Московский Авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт №8
«Информационные технологии и прикладная математика»

Кафедра 813
«Компьютерная математика»

Курсовой проект
по дисциплине
«Математический практикум»

Тема:
«Математические вычисления в пакете Sage»

ВАРИАНТ №16

Студент: Лебедева Анна Ильинична

Группа: М8О-210Б-19

Преподаватели:

Денисова И. П.

Гавриш О. Н.

Ганичева А. К.

Пасисниченко М. А.

Оценка:

Дата:

Москва 2020г.

Оглавление

1 Исследование графиков функций

Заданная формула функции:

```
In [1]: var('x')
        y = (2^tan(2*x) + tan(2*x))^2
        show("y = ", y)
```

$y = (2^{\tan(2*x)} + \tan(2*x))^2$

Область определения

Область определения функции - это множество точек, на каждой из которых функция имеет значение. Рассмотрим функцию $f(x)$: $\mathrm{y} = \tan(x)$.

```
In [2]: D = (-pi/2, pi/2)
        show(D)
```

$[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Четность/нечетность

```
In [3]: if (y(-x).simplify() != y(x).simplify()):
            show("Функция не является четной")
        else:
            show("Функция является четной")

        if (y(-x).simplify() != -y(x).simplify()):
            show("Функция не является нечетной")
        else:
            show("Функция является нечетной")
```

```
Функция не является четной.


Функция не является нечетной.
```

Периодичность

```
In [4]: T = pi/2
        show("Функция с периодом: ", T)
```

Функция с периодом: $\frac{\pi}{2}$

Точки пересечения функции с осями координат

```
In [5]: p_x = y(0)
        show("y(0) = ", p_x)
```

```
y(0) =  1
```

График пересекает ось Oy в точке (0, 1).

```
In [6]: xx1 = find_root((2^tan(2*x) + tan(2*x))^2 == 0, -1, 0)
        xx1
```

```
Out[6]: -0.2850769650206669
```

График пересекает ось Ox в точке (-0.2850769650206669, 0).

Промежутки знакопостоянства

```
In [7]: D = (-Infinity, -0.2850769650206669)
        R = (-0.2850769650206669, Infinity)
        show(D,"",R)
```

$(-\infty, -0.285076965020667)(-0.285076965020667, \infty)$

Промежутки возрастания и убывания

```
In [8]: Fd = y.derivative()
        show(Fd)
```

$4*((\tan(2*x)^2+1)*2^{\tan(2*x)}*\log(2)+\tan(2*x)^2+1)*(2^{\tan(2*x)}+\tan(2*x))$

Промежутки возрастания функции пересеченные с одз.

```
In [9]: x_0 = solve([Fd > 0, -pi/2 <= x <= pi/2], x)
        show(x_0)
```

```
[[-1/2*pi < x, 2^tan(2*x) + tan(2*x) > 0], [x == -1/2*pi, 1 > 0]]
```

Промежутков убывания функции нет.

```
In [10]: x_0 = solve([Fd < 0, -pi/2 <= x <= pi/2], x)
         show(x_0)
```

```
[[-1/2*pi < x, -2^tan(2*x) - tan(2*x) > 0], [x == -1/2*pi, -1 > 0]]
```

Знаки производной функции:

```
In [11]: find_root(Fd == 0, -pi/2, pi/2)
```

```
Out[11]: -0.2850769652326084
```

```
In [12]: show(" y(x) ↑: x  (-,-0.2850769652326084)")
```

```
' y(x) ↑: x  (-,-0.2850769652326084)'
```

```
In [13]: show(" y(x) ↑: x  (-0.2850769652326084, +) ")
```

```
' y(x) ↑: x  (-0.2850769652326084, +) '
```

При переходе через точку x = -0.2850769652326084 функция f(x) не меняет свой характер, поэтому критических точек у функции нет.

Поведение функции в окрестности «особых» точек и при больших по модулю x

Особых точек у функции нет.

```
In [14]: show(y(100), ";", y(500), ";", y(-100), ";", y(-500))
```

$(2^{\tan(200)} + \tan(200))^2$; $(2^{\tan(1000)} + \tan(1000))^2$; $((\frac{1}{2})^{\tan(200)} - \tan(200))^2$; $((\frac{1}{2})^{\tan(1000)} - \tan(1000))^2$

```
In [15]: Fdd = Fd.derivative()
         show(Fdd)
```

$8*((\tan(2*x)^2+1)*2^{\tan(2*x)}*\log(2)+tan(2*x)^2+1)^2+8*((\tan(2*x)^2+1)^2*2^{\tan(2*x)}*\log(2)^2+2*(\tan(2*x)^2+1)*2^{\tan(2*x)}*\log(2)*\tan(2*x)+2*(\tan(2*x)^2+1)*\tan(2*x))*(2^{\tan(2*x)}+\tan(2*x))$

```
In [16]: #show(find_root(Fdd == 0, -pi/2, pi/2))
         r = solve(Fdd == 0, x)
         show(r)
```

```
[]
```

Корней нет, поэтому точек перегиба нет.

Непрерывность. Наличие точек разрыва и их классификация

```
In [17]: lim((2^tan(2*x) + tan(2*x))^2, x = 0)
```

```
Out[17]: 1
```

Точек разрыва не обнаружено.

Асимптоты

```
In [18]: show("Уравнение асимптот: y = kx + b")
         k = limit((y(x)/x), x = infinity)
         show("k=", k)
         b = limit((y(x) - k*x), x = infinity)
         show("b= ", b)
         show("Горизонтальная асимптота: y= ", k*x+b)
```

Уравнение асимптот: y = kx + b

```
k=0
```

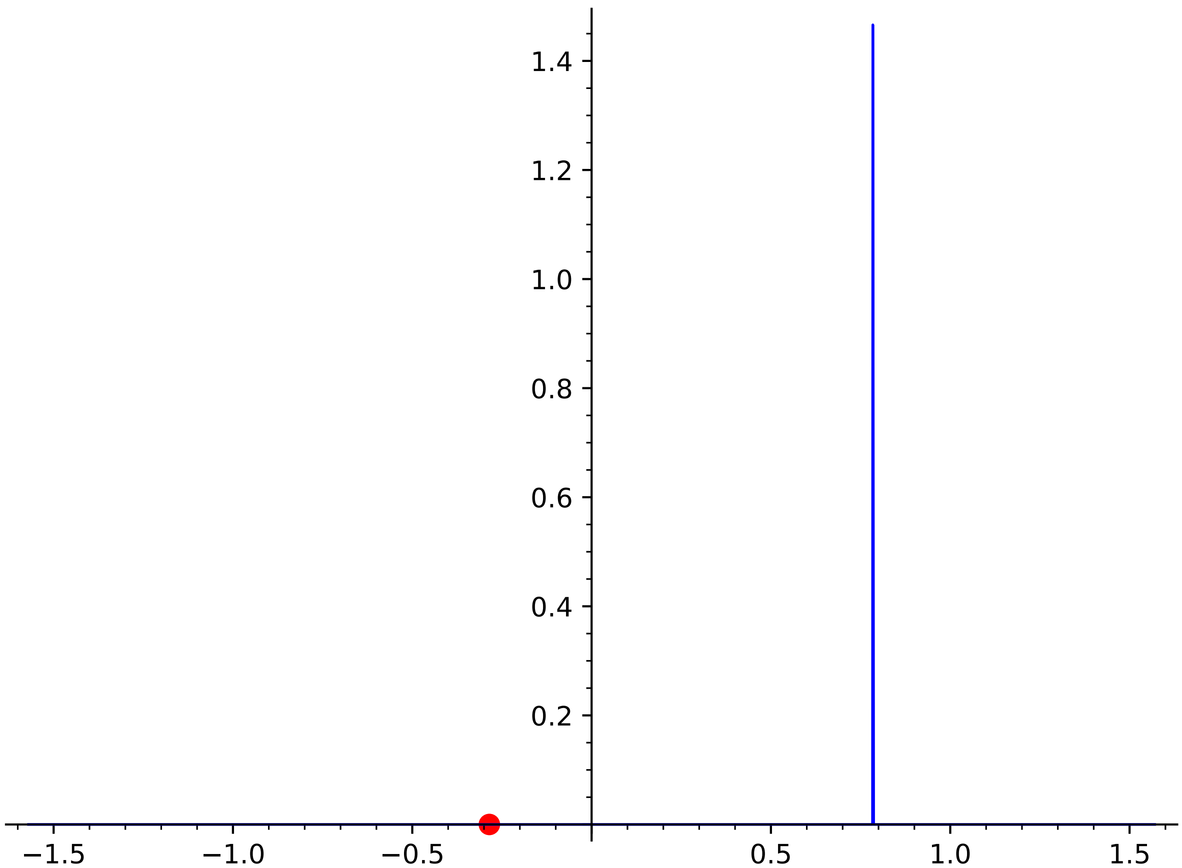
```
b=0
```

```
Горизонтальная асимптота: y=0
```

