla każdego niezerowego wektora x zachodzi:

$$x^T A x > 0,$$

to A nazywamy *macierzą dodatnio określoną*.

Definicja 1.1.4 (Rozkład Cholesky’ego) Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie symetryczną macierzą dodatnio określoną. *Macierzą rozkładu Cholesky’ego macierzy A* nazywamy górnotrójkątną macierz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, taką że:

$$A = U^T U$$

lub dolnotrójkątną macierz $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, taką że:

$$A = LL^T.$$

Macierze U i L są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 1.1.5 (Rozkład SVD) Niech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, będzie dowolną macierzą. *Rozkładem SVD (ang.: Singular Value Decomposition) macierzy A nazywamy następującą dekompozycję:*

$$A = U \Sigma V^T,$$

gdzie U jest macierzą ortonormalną rozmiaru $m \times m$, będącą bazą przestrzeni rozpiętej przez kolumny A , V jest macierzą ortonormalną rozmiaru $n \times n$, będącą bazą przestrzeni rozpiętej przez kolumny A , a Σ jest macierzą diagonalną rozmiaru $n \times n$ mającą na przekątnej pierwiastki wartości własnych macierzy $A^T A$ w kolejności niemalejącej.

Definicja 1.1.6 (Rozkład LDL) Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, będzie dowolną macierzą symetryczną. *Rozkładem LDL macierzy A nazywamy następującą dekompozycję:*

$$A = LDL^T,$$

gdzie L jest kwadratową macierzą dolnotrójkątną rozmiaru $n \times n$ z jedynkami na przekątnej, a D jest macierzą diagonalną $n \times n$, mającą na przekątnej pierwiastki wartości własnych macierzy $A^T A$ w kolejności niemalejącej.

Definicja 1.1.7 (Rozkład QR) Niech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. *Rozkładem QR macierzy A nazywamy przedstawienie:*

$$A = QR,$$

gdzie Q jest macierzą ortogonalną $m \times m$, a R jest górnortrójkątną macierzą $m \times n$. Ponieważ $(m - n)$ dolnych rzędów macierzy R jest zerowych, rozkład ten można przedstawić w tak zwanej wąskiej postaci:

$$A = QR = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1,$$

gdzie R_1 jest macierzą górnortrójkątną $n \times n$, Q_1 jest rozmiaru $m \times n$, Q_2 jest rozmiaru $m \times (m - n)$ i obie te macierze mają ortogonalne kolumny.

Gdy macierz A jest pełnego rzędu n oraz założymy, że diagonalne elementy macierzy R_1 są dodatnie, to R_1 i Q_1 są wyznaczone jednoznacznie, ponadto Q_2 nie jest wyznaczona jednoznacznie oraz R_1 jest równa górnortrójkątnej macierzy rozkładu Cholesky'ego macierzy $A^T A$.

Definicja 1.1.8 (Estymator Największej Wiarygodności) Przypuśćmy, że x_1, \dots, x_n jest próbą niezależnych obserwacji z rozkładu o nieznannej gęstości $f_0(\cdot)$ pochodzącej z rodziny $\{f_\theta(\cdot), \theta \in \Theta\}$, takiej że $f_0(\cdot) = f_{\theta_0}(\cdot)$, gdzie θ_0 jest prawdziwą wartością parametru θ .

Niech

$$\mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)$$

będzie *funkcją wiarygodności* oraz

$$l(\theta; x_1, \dots, x_n) = \ln \mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \ln f_\theta(x_i)$$

będzie *funkcją log-wiarygodności*. Wtedy *estymatorem największej wiarygodności* θ nazywamy $\hat{\theta}_{ML}$, który spełnia:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta; x_1, \dots, x_n).$$

Definicja 1.1.9 (Efekt stały) *Efektem statycznym* nazywamy nieznaną stałą, którą chcemy oszacować na podstawie danych. Stała ta jest określona dla całej populacji lub podzbioru populacji (grupy).

Definicja 1.1.10 (Efekt losowy) *Efektem losowym* jest realizacja pewnej zmiennej losowej. Zazwyczaj nie tyle jesteśmy zainteresowani oceną tej wartości, co chcemy estymować parametry rozkładu, z którego ta zmienna losowa pochodzi. Wartość efektu losowego jest charakterystyczna dla pewnego podzbioru populacji.

Definicja 1.1.11 (Liniowy model z efektami losowymi) *Liniowym modelem z efektami losowymi* nazywamy model zawierający efekty losowe lub efekty stałe i losowe, który tłumaczy liniową zależność między zmienną objaśnianą a funkcjami zmiennych objaśniających.

Definicja 1.1.12 (Liniowy model mieszany) *Liniowym modelem mieszanym* nazywamy liniowy model z efektami losowymi, który zawiera również efekty stałe.

Rozdział 2

Linowe modele mieszane

Modele mieszane, tak jak i inne modele statystyczne, opisują zależność pomiędzy zmienną objaśnianą a zmiennymi objaśniającymi. Używane są przede wszystkim do modelowania zależności w danych, które są pogrupowane względem jednej lub kilku zmiennych. Przykładami takich pogrupowanych danych mogą być: dane panelowe (każdy obiekt wyznacza grupę - jest obserwowany przez kilka okresów czasu), dane z powtarzanymi pomiarami lub dane o kilku poziomach grupowania (np. oceny uczniów z różnych klas, które znajdują się w różnych szkołach). Poprzez traktowanie wpływu konkretnej grupy jako efekt losowy, modele mieszane pozwalają uwzględnić strukturę zależności między zmiennymi grupującymi obserwacje. Pozwalają również na efektywne zmniejszenie liczby parametrów modelu.

Zostało przyjęte w literaturze przedmiotu, że efekty stałe oznacza się literami greckimi, natomiast litery łacińskie oznaczają efekty losowe. Podzbiór kolumn macierzy eksperymentu traktowanych jako efekty stałe oznaczany będzie symbolem X , a podzbiór kolumn zmiennych traktowanych jako zmienne losowe symbolem Z .

Rozdział ten powstał na podstawie opisu teorii z książek [Burzykowski2011], [Bates2009], [Pinheiro2000] i jest poświęcony opisowi liniowych modeli mieszanych. W pierwszym podrozdziale omówione jest ogólne sformułowanie liniowego modelu mieszanego dla danych pogrupowanych przez jedną zmienną. W kolejnych podrozdziałach opisane są trzy metody estymacji współczynników modelu - metoda największej wiarygodności (ML), ograniczonej największej wiarygodności (REML) oraz regularyzowanej, ważonej metody najmniejszych kwadratów (PWLS). Na końcu tego rozdziału opisujemy parametryzację macierzy kowariancji efektów losowych i błędów losowych w modelu.

2.1. Formuła modelu

Dla ułatwienia zapisu, będziemy rozpatrywać dane pogrupowane o N poziomach ($i = 1, \dots, N$). W każdej grupie znajduje się n_i obserwacji ($\sum_{i=1}^N n_i = n$). Przyjmujemy również, że macierz X jest pełnego rzędu p .

Formuła modelu wygląda następująco:

$$y_i = X_i\beta + Z_ib_i + \varepsilon_i, \quad (2.1)$$

gdzie y_i , X_i i ε_i są odpowiednio: wektorem ciągłym zmiennej objaśnianej, macierzą eksperymentu oraz wektorem reszt dla i -tej grupy, Z_i oraz b_i są: macierzą zmiennych objaśniających (traktowanych jako losowe) i wektorem efektów losowych:

$$Z_i = \begin{pmatrix} z_{i1}^{(1)} & z_{i1}^{(2)} & \dots & z_{i1}^{(q)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{in_i}^{(1)} & z_{in_i}^{(2)} & \dots & z_{in_i}^{(q)} \end{pmatrix} = (z_i^{(1)}, z_i^{(2)}, \dots, z_i^{(q)}), \quad (2.2)$$

$$b_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{iq} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Tak jak macierz X_i , Z_i jest macierzą znanych wartości q zmiennych objaśniających, natomiast b_i są nieobserwowalnymi realizacjami zmiennej losowej \mathcal{B} , takiej że:

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{N}_q(0, \mathcal{D}). \quad (2.4)$$

Zakłada się również, że

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}_{n_i}(0, \mathcal{R}_i) \quad (2.5)$$

oraz $b_i \perp \varepsilon_i$ dla każdego $i = 1, \dots, N$ (b_i jest niezależne od ε_i w każdej grupie). Założenie niezależności efektów losowych i błędów losowych odgrywa kluczową rolę w rozróżnieniu klasycznych liniowych modeli mieszanych i rozszerzonych liniowych modeli mieszanych, których nie będziemy omawiać w tej pracy. Są one opisane w [Burzykowski2011]. Dodatkowo zakłada się jeszcze, że dla każdego i oraz i' zachodzi $b_i \perp \varepsilon_{i'}$.

Zauważmy, że efekty losowe powinny z założenia mieć zerową wartość oczekiwaną, zatem niezerowa ich średnia musi być wyrażona jako efekt stały, stąd najczęściej Z jest podzbiorem kolumn X .

Niech

$$\mathcal{D} = \sigma^2 D \text{ oraz } \mathcal{R}_i = \sigma^2 R_i, \quad (2.6)$$

gdzie σ^2 jest nieznanym parametrem. Dla identyfikowalności modelu przyjmuje się, że górne, lewe elementy macierzy D i R_i są równe 1, także wtedy \mathcal{D} i \mathcal{R}_i są zdefiniowane jednoznacznie.

2.1.1. Macierzowa formuła modelu

Niech $y = (y_1^T, \dots, y_N^T)^T$ będzie wektorem całej zmiennej objaśnianej (długości $n = \sum_{i=1}^N n_i$). Analogicznie, niech $b = (b_1^T, \dots, b_N^T)^T$ i $\varepsilon = (\varepsilon_1^T, \dots, \varepsilon_N^T)^T$ będą wektorami zawierającymi wszystkie efekty losowe modelu. Niech

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Z_N \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

wtedy macierzową formułą modelu jest:

$$y = X\beta + Zb + \varepsilon, \quad (2.9)$$

gdzie

$$b \sim \mathcal{N}_{Nq}(0, \mathcal{D}) \text{ i } \varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 R), \quad (2.10)$$

gdzie

$$\mathfrak{D} = \sigma^2 I_N \otimes D = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

oraz

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R_N \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Warto zauważyć, że szczególna, blokowa postać macierzy Z , R i \mathfrak{D} wynika z tego, że opisujemy model pogrupowany względem jednej zmiennej grupującej.

2.2. Rozkłady zmiennej objaśnianej

Opisane powyżej sformułowanie liniowego modelu mieszanego wyznacza rozkłady dwóch zmiennych losowych: $y_i|b_i$ i y_i . Pierwszy jest warunkowym rozkładem zmiennej objaśnianej pod warunkiem nieobserwowalnej zmiennej normalnej, drugi natomiast jest rozkładem bezwarunkowym. Rozkłady te posłużą potem do estymacji parametrów modelu.

2.2.1. Rozkład warunkowy zmiennej objaśnianej

Z założeń modelu mamy:

$$\mathbb{E}(y_i|\mathcal{B} = b_i) \equiv \mu_i = X_i\beta + Z_i b_i, \quad (2.13)$$

$$\text{Var}(y_i|\mathcal{B} = b_i) = \sigma^2 R_i, \quad (2.14)$$

gdzie $\mu_i = (\mu_{i1}, \dots, \mu_{in_i})^T$ oraz

$$\mathbb{E}(y_{ij}|\mathcal{B} = b_i) \equiv \mu_{ij} = x_{ij}^T \beta + z_{ij}^T b_i,$$

gdzie $x_{ij} = (x_{ij}^{(1)}, \dots, x_{ij}^{(p)})^T$ i $z_{ij} = (z_{ij}^{(1)}, \dots, z_{ij}^{(q)})^T$ są kolumnowymi wektorami zawierającymi wartości predyktorów x i z dla j -tej obserwacji z i -tej grupy.

2.2.2. Rozkład bezwarunkowy zmiennej objaśnianej (rozkład brzegowy)

Dane jest również:

$$\mathbb{E}(y_i) = X_i\beta, \quad (2.15)$$

$$\text{Var}(y_i) = \mathcal{V}_i = \sigma^2 V_i = \sigma^2 (Z_i D Z_i^T + R_i), \quad (2.16)$$

zatem brzegowym rozkładem zmiennej objaśnianej jest

$$y_i \sim \mathcal{N}_{n_i}(X_i\beta, \sigma^2 Z_i D Z_i^T + \sigma^2 R_i). \quad (2.17)$$

Warto zauważyć, że w brzegowym modelu nie występują efekty losowe b_i . Stąd macierz D nie musi być traktowana jako macierz kowariancji, w konsekwencji nie musi być dodatnio określona (wystarczy, żeby macierz $V_i = Z_i D Z_i^T + R_i$ była dodatnio określona). D musi być jedynie symetryczna.

2.3. Estymacja parametrów modelu

Macierz D jest macierzą wariancji efektów losowych b_i . Dla potrzeb estymacji parametryzuje się tę macierz wektorem nieznanych parametrów θ_D określającym jej elementy, wtedy:

$$\mathcal{D}(\sigma^2, \theta_D) = \sigma^2 D(\theta_D). \quad (2.18)$$

Najogólniejszy przypadek zakłada, że każde dwa elementy wektora b_i mogą być ze sobą skorelowane. Wtedy \mathcal{D} ma ogólną strukturę macierzy dodatnio określonej o $q - 1$ elementach odpowiadających wariancjom (lewy, górny element D jest równy 1) i $\frac{q(q-1)}{2}$ elementach odpowiadających kowariancjom elementów wektora b_i . Stąd θ_D zawiera co najwyżej $\frac{q(q+1)}{2} - 1$ parametrów. Pomimo, że zazwyczaj q jest nieduże, to estymacja wszystkich parametrów może być problematyczna - zwiększając wymiar przestrzeni parametrów, coraz trudniejszym zadaniem jest zachowanie dodatniej określoności i symetryczności macierzy kowariancji \mathcal{D} . Dla uproszczenia estymacji, narzuca się na macierz \mathcal{D} pewną strukturę. Takie postępowanie zmniejsza liczbę parametrów do oszacowania oraz umożliwia prostszą interpretację wyników.

Zupełnie analogicznie parametryzuje się macierze R_i - macierze wewnątrzgrupowych korelacji błędów losowych ε_i :

$$\mathcal{R}_i(\sigma^2, \theta_R) = \sigma^2 R_i(\theta_R), \quad (2.19)$$

gdzie θ_R jest wektorem parametrów niezależnym od θ_D . Wtedy można zapisać:

$$Var(\varepsilon_i | \mathcal{B} = b_i) = \sigma^2 R_i(\mu_i, \theta_R) \quad (2.20)$$

lub

$$Var(\varepsilon_i | \mathcal{B} = b_i) = Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 R_i(\theta_R), \quad (2.21)$$

gdzie $b_i \perp \varepsilon_i$, czyli gdy b_i i ε_i są niezależne.

2.3.1. Estymacja metodą największej wiarygodności (ang. *maximum likelihood method (ML)*)

Żeby móc zastosować metodę największej wiarygodności (patrz definicja 1.1.8), trzeba określić funkcję wiarygodności modelu: $L(\beta, \sigma^2, \theta)$. Niestety bezwarunkowy rozkład b_i czy rozkład zmiennej $y_i | b_i$ nie są dobre do konstrukcji tej funkcji, ponieważ zawierają nieobserwowalne efekty losowe b_i . Z tego samego powodu funkcją wiarygodności nie może być również łączny rozkład zmiennych b_i i y_i .

Rozwiązaniem tego problemu jest oparcie estymacji współczynników liniowego modelu mieszanego na brzegowym rozkładzie y_i , który otrzymujemy po scałkowaniu względem b_i rozkładu łącznego b_i i y_i :

$$f_Y(y) = \int f_{Y,\mathcal{B}}(y, b) db = \int f_{Y|\mathcal{B}}(y|b) f_{\mathcal{B}}(b) db, \quad (2.22)$$

gdzie $f_{Y,\mathcal{B}}$ jest gęstością łącznego rozkładu zmiennej losowej Y , której realizacjami są y_i i zmiennej losowej \mathcal{B} , której realizacjami są b_i , $f_{Y|\mathcal{B}}$ jest gęstością warunkowego rozkładu Y pod warunkiem \mathcal{B} i $f_{\mathcal{B}}$ jest gęstością bezwarunkowego rozkładu \mathcal{B} . Ponieważ $f_{Y,\mathcal{B}}$ i $f_{\mathcal{B}}$ są gęstościami wielowymiarowych rozkładów normalnych, to brzegowy rozkład Y również jest wielowymiarowym rozkładem normalnym.

Korzystając z własności warunkowych rozkładów prawdopodobieństwa i przyjmując oznaczenie

$$h(b) = f_{Y|\mathcal{B}}(y|b) f_{\mathcal{B}}(b), \quad (2.23)$$

mamy:

$$f_{\mathcal{B}|Y}(b|y) = \frac{f_Y(y|b)f_{\mathcal{B}}(b)}{f_Y(y)} = \frac{h(b)}{\int_{\mathbb{R}^q} h(b) db}. \quad (2.24)$$

Wtedy funkcją wiarygodności jest:

$$L(\beta, \sigma^2, \theta, b) = L(\beta, \theta, \sigma^2) = \int_{\mathbb{R}^q} h(b) db. \quad (2.25)$$

Innym rozwiązaniem problemu znalezienia funkcji wiarygodności jest odmienne przedstawienie modelu:

$$y_i = X_i\beta + Z_i b_i + \varepsilon_i = X_i\beta + \varepsilon_i^*, \quad (2.26)$$

gdzie $i = 1, \dots, N$ oraz $\varepsilon_i^* = Z_i b_i + \varepsilon_i$.

Zmienna losowa ε_i^* jako suma dwóch wektorów zmiennych losowych z niezależnych wielowymiarowych rozkładów normalnych o średniej zero, sama ma rozkład normalny o średniej zero i macierzy kowariancji $V_i = \sigma^2 V_i = \sigma^2 (Z_i D Z_i^T + R_i)$. Stąd, z (2.26), mamy: y_i ma wielowymiarowy rozkład normalny o średniej $X_i\beta$ i macierzy kowariancji $\sigma^2 V_i$. Zatem

$$f_Y(y_i; \beta, \theta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n_i}{2}} |V_i|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{(y_i - X_i\beta)^T V_i^{-1} (y_i - X_i\beta)}{2\sigma^2} \right), \quad (2.27)$$

gdzie $\theta = (\theta_D, \theta_R)$. Czyli funkcją wiarygodności jest

$$\begin{aligned} L_{full}(\beta, \theta, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n_i}{2}} |V_i|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{(y_i - X_i\beta)^T V_i^{-1} (y_i - X_i\beta)}{2\sigma^2} \right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^N |V_i|^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^N \exp \left(-\frac{(y_i - X_i\beta)^T V_i^{-1} (y_i - X_i\beta)}{2\sigma^2} \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

gdzie $n = \sum_{i=1}^N n_i$. Stąd funkcją log-wiarygodności jest

$$\begin{aligned} l_{full}(\beta, \theta, \sigma^2) &= \ln(L_{full}(\beta, \theta, \sigma^2)) = \\ &= -\frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln |V_i| - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - X_i\beta)^T V_i^{-1} (y_i - X_i\beta), \end{aligned} \quad (2.29)$$

gdzie dla uproszczenia notacji przyjmujemy oznaczenie $V_i = V_i(\theta)$. Estymację parametru θ przeprowadza się w dwóch krokach:

1. Profilujemy log-wiarygodność: traktujemy θ jako ustalone i obliczamy estymatory największej wiarygodności parametrów β i σ^2 :

$$\hat{\beta}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^N X_i^T V_i^{-1} X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N X_i^T V_i^{-1} y_i, \quad (2.30)$$

$$\hat{\sigma}_{ML}^2(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^N r_i^T V_i^{-1} r_i}{n}, \quad (2.31)$$

gdzie $r_i \equiv r_i(\theta) = y_i - X_i \hat{\beta}(\theta)$. Profilowanie pozwala na zmniejszenie liczby parametrów do wyestymowania.

2. Podstawiamy sprofilowane $\hat{\beta}(\theta)$ i $\hat{\sigma}^2(\theta)$ do $l_{full}(\cdot)$ i przeprowadzamy maksymalizację $l_{full}(\cdot)$ ze względu na parametr θ otrzymując estymator $\hat{\theta}_{ML}$, który wstawiamy do (2.30) i (2.31). W uproszczonej notacji przyjmuje się, że $\hat{\beta}_{ML} = \hat{\beta}(\hat{\theta}_{ML})$.

2.3.2. Estymacja metodą ograniczonej największej wiarygodności (ang. *restricted maximum likelihood method* (REML))

Ponieważ metoda największej wiarygodności może prowadzić do obciążonych estymatorów (szczegóły w [Gurka2006]), stosuje się metodę REML, czyli metodę ograniczonej największej wiarygodności.

Podobnie jak dla metody ML, również w metodzie REML profiluje się funkcję log-wiarygodności, z tą różnicą, że za parametr σ^2 wstawiamy estymator postaci:

$$\hat{\sigma}_{REML}^2(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^N r_i^T V_i^{-1} r_i}{n - p}. \quad (2.32)$$

Po podstawieniu sprofilowanych estymatorów (2.30) i (2.32) do funkcji log-wiarygodności, otrzymujemy:

$$l_{REML}(\theta) = -\frac{n-p}{2} \ln\left(\sum_{i=1}^N r_i^T r_i\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln |V_i| - \frac{1}{2} \ln \left| \sum_{i=1}^N X_i^T V_i^{-1} X_i \right|. \quad (2.33)$$

Funkcja $l_{REML}(\cdot)$ określona wzorem (2.33) przyjmuje maksimum w punkcie $\hat{\theta}_{REML}$. Tak jak w metodzie ML, w uproszczonej notacji przyjmuje się, że $\hat{\beta}_{REML} = \hat{\beta}(\hat{\theta}_{REML})$, gdzie $\hat{\beta}(\cdot)$ wyraża się wzorem (2.30).

Innym argumentem przemawiającym za używaniem estymatorów REML, jest to, że pomimo, iż wektor reszt z modelu $y - X\hat{\beta}$ jest wektorem n -wymiarowym, to reszty w punkcie $\hat{\theta}$ spełniają układ p liniowo niezależnych równań postaci

$$X^T V^{-1} (y - X\hat{\beta}) = 0. \quad (2.34)$$

Czyli wektor reszt w punkcie $\hat{\theta}$ jest rzutem zmiennej objaśnianej na $(n-p)$ -wymiarową podprzestrzeń n -wymiarowej przestrzeni. Estymator $\hat{\sigma}_{REML}^2$ uwzględnia zatem fakt, że σ^2 wyestymowane za pomocą reszt ma tylko $n-p$ stopni swobody.

Również analogicznie jak dla metody ML, metodę REML można zapisać w postaci całkowej. Funkcją, którą maksymalizujemy jest

$$L_{REML}(\theta, \sigma^2) = \int_{\mathbb{R}^p} L(\theta, \beta, \sigma^2) d\beta, \quad (2.35)$$

gdzie $L(\theta, \beta, \sigma^2)$ wyraża się wzorem (2.25). Metoda REML ma ciekawą interpretację, mianowicie poprzez wycałkowanie funkcji wiarygodności względem parametru β jest ona równoważna estymacji parametrów modelu na przestrzeni ortogonalnej do przestrzeni rozpiętej przez kolumny macierzy X .

2.3.3. Regularyzowana i ważona metoda najmniejszych kwadratów (ang. *penalized weighted least squares* (PWLS))

Regularyzowana i ważona metoda najmniejszych kwadratów polega na sprowadzeniu problemu estymacji parametrów liniowego modelu mieszanego do problemu ważonej regresji liniowej z nałożoną karą, który to problem potrafimy efektywnie rozwiązywać. W metodzie PWLS punktem startowym jest logarytm gęstości rozkładu łącznego zmiennych Y i \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} h_{joint}(\beta, \sigma^2, \theta) = & -\frac{n + N_q}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln(|R||\mathfrak{D}|) - \\ & - \frac{1}{2\sigma^2} \left((y - X\beta - Zb)^T R^{-1} (y - X\beta - Zb) + b^T \mathfrak{D}^{-1} b \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

gdzie macierz \mathfrak{D} jest określona wzorem (2.11) a macierz R wzorem (2.12).

Zauważmy, że liniowy model mieszany określony formułą (2.9) można przekształcić tak, aby efekty losowe były nieskorelowane. Niech Λ_θ będzie dolnotrójkątną macierzą rozkładu Cholesky'ego macierzy \mathfrak{D} (patrz definicja (1.1.4)).

$$\mathfrak{D} = \Lambda_\theta \Lambda_\theta^T, \quad (2.37)$$

wtedy można zapisać:

$$b = \Lambda_\theta u, \quad (2.38)$$

gdzie u jest realizacją zmiennej losowej U takiej, że

$$U \sim \mathcal{N}_{N_q}(0, \sigma^2 I_{N_q}). \quad (2.39)$$

Jeśli przyjmiemy oznaczenie $A^T = Z\Lambda_\theta$, to otrzymamy:

$$\mathbb{E}(y|U = u) = X\beta + Z\Lambda_\theta u \equiv X\beta + A^T u, \quad (2.40)$$

$$\text{Var}(y|U = u) = \sigma^2 R \quad (2.41)$$

oraz

$$\mathbb{E}(y) = X\beta, \quad (2.42)$$

$$\text{Var}(y) = \sigma^2(A^T A + R). \quad (2.43)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} h_{PLS}(\beta, \sigma^2, \theta) &= -\frac{n + N_q}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln(|R|) - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \left((y - X\beta - A^T u)^T R^{-1} (y - X\beta - A^T u) + u^T u \right) = \\ &= -\frac{n + N_q}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln(|R|) - \frac{d(\beta, \theta)}{2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Zauważmy, że $d(\beta, \theta)$ przypomina regularyzowaną, ważoną sumę kwadratów, gdzie regularyzacją (karą) określimy $u^T u = \|u\|^2$. W rzeczywistości $d(\cdot)$ można postrzegać jako sumę kwadratów reszt w liniowym modelu regresji:

$$\begin{pmatrix} R^{-1/2} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1/2} A^T & R^{-1/2} X \\ I_{N_q} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \beta \end{pmatrix} \equiv W \begin{pmatrix} u \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

gdzie $R^{-1/2}$ jest górnortrójkątną macierzą z rozkładu Cholesky'ego macierzy R^{-1} . Rozwiązanie $(\tilde{u}^T, \tilde{\beta}^T)^T$ problemu (2.45) spełnia

$$W^T W \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = W^T \begin{pmatrix} R^{-1/2} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

czyli

$$\begin{bmatrix} AR^{-1}A^T + I_{N_q} & AR^{-1}X \\ X^T R^{-1}A^T & X^T R^{-1}X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AR^{-1}y \\ X^T R^{-1}y \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Dla ograniczenia złożoności obliczeniowej i oszczędności pamięci wprowadza się rzadką macierz rozkładu Cholesky'ego:

$$L = \begin{bmatrix} L_Z & 0 \\ L_{ZX} & L_X \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

która spełnia $LL^T = PW^TWP^T$, gdzie ortogonalna macierz P jest macierzą permutacji zdefiniowaną układem niezerowych elementów Z (poprzez odpowiednie permutowanie chcemy, żeby niezerowe elementy macierzy L znajdowały się jak najbliżej przekątnej).

Gdy założymy, że P jest postaci blokowo-diagonalnej

$$P = \begin{bmatrix} P_Z & 0 \\ 0 & P_X \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

to możemy zapisać:

$$\begin{aligned} h_{PLS}(\beta, \sigma^2, \theta) = & -\frac{n + N_q}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln(|R|) - \frac{\tilde{d}(\theta)}{2\sigma^2} - \\ & - \frac{1}{2\sigma^2} \begin{pmatrix} P_Z(u - \tilde{u}) \\ P_X(\beta - \tilde{\beta}) \end{pmatrix}^T LL^T \begin{pmatrix} P_Z(u - \tilde{u}) \\ P_X(\beta - \tilde{\beta}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

gdzie $\tilde{d}(\theta) = d(\beta, \theta) \Big|_{(\tilde{u}^T, \tilde{\beta}^T)^T}$. Wtedy funkcję log-wiarygodności można przedstawić jako

$$\begin{aligned} l_{ML}^*(\beta, \sigma^2, \theta) = & -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln(|R||L_Z|^2) - \frac{\tilde{d}(\theta)}{2\sigma^2} - \\ & - \frac{1}{2\sigma^2} (L_X^T P_X(\beta - \tilde{\beta}))^T L_X^T P_X(\beta - \tilde{\beta}). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dla ustalonego θ estymatorem β jest $\tilde{\beta}(\theta)$, spełniający układ równań (2.46), a estymator σ^2 jest dany wzorem

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{\tilde{d}(\theta)}{n}. \quad (2.52)$$

Przez podstawienie tych estymatorów do $l_{ML}^*(\cdot)$ otrzymujemy:

$$l_{ML}(\theta) = -\frac{1}{2} \ln(|R||L_Z|^2) - \frac{n}{2} \ln \tilde{d}(\theta). \quad (2.53)$$

Maksymalizacja $l_{ML}(\cdot)$ względem parametru θ prowadzi do estymatora $\hat{\theta}_{ML}$, który potem wstawia się do $\hat{\beta}(\theta) = \tilde{\beta}(\theta)$ i $\hat{\sigma}_{ML}^2$.

