Подборка вступительных экзаменов в магистратуру. Факультет экономики, НИУ-ВШЭ

Коллектив авторов

20 апреля 2014 г.

Содержание

1 Образец задания по высшей математике для программы «Математическое моделирование»(год?)

1.1 1 вариант

1. Вычислить предел $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

2. Пусть A $= \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Найти:
   (a) A^{-1}
   (b) A^{10}
   (c) Такую симметрическую неотрицательно определенную матрицу B, что $A = B \cdot B$
   (d) Такую симметрическую неотрицательно определенную матрицу C, что $A^{-1} = C \cdot C$.

3. Найти и классифицировать точки экстремума функции $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

4. Найти и классифицировать экстремумы функции $f(x, y) = 9x^2 + 9y^2 + 2xy$ при ограничении $x^2 + y^2 = 1$.

5. Решить дифференциальное уравнение $y''' - 8y = 0$.

6. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \ddot{x} = 2y \\ \ddot{y} = -2x \end{cases}$

7. Безработный индивид с вероятностью 20% находит работу в течение ближайшего месяца (независимо от того, сколько времени он уже ищет работу). Индивид, имеющий работу, теряет её в течение месяца с вероятностью 5%. Известно, что на данный момент индивид Петя является безработным.
   (a) Какова вероятность того, что через два месяца Петя тоже будет безработным?
   (b) По прошествии двух месяцев выясняется, что Петя является безработным. Какова вероятность того, что месяц назад он работал (предполагается, что за месяц Петя может сделать только один переход между состояниями «безработица» и «занятость»)?

8. Контрольные камеры ДПС на МКАД зафиксировали скорость движения шести автомобилей: 89, 83, 78, 96, 80, 78 км/ч. Предполагается, что скорость распределена по нормальному закону.
   (a) Постройте 95% доверительный интервал для средней скорости автомобилей, если известно, что настоящая дисперсия равна 50 (км/ч)^2.
   (b) Постройте 80% доверительный интервал для дисперсии скорости.

9. Имеется множество C, состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы
   (a) множества A и B не пересекались
   (b) множество A содержалось бы в множестве B?

10. В дереве по 2010 вершин степеней 3, 4 и 5 и нет вершин больших степеней. Сколько в этом дереве может быть
    (a) вершин степени 1?
    (b) вершин степени 2?

    Укажите все возможные варианты ответа.

1.2 2 вариант

1. Вычислить предел $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

2. Пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $x=(x_1x_2x_3)^T$. Привести квадратичную форму $f(x)=x^TAx$ к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования (требуется указать, как сам канонический вид квадратичной формы, так и ортогональное преобразование, которое приводит форму к каноническому виду).

3. Найти и классифицировать точки экстремума функции $f(x,y)=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$.

4. Найти и классифицировать экстремумы функции $f(x,y,z)=2x-y+9z^2$ при двух ограничениях $y+6xz=-1$ и $3z-2x=1$.

5. Решить дифференциальное уравнение $(x^2-y^2)dy+2xydx=0$.

6. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \ddot{x}+\dot{x}+\dot{y}=7 \\ \dot{x}+\ddot{y}=e^t \end{cases}$

7. Фирма производит микросхемы. Известно, что производство микросхем может находиться в одном из двух состояниях: нормальном (доля дефектных микросхем 10%) и проблемном (доля дефектных микросхем 55%). Для контроля состояния производства утром производится случайная выборка размером в 10 микросхем из продукции первого часа работы. Если из них 3 и более дефектные, производство останавливается до выяснения причины проблемы.
   (a) Найдите вероятность ложного срабатывания тревоги.
   (b) Найдите вероятность того, что проблемное состояние не будет идентифицировано.

8. Доходность ценных бумаг на New York Фондовой бирже имеет нормальное распределение. В таблице приведены данные о доходности 10 видов ценных бумаг:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
X	10	16	5	10	12	8	4	6	5	4	80
X^2	100	256	25	100	144	64	16	36	25	16	782

   (a) Найти точечные несмещенные и состоятельные оценки для математического ожидания и дисперсии доходности.
   (b) Найти 90% доверительный интервал для математического ожидания доходности.

9. Пусть $X_1,..,X_n$ — выборка из нормально распределенной генеральной совокупности,т.е. $X_i\ N(\mu,\sigma^2), i=1,...,n$.
   Построены следующие оценки для математического ожидания μ:
   $\mu_1=\bar{X}, \mu_2=X_1, \mu_3=\frac{X_1}{2}+\frac{1}{2(n-1)}(X_2+...+X_n)$.
   (a) Какая из этих оценок является несмещенной?
   (b) Какая из этих оценок является наиболее эффективной?
   (c) Какая из этих оценок является состоятельной?

10. Оценка зависимости выпуска фирмы от капитальных и трудовых затрат вида $Q=AK^{\beta_2}L^{\beta_3}$ с помощью модели $\ln Q=\beta_1+\beta_2\ln K+\beta_3\ln L+u$ по 40 наблюдениям дала следующие результаты (в скобках указаны стандартные ошибки коэффициентов регрессии):

$$\ln Q = 1.37 + 0.632(0.257)\ln K + 0.452(0.219)\ln L, R^2 = 0.98, \widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = -0.044$$

На уровне значимости 5 % проверить гипотезы

(a) о значимости вклада труда/капитала в формирование выпуска

(b) о наличии постоянной отдачи от масштаба.

2 2007

2.1 17.07.2007, вариант A

1. Найдите

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{6+x} - \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{25+x} - \sqrt{7+x}} \tag{1}$$

2. Матрица вида A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ имеет собственное значение $\lambda_1 = 3$, которому соответствует собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Второй собственный вектор этой матрицы — $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Вычислите определитель данной матрицы.

3. Найдите стационарные точки функции $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ и определите их тип.

4. Найдите минимумы и максимумы функции $f(x, y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$ при ограничении $x^2 + y^2 = 10$.

5. Найдите решение дифференциального уравнения $xy' - 6y = 10x^4 - 16x^2$, удовлетворяющее условию $y(1) = 0$. Постройте эскиз графика данного решения.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$.

7. Время, проводимое покупателем в супермаркете, можно считать нормально распределенной случайной величиной. Известно, что математическое ожидание этой случайной величины составляет 1 час 20 минут, а стандартное отклонение равно 15 минутам. Найдите при этих условиях вероятность того, что из трех незнакомых между собой покупателей хотя бы один проведет в супермаркете более полутора часов.

8. Функция плотности двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид
$p(x, y) = \begin{cases} c(-x), & \text{если } x \in [0; 1], y \in [1; 2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
Найдите:

   (a) значение константы c

   (b) вероятность того, что $Y \leqslant 2X$

   (c) математическое ожидание $\mathbb{E}(Y)$

9. Проверка 175 старых домов города показала, что в 56 из них электропровода требуют срочного ремонта. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что доля всех старых домов города, в которых требуется срочный ремонт электропроводки, составляет не менее 33%.

10. По данным 22 наблюдений в рамках классической нормальной линейной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$ с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.93$. Проверьте гипотезу об адекватности этой регрессии

2.2 17.07.2007, вариант A1

1. Найдите
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x} \tag{2}$$

2. Матрица вида A= $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ c & d \end{pmatrix}$ коммутирует с матрицей B= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, то есть выполняется равенство $A \cdot B = B \cdot A$. Найдите константы c, d и матрицу A^{-2} (матрицу, обратную матрице $A^2 = A \cdot A$).

3. Найдите стационарные точки функции $f(x,y) = x^3 + y^3 + 21x^2 + 18xy + 21y^2$ и определите их тип.

4. Найдите минимумы и максимумы функции $f(x,y) = x^3 \cdot y^4$ в области $x > 0, y > 0$ при ограничении $3x + 4y = 7$.

5. Найдите решение дифференциального уравнения $xy' + 3y = x^2$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1/3$. Постройте эскиз графика найденного решения.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = e^{2x}$.

7. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду («ясно» или «пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями 0.1 и 0.2 соответственно. Их предсказания на завтра разошлись. Какова вероятность того, синоптики Аляски ошиблись?

8. Функция плотности двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид
$$p(x,y) = \begin{cases} c, & \text{при } x \in [0;1], y \in [0;1], y \geqslant x \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$
Найдите:
   (a) значение константы c
   (b) вероятность того, что $Y \leqslant 2X$
   (c) математическое ожидание $\mathbb{E}(Y)$

9. Медицинское обследование 180 пациентов показало, что у 63 из них наблюдалось улучшение состояния после лечения новым препаратом. Найдите 95% доверительный интервал для теоретической доли тех пациентов, у которых може наблюдаться такое улучшение.

10. По данным 30 наблюдений в рамках классической нормальной линейной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$, причём $\hat{\beta} = 2.04, \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.75$. Проверьте адекватность этой регрессии.

2.3 17.07.2007, вариант B

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 4x}{\arcsin 2x} \tag{3}$$

2. Найдите матрицу X из уравнения $A \cdot X \cdot A' = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ — матрица, транспонированная по отношению к матрице А.

3. Найдите минимумы и максимумы функции $f(x, y) = \ln x + \ln y - 3x - y - 6xy$.

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = 3$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Постройте эскиз графика найденного решения.

5. Время обслуживания одного вызова на междугородней телефонной станции можно считать нормально распределенной случайной величиной. При этом математическое ожидание составляет 1,5 минуты, а стандартное отклонение равно 0,5 минуты. Найдите при этих условиях вероятность того, что время обслуживания хотя бы одного из двух независимых вызовов составит более двух минут.

6. Функция плотности случайной величины X имеет вид
$f(x, y) = \begin{cases} c(1 - |x|), |x| \leqslant 1 \\ 0, |x| > 1. \end{cases}$
Найдите значение константы c, математическое ожидание и дисперсию величины X.

7. Для случайной выборки, состоящей из 8 наблюдений, извлеченных из нормальной генеральной совокупности, был получен следующий 90% доверительный интервал для математического ожидания μ: $18,1 < \mu < 18.9$. Постройте 95% доверительный интервал для этого математического ожидания.

8. По данным 26 наблюдений в рамках классической нормальной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$, в которой $\hat{\beta} = 2.0598$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.0153$. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $\begin{array}{l} H_0 : \beta = 2 \\ H_a : \beta \neq 2 \end{array}$

2.4 17.07.2007, вариант B1

1. Найдите предел
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x} \tag{4}$$

2. Матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ -6 & -a \end{pmatrix}$ имеет собственное значение $\lambda = 1$. Найдите константу a и собственные значение матрицы A^{-1}.

3. Найдите стационарные точки в области $x > 0$, $y > 0$ и определите их тип для функции
$$f(x, y) = x^2 y(4 - x - y) \tag{5}$$

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 1$, удовлетворяющее условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$. Постройте эскиз графика найденного решения.

5. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду («ясно» или «пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями 0.1 и 0.2 соответственно. Их предсказания на завтра совпали. Какова вероятность того, что эти предсказания ошибочны?

6. Функция плотности случайной величины X имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases} \tag{6}$$

Найдите значение константы c, математическое ожидание и дисперсию величины X.

7. Для случайной выборки из 8 автомобилей средняя скорость на определенном участке трассы составила $\bar{X} = 115$ км/ч, а выборочное стандартное отклонение — $\hat{\sigma} = 2$ км/ч. Предполагая нормальность закона распределения скорости постройте 95% доверительный интервал для математического ожидания μ скорости.

8. По 28 наблюдениям в рамках классической нормальной линейной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$, в которой $\hat{\beta} = 1.57$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.05$. Вычислите коэффициент детерминации R^2.

2.5 17.07.2007, вариант B2

1. Найдите предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} \tag{7}$$

2. Матрица вида $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ -3a & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственное значение $\lambda = 2$. Найдите константу a и собственные значение матрицы A^{-1} (матрицы, обратной к матрице A).

3. Найдите стационарные точки функции $f(x,y) = x^2 + xy - 9x - 3y$ и определите их тип.

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y'' - 16y = 32$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Постройте эскиз графика найденного решения.

5. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду («ясно» или «пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями 0.05 и 0.1 соответственно. Их предсказания на завтра совпали. Какова вероятность того, что эти предсказания верны?

6. Функция плотности случайной величины X имеет вид $p(x,y) = \begin{cases} c/x^2, & \text{при } x \in [1;2] \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

Найдите значение константы c, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

7. Для случайной выборки из 10 студентов средний балл за контрольную работу составил $\bar{X} = 71.2$ балла (по шкале в 100 баллов), причем выборочное стандартное отклонение $\hat{\sigma} = 15.4$ балла. Постройте 95% доверительный интервал для математического ожидания μ балла X за эту контрольную работу (в предположении нормального закона распределения случайной величины X).