График функции

```
In [19]: y = (2^tan(2*x) + tan(2*x))^2
         plot(y, -pi/2, pi/2) + list_plot([(xx1, 0)], size=65, rgbcolor="red")
```

Out[19]:



(1)

2 Задание №2. СЛАУ

1. Решить методом Крамера

Найдем решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}.$$

```
In [1]: M = MatrixSpace(QQ,3)
        A = M([4, 2, -1,   -3, -1, 1,   -1, 4, 5])
        show("Матрица A: ", A)
```

$$\text{Матрица A: } \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
In [2]: B = vector([-1, -1, -8])
        show("B: ", B)
```

$$B: \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

```
In [3]: det = A.determinant()
        show("Определитель A: ", det)
```

Определитель A: 5

```
In [4]: a1 = copy(A)
        a1.set_column(0, B)
        show("a1: ", a1)
        d1 = a1.determinant()
        show("Определитель a1: ", d1)
```

$$a1: \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Определитель a1: 15

```
In [5]: a2 = copy(A)
        a2.set_column(1, B)
        show("a2:", a2)
        d2 = a2.determinant()
        show("Определитель a2: ", d2)
```

$$a2: \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

```
Определитель a2: -25
```

```
In [6]: a3 = copy(A)
        a3.set_column(2, B)
        show("a3:", a3)
        d3 = a3.determinant()
        show("Определитель a3: ", d3)
```

$$a3 : \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

```
Определитель a3: 15
```

```
In [7]: x1 = d1/det
        x2 = d2/det
        x3 = d3/det
        show ("Ответ:")
        show("x = ",(x1, x2, x3))
```

```
Ответ: x = (3, -5, 3)
```

2. Решить методом Гаусса и проверить на совместность

```
In [8]: N = MatrixSpace(QQ, 3, 4)
        A_full = N([4, 2, -1, -1,   -3, -1, 1, -1,   -1, 4, 5, -8])
        show(A_full)
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

```
In [9]: r_A = A.rank()
        r_A_full = A_full.rank()
        if (r_A == r_A_full):
            show("Система совместна")
        else:
            show("Система несовместна")
```

Система совместна

```
In [10]: x = A_full.rref()
         show(x)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: x = (3, -5, 3)

3 Задание №3. Матрицы — Матричные уравнения

```
In [1]: W = MatrixSpace(QQ,3)
        W1 = W([-2, 4, -6, -1, 0, -2, 4, 4, 2])
        W2 = W([2, 8, -9, -1, 1, 4, 1, 0, 2])
        W3 = W([1, 0, -3, -1, 2, -4, 2, 0, 2])
        show("Исходное матричное уравнение: ")
        show("-3X", W1, "-1/4", W2,"^2=", W3)
```

Исходное матричное уравнение:

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3X\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -9 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
In [2]: T1 = (-1/4) * (W1^2)
        T2 = (T1 - W2) / (-3)
        T3 = W3^(-1)
        result = T2 * T3
```

```
In [3]: show(result)
```

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & -\frac{23}{24} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4 Задание №4. Решение алгебр. уравнений 3й степени

Должны привести уравнение к виду:

$$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Сделать замену: $x = z - \frac{a}{3}$ Получим:

$$z^3 + p \cdot z + q = 0$$

Вычисляем:

$$u = \left(-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right)^{1/3}$$

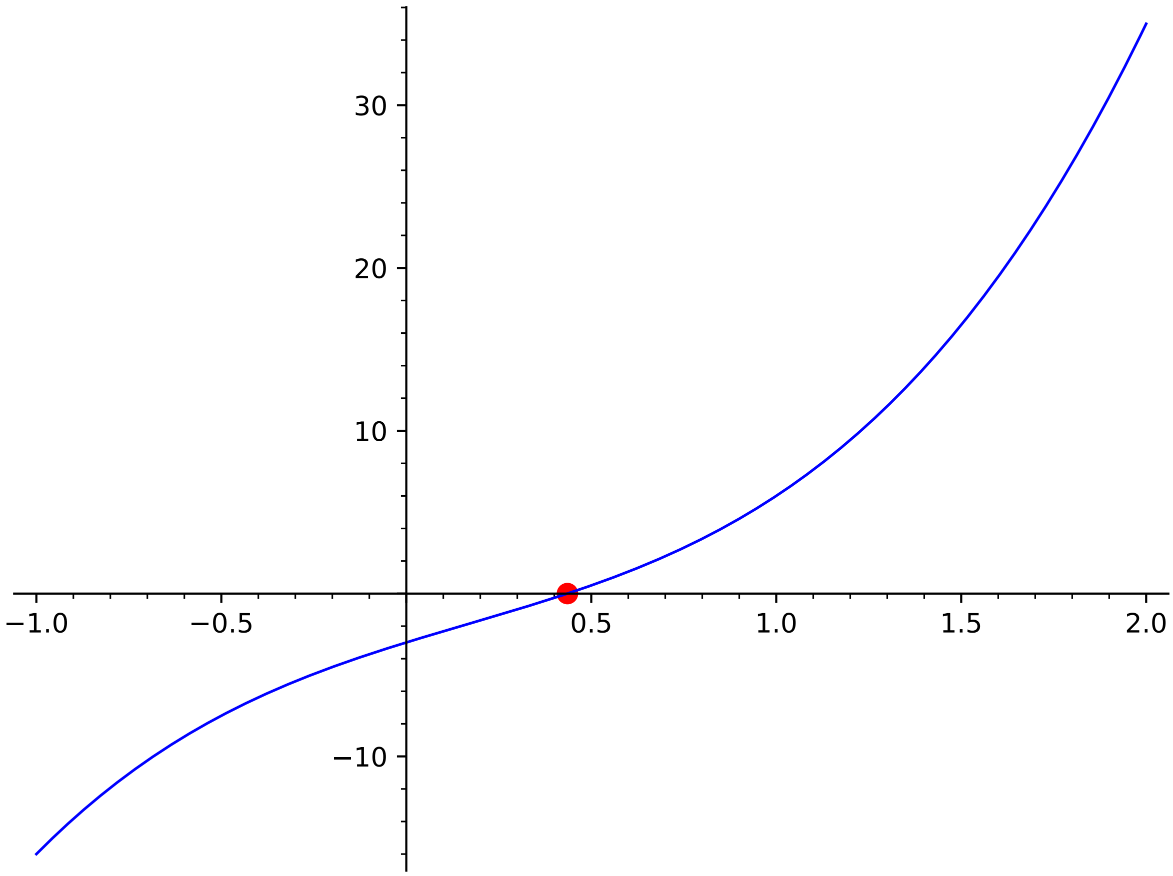
$$v = \left(-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right)^{1/3}$$

Берем u1 (где u1 - какое-то значение u) v1 вычисляем из $3 \cdot u \cdot v + p = 0$ Вычисляем $\varepsilon = -1/2 + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ Корни z: $z1 = u1 + v1$ $z2 = u1 \cdot \varepsilon + v1 \cdot \varepsilon^2$ $z3 = v1 \cdot \varepsilon + u1 \cdot \varepsilon^2$ И далее возвращаемся к замене $x = z - \frac{a}{3}$

```
In [1]: poly_x = 4*x**3 - 2*x**2 +7*x - 3
        poly_x /= poly_x.coefficient(x, 3)
        show(poly_x)
        plot(poly_x, (x, -5, 3))
```

$4x^3 - 2x^2 + 7x - 3 = 0$

Out[1]:



(2)

Сделаем замену x = z - a/3

Внимание!