Ocenę $\hat{\theta}_{REML}$ otrzymuje się przez maksymalizację funkcji

$$l_{REML}(\theta) = -\frac{1}{2} \ln(|R||L_Z|^2|L_X|^2) - \frac{n-p}{2} \ln \tilde{d}(\theta), \quad (2.54)$$

skąd

$$\hat{\sigma}_{REML}^2 = \frac{\tilde{d}(\theta)}{n-p}, \quad (2.55)$$

a $\hat{\beta}(\hat{\theta}_{REML}) = \tilde{\beta}(\hat{\theta}_{REML})$.

Ponieważ estymacja metodą PWLS jest oparta na rozkładzie Cholesky'ego macierzy \mathfrak{D} i wykorzystuje macierz permutacji P , pozwalającą rozrzedzić macierz rozkładu Λ_θ , to metoda ta staje się bardzo wydajna numerycznie. Jest to zaletą, szczególnie przy analizie dużych zbiorów danych.

Oprócz wymienionych wyżej metod estymacji współczynników liniowych modeli mieszanych stosuje się szereg innych metod, spośród których warto wymienić metodę wykorzystującą rozkład QR (patrz definicja 1.1.7). Została ona szczegółowo opisana w [Pinheiro2000].

2.4. Parametryzacja macierzy kowariancji

Głównym problemem przy estymacji współczynników liniowego modelu mieszanego są ograniczenia nałożone na macierze D i R_i . Macierze te jako macierze kowariancji powinny być symetryczne i dodatnio określone. Możliwym rozwiązaniem tego problemu jest takie sparametryzowanie D i R_i , aby problem z ograniczeniami stał się problemem bez ograniczeń.

2.4.1. Parametryzacja macierzy R_i

Rozpatrzmy rozkład macierzy R_i postaci

$$R_i = \Delta_i C_i \Delta_i, \quad (2.56)$$

gdzie Δ_i jest macierzą diagonalną z nieujemnymi elementami, a C_i jest macierzą korelacji. Obydwie macierze są rozmiaru $n_i \times n_i$. Macierz Δ_i pozwala uwzględnić heteroskedastyczność błędów losowych, podczas gdy C_i uwzględnia korelację wewnątrzgrupową błędów. Przyjmijmy założenie, że macierz C_i jest określona przez elementy wektora ρ , czyli $C_i = C_i(\rho)$, a macierz Δ_i określają elementy wektora δ : $\Delta_i = \Delta_i(\delta)$.

Elementy wektora δ ograniczone do liczb rzeczywistych dodatnich można wyrazić jako

$$\delta_i = e^{\delta_i^*}, \quad (2.57)$$

gdzie $\delta_i^* = \ln \delta_i$ i do estymacji używać nieograniczonych parametrów δ_i^* .

Wybór macierzy C_i jako macierzy korelacji jest ograniczony do zbioru macierzy symetrycznych i dodatnio określonych. Trzeba zatem tak przetransformować macierz C_i , żeby pozbyć się ograniczeń na zbiór jej elementów. Opisane zostaną trzy przykładowe transformacje.

1. Jeśli C_i jest macierzą korelacji opisującą autokorelację błędów rzędu 1 (AR(1)):

$$C_i(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n_i-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n_i-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n_i-2} & \dots & \rho & 1 & \rho \\ \rho^{n_i-1} & \dots & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

to możemy użyć z-transformacji Fishera dla ρ :

$$\rho^* = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (2.59)$$

Takie przekształcenie elementów macierzy C_i pozwala na estymację bez ograniczeń - zbiór parametrów ρ^* jest nieograniczony. Z postaci transformacji odwrotnej

$$\rho = \frac{e^{\rho^*} - 1}{e^{\rho^*} + 1} \quad (2.60)$$

zagwarantowane jest, że parametry $\rho \in (-1, 1)$ i macierz jest nieujemnie określona: $C_i \geq 0$.

2. Jeśli C_i jest macierzą korelacji o postaci niezmienniczej na permutacje, czyli

$$C_i(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho & \dots & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \dots & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

wystarczy, żeby wartości własne macierzy C_i postaci $1 + (n_i - 1)\rho$ i $1 - \rho$ były dodatnie. Stąd używa się zmodyfikowanej z-transformacji Fishera:

$$\rho^* = \ln \frac{\frac{1}{n_i-1} + \rho}{1 - \rho}. \quad (2.62)$$

Tak jak poprzednio, transformacja odwrotna gwarantuje dobre właściwości parametrów ρ i macierzy C_i .

Zauważmy, że jeśli parametr ρ jest wspólny dla wszystkich grup i grupy różnią się rozmiarami, to transformacja

$$\rho^* = \ln \frac{\frac{1}{n^*-1} + \rho}{1 - \rho}, \quad (2.63)$$

gdzie $n^* = \max(n_i)$ daje pożądane własności przekształconych parametrów ρ^* .

3. Rozwiązaniem dla ogólnej postaci macierzy korelacji C_i , gdzie

$$C_i(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1n_i} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2n_i} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1(n_i-1)} & \cdots & \rho_{(n_i-2)(n_i-1)} & 1 & \rho_{(n_i-1)n_i} \\ \rho_{1n_i} & \cdots & \rho_{(n_i-2)n_i} & \rho_{(n_i-1)n_i} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

jest użycie rozkładu Cholesky'ego macierzy C_i (patrz definicja (1.1.4)). Niech

$$C_i = U_i^T U_i, \quad (2.65)$$

gdzie macierz U_i jest macierzą górnotrójkątną. Rozkład ten pozwala wyrazić ρ jako funkcję elementów macierzy U_i . Tworzą one zbiór nieograniczony, który może ułatwić obliczenia numeryczne. Warto zauważyć, że relacja pomiędzy ρ a elementami U_i jest złożona i trudno używać ich na przykład do określania przedziałów ufności dla ρ . Więcej szczegółów można znaleźć w [Pinheiro1996].

Korelacja błędów losowych w niektórych modelach może przyjmować strukturę przestrzenną. Dla takich struktur częstym ograniczeniem na współczynnik ρ jest $\rho > 0$. Wtedy, żeby pozbyć się tego ograniczenia wystarczy zastąpić ρ przez $\ln(\rho)$. Szczegóły można znaleźć w [Burzykowski2011].

Niestety dla większości struktur kowariancji nie ma gwarancji na istnienie takiej transformacji parametrów, żeby lepiej i szybciej estymować parametry macierzy C_i .

2.4.2. Parametryzacja macierzy D

Parametryzację macierzy D kowariancji efektów losowych w modelu przeprowadza się analogicznie do parametryzacji macierzy R_i - macierzy kowariancji błędów losowych modelu. Jeśli założymy, że macierz D jest postaci AR(1) (patrz punkt 1. podrozdziału 2.4.1) lub jest niezmiennicza ze względu na permutacje (patrz punkt 2. podrozdziału 2.4.1 lub podrozdział 3.4), to używając log-transformacji dla wariancji i z-transformacji Fishera dla korelacji, otrzymamy problem estymacji parametrów modelu na nieograniczonym zbiorze. Do estymacji współczynników macierzy D stosuje się również rozkład Cholesky'ego.

Jeszcze innym podejściem do uzyskania nieograniczonej parametryzacji macierzy D jest użycie logarytmu macierzy ([Pinheiro1996]), który zostanie zdefiniowany poniżej. Macierz D można przedstawić w postaci

$$D = QTQ^T. \quad (2.66)$$

Jest to rozkład LDL (patrz definicja 1.1.6) dla kwadratowej macierzy symetrycznej, gdzie T jest macierzą diagonalną o dodatnich elementach:

$$T = \text{diag}(t_1, \dots, t_q), \quad (2.67)$$

a Q jest macierzą ortogonalną.

Niech $\ln(T)$ będzie macierzą, taką że

$$\ln(T) = \text{diag}(\ln(t_1), \dots, \ln(t_q)). \quad (2.68)$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$D^* = Q \ln(T) Q^T, \quad (2.69)$$

zachodzi wtedy

$$D = e^{D^*}, \quad (2.70)$$

gdzie

$$e^{D^*} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^*)^k}{k!}. \quad (2.71)$$

Stąd D^* nazywamy logarytmem macierzy D . Relacja $D = e^{D^*}$ pozwala wyrazić parametry θ_D jako funkcję parametrów górnego trójkąta macierzy D^* . Tworzą one nieograniczony zbiór parametrów, ułatwiając estymację.

W niektórych sytuacjach rozwiązania problemu optymalizacji nie zapewniają dodatniej określoności macierzy D . Rozpatruje się wtedy model brzegowy określony wzorem (2.17), w którym macierzą kowariancji jest $\mathcal{V}_i(\theta) = \sigma^2(Z_i D(\theta_D) Z_i^T + R_i(\theta_R))$. Wystarczy wtedy założyć dodatnią określoność macierzy \mathcal{V}_i i symetryczność macierzy D .

Rozdział 3

Dopasowanie modelu i struktury korelacji

3.1. Diagnostyka liniowego modelu mieszanego

Żeby móc wyciągać konstruktywne wnioski na podstawie dopasowanego liniowego modelu mieszanego, trzeba najpierw przeprowadzić jego diagnostykę, czyli trzeba sprawdzić, czy założenia modelu są spełnione. Dwa główne to: założenie normalności efektów losowych b_i i założenie normalności błędów losowych ε_i . Zanim przystąpimy do wnioskowania warto również zbadać wpływ obserwacji odstających.

3.1.1. Badanie normalności efektów losowych b_i

W teorii liniowych modeli mieszanych zakłada się, że efekty losowe b_i są nieobserwowalnymi realizacjami zmiennej losowej \mathcal{B} , która ma rozkład normalny o średniej zero i macierzy kowariancji $\sigma^2 D$. Aby zweryfikować to założenie potrzebne są predykcje wartości b_i . Przeważnie używa się do tego wzoru

$$\hat{b}_i = \hat{D}Z_i\hat{V}_i^{-1}(y_i - X_i\hat{\beta}). \quad (3.1)$$

Estymator \hat{b}_i postaci (3.1) to tak zwany BLUP (ang. *best linear unbiased predictor*, czyli najlepszy nieobciążony liniowy predyktor) efektów b_i . Jest on również nazywany EBLUP (ang. *empirical best unbiased linear predictor*, czyli najlepszy empiryczny nieobciążony liniowy predyktor), ze względu na użycie empirycznych macierzy \hat{V}_i i \hat{D} .

Mając oszacowane wartości b_i , warto jest przyjrzeć się ich wykresowi kwantyl-kwantyl (wykres q-q) lub histogramowi. Trzeba jednak pamiętać, że nie jest to dokładna metoda, ponieważ obserwowany rozkład \hat{b}_i nie musi odzwierciedlać prawdziwego rozkładu zmiennej \mathcal{B} (szczegóły w [Verbeke2000]). Mimo tego, wykresy te mogą pomóc w wykrywaniu obserwacji odstających.

W praktyce sprawdzanie założenia o normalności efektów losowych b_i powinno opierać się na porównywaniu wyników dopasowywania liniowego modelu mieszanego dopasowywanego bez założenia o normalności i z takim założeniem (więcej w [Verbeke2000]).

Warto podkreślić, że pomimo braku normalności rozkładu efektów losowych b_i nadal można wnioskować o efektach stałych β .

3.1.2. Diagnostyka reszt

Analogicznie jak dla zwykłych modeli liniowych diagnozując model mieszany bada się zachowanie reszt z modelu.

Można badać dwa rodzaje reszt:

1. reszty warunkowe postaci

$$\hat{\varepsilon}_{C,i} = y_i - X_i\hat{\beta} - Z_i\hat{b}_i, \quad (3.2)$$

gdzie \hat{b}_i jest dane wzorem (3.1).

2. reszty brzegowe postaci

$$\hat{\varepsilon}_{M,i} = y_i - X_i\hat{\beta}. \quad (3.3)$$

Ponieważ reszty te mogą być skorelowane, żadna z powyższych postaci nie jest odpowiednia do bezpośredniej diagnostyki. Należy zatem badać odpowiednio przetransformowane reszty, które są nieskorelowane:

$$\hat{\varepsilon}_{C,i}^* = (\hat{\sigma}\hat{U}_{C,i}^T)^{-1}\hat{\varepsilon}_{C,i}, \quad (3.4)$$

gdzie $\hat{U}_{C,i}$ pochodzi z rozkładu Cholesky'ego macierzy \hat{R}_i lub

$$\hat{\varepsilon}_{M,i}^* = (\hat{\sigma}\hat{U}_{M,i}^T)^{-1}\hat{\varepsilon}_{M,i}, \quad (3.5)$$

gdzie $\hat{U}_{M,i}$ pochodzi z rozkładu Cholesky'ego macierzy \hat{V}_i . Czyli zachodzi

$$\hat{U}_{C,i}^T\hat{U}_{C,i} = \hat{R}_i \quad (3.6)$$

oraz

$$\hat{U}_{M,i}^T\hat{U}_{M,i} = \hat{V}_i. \quad (3.7)$$

Wtedy $\hat{\varepsilon}_{C,i}^*$ i $\hat{\varepsilon}_{M,i}^*$ mają asymptotyczny rozkład normalny o średniej zero i jednostkowej wariancji.

3.2. Testowanie istotności współczynników

3.2.1. Testowanie hipotez dotyczących efektów stałych

Hipotezy dotyczące efektów stałych modelu, czyli parametrów β testuje się tymi samymi metodami co dla liniowych modeli ze skorelowanymi błędami (uogólnionych modeli liniowych). W szczególności liniowe hipotezy weryfikuje się przy użyciu testu F.

Alternatywnie można używać do testowania istotności współczynników β testu ilorazu wiarygodności (ang. *likelihood ratio test* (LRT)). Test LRT wykorzystuje różnicę logarytmów wiarygodności dwóch zagnieżdżonych modeli (parametry modelu zagnieżdżonego stanowią podzbiór parametrów modelu zagnieżdżającego) do oceny statystycznej istotności parametrów, którymi różnią się dane modele. W przypadku, gdy testujemy istotność efektów stałych, oba modele muszą być dopasowane metodą ML. Statystyka testowa jest postaci

$$LR = -2(l(\hat{\theta}_1) - l(\hat{\theta}_2)), \quad (3.8)$$

gdzie $l(\cdot)$ jest funkcją log-wiarygodności danego modelu osiągającą maksimum w $\hat{\theta}_1$ dla modelu zagnieżdżonego i w $\hat{\theta}_2$ dla modelu zagnieżdżającego, gdzie $\hat{\theta}_1 \in \Theta_1$, $\hat{\theta}_2 \in \Theta_2$ i $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$. Hipotezą jest

$$H_0 : \beta_{i_1} = \dots = \beta_{i_k} = 0 \text{ vs } H_A : \exists_{j \in \{1, \dots, k\}} \beta_{i_j} \neq 0, \quad (3.9)$$

gdzie zbiór $\{i_1, \dots, i_k\}$ jest zbiorem indeksów parametrów wektora β , które zostały usunięte z modelu zagnieżdżającego. Ponieważ model z większą ilością parametrów (zagnieżdżający) zawsze osiąga większe maksimum funkcji log-wiarygodności, test LRT pozwala określić czy różnica maksimów logarytmów wiarygodności obu modeli jest istotnie różna od zera. Asymptotycznym rozkładem statystyki testowej jest rozkład χ^2 z liczbą stopni swobody równą różnicy liczby parametrów, którą różnią się badane modele.

3.2.2. Testowanie hipotez dotyczących efektów losowych b

Testowanie hipotez dotyczących efektów losowych polega na testowaniu hipotez dotyczących parametrów macierzy wariancji efektów losowych b . Do weryfikacji tych hipotez używa się testu LRT (patrz poprzedni podrozdział, wzór (3.8)). Przy używaniu tego testu trzeba zwracać szczególną uwagę na położenie wartości parametrów związanych z hipotezą zerową. Jeśli należą one do wnętrza przestrzeni parametrów, to granicznym rozkładem statystyki testowej LR jest rozkład χ^2 z liczbą stopni swobody równą różnicy liczby parametrów, którą różnią się badane modele. Jeśli natomiast wartości parametrów z hipotezy zerowej leżą na brzegu przestrzeni parametrów, to statystyka LR nie ma rozkładu χ^2 . W niektórych przypadkach daje się pokazać, że jej rozkład jest mieszaniną rozkładów χ^2 z różnymi liczbami stopni swobody (szczegóły w [Stram1994]).

Jeden efekt losowy

Żeby dany efekt mógł być traktowany jako losowy, jego wariancja powinna być istotnie różna od zera, zatem chcemy weryfikować hipotezę

$$H_0 : Var(b_1) = 0 \text{ vs } H_A : Var(b_1) > 0, \quad (3.10)$$

gdzie b_1 oznacza jedyny efekt losowy w modelu. Zauważmy, że 0 leży na brzegu przestrzeni dopuszczalnych wartości wariancji (dla dowolnej zmiennej losowej X , $Var(X) \geq 0$). W tym przypadku asymptotycznym rozkładem statystyki testowej LR jest następująca mieszanina rozkładów χ^2 : $\frac{1}{2}\chi_0^2 + \frac{1}{2}\chi_1^2$. Ten symboliczny zapis oznacza, że zmienna losowa, którą jest statystyka LR ma dystrybuantę postaci

$$F_{LR}(x) = \frac{1}{2}F_{\chi_0^2}(x) + \frac{1}{2}F_{\chi_1^2}(x), \quad (3.11)$$

gdzie $F_{\chi_i^2}(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu χ^2 o i stopniach swobody.

Liczba efektów losowych: k vs $k + 1$

Dla ustalonego zbioru efektów losowych chcemy testować hipotezę zerową mówiącą, że w modelu powinno być k efektów losowych przeciwko hipotezie alternatywnej mówiącej, że w modelu jest $k + 1$ efektów losowych. Czyli w obu modelach macierze X_i efektów stałych są takie same, natomiast w modelu zerowym macierz kowariancji efektów losowych jest dodatnio określoną, symetryczną macierzą rozmiaru $k \times k$, a w modelu alternatywnym dodatnio określoną, symetryczną macierzą rozmiaru $(k + 1) \times (k + 1)$.

Niech l_{ML}^0 i l_{ML}^1 będą maksimami funkcji log-wiarygodności odpowiednio modelu zerowego i modelu alternatywnego wyestymowanymi metodą ML. Statystyka testu LRT to

$$LR_{ML} = -2(l_{ML}^0 - l_{ML}^1). \quad (3.12)$$

Analogicznie dla metody REML

$$LR_{REML} = -2(l_{REML}^0 - l_{REML}^1). \quad (3.13)$$

Wtedy obie te statystyki asymptotycznie mają rozkład $\frac{1}{2}\chi_k^2 + \frac{1}{2}\chi_{(k+1)}^2$ będący mieszaniną rozkładów χ^2 , czyli zmienna losowa, którą jest statystyka LR ma dystrybuantę postaci

$$F_{LR}(x) = \frac{1}{2}F_{\chi_k^2}(x) + \frac{1}{2}F_{\chi_{(k+1)}^2}(x), \quad (3.14)$$

gdzie $F_{\chi_i^2}(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu χ^2 o i stopniach swobody.

Liczba efektów losowych: k vs $k + k'$

Dla ustalonych efektów stałych chcemy weryfikować hipotezę zerową mówiącą, że w modelu powinno być k efektów losowych przeciwko hipotezie alternatywnej mówiącej, że w modelu powinno być $k + k'$ efektów losowych, gdzie $k' > 1$.

Dla przykładu jeśli hipoteza zerowa mówi, że w modelu występuje k nieskorelowanych efektów losowych, a hipoteza alternatywna stwierdza, że w modelu powinno być $k + k'$ nieskorelowanych efektów losowych (macierze wariancji efektów losowych D_k i $D_{k+k'}$ są diagonalne), to wtedy przy prawdziwej hipotezie zerowej asymptotycznym rozkładem statystyki testowej LR jest

$$\sum_{m=0}^{k'} 2^{-k'} \binom{k'}{m} \chi_m^2, \quad (3.15)$$

czyli zmienna losowa, którą jest statystyka LR ma dystrybuantę postaci

$$F_{LR}(x) = \sum_{m=0}^{k'} 2^{-k'} \binom{k'}{m} F_{\chi_m^2}(x), \quad (3.16)$$

gdzie $F_{\chi_i^2}(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu χ^2 o i stopniach swobody.

Jak pokazano w [Shapiro1988] rozkładem asymptotycznym statystyki testowej LR określonej wzorem (3.12) lub (3.13) jest mieszanina rozkładów χ^2 . Wagi stojące przy rozkładach tej mieszaniny analitycznie daje się obliczyć tylko dla bardzo szczególnych postaci macierzy kowariancji efektów losowych, natomiast dla pozostałych przypadków estymacja tych wag staje się zadaniem nietrywialnym obliczeniowo i numerycznie.

3.3. Wybór modelu

Jednym z trudniejszych problemów w teorii statystyki matematycznej jest zagadnienie wyboru modelu. Żeby móc prawidłowo wnioskować na podstawie dopasowanego modelu, trzeba jak najlepiej odwzorować zależności między danymi, co łączy się z wyborem odpowiedniego modelu. W klasycznych modelach liniowych problem ten ograniczał się do (także niełatwego) zagadnienia wyboru zmiennych do modelu i wyboru funkcji transformujących zmienne objaśniające, czy zmienną objaśnianą. W przypadku liniowych modeli mieszanych dochodzi jeszcze zagadnienie wyboru odpowiednich zmiennych, które będą traktowane jako losowe, a także dobór struktury korelacji błędów losowych ε i struktury korelacji efektów losowych b .

W kolejnych podrozdziałach znajdują się opisy kryteriów i współczynników jakości dopasowania modelu do danych, które mogą być pomocne przy wyborze modelu lub struktur korelacji w liniowym modelu mieszanym.

3.3.1. Kryteria informacyjne: GIC, AIC i BIC

Analogicznie jak dla zwykłych modeli liniowych, przy wyborze liniowego modelu mieszanego można posługiwać się kryteriami informacyjnymi. Kryterium GIC jest ogólnym kryterium informacyjnym (ang. *generalized information criterion*) postaci:

$$GIC(model(\theta), c) = -2l_{model(\theta)} + |\theta| \cdot c, \quad (3.17)$$

gdzie $l_{model(\theta)}$ jest funkcją log-wiarygodności badanego modelu, θ jest wektorem parametrów badanego modelu, $|\theta|$ jest liczbą parametrów modelu, a c jest karą za liczbę parametrów.

Kryteria AIC i BIC są szczególnymi przypadkami ogólnego kryterium GIC:

1. Kryterium AIC (Akaike, 1973), wyraża się wzorem:

$$AIC(model(\theta)) = GIC(model(\theta), 2) = -2l_{model(\theta)} + 2 \cdot |\theta|, \quad (3.18)$$

gdzie $l_{model(\theta)}$ jest funkcją log-wiarygodności badanego modelu, a $|\theta|$ jest liczbą parametrów modelu.

2. Kryterium BIC (Schwarz, 1978), wyraża się wzorem:

$$BIC(model(\theta)) = GIC(model(\theta), \ln n) = -2l_{model(\theta)} + |\theta| \cdot \ln n, \quad (3.19)$$

gdzie $l_{model(\theta)}$ jest funkcją log-wiarygodności badanego modelu, $|\theta|$ jest liczbą parametrów modelu, a n jest liczbą obserwacji.

Warto zwrócić uwagę, że kara za liczbę parametrów w modelu jest większa dla kryterium BIC, zatem będzie ono wskazywać mniejsze modele. Minimalizując wybrane kryterium informacyjne dostajemy szukany model. Niestety nie jest to optymalna metoda wyboru modelu, ponieważ funkcja, którą wyraża się dane kryterium, może mieć na przykład kilka minimów lokalnych i można w wyniku nie dostać najlepszego modelu.

W dalszych podrozdziałach opisanych jest kilka współczynników, które oprócz kryteriów informacyjnych można stosować w rozwiązywaniu zagadnienia wyboru liniowego modelu mieszanego.

3.3.2. Współczynnik *PRESS* dla modeli mieszanych

Współczynnikiem *PRESS* (ang. *predicted residual sum of squares*) nazywamy wskaźnik wprowadzony i opisany przez D. Allena w 1974 roku w pracy [Allen1974], który mierzy różnicę pomiędzy obserwowanymi wartościami a ich predykcją, gdzie wartość i -tej predykcji uzyskuje się z modelu bez i -tej grupy (ang. *leave-one-group prediction*). Dla modeli mieszanych istnieją dwa rodzaje predykcji reszt z modelu:

1. warunkowa:

$$\hat{\varepsilon}_{C,(i)} = y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)} - z_i^T \hat{b}_{(i)}, \quad (3.20)$$

2. brzegowa:

$$\hat{\varepsilon}_{M,(i)} = y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)}, \quad (3.21)$$

gdzie indeks $\cdot_{(i)}$ oznacza wartości oszacowań dla modelu opartego na danych bez i -tej grupy.

Wtedy

$$PRESS_C = \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_{C,(i)}^T \hat{\varepsilon}_{C,(i)} \quad (3.22)$$

oraz

$$PRESS_M = \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_{M,(i)}^T \hat{\varepsilon}_{M,(i)}. \quad (3.23)$$

Żeby nie estymować N razy parametrów modelu na danych bez kolejnych grup obserwacji, korzysta się z macierzy rzutu na przestrzeń rozpiętą przez kolumny macierzy X , tak zwanej macierzy daszkowej (ang. *hat matrix*). Macierz ta jest macierzą idempotentną (patrz definicja (1.1.1)). Dla modeli liniowych macierz daszkowa jest postaci $H = X(X^T X)^{-1} X^T$ oraz zachodzi

$$\hat{\varepsilon}_{(i)} = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{1 - h_{ii}}, \quad (3.24)$$

gdzie $\hat{\varepsilon}_i$ jest i-tą resztą z modelu, a h_{ii} jest i-tym elementem przekątnej macierzy H .

Podobnie, dla liniowych modeli mieszanych wykorzystuje się macierz daszkową postaci (patrz [Christensen1992]):

$$\hat{H} = X(X^T \hat{V}^{-1} X)^{-1} X^T \hat{V}^{-1}, \quad (3.25)$$

gdzie \hat{V} jest macierzą kowariancji reszt z modelu wyestymowanego na pełnych danych. Macierz \hat{H} nie jest prawdziwą macierzą rzutu na przestrzeń rozpiętą przez kolumny X , nie jest też symetryczna, ale jest idempotentna i według autorów [Christensen1992] jest dobrym rzutem. Niech

$$A = \sum_{i=1}^N (X_i^T \hat{V}_i^{-1} X_i) \quad (3.26)$$

oraz

$$B = \sum_{i=1}^N (X_i^T \hat{V}_i^{-1} y_i), \quad (3.27)$$

gdzie X_i jest macierzą eksperymentu dla i-tej grupy, \hat{V}_i jest macierzą korelacji komponentów losowych dla i-tej grupy, a y_i jest wektorem zmiennej objaśnianej dla i-tej grupy dla modelu brzegowego lub warunkowego, wtedy zachodzi:

$$\hat{\beta} = A^{-1} B. \quad (3.28)$$

Niech ponadto

$$A_i = A - X_i^T \hat{V}_i^{-1} X_i \quad (3.29)$$

oraz

$$B_i = B - X_i^T \hat{V}_i^{-1} y_i, \quad (3.30)$$

wtedy $\hat{\beta}_{(i)} = A_i^{-1} B_i$, gdzie $\hat{\beta}_{(i)}$ jest wektorem efektów stałych dla modelu bez i-tej grupy. Jeśli przyjmiemy oznaczenie $\hat{Q} = I - \hat{H}$, to

$$\hat{\varepsilon}_{(i)} = \hat{Q}_{ii}^{-1} \hat{\varepsilon}_i, \quad (3.31)$$

gdzie \hat{Q}_{ii} jest blokiem z przekątnej macierzy \hat{H} odpowiadającym obserwacjom z i-tej grupy.

Dowody powyższych faktów można znaleźć w [Liu1999], skąd został zaczerpnięty opis współczynnika *PRESS*.

Współczynnik *PRESS* może służyć do wykrywania obserwacji odstających oraz do porównywania modeli ze sobą - im mniejsza wartość wskaźnika *PRESS*, tym lepsze dopasowanie modelu do danych. Żeby stwierdzić jednak czy wartość tego współczynnika jest mała czy duża, trzeba odnieść się do innego modelu dopasowanego na tych samych danych.

3.3.3. Współczynniki R^2 dla modeli mieszanych

Współczynniki R^2 dla modeli mieszanych są analogami klasycznego współczynnika R^2 dla modeli liniowych i stanowią miarę dopasowania modelu do danych. Tak jak zwykły wskaźnik R^2 , współczynniki R^2 dla modeli mieszanych są miarą jednowymiarową, której wartości należą do przedziału $[0, 1]$. Główną zaletą współczynników R^2 dla modeli mieszanych jest to, że pozwalają one bezpośrednio porównywać ze sobą modele niezagnieżdżone (modele zagnieżdżone można efektywnie porównywać testem ilorazu wiarygodności, patrz podrozdział (3.2.2)).