8. По 32 наблюдениям в рамках классической нормальной линейной регрессии была получена модель $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$, в которой $\hat{\beta} = 0.32$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.04$. Вычислите коэффициент детерминации R^2.

3 2008

3.1 22.07.2008, вариант A

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+6x+5x^2}{1-3x-x^2}\right)^{-3/x} \tag{8}$$
2. В чемпионате по шахматам участвовало n участников. Каждый участник сыграл с каждым один раз. Известно, что ничьих не было. По результатам матча судья составил матрицу A размера $n\times n$ по принципу: $a_{ij}=1$, если игрок i выиграл у игрока j; $a_{ij}=-1$, если игрок i проиграл игроку j; диагональные элементы равны нулю, $a_{ii}=0$.
   (a) Найдите $\det(A)$ при $n=2$
   (b) Найдите $A+A^t$
   (c) Найдите $\det(A)$ при $n=1111$
3. Найдите локальные минимумы и максимумы функции $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-4x^2-y^2}$
4. С помощью метода множителей Лагранжа найдите условные минимумы и максимумы функции $f(x,y,z)=5x^3y^5z^3$ при ограничении $x+y+5z=110$.
5. Решите дифференциальное уравнение $y'''+6y''-7y'=14+8e^x$
6. Для дифференциального уравнения $y'=(y+x)/(y-x)$ найдите
   (a) общее решение
   (b) частное решение, проходящее через точку $(x;y)=(0;1)$
7. На острове Двупогодном погода бывает двух видов: пасмурная и ясная. Первого января губернатор острова «разгоняет» тучи, поэтому в этот день на острове всегда ясно. В каждый последующий день погода меняется случайным образом согласно двум закономерностям. После пасмурного дня ясный наступает с вероятностью 0.3, после ясного дня ясный наступает с вероятностью 0.8.
   (a) Какова вероятность того, что второе января будет ясное?
   (b) Какова вероятность того, что второе января было ясное, если известно, что третье – было пасмурное?
8. Задана совместная функция плотности случайных величин X и Y:
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx+y/2, & x,y\in[0;1]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases} \tag{9}$$
   Найдите c, $\mathbb{E}(XY)$ и $\mathbb{P}(XY<1/2)$
9. Исследуется зависимость спроса Q на некоторый товар от его цены P. Предположим, что модель $\ln(Q)=\alpha+\beta\ln(P)+\varepsilon$ удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной случайной ошибкой. Функция спроса оценивается по 10 наблюдениям. Известно, что 99% доверительный интервал для коэффициента эластичности β равен $(-1.44;-0.88)$.
   (a) Определите значение оценки $\hat\beta$ и оценки ее дисперсии.
   (b) Можно ли утверждать, что спрос зависит от цены товара?
10. Распределение заработной платы работников подчиняется закону Эрланга с функцией плотности $f(x)=\frac{x}{\lambda^2}\exp(-x/\lambda)$ при $x>0$. Оцените значение параметра λ по выборке X_1, X_2, …, X_n методом максимального правдоподобия. Будет ли полученная оценка несмещенной?
    Примечание: $\int_0^\infty x^n\exp(-x/\lambda)=\lambda^{n+1}n!$

3.2 22.07.2008, вариант B

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+7x+2x^2}{1-x-x^2}\right)^{5/x} \tag{10}$$
2. В чемпионате по шахматам участвовало n участников. Каждый участник сыграл с каждым один раз. Известно, что ничьих не было. По результатам матча судья составил матрицу A размера $n\times n$ по принципу: $a_{ij}=1$, если игрок i выиграл у игрока j; $a_{ij}=-1$, если игрок i проиграл игроку j; диагональные элементы равны нулю, $a_{ii}=0$.
   (a) Найдите $\det(A)$ при $n=2$
   (b) Найдите $A+A^T$
   (c) Найдите $\det(A)$ при $n=231$
3. Найдите локальные минимумы и максимумы функции $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2-9y^2}$
4. С помощью метода множителей Лагранжа найдите условные минимумы и максимумы функции $f(x,y,z)=6xy^{11}z^3$ при ограничении $x+2y+z=60$.
5. Решите линейное дифференциальное уравнение $y'''-3y''+2y'=4-e^x$
6. Для дифференциального уравнения $y'=(y+x)/(y-x)$ найдите
   (a) Найдите все решения дифференциального уравнения $y'=\frac{y+7x}{y-x}$
   (b) Выберите из них решение, проходящее через точку $(x;y)=(0;1)$
7. На острове Двупогодном погода бывает двух видов: пасмурная и ясная. Первого января губернатор острова «разгоняет» тучи, поэтому в этот день на острове всегда ясно. В каждый последующий день погода меняется случайным образом согласно двум закономерностям. После пасмурного дня ясный наступает с вероятностью 0.4, после ясного дня ясный наступает с вероятностью 0.9.
   (a) Какова вероятность того, что второе января будет ясное?
   (b) Какова вероятность того, что второе января было ясное, если известно, что третье – было пасмурное?
8. Задана совместная функция плотности случайных величин X и Y:
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx+y/2, & x,y\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе}\end{cases} \tag{11}$$
   Найдите c, $\mathbb{E}(XY)$ и $\mathbb{P}(XY<1/2)$
9. Распределение доходов некоторой группы населения подчиняется закону Парето с $f(x)=\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{x}\right)^{1+1/\gamma}$, $x>2, 0<\gamma<1$. Требуется оценить значение параметра γ с помощью метода максимального правдоподобия по данным случайной выборки n налоговых деклараций, заполненных респондентами из исследуемой доходной группы. Будет ли полученная оценка несмещенной?
10. Исследуется зависимость спроса Q на некоторый товар от его цены P. Предположим, что модель $\ln(Q)=\alpha+\beta\ln(P)+\varepsilon$ удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной случайной ошибкой. Функция спроса оценивается методом наименьших квадратов по 10 наблюдениям. Доверительный интервал для коэффициента эластичности β, соответствующий уровню доверия 95%, принимает значение $(-2.4350,-1.8802)$.
    (a) Определите значение МНК-оценки и оценки ее дисперсии для коэффициента эластичности.
    (b) На уровне значимости 1% проверить гипотезу о единичной эластичности.

3.3 22.07.2008, вариант C

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}+4e^{5x}-5e^{-4x}}{\arcsin\left(\arcsin(6x)\right)} \tag{12}$$

2. Известно, что $A=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$.

   (a) Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A

   (b) Надйите $\lim_{n\to\infty} A^n$

3. Найдите локальные минимумы и максимумы функции $f(x,y)=2x^5+5y^2+\frac{10}{xy}$

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y'=\frac{6y-2xy^3-\sin(xy)-xy\cos(xy)}{3x^2y^2-6x+x^2\cos(xy)}$

5. Вася кидает дротик в мишень три раза. Известно, что во второй раз он попал ближе к центру, чем в первый раз. Какова условная вероятность того, что в третий раз он попадёт ближе к центру, чем в первый раз?
   Указание: Предположить, что результаты бросков (расстояние от дротика до центра мишени) независимы друг от друга и имеют одинаковое непрерывное распределение.

6. Задана функция плотности случайной величины X:
   $f_X(x)=\begin{cases} c(x+x^2), x\in[0;1] 0, \text{иначе} \end{cases}$.

   (a) Найдите значение константы c

   (b) Найдите $\mathbb{E}(X^2)$

   (c) Найдите $\mathbb{P}(X>0.5)$

7. Используя ежегодные данные об объеме импорта товаров Y в личном располагаемом доходе X в США за $1978-1997$ годы и предполагая,что модель $Y=\alpha+\beta X+\varepsilon$ удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной ошибкой, исследователь получил методом наименьших квадратов следующее уравнени регрессии: $Y=-261.09+0.2452X$. Оценка дисперсии случайной ошибки $\varepsilon - \hat{\sigma}^2=475.48$, коэффициент детерминации $R^2=0.9388$.

   (a) На уровне значимости 5% проверить гипотезу о независимости объема импорта от личного располагаемого дохода.

   (b) Предполагая, что в 1998 году располагаемый доход составил 2800 млрд. долларов, вычислить прогнозное значение для ожидаемого объема импорта. Какова точность полученного прогноза?

8. В рекламе утверждалось, что из двух типов пластиковых карт: «Visa» и «American Express» богатые люди предпочитают второй, т.е. владельцы второго типа карт ежемесячно тратят больше денег. Выборочное обследование показало, что ежемесячные расходы по картам каждого типа достаточно хорошо описываются нормальным законом распределения. Средние месячные расходы 31 обладателя «Visa» оказались равны \$500 при выборочной дисперсии 39000 $\$^2$, а среднемесячные расходы 29 обладателей «American Express» — \$ 580 при выборочной дисперсии 32000 $\$^2$. Проверить утверждение рекламы при 5% уровне значимости.

3.4 22.07.2008, вариант D

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-7x}-3e^{-5x}+2e^{4x}}{\operatorname{tg}\operatorname{tg}(5x)} \tag{13}$$

2. Известно, что $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$.
   (a) Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A
   (b) Надйите $\lim_{n\to\infty} A^n$

3. Найдите локальные минимумы и максимумы функции $f(x,y)=2x^3+3y^2+\frac{6}{xy}$

4. Найдите решение дифференциального уравнения
$$y'=\frac{18x^2y-y-2xy^2\cos(x^2y)}{x-6x^3+\sin(x^2y)+x^2y\cos(x^2y)} \tag{14}$$

5. Вася кидает дротик в мишень три раза. Известно, что во второй раз он попал дальше от центра, чем в первый раз. Какова условная вероятность того, что в третий раз он попадёт ближе к центру, чем в первый раз?
Указание: Предположить, что результаты бросков (расстояние от дротика до центра мишени) независимы друг от друга и имеют одинаковое непрерывное распределение.

6. Задана функция плотности случайной величины X:
$f_X(x)=\begin{cases} c(x+x^3), x\in[0;1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$.
   (a) Найдите значение константы c
   (b) Найдите $\mathbb{E}(X^2)$
   (c) Найдите $\mathbb{P}(X>0.5)$

7. Используя ежегодные данные об объеме импорта товаров Y в личном располагаемом доходе X в США за $1978-1997$ годы и предполагая,что модель $Y=\alpha+\beta X+\varepsilon$ удовлетворяет всем условиям классической линейной регрессионной модели с нормально распределенной ошибкой, исследователь получил методом наименьших квадратов следующее уравнение регрессии: $Y=-261.09+0.2452X$ и оценку дисперсии $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta})=0.0004$.
   (a) Построить 95% доверительный интервал для коэффициента наклона.
   (b) На уровне значимости 5% проверить гипотезу о зависимости объема импорта от личного располагаемого дохода.

8. Изучается эффективность нового метода обучения. У группы из 40 студентов, обучавшихся по новой методике, средний балл на экзамене составил 322.12, а выборочное стандартное отклонение — 54.53. Аналогичные показатели для независимой выборки из 60 студентов того же курса, обучавшихся по старой методике, приняли значения 304.61 и 62.61 соответственно. Предполагая, что экзаменационный балл случайно выбранного студента хорошо описывается нормальным законом, проверить гипотезу об эффективности новой методики.

4 2010

4.1 07.2010, вступительный экзамен

! Здесь не хватает 9 и 10 задач

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x) - x(1+x)}{x^3}$
   Ответ: $\frac{1}{3}$
2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Найдите A^{-1}, A^{10}, $A^{0.5}$, $A^{-0.5}$
   Решение: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 10$, $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, 1)$
3. Найдите и классифицируйте экстремумы $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
   Ответ: $(-1, -1)$ - локальный максимум
4. Найдите и классифицируйте экстремумы $f(x, y) = 9x^2 + 9y^2 + 2xy$ при ограничении $x^2 + y^2 = 1$.
   Ответ: $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ - максимум, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ - максимум, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ - минимум, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ - минимум
5. Решите уравнение $y''' - 8y = 0$
6. Решите систему: $x'' = 2y$ и $y'' = -2x$.
   Решение: $x(t) = e^t(C_1 \sin(t) - C_2 \cos(t)) + e^{-t}(C_4 \cos(t) - C_3 \sin(t))$ $y(t) = e^t(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)) + e^{-t}(C_3 \cos(t) + C_4 \sin(t))$
7. Безработный индивид с вероятностью 20% находит работу в течение ближайшего месяца (независимо от того, сколько времени он уже ищет работу). Индивид, имеющий работу, теряет ее в течение месяца с вероятностью 5%. Известно, что на данный момент Петя является безработным.
   Какова вероятность, что через два месяца Петя будет безработным?
   Прошло два месяца, и Петя оказался безработным. Какова вероятность, что месяц назад он работал? (предполагается, что за месяц Петя может сделать только один переход между состояниями «безработица» и «занятость»).
   Ответы: 0.65, 1/65
8. Контрольные камеры ДПС на МКАД зафиксировали скорость движения 6 автомобилей: 89, 83, 78, 96, 80, 78 км/ч. Предположим, что скорость распределена по нормальному закону.
   Постройте 95% доверительный интервал для средней скорости автомобилей, если истинная дисперсия равна 50 км/ч^2.
   Постройте 80% доверительный интервал для дисперсии скорости.
   Ответ: $78.34 < \mu < 89.66$ и $27.94 < \sigma^2 < 160.25$
9. ...
10. ...