a - это коэф. при x^2, не при x

In [2]:
```
poly_x
```

Out[2]:
```
x^3 - 1/2*x^2 + 7/4*x - 3/4
```

In [3]:
```
a = poly_x.coefficient(x, 2)
show("a = ", a)
var("z")
poly_z = poly_x(x = z -(a/3))
```

```
a = -1/2
```

In [4]:
```
poly_z = poly_z.expand().simplify()
show(poly_z)
```

```
z^3 + 5/3*z - 101/216
```

```
In [5]: poly_z /= poly_z.coefficient(z, 3)
        show(poly_z)
```

```
z^3 + 5/3*z - 101/216
```

$z^3 + p \cdot z + q = 0$ Отсюда:

```
In [6]: pq = {'p': poly_z.coefficient(z, 1), 'q': poly_z.coefficient(z, 0)}
        show(pq)
```

```
{p: 5/3, q: -101/216}
```

Вычисляем:

$$u = \left(-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right)^{1/3}$$

$$v = \left(-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right)^{1/3}$$

```
In [7]: def safe_cubic_root(_in_param):
            if _in_param.imag():
                # sgn для комплексного числа выдаст ошибку в дальнейшем, когда будет выз
                # поэтому придется просто возводить в степень
                return (_in_param)**(1/3)
            else:
                return sgn(_in_param)*(abs(_in_param)**(1/3))
```

```
In [8]: var("p q da")
        # da - выносим отдельно и объявляем _после_ формул "u" и "v"
        # потому как так отлаживать удобнее
        u_pre = -q/2 + sqrt(da)
        v_pre = -q/2 - sqrt(da)
        da = q**2/4 + p**3/27
```

```
In [9]: show(da)
```

```
1/27*p^3 + 1/4*q^2
```

```
In [10]: show(da(**pq))
```

```
521/2304
```

Берем u1 (где u1 - какое-то значение u)

```
In [11]: show("da = ", da(**pq))
         u1 = safe_cubic_root(u_pre(**pq, da=da(**pq)))
         show("u1 = ", u1.n(digits=4))
```

```
da = 521/2304
```

```
u1 = 0.8918
```

```
In [12]: u1_2 = safe_cubic_root(u_pre(**pq, da=da(**pq)))

         show("u1_2 = ", u1_2.n(digits=4))
```

```
u1_2 = 0.8918
```

v1 вычисляем из $3 \cdot u \cdot v + p = 0$

```
In [13]: v1=safe_cubic_root(v_pre(**pq, da=da(**pq)))
         show(v1)
         show(v1.n(digits=4))
```

```
-abs(-1/48*sqrt(521) + 101/432)^(1/3)
```

```
-0.6229
```

In [14]:
```
v1_2 = v_pre(**pq, da=da(**pq))**(1/3)
show(v1_2.n(digits=4))
```

```
0.3115 + 0.5395*I
```

In [15]:
```
def v1_func(_p, _u):
    return -_p/(3*_u)



v1 = v1_func(_p=pq['p'], _u=u1_2)
show(v1)
show(v1.n(digits=4))
```

```
-20/3*(1/2)^(2/3)/(9*sqrt(521) + 101)^(1/3)
```

```
-0.6229
```

Вычисляем $\varepsilon = -1/2 + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

In [16]:
```
Eps = -1/2 + (sqrt(-3))/2
show(Eps)
```

```
1/2*sqrt(-3) - 1/2
```

Корни z: $z1 = u1 + v1$ $z2 = u1 \cdot \varepsilon + v1 \cdot \varepsilon^2$ $z3 = v1 \cdot \varepsilon + u1 \cdot \varepsilon^2$

In [17]:
```
z = [u1 + v1
     , u1*Eps + v1*Eps**2
     , v1*Eps + u1*Eps**2
    ]


for i, zi in enumerate(z):
    show(f"z{i} = ", zi.simplify())

for i, zi in enumerate(z):
    show(f"z{i} = ", zi.n(digits=4))
```

$z0 = 1/12 * 2^{(2/3)} * (9 * \sqrt{(}521) + 101)^{(1/3)} - 10/3 * 2^{(1/3)/(9*\sqrt{(}521)+101)^{(1/3)}}$

$z1 = 1/24 * 2^{(2/3)} * (9 * \sqrt{(}521) + 101)^{(1/3)} * (*\sqrt{(}3) - 1) - 5/6 * 2^{(1/3)} * (I * \sqrt{(}3) - 1)^2/(9 * \sqrt{(}521) + 101)^{(1/3)}$

$z2 = 1/48*2^{(2/3)}*(9*\sqrt{(}521)+101)^{(1/3)}*(*\sqrt{(}3)-1)^2-5/3*2^{(1/3)}*(*\sqrt{(}3)-1)/(9*\sqrt{(}521)+101)^{(1/3)}$

```
z0 = 0.2689
```

```
z1 = -0.1344 + 1.312*I
```

```
z2 = -0.1344 - 1.312*I
```

Теперь ищем D, чтобы сверить, какие корни получились, какие должны быть и пр.: D < 0: 1 действительный, два комплексных корня D == 0: три действительных корня, два из них равные D > 0 - три действительных и различных

```
In [18]: D = -4*p**3 - 27*q**2
```

```
In [19]: D(**pq)
```

```
Out[19]: -1563/64
```

Вернемся к подстановке: x = z - a/3

```
In [20]: a = poly_x.coefficient(x, 2)


         def from_z_to_x(_z, _a):
             return _z - _a/3


         for i, zi in enumerate(z):
             xi = from_z_to_x(_z=zi, _a=a)
             show(f"x{i} = ", xi.n(digits=4))
```

```
x0 = 0.4355
```

```
x1 = 0.03222 + 1.312*I
```

```
x2 = 0.03223 - 1.312*I
```

```
In [21]: var("x")
         sols = solve(poly_x(), x)
         for i, sol in enumerate(sols):
             show(f"x{i} = ", sol.rhs().n(digits=4))
```

```
x0 = 0.03223 - 1.312*I
```

```
x1 = 0.03222 + 1.312*I
```

```
x2 = 0.4355
```

5 Задание №5. Алгебраические уравнения 4-й степени

```
In [1]: var("x")
        poly_x = -5*x**4 + 2*x**3 - 3*x**2 +7*x - 11
        show(poly_x)
```

$$-5 * x^4 + 2 * x^3 - 3 * x^2 + 7 * x - 11$$

```
In [2]: poly_x /= poly_x.coefficient(x, 4)
        show(poly_x)
```

$$x^4 - 2/5 * x^3 + 3/5 * x^2 - 7/5 * x + 11/5$$

```
In [3]: # замена x = y - a/4, где a - коэф. при x**3
        a = poly_x.coefficient(x, 3)
        show("a = ", a)
```

```
a =  -2/5
```

```
In [4]: var("y")
        poly_y = poly_x(x = y - (a/4)).expand().simplify_full()
        show(poly_y)
```

$$y^4 + 27/50 * y^2 - 161/125 * y + 20657/10000$$

```
In [5]: poly_y /= poly_y.coefficient(y, 4)
        show(poly_y)
```

$$y^4 + 27/50 * y^2 - 161/125 * y + 20657/10000$$

```
In [6]: pqr = {'p': poly_y.coefficient(y, 2)
               , 'q': poly_y.coefficient(y, 1)
               , 'r': poly_y.coefficient(y, 0)}
        show(pqr)
```

```
{p: 27/50, q: -161/125, r: 20657/10000}
```

```
In [7]: var("s p q r")
        poly_s = 2*s**3 - p*s**2 - 2*r*s + r*p - q**2/4
        show(poly_s)
```

$$-p * s^2 + 2 * s^3 - 1/4 * q^2 + p * r - 2 * r * s$$

```
In [8]: poly_s_n = poly_s(**pqr)
        show(poly_s_n)
```

$$2 * s^3 - 27/50 * s^2 - 20657/5000 * s + 350371/500000$$

```
In [9]: sols = solve(poly_s_n, s)
```

```
In [10]: for sol in sols:
             show(sol.rhs().n(digits=3))
```

```
0.168
```

```
-1.39
```

```
1.49
```

```
In [11]: # Выбираем любой s, не равный нулю
         s_0 = sols[2].rhs()
         show(s_0.n(digits=3))
```

```
1.49
```

```
In [12]: var("y s p q")
         poly_y_1 = y**2 - y*sqrt(2*s - p) + q/(2*sqrt(2*s - p)) + s
         poly_y_2 = y**2 + y*sqrt(2*s - p) - q/(2*sqrt(2*s - p)) + s
```

```
In [13]: show(poly_y_1)
         show(poly_y_2)
```

