Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов

Лекции по вещественному анализу

$$\int_X f\, d\mu$$

Б. М. Макаров
А. Н. Подкорытов

Лекции по вещественному анализу

Рекомендовано УМО в области инновационных междисциплинарных образовательных программ в качестве учебника по специальности 010503 "Математическое обеспечение и администрирование информационных систем"

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2011

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73
М15

Макаров, Б. М.

М15 Лекции по вещественному анализу: учебник / Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 688 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0631-1

Книга посвящена основам теории интегрирования и смежным темам. Особое внимание уделяется теории интеграла по мере Лебега. Обсуждаются замена переменных в кратном интеграле и построение меры на поверхности. Рассмотрены приложения общей теории, гармонические функции, асимптотические формулы Лапласа, ряды и преобразование Фурье, формулы, связанные с методом стационарной фазы, и др. Все темы излагаются для функций одной и нескольких переменных. Рассматриваются актуальные разделы вещественного анализа (например, меры Хаусдорфа), важные геометрические приложения: неравенство Брунна-Минковского, теорема Брауэра, теорема о непрерывных векторных полях на сфере и др. Затрагиваются вопросы функционального анализа. Изложение основано на лекциях, многократно читавшихся авторами на математико-механическом факультете СПбГУ. Книга содержит более 600 примеров и упражнений.

Для студентов-математиков и студентов других специальностей, преподавателей и аспирантов

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Евгений Рыбаков*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Константина Кохася*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*
Зав. производством	*Николай Тверских*

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

С. В. Кисляков, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАН, директор Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН;

А. М. Коточигов, д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой высшей математики II Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ".

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 30.09.10.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 55,47.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0631-1

Предисловие

Теория меры уже давно стала неотъемлемой составной частью университетской программы подготовки математиков. Имеется ряд посвящённых ей апробированных руководств. Можно назвать, например, книги Б. З. Вулиха [В], А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [КФ], не говоря уже о классической монографии П. Халмоша [Х]. Однако обычно в книгах по теории меры она рассматривается как самостоятельная дисциплина, что затрудняет достаточно органичное включение её в курс анализа. Например, инвариантность меры Лебега или вовсе не обсуждается, или рассматривается лишь как частный случай свойств меры Хаара; нередко вне поля зрения остаётся задача о преобразовании меры Лебега при диффеоморфизме. С другой стороны, до сих пор изложение теории интегрирования в курсах анализа зачастую основывается на римановой схеме, и читателю приходится не только осваивать многочисленные (хотя и единообразные) определения интеграла с помощью интегральных сумм, соответствующие различным ситуациям (двойные интегралы, тройные интегралы, криволинейные, поверхностные и т. д.), но и подчас преодолевать технические трудности, вызванные не существом дела, а отсутствием достаточно общего подхода к вопросу. Типичные примеры таких трудностей связаны с обоснованием изменения порядка интегрирования или предельного перехода под знаком интеграла.

По этим причинам возникает подчас как бы “двухуровневое” изложение теории интегрирования, когда на первой стадии понятие меры не затрагивается, а в дальнейшем к пройденным “элементарным” темам уже не возвращаются, оставляя согласование различных подходов учащемуся. Авторы стремились ликвидировать этот разрыв и дать изложение теории интеграла, которое с одной стороны было бы современным, а с другой — могло быть достаточно естественно включено в общий курс анализа, как это уже давно принято на кафедре математического анализа математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета. В основе установившейся традиции лежит идея, высказанная ещё в начале 60-х годов Г. П. Акиловым и реализованная впервые В. П. Хавиным в 1963/64 учебном году.

Основной акцент в книге делается на изложении свойств интеграла по мере Лебега и его разнообразных применениях. Такой подход определил как характер изложения, так и подбор материала. Вместе с тем, мы надеемся, что читатель, освоивший первую треть книги, окажется достаточно подготовленным для изучения любых разделов математики, использующих общую теорию меры (теория вероятностей, функциональный анализ, математическая физика и др.).