W poniższych podrozdziałach opisane zostały trzy rodzaje współczynników R^2 dla liniowych modeli mieszanych:

1. klasyczny współczynnik R^2 ,
2. współczynnik R_W^2 oparty na statystyce Walda,
3. współczynnik R_{LR}^2 oparty na ilorazie wiarygodności.

Pierwsze dwa z wyżej wymienionych wskaźników opierają się na resztach z badanego modelu, czyli $\hat{\varepsilon}$. Ponieważ dla modeli mieszanych reszty z modelu mogą być w dwóch postaciach: warunkowej i brzegowej (patrz podrozdział (3.1.2)), również te wskaźniki R^2 mogą mieć dwie postaci.

Wszystkie opisane dalej współczynniki R^2 dla modeli mieszanych mogą dawać różne wartości dla tego samego modelu, stąd pewna dowolność przy wyborze, którym wskaźnikiem się kierować. W szczególności zastosowane do zwykłej regresji liniowej dadzą ten sam wynik. Wskaźniki R^2 wymienione poniżej rosną wraz ze wzrostem liczby parametrów modelu, aby temu zapobiec, koryguje się ich wartości, dodając karę za liczbę parametrów modelu. Skorygowane wartości współczynników R^2 (ang. *adjusted R²*) będziemy oznaczać indeksem \cdot_{adj} .

Klasyczny współczynnik R^2 dla liniowych modeli mieszanych

Klasycznym współczynnikiem R^2 nazywamy wskaźnik postaci:

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{(y - \bar{y})^T (y - \bar{y})}, \quad (3.32)$$

gdzie $\hat{\varepsilon} = y - \hat{y}$ są resztami z badanego modelu, a \hat{y} jest predykcją wartości y z modelu.

Ponieważ są dwa rodzaje reszt z modelu (patrz podrozdział (3.1.2)), współczynnik R^2 dla modeli mieszanych może być liczony na dwa sposoby:

1. Przy użyciu reszt warunkowych

$$R_C^2 = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}_C^T \hat{\varepsilon}_C}{(y - \bar{y})^T (y - \bar{y})}, \quad (3.33)$$

gdzie $\hat{\varepsilon}_C = y - \hat{y}_C = y - (X\hat{\beta} + Z\hat{b})$.

2. Przy użyciu reszt brzegowych

$$R_M^2 = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}_M^T \hat{\varepsilon}_M}{(y - \bar{y})^T (y - \bar{y})}, \quad (3.34)$$

gdzie $\hat{\varepsilon}_M = y - \hat{y}_M = y - X\hat{\beta}$.

Żeby zapobiec wzrostowi współczynnika R^2 wraz ze wzrostem liczby parametrów modelu, można skorygować otrzymane współczynniki na dwa sposoby:

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{n}{n-p}(1 - R^2) \quad (3.35)$$

lub

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{n}{n - (p + |\theta|)}(1 - R^2), \quad (3.36)$$

gdzie n jest liczbą obserwacji, p jest liczbą kolumn (rzędem) macierzy X , $|\theta|$ jest długością wektora parametrów korelacji θ , a R^2 jest oparty na resztach warunkowych lub brzegowych.

Współczynnik R^2 oparty na statystyce Walda

Współczynnik R^2 oparty na statystyce Walda po raz pierwszy został zaproponowany w roku 1973 przez A. Buse w pracy [Buse1973]. Jednak dopiero w 1990 roku L. Magee w pracy [Magee1990] opisał zastosowanie tego współczynnika do badania jakości dopasowania liniowych modeli mieszanych.

Współczynnik R^2 oparty na statystyce Walda wyraża się wzorem:

$$R_W^2 = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}^T V^{-1} \hat{\varepsilon}}{(y - \bar{y})^T V^{-1} (y - \bar{y})}, \quad (3.37)$$

gdzie $\hat{\varepsilon}$ jest wektorem reszt z modelu, czyli $\hat{\varepsilon} = y - \hat{y}$, gdzie y jest wektorem zmiennej objaśnianej, a \hat{y} jest wektorem predykcji wartości y z modelu, V jest macierzą kowariancji reszt z modelu oraz \bar{y} jest wektorem wartości średniej z y .

Analogicznie jak dla klasycznego współczynnika R^2 , współczynnik R_W^2 dla modeli mieszanych może być liczony na dwa sposoby:

1. Przy użyciu reszt warunkowych

$$R_{W,C}^2 = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}_C^T V^{-1} \hat{\varepsilon}_C}{(y - \bar{y})^T V^{-1} (y - \bar{y})}, \quad (3.38)$$

gdzie $\hat{\varepsilon}_C = y - \hat{y}_C = y - (X\hat{\beta} + Z\hat{b})$.

2. Przy użyciu reszt brzegowych

$$R_{W,M}^2 = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}_M^T V^{-1} \hat{\varepsilon}_M}{(y - \bar{y})^T V^{-1} (y - \bar{y})}, \quad (3.39)$$

gdzie $\hat{\varepsilon}_M = y - \hat{y}_M = y - X\hat{\beta}$.

Wskaźnik $R_{W,M}^2$ jest prostszym wskaźnikiem, ponieważ nie wymaga użycia predykcji efektów losowych b . Tak jak klasyczny R^2 , współczynnik R^2 oparty na statystyce Walda można korygować ze względu na liczbę parametrów modelu na dwa sposoby:

$$R_{W,adj}^2 = 1 - \frac{n}{n-p} (1 - R_W^2) \quad (3.40)$$

lub

$$R_{W,adj}^2 = 1 - \frac{n}{n - (p + |\theta|)} (1 - R_W^2), \quad (3.41)$$

gdzie n jest liczbą obserwacji, p jest liczbą kolumn (rzędem) macierzy X , $|\theta|$ jest długością wektora parametrów korelacji θ , a R_W^2 jest wskaźnikiem opartym na resztach warunkowych lub brzegowych.

Współczynnik R^2 oparty na ilorazie wiarygodności

Współczynnik R^2 oparty na ilorazie wiarygodności dla modeli mieszanych został zdefiniowany przez L. Magee w 1990 roku w pracy [Magee1990]. Bazuje on na porównaniu badanego modelu z modelem zawierającym jedynie stałą.

Współczynnik R^2 oparty na ilorazie wiarygodności wyraża się wzorem:

$$R_{LR}^2 = 1 - \exp \left(-\frac{2}{n} |l_{model}(\hat{\theta}_1) - l_0(\hat{\theta}_0)| \right), \quad (3.42)$$

gdzie $l_{model}(\hat{\theta}_1)$ jest maksimum funkcji log-wiarygodności badanego modelu, $l_0(\hat{\theta}_0)$ jest maksimum funkcji log-wiarygodności modelu opartego tylko na stałej, a n jest liczbą obserwacji.

3.3.4. Współczynnik CCC dla modeli mieszanych

Współczynnikiem zgodności korelacji (ang. *concordance correlation coefficient*), czyli współczynnikiem CCC nazywamy wskaźnik mierzący zgodność dwóch zmiennych, to znaczy, jest to miara, która określa jak duża jest wariancja odchyłeń różnic dwóch zmiennych od zera (czyli jak bardzo wykres jednej zmiennej względem drugiej odbiega od linii 45°).

Współczynnik CCC wyraża stosunek wariancji odchyłeń różnic dwóch zmiennych od zera i wariancji odchyłeń różnic tych zmiennych od zera przy założeniu niezależności badanych zmiennych.

Wskaźnik CCC określony jest wzorem:

$$\begin{aligned}\rho_C &= 1 - \frac{\mathbb{E}(Y_1 - Y_2)^2}{\mathbb{E}_{n\text{zal}}(Y_1 - Y_2)^2} = \\ &= \frac{2\sigma_{Y_1 Y_2}^2}{\sigma_{Y_1 Y_1}^2 + \sigma_{Y_2 Y_2}^2 + (\mu_{Y_1} - \mu_{Y_2})^2},\end{aligned}\quad (3.43)$$

gdzie $\mathbb{E}_{n\text{zal}}(\cdot)$ oznacza wartość oczekiwaną przy założeniu niezależności zmiennych, dla których jest ona obliczana, $\sigma_{Y_1 Y_2}^2$ jest kowariancją zmiennych Y_1 i Y_2 , $\sigma_{Y_i Y_i}^2$ jest wariancją zmiennej Y_i , a μ_{Y_i} jest wartością oczekiwaną zmiennej Y_i .

W 1996 roku E.F. Vonesh w pracy [Vonesh1996] zaproponował użycie współczynnika CCC do oceny dopasowania liniowego modelu mieszanego. Jeśli za Y_1 weźmiemy wektor zmiennej objaśnianej y , a za Y_2 wektor \hat{y} predykcji y z modelu, to współczynnik CCC dla modelu mieszanego to:

$$\hat{\rho}_C = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^T (y_i - \hat{y}_i)}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^T (y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^T (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}) + n(\bar{y} - \bar{\hat{y}})^2}, \quad (3.44)$$

gdzie y_i jest wektorem zmiennej objaśnianej w i -tej grupie, \hat{y}_i jest wektorem predykcji wektora y_i z modelu, \bar{y} jest średnią wartością y , a $\bar{\hat{y}}$ jest średnią wartością \hat{y} oraz n jest liczbą obserwacji.

Tak jak współczynnik R_W^2 , współczynnik CCC dla modeli mieszanych ma dwie postaci:

1. warunkową, gdy za predykcje \hat{y} użyjemy predykcji z modelu warunkowego, czyli $\hat{y} = X\hat{\beta} + Z\hat{b}$,

2. brzegową, gdy za predykcje \hat{y} użyjemy predykcji z modelu brzegowego, czyli $\hat{y} = X\hat{\beta}$.

Współczynnik $\hat{\rho}_C$ jest zatem miarą zgodności obserwowanych wartości y i predykcji z badanego modelu.

Analogicznie jak dla współczynników R^2 i R^2 opartego na statystyce Walda, żeby zapobiec wzrostowi współczynnika CCC wraz ze wzrostem liczby parametrów modelu, można skorygować otrzymane współczynniki na dwa sposoby:

$$\hat{\rho}_{C,adj} = 1 - \frac{n}{n-p}(1 - \hat{\rho}_C) \quad (3.45)$$

lub

$$\hat{\rho}_{C,adj} = 1 - \frac{n}{n-(p+|\theta|)}(1 - \hat{\rho}_C), \quad (3.46)$$

gdzie n jest liczbą obserwacji, p jest liczbą kolumn (rzędem) macierzy X , $|\theta|$ jest długością wektora parametrów korelacji θ , a $\hat{\rho}_C$ jest oparty na resztach warunkowych lub brzegowych.

3.4. Struktury korelacji komponentów losowych

W liniowym modelu mieszanym występują dwa rodzaje struktur korelacji: struktura korelacji efektów losowych b oraz struktura korelacji błędów losowych ε . Sformułowanie modelu zakłada ogólne postaci macierzy D i macierzy R , które są macierzami korelacji odpowiednich komponentów losowych modelu.

Dla celów obliczeniowych lub interpretacyjnych warto narzucić z góry pewne struktury na macierze D i R . Jednym z głównych problemów analizy danych przy użyciu liniowych modeli mieszanych jest, oprócz wyboru zmiennych do modelu, właśnie wybór odpowiednich struktur korelacji. W rozdziale 4. opisane jest symulacyjne studium wyboru struktur korelacji komponentów losowych liniowego modelu mieszanego.

W dalszych podrozdziałach zostaną opisane struktury korelacji efektów losowych b i błędów losowych ε zaimplementowane w pakiecie `nlme` programu R, który będzie wykorzystywany do symulacji i analizy danych rzeczywistych. Część z poniżej wymienionych struktur została opisana w podrozdziale (2.4).

3.4.1. Struktury korelacji błędów losowych ε

Żeby zadać strukturę korelacji błędów losowych modelu, trzeba zadać korelację między ε_{ij} i $\varepsilon_{ij'}$, odpowiadającym korelacji j -tego i j' -tego błędu losowego z i -tej grupy. Do tego celu przyjmuje się, że korelacja między tymi błędami losowymi jest określona funkcją o wektorze parametrów ρ .

Poprzez różne funkcje korelacji otrzymujemy całą gamę struktur korelacji błędów losowych. W tej pracy ograniczymy opis tych struktur do struktur zaimplementowanych w R. Struktury są wymienione w kolejności od najprostszych do najbardziej skomplikowanych:

1. brak struktury: błędy losowe ε są ze sobą nieskorelowane i są homoskedastyczne, w R jest to domyślna struktura korelacji błędów losowych ε i nazywa się `NULL`,
2. struktura niezmiennicza ze względu na permutacje:

$$Cor(\varepsilon_i) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho & \dots & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \dots & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

która w R nazywa się `corCompSymm`,

3. struktura autoregresyjna rzędu 1:

$$Cor(\varepsilon_i) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n_i-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n_i-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n_i-2} & \dots & \rho & 1 & \rho \\ \rho^{n_i-1} & \dots & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

która w R nazywa się `corAR1`,

4. struktura autoregresyjna z ruchomą średnią ARMA(p, q), która w R nazywa się `corARMA`:

$$\varepsilon_{i,t} = \sum_{j=1}^p \phi_j \varepsilon_{i,t-j} + \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{i,t-j} + \eta_{i,t}, \quad (3.49)$$

gdzie $\mathbb{E}\eta_{i,t} = 0$, $Var(\eta_{i,t}) = \sigma_\eta^2$ oraz $\mathbb{E}(\eta_{i,t}, \eta_{i,s}) = 0$ dla każdego $t \neq s$,

5. struktura autoregresyjna ciągła: błędy zachowują się jak proces autoregresyjny z ciągłym czasem, która w R nazywa się **corCAR**,

6. struktura ogólna:

$$Cor(\varepsilon_i) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n_i} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2n_i} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1(n_i-1)} & \dots & \rho_{(n_i-2)(n_i-1)} & 1 & \rho_{(n_i-1)n_i} \\ \rho_{1n_i} & \dots & \rho_{(n_i-2)n_i} & \rho_{(n_i-1)n_i} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

która w R nazywa się **corSymm**.

Oprócz wyżej wymienionych struktur korelacji błędów losowych, w pakiecie **nlme** są jeszcze przestrzenne struktury korelacji służące do przedstawiania zależności przestrzennych między błędami losowymi. Tą grupą struktur nie będziemy się zajmować w niniejszej pracy, szczegóły można znaleźć w [Burzykowski2011].

3.4.2. Struktury korelacji efektów losowych b

Analogicznie jak dla struktur korelacji błędów losowych ε , żeby zadać strukturę korelacji między efektami losowymi b w liniowym modelu mieszanym, trzeba zadać korelację między poszczególnymi kolumnami macierzy efektów losowych Z . W tej pracy ograniczymy opis tych struktur do struktur zaimplementowanych w pakiecie **nlme**:

1. struktura identycznościowa: efekty losowe b są ze sobą nieskorelowane i są homoskedastyczne, która w R nazywa się **pdIdent**,

2. struktura diagonalna:

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{n_i-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{n_i} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

która w R nazywa się **pdDiag**,

3. struktura niezmiennicza ze względu na permutacje:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & d & d & \dots & d \\ d & 1 & d & \dots & d \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ d & \dots & d & 1 & d \\ d & \dots & d & d & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

która w R nazywa się **pdCompSymm**,

4. struktura ogólna:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n_i} \\ d_{12} & 1 & d_{23} & \dots & d_{2n_i} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ d_{1(n_i-1)} & \dots & d_{(n_i-2)(n_i-1)} & 1 & d_{(n_i-1)n_i} \\ d_{1n_i} & \dots & d_{(n_i-2)n_i} & d_{(n_i-1)n_i} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

która w R ma trzy reprezentacje: **pdSymm**, ogólna macierz dodatnio określona, parametryzowana elementami rozkładu SVD, **pdLogChol**, ogólna macierz dodatnio określona, reprezentowana w postaci Cholesky'ego (patrz podrozdział (2.4.2)) oraz **pdNatural**, ogólna macierz dodatnio określona w naturalnej parametryzacji, czyli przy użyciu odchyleń standardowych i korelacji,

5. struktura blokowa: macierz blokowa o blokach określonych strukturami opisanymi w punktach 1-4.

Wszystkie wyżej wymienione struktury uporządkowane są w kolejności od najprostszych do najbardziej skomplikowanych.

Rozdział 4

Linowe modele mieszane w R

Obecnie dostępnych jest kilka pakietów programu R pozwalających na dopasowywanie modeli mieszanych, między innymi: `nlme`, `lme4` i `MCMglmm`. Do tej pracy wykorzystywany był jedynie pakiet `nlme`, którego autorami są: J. Pinheiro, D. Bates, S. Debroy i D. Sarkar. Szczegółowa dokumentacja pakietu `nlme` dostępna jest na stronie:

<http://cran.r-project.org/web/packages/nlme/index.html>.

Równie szczegółowy opis pakietu wraz z ciekawymi przykładami jego zastosowań można znaleźć w [Burzykowski2011], z której to pozycji został zaczerpnięty opis pakietu i funkcji `lme()`.

4.1. Pakiet `nlme` - funkcja `lme()`

Podstawowym narzędziem pakietu `nlme` do estymacji liniowych modeli mieszanych jest funkcja `lme()`. Pozwala ona budować i dopasowywać modele z zagnieżdżonymi efektami losowymi b i skorelowanymi błędami losowymi ε (błędy losowe wewnątrz grup mogą być heteroskedastyczne). Żeby określić liniowy model mieszany trzeba określić struktury: średniej (efekty stałe) i efektów losowych (macierz D), opcjonalnie określa się struktury korelacji błędów losowych (macierz R) i wagi dla obserwacji.

W poniższych tabelach przedstawione zostały najważniejsze argumenty funkcji `lme()` wraz z ich klasami oraz funkcje umożliwiające uzyskiwanie informacji o parametrach modelu dopasowanego funkcją `lme()`. Obydwie tabele zostały zaczerpnięte z [Burzykowski2011].

Tablica 4.1: Wybrane argumenty funkcji `lme()`. Źródło: [Burzykowski2011].

Nazwa argumentu	Klasa argumentu	Komponent modelu
<code>fixed</code>	<i>formula</i> <i>groupedData</i>	efekty stałe, zmienne grupujące
<code>random</code>	<i>reStruct</i>	efekty losowe, struktura efektów losowych
<code>correlation</code>	<i>corStruct</i>	struktura korelacji błędów losowych ε
<code>weights</code>	<i>varFunc</i>	wagi wariancji błędów losowych ε
<code>data</code>	<i>data.frame</i> <i>groupedData</i>	dane
<code>method</code>		metoda estymacji: ML lub REML

Tablica 4.2: Uzyskiwanie informacji z hipotetycznego obiektu `lme.fit` dopasowanego za pomocą funkcji `lme()`. Źródło: [Burzykowski2011].

Komponent modelu <code>lme.fit</code>	Funkcja
Podsumowanie modelu	<code>summary(lme.fit)</code>
Metoda estymacji	<code>lme.fit\$method</code>
$\hat{\sigma}$	<code>summary(lme.fit)\$sigma</code>
$\hat{\beta}$	<code>fixef(lme.fit)</code>
$\text{Var}\hat{\beta}$	<code>vcov(lme.fit)</code>
95% przedział ufności dla β	<code>intervals(lme.fit, which = "fixed")</code>
95% przedział ufności dla θ, σ	<code>intervals(lme.fit, which = "var-cov")</code>
95% przedział ufności dla θ_D	<code>intervals(lme.fit, which = "var-cov")\$reStruct</code>
\hat{b}_i	<code>ranef(lme.fit)</code>
$\hat{\beta} + \hat{b}_i$ w grupach	<code>coef(lme.fit)</code>
\hat{D}	<code>getVarCov(lme.fit)</code>
\hat{R}_i	<code>VarCorr(lme.fit)</code>
\hat{V}_i	<code>getVarCov(lme.fit, type = "conditional")</code> <code>getVarCov(lme.fit, type = "marginal")</code>
Maksimum wiarygodności ML	<code>logLik(lme.fit, REML = FALSE)</code>
Maksimum wiarygodności REML	<code>logLik(lme.fit)</code>
AIC	<code>AIC(lme.fit)</code>
BIC	<code>BIC(lme.fit)</code>
Dopasowane wartości:	
- warunkowe	<code>fitted(lme.fit)</code>
- brzegowe	<code>fitted(lme.fit, level = 0)</code>
Reszty:	
- warunkowe	<code>resid(lme.fit, type = "response")</code>
- brzegowe	<code>resid(lme.fit, type = "response", level = 0)</code>
Predykcje:	
- warunkowe	<code>predict(lme.fit, newdata)</code>
- brzegowe	<code>predict(lme.fit, newdata, level = 0)</code>

4.2. Pakiet `lmmfit`

Na potrzeby niniejszej pracy, został utworzony pakiet programu R o nazwie `lmmfit`, który zawiera funkcje wyznaczające wszystkie współczynniki opisane w podrozdziale (3.3) dla liniowych modeli mieszanych pogrupowanych przez jedną zmienną. Pakiet ten jest dostępny pod adresem:

<http://cran.r-project.org/web/packages/lmmfit/index.html>

Pakiet `lmmfit` zawiera również funkcje dokonujące automatycznego doboru struktur korelacji błędów losowych i korelacji efektów losowych przy ustalonych efektach stałych i losowych w modelu pogrupowanym przez jedną zmienną.

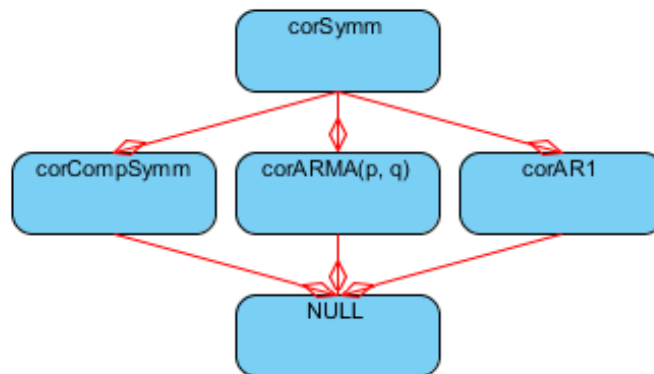
Tablica 4.3: Funkcje pakietu `lmmfit` wyznaczające współczynniki jakości dopasowania dla hipotetycznego liniowego modelu mieszanego pogrupowanego przez jedną zmienną o nazwie `lme.fit`. Źródło: opracowanie własne.

Współczynnik	Funkcja
Kryterium GIC z karą k	<code>GIC(lme.fit, k)</code>
Współczynnik <i>PRESS</i> : - brzegowy - warunkowy	<code>lmmPRESS(lme.fit, type = "marginal")</code> <code>lmmPRESS(lme.fit, type = "conditional")</code>
Klasyczny współczynnik R^2 : - brzegowy - warunkowy	<code>lmmR2(lme.fit, type = "marginal")</code> <code>lmmR2(lme.fit, type = "conditional")</code>
Współczynnik R^2 oparty na statystyce Walda: - brzegowy - warunkowy	<code>lmmR2W(lme.fit, type = "marginal")</code> <code>lmmR2W(lme.fit, type = "conditional")</code>
Współczynnik R^2 oparty na ilorazie wiarygodności:	<code>lmmR2LR(lme.fit)</code>
Współczynnik <i>CCC</i> : - brzegowy - warunkowy	<code>lmmCCC(lme.fit, type = "marginal")</code> <code>lmmCCC(lme.fit, type = "conditional")</code>

Dodatkowo funkcjom `lmmCCC()`, `lmmR2()` i `lmmR2W()` można podać argument `adjust` (który przyjmuje jedną z wartości: `"none"` (domyślna wartość), `"fixed"` lub `"both"`), który dla otrzymanego współczynnika wprowadza poprawkę ze względu na liczbę parametrów modelu (odpowiednio: brak poprawki, poprawka na liczbę efektów stałych b , poprawka na liczbę efektów stałych b i parametrów macierzy korelacji komponentów losowych modelu), patrz podrozdziały (3.3.3) i (3.3.4).

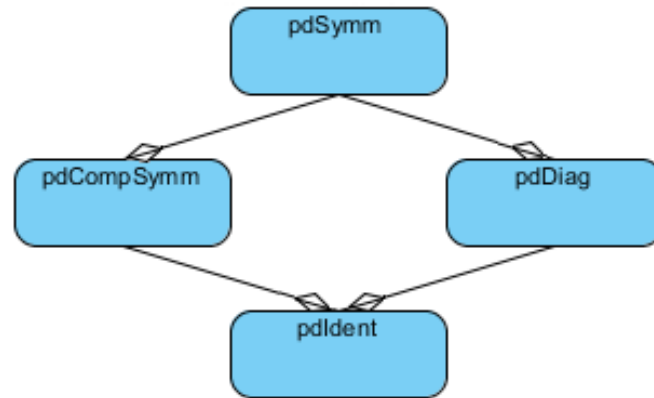
4.2.1. Funkcje `structStep()` i `structStepR2()`

Struktury korelacji błędów losowych ε opisane w podrozdziale (3.4.1) są częściowo zagnieźdzone, dlatego daje się je umieścić w wierzchołkach grafu następującej postaci:



Rysunek 4.1: Graf obrazujący uporządkowanie struktur korelacji błędów losowych ε dla liniowych modeli mieszaných. Źródło: opracowanie własne.

Część struktur korelacji efektów losowych b opisanych w podrozdziale (3.4.2) również daje się umieścić w wierzchołkach grafu:



Rysunek 4.2: Graf obrazujący uporządkowanie struktur korelacji efektów losowych b dla liniowych modeli mieszanych. Źródło: opracowanie własne.

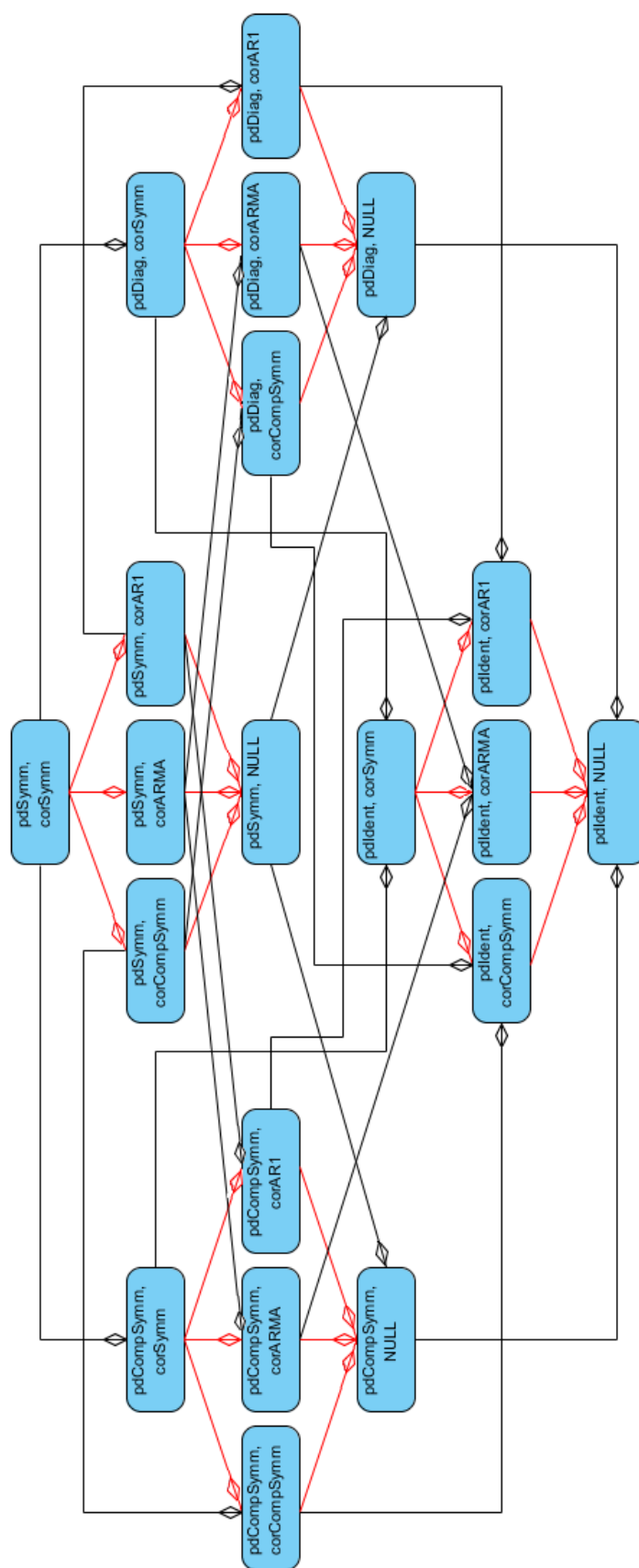
Zatem liniowe modele mieszane o ustalonych efektach stałych i ustalonych efektach losowych o strukturach korelacji komponentów losowych wymienionych w powyższych grafach daje się umieścić w wierzchołkach większego grafu będącego połączeniem grafów z rysunków 4.1 i 4.2, który jest przedstawiony na rysunku 4.3 (jest to graf produktowy dla grafów 4.1 i 4.2). Dla czytelności rysunku na grafie 4.3 zostały wymienione tylko nazwy struktur komponentów losowych modelu. Rodzice modelu o strukturach komponentów losowych wymienionych w danym wierzchołku są dla niego modelami zagnieżdżającymi.

