Proseminar Mathematik: Modellierung und Simulation

Spieltheorie

Anna Hauschild

TUHH, 25.04.2019

Abstract

In der Spieltheorie werden soziale Entscheidungssituationen mit mindestens zwei Beteiligten, deren Vorgehen sich gegenseitig beeinflusst, modelliert und ausgewertet. Ziel ist es, ein rationales Verhalten zu definieren, was oft von einer intuitiven Einschätzung abweicht. Die Spieltheorie trägt ihren Namen, weil es Ähnlichkeiten von Verhaltensstrategien in gängigen Gesellschaftsspielen und Entscheidungssituationen in gesellschaftlichen Konfliktsituationen gibt und sich letzteres mit ersterem gut assoziieren lässt.[3] Ein Spiel ist hier also eine Konfliktsituation, die mehrere Entscheidungsmöglichkeiten bietet und die Spieler sind die Beteiligten, die sich für eine oder mehrere bestimmte Strategien entscheiden müssen. Dabei handelt jeder Spieler eigennützig und mit dem Ziel, den für ihn größten Nutzen aus der Situation zu schlagen.

Dieser Text soll ein Verständnis für die Spieltheorie geben, die mathematische Modellierung erklären und eine Idee der Anwendung in der Realität ermöglichen. Die Arbeit ist angelehnt an das Buch „Modellbildung und Simulation“ .[2]

Inhaltsverzeichnis

1 Idee am Beispiel Gefangenendilemma

Eins der typischsten Beispiele ist das Gefangenendilemma. Hier werden zwei Gefangene gleichzeitig und ohne sich absprechen zu können verhört. Beide bekommen folgende Optionen:

1. Beide gestehen und müssen jeweils für 5 Jahre ins Gefängnis
2. Beide leugnen und bekommen jeder eine 2-jährige Gefängnisstrafe oder
3. Einer gesteht und der andere leugnet, dann kommt der Kronzeuge frei und der Überführte erhält die Höchststrafe von 10 Jahren Gefängnis.

Was ist die beste Entscheidung, um möglichst glimpflich davonzukommen?

Die intuitive und beste Antwort wäre, dass beide leugnen und insgesamt die niedrigste Strafe erhalten, jeder ginge für 2 Jahre ins Gefängnis. Das Leugnen ist aber mit einem Risiko verbunden und setzt das Vertrauen zum Komplizen voraus, was in der rationalen Lösungsfindung keine Bedeutung findet. In der Spieltheorie wird alles mathematisch exakt modelliert und eine individuelle optimale Lösung für das Problem definiert. Hier wäre das Gestehen für beide die beste Lösung, weil, egal, wie sich der andere entscheidet, gestehen sich immer besser auszahlt.

Das Gefangenendilemma lässt sich auf unterschiedliche soziale Konfliktsituationen abbilden und soll eine Idee der Anwendung der Spieltheorie geben.
Ein politisches Beispiel wäre die Rüstungskontrolle zweier Länder. Wird vereinbart, nicht weiter aufzurüsten, wäre es für beide günstiger, sich daran zu halten, aber sicherer, doch heimlich aufzurüsten, und wiederum fatal, nicht aufzurüsten, während der Gegner aufrüstet.[3]
Um eine Gewissheit über das Verhalten des Gegenspielers zu erhalten, können natürlich verbindliche Verträge abgeschlossen werden. Diese Form wird dann als kooperative Spieltheorie bezeichnet und dient der Koalition.[5] Um jedoch ein individuell rationales Entscheidungsverhalten zu definieren, wird hier die strategieorientierte nicht kooperative Spieltheorie behandelt.

2 Modellierung

In der Modellierung geht es darum, eine solche Konfliktsituation mathematisch darzustellen. In einem Zweipersonenspiel gibt es die Spieler A und B,

$$X \in \{A, B\}.$$

Jeder dieser Spieler hat eine Menge möglicher Strategien S_X. S_{-X} bezeichnet die Strategiemenge des jeweiligen anderen Spielers.

$$S_A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = S_{-B},$$
$$S_B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} = S_{-A},$$

wobei Spieler A n Strategien a_i und Spieler B m Strategien b_j zur Auswahl hat, mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$. Wählt jeder Spieler nun aus seiner Strategiemenge aus, ergibt sich ein Strategiepaar, aus dem man den jeweiligen Nutzen N ermitteln kann.

$$(S_{ai}, S_{bj}) \rightarrow (Na_{i,j}, Nb_{i,j}), \text{ mit } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Um alle möglichen Ausgänge darzustellen, ist eine Bimatrix hilfreich,

$$N_{AB} = \begin{pmatrix} (Na_{1,1}, Nb_{1,1}) & \cdots & (Na_{1,m}, Nb_{1,m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (Na_{n,1}, Nb_{n,1}) & \cdots & (Na_{n,m}, Nb_{n,m}) \end{pmatrix}.$$

Spieler A wählt eine Zeile aus und Spieler B eine Spalte, das resultierende Paar enthält an erster Stelle den Nutzen von Spieler A und an zweiter Stelle den Nutzen von Spieler B.