5 2011

5.1 22.07.2011, 1 вариант

1. (10 баллов) Найдите и классифицируйте экстремумы функции $f(x, y, z) = 2x - y + 3z$ при ограничении $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

2. (a) (4 балла) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 - 3A + I_n = 0$. (I_n — единичная матрица). Может ли матрица A быть вырожденной? Невырожденной?

   (b) (2 балла) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 = 0$. Следует ли отсюда, что $A = 0$?$(n > 1)$.

   (c) (4 балла) Множество многочленов степени 3, $M = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\}$ является линейным пространством относительно естественных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число. Рассмотрим линейное преобразование $M \longrightarrow_A M$, такое, что $Af(x) = xf'(x)$. Найдите собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

3. Имеется матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) (3 балла) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы A.
   (b) (2 балла) Пусть $\vec{x}$ — вектор-столбец подходящего размера, и $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$. Какие значения может принимать функция $f(\vec{x})$ при произвольном векторе $\vec{x}$?
   (c) (5 баллов) Обозначим через $||A|| = [tr(A^T A)]^{1/2}$ норму матрицы A. (A^T — транспонированная матрица, $tr(B)$ — след матрицы B.
   Найдите $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} A^n$.
4. (10 баллов) Функция $y(x)$ на отрезке [0,2] удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 4y = 0$, с граничными условиями: $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. Найдите $y(2)$.
5. (10 баллов) Функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению $y''(t) - 8y'(t) - 9y(t) + 7 = 0$, а функция $x(t)$ равна $x(t) = \frac{1}{4}(y'(t) - y(t) - 1)$. Найдите функцию $y(t)$, такую, что $x(0) = x'(0) = 0$.
6. Два стрелка стреляют по мишени (каждый делает один выстрел). Для первого стрелка вероятность промаха составляет 0.3, для второго — 0.5. Результаты выстрелов независимы.
   (a) (5 баллов) Какова вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним из них?
   (b) (5 баллов) При выстреле двух стрелков мишень была поражена (хотя бы одним выстрелом). Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся?
7. Случайная величина X принимает значения в интервале [0,2], и на этом интервале ее функция распределения равна $F(x) = cx^3$, где c — некоторая константа.
   (a) (2 балла) Найдите $\mathbb{P}(X < 0.3 \mid X < 0.6)$.
   (b) (3 балла) Найдите $\mathrm{Cov}\left(X + 1, \frac{1}{X}\right)$.
8. Имеется случайная выборка $X_1, ..., X_n$, где все X_i независимы и принимают значения 1, 3 и 5 со следующими вероятностями:

x	1	3	5
$\mathbb{P}(X_i = x)$	a	0.2	0.8-a

   (a) (5 баллов) Какие значения являются допустимыми для параметра a? Постройте оценку параметра a методом моментов. Обязательно ли оценка принадлежит области допустимых значений параметра a?
   (b) (5 баллов) При каком значении m оценка $\hat{a} = mX_1 - 1.15 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_i$ параметра a является несмещённой?
9. Страховая компания выплачивает агентам комиссию. План возмещения убытков предполагает, что средние выплаты комиссий составят 32 тысячи долларов в год. Если средние выплаты будут меньше запланированных, то план потребуется изменить. Для проверки гипотезы о том, что средние выплаты равны 32 тысячам долларов, против альтернативной гипотезы о том, что средние выплаты меньше 32 тысяч, была сформирована случайная выборка из 49 агентов. В этой выборке средние выплаты комиссий составили 29.5 тысяч долларов, а несмещённая оценка дисперсии оказалась равна 36. Для проверки гипотезы выбран уровень значимости 5%.
   (a) (3 балла) Рассчитайте статистику, с помощью которой проверяется указанная гипотеза.
   (b) (2 балла) Рассчитайте критическое значение этой статистики.
   (c) (2 балла) Выясните, даёт ли выборочное исследование основание для пересмотра плана пересмотра убытков.

(d) (3 балла) Определите, при каких уровнях значимости основная гипотеза будет отвергаться, а при каких — нет.

10. При 20 наблюдениях с помощью МНК оценивается регрессионное уравнение $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 t_i + \epsilon_i$ при условиях на ошибки, соответствующих стандартной модели множественной регрессии. Полученные вектор оценок коэффициентов и оценка его матрицы ковариаций равны:
$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 8.4739 \\ 20.8209 \\ 1.2309 \\ -17.4765 \end{bmatrix}, \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 54.94838 & -24.62334 & -30.31618 & -0.628223 \\ -24.62334 & 85.97937 & 8.523841 & -72.60611 \\ -30.31618 & 8.523841 & 19.45426 & 6.176577 \\ -0.628223 & -72.60611 & 6.176577 & 77.56094 \end{bmatrix}$$
, а оценка дисперсии ошибок регрессии и коэффициент детерминации равны $s^2 = 117.0376, R^2 = 0.243649$.
Оценивание на тех же данных уравнения $y_i = \gamma_1 + \gamma_2 t_i + \epsilon_i$ дало значение коэффициента детерминации $R^2 = 0.003539$.

(a) (5 баллов) На 5% уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 0$ против альтернативы $H_a : \beta_2 \neq 0$, а также тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_3 = 0$ против альтернативы $H_a : \beta_3 \neq 0$

(b) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ против альтернативы H_a: «не H_0».

(c) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ против альтернативы H_a: $\beta_2 > \beta_3$.

5.2 22.07.2011, 2 вариант

1. (10 баллов) Найдите и классифицируйте экстремумы функции $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ при ограничении $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

2. (a) (4 балла) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 + 2A + I_n = 0$. (I_n — единичная матрица). Может ли матрица A быть вырожденной? Невырожденной?

   (b) (2 балла) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 = A$. Следует ли отсюда, что есть только две возможности: $A = 0$ или $A = I_n$?$(n > 1)$.

   (c) (4 балла) Множество многочленов степени 3, $M = \{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\}$ является линейным пространством относительно естественных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число. Рассмотрим линейное преобразование $M \longrightarrow_A M$, такое, что $(Af)(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Найдите собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

3. Имеется матрица $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) (3 балла) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы А.

   (b) (2 балла) Пусть $\vec{x}$ — вектор-столбец подходящего размера, и $f(\vec{x} = \vec{x}^T A \vec{x}$. Какие значения может принимать функция $f(\vec{x})$ при произвольном векторе $\vec{x}$?

   (c) (5 баллов) Обозначим через $||A|| = [tr(A^T A)]^{1/2}$ норму матрицы A. (A^T — транспонированная матрица, $tr(B)$ — след матрицы B.
   Найдите $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} A^n$.

4. (10 баллов) Функция $y(x)$ на отрезке [0,3] удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + 3y' = 0$, с граничными условиями: $y(0) = 0, y'(3) = -3$. Найдите $y(3)$.

5. (10 баллов) Функция $y(t)$удовлетворяет уравнению $y''(t) - 8y'(t) + 12y(t) + 8 = 0$, а функция $x(t)$ равна $x(t) = \frac{1}{2}(y'(t) - 4y(t) - 2)$. Найдите функцию $y(t)$, такую, что $x(0) = x'(0) = 0$.

6. На учениях два самолёта атакуют цель (каждый выпускает одну ракету). Известно, что первый самолёт поражает цель с вероятностью 0.6, а второй — с вероятностью 0.4. Пусть самолёты поражают цель независимо друг от друга.

   (a) (5 баллов) Какова вероятность того, что цель будет поражена хотя бы одним самолётом?

   (b) (5 баллов) При разборе учений выяснилось, что цель была поражена только одним самолётом. Какова вероятность того, что цель поразил первый самолёт?

7. Случайная величина X принимает значения в интервале [0,3], и на этом интервале ее функция распределения равна $F(x) = cx^2$, где с — некоторая константа.

   (a) (2 балла) Найдите $\mathbb{P}(X > 2 \mid X > 1)$.

   (b) (3 балла) Найдите $\text{Cov}\left(X^2 + 3, \frac{1}{X}\right)$.

8. Имеется случайная выборка $X_1, ..., X_n$, где все X_i независимы и принимают значения -1, 1 и 4 со следующими вероятностями:

x	-1	1	4
$\mathbb{P}(X_i = x)$	0.3	a	0.7-a

   (a) (5 баллов) Какие значения являются допустимыми для параметра a? Постройте оценку параметра a методом моментов. Обязательно ли оценка принадлежит области допустимых значений параметра a?

   (b) (5 баллов) При каком значении m оценка $\hat{a} = X_1 - \frac{5}{6} + \frac{m}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_i$ параметра a является несмещённой?

9. Фирма-производитель некоторого лекарственного препарат следит за тем, чтобы концентрация посторонних примесей в препарате в среднем составляла не более 0.03. Для проверки гипотезы о том, что концентрация посторонних примесей равна 0.03, против альтернативной гипотезы о том, что эта концентрация выше 0.03, была взята случайная выборка из 64 образцов препарата. Средняя концентрация примесей в выборке составила 0.0327, а несмещённая оценка дисперсии составила 0.0009. Для проверки гипотезы выбран уровень значимости 10%.

   (a) (3 балла) Рассчитайте статистику, с помощью которой проверяется указанная гипотеза.

   (b) (2 балла) Рассчитайте критическое значение этой статистики.

   (c) (2 балла) Выясните, даёт ли выборочное исследование основание считать, что средняя концентрация посторонних примесей превышает допустимый предел в 0.03?

   (d) (3 балла) Определите, при каких уровнях значимости основная гипотеза будет отвергаться, а при каких — нет.

10. При 20 наблюдениях с помощью МНК оценивается регрессионное уравнение $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 t_i + \epsilon_i$ при условиях на ошибки, соответствующих стандартной модели множественной регрессии. Полученные вектор оценок коэффициентов и оценка его матрицы ковариаций равны:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 9.979620 \\ -0.493709 \\ 0.281451 \\ 2.955317 \end{bmatrix}, \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 0.264234 & 0.009178 & -0.116760 & -0.264416 \\ 0.009178 & 0.077753 & 0.014406 & -0.114635 \\ -0.116760 & 0.014406 & 0.061492 & 0.098570 \\ -0.264416 & -0.116760 & 0.098570 & 0.436001 \end{bmatrix}$$

, а оценка дисперсии ошибок регрессии и коэффициент детерминации равны $s^2 = 0.49367627$, $R^2 = 0.832389$.

Оценивание на тех же данных уравнения $y_i = \gamma_1 + \gamma_2 t_i + \epsilon_i$ дало значение коэффициента детерминации $R^2 = 0.786790$.

(a) (5 баллов) На 5% уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 0$ против альтернативы $H_a : \beta_2 \neq 0$, а также тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_3 = 0$ против альтернативы $H_a : \beta_3 \neq 0$

(b) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ против альтернативы H_a: «не H_0».

(c) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ против альтернативы $H_a : \beta_2 > \beta_3$.

5.3 Решение варианта 1, 22.07.2011

1. Выписываем функцию Лагранжа: $L = 2x - y + 3z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 14)$.

Условия первого порядка: $\begin{cases} -2\lambda x + 2 = 0 \\ -2\lambda y - 1 = 0 \\ -2\lambda z + 3 = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 14 = 0 \end{cases}$

Решения системы (критические точки):
Точка A: $[x = 2, y = -1, z = 3, \lambda = 1/2]\,, f(A) = 14$
Точка B: $[x = -2, y = 1, z = -3, \lambda = -1/2]\,, f(B) = -14$
Из геометрических соображений очевидно, что одна из точек есть минимум, а другая — максимум. (График функции есть гиперплоскость, которая ограничивается на сферу).

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе: $\begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ -2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в A: $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & -6 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1\lambda \end{pmatrix}$.

Миноры: $\triangle_4 = -56 < 0, \triangle_3 = 20 > 0$, максимум.

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в B: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1\lambda \end{pmatrix}$.

Миноры: $\triangle_4 = -56 < 0, \triangle_3 = -20 < 0$, минимум.
Баллы:
5 баллов за найденные точки
5 баллов за обоснование того, что они есть максимум и минимум (с гессианами или без)

2. (a) $I_n = A(3I_n - A) = AB$, т.е. существует обратная матрица B, т.е. матрица A невырожденная.