Romby na końcach krawędzi wskazują kierunek zagnieżdżenia modeli w wierzchołkach: model, przy którym jest romb, jest modelem zagnieżdżonym w stosunku do modelu, który znajduje się na drugim końcu krawędzi. Kolory krawędzi symbolizują rodzaj struktury korelacji, która jest zmieniana: czerwony - zmieniana jest struktura korelacji błędów losowych ε modelu, czarny - zmieniana jest struktura efektów losowych b modelu.

Funkcje automatycznie dobierające struktury korelacji błędów losowych i korelacji efektów losowych przy ustalonych efektach stałych i losowych w modelu pogrupowanym przez jedną zmienną zachłannie przeszukują grafy 4.1, 4.2 lub 4.3, wyszukując lokalne minimum (kryteria GIC, AIC, BIC, *PRESS*) lub maksimum (współczynniki R^2 , *CCC*) danego kryterium poruszając się po wierzchołkach danego grafu według następującego algorytmu:

1. obliczenie wartości kryterium dla modelu,
2. obliczenie wartości kryterium dla wszystkich sąsiadów modelu,
3. wybór modelu o najmniejszej (największej) wartości kryterium,
4. powtórzenie kroków 1-3, aż do osiągnięcia lokalnego minimum (maksimum) kryterium.

Taki wybór struktur korelacji komponentów losowych liniowego modelu mieszanego pogrupowanego przez jedną zmienną może się sprawdzać, gdy mamy do czynienia z dużymi danymi, czyli gdy dopasowanie modeli o wszystkich możliwych strukturach jest czasochłonne. Funkcje `structStep()` i `structStepR2()` wyestymują w najlepszym wypadku 5 modeli, a w najgorszym 20 modeli.



Rysunek 4.3: Graf obrazujący uporządkowanie liniowych modeli mieszanych o różnych strukturach korelacji komponentów losowych. Źródło: opracowanie własne.

Tablica 4.4: Funkcja `structStep()` zachłannie wyznaczająca struktury korelacji komponentów losowych poprzez minimalizację kryterium GIC lub *PRESS*. Źródło: opracowanie własne.

Nazwa argumentu	Klasa argumentu	Komponent modelu
<code>model</code>	<i>lme</i>	liniowy model mieszany pogrupowany przez jedną zmienną
<code>k</code>	<i>numeric</i> <i>string</i> : "PRESS"	kara za liczbę parametrów modelu dla kryterium GIC lub wskaźnik, że ma być minimalizowany <i>PRESS</i>
<code>p, q</code>	<i>integer</i>	parametry struktury $ARMA(p, q)$
<code>structChange</code>	<i>character</i>	parametr określający, które struktury mają być wybierane: "correlation" tylko struktura błędów losowych "random" tylko struktura efektów losowych "both" obydwie struktury jednocześnie
<code>trace</code>	<i>logical</i>	gdy TRUE, umożliwia śledzenie ścieżki wyboru struktur
<code>type</code>	<i>character</i>	typ współczynnika <i>PRESS</i> : "marginal" lub "conditional"

Tablica 4.5: Funkcja `structStepR2()` zachłannie wyznaczająca struktury korelacji komponentów losowych poprzez maksymalizację współczynnika dopasowania. Źródło: opracowanie własne.

Nazwa argumentu	Klasa argumentu	Komponent modelu
<code>model</code>	<i>lme</i>	liniowy model mieszany pogrupowany przez jedną zmienną
<code>crit</code>	<i>function</i>	funkcja wyznaczająca współczynnik, który będzie maksymalizowany: <code>lmmCCC</code> , <code>lmmR2</code> , <code>lmmR2W</code> lub <code>lmmR2LR</code>
<code>type</code>	<i>character</i>	parametr określający rodzaj reszt używanych do obliczenia współczynnika: "marginal" lub "conditional"
<code>adjust</code>	<i>character</i>	parametr określający rodzaj poprawki ze względu na liczbę parametrów modelu: "none", "fixed" lub "both"
<code>p, q</code>	<i>integer</i>	parametry struktury $ARMA(p, q)$
<code>structChange</code>	<i>character</i>	parametr określający, które struktury mają być wybierane: "correlation" tylko struktura błędów losowych "random" tylko struktura efektów losowych "both" obydwie struktury jednocześnie
<code>trace</code>	<i>logical</i>	gdy TRUE, umożliwia śledzenie ścieżki wyboru struktur

4.3. Analiza danych symulowanych

Rozdział ten jest poświęcony opisowi studium symulacyjnego. Celem symulacji było zbadanie skuteczności kryteriów oceny jakości dopasowania modelu wymienionych w podrozdziale (3.3) jako wytycznych do wyboru struktur korelacji komponentów losowych w liniowym modelu mieszanym pogrupowanym przez jeden czynnik. Wybór struktur korelacji modelu przeprowadzany był automatycznie poprzez minimalizację lub maksymalizację wybranych współczynników, przy użyciu funkcji `structStep()` lub `structStepR2()` z pakietu `lmmfit` (opis tych funkcji znajduje się w podrozdziale (4.2)).

4.3.1. Opis symulacji

Do analiz wybranych zostało dziewięć współczynników:

1. AIC (patrz podrozdział (3.3.1)),
2. BIC (patrz podrozdział (3.3.1)),
3. *PRESS* w dwóch wersjach: brzegowej i warunkowej (patrz podrozdział (3.3.2)),
4. *CCC* w dwóch wersjach: brzegowej i warunkowej (patrz podrozdział (3.3.4)),
5. R_W^2 w dwóch wersjach: brzegowej i warunkowej (patrz podrozdział (3.3.3)),
6. R_{LR}^2 (patrz podrozdział (3.3.3)).

Współczynniki AIC, BIC oraz *PRESS* w wersjach brzegowej i warunkowej były minimalizowane (funkcją `structStep()`), reszta współczynników była maksymalizowana (funkcją `structStepR2()`).

Do analiz zostały użyte trzy zbiory danych: `Orthodont` (z pakietu `nlme`), `Earthquake` (z pakietu `nlme`) oraz `sleepstudy` (z pakietu `lme4`). Wszystkie te zbiory pochodzą z pakietów autorstwa D.Batesa i J.Pinheiro.

Ustalono zostały cztery modele bazowe:

- `m1 <- lme(Reaction ~ 1 + Days, random = ~ 1 + Days | Subject, data = sleepstudy),`
- `m2 <- lme(distance ~ 1 + age + Sex, random = ~ 1 + age | Subject, data = Orthodont),`
- `m3 <- lme(distance ~ 1 + age + Sex, random = ~ 1 + age + Sex | Subject, data = Orthodont),`
- `m4 <- lme(accel ~ 1 + distance + Richter + soil, random = ~ 1 + distance + Richter + soil | Quake, data = Earthquake),`

gdzie formuła `y ~ 1 + x` oznacza model o zmiennej objaśnianej `y` i zmiennych objaśniających `1` i `x` oraz formuła `random = ~ 1 + x | g` oznacza, że jako zmienne losowe przyjmuje się `1` i `x`, a zmienną grupującą jest `g`.

Ze względu na złożoność obliczeniową i czasochłonność estymacji, do symulacji wybrane zostały następujące struktury korelacji efektów losowych: `pdIdent`, `pdDiag`, `pdCompSymm`, `pdSymm` oraz następujące struktury błędów losowych: `NULL` i `corCompSymm`. Modele o strukturach `pdSymm`, `NULL` i `pdSymm`, `corCompSymm` udało się dopasować jedynie dla modelu bazowego `m3` (dla modeli `m1` i `m2` struktura korelacji `pdSymm` jest równoważna strukturze `pdCompSymm`). Symulacje przebiegały według następującego schematu (dla każdego z modeli `m1`, `m2`, `m3` i `m4`):

1. Estymacja współczynników modelu bazowego z jedną z ośmiu powyżej wymienionych struktur korelacji.
2. Wygenerowanie wektora efektów losowych b z wykorzystaniem macierzy korelacji efektów losowych z modelu z punktu 1.
3. Wygenerowanie wektora błędów losowych ε z wykorzystaniem macierzy korelacji błędów losowych z modelu z punktu 1.
4. Obliczenie nowych wartości zmiennej objaśnianej y z wykorzystaniem danych z modelu bazowego i wektorów komponentów losowych b i ε z punktów 2. i 3.
5. Dopasowanie modelu o strukturach korelacji takich jak w modelu bazowym, opartego na nowych danych.
6. Wybór i dopasowanie funkcją `structStep()` lub `strucStepR2()` modelu wynikowego dla modelu z punktu 5.
7. Dopasowanie modelu o wybranych, innych strukturach korelacji niż w modelu bazowym, opartego na nowych danych.
8. Wybór i dopasowanie funkcją `structStep()` lub `strucStepR2()` modelu wynikowego dla modelu z punktu 7.
9. Powtórzenie kroków od 2. do 8. 250 razy.
10. Powtórzenie kroków od 1. do 9. dla wszystkich wybranych kryteriów oceny jakości dopasowania modelu.

Zostało wyestymowane 26 modeli, na podstawie których 250 razy były generowane odpowiednio skorelowane komponenty losowe dla modeli symulowanych. W sumie zostało dopasowanych 13000 modeli, które zostały przekazane do funkcji automatycznego doboru struktur korelacji `structStep()` i `structStepR2()`. Funkcje te wybierały modele wynikowe na podstawie dziewięciu kryteriów jakości dopasowania modelu wymienionych na początku podrozdziału (4.3.1).

Generowanie danych

Przykład kodu w R użytego do generowania modeli o odpowiednio skorelowanych komponentach losowych:

```
library(nlme)
library(MASS)

# model bazowy o strukturach pdCompSymm, NULL:
m4 <- lme(accel ~ distance + Richter + soil, data = Earthquake,
          random = list(Quake = pdCompSymm(~ 1 + distance + Richter + soil)))

# uzyskiwanie informacji o macierzach korelacji:
N <- length(unique(Earthquake$Quake)) # liczba grup
ni <- as.vector(tapply(Earthquake$Quake, Earthquake$Quake, length)) # liczności grup
V <- cov2cor(getVarCov(m4,type = c("random.effects"))) # macierz D
a <- length(V)
V <- matrix(V[1:a], sqrt(a), sqrt(a))
```



```

p <- nrow(V) #liczba efektów losowych
X <- model.matrix(formula(m4), data = getData(m4))           # macierz efektów stałych
Z <- X                                                         # macierz efektów losowych
mu1 <- X %*% fixef(m4)

dane = cbind(1,X,getGroups(m4))
colnames(dane) = c("y","Intercept","distance","Richter","soil1","Quake")
dane = as.data.frame(dane)

# generowanie komponentów losowych:
bi <- mvrnorm(N, rep(0, p), V)                                # efekty losowe skorelowane wg macierzy V
mu <- mu1 + rowSums(Z * b[rep(1:N, ni), ]) # nowe X beta + Z b

eps <- list()                                                  # grupy mogą być nierównoliczne
for (i in 1:N){
  # macierz korelacji błędów losowych dla i-tej grupy:
  Ri <- getVarCov(m4, type = "conditional", individual = i)[1][[1]]
  eps[[i]] <- mvrnorm(1, rep(0, nrow(Ri)), Ri)
}
eps <- unlist(eps)
y <- mu + eps                                                  #nowe y

dane$y = y

model <- lme(y ~ distance + Richter + soil1, data = dane,
             random = list(Quake = pdCompSymm(~ 1 + distance + Richter + soil1)))

```

4.3.2. Wyniki symulacji

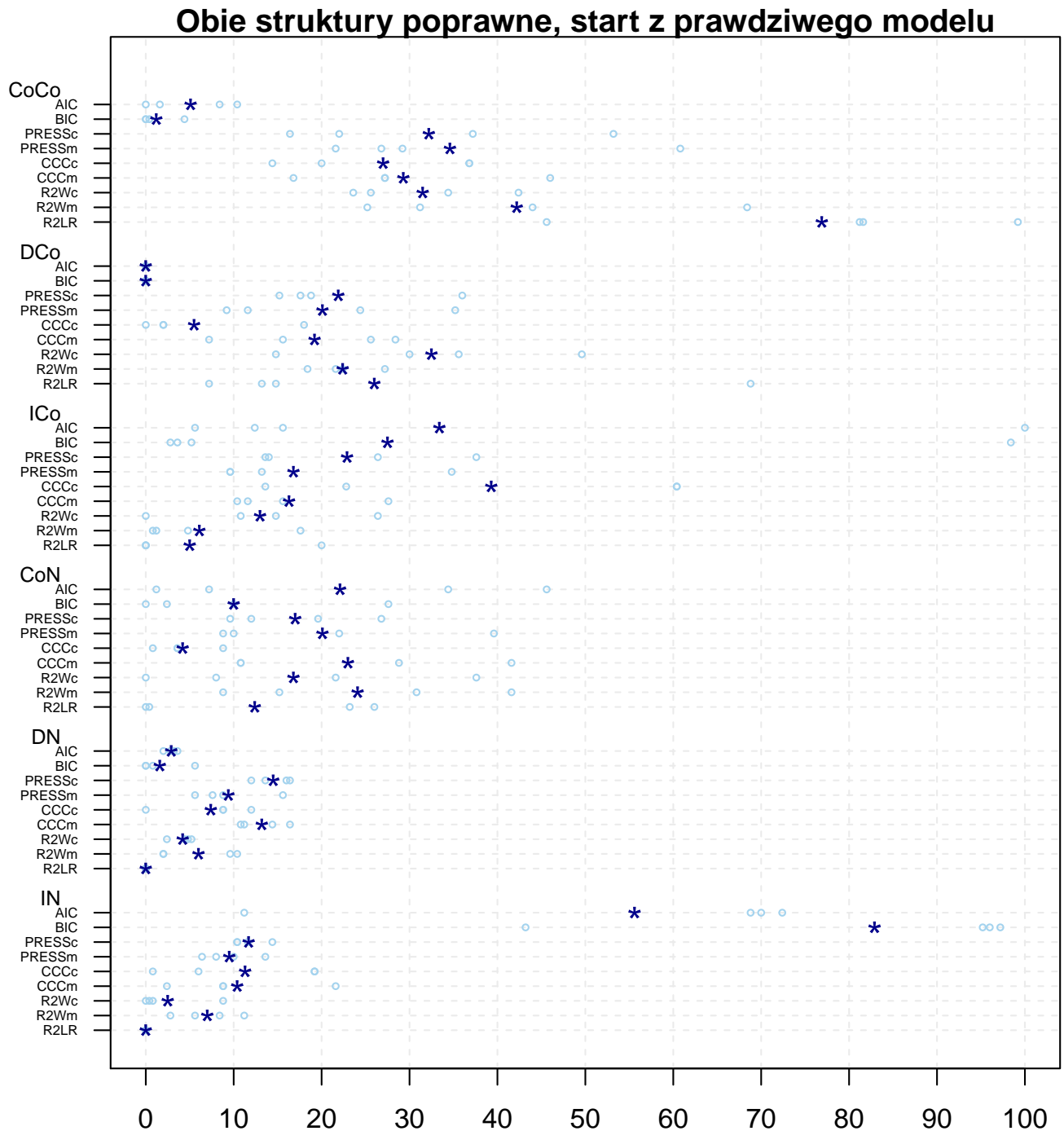
Wynikiem przeprowadzonych symulacji są procentowe rozkłady wyboru prawidłowych struktur korelacji komponentów losowych modelu mieszanego: struktury efektów losowych b i błędów losowych ε , tylko struktury korelacji efektów losowych b lub tylko struktury korelacji błędów losowych ε dla poszczególnych kryteriów dla każdego z modeli bazowych m1, m2, m3 oraz m4. Zostały one przedstawione w tabelach A.1 - A.7, które znajdują się w dodatku A na końcu pracy. Część wyników została również przedstawiona graficznie na wykresach 4.4 - 4.11. Nagłówki poszczególnych wykresów są skrótami oznaczającymi prawdziwe struktury modeli, z których generowane były dane do symulacji.

Prawdziwe struktury to:

pdIdent, NULL (IN); pdDiag, NULL (DN); pdCompSymm, NULL (CoN); pdSymm, NULL (SN); pdIdent, corCompSymm (ICo); pdDiag, corCompSymm (DCo); pdCompSymm, corCompSymm (CoCo); pdSymm, corCompSymm (SCo).

W podpisach rysunków znajduje się również informacja o strukturach modelu, z którego startowały funkcje doboru struktur: „start z prawdziwego modelu” oznacza, że modelem startowym dla funkcji dobierającej struktury był model o takich strukturach, jak w modelu, z którego generowane były dane, „start z modelu o innych strukturach” oznacza, że modelem startowym był model o pewnych innych strukturach (różnych od tych w modelu, z którego generowane były dane).

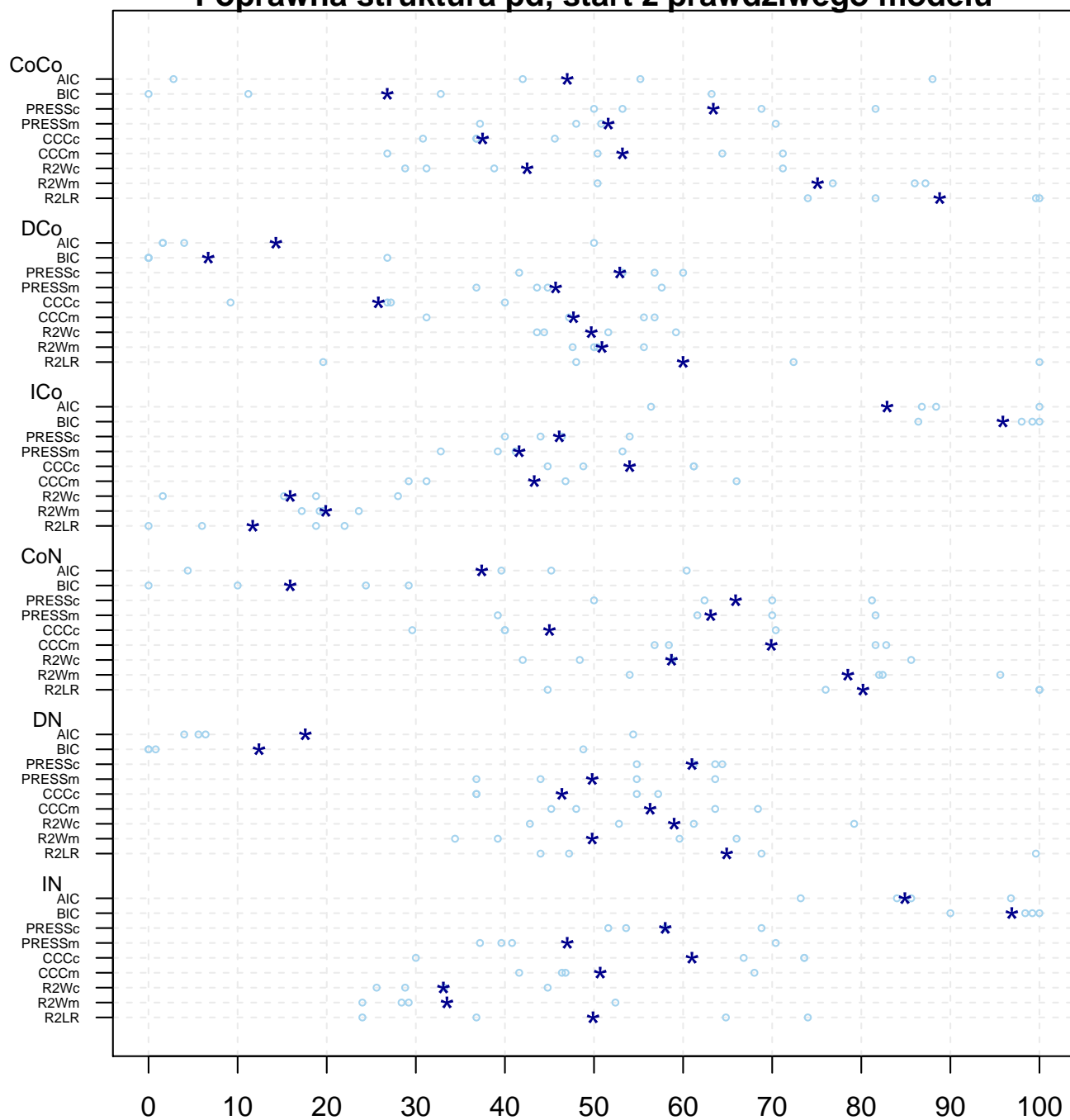
Na osiach OX wykresów znajdują się wartości procentowe, natomiast na osiach OY zaznaczono kryteria. Jeśli przy nazwie kryterium znajduje się literka „c” lub „m”, oznacza to odpowiednio, że używana była warunkowa lub brzegowa wersja danego kryterium (kryteria CCC , $PRESS$ i R_W^2).



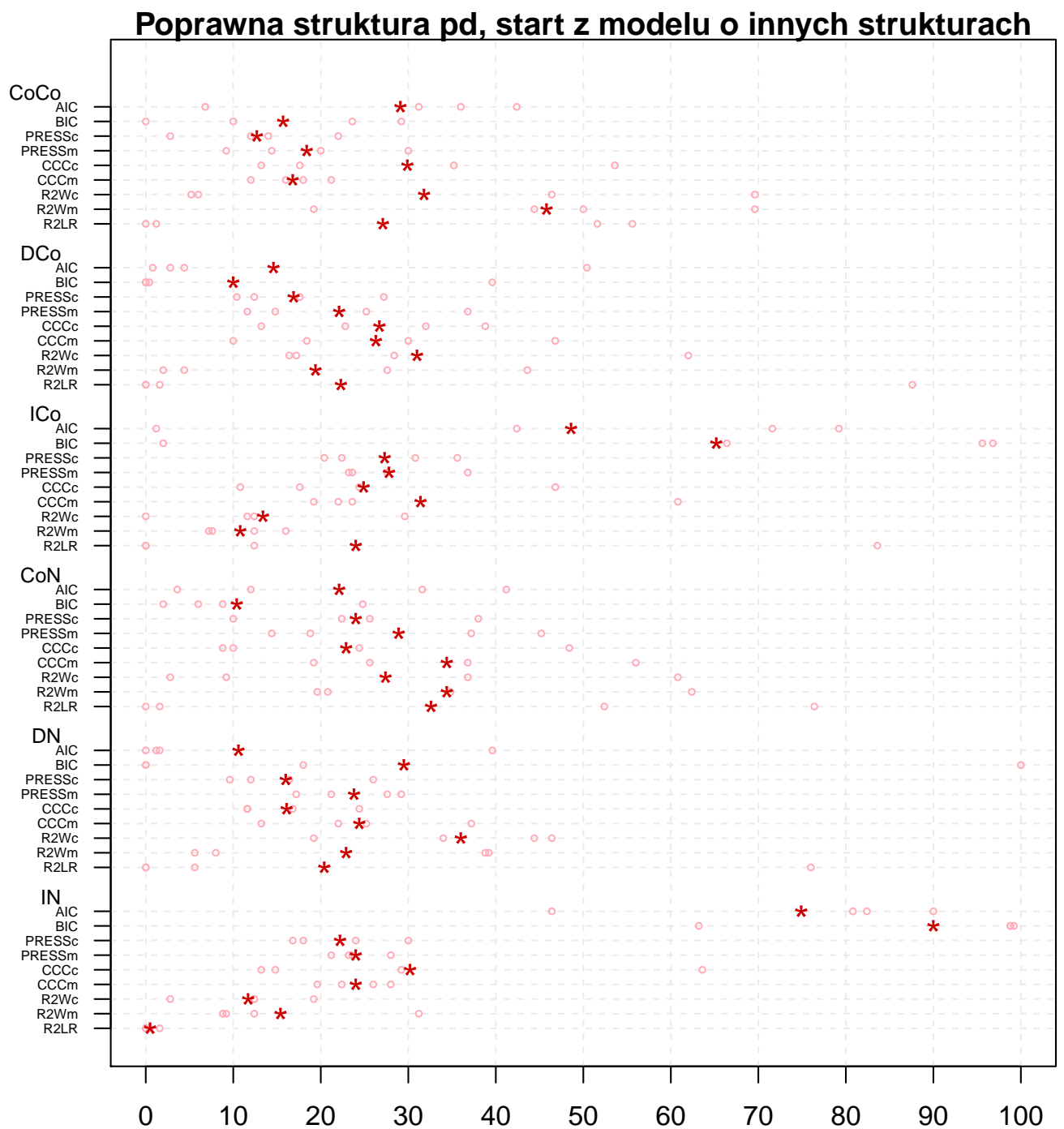
Rysunek 4.4: Porównanie wyboru modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów. Wybór prawidłowych struktur korelacji komponentów losowych w modelu (w procentach, gwiazdkami oznaczono średnie). Startowym modelem był prawdziwy model. Źródło: opracowanie własne.

A scatter plot showing the relationship between two variables, both ranging from 0 to 100. The plot features a grid with major lines every 10 units and minor lines every 2 units. The data points are represented by red asterisks and open red circles. The points are densely clustered in the lower-left region (below 10 on both axes) and form a sparse, elongated trail extending towards the upper-right corner, indicating a positive correlation.