Zahlenbeispiel:
Spieler A hat die Strategiemenge $S_A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ und Spieler B hat die Strategiemenge $S_B = \{b_1, b_2\}$, die Nutzenmatrix könnte wie folgt aussehen:

$$N_{AB} = \begin{pmatrix} (10,6) & (5,5) \\ (2,3) & (4,9) \\ (9,7) & (7,1) \\ (3,10) & (10,3) \end{pmatrix},$$

wählt A beispielsweise Strategie 3 und B Strategie 2, ergibt sich daraus das Nutzenpaar (7,1), bzw. $Na_{3,2} = 7$ und $Nb_{3,2} = 1$.

Ziel eines jeden Spielers ist es, seine Strategie so zu wählen, dass sein Nutzen maximiert (oder minimiert) wird.

Für A gilt, wähle k aus $\{1, \dots, n\}$ so, dass $Na_{k,j} = \max\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} Na_{i,j}$

wobei das Ergebnis immer von der gewählten Strategie b_j des Spielers B abhängt. Im Folgenden werden die verschiedenen Vorgehensweisen und Situationen betrachtet.

3 Normalform

Spiele in Normalform werden rein statisch betrachtet, d.h. die Beteiligten wählen ihre Strategien gleichzeitig und unabhängig der Wahl des anderen. Neben der Normalform gibt es die Extensivform, die die zeitliche Abfolge berücksichtigt und sequenziell, oft in einem Baumdiagramm, dargestellt wird. Angenommen beide Spieler kennen alle Strategien des Gegenspielers. Spieler A kann dann eine Annahme über die Strategiewahl b_j von Spieler B aufstellen und seine eigene Strategie a_i dementsprechend anpassen.

3.1 Dominante Strategie

Eine Strategie a_k von Spieler A dominiert alle anderen seiner Strategien a_i, falls unabhängig der Strategie b_j a_k immer das beste Ergebnis liefert.

$$(a_k, b_j) \geq (a_i, b_j),\ \forall\ k, i \in \{1, \dots, n\} \text{ und } j \in \{1, \dots, m\}.$$

Spieler A wird sich immer für die dominante Strategie entscheiden. Es kann mehrere dominante Strategien geben, sie haben dann aber alle den gleichen Nutzen. Da es sich um ein Spiel mit vollkommenen Informationen handelt, kennt auch Spieler B die dominante Strategie a_k und wählt dementsprechend die für ihn beste Strategie b_j entsprechend a_k.

Dazu ein Beispiel. A und B besitzen Firmen und verkaufen das gleiche Produkt. A überlegt Werbung zu produzieren, um dadurch mehr Kunden zu gewinnen. Zu diesem Zeitpunkt hat A kein Wissen darüber, ob auch B Werbung schalten wird, was Einfluss auf das Geschäft von A hat. Eine Bimatrix sieht wie folgt aus.

B

A

	Werbung	Keine Werbung
Werbung	(6,5)	(10,2)
Keine Werbung	(4,8)	(5,7)

A wird in jedem Fall Werbung schalten, da A, unabhängig von Bs Entscheidung, mit Werbung immer einen höheren Gewinn erzielt. B wird darauf reagieren und den für ihn besten Nutzen daraus ziehen, also auch Werbung schalten, bzw. auch für B ist hier Werbung schalten die dominante Strategie.

Beweis: Zu zeigen: jeder Spieler hat eine dominante Strategie. Für Spieler A gilt: Strategie 1, Werbung schalten, dominiert Strategie 2, keine Werbung schalten, da

$$Na_{1,1} = 6 > 4 = Na_{2,1} \text{ und } Na_{1,2} = 10 > 5 = Na_{2,2},$$

d.h. egal wie Spieler B sich entscheidet, Strategie a_1 wird immer besser sein als Strategie a_2. Analog: die Strategie b_1 dominiert die Strategie b_2.[3]