(b) Для $n = 1$ следует, т.к. из $a^2 = 0$ следует $a = 0$. Для $n > 1$ это не верно, например: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$.

(c) Рассмотрим базис $\{1, x, x^2, x^3\}$, в этом базисе матрица оператора имеет вид: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, т.е. собственные числа 0,1,2,3 и соответствующие собственные векторы

$1, x, x^2, x^3$

3. (a) Характеристическое уравнение $(4-\lambda)(4-\lambda)-4=0$, собственные числа: 6,2.

   Нормированные собственные векторы: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ для $\lambda = 6$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ для $\lambda = 2$

   (b) Собственные числа положительные. Значит, квадратичная форма принимает неотрицательные значения.

   (c) Матрица A представима в виде $A = CDC^{-1}$, где $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ — ортогональная матрица, а $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ — диагональная.

   Значит, $A^n = CD^nC^{-1}$, $D^n = \begin{bmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

$$||A^n||^2 = [tr((A^n)^T A^n)] = tr((CD^nC^T)^T CD^nC^T) = tr(CD^nC^TCD^nC^T) = \\ = tr(CD^{2n}C^T) = tr(D^2nC^TC) = tr(D^{2n}) = 6^{2n} + 2^{2n} \quad (15)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} A^n = C \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||} D^n \right) \cdot C^T = \\ = C \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(6^{2n}+2^{2n})^{1/2}} \right) \begin{bmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \cdot C^T = C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C^T = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

4. $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$.
   Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y(x) = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x), \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   Учитывая $y = 0, y' = 2$ при $x = 0$ получаем $C_1 = 0, C_2 = 1$. Функция равна $y(x) = \sin(2x)$, соответственно, $y(2) = \sin(4) \approx 0.757$
   Баллы:
   5 баллов за найденное общее решение
   5 баллов за частное решение и верный ответ.
5. $y(t) = 7/9$ является частным решением неоднородного уравнения $y''(t)-8y'(t)-9y(t)+7 = 0$.
   Найдем общее решение однородного уравнения $y''(t) - 8y'(t) - 9y(t) = 0$.
   Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 9$. Тогда общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{9t} + \frac{7}{9}$, соответственно,

$$x(t) = \frac{1}{4}(y'(t) - y(t) - 1) = \frac{1}{4}\left((c_1e^{-t} + c_2e^{9t} + \frac{7}{9})' - (c_1e^{-t} + c_2e^{9t} + \frac{7}{9}) - 1 \right) = \\ = \frac{1}{4}\left(-c_1e^{-t} + 9c_2e^{9t} - c_1e^{-t} - c_2e^{9t} - \frac{7}{9} - 1 \right) = \frac{1}{4}\left(-2c_1e^{-t} + 8c_2e^{9t} - \frac{16}{9} \right) = \\ = \frac{1}{2}\left(-c_1e^{-t} + 4c_2e^{9t} - \frac{8}{9} \right) \quad (17)$$

   Из граничных условий получаем:

$$\begin{cases} 2x(0) = -c_1 + 4c_2 - \dfrac{8}{9} & = 0 \\ 2x'(0) = c_1 + 36c_2 & = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$c_1 = -\frac{4}{5}, c_2 = \frac{1}{45}, y(t) = -\frac{4}{5}e^{-t} + \frac{1}{45}e^{9t} + \frac{7}{9} \tag{18}$$

Баллы:
5 баллов за найденное общее решение неоднородного уравнения
5 баллов за частное решение и верный ответ

6. (a) Обозначим события: A — «первый стрелок промахнулся», B — «второй стрелок промахнулся». Тогда событие «мишень поражена» можно записать как $\bar{C} = A \cap B$. Искомая вероятность: $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 1 - 0.3 \cdot 0.5 = 0.85$.

   (b) Здесь нужно найти условную вероятность события B при условии C. По определению условной вероятности, $\mathbb{P}(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$. Совместное наступление событий B и C (второй стрелок промахнулся, но мишень была поражена) эквивалентно тому, что первый стрелок поразил мишень, а второй промахнулся, т.е. $B \cap C = \bar{A} \cap B$. Таким образом,

$$P(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A)\bar{\mathbb{P}}(B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{(1 - 0.3) \cdot 0.5}{0.85} = \frac{0.35}{0.85} \approx 0.4118. \tag{19}$$

7. Сначала найдем c: $1 = F(2) = c \cdot 2^3$, получаем $c = 1/8$.

   (a)

$$\mathbb{P}(X < 0.3 \mid X < 0.6) = \frac{\mathbb{P}(X < 0.3 \cap X < 0.6}{\mathbb{P}(C < 0.6)} = \frac{\mathbb{P}(X < 0.3)}{\mathbb{P}(X < 0.6)} = \frac{F(0.3)}{F(0.6)} = \frac{0.3^3}{0.6} = \frac{1}{8} = 0.125 \tag{20}$$

   (b)

$$f(x) = F'(x) = \frac{3}{8}x^2. \tag{21}$$

$$EX = \int_0^2 x\frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{2^4}{4} = \frac{3}{2} = 1.5 \tag{22}$$

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = \int_0^2 x^{-1}\frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{2^2}{2} = \frac{3}{4} = 0.75. \tag{23}$$

$$\mathrm{Cov}(X+1, \frac{1}{X}) = \mathrm{Cov}(X, \frac{1}{X}) = \mathbb{E}(X \cdot \frac{1}{X}) - (EX)\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8} = -0.125. \tag{24}$$

8. (a) Допустимое множество значений параметра $a : [0, 0.8]$.
   Найдем математическое ожидание величин $X_i : \mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot a + 3 \cdot 0.2 + 5(0.8 - a) = 4.6 - 4a$.
   Приравняем его к выборочному среднему: $4.6 - 4a = \bar{X}$.
   Решив полученное уравнение относительно a, получаем оценку метода моментов:

$$\hat{a}_{MM} = \frac{4.6 - \bar{X}}{4} = 1.15 - \frac{\bar{X}}{4} \tag{25}$$

   Эта оценка не может не принадлежать области допустимых значений параметра a.

   (b) Найдём математическое ожидание предложенной оценки:

$$\mathbb{E}(\hat{a} = m\mathbb{E}(X_1) - 1.15 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \; = 4.6m - 4ma - 1.15 + \frac{1}{n-1}(n-1)(4.6 - 4a) = (4.6 - 4a)(\tag{26}$$

Оценка $\hat{a}$ будет несмещенной, если $\mathbb{E}(\hat{a}) = a$, или $(4.6 - 4a)(m+1) - 1.15 = a$. Решив уравнение относительно m, получаем

$$m = \frac{5a - 3.45}{4.6 - 4a} \tag{27}$$

Поскольку m, а, следовательно, и $\hat{a}$, зависит от неизвестного параметра, то такого значения m не существует.

9. (a) Тестируем нулевую гипотезу $H_0 : \mu_= \mu_0$ против альтернативы $H_A : \mu < \mu_0$ в случае произвольной генеральной совокупности и большого объёма выборки. Для решения этой задачи воспользуемся статистикой $z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim_{H_0} N(0, 1)$. (Можно также предположить, что генеральная совокупность нормальна, и использовать распределение Стьюдента.)

$$z = \frac{29.5 - 32}{\sqrt{36}/\sqrt{49}} = -\frac{5/2}{6/7} = -\frac{35}{12} = -2.917. \tag{28}$$

(b) Если пользоваться нормальным распределением, то критическое значение $z_{crit} = -z_{0.05} = -1.645$ (Для распределения Стьюдента $t_{crit} = -t_{n-1,\alpha} = -t_{48,0.05} = -1.677$. Нужного числа степеней свободы в таблице нет, но можно установить, что $t_{crit} \in (-1.684, -1.671)$.

(c) Так как $z < z_{crit}(z < t_{crit})$, то нулевая гипотеза отвергается, план возмещения убытков стоит пересмотреть.

(d) При использовании нормального распределения Р-значение$=\mathbb{P}(Z < -2.917) = 0.0018$. Таким образом, при уровне значимости выше 0.18% основная гипотеза будет отвергаться, а при уровне ниже 0.18% — не будет. Если пользоваться распределением Стьюдента, то из таблиц можно установить, что Р-значение $\in (0.001, 0.005)$.

10. (a)

$$t_{\hat{\beta}_2} = \frac{\hat{\beta}_2}{s_{\hat{\beta}_2}} = \frac{20.8209}{\sqrt{85.97937}} = 2.245; t_{\hat{\beta}_3} = \frac{\hat{\beta}_3}{s_{\hat{\beta}_3}} = \frac{1.2309}{\sqrt{19.45426}} = 0.279 \tag{29}$$

поскольку $|t_{\hat{\beta}_2}| > t_{0.25}(16) = 2.12$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = 0$ отвергается, соответственно, гипотеза $H_0 : \beta_3 = 0$ не отвергается.

(b)

$$F = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1 - R^2_{UR})/(n-k)} = \frac{(0.243649 - 0.0035359)/2}{(1 - 0.243649)/16} = 2.54 < F_{0.05}(2.16) = 3.63 \tag{30}$$

т.е. гипотеза $\beta_2 = \beta_3 = 0$ не отвергается.

(c) Рассмотрим разность $\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3$, оценка её дисперсии равна

$$\hat{V}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) = \hat{V}(\hat{\beta}_2) + \hat{V}(\hat{\beta}_3) - 2\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 85.97937 + 19.45424 - 2 \cdot 8.523841 = 88.38595 \tag{31}$$

критическая статистика $t = \frac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)}}$ при нулевой гипотезе имеет распределение $t(16)$. Поскольку $t_{0.05}(16) = 1.746$, а $t = 2.08 > 1.746$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ отвергается в пользу альтернативы $H_1 : \beta_2 > \beta_3$

5.4 Решение варианта 2, 22.07.2011

1. Выписываем функцию Лагранжа: $L = x + 2y + 3z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 14)$.

Условия первого порядка: $\begin{cases} -2\lambda x + 1 = 0 \\ -2\lambda y + 2 = 0 \\ -2\lambda z + 3 = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 14 = 0 \end{cases}$

Решения системы (критические точки):
Точка A: $[x = 1, y = 2, z = 3, \lambda = 1/2], f(A) = 14$
Точка B: $[x = -1, y = -2, z = -3, \lambda = -1/2], f(B) = -14$
Из геометрических соображений очевидно, что одна из точек есть минимум, а другая — максимум. (График функции есть гиперплоскость, которая ограничивается на сферу).

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе: $\begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ -2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в A: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1\lambda \end{pmatrix}$.

Миноры: $\triangle_4 = -56 < 0, \triangle_3 = 20 > 0$, максимум.

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в B: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1\lambda \end{pmatrix}$.

Миноры: $\triangle_4 = -56 < 0, \triangle_3 = -20 < 0$, минимум.
Баллы:
5 баллов за найденные точки
5 баллов за обоснование того, что они есть максимум и минимум (с гессианами или без)

2. (a) $I_n = A(-2I_n - A) = AB$, т.е. существует обратная матрица B, т.е. матрица A невырожденная.

   (b) Для $n = 1$ следует, т.к. из $a^2 = a$ следует $a_1 = 0, a_2 = 1$. Для $n > 1$ это не верно, например: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) Рассмотрим базис $\{1, x, x^2, x^3\}$, в этом базисе матрица оператора имеет вид: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, т.е. собственные числа 0. Собственные векторы находятся из условия

$$Af)(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 - a_0}{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2 = 0 \tag{32}$$

   откуда $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, т.е. имеется единственный (с точностью до множителя) собственный векторов $f(x) = 1$.

3. (a) Характеристическое уравнение $(7 - \lambda)(1 - \lambda) - 16 = 0$, собственные числа: 9,-1.
   Собственные векторы: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ для $\lambda = 9$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ для $\lambda = -1$

   (b) Собственные числа разного знака. Значит, квадратичная форма принимает любые значения.

   (c) Матрица A представима в виде $A = CDC^{-1}$, где $C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ — ортогональная матрица, а $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ — диагональная.

Значит, $A^n = CD^nC^{-1}$, $D^n = \begin{bmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$.

$$||A^n||^2 = [tr((A^n)^T A^n)] = tr((CD^nC^T)^T CD^nC^T) = tr(CD^nC^TCD^nC^T) = tr(CD^{2n}C^T) = tr(D^{2n}\tag{33}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||}A^n = C \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{||A^n||}D^n\right) \cdot C^T = C \cdot \left(lim_{n\to\infty}\frac{1}{(9^{2n}+1)^{1/2}}\right) \begin{bmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \cdot C^T = C\tag{34}$$

4. $\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3.$
   Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{-3x}, \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   $0 = y(0) = C_1 + C_2 \cdot e^{-3\cdot 0} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$
   $-3 = y'(3) = -3C_2 \cdot e^{-3\cdot 3} \Rightarrow C_2 = e^9.$
   Функция равна $y(x) = e^9(-1 + e^{-3x})$, соответственно, $y(3) = e^9(-1 + e^{3\cdot 3}) = 1 - e^9 \approx -8102$
   Баллы:
   5 баллов за найденное общее решение
   5 баллов за частное решение и верный ответ.