$$y^2 - \sqrt{(}-p+2*s)*y+s+\frac{1}{2}*\frac{q}{\sqrt{(}-p+2*s)}$$
$$y^2 + \sqrt{(}-p+2*s)*y+s-\frac{1}{2}*\frac{q}{\sqrt{(}-p+2*s)}$$

```
In [14]: show(s_0)
```

$$(\frac{1}{18000}*I*\sqrt{(}35799953)*\sqrt{(}3)-\frac{163}{2000})^{(1/3)}+\frac{209}{300}/(\frac{1}{18000}*I*\sqrt{(}35799953)*\sqrt{(}3)-\frac{163}{2000})^{(1/3)}+\frac{9}{100}$$

```
In [15]: poly_y_1_n = poly_y_1(**pqr, s=s_0)
         poly_y_2_n = poly_y_2(**pqr, s=s_0)
         show(poly_y_1_n.simplify_full())
         show(poly_y_2_n)
```

$1/145800*18^(1/3)*\sqrt{(}6)*3^(11/12)*(2700*(I*\sqrt{(}35799953)*\sqrt{(}3)-1467)^(1/3)*y^2*\sqrt{(}-18^(1/3)*(9*18^(2/3)*3^(5/6)*(I*\sqrt{(}35799953)*\sqrt{(}3)-1467)^(1/3)-5*18^(1/3)*3^(5/6)*(I*\sqrt{(}35799953)*\sqrt{(}3)-1467)^(2/3)-6270*3^(5/6))/(I*\sqrt{(}35799953)-489*\sqrt{(}3))^(1/3))-90*(5*18^(2/3)*\sqrt{(}6)*(I*\sqrt{(}35799953)*\sqrt{(}3)-1467)^(2/3)+6270*18^(1/3)*\sqrt{(}6)-162*\sqrt{(}6)*(I*\sqrt{(}35799953)*\sqrt{(}3)-1467)^(1/3))*y+\sqrt{(}3)*(5*18^(2/3)*\sqrt{(}3)*(I*\sqrt{(}35799953)*\sqrt{(}3)-1467)^(2/3)+6270*18^(1/3)*\sqrt{(}3)+81*\sqrt{(}3)*(I*\sqrt{(}35799953)*\sqrt{(}3)-1467)^(1/3))*\sqrt{(}-$

$18^(1/3)*(9*18^(2/3)*3^(5/6)*(I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-1467)^(1/3)-5*18^(1/3)*3^(5/6)*(I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-1467)^(2/3)-6270*3^(5/6))/(I*\sqrt(35799953)-489*\sqrt(3))^(1/3))-26082*\sqrt(6)*(I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-1467)^(1/3))/(\sqrt(-(9*18^(2/3)*(I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-1467)^(1/3)-5*18^(1/3)*(I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-1467)^(2/3)-6270)/(I*\sqrt(35799953)-489*\sqrt(3))^(1/3))*(I*\sqrt(35799953)-489*\sqrt(3))^(1/3))$

$y^2+1/5*\sqrt(1/6)*y*\sqrt(300*(1/18000*I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-163/2000)^(1/3)+209/(1/18000*I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-163/2000)^(1/3)-54)+(1/18000*I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-163/2000)^(1/3)+483/25*\sqrt(1/6)/\sqrt(300*(1/18000*I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-163/2000)^(1/3)+209/(1/18000*I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-163/2000)^(1/3)-54)+209/300/(1/18000*I*\sqrt(35799953)*\sqrt(3)-163/2000)^(1/3)+9/100$

```
In [16]: sols = solve(poly_y_1_n, y)
```

```
In [17]: sols.extend(solve(poly_y_2_n, y))
```

```
In [18]: show(poly_x)
```

$x^4-2/5*x^3+3/5*x^2-7/5*x+11/5$

```
In [19]: a = poly_x.coefficient(x, 3)
         show("a = ", a)
         for i, sol in enumerate(sols):
             show(f"x_{i} = ", (sol.rhs() - (a/4)).n(digits=5))
```

```
a = -2/5

x_0 =  0.88262 + 0.68634*I

x_1 = 0.88262 - 0.68634*I

x_2 = -0.68262 + 1.1375*I

x_3 = -0.68262 - 1.1375*I
```

In [20]:
```
sols = solve(poly_x, x)
for i, sol in enumerate(sols):
    show(f"x_{i} = ", sol.rhs().n(digits=5))
```

```
x_0 = -0.68262 - 1.1375*I
```

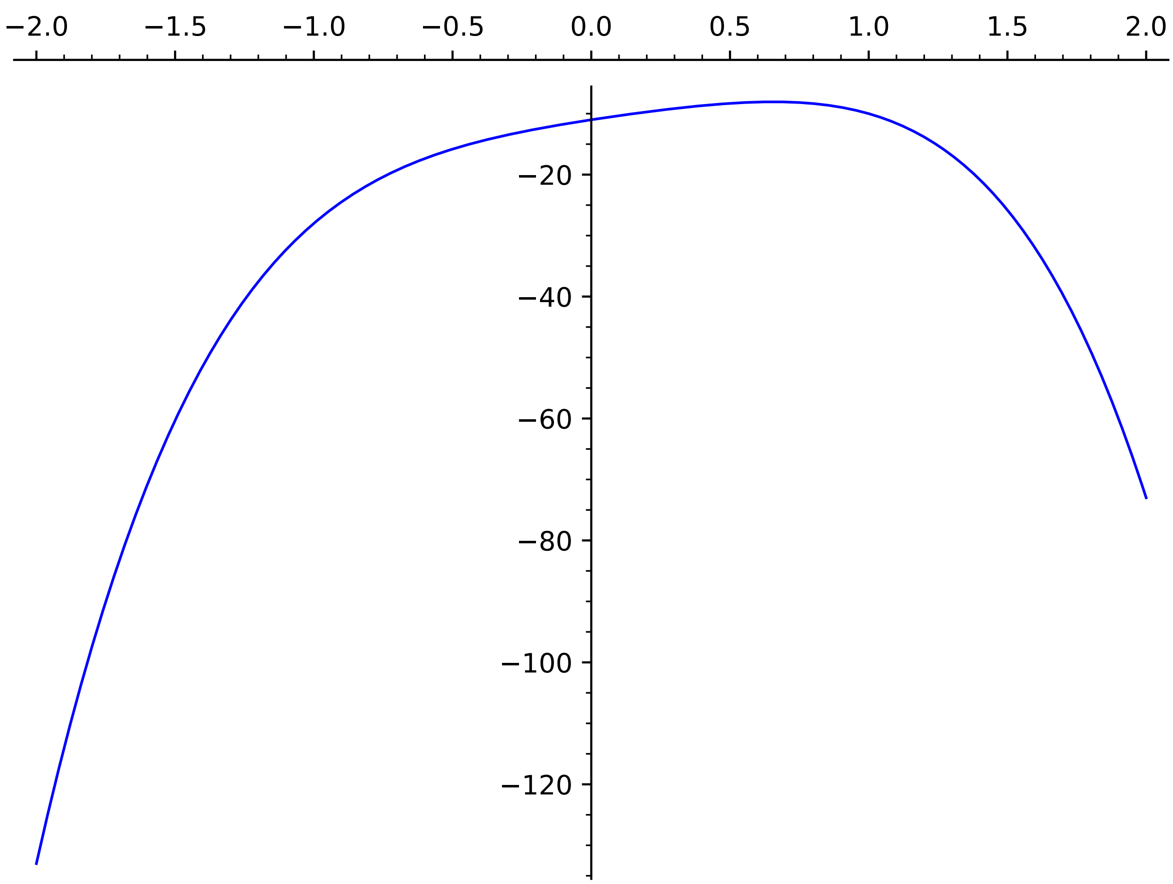
```
x_1 = -0.68262 + 1.1375*I
```

```
x_2 = 0.88262 - 0.68633*I
```

```
x_3 = 0.88262 + 0.68633*I
```

