Задание 2

Решение

Найдем безусловные экстремумы функции:

$$u = 3x^3 + y^2 + x^2 + 6xy - 2x + 1$$

Шаг 1: Находим частные производные по x и y

1. Частная производная по x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 2x + 6y - 2$$

2. Частная производная по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x$$

Шаг 2: Приравниваем частные производные к нулю

Теперь приравняем обе производные к нулю:

1.

$$9x^2 + 2x + 6y - 2 = 0$$

2.

$$2y + 6x = 0$$

Шаг 3: Решаем систему уравнений

Из второго уравнения $2y + 6x = 0$ получаем:

$$y = -3x$$

Подставим $y = -3x$ в первое уравнение:

$$9x^2 + 2x + 6(-3x) - 2 = 0$$

Упростим:

$$9x^2 + 2x - 18x - 2 = 0$$

$$9x^2 - 16x - 2 = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-2)}}{2 \cdot 9}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 72}}{18}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{328}}{18}$$

$$x = \frac{16 \pm 18.11}{18}$$

Таким образом, x может быть:

$$x_1 = \frac{16 + 18.11}{18} \approx 1.89, \quad x_2 = \frac{16 - 18.11}{18} \approx -0.12$$

Шаг 4: Находим соответствующие значения y

Для каждого значения x находим y из уравнения $y = -3x$.

- Для $x_1 = 1.89$:

$$y_1 = -3(1.89) \approx -5.67$$

- Для $x_2 = -0.12$:

$$y_2 = -3(-0.12) = 0.36$$

Шаг 5: Проверка на экстремумы

Теперь нужно проверить, является ли найденная точка точкой максимума или минимума. Для этого найдем вторые производные и составим определитель Гессе.

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 18x + 2$ 2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6$ 3. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$

Теперь подставим найденные значения x_1 и x_2 в эти вторые производные и проверим знак определителя Гессе для каждой точки.