5. $y(t) = -8/12 = -2/3$ является частным решением неоднородного уравнения $y''(t) - 8y'(t) + 12y(t) + 8 = 0$. Найдем общее решение однородного уравнения $y''(t) - 8y'(t) + 12y(t) = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$. Тогда общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{6t} - \frac{2}{3}$, соответственно,

$$x(t) = \frac{1}{2}\left((c_1e^{2t} + c_2e^{6t} - \frac{2}{3})' - 4(c_1e^{2t} + c_2e^{6t} - \frac{2}{3}) - 2\right) = \frac{1}{2}(2c_1e^{2t} + 6c_2e^{6t} - 4c_1e^{2t} - 4c_2e^{6t} + \frac{8}{3} - 2) = \tag{35}$$

   Из граничных условий получаем: $\begin{cases} x(0) = -c_1 + c_2 + \frac{1}{3} & = 0 \\ x'(0) = -2c_1 + 6c_2 & = 0 \end{cases}$

   Отсюда получаем
$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{6}, y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{6t} - \frac{2}{3} \tag{36}$$
   Баллы:
   5 баллов за найденное общее решение неоднородного уравнения
   5 баллов за частное решение и верный ответ

6. (a) Обозначим события: A — «первый самолёт поразил цель», B — «второй самолёт поразил цель». Тогда событие «цель поражена только одним самолётом» можно записать как $C = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$. В силу независимости событий A и B искомая вероятность равна:
$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B}) = (1-0.6)\cdot 0.4 + 0.6\cdot(1-0.4) = 0.16 + 0.36 = 0.52 \tag{37}$$

   (b) Здесь нужно найти условную вероятность события A при условии C. По определению условной вероятности, $\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)}$. Совместное наступление событий A и C (первый самоёт поразил цель, и цель была поражена только одним самолётом) эквивалентно тому, что первый самолёт поразил цель, а второй — нет, т.е. $A \cap C = A \cap \bar{B}$.

Таким образом,

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A) \cap \bar{B}}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))}{\mathbb{P}(C)} = \frac{0.6 \cdot 0.6}{0.52} = \frac{0.36}{0.52} \approx 0.6923. \tag{38}$$

7. Сначала найдем c: $1 = F(3) = c \cdot 3^2$, получаем $c = 1/9$.

   (a)

$$\mathbb{P}(X > 2 \mid X > 1) = \frac{\mathbb{P}(X > 2 \cap X > 1}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{\mathbb{P}(X > 2)}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{1 - F(2)}{1 - F(1)} = \frac{1 - \frac{1}{9} \cdot 4}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{5}{8} = 0.625 \tag{39}$$

   (b)

$$f(x) = F'(x) = \frac{2}{9}x. \tag{40}$$

$$EX = \int_0^3 x^2 \frac{2}{9} x dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{3^4}{4} = \frac{9}{2} = 4.5 \tag{41}$$

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = \int_0^3 x^{-1} \frac{2}{9} x dx = 3\frac{2}{9} = \frac{2}{3} \approx 0.667. \tag{42}$$

$$\mathrm{Cov}(X^2 + 3, \frac{1}{X}) = \mathrm{Cov}(X^2, \frac{1}{X}) = \mathbb{E}(X^2 \cdot \frac{1}{X}) - (E(X^2))\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = 2 - \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1. \tag{43}$$

8. (a) Допустимое множество значений параметра $a : [0, 0.7]$.
   Найдем математическое ожидание величин $X_i : \mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot a + 4(0.7 - a) = 2.5 - 3a$.
   Приравняем его к выборочному среднему: $2.5 - 3a = \bar{X}$.
   Решив полученное уравнение относительно a, получаем оценку метода моментов: $\hat{a}_{MM} = \frac{2.5 - \bar{X}}{3}$. Эта оценка не может не принадлежать области допустимых значений параметра a.

   (b) Найдём математическое ожидание предложенной оценки:

$$\mathbb{E}(\hat{a} = \mathbb{E}(X_1) - \frac{5}{6} + \frac{m}{n-1} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(X_i) = 2.5 - 3a - \frac{5}{6} + \frac{m}{n-1}(n-1)(2.5 - 3a) = (2.5 - 3a)(m+1) - \frac{5}{6} = a \tag{44}$$

   Оценка $\hat{a}$ будет несмещенной, если $\mathbb{E}(\hat{a}) = a$, или $(2.5 - 3a)(m + 1) - \frac{5}{6} = a$. Решив уравнение относительно m, получаем

$$m = \frac{5a - 3.45}{4.6 - 4a} \tag{45}$$

   Поскольку m, а, следовательно, и $\hat{a}$, зависит от неизвестного параметра, то такого значения m не существует.

9. (a) Тестируем нулевую гипотезу $H_0 : \mu_= \mu_0$ против альтернативы $H_A : \mu < \mu_0$ в случае произвольной генеральной совокупности и большого объёма выборки. Для решения этой задачи воспользуемся статистикой $z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim_{H_0} N(0, 1)$. (Можно также предположить, что генеральная совокупность нормальна, и использовать распределение Стьюдента.)

$$z = \frac{0.0327 - 0.03}{\sqrt{0.0009}/\sqrt{64}} = -\frac{0.0027}{0.03/8} = 0.72. \tag{46}$$

   (b) Если пользоваться нормальным распределением, то критическое значение $z_{crit} = -z_{0.1} = 1.28$ (Для распределения Стьюдента $t_{crit} = -t_{n-1,\alpha} = -t_{63,0.1} = 1.295$. Нужного числа степеней свободы в таблице нет, но можно установить, что $t_{crit} \in (1.289, 1.296)$.

(c) Так как $z < z_{crit}(z < t_{crit})$, то нет оснований отвергать основную гипотезу и считать, что допустимый предел концентрации превышен.

(d) При использовании нормального распределения P-значение$=\mathbb{P}(Z > 0.72) = 0.2358$. Таким образом, при уровне значимости выше 23.58% основная гипотеза будет отвергаться, а при уровне ниже 23.58% — не будет. Если пользоваться распределением Стьюдента, то из таблиц можно установить, что P-значение $\in (0.2, 0.25)$.

10. (a)

$$t_{\hat{\beta}_2} = \frac{\hat{\beta}_2}{s_{\hat{\beta}_2}} = \frac{-0.49371}{\sqrt{0.077753}} = -1.77; t_{\hat{\beta}_3} = \frac{\hat{\beta}_3}{s_{\hat{\beta}_3}} = \frac{0.281451}{\sqrt{0.061492}} = 1.13 \qquad (47)$$

поскольку $|t_{\hat{\beta}_2}| < t_{0.25}(16) = 2.12$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = 0$ не отвергается, соответственно, гипотеза $H_0 : \beta_3 = 0$ не отвергается.

(b)

$$F = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1 - R^2_{UR})/(n-k)} = \frac{(0.832389 - 0.786790)/2}{(1 - 0.832389)/16} = 2.18 < F_{0.05}(2.16) = 3.63 \qquad (48)$$

т.е. гипотеза $\beta_2 = \beta_3 = 0$ не отвергается.

(c) Рассмотрим разность $\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3$, оценка её дисперсии равна

$$V(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) = \hat{V}(\hat{\beta}_2) + \hat{V}(\hat{\beta}_3) - 2\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 0.077753 + 0.061492 - 2 \cdot 0.014406 = 0.110433 \qquad (49)$$

критическая статистика $t = \frac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)}}$ при нулевой гипотезе имеет распределение $t(16)$. Поскольку $t_{0.05}(16) = 1.746$, а $t = -2.33 < -1.746$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ отвергается в пользу альтернативы $H_1 : \beta_2 < \beta_3$

6 2012

6.1 Вступительная олимпиада в магистратуру

Во всех задачах: штраф за арифметическую ошибку -1 балл. Вес каждой задачи — 10 баллов.

1. Вычислить предел выражения $\frac{n+x}{n-1}^n$ при $n \to \infty$.

2. Рассмотрите следующую систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_2 = 0 \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Найдите размерность пространства решённой системы.

(b) Найдите фундаментальную систему решений системы.

(c) Опишите общее решение системы через фундаментальную систему решений.

3. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора $f = (7, -4, -1, 2)$ на подпространство L, заданное однородной системой уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

4. Найдите решение дифференциального уравнения $y^{(4)} + y^{(2)} = 2\cos x$, удовлетворяюшее начальным условиям $y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = y'''(0) = 0$.

5. Найдите критические точки для функции
$$f(x, y) = x + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y \tag{50}$$
и укажите их тип.

6. В задаче поиска экстремумов функции
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz \tag{51}$$
при ограничении $x + y + z = 4$
   (a) Найдите все критические точки, удовлетворяющие необходимым условиям первого порядка
   (b) для всех критических точках, найденных в пункте (A),выпишите какие-либо достаточные условия второго порядка и проведите классификацию критических точек.

7. Контрольная работа состоит из тестовых вопросов. В каждом вопросе 5 вариантов ответа из которых один – верный. Студент не очень готовился и поэтому знает 40% вопросов. Неправильный ответ на тесте не штрафуется, поэтому если студент не знает ответа, то он отвечает наугад равновероятно.
   (a) Какова вероятность того, что студент отметит верный ответ на первый вопрос теста?
   (b) Какова вероятность того, что студент знает ответ на первый вопрос теста, если он отметил верный ответ?
   (c) Какова вероятность того, что студент знает ответ хотя бы на один вопрос из первых двух, если он отметил верные ответы на оба из них?

8. В ходе анкетирования 225 человек ответили на вопрос о том, сколько времени они проводят на работе ежедневно. Среднее выборочное оказалось равно 9.5 часов при выборочном стандартном отклонении 0.6 часа.
   (a) Постройте 90% доверительный интервал для математического ожидания времени, проводимого на работе
   (b) Проверьте гипотезу о том, что в среднем люди проводят на работе 9 часов, против альтернативной гипотезе о том, что в среднем люди проводят на работе больше 9 часов, укажите точное P-значение.
   (c) Сформулируйте предпосылки, которые были использованы для проведения теста.

9. Наблюдения $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и одинаково распределены с функцией плотности $f(x) = \frac{a(\ln(x))^{a-1}}{x}$ при $x \in [1; \varepsilon]$. По 100 наблюдениям известно, что $\sum_{i=1}^{1} 00\ln(\ln(X_i)) = -20$
   (a) Постройте оценку $\hat{a}$ для неизвестного параметра a методом максимального правдоподобия.
   (b) Найдите наблюдаемую информацию Фишера.
   (c) Постройте 90% доверительный интервал для a

10. Исследователь располагает следующими данными по 935 респондентам (U.S. NLS80 Database, J. Wooldridge):

   - ежемесячный доход, EARNINGS, долл.;

- возраст, AGE, число лет;
- число лет обучения, EDUC;
- расовая принадлежность, BLACK = 1, если респондент – афроамериканец, = 0 в противном случае;
- URBAN = 1, если респондент проживает в крупном городе.

С помощью метода наименьших квадратов он оценивает следующие регрессии, в каждой из которых LWAGE = LN(WAGE) является зависимой переменной, а объясняющие переменные:

(1) AGE, EDUC, URBAN, по всей выборке

(2) AGE, EDUC, URBAN, BLACK, по всей выборке

(3) AGE, EDUC, URBAN, только для ‘whites’

(4) AGE, EDUC, URBAN, только для blacks

(5) AGE, EDUC, TENURE, BLACK, AGE*BLACK, EDUC*BLACK, URBAN*BLACK, по всей выборке.

Результаты оценивания представлены в таблице 1. RSS = сумма квадратов остатков. В скобках приведены стандартные ошибки. К сожалению, некоторые результаты оценивания для Модели 4 в таблице были по ошибке не внесены исследователем в таблицу.

(a) Вычислите пропущенные в Модели 4 оценки коэффициентов и RSS. Поясните Ваши вычисления.

(b) Дайте содержательную интерпретацию коэффициентам при BLACK, AGE*BLACK и URBAN*BLACK в Модели 2.

(c) Проверьте совместную значимость коэффициентов при переменных BLACK, AGE*BLACK, EDUC*BLACK, TENURE*BLACK, URBAN*BLACK в Модели 5.

(d) Объясните, как связан тест из пункта (c) с тестом Чоу для Моделей 1, 3 и 4.