In [21]:
```
plot(poly_x, -2, 2, rgbcolor="red")
```

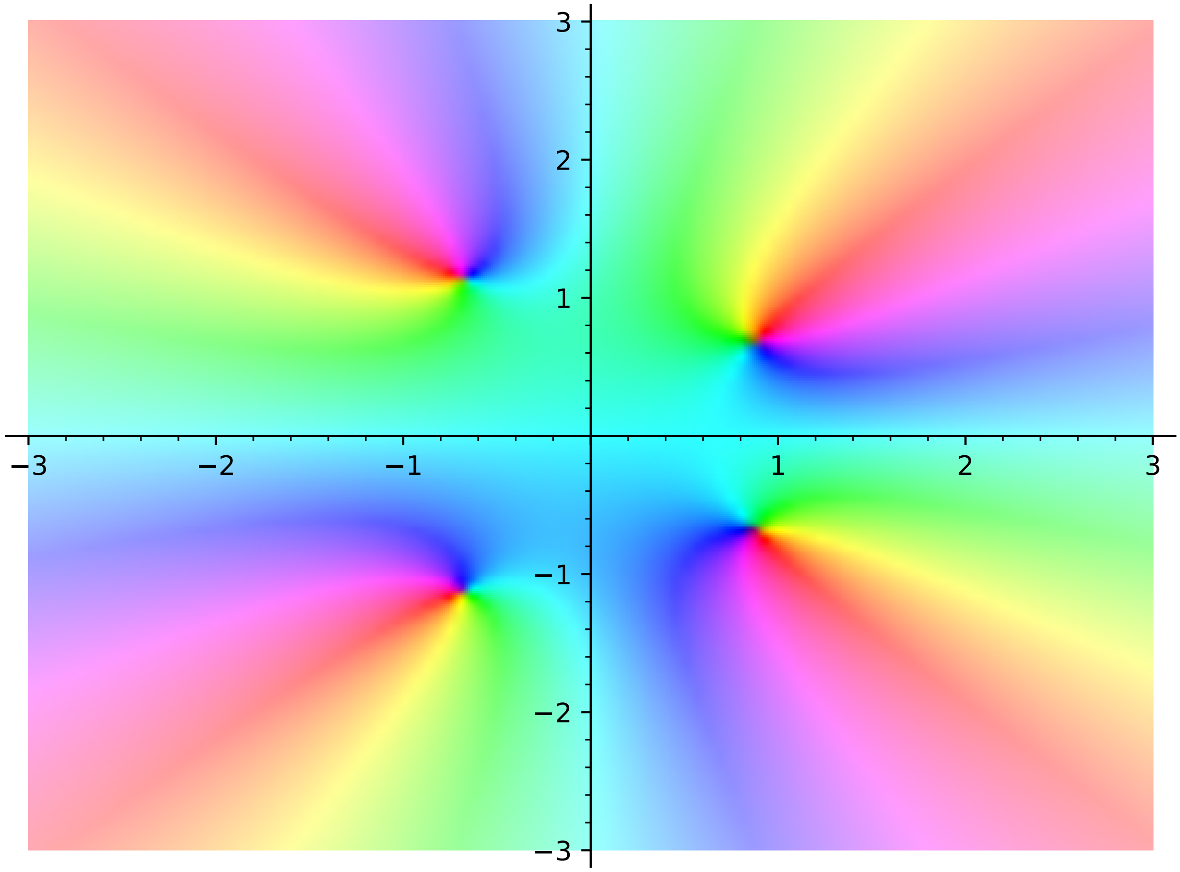
Out[21]:



(3)

```
In [22]: complex_plot(poly_x, (-3, 3), (-3, 3))
```

```
Out[22]:
```



(3)

6 Задание №6. НОД двух полиномов

```
In [1]: R, (x, y) = PolynomialRing(QQ,'x, y').objgens()
        R
```

```
Out[1]: Multivariate Polynomial Ring in x, y over Rational Field
```

```
In [2]: f = x^4 + x^3 + 2 * x^2 + x + 1
        g = x^3 - 2*x^2 + x - 2
        show("f = ", f)
        show("g = ", g)
```

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$
$$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

```
In [3]: def MyGcd(p1, p2):
            while p1 != 0 and p2 != 0:
                if p1 >= p2:
                    p1 %= p2
                else:
                    p2 %= p1
            return p1 or p2
```

Применим к ним алгоритм Евклида для нахождения их наименьшего общего делителя (НОД):

```
In [4]: my_gcd = MyGcd(f, g)/7
        res = f.gcd(g)

        if my_gcd == res:
            show("НОД= ", my_gcd)
        else:
            show("НОД вычислен неверно!")
```

НОД$=x^2+1$

7 Задание №7. Линейное преобразование и характеристическое уравнение

```
In [1]: N = MatrixSpace(QQ, 3)
        A = N([1, 1, 0, 2, 1, -2, 1, 3, 1])
        S = N([2, 4, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1])
        show("A = ", A)
        show("Новый базис: ", S)
```

Дано преобразование и базис:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} e_1` = 2e_1 + 4e_2 + e_3 \\ e_2` = 2e_1 + e_2 \\ e_3` = e_1 + e_3 \end{cases},$$

```
In [2]: B = (~S) * A * S
        show("B = ", B)
```

Матрица A в новом базисе:

$$B = \begin{vmatrix} 3 & \frac{38}{7} & \frac{1}{7} \\ -2 & -\frac{13}{7} & -\frac{2}{7} \\ 6 & \frac{11}{7} & \frac{13}{7} \end{vmatrix}.$$

```
In [3]: E = N([1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1])
        q = solve(det(A - x*E) == 0, x)
        show(q)
```

$[x == -1/2*(1/9*\sqrt(91)*\sqrt(3)-1)^{(1/3)}*(I*\sqrt(3)+1)-2/3*(I*\sqrt(3)-1)/(1/9*\sqrt(91)*\sqrt(3)-1)^{(1/3)}+1, x == -1/2*(1/9*\sqrt(91)*\sqrt(3)-1)^{(1/3)}*(-I*\sqrt(3)+1)+2/3*(I*\sqrt(3)+1)/(1/9*\sqrt(91)*\sqrt(3)-1)^{(1/3)}+1, x == (1/9*\sqrt(91)*\sqrt(3)-1)^{(1/3)}-4/3/(1/9*\sqrt(91)*\sqrt(3)-1)^{(1/3)}+1]$

```
In [4]: show("Собственнные значения B:", B.eigenvalues())
        show("Собственные векторы B:", B.eigenvectors_right())
```

Собственнные значения B: $\begin{cases} \lambda_1 = 0,527 \\ \lambda_2 = 1,237 - 2,042 * i \\ \lambda_3 = 1,237 + 2,042 * i \end{cases}$

Собственные векторы B: $[(0.5265341922708738?, [(1, -0.3477835023267799?, 4.098487565686247?)], 1),$ $2.041599226909250?*I, [(1, -0.3132877360160973? - 0.4435749036487627?*I, -0.4379357043363634? + 2.564651750288235?*I)], 1), (1.236732903864563? + 2.041599226909250?*I, [(1, -0.3132877360160973? + 0.4435749036487627? * I, -0.4379357043363634? - 2.564651750288235? * I)], 1)]$

```
In [5]: show("Характеристичекий полином A: ", A.charpoly())
        show("Характеристичекий полином B: ",B.charpoly())
```

Характеристичекий полином A: $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0$ Характеристичекий полином B: $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0$

8 Задание №8. Упрощение ур-й фигур 2го порядка на плоскости

Имеем уравнение: $-2y^2 - 3z^2 + 4yz + 4y + 4z - 12 = 0$. Составим по нему матрицы $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -12 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - \tau \cdot \lambda + \delta = 0$. Вычислим его коэффициенты по формулам: $\tau = a_{11} + a_{22}$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$. Найдём корни λ_1, λ_2 (с учетом кратности) характеристического уравнения. Вычислим инвариант $\Delta = \det P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$. По найденным характеристикам можно определить, что это эллипс.

```
In [1]: N = MatrixSpace(QQ, 3)
        T = MatrixSpace(QQ, 2)
        a11 = -2
        a12 = 2
        a22 = -3
        a1 = 2
        a2 = 2
        a0 = -12
        P = N([a11, a12, a1, a12, a22, a2, a1, a2, a0])
        A = T([a11, a12,  a12, a22])
        E = T([1, 0, 0, 1])
        gamma = a11 + a22
        delta = det(A)
        Delta = det(P)
        show(gamma,",", delta,",", Delta)
        show(P)
```

```
-5 , 2 , 12
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

