Глава 5

Оптимальное управление движением

Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим класс управляемых систем, описываемых с помощью обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = f(y, u), \qquad y(t_0) = y^*, \tag{5.1}$$

где y — вектор состояния размерности n, u — скалярное управление, f — непрерывная вектор-функция по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по y.

Условием окончания процесса служит первое попадание в момент времени t_k на гладкое и без особых точек многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$, заданное с помощью m равенств ($1 \le m \le n$):

$$M = \quad y(t_k) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi_i(y) = 0, \ i = 1, \ldots, m, \ \text{rank} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad = m \quad .$$

Предполагается, что ресурсы управления ограничены, то есть управление $u(\cdot)$ принадлежит функциональному множеству

$$U = \Big\{ u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty[t_0, t_k] \qquad u_- \le u(t) \le u_+ \Big\}, \tag{5.2}$$

где $-\infty \le u$, $u_+ \le \infty$ — заданные константы. Пусть существует хотя бы одно управление $u(\cdot) \in U$ и конечный момент времени t_k такие, что $y(t_k) \in M$. В качестве критерия качества управления системой (5.1) рассмотрим терминальный гладкий функционал $\varphi_0(y(t_k))$, где момент t_k — первый момент попадания на многообразие M.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\varphi_0(y(t_k)) \longrightarrow \inf_{u(\cdot) \in U}. \tag{5.3}$$

При дополнительном ограничении на правые части

$$y^\top f(y, u) \le \beta(1 + \|y\|)$$

для рассматриваемой постановки задачи из теоремы А.Ф. Филиппова о существовании оптимального управления [21] следует, что существует оптимальное управление $u^0(\cdot) \in U$ и момент времени t_k^0 такие, что на соответствующей оптимальной траектории $y^0(t)$ выполняется равенство

$$\varphi_0(y^0(t_k^0)) = \min_{u(\cdot)\in U} \varphi_0(y(t_k)).$$

Задача оптимального управления заключается в отыскании управления, которое переводит систему (5.1) из начального состояния на конечное многообразие, удовлетворяет ограничению (5.2) и при этом функционал (5.3) достигает своего минимума на траекториях системы (5.1).

Пара $\{y^0(t),\ u^0(t),\ t \in [t_0; t_k^0]\}$ называется оптимальным процессом.

Введем функцию Понтрягина

$$H(\psi, y, u) = \psi^\top f(y, u),$$

где $\psi(t)$ — решение системы системы линейных дифференциальных уравнений, сопряженных уравнениям в вариациях на оптимальном решении исходной системы:

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f(y^0(t),\, u^0(t))}{\partial y}\right)^\top \psi \tag{5.4}$$

Тогда верна теорема [1] о необходимых условиях оптимальности:

Теорема 5.1. *Если $\{y^0(\cdot),\ u^0(\cdot),\ [t_0; t_k^0]\}$ — оптимальный процесс, то существует ненулевая пара $\{\lambda_0 \geq 0,\ \psi(\cdot)\}$ такая, что выполняются следующие условия:*

1) *функция Понтрягина достигает максимума на множестве точек непрерывности T оптимального управления $t \in T \subset [t_0; t_k^0]$*

$$\max_{u_- \leq u(t) \leq u_+} H(\psi(t),\, y^0(t),\, u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)); \tag{5.5}$$

2) *вектор*

$$\psi(t_k^0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k^0))}{\partial y} \tag{5.6}$$

ортогонален к многообразию M в точке $y^0(t_k^0)$ — условие трансверсальности;

3) *условие стационарности гамильтониана почти всюду на $[t_0; t_k^0]$*

$$\mathcal{H}(t) = H(\psi(t),\, y^0(t),\, u^0(t)) \equiv 0. \tag{5.7}$$

С помощью сформулированной выше теоремы поиск оптимального управления сводится к решению двухточечной краевой задачи для совокупности систем (5.1) и (5.4), где на левом конце задано n условий $y(t_0) = y^*$, а на правом — m условий $y(t_k) \in M$ для $y(t_K)$, и $n - m$ условий трансверсальности (5.6) для $\psi(t_k)$. В процессе интегрирования двухточечной задачи при каждом $t \in T$ надо решать одномерную задачу оптимизации (5.5) по $u(t)$.