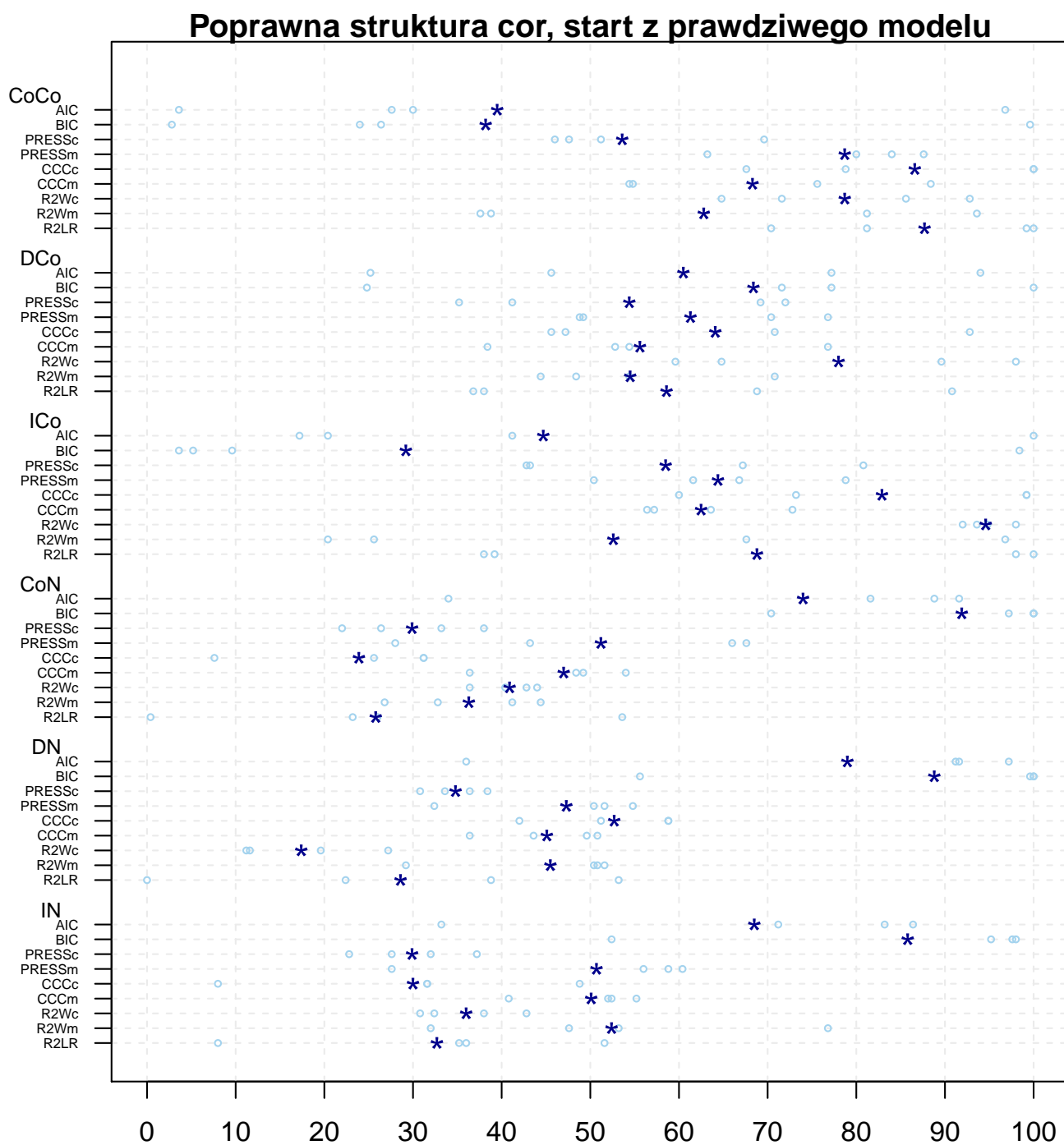
Poprawna struktura pd, start z prawdziwego modelu



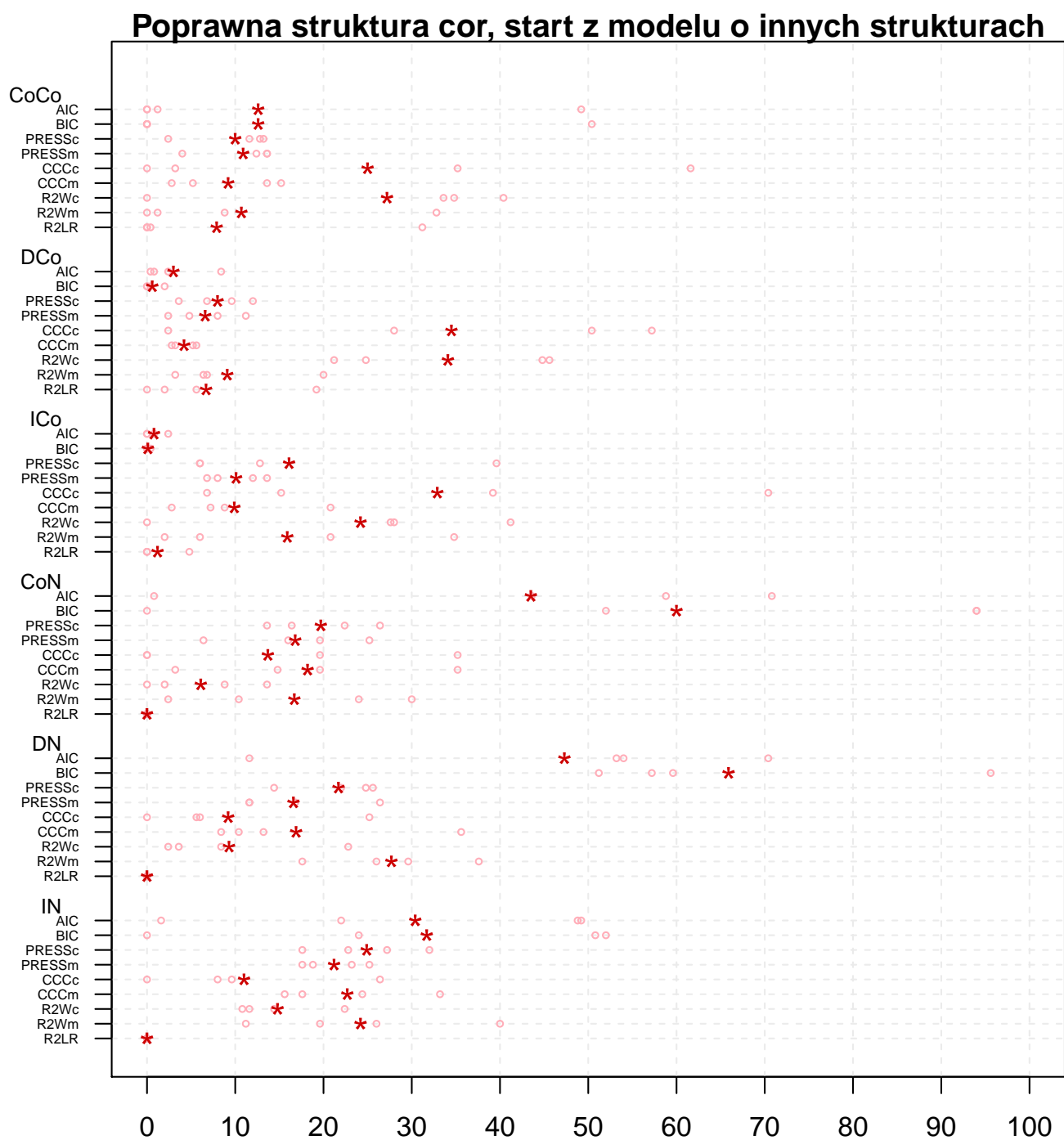
Rysunek 4.6: Porównanie wyboru modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów. Wybór prawidłowej struktury korelacji efektów losowych b w modelu (w procentach, gwiazdkami oznaczono średnie). Startowym modelem był prawdziwy model. Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.7: Porównanie wyboru modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów. Wybór prawidłowej struktury korelacji efektów losowych b w modelu (w procentach, gwiazdkami oznaczono średnie). Startowym modelem był model o innych strukturach. Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.8: Porównanie wyboru modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów. Wybór prawidłowej struktury korelacji błędów losowych ε w modelu (w procentach, gwiazdkami oznaczono średnie). Startowym modelem był prawdziwy model. Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.9: Porównanie wyboru modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów. Wybór prawidłowej struktury korelacji błędów losowych ε w modelu (w procentach, gwiazdkami oznaczono średnie). Startowym modelem był model o innych strukturach. Źródło: opracowanie własne.

4.3.3. Wnioski i podsumowanie symulacji

Procentowe zestawienia wyników symulacji znajdują się w tabelach A.1 - A.7 w dodatku A. Wyniki zostały również przedstawione graficznie na rysunkach 4.4 - 4.11, które znajdują się w podrozdziale 4.3.2 oraz poniżej.

Żadne z badanych kryteriów nie wyróżnia się skutecznością wyboru prawidłowych struktur korelacji komponentów losowych modelu. Średnio wszystkie kryteria wskazywały prawdziwy model w około 20% przypadków, gdy funkcje automatycznego doboru struktur jako startowy miały podany prawdziwy model. Niestety średnia ta drastycznie spada, do około 5% przypadków, gdy modelem startowym jest pewien inny model o strukturach korelacji różnych od prawdziwych. Jedynymi kryteriami, które się wyróżniają, są kryteria AIC i BIC, które w około 45% przypadków wskazały prawidłowy model przy starcie z prawdziwego modelu i w około 25%, gdy modelem startowym był inny model, przy założeniu, że rzeczywisty model miał najprostsza strukturę: `pdIdent`, `NULL`. Najslabiej wypadł współczynnik R^2_{LR} , który prawidłowo wskazywał tylko strukturę `pdCompSymm`, `corCompSymm`.

Porównanie kryteriów

Kryteria AIC i BIC najczęściej wskazywały prawidłowe struktury korelacji komponentów losowych modelu, gdy prawdziwą strukturą była najprostsza struktura `pdIdent`, `NULL`, zarówno gdy modelem startowym był prawdziwy model, jak i gdy model startowy miał błędne struktury korelacji. Kryterium BIC wybierało dobry model w 82,9% (model startowy o prawdziwych strukturach korelacji) oraz w 31% przypadków (model startowy o innych strukturach), zatem wypadło lepiej niż kryterium AIC, które średnio wskazywało prawidłowy model odpowiednio 55,6% i 23,9% razy. Niestety dla pozostałych struktur modeli kryteria te wypadły słabo.

Pozostałe kryteria, gdy modelem startowym był prawdziwy model, wykazywały wzrost skuteczności wraz ze wzrostem stopnia skomplikowania struktur modelu. Widać to na rysunku 4.4. Niestety średnia skuteczność wyboru prawidłowych struktur przez te kryteria waha się między 5% a 45%, co nie jest dobrym wynikiem.

Gdy modelem startowym był model o pewnych innych strukturach niż prawdziwe, żadne z kryteriów (oprócz AIC i BIC) nie przekroczyło średniej skuteczności w wysokości 20% (rysunek 4.5).

Wykres 4.6 pokazuje, że przy znanej strukturze korelacji błędów losowych modelu (na przykład, gdy wiadomo, że błędy losowe są homoskedastyczne i nieskorelowane) najlepszym kryterium wyboru struktury korelacji efektów losowych może być jedno z kryteriów *PRESS*. Skuteczność tych kryteriów to około 60%. Są one dobre, ponieważ mają podobną skuteczność niezależnie od rodzaju rzeczywistej struktury korelacji efektów losowych (w przeciwieństwie do innych kryteriów, których średnia skuteczność waha się między 10% a 96%). Również wykres 4.7 wskazuje, że skuteczność wyboru struktur korelacji za pomocą współczynników *PRESS* jest na stabilnym poziomie niezależnie od prawdziwej struktury modelu (wynosi około 20%).

Rzeczą rzucającą się w oczy na wyżej wymienionych wykresach jest niestabilność wyboru struktur korelacji przez kryteria AIC i BIC. Zarówno startując z prawdziwego modelu, jak i z modelu o innych strukturach średnie skuteczności wyboru struktury korelacji efektów losowych wahają się między 10% a 98% w zależności od rodzaju rzeczywistej struktury modelu.

Wykres 4.8 pokazuje, że w zasadzie wszystkie kryteria wybierają prawidłową strukturę korelacji błędów losowych z prawdopodobieństwem około 0,5 (modelem startowym jest prawdziwy

model). Gdy model startowy ma inne struktury niż prawdziwy (patrz wykres 4.9), to skuteczność części kryteriów spada do około 20%, skuteczność współczynnika R_{LR}^2 spada nawet do zera dla najprostszych modeli, a skuteczność kryteriów AIC oraz BIC spada prawie do zera dla modeli o bardziej skomplikowanej strukturze korelacji błędów losowych.

Podsumowując, dla najprostszych struktur korelacji komponentów losowych liniowego modelu mieszanego najlepiej wypadły kryteria AIC i BIC. Dla bardziej skomplikowanych struktur skuteczniejsze okazały się kryteria jakości dopasowania modelu do danych: współczynnik CCC w wersji warunkowej i współczynnik R_W^2 również w wersji warunkowej. Skuteczność tych kryteriów w obserwowanych zbiorach nie jest jednak duża. Jedynie zakładając, że wiadomo jaka jest prawidłowa struktura efektów losowych lub błędów losowych można z prawdopodobieństwem około 20% dobrać prawidłowo drugą strukturę. Takie wyniki mogły jednak zostać uzyskane z powodu błędnych założeń co do postaci modeli bazowych, które to założenia nie były w tej pracy sprawdzane. Ponieważ studium symulacyjne zostało przeprowadzone tylko dla dziewięciu kryteriów, możliwe jest, że pewne inne kryteria okazałyby się bardziej skuteczne od badanych.

Porównanie kryteriów między modelami

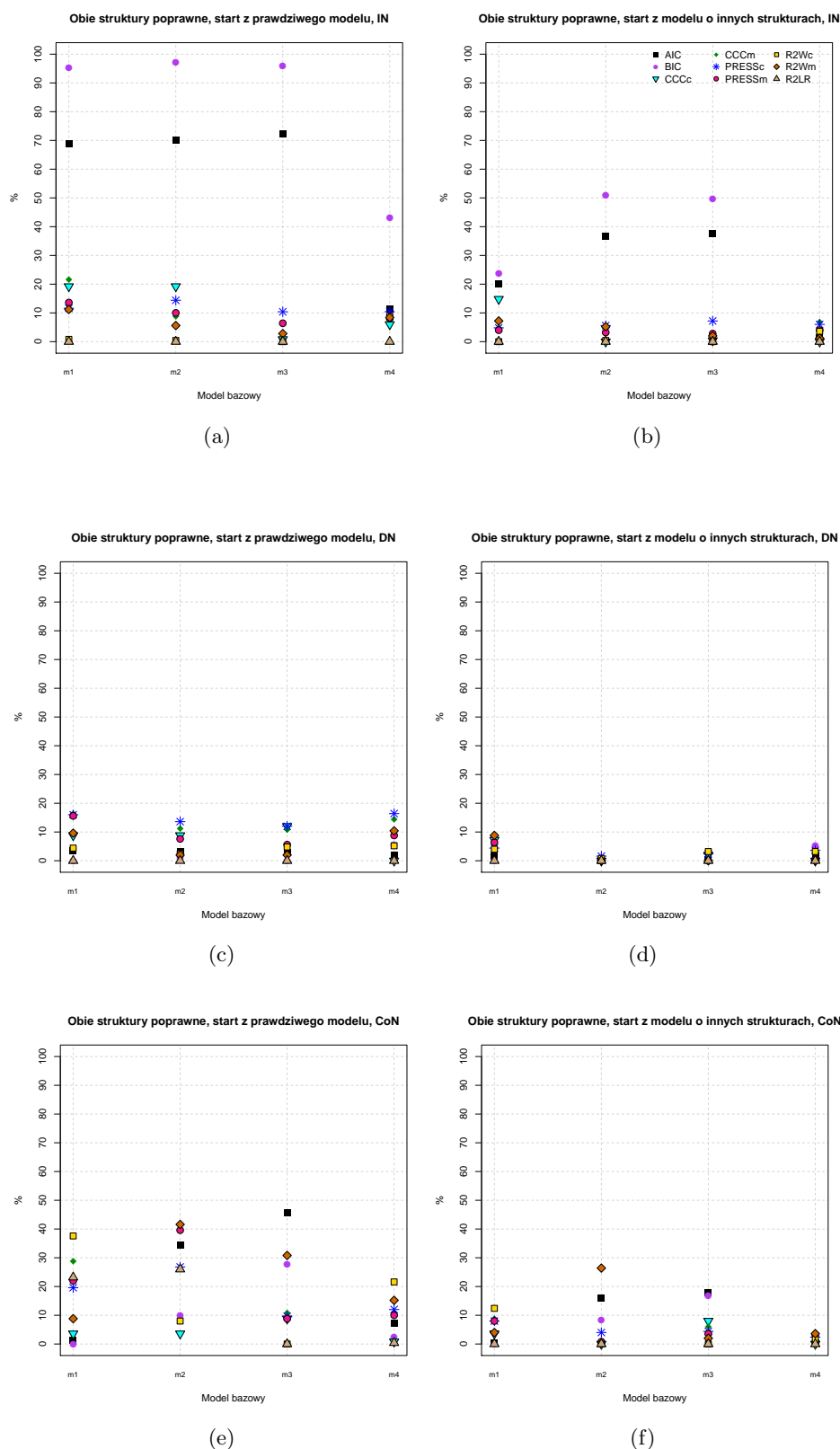
Rysunki 4.10 oraz 4.11 przedstawiają procentową skuteczność wyboru struktur korelacji efektów losowych b i błędów losowych ε dla wszystkich badanych kryteriów w zależności od modelu bazowego. W lewej kolumnie każdego z tych rysunków znajdują się wykresy dla modelu startowego o prawidłowych strukturach, natomiast prawa kolumna wykresów odpowiada modelowi startowemu o pewnych innych strukturach niż prawdziwe.

Wszystkie badane kryteria mają bardzo małą skuteczność w wykrywaniu struktury korelacji efektów losowych b postaci `pdDiag`, niezależnie od wielkości modelu (modele `m1` i `m2` są najmniejsze, największy jest model `m4`) oraz niezależnie od struktury korelacji błędów losowych ε . Widać to na rysunkach 4.10 (c) i (d) oraz 4.11 (c) i (d).

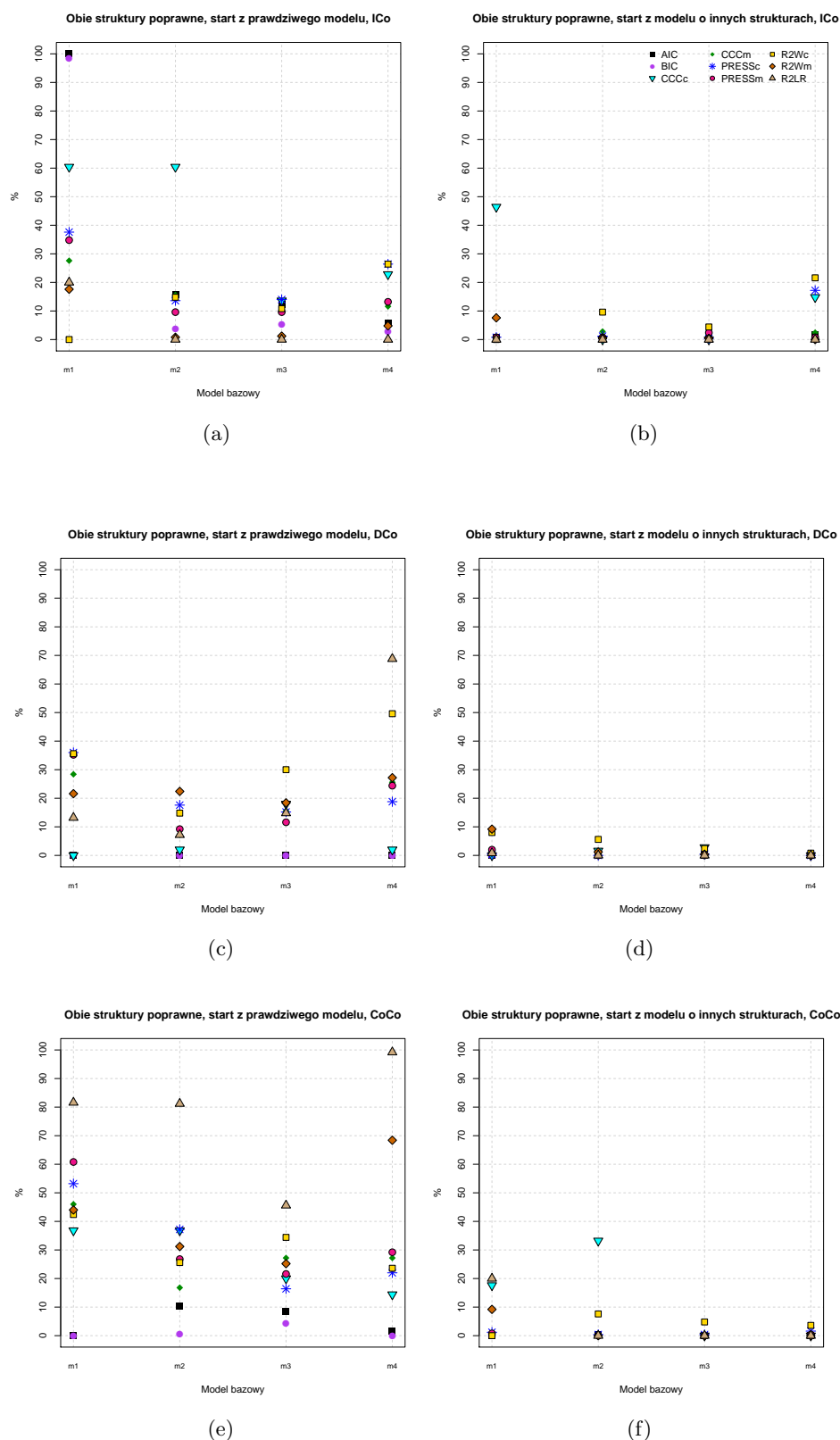
Kryteria AIC (czarny kwadrat) i BIC (fioletowe kółko) stosunkowo najczęściej wskazywały prawidłowe struktury korelacji komponentów losowych modeli `m1`, `m2` oraz `m3`. Niestety nie sprawdziły się dla największego modelu `m4`.

Również współczynnik CCC w wersji warunkowej (jasnoniebieski trójkąt) wyróżnia się skutecznością dla mniejszych modeli, w szczególności dla modeli `m1` i `m2`.

W konkluzji, najprawdopodobniej, aby dobrać struktury korelacji komponentów losowych w liniowym modelu mieszanym, trzeba posiadać więcej informacji o badanym problemie i posiadanych danych. Badane kryteria mogą służyć wtedy do ogólnej jakości dopasowania modelu do danych.



Rysunek 4.10: Wybór struktur korelacji komponentów losowych w zależności od modelu bazowego: (a) IN, start z prawdziwego modelu, (b) IN, start z modelu o innych strukturach, (c) DN, start z prawdziwego modelu, (d) DN, start z modelu o innych strukturach, (e) CoN, start z prawdziwego modelu, (f) CoN, start z modelu o innych strukturach



Rysunek 4.11: Wybór struktur korelacji komponentów losowych w zależności od modelu bazowego: (a) ICo, start z prawdziwego modelu, (b) ICo, start z modelu o innych strukturach, (c) DCo, start z prawdziwego modelu, (d) DCo, start z modelu o innych strukturach, (e) CoCo, start z prawdziwego modelu, (f) CoCo, start z modelu o innych strukturach

Podsumowanie

Celem tej pracy było przedstawienie teorii dotyczącej estymacji liniowych modeli z efektami mieszanymi (popularnie zwanych modelami mieszanymi), metod porównywania ich oraz testowania jakości dopasowania modelu do danych. W pracy zostało przedstawionych kilka metod estymacji współczynników liniowego modelu mieszanego. Zarysowana również została teoria testowania hipotez dotyczących istotności współczynników modelu. Głównym celem było jednak opisanie kryteriów mówiących o jakości dopasowania modelu, takich jak: kryterium GIC (ang. *generalized information criterion*), kryterium *PRESS* (ang. *predicted residual sum of squares*), współczynnika *CCC* (ang. *concordance correlation coefficient*) oraz współczynników R^2 dla liniowych modeli mieszanych.

Przeprowadzono również studium symulacyjne, które miało na celu sprawdzenie skuteczności kryteriów oceny jakości dopasowania, wspomnianych powyżej, jako wytycznych do wyboru struktur korelacji komponentów losowych w liniowym modelu mieszanym. Wyniki studium wskazują, że niestety żadne z badanych kryteriów nie powinno służyć do wyboru prawidłowych struktur korelacji w modelu.

Do przeprowadzenia analiz, obliczeń i wykonania rysunków wykorzystane zostało środowisko R. Do celów tejże pracy i studium symulacyjnego powstał również pakiet `lmmfit`, który zawiera funkcje wyznaczające wszystkie współczynniki i kryteria opisane w pracy oraz funkcje dokonujące automatycznego doboru struktur korelacji komponentów losowych liniowego modelu mieszanego przy ustalonych efektach stałych i losowych.

Ciekawym rozszerzeniem niniejszej pracy mogłoby być zbadanie, czy wymienione w pracy kryteria jakości dopasowania modelu do danych mogą być pomocne przy wyborze zmiennych do modelu przy ustalonych strukturach korelacji komponentów losowych. Metoda wyboru zmiennych do modelu oparta o któryś z tych współczynników byłaby prostsza i bardziej użyteczna niż metoda oparta na przykład na teście ilorazu wiarygodności (LRT), ponieważ pozwalałaby efektywnie porównywać między sobą modele niezagnieżdżone.

Pomimo, że zmiennym traktowanym jako losowe w modelu przypisuje się zupełnie inną interpretację niż zmiennym traktowanym jako stałe, ciekawym zagadnieniem byłoby również sprawdzenie, czy współczynniki opisane w pracy mogłyby pomóc w określeniu, które zmienne powinny być traktowane jako losowe, a które jako stałe.

Dodatek A

Wyniki symulacji, tabele

W tym dodatku znajdują się zestawienia wyników symulacji opisanych w podrozdziale (4.3).

W tabelach od A.4 do A.7 przedstawione są procentowe rozkłady wyboru struktur przez funkcje `structStep()` lub `structStpR2()` dla kolejnych modeli bazowych: `m1`, `m2`, `m3` oraz `m4`. Nazwy kolumn tabel A.4 - A.7 są skrótami oznaczającymi prawdziwe struktury modeli, z których generowane były dane do symulacji, natomiast nazwy wierszy tych tabeli są skrótami oznaczającymi, jakie struktury komponentów losowych zostały wybrane przez funkcje automatycznego doboru struktur.

Struktury prawdziwe to:

`pdIdent`, `NULL` (`IN`); `pdDiag`, `NULL` (`DN`); `pdCompSymm`, `NULL` (`CoN`); `pdSymm`, `NULL` (`SN`); `pdIdent`, `corCompSymm` (`ICo`); `pdDiag`, `corCompSymm` (`DCo`); `pdCompSymm`, `corCompSymm` (`CoCo`); `pdSymm`, `corCompSymm` (`SCo`).

Struktury możliwe do wybrania przez funkcje doboru struktur to:

`pdIdent`, `NULL` (`IN`); `pdDiag`, `NULL` (`DN`); `pdCompSymm`, `NULL` (`CoN`); `pdSymm`, `NULL` (`SN`); `pdIdent`, `corCompSymm` (`ICo`); `pdDiag`, `corCompSymm` (`DCo`); `pdCompSymm`, `corCompSymm` (`CoCo`); `pdSymm`, `corCompSymm` (`SCo`); `pdIdent`, `corAR1` (`IAR1`); `pdDiag`, `corAR1` (`DAR1`); `pdCompSymm`, `corAR1` (`CoAR1`); `pdSymm`, `corAR1` (`SAR1`); `pdIdent`, `corARMA(1,1)` (`IARMA`); `pdDiag`, `corARMA(1,1)` (`DARMA`); `pdCompSymm`, `corARMA(1,1)` (`CoARMA`); `pdSymm`, `corARMA(1,1)` (`SARMA`); `pdIdent`, `corSymm` (`IS`); `pdDiag`, `corSymm` (`DS`); `pdCompSymm`, `corSymm` (`CoS`); `pdSymm`, `corSymm` (`SS`).

Każda z tabel A.4 - A.7 jest podzielona na 18 części: po dwie części dla każdego z dziewięciu kryteriów wyboru modelu - nagłówek „start z prawdziwego modelu” oznacza, że modelem startowym dla funkcji dobierającej struktury był model o takich strukturach, jak w modelu, z którego generowane były dane, nagłówek „start z modelu o innych strukturach” oznacza, że modelem startowym był model o pewnych innych strukturach (różnych od tych w modelu, z którego generowane były dane). W nagłówkach znajduje się również informacja, które kryterium służyło do wyboru modelu. Jeśli przy nazwie kryterium znajduje się literka „c” lub „m”, oznacza to odpowiednio, że używana była warunkowa lub brzegowa wersja danego kryterium (kryteria *CCC*, *PRESS* i R_W^2). Liczby w kolumnach każdej z 18 podtabel sumują się do 100.

Tabele od A.1 do A.3 stanowią procentowe zestawienie poprawnych wyborów odpowiednio: struktur komponentów losowych modelu (struktury efektów losowych b i błędów losowych ε), struktury efektów losowych b , struktury błędów losowych ε ze względu na kryteria wyboru

dla każdego z modeli bazowych m1, m2, m3 oraz m4. Tak, jak dla tabel A.4 do A.7, nazwy kolumn są skrótami oznaczającymi prawdziwe struktury modeli, z których generowane były dane do symulacji (rozszerzenia skrótów - patrz wyżej), natomiast nazwy wierszy oznaczają nazwę kryterium, według którego model był wybierany.