Существенную часть книги составляют приложения теории интегрирования. Кроме элементов гармонического анализа, это прежде всего геометрические приложения, среди которых читатель найдёт как классические неравенства (Брунна–Минковского и изопериметрическое), так и более поздние результаты (использование замены переменной при доказательстве теорем Брауэра и о векторных полях на сфере, неравенство Болла и др.). Чтобы проиллюстрировать действенность полученных теорем и предоставить читателю возможность более активно осваивать излагаемый материал, в книгу включены примеры и упражнения различной степени трудности, общее число которых довольно значительно.

Учебный характер книги удерживал нас от изложения некоторых результатов в максимальной общности. В интересах читателя иногда в таких случаях даются ссылки на специальную литературу. Более подробно, чем обычно в книгах по математическому анализу, мы рассматриваем понятие площади поверхности и исходя из дескриптивного определения доказываем его однозначную определённость на борелевских подмножествах гладких и липшицевых многообразий.

Безусловно желательно, чтобы лекционному изложению основ теории меры предшествовало знакомство слушателей с понятием интеграла по отрезку от непрерывной функции одной переменной. Однако мы не считаем, что это первоначальное знакомство обязательно должно быть связано со схемой Римана, представляющей, на наш взгляд, прежде всего исторический интерес. Один из возможных альтернативных подходов изложен в добавлении I.

Эта книга возникла на основе курсов лекций, которые авторы многократно читали на математико-механическом факультете СПбГУ. Основная часть глав I–VIII примерно соответствует принятой на факультете программе четвертого и части пятого семестров курса математического анализа в потоке математиков. Материал глав IX–XII и некоторых других мест книги в тех или иных сочетаниях включался авторами в специальные курсы или в лекции по функциональному анализу. Некоторые дополнительные сведения содержатся в добавлениях II–VI. Добавление VII, посвящённое гладким отображениям, приведено для удобства ссылок.

Книга рассчитана на читателя, имеющего некоторую математическую подготовку. В соответствии с программой математико-механического факультета СПбГУ студенты-математики IV семестра знакомы с дифференциальным исчислением функций нескольких переменных и стандартными сведениями по линейной алгебре. Соответствующие факты в книге используются без особых пояснений. В главе VIII предполагается знакомство читателя с началами теории гладких многообразий, а в добавлениях II и III — с основными понятиями, связанными с метрическими пространствами.

Авторам приходилось встречать книги, в которых раз введённые определения или обозначения уже больше никогда не напоминаются и используются, даже спустя несколько глав, без всяких пояснений и ссылок. Нам представляется, что такая манера — уместная, возможно, в монографиях энциклопедического характера — предъявляет излишне завышенные требования к памяти и вниманию читателя. Учитывая, кроме того, что эта книга является учебным пособием и адресована прежде всего читателям не слишком искушенным, многие из которых впервые знакомятся с предметом, авторы сочли возможным не избегать некоторых повторений и напоминаний, но не берутся судить, удалось ли им соблюсти в этом отношении меру.

В процессе длительной работы над этой книгой авторы многократно пользовались советами своих коллег. Особенно полезными были контакты с Д. А. Владимировым,

А. А. Лодкиным, А. И. Назаровым, Ф. Л. Назаровым, А. А. Флоринским и В. П. Хавиным, которым мы искренне благодарны. Мы также признательны А. Л. Громову, любезно согласившемуся сделать компьютерную версию иллюстраций, и К. П. Кохасю, создавшему макет книги.

Главы книги нумеруются римскими цифрами. Они разбиты на параграфы, состоящие в свою очередь из пунктов, которые нумеруются двумя (арабскими) цифрами. Первая из них обозначает номер параграфа, а вторая — номер пункта в параграфе. Пункты добавлений нумеруются двумя цифрами — римской (номер добавления) и арабской, с добавлением при ссылках буквы Д.

Все утверждения, содержащиеся в данном пункте, нумеруются при ссылках так же, как и пункт. При ссылках внутри одной главы указывается только номер пункта (например, ссылка “по теореме 2.1” означает ссылку на теорему пункта 2.1 данной главы). При ссылках на утверждения из другой главы указывается дополнительно номер главы (например, ссылка “см. следствие II.3.4” означает ссылку на следствие, содержащееся в пункте 3.4 главы II). Нумерация формул сплошная в пределах параграфа. Окончание доказательства отмечается знаком ►.