Найденная таким образом траектория называется экстремалью Понтрягина. Поскольку принцип максимума дает лишь необходимые условия оптимальности, надо убедиться, что найденное решение доставляет минимум функционалу качества. Иногда это удается осуществить непосредственной проверкой, иногда — используя условия достаточности принципа максимума для отдельных классов экстремальных задач.

Например, принцип максимума Понтрягина является достаточным условием глобального минимума в задачах быстродействия для линейной управляемой системы [2]. В некоторых случаях выполнены достаточные условия регулярного синтеза по Болтянскому (оптимальное управление строится как функция координат $u^0 = u^0(y)$), формулировку которых можно найти в [1, 2].

Пример 1. *Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче:*

$$\ddot{x} = u, \qquad J(u(\cdot)) = \int_0^1 x\,dt \to \min_u, \qquad |u(t)| \le 1,$$
$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \qquad \dot{x}(1) = 0.$$

Решение. Запишем условия задачи в стандартной форме об оптимальном переходе на многообразие в смысле терминального функционала, для чего введем дополнительные переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_0 = \int_0^t x_1\,d\tau$, $x_3 = t$. Исходная система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = 1, \end{cases} \tag{5.8}$$

экстремальная задача — в виде $\min_u x_0(t_k)$, а терминальные условия — в виде $x(t_k) \in M$, где $M = \{x_2 = 0,\ x_3 = 1\}$.

Выпишем функцию Понтрягина $H = \psi_0 x_1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3$ и сопряженную систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \\ \dot{\psi}_1 = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$\begin{pmatrix} \psi_0(t_k) \\ \psi_1(t_k) \\ \psi_2(t_k) \\ \psi_3(t_k) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \perp M, \qquad \lambda_0 \geq 0,$$

откуда следует

$$(\psi_0(t_k) + \lambda_0)\gamma_0 + \psi_1(t_k)\gamma_1 = 0,$$

где γ_1, γ_2 — произвольные постоянные. Следовательно, $\psi_0(t_k) = -\lambda_0 \leq 0$, $\psi_1(t_k) = 0$. Из первого уравнения для сопряженной системы следует, что $\psi_0(t) = \mathrm{const}$.

Допустим, что $\lambda_0 = 0$. Тогда $\psi_0 = 0$ и $\psi_1 \equiv 0$.

На оптимальной траектории гамильтониан $\mathcal{H}(t) \equiv 0$, откуда $\psi_3 = 0$. Кроме того, из $\mathcal{H}(0) = 0$ следует, что $\psi_2(0) = 0$, т.е. $\psi_2 \equiv 0$. Но тогда получаем нулевую пару (λ_0, ψ), что противоречит принципу максимума. Значит, выполнены неравенства $\lambda_0 > 0$ и $\psi_0 < 0$. Сопряженная система однородна, потому можем пронормировать решение, положив $\psi_0 = -1$. Из условия максимума функции Понтрягина получим:

$$u^0(t) = \begin{matrix} 1, & \text{при } \psi_2 > 0; \\ -1, & \text{при } \psi_2 < 0. \end{matrix}$$

Покажем, что не существует интервала $(t', t'') \in [0, 1]$ такого, что на нем $\psi_2(t) \equiv 0$. Действительно, допустим, что это так. Но тогда на рассматриваемом интервале выполнено $\dot{\psi}_2 \equiv 0$, откуда $\psi_1 \equiv 0$. Следовательно, $\psi_0 \equiv 0$, $\psi_3 \equiv 0$ и опять получаем нулевую пару. Таким образом, доказано, что в этой задаче могут быть только регулярные решения.

Теперь запишем решение сопряженной системы

$$\psi_1(t) = (t - t_k), \qquad \psi_2(t) = -\frac{1}{2}(t - t_k)^2 + C,$$

где C — произвольная константа. Из вида ψ_2 следует, что при любых C функция $\psi_2(t)$ может пересечь отрезок оси абсцисс $[0, t_k]$ не более, чем в одной точке $\tau \in [0,1]$ $(t_k = 1)$. При этом $\psi_2(t) < 0$ на $t \in [0,\tau)$. Случай, когда $\psi_2(t)$ не пересекает ось абсцисс, нам не подходит, поскольку тогда оптимальное управление на всем отрезке $u^0(t) = 1$, что не позволяет выполнить граничные условия.