```
In [2]: var('lyamda')
        r = solve(det(A - lyamda * E) == 0, lyamda)
        show(r)
```

$== -1/2 * \sqrt{(}17) - 5/2, == 1/2 * \sqrt{(}17) - 5/2]$

```
In [3]: lyamda1 = -1/2*sqrt(17) - 5/2
        lyamda2 = 1/2*sqrt(17) - 5/2
        l = lyamda1 * lyamda2
        show(l)
```

$-1/4 * (\sqrt{(}17) + 5) * (\sqrt{(}17) - 5)$

l > 0, delta > 0, Delta != 0, gamma * Delta < 0 следовательно это эллипс

```
In [4]: var('x1, y1')
        r = solve([(a11 - lyamda1) * x1 + a12 * y1 == 0, a12 * x1 + (a22 - lyamda1) * y1
        show(r)
```

$[[x1 == r1, y1 == -1/4 * \sqrt{(}17) * r1 - 1/4 * r1]]$

Координаты x0, y0 начала O_ канонической системы координат

```
In [5]: var('x, y')
        r = solve([a11 * x + a12 * y + a1 == 0, a12 * x + a22 * y + a2 == 0], x, y)
        show(r)
```

```
[[x == 5, y == 4]]
```

Коэффициенты канонического уравнения(A = a^2, B = b^2)

```
In [6]: var('A, B')
        A = -Delta / (lyamda1 * delta)
        B = -Delta / (lyamda2 * delta)
        show("A= ", A, " B=", B)
```

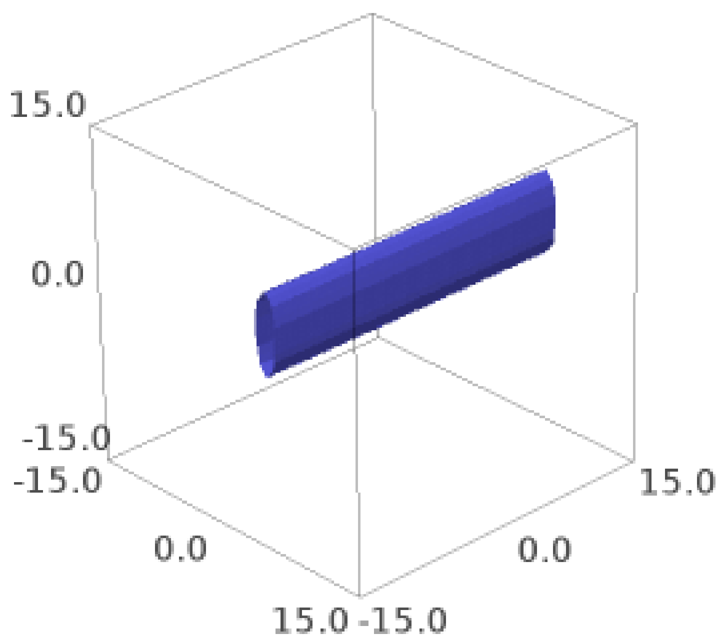
$A = 12/(\sqrt{(}17) + 5)\ B = -12/(\sqrt{(}17) - 5)$

```
In [7]: f = (x - 5)^2 / (12 / (sqrt(17) + 5)) + (y - 4)^2 / (-12 / (sqrt(17) - 5))
        show("1 = ", f)
```

$$1 = \frac{1}{12} * (x-5)^2 * (\sqrt{(}17) + 5) - \frac{1}{12} * (y-4)^2 * (\sqrt{(}17) - 5)$$

In [8]:
```
X, Y, Z = var('X, Y, Z')
F(X, Y, Z) = (X - 5)^2 / (12 / (sqrt(17) + 5)) + (Z - 4)^2 / (-12 / (sqrt(17) -
implicit_plot3d(F, (X, -15, 15), (Y, -15, 15), (Z, -15, 15))
```

Out[8]: Graphics3d Object



9 Задание №9. Численные методы — Интегралы

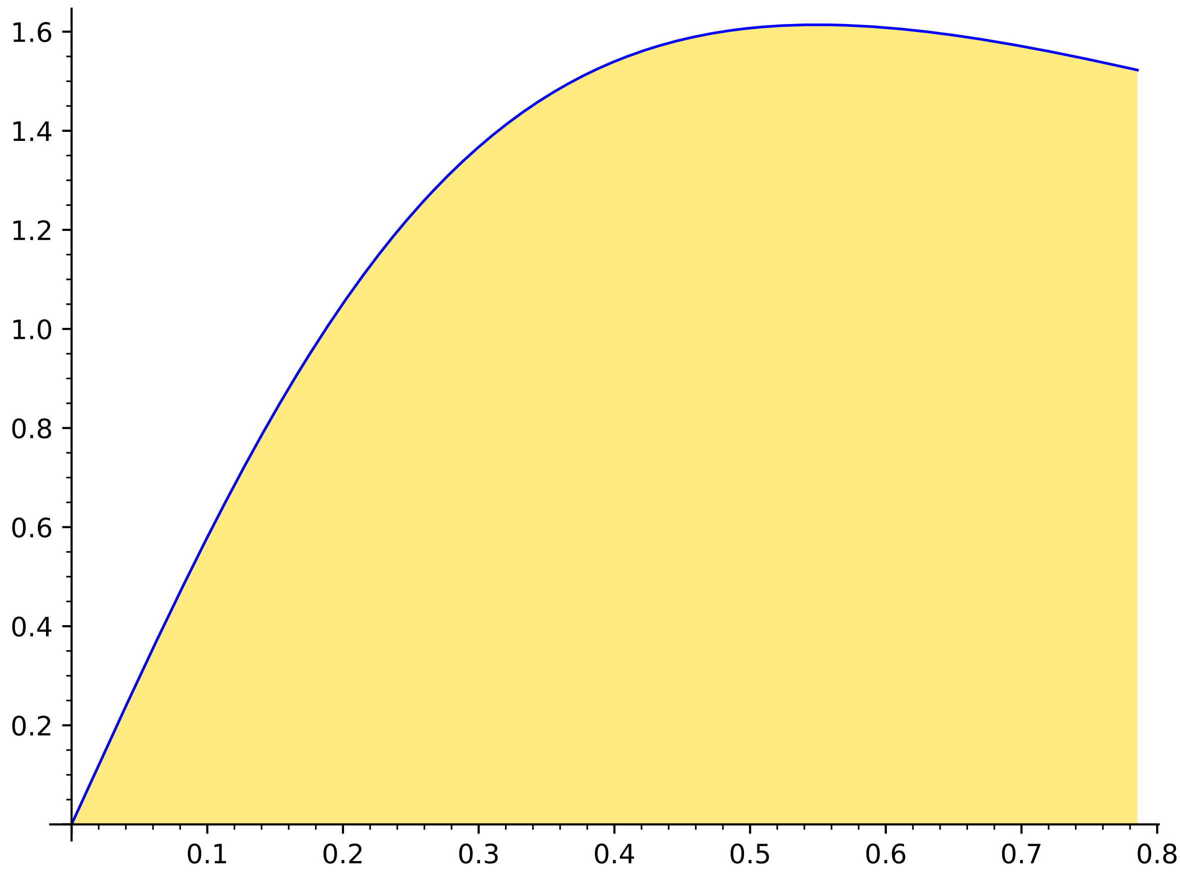
In [1]:
```
f = (8 * x - arctan(2 * x))/(1 + 4 * x^2)
a=0
b=pi/4
show(f)
```

$8*x - arctan(2*x))/(4*x^2+1)$

Построим её график на отрезке $(0, \frac{\pi}{4})$ и закрасим площадь под ней.

In [2]:
```
plot(f, xmin=a, xmax = b, fill=True, fillcolor="gold")
```

Out[2]:



Посчитаем значение интеграла.

In [3]:
```
integral_result = numerical_integral(f, a, b)[0]
show(integral_result)
```

```
0.9914591670015737
```

Воспользуемся методом трапеций.