Основные обозначения

Логические символы

$P \Rightarrow Q,\ Q \Leftarrow P$ — из утверждения P следует утверждение Q;
$\forall$ — квантор общности (“для всех”);
$\exists$ — квантор существования (“существует”).

Множества

$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X;
$x \notin X$ — элемент x не принадлежит множеству X;
$A \subset B$, $B \supset A$ — A подмножество множества B;
$A \cap B$ — пересечение множеств A и B;
$A \cup B$ — объединение множеств A и B;
$A \vee B$ — объединение дизъюнктных множеств A и B;
$A \setminus B$ — разность множеств A и B;
$A \times B$ — прямое (декартово) произведение множеств A и B;
$\mathrm{card}(A)$ — мощность множества A;
$\{x \in X \mid P(x)\}$ — подмножество множества X, элементы которого обладают свойством P;
$\varnothing$ — пустое множество.

Числовые множества

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;
$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ — расширенное множество вещественных чисел;
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;
$\mathbb{R}^m$ — арифметическое m-мерное пространство;
$\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел;
$\mathbb{R}^m_+$ — подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, состоящее из точек с положительными координатами;
$\mathbb{Q}^m,\ \mathbb{Z}^m$ — подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, состоящие из точек соответственно с рациональными и целыми координатами;
$(a, b), [a, b), [a, b]$ — обозначения интервала, ячейки и сегмента;
$\langle a, b\rangle$ — произвольный промежуток с концами a и b;
$\inf A$ $(\sup A)$ — наибольшая нижняя (наименьшая верхняя) граница числового множества A.

Множества в топологических и метрических пространствах

$\overline{A}$ — замыкание множества A;
$\mathrm{Int}(A)$ — внутренность множества A;
$B(a, r)$ — открытый шар с центром a и радиусом r;
$\overline{B}(a, r)$ — замкнутый шар с центром a и радиусом r;

$B(r)$ или $B^m(r)$ — шар $B(0,r)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$;
B^m — шар $B^m(1)$;
S^{m-1} — единичная сфера (граница шара B^m) в пространстве $\mathbb{R}^m$;
$\operatorname{diam}(A)$ — диаметр множества A;
$\operatorname{dist}(x,A)$ — расстояние от точки x до множества A.

Системы множеств

$\mathfrak{A}^m$ — σ-алгебра подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$, измеримых по Лебегу;
$\mathfrak{B}^m$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^m$;
$\mathfrak{B}(\mathcal{E})$ — борелевская оболочка системы $\mathcal{E}$;
$\mathfrak{B}_X$ — σ-алгебра борелевских подмножеств пространства X;
$\mathscr{P}^m$ — полукольцо m-мерных ячеек;
$\mathscr{P}\odot\mathscr{Q}$ — произведение полуколец $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$.

Отображения и функции

$\det(A)$ — определитель квадратной матрицы A;
f_+, f_- — функции $\max\{f,0\},\ \max\{-f,0\}$;
$f_n \rightrightarrows f$ — обозначение равномерной сходимости последовательности функций f_n к функции f;
$J_\Phi(x)=\det(\Phi'(x))$ — якобиан отображения Φ в точке x;
$\operatorname{supp}(f)$ — носитель функции f;
$T\colon X\to Y$ — отображение T, действующее из X в Y;
$T(A)$ — образ множества A при отображении T;
$T^{-1}(B)$ — полный прообраз множества B при отображении T;
$T\circ S$ — композиция (суперпозиция) отображений T и S;
$T|_A$ — сужение отображений T на множество A;
$\operatorname*{vraisup}_X f$ — истинный супремум функции f на множестве X;
$x\mapsto T(x)$ — при отображении T точка x переходит в $T(x)$;
$\Gamma_f(E)$ — график функции $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$;
$\mathscr{P}_f(E)$ — подграфик неотрицательной функции f над множеством E;
χ_E — характеристическая функция множества E;
$\Phi'(x)$ — матрица Якоби отображения Φ в точке x;
$\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора или норма функции в $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ или норма в банаховом пространстве;
$\|f\|_p$ — норма функции f в $\mathscr{L}^p(X,\mu)$;
$\|f\|_\infty=\operatorname*{vraisup}_X|f|$;
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве или функций в $\mathscr{L}^2(X,\mu)$.