Bei unserem Zahlenbeispiel von vorhin

$$N_{AB} = \begin{pmatrix} (10,6) & (5,5) \\ (2,3) & (4,9) \\ (9,7) & (7,1) \\ (3,10) & (12,3) \end{pmatrix}$$

gibt es auf den ersten Blick keine dominante Strategie. Keine Zeile von A dominiert eine andere Zeile, genau wie keine Spalte von B die andere dominiert. Hier bietet sich an, durch wiederholtes Streichen zu einem dominanten Ergebnis zu kommen. Betrachtet man die Matrix aus der Sicht von Spieler A, erkennt man, dass A niemals Zeile 2 wählen wird, da Zeile 2 von allen anderen dominiert wird. Zeile 2 kann man gedanklich streichen.

$$N_{AB} = \begin{pmatrix} (10,6) & (5,5) \\ \cancel{(2,3)} & \cancel{(4,9)} \\ (9,7) & (7,1) \\ (3,10) & (10,3) \end{pmatrix}$$

Aus Sicht von Spieler B dominiert nun Spalte 1 die Spalte 2, die man demnach auch streichen kann.

$$N_{AB} = \begin{pmatrix} (10,6) & \cancel{(5,5)} \\ \cancel{(2,3)} & \cancel{(4,9)} \\ (9,7) & \cancel{(7,1)} \\ (3,10) & \cancel{(10,3)} \end{pmatrix}$$

Sobald Spieler A davon ausgeht, dass Spieler B sich für Strategie 1 entscheidet, wird A Strategie 1 wählen und das Resultat ergibt sich zu N_{AB} (1,1) = (10,6).

3.2 Gleichgewicht

Ein Gleichgewicht ergibt sich dann, wenn es sich für keinen Spieler lohnt, die Strategie im Nachhinein zu ändern.

Betrachtet man erneut die Matrix

$$N_{AB} = \begin{pmatrix} (10,6) & (5,5) \\ (2,3) & (4,9) \\ (9,7) & (7,1) \\ (3,10) & (12,3) \end{pmatrix},$$

so stellt man fest, dass die eben ermittelte dominante Lösung ebenfalls ein Gleichgewichtspunkt ist, genauer gesagt der einzige. Haben beide Spieler gewählt und als Ergebnis $N_{AB} = (a_1, b_1)$ erhalten, würde weder A noch B, mit dem Wissen über die Entscheidung des Gegenspielers, seine Strategie ändern. Diese Kombination wird als Nash-Gleichgewicht bezeichnet.

Um alle Nash-Gleichgewichte einer Bimatrix zu finden gibt es einen Algorithmus:

1. Markiere in jeder Zeile die optimale Strategie für Spieler B.
2. Markiere in jeder Spalte die optimale Strategie für Spieler A.
3. Alle Paare mit jeweils optimalen Strategien sind Nash-Gleichgewichte.

Beispiel:

$$U_{AB} = \begin{pmatrix} (1,1) & (8,13) & (0,2) & (-5,9) & (0,0) \\ (4,14) & (2,4) & (2,2) & (3,5) & (0,9) \\ (2,7) & (8,4) & (8,8) & (3,4) & (-3,7) \\ (12,2) & (-1,2) & (4,5) & (7,6) & (10,3) \\ (4,6) & (3,5) & (6,6) & (4,1) & (0,-2) \\ (12,12) & (4,0) & (8,2) & (3,2) & (9,4) \end{pmatrix},$$

Nash-Gleichgewichte, in Gelb markiert, bei U_{AB} (a_1, b_2) = (8,13), U_{AB} (a_3, b_3) = (8, 8), U_{AB} (a_4, b_4) = (7,6) und U_{AB} (a_6, b_1) = (12, 12).

3.3 Gemischte Strategie

Betrachtet man ein sogenanntes Nullsummenspiel, bei dem ein Spieler gewinnt und der andere Spieler verliert, gibt es kein Gleichgewicht.

Eine Bimatrix

$$U_{AB} = \begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix}$$

lässt sich in diesem Fall auch als einfache Matrix

$$U_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben.
Die Spieler treffen ihre Entscheidungen jetzt nur noch mit gewissen Wahrscheinlichkeiten. Jeder Spieler legt eine Wahrscheinlichkeit $0 \leq p_x \leq 1$ fest, mit der er Strategie x_1 wählt, x_2 mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_x$. Die neuen Strategien sind somit $\hat{s} = [0,1]$. Die Wahrscheinlichkeiten heißen gemischte Strategien. Ein gerne gesehenes Beispiel ist das Halten eines Elfmeters. Spieler A steht im Tor, Spieler B schießt den Elfmeter. A und B müssen sich gleichzeitig entscheiden, ob sie in eine der Ecken springen/ schießen oder in der Mitte stehen bleiben/ in die Mitte schießen. Eine Studie von Michael Bar-Eli hat folgende Wahrscheinlichkeiten zum Halten eines Elfmeters gemessen:[1]