Следовательно, структура оптимального управления такова:

$$u^0 = -1 \text{ при } t \in [0,\tau), \qquad u^0 = 1 \text{ при } t \in [\tau, 1].$$

Экстремаль Понтрягина на отрезке $t \in [0,\tau]$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{x}_2(t) = -t \\ \hat{x}_1(t) = -\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \qquad t \in [0,\tau].$$

Продолжая решение на отрезке $t \in [\tau, 1]$, получим

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{x}_2(t) = \hat{x}_2(\tau) + t - \tau = t - 2\tau, \\ \hat{x}_1(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - 2\tau t + C \end{cases} \qquad t \in [\tau, 1].$$

Из условия $\hat{x}_2(1) = 0$ получаем $\tau = \frac{1}{2}$.

Непосредственной проверкой покажем, что единственная экстремаль $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум функционала качества. Для этого выберем кусочно-гладкую вариацию $\delta x_1(t)$ такую, что $\hat{x}_1(t) + \delta x_1(t)$ является допустимой траекторией. Для этого необходимо, чтобы выполнялись условия $\delta x_1(0) = \delta \dot{x}_1(0) = 0$ и $|\ddot{\hat{x}}_1 + \delta \ddot{x}_1| = |u^0 + \delta u| \le 1$.

Учитывая, что на всем рассматриваемом отрезке времени выполнено равенство $\ddot{\psi}_2 = -1$, приращение функционала запишем в виде

$$\Delta J = J(u^0 + \delta u) - J(u^0) = \int_0^1 (\hat{x}_1 + \delta x_1)dt - \int_0^1 \delta x_1 dt =$$
$$= \int_0^1 \delta x_1 dt = -\int_0^1 \ddot{\psi}_2 \delta x_1 dt = -\int_0^1 \delta x_1 d\dot{\psi}_2.$$

Проинтегрируем дважды по частям последнее выражение с учетом краевых условий $\delta x_1(0) = \delta \dot{x}_1(0) = 0$ и $\dot{\psi}_2(1) = 0$. Тогда

$$\Delta J = \int_0^1 \dot{\psi}_2 d\delta x_1 - \dot{\psi}_2 \delta x_1 \Big|_0^1 = \psi_2 \delta \dot{x}_1 \Big|_0^1 - \int_0^1 \delta \ddot{x}_1 \psi_2 dt = -\int_0^1 \delta \ddot{x}_1 \psi_2 dt.$$

Учитывая, что допустимые вариации $\delta \ddot{x}_1 \ge 0$ и $\psi_2 \le 0$ при $t \in [0, \frac{1}{2}]$, а $\delta \ddot{x}_1 \le 0$, $\psi_2 \ge 0$ при $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, получим неравенство $\Delta J \ge 0$.

Следовательно, единственная экстремаль $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум функционала J.

Пример 2. *Построить синтез оптимального управления в следующей задаче быстродействия:*

уравнения движения системы $\ddot{x} = u$,
ограничения на управление $|u(t)| \le 1$,
начальное состояние системы $x^2(0) + \dot{x}^2(0) > 1$,
терминальное многообразие $(x(t_k), \dot{x}(t_k)) \in M = \{x^2 + \dot{x}^2 = 1\}$
функционал $t_k \to \min\limits_u$.

Решение. Введем переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ $x_3 = t$. Исходная система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases} \tag{5.10}$$

В новых переменных экстремальная задача примет вид $x_3 \to \min\limits_u$. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина для задачи оптимального прихода на многообразие с терминальным функционалом. Функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3,$$

а сопряженная система соответственно имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Конечное многообразие есть $M = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, откуда условия трансверсальности имеют вид

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t_k) \\ \psi_2(t_k) \\ \psi_3(t_k) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1(t_k) \\ 2x_2(t_k) \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует $\psi_3(t_k) = -\lambda_0 \le 0$, $(\psi_1(t_k), \psi_2(t_k) = 2 * \lambda_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, где $x_1(t_k) = \cos\alpha$, $x_2(t_k) = \sin\alpha$, α — угол, определяющий положение конечной точки траектории D (см. рис. 5.1) на окружности M.