Меры

$(X,\mathfrak{A},\mu)$ — пространство с мерой;
$(X,\mathfrak{A})$ — измеримое пространство;
α_m — объём (мера Лебега) единичного шара в $\mathbb{R}^m$;
λ_m — m-мерная мера Лебега;
$\mu\times\nu$ — произведение мер μ и ν;
σ_k — k-мерная площадь.

Множества функций

$C(X)$ — множество функций, непрерывных на топологическом пространстве X;
$C_0(X)$ — множество финитных функций, непрерывных на локально компактном топологическом пространстве X;
$C^r(\mathcal{O})$ ($C^r(\mathcal{O};\mathbb{R}^n)$) — множество r раз ($r = 0, 1, \ldots, +\infty$) дифференцируемых функций (отображений со значениями в $\mathbb{R}^n$), определённых на открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^m$;
$C_0^\infty(\mathcal{O})$ — множество бесконечно дифференцируемых финитных функций, определённых на открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^m$;
$\mathscr{L}^0(X, \mu)$ — множество измеримых функций, определённых на X и почти везде конечных относительно меры μ;
$\mathscr{L}^p(X, \mu)$ — множество функций из $\mathscr{L}^0(X, \mu)$, удовлетворяющих условию $\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$;
$\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ — множество функций, каждая из которых ограничена на некотором подмножестве полной меры;
$\mathscr{L}(X, \mu) = \mathscr{L}^1(X, \mu)$ — множество функций, суммируемых на X по мере μ.

Глава I. МЕРА

§ 1. Системы множеств

В классическом анализе в основном рассматриваются функции, зависящие от одного или нескольких числовых переменных. Здесь же мы будем изучать функции, аргумент которых — множество. Основное внимание будет уделено мерам, т. е. функциям множеств, обобщающим понятия длины, площади и объёма. Рассматривая такие обобщения, естественно стремиться к тому, чтобы мера была определена на достаточно "хорошем" классе множеств. Желательно, чтобы он обладал рядом естественных свойств — вместе с любыми двумя множествами содержал бы их объединение, разность и пересечение. Чтобы мера представляла интерес, необходимо также, чтобы её область определения была достаточно богата множествами. Стремясь удовлетворить этим требованиям, мы приходим к понятиям алгебры и σ-алгебры множеств.

Вместо выражения "множество множеств" мы используем как синоним термин "система множеств". Множества, образующие систему, называются её элементами. Фраза "множество входит в данную систему множеств $\mathfrak{A}$" означает, что множество принадлежит $\mathfrak{A}$, т. е. является элементом этой системы. Во избежание двусмысленности в обозначениях, мы, как правило, обозначаем множества прописными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots$, а входящие в них точки — строчными буквами $a, b, \ldots$ Для обозначения систем множеств используются готический и рукописный шрифты. Символом $\varnothing$ обозначается пустое множество.

1.1. Мы предполагаем, что читатель знаком с основами наивной теории множеств. Поэтому доказательства теоретико-множественных тождеств оставляются, как правило, для самостоятельной проверки. Некоторые из них, особенно часто используемые в дальнейшем, мы для удобства читателя приведём в следующей лемме.

Лемма. *Пусть A, A_ω $(\omega \in \Omega)$ — произвольные подмножества множества X. Тогда*

$$1) \qquad X \setminus \bigcup_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcap_{\omega\in\Omega} (X \setminus A_\omega);$$

$$2) \qquad X \setminus \bigcap_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcup_{\omega\in\Omega} (X \setminus A_\omega);$$

$$3) \qquad A \cap \bigcup_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcup_{\omega\in\Omega} (A \cap A_\omega).$$

Равенства 1) и 2) называются формулами двойственности. Равенство 3) выражает свойство дистрибутивности, связывающее действия объединения и пересечения. Сопоставляя объединению сложение, а пересечению — умножение, читатель без труда заметит аналогию между этим свойством и обычным свойством дистрибутивности, справедливым для чисел.

