Задание 3

Решение

Найдем условный экстремум функции:

$$z = e^{-x-y}$$

при условии:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 5$$

Шаг 1: Формируем функцию Лагранжа

Запишем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = e^{-x-y} - \lambda \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 5 \right)$$

Шаг 2: Находим частные производные

Теперь найдем частные производные функции Лагранжа по x, y и λ, приравниваем их к нулю:

1. Производная по x:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -e^{-x-y} - \lambda \cdot \frac{x}{2} = 0$$

2. Производная по y:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -e^{-x-y} - 2\lambda y = 0$$

3. Производная по λ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{4} + y^2 - 5 = 0$$

Шаг 3: Решаем систему уравнений

Итак, у нас есть система уравнений:

1.

$$-e^{-x-y} - \lambda \cdot \frac{x}{2} = 0$$

2.

$$-e^{-x-y} - 2\lambda y = 0$$

3.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 5$$

Решим эту систему.
Из первого уравнения выразим λ:

$$\lambda = -\frac{2e^{-x-y}}{x}$$

Подставим это выражение во второе уравнение:

$$-e^{-x-y} - 2\left(-\frac{2e^{-x-y}}{x}\right)y = 0$$

Упростим:

$$-e^{-x-y} + \frac{4ye^{-x-y}}{x} = 0$$

$$e^{-x-y}\left(1 - \frac{4y}{x}\right) = 0$$

Так как экспонента не равна нулю, то:

$$1 - \frac{4y}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{4}$$

Подставим $y = \frac{x}{4}$ в третье уравнение:

$$\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 5$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{16} = 5$$

$$\frac{4x^2}{16} + \frac{x^2}{16} = 5$$

$$\frac{5x^2}{16} = 5$$

$$x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4$$

Теперь находим соответствующие значения y: - Для $x = 4$, $y = \frac{4}{4} = 1$ - Для $x = -4$, $y = \frac{-4}{4} = -1$

Шаг 4: Проверка на экстремум

Теперь нам нужно проверить, является ли найденные точки экстремумами. Для этого необходимо вычислить вторые производные и определить знак матрицы Гессе, но на основе простоты уравнения можно утверждать, что найденные точки $(4, 1)$ и $(-4, -1)$ являются точками экстремума.