```
In [4]: trapeze_result = 0
        max_steps = 10

        def trapeze(step):
            global value, a, b, f, max_steps, trapeze_result
            trapeze_result = 0
            length = (b-a)/max_steps
            pl = plot(f, xmin=0, xmax=1, ymin=0, ymax=2)
            for i in range(1, step+1):
                l = a + (i-1)*length
                r = a + i*length
                trapeze_result += ((f(x=r)+f(x=l))*length/2).n()
                pl += plot(polygon2d([(l, 0),
                           (r, 0),
                           (r, f(x=r).n()),
                           (l, f(x=l).n())], fill=False, rgbcolor=(255, 0, 0)))
            show(pl)
            show(f'i={step}. trapeze_result = {trapeze_result}')
```

```
In [5]: @interact(step=(0, max_steps, 1))
        def _(step=10):
            trapeze(step)
```

```
Interactive function <function _ at 0x6fee9bbed08> with 1 widget
  step: IntSlider(value=10, description='step...
```

Воспользуемся методом прямоугольников.

```
In [6]: rectangle_result = 0
        def rectangle(step):
            global value, a, b, f, max_steps, rectangle_result
            rectangle_result = 0
            length = (b-a)/max_steps
            pl = plot(f, xmin=0, xmax=1, ymin=0, ymax=2)
```

```
        for i in range(1, step+1):
            l = a + (i-1)*length
            r = a + i*length
            h = (f(x=r)+f(x=l))/2
            rectangle_result += (length*h).n()
            pl += plot(polygon2d([(l, 0),
                                  (r, 0),
                                  (r, h.n()),
                                  (l, h.n())], fill=False, rgbcolor=(255, 0, 0)))
        show(pl)
        show(f'i={step}. rectangle_result = {rectangle_result}')
```

```
In [7]: @interact(step=(0, max_steps, 1))
        def _(step=10):
            rectangle(step)
```

```
Interactive function <function _ at 0x6fee9b5dc80> with 1 widget
  step: IntSlider(value=10, description='step...
```

Сравним значения

```
In [8]: show(integral_result - trapeze_result)
```

```
0.00340929833201120
```

```
In [9]: show(integral_result - rectangle_result)
```

```
0.00340929833201120
```

Значения обоих методов сходятся с точность до 4 знака после запятой.

10 Задание №10. Численные методы - Метод касательных.

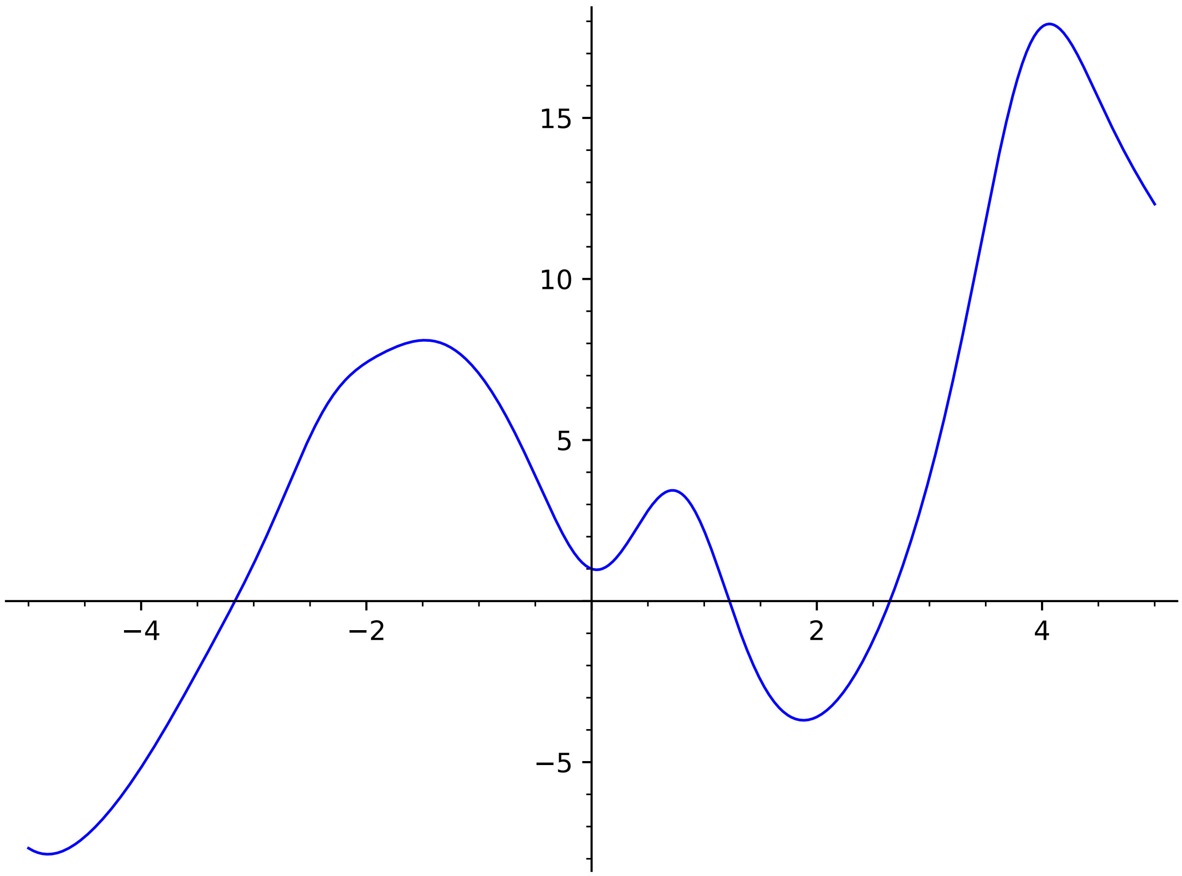
```
In [1]: f = (2^sin(2*x) + arctan(2 * x))^2 - 8 * sin(x)
        show(f)
```

$(2^{\sin(2*x)} + \arctan(2*x))^2 - 8*\sin(x)$

Построим график функции.

In [2]:
```
plot(f, xmin=-5, xmax=5)
```

Out[2]:



In [3]:
```
EPS = 0.001
a = -10
b = -2
x0 = (a + b) /2
max_steps = 10
def newton(step):
    global a, b, EPS, f
    x1 = a
    x2 = (a + b)/2
    df = f.derivative()
    counter = 0
```

```
        while abs(f(x=x1) - f(x=x2)) >= EPS and counter < step:
            x1 = x2
            x2 = x1 - (f(x=x1)/df(x=x1)).n()
            while x2 > b or x2 < a:
                x2 = (x1 + x2)/2
            counter += 1
        pl = plot(f, a, b)
        pl += point((x1, f(x=x1)), color="red", size=30, zorder=10)
        show(pl)
        show(f"x_{counter} = ", x1)
```

```
In [4]: @interact(step=(0, max_steps, 1))
        def _(step=20):
            newton(step)
```

```
Interactive function <function _ at 0x6fee258b158> with 1 widget
  step: IntSlider(value=10, description='step...
```

Корень находится на 5 шаге алгоритма.

Проверяем на сходимость:

Пусть выполняются следующие условия:

1. Функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на $[a, b]$.

2. Отрезку $[a, b]$ принадлежит только один простой корень x_*, так что $f(a) \cdot f(b)$ <;0.

3. Производные $f'(x)$, $f''(x)$ на $[a, b]$ сохраняют знак, и $f'(x) \neq 0$.

4. Начальное приближение $x^{(0)}$ удовлетворяет неравенству $f(x^{(0)}) \cdot f''(x^{(0)})$ >;0 (знаки функций $f(x)$ и $f''(x)$ в точке $x^{(0)}$ совпадают).

Тогда с помощью метода Ньютона можно вычислить корень уравнения $f(x) = 0$ с любой точностью.