Рассматривая объединения и пересечения семейства множеств со счётным множеством индексов Ω, мы, как правило, будем считать индексы натуральными числами. Это не умаляет общности получаемых результатов, поскольку при любой "нумерации" Ω (т. е. при любой биекции $n \mapsto \omega_n$ натурального ряда на Ω) справедливы равенства

$$\bigcup_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\omega_n}, \qquad \bigcap_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\omega_n},$$

вытекающие непосредственно из определения объединения и пересечения.

В дальнейшем нам часто придётся иметь дело с представлением множества в виде объединения попарно не пересекающихся подмножеств. В связи с этим полезно следующее

Определение. Семейство множеств $\{E_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется *разбиением* множества E, если E_ω попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{\omega\in\Omega} E_\omega = E$.

Мы не исключаем, что некоторые элементы разбиения могут совпадать с пустым множеством.

Объединение непересекающихся множеств будем называть *дизъюнктным объединением* и обозначать символом $\vee$. Таким образом, символ $A \vee B$ обозначает объединение $A \cup B$ в случае, когда $A \cap B = \varnothing$. Соответственно символ $\bigvee\limits_{\omega\in\Omega} E_\omega$ обозначает объединение семейства множеств E_ω в случае, когда все они попарно не пересекаются.

Мы всегда будем предполагать, что рассматриваемая система множеств состоит из подмножеств фиксированного непустого множества, которое будем называть основным. Дополнение множества A относительно основного множества X, т. е. разность $X \setminus A$, обозначается символом A^c.

Определение. Система множеств называется *симметричной*, если каждое множество входит в неё одновременно со своим дополнением.

Рассмотрим следующие четыре свойства системы множеств $\mathfrak{A}$:

(σ_0) объединение любых двух множеств из $\mathfrak{A}$ снова входит в $\mathfrak{A}$;
(δ_0) пересечение любых двух множеств из $\mathfrak{A}$ снова входит в $\mathfrak{A}$;
(σ) объединение любой последовательности множеств, входящих в $\mathfrak{A}$, снова входит в $\mathfrak{A}$;
(δ) пересечение любой последовательности множеств, входящих в $\mathfrak{A}$, снова входит в $\mathfrak{A}$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Если $\mathfrak{A}$ симметричная система множеств, то (σ_0) равносильно (δ_0), а (σ) равносильно (δ).*

Доказательство немедленно следует из формул двойственности. Докажем, например, что $(\delta) \Rightarrow (\sigma)$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ множеств, содержащихся в $\mathfrak{A}$. Их объединение можно записать в виде

$$\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \Big(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n^c\Big)^c.$$

Так как $A_n^c \in \mathfrak{A}$ для всех n (силу симметричности системы $\mathfrak{A}$), то по свойству (δ) пересечение этих дополнений также принадлежит $\mathfrak{A}$. Остаётся ещё раз воспользоваться симметричностью системы $\mathfrak{A}$ — она содержит и дополнение этого пересечения, т. е. объединение исходных множеств.

Остальные импликации читатель без труда установит самостоятельно. ▶

1.2. Введём теперь важнейшие для нас системы множеств.

Определение. Непустая симметричная система множеств $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй*, если она обладает (равносильными) свойствами (σ_0) и (δ_0). Алгебра называется *σ-алгеброй* (сигма-алгеброй), если она обладает (равносильными) свойствами (σ) и (δ).

Отметим три свойства алгебры $\mathfrak{A}$.

1) $\varnothing, X \in \mathfrak{A}$. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{A}$. Тогда $\varnothing = A \cap A^c \in \mathfrak{A}$ и $X = A \cup A^c \in \mathfrak{A}$ непосредственно по определению алгебры. ▶

2) Вместе с любыми двумя множествами A, B алгебра $\mathfrak{A}$ содержит и их разность $A \setminus B$. Это следует из тождества $A \setminus B = A \cap B^c$ и определения алгебры. ▶

3) Если множества $A_1, \ldots, A_n$ входят в $\mathfrak{A}$, то их объединение и пересечение также входят в $\mathfrak{A}$. Это свойство доказывается с помощью индукции. ▶

Примеры. 1) Система, состоящая из всевозможных ограниченных подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$ и их дополнений, очевидно, является алгеброй (но не σ-алгеброй!).