Sprungrichtung

Schussrichtung

	links	Mitte	rechts
links	29,6 %	0,0 %	0,0 %
Mitte	9,8 %	60,0 %	3,2 %
rechts	0,0 %	0,0 %	25, 4 %

Wonach für Spieler A die Wahrscheinlichkeit den Ball zu halten maximiert, wenn er in der Mitte stehen bleibt. Betrachtet man zu diesem Beispiel die vereinfachte Bimatrix

$$U_{Torwart} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

bei der man davon ausgeht, wenn Schuss-/ und Sprungrichtung übereinstimmen hat der Torwart eine Chance den Ball zu halten. Andernfalls landet der Ball definitiv im Tor. Die Chance den Ball in der linken Ecke zu halten beträgt 20 %, in der Mitte 60 % und in der rechten Ecke auch 20 %. Der Torwart könnte sich also, auf Grund von Erfahrungen, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 für die Strategie „in der Mitte stehen bleiben“ entscheiden.

4 Ausblick

4.1 Extensive Form (Ausblick)

Um nur einen kleinen Ausblick zu geben, wie komplex die Spieltheorie ist, soll in diesem kleinen Abschnitt darauf aufmerksam gemacht werden, dass es neben der Normalform, die sich darauf beschränkt, dass alle Spieler ihre Entscheidungen gleichzeitig treffen, die extensive Form gibt. Bei der extensiven Form handelt es sich um dynamische Spiele, also um Spiele mit Berücksichtigung der zeitlichen Abfolge. Die Spieler wählen ihre Strategien nacheinander.

Weiß der Torwart beispielsweise, in welche Richtung der Schütze schießt, wird er seine Strategie, der des Schützen anpassen, um zu versuchen den Ball zu halten. Damit ändert sich natürlich das Ergebnis erheblich. Jedoch führt die Umwandlung einer Normalform in die extensive Form nicht immer zu einem anderen Ergebnis. Beim Gefangenendilemma würden sich die Gefangenen genau wie in der Normalform auch nach Einsehen in die Entscheidung des Gegners immer für das Gestehen entscheiden, um ihren eigenen maximalen Nutzen aus der Situation zu ziehen.

4.2 Wiederholte Spiele (Ausblick)

Auch die Wiederholung eines Spiels ist eine Ausweitung der Spieltheorie. Ändert sich das Ergebnis des Gefangenendilemmas, wenn man die Situation wiederholt? Nein, Es wird nie eine Situation geben, in der es sich lohnt zu leugnen.
In anderen Konfliktsituationen wird das wiederholte Spiel eine wichtige Rolle einnehmen, wie zum Beispiel bei Auktionen, Konkurrenzsituationen und Handeln in einer Gruppe.

5 Fazit

Die Spieltheorie ermöglicht es, komplexe Konfliktsituationen mathematisch genau abzubilden und weist manchmal überraschende Ergebnisse auf. Sie hilft dabei, eine Situation auch mal rational zu betrachten und einen Überblick aller möglichen Strategien darzulegen. In der Wirtschaft ist es hilfreich die gegebene Situation aus Sicht des Gegenspielers zu betrachten und sich so vielleicht in die Lage von Kunden, Kollegen und Konkurrenten hineinzuversetzen.[4] Durch die hohe Rationalität sollte die Spieltheorie in der Anwendung aber auch immer wieder hinterfragt werden, weil sie nicht immer das beste Ergebnis liefert. Vertrauen und Absprachen können wie beim Gefangenendilemma für beide Spieler eine bessere Lösung bieten.

Quellen

[1] Bar-Eli, M., Ofer H. Azar, Ilana. Ritov, Yael Keidar-Levin, and Galit Schein. 2007, „Action Bias among Elite Soccer Goalkeepers“, The Case of Penalty Kicks, Journal of Economic Psychology

[2] Hans- Joachim Bungartz, Stefan Zimmer, Martin Buchholz, Dirk Pflüger, 2009, „Modellbildung und Simulation“, Kapitel 3

[3] Prof. Dr. Wolfgang Leininger, PD Dr. Erwin Amann, Universität Dortmund, 2007, „Einführung in die Spieltheorie“
https://www.ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/gess/chair-of-sociology-dam/documents/education/spieltheorie/literatur/Leininger%20Amann%20Einf%C3%BChrung%200708-ST1-Vorlesung-Skript.pdf

[4] Michael Leitl, „Winkelzüge für Profis“, 2006, Spiegel Online,
https://www.spiegel.de/wirtschaft/spieltheorie-verstehen-winkelzuege-fuer-profis-a-408327.html

[5] Seite „Spieltheorie“ in Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Bearbeitungsstand: 21. Dezember 2018,
https://de.wikipedia.org/wiki/Spieltheorie