Tablica A.1: Porównanie wyboru modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów. Wybór prawidłowych struktur korelacji komponentów losowych w modelu (w procentach dla każdego modelu bazowego). *Źródło:* opracowanie własne.

m1		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt.	Str.	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		68,8	3,6	1,2	X	100	0	0	X	20	1,6	0,4	X	0,8	0	0	X
BIC		95,2	0	0	X	98,4	0	0	X	23,6	0	0	X	0,4	0	0	X
CCCc		19,2	8,8	3,6	X	60,4	0	36,8	X	14,8	7,2	3,6	X	46,4	0	17,6	X
CCCm		21,6	16,4	28,8	X	27,6	28,4	46	X	4,8	6,8	8,8	X	0	0,4	0	X
PRESSc		11,6	16	19,6	X	37,6	36	53,2	X	4,8	4,4	8	X	0,8	0,4	1,2	X
PRESSm		13,6	15,6	22	X	34,8	35,2	60,8	X	4	6,4	8	X	0,8	2	0,8	X
R2Wc		0,8	4,4	37,6	X	0	35,6	42,4	X	0	4	12,4	X	0	8	0	X
R2Wm		11,2	9,6	8,8	X	17,6	21,6	44	X	7,2	8,8	4	X	7,6	9,2	9,2	X
R2LR		0	0	23,2	X	20	13,2	81,6	X	0	0	0	X	0	0,8	20	X

m2		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt.	Str.	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		70	3,2	34,4	X	15,6	0	10,4	X	36,8	0	16	X	0	0	0,4	X
BIC		97,2	0,8	10	X	3,6	0	0,4	X	50,8	0	8,4	X	0	0	0	X
CCCc		19,2	8,8	3,6	X	60,4	2	36,8	X	0	0	0	X	0	1,6	33,2	X
CCCm		8,8	11,2	41,6	X	15,6	7,2	16,8	X	2,8	0	0,8	X	2,8	0	0	X
PRESSc		14,4	13,6	26,8	X	13,6	17,6	37,2	X	5,6	1,6	4	X	1,2	0	0,4	X
PRESSm		10	7,6	39,6	X	9,6	9,2	26,8	X	3,2	0	0,8	X	0,8	0	0	X
R2Wc		0,4	2,4	8	X	14,8	14,8	25,6	X	0,4	0,8	0	X	9,6	5,6	7,6	X
R2Wm		5,6	2	41,6	X	0,8	22,4	31,2	X	5,2	0	26,4	X	0,4	1,2	0	X
R2LR		0	0	26	X	0	7,2	81,2	X	0	0	0	X	0	0	0	X

m3		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt.	Str.	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		72,4	2,8	45,6	3,2	12,4	0	8,4	0,4	37,6	0,4	18	0	0	0	0	0
BIC		96	0	27,6	0	5,2	0	4,4	0,4	49,6	0	16,8	0	0	0	0	0
CCCc		0,8	12	8,8	1,2	13,6	18	20	3,6	0,4	2	8	0,4	0	2,8	0	0
CCCm		2,4	10,8	10,8	5,6	10,4	15,6	27,2	12,4	0,8	0	6	1,6	2,4	0	0	0
PRESSc		10,4	12	9,6	18,4	14	15,2	16,4	27,2	7,2	2,4	4,4	6	0,4	0,4	0,4	0,4
PRESSm		6,4	5,6	8,8	12	9,6	11,6	21,6	22,8	2,8	0	3,6	2	2,4	0	0	0,8
R2Wc		0	4,8	0	12,4	10,8	30	34,4	10,4	0	3,2	0	0	4,4	2,4	4,8	0,8
R2Wm		2,8	2	30,8	6,4	1,2	18,4	25,2	44	2	0	2	0	0,4	0,4	0	0,8
R2LR		0	0	0	4,4	0	14,8	45,6	78,8	0	0	0	2,8	0	0	0	0

m4		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt.	Str.	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		11,2	2	7,2	X	5,6	0	1,6	X	1,2	2	0,4	X	1,6	0	0	X
BIC		43,2	5,6	2,4	X	2,8	0	0	X	0	5,2	0	X	0	0	0	X
CCCc		6	0	0,8	X	22,8	2	14,4	X	0	0	0	X	14,8	0	0	X
CCCm		8,8	14,4	10,8	X	11,6	25,6	27,2	X	6,8	0,8	4	X	2,4	0	0	X
PRESSc		10,4	16,4	12	X	26,4	18,8	22	X	6	3,6	2,4	X	17,2	0	1,6	X
PRESSm		8	8,8	10	X	13,2	24,4	29,2	X	4	0,4	3,2	X	0,8	0	0,4	X
R2Wc		8,8	5,2	21,6	X	26,4	49,6	23,6	X	3,6	3,2	1,6	X	21,6	0,8	3,6	X
R2Wm		8,4	10,4	15,2	X	4,8	27,2	68,4	X	1,2	0	3,6	X	0	0	0	X
R2LR		0	0	0,4	X	0	68,8	99,2	X	0	0	0	X	0	0	0	X

Tablica A.2: Porównanie wyboru modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów. Wybór prawidłowej struktury efektów losowych b w modelu (w procentach dla każdego modelu bazowego). *Źródło:* opracowanie własne.

m1		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt,	Str,	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		96,8	5,6	4,4	X	100	4	2,8	X	90	1,6	3,6	X	1,2	2,8	6,8	X
BIC		100	0	0	X	100	0	0	X	99,2	100	6	X	2	0	0	X
CCCc		73,6	36,8	40	X	61,2	26,8	36,8	X	63,6	16,8	8,8	X	46,8	13,2	17,6	X
CCCm		68	63,6	81,6	X	66	55,6	71,2	X	22,4	13,2	36,8	X	60,8	10	12	X
PRESSc		68,8	63,6	81,2	X	54	56,8	68,8	X	24	16,4	38	X	35,6	12,4	14	X
PRESSm		70,4	63,6	81,6	X	53,2	57,6	70,4	X	23,2	17,2	37,2	X	36,8	11,6	9,2	X
R2Wc		33,2	52,8	85,6	X	1,6	43,6	71,2	X	2,8	19,2	60,8	X	0	17,2	69,6	X
R2Wm		52,4	66	54	X	19,6	47,6	50,4	X	31,2	39,2	19,6	X	7,6	27,6	50	X
R2LR		74	68,8	76	X	22	19,6	81,6	X	1,6	5,6	76,4	X	83,6	1,6	51,6	X

m2		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt,	Str,	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		85,6	6,4	39,6	X	88,4	1,6	42	X	80,8	0	31,6	X	71,6	4,4	36	X
BIC		99,2	0,8	10	X	99,2	0	11,2	X	98,8	0	8,8	X	95,6	0,4	10	X
CCCc		73,6	36,8	40	X	61,2	27,2	36,8	X	13,2	24,4	10	X	10,8	32	35,2	X
CCCm		46,8	45,2	82,8	X	46,8	31,2	26,8	X	26	22	56	X	22	18,4	16	X
PRESSc		58	54,8	70	X	44	53,2	81,6	X	18	9,6	22,4	X	20,4	17,6	22	X
PRESSm		39,6	36,8	70	X	41,2	36,8	37,2	X	28	21,2	45,2	X	23,2	14,8	30	X
R2Wc		28,8	42,8	48,4	X	18,8	44,4	28,8	X	19,2	46,4	36,8	X	11,6	28,4	46,4	X
R2Wm		29,2	34,4	95,6	X	23,6	50,4	87,2	X	8,8	8	62,4	X	16	4,4	69,6	X
R2LR		36,8	47,2	100	X	18,8	48	99,6	X	0,4	0	52,4	X	12,4	0	55,6	X

m3		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt,	Str,	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		84	4	60,4	5,2	86,8	1,6	55,2	6,8	82,4	1,2	41,2	2	79,2	0,8	42,4	4,4
BIC		98,4	0	29,2	0	98	0	32,8	0,8	98,8	0	24,8	0	96,8	0	29,2	0
CCCc		30	57,2	29,6	7,2	48,8	40	30,8	5,6	14,8	11,6	48,4	1,2	17,6	22,8	53,6	3,6
CCCm		41,6	48	56,8	29,2	31,2	56,8	64,4	20	19,6	25,2	19,2	9,2	23,6	30	21,2	15,6
PRESSc		51,6	61,2	50	62,4	46,4	60	50	62,4	16,8	12	10	19,6	22,4	10,4	2,8	17,2
PRESSm		37,2	44	39,2	40	32,8	43,6	50,8	38	23,6	27,6	14,4	17,6	27,6	25,2	20	29,6
R2Wc		25,6	61,2	42	62	15,2	59,2	38,8	17,2	12,4	34	2,8	3,2	12,4	16,4	5,2	13,6
R2Wm		28,4	39,2	82,4	58	19,2	55,6	76,8	48,8	9,2	5,6	20,8	17,2	7,2	2	44,4	20,4
R2LR		24	44	44,8	100	6	72,4	74	100	0	0	0	40,4	0	0	0	71,6

m4		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt,	Str,	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		73,2	54,4	45,2	X	56,4	50	88	X	46,4	39,6	12	X	42,4	50,4	31,2	X
BIC		90	48,8	24,4	X	86,4	26,8	63,2	X	63,2	18	2	X	66,4	39,6	23,6	X
CCCc		66,8	54,8	70,4	X	44,8	9,2	45,6	X	29,2	11,6	24,4	X	24,4	38,8	13,2	X
CCCm		46,4	68,4	58,4	X	29,2	47,2	50,4	X	28	37,2	25,6	X	19,2	46,8	18	X
PRESSc		53,6	64,4	62,4	X	40	41,6	53,2	X	30	26	25,6	X	30,8	27,2	12	X
PRESSm		40,8	54,8	61,6	X	39,2	44,8	48	X	21,2	29,2	18,8	X	23,6	36,8	14,4	X
R2Wc		44,8	79,2	58,8	X	28	51,6	31,2	X	12,4	44,4	9,2	X	29,6	62	6	X
R2Wm		24	59,6	82	X	17,2	50	86	X	12,4	38,8	34,8	X	12,4	43,6	19,2	X
R2LR		64,8	99,6	100	X	0	100	100	X	0	76	1,6	X	0	87,6	1,2	X

Tablica A.3: Porównanie wyboru modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów. Wybór prawidłowej struktury błędów losowych ε w modelu (w procentach dla każdego modelu bazowego). *Źródło:* opracowanie własne.

m1		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt,	Str,	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		71,2	91,2	91,6	X	100	77,2	96,8	X	22	70,4	70,8	X	0,8	8,4	49,2	X
BIC		95,2	100	100	X	98,4	77,2	99,6	X	24	95,6	94	X	0,4	2	50,4	X
CCCc		31,6	58,8	31,2	X	99,2	45,6	100	X	26,4	25,2	35,2	X	70,4	28	61,6	X
CCCm		40,8	36,4	36,4	X	57,2	52,8	54,8	X	33,2	35,6	35,2	X	2,8	5,6	5,2	X
PRESSc		27,6	30,8	26,4	X	80,8	72	69,6	X	22,8	25,6	22,4	X	12,8	9,6	12,8	X
PRESSm		27,6	32,4	28	X	78,8	70,4	84	X	25,2	26,4	25,2	X	12	11,2	12,4	X
R2Wc		30,8	27,2	44	X	98	89,6	64,8	X	14,4	22,8	13,6	X	0	24,8	0	X
R2Wm		32	29,2	32,8	X	96,8	54,4	93,6	X	19,6	26	24	X	34,8	20	32,8	X
R2LR		8	22,4	23,2	X	98	90,8	100	X	0	0	0	X	0	19,2	31,2	X

m2		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt,	Str,	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		83,2	91,6	88,8	X	20,4	25,2	30	X	49,2	54	58,8	X	0	0,8	1,2	X
BIC		98	99,6	100	X	3,6	24,8	24	X	52	59,6	94	X	0	0	0	X
CCCc		31,6	58,8	31,2	X	99,2	47,2	100	X	8	0	0	X	15,2	50,4	35,2	X
CCCm		52	49,6	54	X	56,4	54,4	88,4	X	24,4	8,4	3,2	X	7,2	5,2	13,6	X
PRESSc		32	36,4	38	X	42,8	41,2	46	X	27,2	24,8	13,6	X	6	3,6	2,4	X
PRESSm		60,4	54,8	67,6	X	50,4	48,8	87,6	X	23,2	11,6	6,4	X	6,8	4,8	13,6	X
R2Wc		38	19,6	42,8	X	93,6	59,6	92,8	X	22,4	2,4	0	X	27,6	45,6	40,4	X
R2Wm		53,2	51,6	44,4	X	20,4	48,4	38,8	X	40	37,6	30	X	6	6,4	0	X
R2LR		36	38,8	26	X	38	38	81,2	X	0	0	0	X	0	5,6	0	X

m3		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt,	Str,	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		86,4	97,2	81,6	97,6	17,2	94	27,6	91,2	48,8	53,2	43,6	2,8	0	2,4	0	0
BIC		97,6	100	97,2	100	5,2	100	26,4	99,2	50,8	57,2	52	0,4	0	0,4	0	0
CCCc		48,8	51,2	25,6	90,4	60	70,8	78,8	97,6	9,6	6	19,6	6,4	6,8	57,2	3,2	22,8
CCCm		52,4	50,8	49,2	69,6	63,6	38,4	54,4	91,2	15,6	10,4	14,8	12,4	8,8	2,8	2,8	7,2
PRESSc		37,2	33,6	33,2	43,2	43,2	35,2	47,6	46	32	22	26,4	30	6	6,8	11,6	4
PRESSm		56	50,4	66	70	61,6	49,2	63,2	82,8	18,8	11,6	19,6	11,6	8	8	4	9,2
R2Wc		32,4	11,6	40,4	17,6	92	64,8	71,6	92,8	11,6	8,4	2	0	28	44,8	33,6	56,4
R2Wm		47,6	50,8	41,2	42,4	25,6	44,4	37,6	92,4	26	29,6	2,4	6	2	6,8	1,2	12,4
R2LR		51,6	53,2	53,6	4,4	39,2	36,8	70,4	78,8	0	0	0	2,8	0	2	0	0,4

m4		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Kryt,	Str,	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
AIC		33,2	36	34	X	41,2	45,6	3,6	X	1,6	11,6	0,8	X	2,4	0,4	0	X
BIC		52,4	55,6	70,4	X	9,6	71,6	2,8	X	0	51,2	0	X	0	0	0	X
CCCc		8	42	7,6	X	73,2	92,8	67,6	X	0	5,6	0	X	39,2	2,4	0	X
CCCm		55,2	43,6	48,4	X	72,8	76,8	75,6	X	17,6	13,2	19,6	X	20,8	3,2	15,2	X
PRESSc		22,8	38,4	22	X	67,2	69,2	51,2	X	17,6	14,4	16,4	X	39,6	12	13,2	X
PRESSm		58,8	51,6	43,2	X	66,8	76,8	80	X	17,6	16,8	16	X	13,6	2,4	13,6	X
R2Wc		42,8	11,2	36,4	X	94,8	98	85,6	X	10,8	3,6	8,8	X	41,2	21,2	34,8	X
R2Wm		76,8	50,4	26,8	X	67,6	70,8	81,2	X	11,2	17,6	10,4	X	20,8	3,2	8,8	X
R2LR		35,2	0	0,4	X	100	68,8	99,2	X	0	0	0	X	4,8	0	0,4	X

Tablica A.4: Wybór modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów: m1. *Źródło:* opracowanie własne.

AIC		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Koniec	Start	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	68,8	83,2	82,4	X	0	17,2	0,4	X		20	68,8	63,2	X	0	68	0,8	X
DN	2,4	3,6	8	X	0	1,6	0	X		1,6	1,6	7,2	X	89,2	2	39,2	X
SN	0	4,4	1,2	X	0	0,8	2,8	X		0,4	0	0,4	X	8,8	0	6,8	X
ICo	10,4	2	1,6	X	100	75,2	96,8	X		0,8	7,6	0,4	X	0,8	8	49,2	X
CoCo	0	0	0	X	0	0,4	0	X		0	0	0	X	0	0,4	0	X
SCo	0	0	0	X	0	1,6	0	X		0	0	0	X	0	0	0	X
IAR1	12,4	4,8	3,6	X	0	0,8	0	X		69,2	19,2	0	X	0,4	14,4	0	X
DAR1	0,8	0	0	X	0	0,8	0	X		3,6	0	0,8	X	0	0,8	0,4	X
CoAR1	0	0	0,4	X	0	0	0	X		0	0	0	X	0	0	0	X
SAR1	0	0	0	X	0	0	0	X		4,4	0,4	0	X	0	0	0	X
IARMA	5,2	0	0	X	0	0	0	X		0	2,4	24,4	X	0	6,4	3,6	X
DARMA	0	2	0	X	0	1,6	0	X		0	0	0,4	X	0	0	0	X
CoARMA	0	0	2,8	X	0	0	0	X		0	0	0,4	X	0,8	0	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X		0	0	2,8	X	0	0	0	X

BIC		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
		IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	95,2	100	99,6	X	1,6	22,8	0,4	X		23,6	95,6	93,6	X	1,6	94,4	2	X
DN	0	0	0,4	X	0	0	0	X		0,4	0	0,4	X	97,2	0	46	X
SN	0	0	0	X	0	0	0	X		0	0	0	X	0,4	0	1,2	X
ICo	1,6	0	0	X	98,4	77,2	99,6	X		0	0,8	0	X	0,4	2	50,4	X
IAR1	3,2	0	0	X	0	0	0	X		75,6	3,6	0	X	0	2,8	0	X
DAR1	0	0	0	X	0	0	0	X		0,4	0	0	X	0,4	0	0,4	X
IARMA	0	0	0	X	0	0	0	X		0	0	6	X	0	0,8	0	X

CCCc		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
		IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	19,2	41,2	19,6	X	0	17,6	0	X		14,8	16	22,8	X	0	18	0	X
DN	9,2	8,8	8	X	0	10,4	0	X		6,8	7,2	8,8	X	0	10	0	X
CoN	2,8	7,6	3,2	X	0	1,2	0	X		3,6	1,2	2,4	X	0	1,6	0	X
SN	0,4	1,2	0,4	X	0	0,8	0	X		1,2	0,8	1,2	X	0	0,4	0	X
ICo	17,6	0,4	18,8	X	60,4	30,8	63,2	X		10	13,6	0	X	46,4	21,2	44	X
CoCo	9,2	0	12,8	X	38,8	14,8	36,8	X		6	5,6	0	X	24	6,8	17,6	X
IAR1	13,2	10,4	10	X	0	6	0	X		38,8	38,8	0,4	X	0,4	9,6	0	X
DAR1	3,2	5,2	3,6	X	0	2,4	0	X		10,4	9,6	1,2	X	0	3,2	0	X
CoAR1	1,2	2	2	X	0	0,4	0	X		5,2	4	0	X	0	0,8	0	X
SAR1	0,4	0	0	X	0	0	0	X		0,8	0	0	X	0	0	0	X
IARMA	22,8	0	0	X	0	0	0	X		0	2	44	X	0	27,2	38	X
DARMA	0	22,8	0	X	0	13,6	0	X		0	0	12	X	0	0	0	X
CoARMA	0	0	21,6	X	0	0	0	X		2,4	0	4,4	X	29,2	0	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X		0	0	0,8	X	0	0	0	X
IS	0,8	0,4	0	X	0,8	1,6	0	X		0	1,2	0,4	X	0	1,2	0,4	X
DS	0	0	0	X	0	0,4	0	X		0	0	1,6	X	0	0	0	X

CCCm		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
		IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	21,6	7,2	7,2	X	14,4	4	2,4	X		4,8	17,6	8	X	10,8	17,6	22	X
DN	7,2	16,4	0,4	X	1,6	6	0	X		0,8	6,8	18,4	X	3,2	7,2	8	X
CoN	10	2,8	23,2	X	2,4	0,8	17,2	X		19,2	8,8	1,6	X	12,4	10	9,6	X
SN	2	10	5,6	X	0	3,6	4	X		8,4	2,4	7,2	X	11,2	2,8	2	X
ICo	2,4	0,4	0	X	27,6	6,8	7,2	X		0	4,8	0	X	0	5,2	5,2	X
DCo	0	6,8	0	X	18,8	28,4	1,6	X		0	0	0,8	X	0	0,4	0	X
CoCo	0	0	4	X	9,2	1,6	33,6	X		3,6	0	0	X	2,8	0	0	X
SCo	0,4	0	0	X	1,6	16	12,4	X		0,4	0	0	X	0	0	0	X
IAR1	8,8	6,4	8,4	X	20	2,8	16,8	X		17,6	19,6	2,4	X	50	10,8	46,4	X
DAR1	1,6	2	2,4	X	0,4	1,6	0,8	X		4	6,4	0,8	X	2,4	1,6	0,8	X
CoAR1	2	1,2	3,2	X	0	2,8	0	X		6,8	4,8	1,2	X	0	4,4	0	X
SAR1	8	8	10,4	X	0	5,2	0,8	X		27,2	20,8	2,8	X	0	7,2	0,4	X
IARMA	34,8	0	0	X	3,2	0	0	X		0	6,8	19,2	X	0	30,8	5,2	X
DARMA	0	37,6	0	X	0	18,8	0	X		0	0	12,4	X	0	0	0	X
CoARMA	0	0	35,2	X	0	0	3,2	X		6,8	0	6,4	X	7,2	0	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X		0	0	17,6	X	0	0	0	X
IS	0,4	0,4	0	X	0,8	0,8	0	X		0	1,2	0,4	X	0	1,2	0,4	X
DS	0,8	0,8	0	X	0	0,8	0	X		0	0	0,8	X	0	0,8	0	X
CoS	0	0	0	X	0	0	0	X		0,4	0	0	X	0	0	0	X

tabela m1, kontynuacja tabeli z poprzedniej strony																
PRESSc start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	11,6	4,8	5,6	X	8	0,4	0,8	X	4,8	12,8	3,2	X	6,8	14	14,4	X
DN	6	16	1,2	X	0,8	7,2	0,4	X	0,4	4,4	11,2	X	2,8	7,2	9,2	X
CoN	7,2	0,8	10	X	0,8	0,8	7,2	X	12	6,8	0	X	17,2	4,4	8,4	X
SN	2,8	9,2	9,6	X	0	0,4	2,8	X	5,6	1,6	8	X	10,8	0,4	1,2	X
ICo	8,8	1,6	0	X	37,6	17,6	11,2	X	0,8	8,4	0,4	X	0,8	8,8	10	X
DCo	1,2	7,6	0	X	24	36	5,2	X	0	2,8	8,4	X	0,4	0,4	1,6	X
CoCo	1,2	0,4	8	X	13,2	5,2	35,2	X	7,2	0,4	0	X	9,6	0,4	0,8	X
SCo	0,4	2,4	1,6	X	6	13,2	18	X	1,2	0,8	0,8	X	2	0	0,4	X
IAR1	10	6,8	8,8	X	5,6	1,6	13,2	X	18,4	21,6	2	X	28	9,6	33,6	X
DAR1	2	2,8	3,2	X	0,4	2,8	0,4	X	4,8	8,4	1,2	X	1,6	3,6	0	X
CoAR1	2	1,6	2	X	0,4	0,8	1,2	X	6	4,4	0	X	3,6	2	3,2	X
SAR1	8	8,4	8,8	X	0	2,4	0,4	X	32	16,8	1,6	X	1,6	6	0	X
IARMA	35,6	0	0	X	1,6	0	0	X	0	8,4	17,6	X	0	40,4	16	X
DARMA	0	35,6	0	X	0	8,4	0	X	0	0	14,4	X	0	0	0	X
CoARMA	0	0	41,2	X	0	0	4	X	6,4	0	7,6	X	14,8	0	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	20	X	0	0	0	X
IS	2,8	0,4	0	X	1,2	0,8	0	X	0	1,6	0,8	X	0	1,6	1,2	X
DS	0	1,6	0	X	0,4	2,4	0	X	0	0,8	2,8	X	0	1,2	0	X
CoS	0,4	0	0	X	0	0	0	X	0,4	0	0	X	0	0	0	X
PRESSm start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	13,6	5,6	4,8	X	6	2	0	X	4	16,8	5,2	X	8	12,4	16,4	X
DN	9,2	15,6	1,2	X	0,8	6	0,4	X	1,6	6,4	12	X	2	5,2	12,4	X
CoN	3,6	2,4	12,8	X	1,6	0,4	4	X	13,2	2,8	1,2	X	19,6	6,4	3,6	X
SN	1,2	8,8	9,2	X	0	1,6	2	X	6,4	0,4	6,8	X	8,8	1,2	1,6	X
ICo	7,6	1,2	0	X	34,8	18	20,4	X	0,8	9,2	0,8	X	0,8	8,8	10,4	X
DCo	1,2	8	0,4	X	23,6	35,2	2,8	X	0	1,6	6	X	0	2	1,2	X
CoCo	2	0	7,6	X	17,2	3,2	46,8	X	5,6	0,4	0	X	9,6	0,4	0,8	X
SCo	0	1,2	0	X	3,2	14	14	X	0,4	0,4	0	X	1,6	0	0	X
IAR1	10	6,8	8,8	X	7,2	0,8	6	X	18,4	21,6	2	X	28	9,6	33,6	X
DAR1	2	2,8	3,2	X	0	1,2	0	X	4,8	8,4	1,2	X	1,6	3,6	0	X
CoAR1	2	1,6	2	X	0	0,4	0,8	X	6	4,4	0	X	3,6	2	3,2	X
SAR1	8	8,4	8,8	X	0	1,2	0	X	32	16,8	1,6	X	1,6	6	0	X
IARMA	35,6	0	0	X	4	0	0	X	0	8,4	17,6	X	0	40,4	16	X
DARMA	0	35,6	0	X	0	12,8	0	X	0	0	14,4	X	0	0	0	X
CoARMA	0	0	41,2	X	0	0	2,8	X	6,4	0	7,6	X	14,8	0	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	20	X	0	0	0	X
IS	3,6	0,4	0	X	1,2	0,8	0	X	0	1,6	0,8	X	0	1,2	0,8	X
DS	0	1,6	0	X	0,4	2,4	0	X	0	0,8	2,8	X	0	0,8	0	X
CoS	0,4	0	0	X	0	0	0	X	0,4	0	0	X	0	0	0	X
R2Wc start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	0,8	0	0,4	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0,4	X
DN	3,2	4,4	6	X	0	1,6	6	X	2	4	1,2	X	34,8	4,4	29,2	X
CoN	0	0	0,8	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X
SN	26,8	22,8	36,8	X	0	0,8	28,4	X	12,4	18,8	12,4	X	64,8	27,2	69,6	X
ICo	4,8	0,4	1,6	X	0	3,2	0	X	0,8	2	0,8	X	0	4	0	X
DCo	8,4	16,8	4,8	X	51,6	35,6	22,4	X	2,4	4	16,8	X	0	8	0	X
CoCo	3,2	2	9,6	X	0	1,2	0,4	X	4	1,2	0,4	X	0	4	0	X
SCo	8,4	11,6	2,4	X	46,4	49,6	42	X	4,4	9,2	6,4	X	0	8,8	0	X
IAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	2	4	0	X	0	0	0	X
DAR1	3,2	1,6	1,6	X	0	1,6	0,4	X	5,6	10	0	X	0,4	3,2	0	X
CoAR1	1,2	0	0	X	0	0,4	0	X	4	4	0	X	0	2	0	X
SAR1	10,4	10,4	14,8	X	0	1,2	0	X	62	40,8	0	X	0	9,6	0	X
IARMA	26,8	0	0	X	0	0	0	X	0	0	4,8	X	0	26,8	0,4	X
DARMA	0	28	0	X	0	3,2	0	X	0	0	11,2	X	0	0	0	X
CoARMA	0	0	21,2	X	0	0	0,4	X	0	0	2	X	0	0	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	39,6	X	0	0	0	X
IS	0,8	0	0	X	1,6	0	0	X	0	0,8	0	X	0	0,4	0	X
DS	2	2	0	X	0,4	1,6	0	X	0	1,2	4,4	X	0	1,6	0,4	X
CoS	0	0	0	X	0	0	0	X	0,4	0	0	X	0	0	0	X
tabela m1, kontynuacja tabeli na następnej stronie																

tabela m1, kontynuacja tabeli z poprzedniej strony																
R2Wm		start z modelu o prawdziwych strukturach							start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	11,2	9,2	13,2	X	0	12,4	0	X	7,2	9,2	10,8	X	0	13,2	0	X
DN	12,8	9,6	10,8	X	0	5,6	0	X	5,6	8,8	9,2	X	1,6	10	22,4	X
CoN	2,8	2	3,2	X	1,2	0,8	6	X	3,2	2,8	0,4	X	9,6	5,2	6,4	X
SN	5,2	8,4	5,6	X	0	0,8	0	X	3,6	5,2	3,6	X	51,6	4,4	34,4	X
ICo	5,6	4,4	1,2	X	17,6	8,8	9,6	X	2,4	4,4	1,6	X	7,6	4,4	6,4	X
DCo	10,8	10,4	7,2	X	42,8	21,6	40	X	8,4	5,2	15,6	X	14,8	9,2	17,2	X
CoCo	0,8	0,8	11,2	X	6,8	4	12,4	X	0,8	1,6	0,8	X	8,4	3,2	1,2	X
SCo	1,6	1,6	4,4	X	29,6	20	31,6	X	2,4	1,2	1,6	X	4	3,2	8	X
IAR1	5,6	4,8	6,4	X	0	4	0	X	21,2	18	0	X	0	6	0	X
DAR1	8,8	7,6	7,2	X	0	5,2	0	X	20	24	0	X	0	7,6	0	X
CoAR1	1,2	0,4	4	X	0	0	0	X	8	3,2	0	X	0	1,2	0	X
SAR1	2,4	1,6	1,6	X	0	0,4	0	X	16,4	13,6	0	X	0	2	0	X
IARMA	28	0	0	X	0	0	0	X	0	0	13,2	X	0	27,2	2,8	X
DARMA	0	36,4	0	X	0	12,8	0	X	0	0	25,6	X	0	0	0	X
CoARMA	0	0	24	X	0	0	0,4	X	0,4	0	1,6	X	2,4	0	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	11,6	X	0	0	0	X
IS	2	0,8	0	X	2	1,2	0	X	0,4	1,6	1,2	X	0	2,4	1,2	X
DS	1,2	2	0	X	0	2,4	0	X	0	1,2	3,2	X	0	0,8	0	X

R2LR		start z modelu o prawdziwych strukturach							start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
SN	8	22,4	23,2	X	0	0,8	0	X	0	0	0	X	83,6	9,6	31,6	X
ICo	2,4	1,2	0,8	X	20	5,2	14,4	X	0	0	0	X	0	4	10,4	X
DCo	2,8	3,6	0	X	4,4	13,2	4	X	0	0	0	X	0	0,8	0,8	X
CoCo	4	1,2	6,4	X	20,4	14	19,2	X	0	0	0	X	0	5,2	6	X
SCo	10	4	6	X	53,2	58,4	62,4	X	0	0	0	X	0	9,2	14	X
IAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	1,2	4	0	X	0	0	0	X
DAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	1,6	4,8	0	X	0	0	0	X
CoAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	3,2	2,4	0	X	0	0	0	X
SAR1	0	0,8	1,2	X	0	0,4	0	X	93,6	85,6	0	X	0	0,4	0	X
IARMA	68,8	0	0	X	0	0	0	X	0	0	4	X	0	67,2	36	X
DARMA	0	63,2	0	X	0	4,4	0	X	0	0	14,8	X	0	0	0	X
CoARMA	0	0	62,4	X	0	0	0	X	0	0	2	X	16,4	0	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	74,4	X	0	0	0	X
IS	2,8	1,6	0	X	2	1,6	0	X	0,4	2,4	1,6	X	0	2,8	1,2	X
DS	1,2	2	0	X	0	2	0	X	0	0,8	3,2	X	0	0,8	0	X

Tablica A.5: Wybór modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów: m2. *Źródło:* opracowanie własne.