2) Система, состоящая только из двух множеств — X и $\varnothing$ — является, очевидно, алгеброй и σ-алгеброй. Эту алгебру часто называют тривиальной.

3) Другой крайний случай (по сравнению с тривиальной алгеброй) — система всех подмножеств множества X. Очевидно, она является σ-алгеброй.

4) Если $\mathfrak{A}$ алгебра (σ-алгебра) подмножеств множества X и $Y \subset X$, то система множеств $\{A \cap Y \mid A \in \mathfrak{A}\}$ является алгеброй (соответственно σ-алгеброй) подмножеств Y. Мы будем называть её *индуцированной алгеброй* (на Y) и обозначать символом $\mathfrak{A} \cap Y$.

Вообще, если $\mathcal{E}$ — произвольная система подмножеств множества X, $Y \subset X$, то система $\{E \cap Y \mid E \in \mathcal{E}\}$ называется системой индуцированной на Y и обозначается символом $\mathcal{E} \cap Y$. Часть системы $\mathcal{E} \cap Y$, состоящая из множеств, входящих в $\mathcal{E}$ и содержащихся в Y, обозначается символом $\mathcal{E}_Y$. Заметим, что если $\mathcal{E}$ алгебра, то $\mathcal{E}_Y$ алгебра тогда и только тогда, когда $Y \in \mathcal{E}$.

Предложение. *Пусть $\{\mathfrak{A}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ — произвольное семейство алгебр (σ-алгебр), состоящих из подмножеств некоторого множества. Тогда система $\bigcap\limits_{\omega \in \Omega} \mathfrak{A}_\omega$ снова есть алгебра (σ-алгебра).*

Доказательство предоставляется читателю. ▶

Наряду с алгебрами иногда оказывается удобным рассматривать близкие системы множеств, отказавшись от требования симметричности. Система множеств называется *кольцом*, если она вместе с множествами A, B содержит и множества $A \cup B, A \cap B$ и $A \setminus B$. Кольцо, содержащее вместе с последовательностью множеств их объединение, называется σ-кольцом.

Очевидно, всякая алгебра (σ-алгебра) является и кольцом (σ-кольцом).

1.3. Всякая система множеств содержится в некоторой σ-алгебре, например в σ-алгебре всех подмножеств основного множества X. Но эта σ-алгебра, как правило, содержит “слишком много” множеств и часто бывает полезно погрузить данную систему множеств в алгебру наиболее экономным образом, т. е. так, чтобы объемлющая алгебра не содержала “лишних” элементов.

Оказывается, любой конечный набор подмножеств $\{A_k\}_{k=1}^n$ множества X можно считать частью алгебры, состоящей из конечного числа элементов. Это очевидно, если рассматриваемые множества образуют разбиение X. Тогда всевозможные конечные объединения этих множеств вместе с пустым множеством (которое в теории множеств считают равным объединению по пустому множеству индексов) образуют алгебру. Если же множества A_k не образуют разбиения, то существует стандартная процедура для построения вспомогательного разбиения, порождающего алгебру, их содержащую. Эта процедура такова: каждому набору $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_k = 0$ или $\varepsilon_k = 1$, сопоставим пересечение $B_\varepsilon = A_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n}$, считая, что $A_k^0 = A_k$ и $A_k^1 = A_k^c$ $(= X \setminus A_k)$. Заметим, что по свойству 3) множества B_ε должны входить в любую алгебру, содержащую $A_1, \ldots, A_n$. Читатель легко убедится, что множества B_ε образуют разбиение множества X, которое мы будем называть *каноническим разбиением,* соответствующим множествам $A_1, \ldots, A_n$. Мы рекомендуем читателю выяснить, что представляют собой множества B_ε в случае, когда исходный набор множеств уже является разбиением X. Ясно, что B_ε либо содержится в A_k (если $\varepsilon_k = 0$), либо не пересекается с ним. Поэтому $A_k = \bigcup\limits_{\varepsilon_k=0} B_\varepsilon$. Всевозможные конечные объединения множеств B_ε (вместе с пустым множеством) образуют алгебру, содержащую все множества A_k. Эта алгебра содержит не более чем 2^{2^n} множеств (см. упр. 6) и (как всякая алгебра, состоящая из конечного числа множеств) является σ-алгеброй. Ясно, что это — наименьшая по запасу элементов σ-алгебра, содержащая все множества A_k.