```
In [5]: Fd = f.diff()
        show(Fd)
```

$$4 * (2^{\sin(2*x)} * \cos(2 * x) * \log(2) + 1/(4 * x^2 + 1)) * (2^{\sin(2*x)} + \arctan(2 * x)) - 8 * \cos(x)$$

```
In [6]: Fdd = Fd.diff()
        show(Fdd)
```

$8*(2^{\sin(2*x)}*\cos(2*x)*\log(2)+1/(4*x^2+1))^2+8*(2^{\sin(2*x)}*\cos(2*x)^2*\log(2)^2-2^{\sin(2*x)}*\log(2)*\sin(2*x)-4*x/(4*x^2+1)^2)*(2^{\sin(2*x)}+\arctan(2*x))+8*\sin(x)$

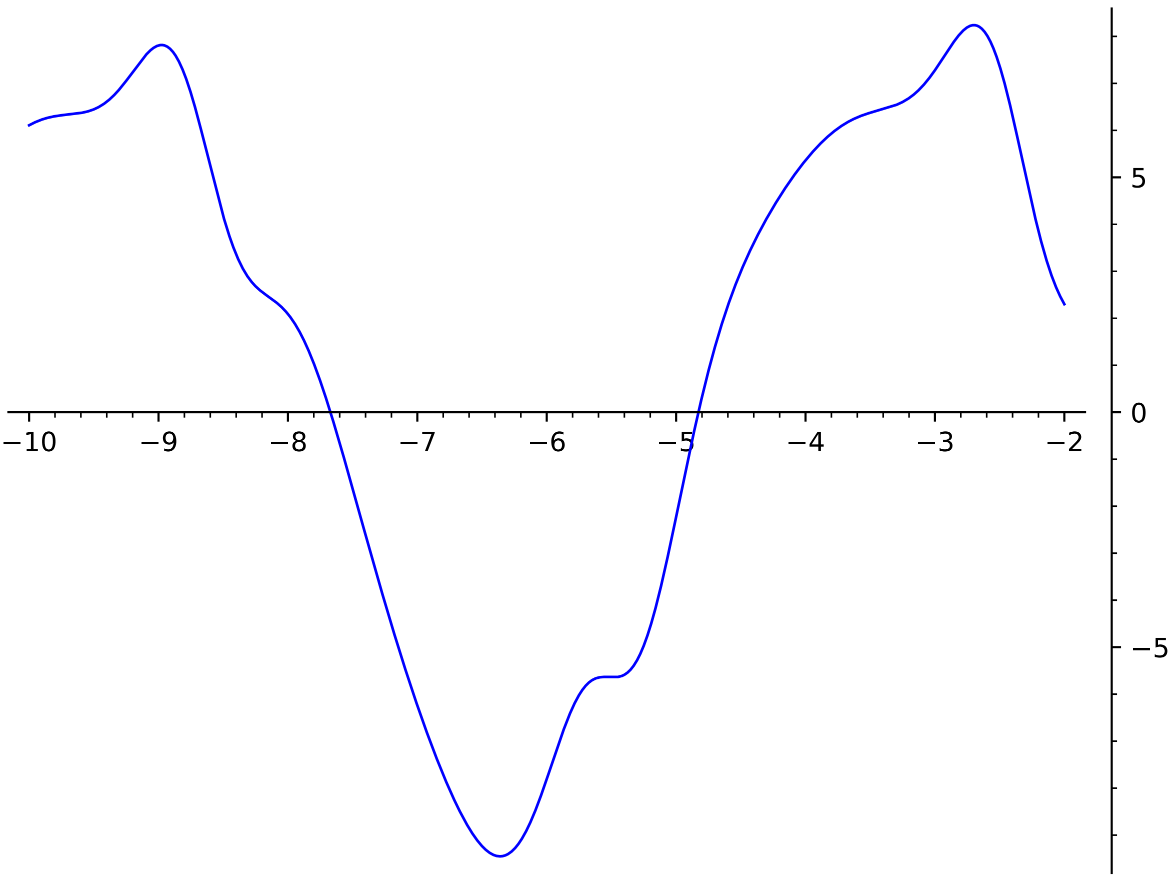
In [7]: `show(f(a) * f(b))`

$((1/2^{\sin(20)}-\arctan(20))^2+8*\sin(10))*((1/2^{\sin(4)}-\arctan(4))^2+8*\sin(2))$

Выражение не считатеся. Проверим пересекают ли производные 0 на отрезке

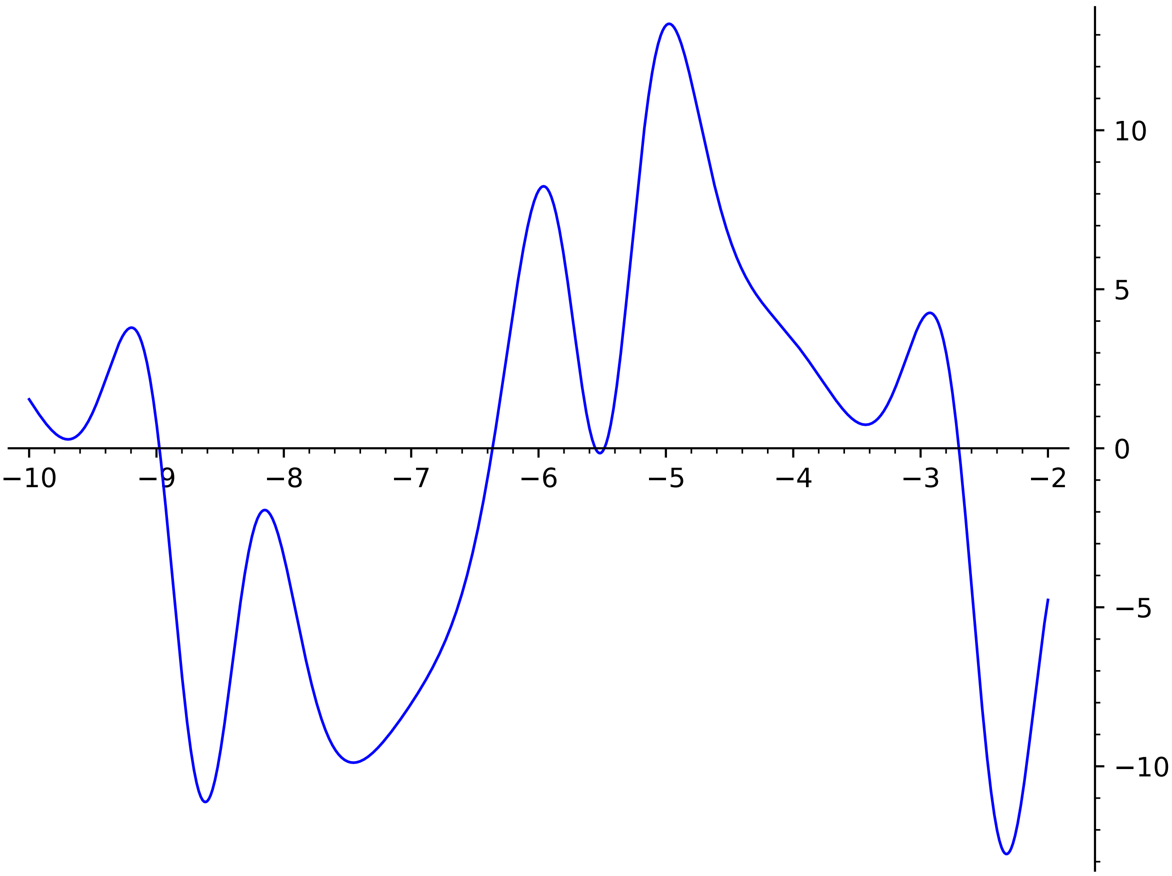
In [8]: `plot(Fd, a, b)`

Out[8]:



In [9]: `plot(Fdd, a, b)`

Out[9]:



Данный пункт не сходится. Проверим следующий

```
In [10]: f(x0)*Fdd(x0)
```

$8/21025*((145*\cos(12)*\log(2)/2^{\sin(12)}+1)^2+(21025*\cos(12)^2*\log(2)^2/2^{\sin(12)}+21025*\log(2)*\sin(12)/2^{\sin(12)}+24)*(1/2^{\sin(12)}-\arctan(12))-21025*\sin(6))*((1/2^{\sin(12)}-\arctan(12))^2+8*\sin(6))$

Таким образом данный метод не гарантирует сходимость на данном отрезке.

11 Список литературы

1. Справочник по математике, Корн Г., Корн Т., 1973

2. sage.org

3. А.С.Бортаковский, Е.А.Пегачкова, "Типовые задачи по линейной алгебре. Чпсть 2."2017 г.