(e) Объясните, достаточно ли проверить на значимость коэффициент при BLACK в Модели 2, чтобы показать наличие дискриминации по расовой принадлежности.

Таблица 1.

	1	2	3	4	5
COEFFICIENT	LWAGE	LWAGE	LWAGE	LWAGE	LWAGE
AGE	0.0163(0.00417)	0.0159(0.00409)	0.0185(0.00440)	?	0.0185(0.00438)
EDUC	0.0587(0.00569)	0.0522(0.00569)	0.0541(0.00593)	?	0.0541(0.00592)
URBAN	0.177(0.0278)	0.191(0.0273)	0.196(0.0288)	?	0.196(0.0287)
BLACK		-0.228(0.0374)			0.671(0.504)
AGE*BLACK					-0.0194(0.0121)
EDUC*BLACK					-0.0296(0.0209)
URBAN*BLACK					-0.0381(0.0903)
CONSTANT	5.219(0.156)	5.348(0.154)	5.251(0.163)	?	5.251(0.163)
Observations	935	935	815	815	935
R-squared	0.185	0.217	0.183	0.183	0.226
RSS	134.930	129.752	112.948	?	128.185

6.2 Решение вступительной олимпиады

1. Находим решение с помощью второго замечательного предела. При $n \to \infty$

$$\lim(\frac{n+x^n}{n-1} = \lim(1+\frac{x+1}{n-1})^n = \begin{cases} \lim(1+\frac{x+1}{n-1}) \cdot \left(\lim(1+\frac{x+1}{n-1})^{\frac{n-1}{x+1}}\right)^{x+1}, \text{при} x \neq -1 \\ 1, \text{при} x = -1 \end{cases} \tag{52}$$

Ответ: e^{x+1}.

2. $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 & 0 \\ 11 & 17 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right] \to$
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right].$

Следовательно, $rg(A) = 2$, где A — основная матрица системы.
Известно, что $\dim L = n - rg(A) = 4 - 2 = 2$, где L — множество решений линейной однородной системы, n — число переменных системы.
Фундаментальная система решений: $e_1 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$.
Общее решение системы: $L = x = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2 : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Критерии:

(a) Найдите размерность пространства решений системы. **2 балла**

(b) Найдите фундаментальную систему решений системы. **3 балла**

(c) Опишите общее решение системы через фундаментальную систему решений. **5 баллов**

Если решение системы найдено без фундаментальной системы - **7 баллов**

3. $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -3 & 21 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right] \to$
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right].$

Фундаментальная система решений: $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $e_1 = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.
Следовательно, $L = L(e_1, e_2)$.
$f = g + h$
$f = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2 + h;$ $\begin{cases} (e_1, f) = \alpha_1 \cdot (e_1, e_1) + \alpha_2 \cdot (e_1, e_2) + (e_1, h), \\ (e_2, f) = \alpha_1 \cdot (e_2, e_1) + \alpha_2 \cdot (e_2, e_2) + (e_2, h) \end{cases}$
$\begin{cases} (e_1, f) = \alpha_1 \cdot (e_1, e_1) + \alpha_2 \cdot (e_1, e_2), \\ (e_2, f) = \alpha_1 \cdot (e_2, e_1) + \alpha_2 \cdot (e_2, e_2) \end{cases}$
$\begin{cases} 3 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-7) \\ -61 = \alpha_1 \cdot (-7) + \alpha_2 \cdot 75 \end{cases}$
$\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -1.$
$g = \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_2 = -2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T - 1 \begin{pmatrix} -5 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T;$
$h = f - g = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T.$

Критерии:

- Найдена только фундаментальная система решений — **3 балла**
- Записана, но не решена система уравнений для определения коэффициентов разложения проекции по базисным векторам — **5 баллов**
- Найдена проекция, не найден перпендикуляр — **7 баллов**
- Найдены проекция и перпендикуляр — **10 баллов**

4. Составим характеристическое уравнение, соответствующее однородному дифференциальному уравнению: $\lambda^4 + \lambda^2 = 0$. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$ — решения характеристического

уравнения. Согласно общей теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами имеем

$$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin x \tag{53}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные вещественные числа.
Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$y_{\text{част.неодн.}}(x) = x(A \cos x + B \cdot \sin x \tag{54}$$

Подставляя частное решение с неопределёнными коэффициентами в неоднородное дифференциальное уравнение, получаем, что $A = 0, B = -1$.
Следовательно,

$$y_{\text{част.неодн.}}(x) = -x \sin x. \tag{55}$$

Согласно теории решения неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеем:

$$y_{\text{общ.неодн.}}(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{част.неодн.}}(x) \tag{56}$$

Значит,

$$y_{\text{общ.неодн.}}(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin x - x \sin x \tag{57}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные вещественные числа.
Теперь общее решение для неоднородного дифференциального уравнения известно. Находим частное решение, которое удовлетворяет начальным условиям. В итоге получаем, что $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = -2, C_4 = 0$. Значит,

$$y(x) = x - 2 \cos x - x \sin x \tag{58}$$

Критерии

(a) Выписано для однородного уравнения общее решение с константами — **5 баллов**

(b) Выписан общий вид частного решения для неоднородного уравнения — **7 баллов**

(c) Найдены константы — **10 баллов**

5. Находим условия первого порядка: $\begin{cases} y - \dfrac{4}{x} + 1 = 0 \\ x + 2y - \dfrac{10}{y} = 0 \end{cases}$

   Решение системы сводится к решению кубического уравнения:

$$x^2(x-4) - 2(x-4)^2 + 10x^2 = 0 \tag{59}$$

   Находим корень уравнения $x \approx 1.4$
   Получаем единственную критическую точку $x \approx 1.4, y \approx 1.9$
   Находим матрицу Гессе и знак угловых миноров $\begin{pmatrix} 4/x^2 & 1 \\ 1 & 2 + 10/y^2 \end{pmatrix}$
   Знаки: $\triangle_1 > 0, \triangle_2 > 0 \Rightarrow$ найденная точка — локальный минимум.

6. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - \lambda(x + y + z - 4) \tag{60}$$

(a) Критически точки являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda yz & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda xz & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda xy & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 4 - x - y - z & = 0 \end{cases}$$

Находим четыре точки: $M_1(2,2,0), M_2(2,0,2), M_3(0,2,2), M_4(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$

(b) Достаточные условия второго порядка — знакоопределенность второго дифференциала функции $f(x,y,z)$ при ограничении на дифференциалы $dx + dy + dz = 0$:

$$d^2f = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz = [\textit{при выполнении } dx + dy + dz = 0]$$
$$= (4-2y)dx^2 - (4-2x)dy^2 + 2(z-x-y+2)dxdy = A(x,y)$$

Для точек $M_1(2,2,0), M_2(2,0,2), M_3(0,2,2)$ квадратичная форма $A(x,y)$ не является знакоопределенной, так как

$$\det\begin{pmatrix} 4-2y & 2+z-x-y \\ 2+z-x-y & 4-2x \end{pmatrix} < 0 \tag{63}$$

В точке $M_4(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ квадратичная форма $A(x,y)$ по критерию Сильвестра отрицательно определена, так как первый и второй миноры её матрицы положительны:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} > 0 \tag{64}$$

Следовательно, точка $M_4(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ является точкой минимума.
Критерии:
Вес каждого пункта задания — 5 баллов.

7. Обозначим события:
A_1 — студент знает ответ на 1-ый вопрос
B_1 — студент выбрал верный ответ на 1-ый вопрос
A_2, B_2 — аналогично для 2-го вопроса.

(a) $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A_1) + 0.2(1 - \mathbb{P}(A_1)) = 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.52$

(b) $\mathbb{P}(A_1 \mid B_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap B_1)/\mathbb{P}(B_1) = 0.4/0.52 = 10/0.77$

(c) $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \mid B_1 \cap B_2) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \mid B_1 \cap B_2) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}_1 \mid B_1)\mathbb{P}(\bar{A}_2 \mid B_2) = 1 - (3/13)^2 = 160/169 \approx 0.95$

Некоторые студенты трактовали условие по-другому: Студент знает q вопросов из общего количества в N вопросов, причем q/N=0.4. Такая трактовка тоже засчитывалась как верная. При этом вероятности в первых двух пунктах не меняются, а вероятность для третьего будет зависеть от N.
Критерии

(a) 3 балла

(b) 3 балла

(c) 4 балла

Всего 10 баллов.

8. (a) Общий вид доверительного интервала:

$$\left[\bar{X} - z\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \tag{65}$$

По условию, $\bar{X} = 9.5, s = 0.6, n = 225$.
Квантиль нормального распределения для 90% доверительного интервала $z = 1.65$
Тогда численное значение доверительного интервала: $[9.434; 9.566]$

(b) Тестирование гипотезы

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{(9.5 - 9) \cdot 15}{0.6} = 12.5 \tag{66}$$

Значение 12.5 фантастически велико для нормального распределеия, поэтому P-значение равно нулю. При любом разумном уровне значимости, будь то $\alpha = 0.01, \alpha = 0.05$ или $\alpha = 0.1$ гипотеза H_0 отвергается.

(c) Предпосылки: все X_i независимы, одинаково распределены и имеют конечное матиматическое ожидани и дисперсию.

Критерии

(a) 4 балла

(b) 3 балла

(c) 3 балла

В сумме 10 баллов.

9. (a) Функция правдоподобия:

$$L(a) = \prod_i \frac{a \ln^{a-1} x_i}{x_i} \tag{67}$$

Лог-функция правдоподобия:

$$l(a) = \sum_i \ln a + (a-1)\ln\ln x_i - \ln x_i \tag{68}$$

Производная:

$$l'(a) = \sum \frac{1}{a} + \ln\ln x_i = \frac{n}{a} - \ln\ln x_i \tag{69}$$

Условие первого порядка:

$$\hat{a} = -\frac{n}{\sum \ln\ln x_i} = \frac{100}{20} = 5 \tag{70}$$

Проверяем, что нашли максимум: $l''(a) = -\frac{n}{a^2} < 0 \Rightarrow$ действительно нашли максимум.

(b) Наблюдаемая информация Фишера: $\hat{I} = -l''(\hat{a}) = \frac{n}{\hat{a}^2} = 4$

(c) Оценка дисперсии: $\hat{\mathrm{Var}}(\hat{a}) = \hat{I}^2 = 0.25$
Поскольку оценки максимального правдоподобия асимптотические нормальны и несмещены, доверительный интервал в общем виде:

$$\left[\hat{a} - z\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{a}}; \hat{a} - z\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{a}}\right] \tag{71}$$

Численно: $[4.18; 5.82]$

Критерии

(a) 4 балла

(b) 3 балла

(c) 3 балла

Всего 10 баллов.

10. При проверке данной задачи комиссией было принято решение проверять пункты (a), (b) и (d), на ход решения которых не влияли опечатки.

(a) Коэффициенты можно найти, используя результаты оценивания модели 5:

	4	5
COEFFICIENT	LWAGE	LWAGE
AGE	0.0185-0.0194=0.0009	0.0185
EDUC	0.0541-0.0296=0.0245	0.0541
URBAN	0.196-0.0381=0.1579	0.196
BLACK		0.671
AGE*BLACK		-0.0194
EDUC*BLACK		-0.0296
URBAN*BLACK		-0.0381
CONSTANT	5.251+0.671=5.922	5.251
RSS	128.185-112.948=112.948	128.185

RSS можно найти как разницу между RSS в модели 5(с учетом дамми-переменной black, характеризующей различия в коэффициентах между white и black) и RSS в модели 3 (только для white): $RSS_4 = RSS_5 - RSS_3$.

Аналогично можно было вывести через TSS по всей выборке (из моделей 1, 2 или 5) и TSS для модели 3(по white):

$$RSS_4 = (1 - R_4^2(TSS_5 - TSS_3) \tag{72}$$

где $TSS = \frac{RSS_5}{(1-R_5^2)}, TSS_3 = \frac{RSS_3}{(1-R_3^2)}$.

(b) Коэффициент значим (при любом разумном уровне значимости): $t = \frac{-0.228}{0.0374} = -6.1$.
У афроамериканцев заработная плата ниже (при прочих равных) на 20.4: % $(\exp(-0.228) - 1) \cdot 100\% = -20.4\%$(для полулогарифмической модели).
Приближенная интерпретация: на 22.8%, т.е. $-0.228 \cdot 100\% = -22.8\%$

(d) Недостаточно: если коэффициент незначим, это еще не означает отсутствия проблемы дискриминации, если значим — не факт, что спецификация модели верна (могут быть пропущены существенные переменные; дискриминация проявляется не только «в среднем», но и в отдаче на другие регрессоры модели).