AIC		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Koniec	Start	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN		70	75,2	48,8	X	59,6	63,6	36,4	X	36,8	42,8	42,8	X	68	79,2	50,8	X
DN		0,8	3,2	5,6	X	0	0,8	0	X	0,4	0	0	X	13,6	4,4	0	X
CoN		11,6	11,6	28,4	X	6	6,4	24	X	10,8	11,2	15,2	X	8	8	24	X
SN		0,8	1,6	6	X	0	0,8	4,8	X	1,2	0	0,8	X	3,2	2	8	X
ICo		2,8	0	0	X	15,6	22	19,6	X	0	37,6	10,8	X	0	0,8	0,8	X
CoCo		0	0	0	X	4,8	2,4	7,2	X	0	1,6	11,2	X	0	0	0,4	X
SCo		0	0	0	X	0	0,8	3,2	X	0	0	2,4	X	0	0	0	X
IAR1		11,2	4,8	5,2	X	9,2	2,4	1,2	X	44	2,4	6,8	X	3,6	4,4	10,8	X
DAR1		0	1,6	0,8	X	0,4	0,4	0	X	2,8	0	0,8	X	3,2	0	0	X
CoAR1		1,2	0,4	3,6	X	0,4	0	2	X	1,6	2	1,2	X	0,4	1,2	3,2	X
SAR1		0	0	0	X	0	0	0	X	1,6	0	0	X	0	0	0,4	X
IARMA		0,8	0	0	X	0,8	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0,8	X
DARMA		0	1,6	0	X	0	0,4	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X
CoARMA		0	0	1,2	X	0	0	0,8	X	0	1,6	0	X	0	0	0	X
IS		0,8	0	0	X	3,2	0	0,8	X	0	0,4	7,2	X	0	0	0,8	X
CoS		0	0	0,4	X	0	0	0	X	0,8	0,4	0,8	X	0	0	0	X

BIC		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
		IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN		97,2	98	88,4	X	93,2	74,8	65,2	X	50,8	59,2	85,6	X	95,6	98,4	86,4	X
DN		0,4	0,8	1,6	X	0	0	0	X	0,4	0	0	X	3,6	0,4	0	X
CoN		0,4	0,8	9,2	X	0,4	0,4	9,6	X	0,8	0,4	8,4	X	0,4	1,2	8,8	X
SN		0	0	0,8	X	0	0	1,2	X	0	0	0	X	0	0	1,2	X
ICo		0,8	0	0	X	3,6	24	23,6	X	0	39,2	2,4	X	0	0	0	X
CoCo		0	0	0	X	0	0,8	0	X	0	0,4	0	X	0	0	0	X
SCo		0	0	0	X	0	0	0,4	X	0	0	0	X	0	0	0	X
IAR1		1,2	0,4	0	X	2,4	0	0	X	48	0,4	2,8	X	0	0	3,6	X
DAR1		0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0,4	X	0,4	0	0	X
CoAR1		0	0	0	X	0,4	0	0	X	0	0,4	0,4	X	0	0	0	X

CCCc		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
		IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN		19,2	41,2	19,6	X	0	17,6	0	X	0	0	0	X	7,6	0,4	0	X
DN		9,2	8,8	8	X	0	10,4	0	X	6	0	0	X	6	28,8	51,6	X
CoN		2,8	7,6	3,2	X	0	1,2	0	X	0,4	0	0	X	32,4	0,8	0,8	X
SN		0,4	1,2	0,4	X	0	0,8	0	X	1,6	0	0	X	6,8	6,8	1,2	X
ICo		17,6	0,4	18,8	X	60,4	30,8	63,2	X	4	19,2	30	X	0	20	2	X
DCo		0	0	0	X	0	2	0	X	1,2	23,6	8,8	X	14,8	1,6	0	X
CoCo		9,2	0	12,8	X	38,8	14,4	36,8	X	7,6	41,6	8,4	X	0	27,2	33,2	X
SCo		0	0	0	X	0	0	0	X	0	9,2	1,2	X	0,4	1,6	0	X
IAR1		13,2	10,4	10	X	0	6	0	X	4,4	0	0	X	0,8	0	0	X
DAR1		3,2	5,2	3,6	X	0	2	0	X	33,2	0	0	X	7,2	1,2	2	X
CoAR1		1,2	2	2	X	0	0,4	0	X	15,6	0	0	X	0	0,8	0	X
SAR1		0,4	0	0	X	0	0	0	X	12	0	0	X	2,8	0,4	0	X
IARMA		22,8	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	1,6	X
DARMA		0	22,8	0	X	0	12,4	0	X	0	0	0	X	9,6	0	0	X
CoARMA		0	0	21,6	X	0	0	0	X	0,4	0	0	X	0	6,4	0	X
IS		0,8	0,4	0	X	0,8	1,6	0	X	4,8	4	47,2	X	2,4	1,6	5,6	X
DS		0	0	0	X	0	0,4	0	X	1,2	0,8	4	X	9,2	0,4	2	X
CoS		0	0	0	X	0	0	0	X	6,4	1,6	0	X	0	1,6	0	X
SS		0	0	0	X	0	0	0	X	1,2	0	0,4	X	0	0,4	0	X

tabela m2, kontynuacja tabeli na następnej stronie

tabela m2, kontynuacja tabeli z poprzedniej strony																	
CCCm		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	
IN	8,8	6,4	5,2	X	5,6	3,2	0	X	2,8	0	2,4	X	9,2	18,8	13,2	X	
DN	8	11,2	7,2	X	0,4	6	0	X	7,2	0	0	X	10,4	16,8	14,4	X	
CoN	22,4	18,4	10	X	0	0,8	3,6	X	10,4	8,4	0	X	14,4	13,6	6,4	X	
SN	12,8	13,6	31,6	X	0	1,6	0	X	4	0	0,8	X	19,2	10,8	8,8	X	
ICo	4	1,2	0	X	15,6	15,2	44,4	X	0	25,2	5,2	X	2,8	0	9,2	X	
DCo	2	5,2	0	X	12	7,2	27,2	X	0	21,6	3,6	X	4,4	0	4,4	X	
CoCo	0	0	3,2	X	14,8	12,8	5,6	X	4	12,8	25,2	X	0	4,8	0	X	
SCo	0	0	1,6	X	14	19,2	11,2	X	0,4	12	26,8	X	0	0,4	0	X	
IAR1	4,4	4,8	2,8	X	0,4	2,4	0	X	20,4	0	2	X	2,8	2,8	6	X	
DAR1	2	6,8	1,2	X	2	1,6	0	X	16,4	0	0,8	X	10,8	1,6	7,6	X	
CoAR1	1,2	1,6	8,4	X	0	0,4	0,4	X	11,2	4,4	0	X	0,8	11,6	0,4	X	
SAR1	0,8	1,2	2	X	0	0	0	X	13,2	1,2	0	X	0,8	1,2	0	X	
IARMA	22,4	0	0	X	8,4	0	0	X	0	0	4,8	X	0	0	15,2	X	
DARMA	0	15,2	0	X	0	5,2	0	X	0	0	0	X	14	0	0	X	
CoARMA	0	0	20,4	X	0	0	2,4	X	2	7,2	0	X	0	16	0	X	
IS	7,2	7,2	0,4	X	16,8	12,8	0,8	X	2,8	2	17,6	X	7,2	0	11,2	X	
DS	3,2	6,8	0,4	X	8	11,2	0,8	X	0,4	0,4	7,6	X	3,2	0	2,8	X	
CoS	0,8	0	5,2	X	1,6	0,4	3,6	X	4,4	3,6	2,8	X	0	1,6	0,4	X	
SS	0	0,4	0,4	X	0,4	0	0	X	0,4	1,2	0,4	X	0	0	0	X	
PRESSc		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	
IN	14,4	9,2	8	X	8	1,6	2,8	X	5,6	5,2	8,4	X	8,8	8,4	11,2	X	
DN	10,4	13,6	3,2	X	5,6	6,4	2	X	2,4	1,6	1,2	X	14,4	4,8	12,4	X	
CoN	5,2	4,4	14	X	2,8	0,8	10,4	X	12,4	12,4	2,4	X	3,6	14	10,4	X	
SN	2	9,2	12,8	X	1,6	2	4,4	X	6,8	5,6	1,6	X	6	10,8	2,8	X	
ICo	4,4	0	1,2	X	13,6	4,4	2,4	X	0,8	5,6	20	X	1,2	1,6	2	X	
DCo	1,2	1,6	0	X	14	17,6	6,4	X	0,4	5,2	15,2	X	3,6	0	0	X	
CoCo	0,4	0,4	2	X	8,4	1,2	13,6	X	2,4	11,6	9,2	X	0	1,2	0,4	X	
SCo	0	2,4	1,6	X	6,8	18	23,6	X	0,4	22,4	5,6	X	1,2	0,8	0	X	
IAR1	3,2	1,6	5,6	X	1,2	0	1,6	X	10,4	0,8	1,2	X	1,6	3,6	1,2	X	
DAR1	10	6,4	10,4	X	2,4	4	2	X	15,6	2,4	3,2	X	5,2	11,6	10,4	X	
CoAR1	2,8	0,8	4,8	X	0,4	1,2	2,8	X	13,6	2,8	0,8	X	0,8	5,2	2	X	
SAR1	4	11,6	3,6	X	2,8	5,2	4,4	X	15,2	6	1,6	X	10	8,8	6	X	
IARMA	28,8	0	0	X	8,8	0	0	X	0	0	8	X	0	0	32,4	X	
DARMA	0	25,6	0	X	0	12,4	0	X	0	0	0	X	25,6	0	0	X	
CoARMA	0	0	20,4	X	0	0	17,2	X	5,6	14	0	X	0	24	0	X	
IS	7,2	5,6	0,8	X	12,4	12	0,8	X	1,2	1,2	13,6	X	8,8	2	4,4	X	
DS	5,2	7,6	0,8	X	10,4	12,8	0,4	X	0,8	0,4	6,8	X	8,4	1,2	4	X	
CoS	0,4	0	10	X	0,4	0	4,8	X	5,6	2,4	1,2	X	0,4	1,2	0,4	X	
SS	0,4	0	0,8	X	0,4	0,4	0,4	X	0,8	0,4	0	X	0,4	0,8	0	X	
PRESSm		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	
IN	10	10,4	16,8	X	6	4	0	X	3,2	0	5,6	X	9,6	27,2	13,6	X	
DN	5,2	7,6	11,2	X	0,8	2,4	0	X	2,8	0	0	X	9,2	14	13,2	X	
CoN	28	17,6	14,4	X	0	0,4	5,2	X	13,2	11,2	0	X	13,2	12	8	X	
SN	17,2	19,2	25,2	X	0	0,4	0	X	4	0,4	0,8	X	20,4	6,8	18,4	X	
ICo	4,4	1,6	0	X	9,6	17,2	35,2	X	0	25,2	8,8	X	0,8	0	8	X	
DCo	1,6	3,6	0	X	11,2	9,2	25,6	X	0	20,8	8,4	X	6	0	5,6	X	
CoCo	0	0	3,2	X	14,8	10,8	6	X	3,6	13,2	17,6	X	0	3,6	0	X	
SCo	0,4	0	0,4	X	14,8	11,6	20,8	X	0,4	16,8	20,8	X	0	1,2	0	X	
IAR1	5,2	3,6	1,6	X	5,2	2	0,4	X	24	0	4,4	X	4	2,4	2,8	X	
DAR1	2	7,2	0	X	2,8	3,2	0	X	12,4	0,4	0,8	X	9,6	0,8	4,4	X	
CoAR1	2	0	3,6	X	0,4	0	1,2	X	14,8	4	0,4	X	0,4	6,4	2	X	
SAR1	0,8	2	1,6	X	0	0	1,2	X	13,2	0	0	X	0,8	1,6	1,6	X	
IARMA	13,6	0	0	X	5,6	0	0	X	0	0	5,6	X	0	0	12,4	X	
DARMA	0	12,8	0	X	0	7,6	0	X	0	0	0	X	12,8	0	0	X	
CoARMA	0	0	16,8	X	0	0	1,2	X	1,2	5,6	0	X	0	22	0	X	
IS	6,4	8,8	0,4	X	14,8	15,6	0,8	X	0,8	0,4	11,2	X	8,8	0,8	8	X	
DS	2,8	5,6	0	X	10,8	14,4	0,8	X	0,4	0	10	X	4	0	2	X	
CoS	0,4	0	4,4	X	2,8	0	1,6	X	6	2	5,2	X	0	1,2	0	X	
SS	0	0	0,4	X	0,4	1,2	0	X	0	0	0,4	X	0,4	0	0	X	
tabela m2, kontynuacja tabeli na następnej stronie																	

tabela m2, kontynuacja tabeli z poprzedniej strony																
R2Wc start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	0,4	1,2	0,4	X	0	0	0	X	0,4	0	0	X	0	0,8	0	X
DN	17,6	2,4	34,4	X	0	0,4	0,4	X	9,6	0,8	0	X	4,8	19,6	4	X
SN	20	16	8	X	0	3,6	0,8	X	12,4	1,6	0	X	18	22,8	38,4	X
ICo	22,4	15,2	7,2	X	14,8	26	33,2	X	4,4	21,6	12,8	X	9,6	17,2	22,8	X
DCo	8,8	10	2,8	X	53,6	14,8	34	X	0,4	45,2	46,8	X	10,8	5,6	10	X
CoCo	15,2	11,6	21,6	X	18	15,2	10	X	5,2	22,4	21,2	X	6,8	20,8	7,6	X
SCo	0	1,2	4	X	7,2	3,6	15,6	X	0	6	15,6	X	0,4	2	0	X
IAR1	0	0,4	0	X	0	0	0	X	10,8	0	0	X	0	0	0	X
DAR1	4,4	0,4	6,8	X	0	0,4	0,4	X	15,6	0,4	0	X	1,2	3,2	0,4	X
CoAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	10,8	0	0	X	0	0	0	X
SAR1	3,2	8,8	1,2	X	0	2,8	0	X	25,2	0,8	0	X	13,2	6	0,4	X
IARMA	2	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0,8	X
DARMA	0	14,8	0	X	0	10,8	0	X	0	0	0	X	18,4	0	0	X
CoARMA	0	0	12,8	X	0	0	0	X	0	0,4	0	X	0	2	0	X
IS	4	2,8	0	X	4	4	1,6	X	3,6	0	1,6	X	2	0	8,8	X
DS	2	15,2	0	X	2,4	18	1,6	X	0,8	0	2	X	14,8	0	6,8	X
CoS	0	0	0,8	X	0	0	2,4	X	0,8	0,8	0	X	0	0	0	X
SS	0	0	0	X	0	0,4	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X

R2Wm start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	5,6	5,6	2,4	X	4,4	0,8	4,8	X	5,2	4	3,6	X	6	4,4	5,2	X
DN	5,6	2	0,4	X	0	0,8	0	X	3,2	0	0	X	0,4	2,8	3,6	X
CoN	30,8	34	31,2	X	36	1,6	44,8	X	27,2	33,6	23,6	X	48	33,2	51,6	X
SN	11,2	10	10,4	X	0	0	0	X	4,4	0	2,8	X	8,8	9,6	9,2	X
ICo	0,8	0	0	X	0,8	8,8	1,6	X	0	0,4	0	X	0,4	0	0	X
DCo	0,4	3,6	0	X	10	22,4	6	X	0,4	8	3,6	X	4,8	1,2	0	X
CoCo	0	0,4	2,4	X	1,6	2,4	14,4	X	1,6	14,8	5,6	X	0	2	0	X
SCo	0	0,4	1,6	X	8	14,8	16,8	X	0,4	24	16,4	X	0,8	3,2	0	X
IAR1	3,2	2	0,8	X	1,2	0	0	X	3,6	1,6	0	X	1,6	3,2	0,8	X
DAR1	1,6	2,4	0	X	0	0,4	0	X	6,8	0	0	X	2	0,4	0,4	X
CoAR1	8,8	4,8	12,8	X	4,4	1,6	2	X	20,8	3,2	6	X	3,6	13,6	6,4	X
SAR1	0,4	0,8	0,4	X	0	0,8	0	X	16	0	0	X	1,2	1,6	0,4	X
IARMA	12,8	0	0	X	2,8	0	0	X	0	0	1,2	X	0	0	7,2	X
DARMA	0	9,6	0	X	0	2,4	0	X	0	0	0	X	4	0	0	X
CoARMA	0	0	23,2	X	0	0	3,2	X	1,6	4	0	X	0	20,4	0	X
IS	6,8	5,2	0	X	14,4	15,2	0	X	0	0,4	18,8	X	8	0	6	X
DS	8,8	16,8	0,8	X	12,8	24,4	0,4	X	0	0	10,4	X	10	0	7,2	X
CoS	2	1,2	12,4	X	3,2	2	5,2	X	6,8	4	7,2	X	0	3,6	1,6	X
SS	1,2	1,2	1,2	X	0,4	1,6	0,8	X	2	2	0,8	X	0,4	0,8	0,4	X

R2LR start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
DN	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0,4	X
SN	36	38,8	26	X	0	0,4	0	X	0	0	0	X	38,4	15,6	50,8	X
ICo	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0,8	X	0	0	0	X
DCo	0	0	0	X	0,8	7,2	0	X	0	0	2	X	0	0	0	X
CoCo	0,8	0	0,8	X	12	7,2	18,4	X	0	32	10,8	X	0	4,4	0	X
SCo	0,8	0	1,2	X	25,2	23,6	62,8	X	0	56,8	28,8	X	0	1,2	0	X
CoAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	2,8	0	0	X	0	0	0	X
SAR1	0,4	0,4	0,4	X	0	0	0	X	80,8	0	0	X	0	1,2	0	X
IARMA	24	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	22,8	X
DARMA	0	17,6	0	X	0	0,8	0	X	0	0	0	X	14,8	0	0	X
CoARMA	0	0	50,8	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	67,2	0	X
IS	12,8	10	0	X	18,8	15,2	0	X	0,4	0,4	25,6	X	12,4	0,4	5,6	X
DS	19,6	29,6	0	X	36	40	0,4	X	0	0	19,2	X	30,8	0	15,6	X
CoS	4,4	1,6	18	X	6	2	15,2	X	13,6	7,2	10,4	X	1,2	8	2,8	X
SS	1,2	2	2,8	X	1,2	3,6	3,2	X	2,4	3,6	2,4	X	2,4	2	2	X

Tablica A.6: Wybór modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów: m3. *Źródło:* opracowanie własne.

AIC		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Koniec	Start	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
	IN	72,4	83,6	34,8	72,8	64,8	1,6	20,8	0,8	37,6	44,4	14,8	1,6	2,4	73,6	38	64
	DN	2,8	2,8	0	1,2	0,4	0,8	0	0	0,4	0,4	9,6	1,2	4	0,8	9,2	0,4
	CoN	11,2	10	45,6	20,4	7,2	0,4	38,4	1,2	10,8	8,4	18	0	1,2	14,4	40,8	27,2
	SN	0	0,8	1,2	3,2	0	0,4	0	4	0	0	1,2	0	0	1,6	2,8	4,4
	ICo	2,8	0	2	0	12,4	79,6	18,8	64	0,4	39,6	0	74,8	0	2	0	0
	DCo	0	0	0	0	1,2	0	0,4	0	0	0,8	0	0	0	0	0	0
	CoCo	0	0	4	0	3,6	13,6	8,4	26,8	0	2	0	18,8	0	0,4	0	0
	SCo	0	0	0	0	0	0,8	0	0,4	0	0	0	2	0	0	0	0
	IAR1	7,2	1,6	1,2	0	5,6	0,4	3,6	0,4	44,4	1,2	0	0	76,4	5,2	1,6	2,8
	DAR1	0,4	0,8	0,4	0,4	0	0,8	0	0	2,4	0	0,8	0	3,6	0	4,8	0
	CoAR1	1,6	0	8,8	0	0,4	0,4	6	0	2,8	1,6	0	0	10,4	0,8	1,6	0,4
	SAR1	0	0	0	1,6	0	0	0,4	2	0,4	0	0	0	0,8	0	0,8	0
	IARMA	1,6	0	0	0	2,4	0	0	0	0	0	23,6	0	0	0	0	0
	DARMA	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	3,6	0	0	0	0,4	0,8
	CoARMA	0	0	0,8	0	0	0	2	0	0,4	0,4	22,8	0	0	1,2	0	0
	SARMA	0	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0	2,8	0	0	0	0	0
	IS	0	0	0	0	1,6	1,2	0,8	0	0	1,2	1,2	1,2	0,4	0	0	0
	DS	0	0	0	0	0,4	0	0	0	0	0	1,2	0,4	0,8	0	0	0
	CoS	0	0	1,2	0	0	0	0,4	0	0,4	0	0,4	0	0	0	0	0
	SS	0	0	0	0	0	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0

BIC		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Koniec	Start	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
	IN	96	98,8	69,6	97,6	90,8	0	44	0,4	49,6	56,4	32,8	0,4	0,8	97,6	68,8	96
	DN	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,4	0	0	0	1,6	0
	CoN	1,2	1,2	27,6	2,4	1,6	0	28,4	0	1,2	0,8	16,8	0	0	1,2	29,2	4
	SN	0	0	0	0	0	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0
	ICo	0,8	0	1,2	0	5,2	100	22	94,8	0	42,8	0	97,2	0	0,4	0	0
	DCo	0	0	0,4	0	0	0	4,4	4	0	0	0	2,4	0	0	0	0
	CoCo	0	0	0	0	0	0	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0
	SCo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	IAR1	1,6	0	0	0	2	0	1,2	0	49,2	0	0	0	96	0,8	0	0
	DAR1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8	0	0,4	0
	CoAR1	0	0	1,2	0	0,4	0	0	0	0	0	0	0	2,4	0	0	0
	IARMA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0	0	0	0
	CoARMA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0

CCCc		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Koniec	Start	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
	IN	0,8	6,8	6,4	8	0	0	0	0	0,4	0	4	0	0	0,4	23,2	4
	DN	37,2	12	5,2	52	0	4	0	0	4,4	2	4	6	4	18	6,8	5,2
	CoN	7,6	28	8,8	29,2	0	0	0	0	2,8	3,6	8	0	0,4	2,8	52,8	13,2
	SN	3,2	4,4	5,2	1,2	0	0,4	0	0	2	0,4	3,6	0,4	0	5,2	5,2	1,6
	ICo	10,4	0	41,6	0	13,6	21,2	57,2	8	8,4	18,8	0	11,2	0	15,2	0	0
	DCo	0	14,4	0,4	1,2	16	18	0,8	51,2	1,2	8	3,2	28,4	6,8	2,8	3,2	22,4
	CoCo	19,2	0	10,8	0	29,6	29,2	20	34,8	17,2	52,4	3,6	24	0	38,8	0	0,4
	SCo	0	0	1,6	0,4	0,8	2,4	0,8	3,6	0,4	2,4	0	0	0	0,4	0	0
	IAR1	0	0	0,4	0,4	0	0	0	0	2	0	0	0	12,8	0,4	0,4	0,4
	DAR1	0,8	9,6	0	2	0	2,4	0	0	14,8	0	0,4	1,6	22,4	1,2	2	8,4
	CoAR1	0,8	0,4	0,8	0	0	0	0	0	26,4	0	0	0	34,8	0,8	0,4	0,4
	SAR1	0	1,2	0,8	2,8	0	0	0	0	3,6	0	0,4	0	2,8	0,4	0	0,8
	IARMA	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	0	0	0
	DARMA	0	6,4	0	0	0	0,8	0	0	0	0	5,2	2	0,8	0	3,6	10,8
	CoARMA	0	0	4	0	0	0	0,4	0	0,4	0,4	36,8	0	0	5,2	0	0
	SARMA	0	0	0	2,4	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
	IS	16,8	1,2	8	0	35,2	4,8	10	0	4	3,6	7,6	2,8	4,8	3,6	0,4	2,8
	DS	0,8	14,8	0,8	0	2,4	14,8	0,4	0,4	1,2	1,6	4,8	22	10	0,8	1,6	28
	CoS	0,4	0,4	5,2	0	2,4	0,8	10,4	0	10,8	6	0	0,8	0,4	4	0,4	0,4
	SS	0	0,4	0	0,4	0	1,2	0	2	0	0,8	0,4	0,8	0	0	0	1,2

tabela m3, kontynuacja tabeli na następnej stronie

tabela m3, kontynuacja tabeli z poprzedniej strony																
CCCm start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	2,4	11,2	3,2	17,6	1,6	1,6	0	0	0,8	0	2	3,6	2,8	10,8	5,6	17,6
DN	16,4	10,8	10,4	34,8	1,2	6	0	0	6,8	0	1,6	6,4	6	27,2	3,6	13,6
CoN	24,4	14	10,8	11,6	0,4	1,2	9,2	0,4	5,2	9,2	6	0,8	4,4	15,6	19,6	6,8
SN	9,2	14,8	24,8	5,6	0	0,4	5,6	3,2	2,8	1,2	5,2	1,6	0,8	9,2	36	13,2
ICo	3,2	0,4	0	0	10,4	8,4	7,6	29,6	0	18	0,4	11,6	2,4	0	0,4	1,6
DCo	0	2,4	0	0	21,2	15,6	9,6	39,2	0	24,8	2	14,8	5,6	0	2,4	5,6
CoCo	0	0	8,4	0,4	26,4	8,4	27,2	10	6,8	22	0	8,8	0,4	2,8	0	0
SCo	0	0	0,4	2,8	5,6	6	10	12,4	0	8	0	6,8	0,4	0	0	0
IAR1	4,4	1,6	0,8	1,6	2	1,2	0	0	15,6	0	0,4	4,4	10,4	3,2	0	4,8
DAR1	2	7,2	1,6	2,4	0	2,4	0	0	22	0	0,4	2,4	14,4	2,4	4,4	6
CoAR1	1,6	0	6,8	2	0	0	4,4	0,4	12,8	2	0	0	11,6	6	1,2	1,6
SAR1	0,8	2,8	1,6	8,4	0	0,4	1,2	1,6	20	1,2	0	0,4	15,6	2	3,2	2,4
IARMA	20,8	0	0	0	4,4	0	0	0	0	0	4,4	0	0	0	0	0
DARMA	0	18	0	0	0	13,6	0	0	0	0	25,2	14,4	3,2	0	16,4	14,4
CoARMA	0	0	22	0	0	0	6,8	0	1,2	8	12	0	0	17,6	0	0
SARMA	0	0	0	12	0	0	0	1,6	0	0	18,8	0	0	0	0	0
IS	10,8	6,8	0	0,4	12,8	15,2	0,8	0	3,2	1,2	5,6	11,2	8	0,4	2,8	5,2
DS	3,2	9,6	0	0	10	19,2	0,4	0	0,8	0,4	14	10,4	11,6	0,4	3,6	7,2
CoS	0,8	0	8,8	0	3,6	0,4	16,8	0,4	2	3,6	1,2	2	2	2,4	0,4	0
SS	0	0,4	0,4	0,4	0,4	0	0,4	1,2	0	0,4	0,8	0,4	0,4	0	0,4	0
PRESSc start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	10,4	5,6	12,4	4	8	2	3,2	2	7,2	4,4	7,6	7,2	4,4	7,2	8	12,8
DN	15,2	12	3,2	10,4	2,4	13,2	2	5,2	6	2,4	8	14	10	4,8	18	15,6
CoN	8	6	9,6	10,4	5,2	2,8	10,8	6,8	11,6	11,2	4,4	2,8	2,8	18	2	4
SN	3,6	10	8	18,4	1,6	3,2	3,2	12,4	7,2	4	6,4	6	3,2	9,2	10,4	8,4
ICo	4	0	1,6	0	14	7,2	18,4	1,6	0,4	5,6	0,8	2,4	0,4	0,8	2,8	0,8
DCo	0	2,8	0	1,2	20	15,2	3,6	11,2	0,4	4	4,8	14,8	4,4	0,4	6,8	2,8
CoCo	0,8	0,4	4,4	0,8	6,8	2,8	16,4	6	2	15,2	0	2,4	0,8	4,4	0,4	0
SCo	0,4	0,4	0,4	6	2,4	10	9,2	27,2	0,4	10,4	0	8,8	0,4	1,2	1,6	0,4
IAR1	4,8	3,2	11,2	2,4	1,6	0,4	2,8	0	8,8	2,8	0	1,2	10	4,8	4	1,6
DAR1	5,2	10,4	6,8	7,2	2	2,4	1,6	4,4	10	5,2	0,8	6	16,8	5,2	4,4	10,8
CoAR1	2,4	1,6	2,8	1,2	1,6	1,2	2	0,4	13,6	4,4	0,4	1,2	9,6	4,4	0,4	2
SAR1	6,8	6	3,6	14	1,2	1,2	2,4	7,2	24	4,8	0	4,8	14,8	7,6	2,4	8,4
IARMA	24,8	0	0	0	10,8	0	0	0	0	0	9,6	0	0	0	0	0
DARMA	0	26,8	0	0	0	16	0	0	0	0	29,2	18	2,4	0	32,4	27,6
CoARMA	0	0	23,2	0	0	0	12	0	4,4	21,2	5,2	0	0	27,6	0	0
SARMA	0	0	0	23,6	0	0	0	14,4	0	0	6	0	0	0	0	0
IS	7,6	5,6	1,6	0	12	8	2,4	0	0,4	0,8	6,4	3,6	7,6	1,2	2,8	2
DS	6	9,2	0,4	0	9,6	13,2	0,8	0	0,8	0,4	9,6	6,8	11,6	0	3,6	2,8
CoS	0	0	10	0	0,8	0,8	8,8	0	2,8	3,2	0	0	0,8	3,2	0	0
SS	0	0	0,8	0,4	0	0,4	0,4	1,2	0	0	0,8	0	0	0	0	0
PRESSm start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	6,4	8,8	13,6	15,6	3,2	0,8	0	0	2,8	0	8	1,2	3,2	15,2	10,8	11,2
DN	13,6	5,6	12	27,6	0	3,2	0	0	4,8	0	3,6	7,6	3,6	22	5,2	10
CoN	20,8	14,4	8,8	14,8	0,4	1,2	9,2	0,8	7,2	10,4	3,6	0,8	3,2	8,8	20	8,4
SN	15,2	21,6	31,6	12	0,4	0,8	5,6	9,2	4	1,2	4,4	2	3,6	19,6	37,6	27,6
ICo	3,6	0,4	0	0	9,6	12,4	14,8	17,6	0	15,2	0	12,8	2,4	0	0,8	1,6
DCo	0,4	3,6	0	0	18,4	11,6	13,2	30,8	0	26,8	2	14,8	5,6	0	3,2	6,4
CoCo	0,4	0	4,4	0	22,8	11,2	21,6	11,6	2,4	18,8	0	13,6	0	7,2	0	0,4
SCo	0	0	0	2,4	10,8	14	13,6	22,8	0	11,2	0	15,2	0	0,8	0	0,8
IAR1	4,8	3,2	0,8	1,2	2,8	1,6	0	0,4	19,2	0	1,2	2,4	12,4	1,2	2,8	4,8
DAR1	4,4	9,2	0	0,4	0,8	4	0	0	16,4	0	0,8	0,4	15,2	1,6	3,6	4
CoAR1	0,8	1,2	4,4	0,4	0,4	0	4,8	0	13,6	2,4	0	0,4	8	3,2	0	0,4
SAR1	2	0,8	2	10,8	0	1,2	1,2	4	19,6	1,2	0	0	17,6	2,4	0,4	1,2
IARMA	15,2	0	0	0	3,2	0	0	0	0	0	6,4	0	0	0	0	0
DARMA	0	16,4	0	0	0	9,6	0	0	0	0	21,6	10,8	0	0	10,8	15,6
CoARMA	0	0	16,4	0	0	0	3,6	0	2,4	5,2	9,6	0	0	13,2	0	0
SARMA	0	0	0	14,8	0	0	0	1,6	0	0	21,6	0	0	0	0	0
IS	7,2	5,2	0	0	14	12	0,4	0,8	1,6	1,2	6,4	5,2	9,6	0	0,4	4,4
DS	4	9,2	0,8	0	9,6	15,2	0,4	0	0,4	0,8	9,6	12	14,4	1,6	4,4	3,2
CoS	1,2	0,4	5,2	0	3,2	0,8	11,6	0	5,2	5,6	1,2	0,4	0,4	3,2	0	0
SS	0	0	0	0	0,4	0,4	0	0,4	0,4	0	0	0,4	0,8	0	0	0