Критерии:

A 0.5 баллов за каждый коэффициент(итого 2)+3 балла за RSS=5 баллов

B 2 балла за интерпретацию коэффициента при переменной BLACK в модели 2.

D 3 балла

7 2013

7.1 Демо-версия олимпиады 2013

1. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+5n+1} - 2n}{e^{\cos(\operatorname{arctg} n)}}$$

2. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Исследуйте на экстремум функцию $F(x, y) = 4x^3 + 10x^2 + 2y^2 + 2xy^2 + 9$
4. Пусть $F(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ при ограничении $a + bx + cy = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. При каких значениях параметров ограничения множество условных локальных экстремумов функции $F(x, y)$ будет не пусто? Каков характер этих экстремумов?
5. Найдите частное решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y^5 + 3x^2 \cos(y)}{x^3 \sin(y) - 3y^2 - 5y^4 x}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.
6. Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.

   (a) Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?

   (b) Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?

   (c) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?

   (d) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?

7. Для того чтобы поступить в университет, абитуриенту Васе Смирнову необходимо сдать два экзамена: по математике и по английскому языку. Экзамен по математике оценивается по десятибалльной шкале, а экзамен по английскому языку по пятибалльной. Предполагается, что шкалы оценок непрерывные, например, на экзамене по математике абитуриент может получить $4.734(34)\ldots$ балла. Известно, что для поступления на бюджет необходимо набрать 11 из 15 баллов.
   Кроме того, необходимо получить по математике не ниже 4 баллов, а по английскому языку не ниже 3 баллов для того, чтобы участвовать в конкурсе на бюджетные места. Функция совместной плотности распределения вероятности получения определенной оценки по математике, X, и по английскому языку, Y, для Васи имеет следующий вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} axy, \; 0 \leqslant x \leqslant 100, \; 0 \leqslant y \leqslant 5 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

   (a) Определите значение параметра a, при котором указанная функция может являться функцией плотности.

   (b) Найдите вероятность того, что Вася поступит на бюджет.

   (c) Как изменится вероятность поступления на бюджет, если известно, что за экзамен по английскому Вася получил 4 балла?

8. Известно, что случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0; a]$. Исследователь проверяет гипотезу H_0: $a = 10$ против H_a: $a > 10$ с помощью следующего критерия: отвергнуть H_0 в пользу H_a, если $X < c$. Каким должно быть число c, если исследователь хочет осуществить проверку на уровне значимости 10%? При $c = 8$ выразите мощность критерия как функцию от a.

9. Статистик Тимофей оценивает доверительный интервал для математического ожидания по большой выборке по формуле

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Тимофей забыл таблицы нормального распределения и не может точно вспомнить значение $z_{\alpha/2}$ для уровня доверия (доверительной вероятности) 95%. Определите, каков будет уровень доверия, если

(a) Тимофей подставит значение $z_{\alpha/2} = 2$

(b) Тимофей воспользуется следующим выражением для доверительного интервала:

$$\bar{X} - 1.5\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 2.5\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

10. Посредник, торгующий подержанными автомобилями, для получения данных о предложениях продажи пользуется журналом, где публикуются цены предложения (Price), возраст автомобиля (Age), его пробег (Run), наличие сигнализации (Signal) и музыкальной системы (Music). Посреднику необходимо решить две проблемы.

Проблема 1. У посредника сложилось впечатление, что для более старых машин величина пробега меньше интересует покупателей, чем для более новых. Какая из приведенных ниже моделей позволит ему проверить свою гипотезу и каким образом? Можно ли считать полученный результат доказательством гипотезы посредника? Посредник верит, что выполняются все основные гипотезы модели линейной регрессии, в том числе гипотеза о нормальном распределении случайной составляющей.

i. $Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 Age_t + w_t$

ii. $Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 Age_t + c_3 Run_t Age_t + w_t$

iii. $Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 Age_t^2 + w_t$

iv. $Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 \ln(Run_t Age_t) + w_t$

Проблема 2. Посреднику необходимо оценить среднестатистический автомобиль, пробег которого составляет 49,52 тыс. км. Такого автомобиля в его базе еще нет. Если он укажет неверную «вилку цен», то сделка не состоится. Посредник может позволить себе ошибиться в среднем в пяти случаях из ста. Какие границы цен он должен назначить, если для грубой оценки стоимости автомобиля посредник использует модель $\widehat{Price_t} = \underset{(0.412)}{1.304} + \underset{(0.007)}{0.054} Run_t$? Подойдет ли эта оценка для автомобиля с пробегом 80 тыс. км?

Здесь в скобках стоят стандартные ошибки оценок. Оценка стандартной ошибки случайной составляющей $s = \sqrt{s^2} \approx 1,660$. Ковариационная матрица оценок коэффициентов имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0.17 & 0 - 0.003 \\ -0.003 & 0.00005 \end{pmatrix}$$

Посредник верит, что случайная составляющая имеет нормальное распределение.

7.2 Олимпиада март-апрель 2014

Задание состоит из 10 задач. Время выполнения — 180 минут.

1. Найдите предел

$$\lim_{x\to 2014-0}(2014-x)^{\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}}$$

Решение

За полностью правильно решенную задачу ставилось 10 баллов.
За правильное начало решения в случае "запутывания"при применении правила Лопиталя ставилось 5-6 баллов.
За каждую грубую ошибку снимался 1 балл.
Если делалась осмысленная замена, то ставился 1 балл.
Если утверждалось что 0 в степени 0 равен 1, то ставился 1 балл.
Возможный вариант решения:

$$\lim_{x\to 2014-0}(2014-x)^{\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}} = \exp\left\{\lim_{x\to 2014-0}\left(\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}\cdot\ln(2014-x)\right)\right\} = e^0 = 1, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x\to 2014-0}\left(\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}\cdot\ln(2014-x)\right) = \lim_{x\to 2014-0}\frac{\ln(2014-x)}{\left(\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}\right)^{-1}} =$$

По правилу Лопиталя

$$= \lim_{x\to 2014-0}\frac{\cos^2\frac{\pi(2015-x)}{2}}{(2014-x)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi(2015-x)}{2}} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 2014-0}\frac{\cos^2\frac{\pi(2015-x)}{2}}{2014-x} =$$

$$= \lim_{x\to 2014-0}\frac{2\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}\sin\frac{\pi(2015-x)}{2}}{-1} = 0$$

Возможный вариант решения:
Обозначим $2014 - x = y$. Тогда

$$\lim_{x\to 2014-0}(2014-x)^{\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}} = \lim_{y\to 0+} y^{\cos\frac{\pi(1+y)}{2}} = \lim_{y\to 0+} y^{-\sin\frac{\pi y}{2}} =$$
$$= \exp\left\{\lim_{y\to 0+}\left(-\sin\frac{\pi y}{2}\cdot\ln y\right)\right\} = e^0 = 1,$$

Т.к. $\lim_{y\to 0+}\left(\sin\frac{\pi y}{2}\cdot\ln y\right) = \lim_{y\to 0+}\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}\cdot\lim_{y\to 0+}\left(\frac{\pi y}{2}\cdot\ln y\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{y\to 0+}(y\cdot\ln y) = \frac{\pi}{2}\lim_{y\to 0+}\frac{\ln y}{y^{-1}} = \frac{\pi}{2}\lim_{y\to 0+}\frac{y^2}{y} = 0$

2. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора $(x-2014)^2\frac{d^2}{dx^2}$, действующего в пространстве многочленов степени не выше 4.

Решение

За полностью правильно решенную задачу ставилось 10 баллов.
За правильное нахождение всех собственных чисел ставилось 6 баллов.
Если была правильно найдена часть собственных векторов и все собственные числа, то ставилось 7-8 баллов.
Если была правильно выписана матрица оператора (и указывался базис, в котором матрица имеет соответствующий вид), то ставилось 2 балла.
Если было приведено правильное определение собственных чисел и собственных векторов оператора, то ставился 1 балл.

(a) Заметим, что

$$(x-2014)^2\frac{d^2}{dx^2}(x-2014)^k = k(k-1)(x-2014)^k,\ k=0,1,2...$$

(b) Выберем в качестве базиса в пространстве многочленов степени не выше 4 следующие многочлены: $1,\ (x-2014),\ (x-2014)^2,\ (x-2014)^3,\ (x-2014)^4$.

(c) Матрица оператора $(x-2014)^2\frac{d^2}{dx^2}$ в этом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,2\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,6\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,12 \end{pmatrix}$$

(d) Т.к. матрица является диагональной, то ее собственные числа – это диагональные элементы: 0 (кратности 2), 2, 6, 12 (кратности 1), а соответствующие собственные векторы:

Для 0 - 1, $(x-2014)$,
Для 2 - $(x-2014)^2$,
Для 6 - $(x-2014)^3$,
Для 12 - $(x-2014)^4$.

3. Исследуйте на экстремумы функцию

$$F(x,y) = x^2y + 3y^2x + 3y^3 - 8x - 25y$$

Решение

Найдем точки, подозрительные на экстремум, решая следующую систему уравнений [1 балл]:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 3y^2 - 8 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 6xy + 9y^2 - 25 = 0 \end{cases}.$$

Получим точки со следующими координатами: $(1;4/3), (1;-2), (-1;2), (-1;-4/3)$ [4 балла].
Далее необходимо проверить выполнение условий второго порядка. Для этого найдем матрицу вторых производных исследуемой функции [1 балл]:

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x+6y \\ 2x+6y & 6x+18y \end{pmatrix}.$$

Проверим знакоопределенность этой матрицы в каждой из найденных подозреваемых точек.
Для точки с координатами $(1;4/3)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 8/3 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$. Так как$8/3\cdot 30-10^2<0$, точка с координатами $(1;4/3)$ не является точкой экстремума [1 балл].
Для точки с координатами $(1;-2)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ -10 & -30 \end{pmatrix}$. Так как$-4<0$, $4\cdot 30-10^2>0$, точка с координатами $(1;-2)$ является точкой максимума. Значение функции в этой точке: $F(x,y)=28$ [1 балл].
Для точки с координатами $(-1;-4/3)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} -8/3 & -10 \\ -10 & -30 \end{pmatrix}$. Так как$8/3\cdot 30-10^2<0$, точка с координатами $(-1;-4/3)$ не является точкой экстремума [1

балл].

Для точки с координатами $(-1;2)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$. Так как$4>0$, $4\cdot30-10^2>0$, точка с координатами $(1;-2)$ является точкой минимума. Значение функции в этой точке: $F(x,y)=-28$ [1 балл].

4. Для каждого значения параметра a исследуйте функцию

$$Q(x,y;a)=\frac{(x+2y)^2-4a(x+a)-x^2}{y-a},$$

на условные экстремумы при ограничении $F(x,y;a)=x^2+y^2-a^2=0$.

Решение

Выписывание функции Лагранжа - 1 балл.
Нахождение критических точек функции Лагранжа - 5 баллов.
Анализ критических точек - 5 баллов.

(a) Путем алгебраических преобразований числителя получаем, что $Q\left(x,y;a\right)=4\left(x+y+a\right),y\neq a$

(b) Определяем наличие условных стационарных точек. Для этого выписываем функцию Лагранжа $L\left(x,y,\lambda;a\right)=\left(x+y+a\right)+\lambda\left(x^2+y^2-a^2\right)$. Приравниваем его производные по x,y,λк нулю и получаем два решения: A: $\left(x_1,y_1,\lambda_1\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{2\sqrt{2}}{a}\right)$ и B: $\left(x_2,y_2,\lambda_2\right)=\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{2\sqrt{2}}{a}\right)$. Очевидно, что выполняется $y\neq a$.

(c) Определяем тип найденных условных стационарных точек. Для этого выписываем второй дифференциал функции Лагранжа $d^2L\left(x,y,\lambda;a\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}L\left(x,y,\lambda;a\right)dx^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}L\left(x,y,\lambda;a\right)dxdy+\frac{\partial^2}{\partial y^2}L\left(x,y,\lambda;a\right)dy^2$. Из ограничения следует, что $dy=-\left(\frac{\partial}{\partial x}F\left(x,y;a\right)\Big/\frac{\partial}{\partial y}F\left(x,y;a\right)\right)dx$. Таким образом, тип стационарной точки определяется знаком выражения

$$\begin{array}{l} A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}L\left(x_k,y_k,\lambda_k;a\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}L\left(x_k,y_k,\lambda_k;a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}F\left(x_k,y_k;a\right)\Big/\frac{\partial}{\partial y}F\left(x_k,y_k;a\right)\right)+ \\ +\frac{\partial^2}{\partial y^2}L\left(x_k,y_k,\lambda_k;a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}F\left(x_k,y_k;a\right)\Big/\frac{\partial}{\partial y}F\left(x_k,y_k;a\right)\right)^2 \end{array}.$$

В данном случае $A=2\lambda_k+2\lambda_k\left(\frac{x}{y}\right)^2=2\lambda_k\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)$. Таким образом, тип стационарной точки определяется знаком λ_k. Знак определяется знаком параметра «а». Если $a>0$, то первая стационарная точка А – точка максимума, вторая точка В – минимума. Если $a<0$, то первая стационарная точка – точка минимума, вторая – максимума. Однако, как не трудно видеть, решения в первом и втором случае совпадают.

5. Задано дифференциальное уравнение

$$y'''+5y''+11y'+15y=15x+56$$

(a) Найдите общее решение дифференциального уравнения

(b) Найдите асимптоту при $x\to+\infty$ тех решений, у которых асимптота существует

Решение

(a) [1 балл] Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 11\lambda + 15 = 0$$

(b) [3 балла] Перебором делителей свободного члена находим отрицательный корень $\lambda = -3$. После этого находим все корни: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1 + 2i$, $\lambda_3 = -1 - 2i$. [1 балл] Решение однородного:

$$y_{hom}(x) = c_1 e^{-3x} + e^{-x}(c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(3x))$$

(c) [3 балла] По виду правой части находим частное решение, $y_{ps}(x) = x + 3$

(d) Выписываем общее решение

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + e^{-x}(c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(3x)) + x + 3$$

(e) [2 балла] Асимптота равна $y_{as}(x) = x + 3$

6. Васе нравятся Маша и Алёна, поэтому он ходит на лекции, чтобы пообщаться с ними. Вероятность застать Васю на лекциях равна 0.1, если девушек нет; 0.5 — если обе девушки пришли на лекции; 0.3 — если пришла только Маша и 0.2 — если пришла только Алёна. Маша и Алёна посещают лекции независимо друг от друга с вероятностями 0.6 и 0.7 соответственно.

(a) [2 балла] Найдите вероятность того, что на лекциях будет присутствовать ровно одна из девушек

(b) [2 балла] Найдите вероятность того, что на лекциях присутствуют все трое

(c) [3 балла] Найдите вероятность того, что на лекциях присутствует Алёна, если на лекциях присутствует Вася

(d) [3 балла] Найдите вероятность того, что на лекциях присутствует Вася, если пришла ровно одна из девушек

Решение

Обозначим: величина X — количество пришедших девушек, событие V — пришел Вася, A — пришла Алёна и M — Маша.

(a) $\mathbb{P}(X = 1) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.46$

(b) $\mathbb{P}(A \cap M \cap V) = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.5 = 0.21$

(c) По формуле условной вероятности:

$$\mathbb{P}(A|V) = \mathbb{P}(A \cap V)/\mathbb{P}(V) = \frac{6 \cdot 7 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \cdot 2}{6 \cdot 7 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 1} = 0.801$$

(d) По формуле условной вероятности:

$$\mathbb{P}(V|X = 1) = \mathbb{P}(V \cap \{X = 1\})/\mathbb{P}(X = 1) = \frac{0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2}{0.46} = 0.239$$

Если условные вероятности посчитаны неверно, но выписана правильная формула для условной вероятности, то начислялся один балл.

7. Совместная функция плотности случайных величин X и Y имеет вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{3}{2}y^2, \text{ если } x \in [0;1],\ y \in [0;1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

   (a) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, дисперсию $\mathrm{Var}(X)$

   (b) Найдите функцию плотности величины X

   (c) Найдите вероятности $\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2})$ и $\mathbb{P}(Y > 2X)$.

   (d) Найдите константу c, если $g(x,y) = cxf(x,y)$ — это совместная функция плотности для некоторой пары случайных величин

Решение

(a) и (b) Частную функцию плотности найдем по формуле $f_X(x) = \int_0^1 x + \frac{3}{2}y^2 dy = x + \frac{1}{2}, x \in [0,1]$ [2 балла].
Математические ожидания найдем интегрированием $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{7}{12}$ [1 балл], $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{5}{12}$ [1 балл]. Тогда дисперсию можно рассчитать как разность $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{11}{144}$ [1 балл].
(c) Условную вероятность рассчитаем по формуле как отношение [2 балла]

$$\mathbb{P}\left(Y < \frac{1}{2}\middle| X < \frac{1}{2}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(Y < \frac{1}{2}, X < \frac{1}{2}\right)}{\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{2}\right)} = \frac{\int_0^{0,5}\int_0^{0,5} x + \frac{3}{2}y^2 dxdy}{\int_0^{0,5} x + \frac{1}{2}dx} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4}.$$

Представим требуемую вероятность как интеграл со следующими пределами интегрирования [2 балла]

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y > 2X) = \int_0^{0,5}\int_{2x}^1 x + \tfrac{3}{2}y^2 dydx = \int_0^{0,5} xy + \tfrac{1}{2}y^3\Big|_{2x}^1 dx = \\ &\int_0^{0,5} x + \tfrac{1}{2} - 2x^2 - 4x^3 dx = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{16} = \tfrac{11}{48}\end{aligned}.$$

(d) Неизвестную константу найдем из условия $c\int_0^1\int_0^1 x^2 + \frac{3}{2}xy^2 dxdy = 1$. Получаем $c = 12/7$ [1 балл]

8. В случайной выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ величины X_i независимы и принимают значения 0 и 1, вероятность события $\{X_i = 1\}$ обозначим p. Для проверки гипотезы H_0: $p = 1$ против альтернативы H_a: $p < 1$ используется критерий: отвергать H_0, если $\sum_{i=1}^n X_i < n$.

   (a) Предположим, что на самом деле $p = 1$. С какой вероятностью основная гипотеза будет отвергнута?

   (b) Пусть $0 < p < 1$. Выпишите мощность критерия как функцию от n и p.

Решение

Обозначим $\sum_{i=1}^n X_i < n$ как событие A. Его можно выразить словами так: «хотя бы одна из величин X_i принимает значение 0».
а) При $p = 1$ вероятность отвергнуть основную гипотезу будет равна нулю. Событие A невозможно — все X_i достоверно равны единице, так что $\sum_{i=1}^n X_i = n$.
Пункт (а) оценивается в 5 баллов.
б) Мощность критерия – вероятность отвергнуть основную гипотезу, когда верна альтернативная. В случае $0 \leqslant p < 1$ основная гипотеза отвергается с вероятностью $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - p^n$ — это и есть функция мощности.
Пункт (б) оценивается в 5 баллов. За понимание того, что такое мощность, ставится 2 балла.

9. Известно, что объём порции кофе, приготовленной кофейным аппаратом, имеет нормальное распределение со стандартным отклонением 2 мл и математическим ожиданием, которое устанавливает производитель аппарата. Любительница кофе Соня не понимает, какой средний объём порции установлен на её аппарате, и решает приготовить 9 порций кофе, средний объём которых оказывается равен $\bar{X} = 51.8$ мл.

   (a) Рассчитайте 90% доверительный интервал для математического ожидания объёма.

   (b) Предположим, что Соня решает пользоваться доверительным интервалом вида $(\bar{X} - 2; \bar{X} + 2)$.

   Какой доверительной вероятности он соответствует?

Решение

Пользуемся доверительным интервал для математического ожидания в случае нормальной генеральной совокупности с известной дисперсией:

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Табличное значение $z_{0.1/2} = 1.645$ (по таблицам. нормального распределения можно определить, что $1.64 < z_{0.1/2} < 1.65$). Подставляя данные из условия, получаем интервал:

$$51.8 - 1.645\frac{2}{\sqrt{9}} < \mu < 51.8 + 1.645\frac{2}{\sqrt{9}}$$

$$50.703 < \mu < 52.897$$

Пункт (а) оценивается в 5 баллов, за ошибку при использовании таблиц снимается 2 балла.

Интервал $(\bar{X} - 2; \bar{X} + 2)$ — частный случай интервала из части (а), где $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$. Поэтому $z_{\alpha/2} = \frac{2\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2\sqrt{9}}{2} = 3$. Посмотрев в таблицы нормального распределения, видим, что это значение соответствует доверительной вероятности в 99.73% (правило трёх сигм).

Пункт (б) оценивается в 5 баллов, за ошибку при использовании таблиц снимается 2 балла.

10. Менеджер Петров планирует купить подержанный автомобиль и накопил для этого некоторую сумму — 1000 у.е. Он выбрал тип автомобиля: производителя, модель и комплектацию. В качестве основного параметра для принятия решения он рассматривает пробег (переменная «Run») в тысячах километров. Петров собрал данные о ценах на 100 автомобилей выбранного типа в единицах у.е. с различным пробегом и решил для анализа своих возможностей воспользоваться линейной регрессией $Price_t = \beta_1 + \beta_2 Run_t + v_t$. Предположим, что все предпосылки классической нормальной регрессионной модели выполнены. Результаты оценивания модели по имеющимся у Петрова данным:

    - оценки значений параметров, $\hat{\beta}_1 = 2000$, $\hat{\beta}_2 = -2$
    - оценка ковариационной матрицы оценок значений параметров, $\hat{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
    - оценка дисперсии случайной составляющей $\hat{\sigma}^2 = 150$.

    (a) С вероятностью ошибки первого рода 5% проверьте гипотезу менеджера о том, что за каждую тысячу километров пробега автомобиль теряет в цене не две, а две с половиной у.е.

    (b) Каков минимальный пробег автомобиля выбранного типа, начиная с которого Петрову хватит денег на покупку с вероятностью 97.5%?

Решение

Формализация (выписывание в виде математических соотношений) любой из проблем Петрова - 2 балла. Решение любой из проблем - 5 баллов

Конкретная величина баллов может быть иной в зависимости от полноты решения и допущенных ошибок.

Теория. Решение основано на построении доверительного интервала для нового значения зависимой переменной – цены ($Price$). С заданной доверительной вероятностью он накрывает искомое новое значение. Поскольку Петров согласен с вероятностью покупки 0.97725, то доверительная вероятность равна этой величине. Необходимо построить указанный выше доверительный интервал при произвольном значении независимой переменной – пробеге (Run). Далее, приравнивая нижний предел данного интервала к имеющейся у Петрова сумме, определяем минимальный пробег автомобиля, на который он может рассчитывать.

Расчеты.

(a) Для модели линейной регрессии приближенный (на основе оценок) доверительный интервал для нового значения зависимой переменной имеет вид: $P\left(Price \in \left[(\hat{a}, x) - u_\alpha \sqrt{x'\hat{C}x +\right.\right.$ α. Подставляя в это выражение имеющиеся у Петрова результаты оценивания, и учитывая указанное значение квантили, получаем нижнюю границу доверительного интервала:

$$Price_L\,(Run) = 2000.0 - 2.0 \cdot Run - 2 \cdot \sqrt{(2.0 + 2.0 \cdot Run + 2.0 \cdot Run^2) + 150} =$$
$$= 2000.0 - 2.0 \cdot Run - 2 \cdot \sqrt{152 + 2.0 \cdot Run + 2.0 \cdot Run^2}$$

(b) Приравнивая найденное выражение накопленной сумме, получаем уравнение: $500 - Run = \sqrt{152 + 2.0 \cdot Run + 2.0 \cdot Run^2}$. Выражение под знаком квадратного корня в правой части равенства всегда положительно (корней нет). Возводим левую и правую часть в квадрат. В результате получаем уравнение $Run^2 + 1002 \cdot Run - 249848 = 0$. Оно имеет два корня $Run_1 = -683.71$, $Run_2 = 182.71$. Очевидно, что второй корень равен искомой величине.

Решение второй проблемы Петрова.

Теория. Решение основано на проверке гипотезы о величине математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии. (Возможен вариант решения при неизвестной дисперсии, но для этого потребуются таблицы или их эквивалент для распределения Стьюдента. Если участник Олимпиады пойдет этим путем, можно добавить несколько баллов).

Расчеты. Проверяется гипотеза H_0: $\beta_2 = -2.5$ против H_a: $\beta_2 \neq -2.5$. При сделанных предположениях и полученных оценках критическая область имеет вид $W = (-\infty, z_L] \cup [z_U; +\infty)$, где $z_L = -2.5 - 1.96 \cdot 1.41 \approx -5.26$, $z_U = -2.5 + 1.96 \cdot 1.41 \approx 0.26$. Полученная оценка значения параметра $\hat{\beta}_2$ не попадает в критическую область. Таким образом, гипотеза менеджера Иванова не отвергается.

Справочная информация:

Если $F()$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины, то $F(1) \approx 0.841$, $F(1.282) \approx 0.9$, $F(1.645) \approx 0.95$, $F(1.96) \approx 0.975$, $F(2.241) \approx 0.9875$, $F(3) \approx 0.9987$.

При необходимости можно использовать линейную интерполяцию для нахождения нужных квантилей.