tabela m3, kontynuacja tabeli na następnej stronie

tabela m3, kontynuacja tabeli z poprzedniej strony																
R2Wc start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	0	0,8	0	1,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0,4	0,8	0	1,2
DN	15,6	4,8	32,8	2	0	0	18,4	0	6,4	3,2	0,8	0	0	12,4	2,4	0,4
CoN	0	0	0	1,6	0	0	0	0	0,4	0,4	0	0	0	0,4	0	0,4
SN	16,8	6	7,6	12,4	0	0	2,4	4	4,8	4,8	1,2	0	1,2	25,2	0,8	9,2
ICo	18,8	14,8	5,6	10,4	10,8	22	4,4	38	4,4	23,2	0,4	29,2	4,4	18,8	5,2	22,4
DCo	13,6	19,6	0,8	12,4	57,6	30	24	31,2	1,6	28,4	14,8	35,2	18	2,4	22,8	26
CoCo	18,4	10,4	31,2	6	18	10,4	34,4	13,2	6	28,4	1,6	8	3,6	22,4	4,8	7,2
SCo	0	1,6	2,4	4,4	5,6	2,4	8,8	10,4	0	6	0	2	2	1,2	0,8	0,8
IAR1	0	0	0	1,6	0	0	0	0	6	0	0	0	1,6	0,4	0	0
DAR1	3,6	0	7,6	1,2	0	0	2	0	16,4	1,6	0	0	8,4	1,6	0,4	0,8
CoAR1	0	0	0,4	0,8	0	0	0	0	9,2	0	0	0	2,4	0	0,4	0
SAR1	5,2	0,4	1,2	19,2	0	3,2	1,2	1,2	39,2	1,2	0	0,8	23,6	5,2	1,2	3,2
IARMA	2,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,4	0	0	0	0	0
DARMA	0	12,8	0	0	0	2,8	0	0	0	0	51,2	1,2	4,4	0	46,4	4
CoARMA	0	0	8	0	0	0	1,6	0	0	0	0,8	0	0	5,6	0	0
SARMA	0	0	0	24,8	0	0	0	1,2	0	0	10,8	0	0	0	0	0
IS	4	4	0	0	4,4	2,8	0	0,4	2	0,8	0,8	5,2	6	0,8	0	7,2
DS	1,2	24	0	0,4	2,8	26,4	0	0	0,4	0,8	14,4	18	23,6	0	14,8	15,6
CoS	0	0,4	2,4	0	0,8	0	2,8	0	2,8	1,2	0,4	0	0	2,8	0	1,2
SS	0	0,4	0	1,2	0	0	0	0,4	0,4	0	0,4	0,4	0,4	0	0	0,4
R2Wm start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	2,8	5,6	2,4	5,6	6,4	0,4	0,8	0,4	2	4,4	0	0,4	0,4	4,4	2,4	1,6
DN	6	2	0,8	6,4	0	0	0	0	0,8	0	0	0,4	0,4	0,4	0	4,8
CoN	30,8	24	30,8	24	26,4	2,8	24,4	2	22,4	21,2	2	5,2	6,8	22,4	44	20,8
SN	8	19,2	7,2	6,4	3,6	1,6	5,6	1,6	0,8	4	0,4	0	1,6	16	26,8	15,2
ICo	0	0,4	0	0	1,2	6	0,4	9,6	0	2,8	0	6,8	0,4	0	0	0,8
DCo	0	4,4	0	0	9,6	18,4	2,8	23,6	0,8	4,4	0,4	29,6	1,2	0,4	1,2	10,4
CoCo	0,4	0	3,6	0,4	10,4	4,4	25,2	15,2	7,6	31,6	0	8	0	6	0	0,4
SCo	0	0	0	4,8	4,4	15,6	9,2	44	0,4	13,6	0	14,4	0,4	0,4	0	0,8
IAR1	5,6	1,2	1,2	0,4	0,4	0,8	0	0	6,8	0,8	0	0,4	2,8	0,8	0,4	0
DAR1	0,8	0,4	0	2	0,4	0,4	0	0	6,4	0	0	0,8	4,8	0	0	3,2
CoAR1	6	2	10,4	3,2	3,2	1,6	4,8	0	16,4	3,2	0	0,8	17,6	10,4	0	4
SAR1	3,2	2,4	4,4	13,2	0	1,2	2,8	0,4	24,8	2	0	1,6	31,6	5,6	1,6	3,6
IARMA	12,8	0	0	0	1,6	0	0	0	0	0	3,6	0	0	0	0	0
DARMA	0	13,2	0	0	0	2,8	0	0	0	0	14,4	2	1,6	0	12,4	15,2
CoARMA	0	0	22,4	0	0	0	4,4	0	0,4	2	17,6	0	0	22,8	0	0
SARMA	0	0	0	32,4	0	0	0	0	0	0	30,4	0	0	0	0	0
IS	7,2	2,8	0	0	9,6	6	0,8	0	0,4	0,4	6	2,4	3,6	0,8	1,6	1,2
DS	12,8	19,2	0,8	0	18	34	0,4	0	0,8	1,2	22,4	25,2	24	1,2	8	17,2
CoS	3,2	0,8	15,2	0	4,4	2,4	18	0,4	8,8	7,2	1,2	0,8	1,6	7,6	0,4	0
SS	0,4	2,4	0,8	1,2	0,4	1,6	0,4	2,8	0,4	1,2	1,6	1,2	1,2	0,8	1,2	0,8
R2LR start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
DN	3,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CoN	5,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SN	42,8	53,2	53,6	4,4	0	2,4	0	2	0	0	0	2,8	0	57,6	70	70,4
DCo	0	0	0	0	8,4	14,8	0	0	0	0	0	20,8	0	0	0	0,4
CoCo	0	0	0	0	9,6	0	45,6	0	0	48,4	0	0	0	1,6	0	0
SCo	0	0	0	6	21,2	22	24,8	78,8	0	36,8	0	35,6	0	0,4	0	0
DAR1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0
CoAR1	0	0	0	0	0	0	0	0	14,8	0	0	0	0	0	0	0
SAR1	0	0	0,8	38,8	0	0,4	0	9,6	68	0	0	0	48	2	0	0,8
IARMA	18,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DARMA	0	17,2	0	0	0	1,2	0	0	0	0	28,4	0,4	0	0	16	11,2
CoARMA	0	0	28,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	27,6	0	0
SARMA	0	0	0	48,4	0	0	0	6	0	0	35,2	0	0	0	0	0
IS	5,6	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DS	22,4	26,8	0	0	43,6	56,4	0	0	0	0	34,4	38,4	44,4	0	12,8	16,8
CoS	1,6	0	16,4	0	8,8	0	28,4	0	16,4	12,8	0	0	0	9,6	0	0
SS	0,4	2,8	0,8	2,4	2,4	2,8	1,2	3,6	0,8	2	2	2	1,6	1,2	1,2	0,4

Tablica A.7: Wybór modelu dla wszystkich dziewięciu kryteriów: m4. Źródło: opracowanie własne.

AIC		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
Koniec	Start	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
	IN	11,2	30,4	17,6	X	10,4	0,4	1,6	X	1,2	8	0,4	X	19,2	8,4	3,2	X
	DN	20,4	2	9,2	X	3,2	1,6	3,2	X	0	2	0	X	6,8	0,8	1,6	X
	CoN	1,6	3,6	7,2	X	2	0,4	17,6	X	0,4	1,6	0,4	X	5,2	0	19,6	X
	SN	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0,8	0	0	X
	ICo	1,6	0	0,8	X	5,6	35,6	1,6	X	0	3,6	0	X	1,6	0,4	0	X
	DCo	0	0	0	X	32	0	0,4	X	0	37,6	0	X	0	0	0	X
	CoCo	0,4	0	0,4	X	3,6	10	1,6	X	0	3,6	0	X	0,8	0	0	X
	IAR1	28	10,4	19,2	X	28	3,2	4,8	X	45,2	33,6	40	X	21,6	7,2	4	X
	DAR1	0,4	0,8	8	X	0	2,4	0,4	X	44	0	46	X	4,4	0	3,2	X
	CoAR1	4	1,2	12	X	2,8	0,4	39,2	X	6,4	2,4	11,6	X	9,2	0,4	11,6	X
	SAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	0,4	0	0	X	0	0	0	X
	IARMA	32,4	0	0	X	12,4	0	0	X	0	7,6	0	X	0	26	0	X
	DARMA	0	51,6	0	X	0	46	0	X	2,4	0	1,6	X	0	49,6	56,8	X
	CoARMA	0	0	25,6	X	0	0	29,6	X	0	0	0	X	30,4	7,2	0	X
BIC		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
	IN	43,2	48,4	58	X	46,8	0,8	26	X	0	44,4	0	X	61,2	34	27,6	X
	DN	8,4	5,6	10	X	4,4	0,4	2	X	0	5,2	0	X	6,8	0,4	0	X
	CoN	0,8	1,6	2,4	X	0,4	0	24	X	0	1,6	0	X	1,2	0	22,8	X
	ICo	0	0	0	X	2,8	70,8	2	X	0	0	0	X	0	0	0	X
	DCo	0	0	0	X	6,8	0	0,8	X	0	12	0	X	0	0	0	X
	CoCo	0	0	0	X	0	0,8	0	X	0	0,4	0	X	0	0	0	X
	IAR1	16	1,2	6,4	X	15,6	0,8	5,6	X	63,2	18	63,6	X	5,2	12	0,8	X
	DAR1	0	0	1,2	X	0,8	0	0,4	X	34	0,8	34,4	X	0,4	0	1,6	X
	CoAR1	0,8	0	0	X	1,2	0	12	X	2	0	2	X	1,2	0,4	0,8	X
	IARMA	30,8	0	0	X	21,2	0	0	X	0	17,6	0	X	0	13,6	0	X
	DARMA	0	43,2	0	X	0	26,4	0	X	0,8	0	0	X	0	39,2	46,4	X
	CoARMA	0	0	22	X	0	0	27,2	X	0	0	0	X	24	0,4	0	X
CCCc		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
	IN	6	33,2	6,4	X	4,8	0	0	X	0	5,6	0	X	6	2,4	32	X
	DN	1,2	0	0,4	X	0,4	0	0	X	0	0	0	X	0,4	0	0,4	X
	CoN	0,8	8,8	0,8	X	0,4	0	4,4	X	0	0	0	X	1,2	0,4	12,4	X
	ICo	13,2	0	7,6	X	22,8	45,6	49,6	X	0	19,6	0	X	14,8	2	0	X
	DCo	0	0	0	X	5,2	2	3,6	X	0	10	0	X	0	0	0	X
	CoCo	17,6	0	17,6	X	45,2	45,2	14,4	X	0	38,4	0	X	24,4	0,4	0	X
	IAR1	5,2	1,6	7,6	X	2	0	0,8	X	29,2	2	34,4	X	3,6	0	0,8	X
	DAR1	7,2	17,6	7,6	X	2,4	2,4	0,4	X	41,6	1,6	40,8	X	4,8	0	12,4	X
	CoAR1	6,4	1,6	12,4	X	1,6	0	8,8	X	29,2	1,6	24,4	X	12	0	0,8	X
	IARMA	42,4	0	0	X	15,2	0	0	X	0	21,2	0	X	0	23,2	0	X
	DARMA	0	37,2	0	X	0	4,8	0	X	0	0	0,4	X	0	38,8	41,2	X
	CoARMA	0	0	39,6	X	0	0	18	X	0	0	0	X	32,8	32,4	0	X
	SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0,4	0	X
CCCm		start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
	IN	8,8	15,2	20	X	6,4	1,2	0,4	X	6,8	8	6,4	X	15,6	6,8	14	X
	DN	22	14,4	17,6	X	0,4	10,4	0	X	8,4	0,8	9,2	X	11,2	7,6	12	X
	CoN	24,4	14	10,8	X	8,4	0,4	8,8	X	2,4	4,4	4	X	14,4	6	15,6	X
	SN	0	0	0	X	0	0	0,4	X	0	0	0	X	0,4	0	0,4	X
	ICo	6	0,8	0,4	X	11,6	26	26	X	0	13,2	0	X	2,4	2,8	0	X
	DCo	0	12,4	1,2	X	29,2	25,6	22,4	X	8,4	36,4	9,6	X	2,4	0	15,2	X
	CoCo	2	0	11,6	X	32	25,2	26,8	X	0,8	31,2	0	X	16	0,4	0	X
	SCo	0	0	0	X	0	0	0,4	X	0	0	0	X	0	0	0	X
	IAR1	4	0,4	1,6	X	1,6	0	0,8	X	21,2	1,6	15,6	X	1,2	0,4	1,6	X
	DAR1	1,6	11,6	0,8	X	0	3,2	0	X	29,6	0	32,8	X	1,6	0	8,4	X
	CoAR1	3,6	1,2	6,8	X	0,8	0	4,4	X	19,6	0	21,2	X	10	0	2	X
	SAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	0,4	0	0,4	X	0	0	0	X
	IARMA	27,6	0	0	X	9,6	0	0	X	0	4,4	0	X	0	13,2	0	X
	DARMA	0	30	0	X	0	8	0	X	2,4	0	0,8	X	0	39,2	30,8	X
	CoARMA	0	0	29,2	X	0	0	9,6	X	0	0	0	X	24,8	23,6	0	X

tabela m4, kontynuacja tabeli na następnej stronie

tabela m4, kontynuacja tabeli z poprzedniej strony																
PRESSc start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	10,4	15,2	5,2	X	2,4	3,2	5,6	X	6	6,8	4,8	X	6,4	9,6	12,4	X
DN	6,8	16,4	4,8	X	6,4	11,2	3,2	X	10,4	3,6	9,2	X	4,4	7,2	19,2	X
CoN	5,6	6,8	12	X	4,4	2,4	9,2	X	1,2	4	2,4	X	12,4	4	8,8	X
ICo	16,4	2,8	12,4	X	26,4	28	28,4	X	1,2	22,8	0,8	X	17,2	6,8	4	X
DCo	0,8	10,4	0	X	12,4	18,8	0,8	X	7,2	15,6	4,8	X	0,4	0	7,6	X
CoCo	19,2	2	18	X	28,4	22,4	22	X	2,4	22	1,2	X	22	5,2	1,6	X
IAR1	10	6,4	7,6	X	4,4	1,6	5,6	X	22,8	4,8	24	X	7,2	1,2	4,8	X
DAR1	7,2	16,4	7,6	X	4,4	5,2	3,2	X	32	6,8	30,4	X	4,4	0,8	16,8	X
CoAR1	6,8	2,4	13,2	X	4	0,8	9,6	X	16,4	4	22	X	11,6	2	1,6	X
IARMA	16,8	0	0	X	6,8	0	0	X	0	9,6	0	X	0	20,4	0	X
DARMA	0	21,2	0	X	0	6,4	0	X	0,4	0	0,4	X	0	19,2	23,2	X
CoARMA	0	0	19,2	X	0	0	12,4	X	0	0	0	X	14	23,6	0	X
PRESSm start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	8	21,6	16,8	X	9,6	1,2	0,8	X	4	10	3,2	X	20,4	9,2	15,2	X
DN	29,2	8,8	16,4	X	0,4	9,6	0	X	10,4	0,4	9,6	X	10,8	6,4	12	X
CoN	21,6	21,2	9,6	X	5,6	1,2	7,2	X	3,2	6,4	2,8	X	11,6	8,8	12,4	X
SN	0	0	0,4	X	0	0	0	X	0	0	0,4	X	0,4	0,4	0,8	X
ICo	5,6	0,4	0,8	X	13,2	24	26	X	0,4	15,6	0	X	0,8	2	0,4	X
DCo	0	10	1,2	X	27,6	24,4	24,8	X	7,2	28,8	8,4	X	3,6	0	12,8	X
CoCo	1,6	0	16,4	X	26	28,4	29,2	X	0	28,8	0,4	X	9,2	0,4	0,4	X
IAR1	5,2	1,2	1,6	X	4,4	0	0	X	16,8	2,8	16,4	X	2,4	0	0,4	X
DAR1	2	6,4	1,6	X	0	2	0,4	X	40,4	0	43,6	X	1,2	0	12,4	X
CoAR1	4,8	0,8	9,6	X	1,2	0,4	2,4	X	16	0	15,2	X	9,6	0,8	0,8	X
SAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	0,4	0	0	X	0	0	0	X
IARMA	22	0	0	X	12	0	0	X	0	7,2	0	X	0	16	0	X
DARMA	0	29,6	0	X	0	8,8	0	X	1,2	0	0	X	0	30,4	32,4	X
CoARMA	0	0	25,6	X	0	0	9,2	X	0	0	0	X	30	25,2	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0,4	0	X
R2Wc start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	8,8	3,6	6	X	1,6	0	2	X	3,6	0,4	3,6	X	8	6	2,4	X
DN	30	5,2	8,8	X	3,2	0,8	4,8	X	5,2	3,2	3,6	X	18	17,6	8,4	X
CoN	4	2,4	21,6	X	0,4	0	7,2	X	2	0	1,6	X	23,6	4	2,4	X
SN	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0,4	0	0	X
ICo	25,2	7,6	26,4	X	26,4	24,8	61,2	X	8,8	24,4	9,2	X	21,6	12	22	X
DCo	0,4	25,6	0	X	48	49,6	0,8	X	22,4	41,2	20,8	X	0	0,8	9,2	X
CoCo	20,8	7,2	28,4	X	20,4	23,6	23,6	X	4	30	5,6	X	19,6	8,4	3,6	X
IAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	1,6	X	0	0	0	X
DAR1	0	1,6	0	X	0	0	0	X	54	0	53,6	X	0	0	1,6	X
CoAR1	0	0	0,4	X	0	0	0	X	0	0	0,4	X	0,8	0	0	X
IARMA	10,8	0	0	X	0	0	0	X	0	0,8	0	X	0	5,6	0	X
DARMA	0	46,8	0	X	0	1,2	0	X	0	0	0	X	0	43,6	50,4	X
CoARMA	0	0	8,4	X	0	0	0,4	X	0	0	0	X	8	2	0	X
R2Wm start z modelu o prawdziwych strukturach									start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
IN	8,4	9,6	7,2	X	4,4	0,8	0,8	X	1,2	4,4	2,4	X	8,4	3,6	6	X
DN	30	10,4	4,4	X	0	4	0	X	6	0	4,4	X	4,8	0,4	6,4	X
CoN	38	30	15,2	X	15,2	4,8	8,8	X	3,6	13,2	3,6	X	15,6	14,4	17,2	X
SN	0,4	0,4	0	X	0	0,4	0	X	0,4	0	0	X	1,2	0	0,4	X
ICo	4,8	0	0,4	X	4,8	14	7,2	X	0	5,6	0	X	0	2,8	0	X
DCo	0	4,8	0,8	X	28	27,2	5,6	X	4,8	38,4	4,4	X	1,2	0	8,8	X
CoCo	0,4	0	27,2	X	34,8	29,6	68	X	0	27,6	0,4	X	19,6	0,4	0	X
SCo	0	0	0	X	0	0	0,4	X	0	0	0	X	0	0	0	X
IAR1	3,2	0	2,4	X	4,8	0	0,4	X	11,2	1,2	7,2	X	4	1,6	0,8	X
DAR1	1,6	14,8	2,8	X	0,8	7,6	0	X	41,2	0,4	46,8	X	1,2	0	26	X
CoAR1	5,6	0,4	24,4	X	4	0,4	4,8	X	30,4	4	30,4	X	24	1,6	1,2	X
SAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	0,8	0	0,4	X	0,4	0	0,4	X
IARMA	7,6	0	0	X	3,2	0	0	X	0	5,2	0	X	0	5,2	0	X
DARMA	0	29,6	0	X	0	11,2	0	X	0,4	0	0	X	0	43,2	32,8	X
CoARMA	0	0	15,2	X	0	0	4	X	0	0	0	X	19,6	26,4	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0,4	0	X
tabela m4, kontynuacja tabeli na następnej stronie																

tabela m4, kontynuacja tabeli z poprzedniej strony																
R2LR	start z modelu o prawdziwych strukturach								start z modelu o innych strukturach							
	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo	IN	DN	CoN	SN	ICo	DCo	CoCo	SCo
DN	33,2	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X
CoN	1,6	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X
SN	0,4	0	0,4	X	0	0	0	X	0	0	0	X	1,2	0	1,2	X
ICo	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0,4	0	X	0	0	0	X
DCo	0	0	0	X	70,8	68,8	0	X	0	76	0	X	0	0	0,4	X
CoCo	0	0	3,6	X	29,2	0	98,8	X	0	23,6	0	X	4,8	0	0	X
SCo	0	0	0	X	0	0	0,4	X	0	0	0	X	0	0	0	X
DAR1	0	1,2	0	X	0	0	0	X	98,8	0	98,4	X	0	0	3,2	X
CoAR1	0	0,4	0,8	X	0	0	0	X	0,4	0	0,8	X	2	0	0	X
SAR1	0	0	0	X	0	0	0	X	0,8	0	0,8	X	0	0	0	X
IARMA	64,8	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0,4	0	X
DARMA	0	98,4	0	X	0	31,2	0	X	0	0	0	X	0	87,6	95,2	X
CoARMA	0	0	95,2	X	0	0	0,8	X	0	0	0	X	92	11,6	0	X
SARMA	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0	0	X	0	0,4	0	X

Dodatek B

Zawartość płyty CD

Płyta CD załączona do pracy zawiera:

1. plik źródłowy pracy w \LaTeX ,
2. plik tekstowy z pracą w formacie pdf,
3. pliki instalacyjne pakietu `lmmfit`.

Bibliografia

- [Akaike1973] Akaike H., *Information theory and an extension of the maximum likelihood principle*, In second international symposium on information theory, B.N.Petrov i F.Csaki, Akademiai Kiado, Budapest, 267-281, 1973.
- [Allen1974] Allen D.M., *The relationship between variable selection and data augmentation and a method of prediction*, Technometrics, 16, 125-127, 1974.
- [Bates2009] Bates D., *Computational methods for mixed models*, R Foundation for Statistical Computing, 2009.
- [Burzykowski2011] Burzykowski T., *Linear and mixed effects models using R*, Springer, 2011, w przygotowaniu.
- [Buse1973] Buse A., *Godness of fit in generalized least squares estimation*, The American Statistician 27, 106-108, 1973.
- [Crainiceanu2004] Crainiceanu C., Ruppert D., *Likelihood ratio tests in linear mixed models with one variance component*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 66, 165-185, 2004.
- [Christensen1992] Christensen R., Pearson L.M., Johnson W., *Case-deletion diagnostics for mixed models*, Technometrics, 34, No.1, 38-45, 1992.
- [Demidienko2004] Demidienko E., *Mixed models: theory and applications*, Wiley-Interscience, 1 ed., 2004.
- [Gurka2006] Gurka M., *Selecting the best linear mixed model under REML*, The American Statistician, 60(1), 19-26, 2006.
- [Kent1983] Kent J.T., *Information gain and a general measure of correlation*, Biometrika 70, 163-73, 1983.
- [Kenward1997] Kenward M., Roger J., *Small sample inference for fixed effects from restricted maximum likelihood*, Biometrics, 53 (3), 983-997, 1997.
- [Keselman1998] Keselman H.J., Algina J., Kowalchuk R.K., Wolfinger R.D., *A comparison of two approaches for selecting covariance structures in the analysis of repeated measurements*, Communications in Statistics: Simulation and Computation, 27 (3), 591-604, 1998.
- [Kramer2005] Kramer M., *R² statistics for mixed models*, Conference on Applied Statistics in Agriculture, 17, 148-160, 2005.
http://www.ars.usda.gov/sp2UserFiles/ad_hoc/12000000SpatialWorkshop/19KramerSupplRsq.pdf

- [Liu1999] Liu H., Weiss R.E., Jennrich I., Wenger N.S., *PRESS model selection in repeated measures data*, Elsevier, Computational Statistics & Data Analysis, 30, 169-184, 1999.
- [Magee1990] Magee L., *R² measures based on Wald and likelihood ratio joint significance tests*, The American Statistician, 44, 250-253, 1990.
- [Molenberghs2007] Molenberghs G., Verbeke G., *Likelihood ratio, score, and Wald tests in a constrained parameter space*, The American Statistician, 66 (1), 22-27, 2007.
- [Pinheiro2000] Pinheiro J., Bates D., *Mixed-effects models in S and S-PLUS*, Springer, 2000.
- [Pinheiro1996] Pinheiro J., Bates D., *Unconstrained parametrizations for variance-covariance matrices*, Statistics and Computing, 6(3), str. 289 - 296, 1996.
- [Schabenberger2004] Schabenberger O., *Mixed model influence diagnostics*, SUGI 29, Paper 189-29, 2004.
- [Shapiro1988] Shapiro A., *Towards a unified theory of inequality constrained testing in multivariate analysis*, International Statistical Review 56, 1988.
- [Stram1994] Stram D.O., Lee J.W., *Variance components testing in the longitudinal mixed effects model*, Biometrics 50, 1171-1177, 1994.
- [Verbeke2000] Verbeke G., Molenberghs G., *Linear mixed models for longitudinal data*, Springer Verlag, 2000.
- [Verbeke2003] Verbeke G., Molenberghs G., *The use of score tests for inference on variance components*, Biometrics, 59 (2), 254-262, 2003.
- [Vonesh1996] Vonesh E.F., Chinchili V.M., Pu K., *Goodness-of-fit in generalized nonlinear mixed-effect models*, Biometrics, 52, 1996.
- [Vuong1989] Vuong Q.H., *Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypothesis*, Econometrica 57, 307-333, 1989.
- [Wang2007] Wang J., *Selecting the best linear mixed model using predictive approaches*, Brigham Young University, 2007.