Описание множеств, образующих минимальную σ-алгебру, содержащую данную бесконечную систему множеств, весьма сложно, и мы не будем рассматривать этот вопрос, ограничившись доказательством существования такой σ-алгебры. Этот важный результат часто будет использоваться в дальнейшем.

Теорема. *Для любой системы подмножеств $\mathcal{E}$ множества X существует наименьшая по запасу элементов σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.*

Она называется *борелевской*) оболочкой* системы $\mathcal{E}$ и обозначается символом $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$. Борелевская оболочка состоит из подмножеств того же основного множества, что и система $\mathcal{E}$.

Доказательство. Очевидно, существует σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$ (например, σ-алгебра всех подмножеств X). Рассмотрим пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{E}$. Эта система множеств содержит $\mathcal{E}$ и является σ-алгеброй по предложению 1.2. Минимальность этой σ-алгебры следует из построения. ▶

Определение. Множества, входящие в минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, называются *борелевскими подмножествами пространства* $\mathbb{R}^m$ или просто борелевскими множествами. σ-алгебра борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$ обозначается символом $\mathfrak{B}^m$.

Замечания. 1) Простейшими борелевскими множествами, наряду с открытыми и замкнутыми, являются счётные пересечения открытых и счётные объединения замкнутых множеств. Они называются множествами типа G_δ и типа F_σ соответственно.

2) Совсем не очевидно, что σ-алгебра $\mathfrak{B}^m$ не совпадает с σ-алгеброй всех подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$, однако это так. Более того, эти σ-алгебры имеют различную

*) Эмиль **Борель** (Borel), 1871–1956, — французский математик.

мощность. Можно доказать, что система $\mathfrak{B}^m$ имеет мощность континуума, т. е. равномощна $\mathbb{R}^m$; мощность же σ-алгебры всех подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$ по теореме Кантора строго больше мощности $\mathbb{R}^m$. Мы не будем останавливаться на доказательствах этих фактов, которые читатель может найти, например, в книгах [Б], [Бу].

1.4. Прежде чем переходить к определению ещё одной системы множеств, установим один вспомогательный результат, который неоднократно будем использовать в дальнейшем.

Лемма (о дизъюнктном представлении). *Пусть $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ — произвольная последовательность множеств. Тогда*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigvee_{n=1}^{\infty}\Bigl(A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\Bigr) \tag{1}$$

(для единообразия мы считаем, что $A_0 = \varnothing$).

Доказательство. Положим $E_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} A_k$. То, что эти множества попарно дизъюнктны, ясно: если, например, $m < n$, то $E_m \subset A_m$, а $E_n \subset A_n \setminus A_m$.

Проверяя равенство (1), возьмём произвольную точку x из объединения $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть m — наименьший из таких номеров n, что $x \in A_n$, т. е. $x \in A_m$ и $x \notin A_k$ при $k < m$. Тогда $x \in E_m \subset \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n$. Таким образом, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Bigl(A_n \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} A_k\Bigr)$. Обратное включение тривиально. ►

Отметим, что любой конечный набор множеств $A_1, \ldots, A_N$ удовлетворяет аналогичному равенству:

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigvee_{n=1}^{N}\Bigl(A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\Bigr). \tag{1'}$$

Доказательство получается почти дословным повторением доказательства леммы (можно также применить её к последовательности множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, в которой $A_n = \varnothing$ при $n > N$).

Вместе с алгебрами и σ-алгебрами нам будет удобно использовать не столь "хорошие", но зато зачастую более обозримые системы множеств — так называемые полукольца.

Определение. Система подмножеств $\mathscr{P}$ называется *полукольцом* при выполнении условий:

I) $\varnothing \in \mathscr{P}$;

II) если A, $B \in \mathscr{P}$, то $A \cap B \in \mathscr{P}$;

III) если A, $B \in \mathscr{P}$, то разность $A \setminus B$ представима в виде конечного объединения попарно не пересекающихся множеств из $\mathscr{P}$, т. е.

$$A \setminus B = \bigvee_{j=1}^{m} Q_j, \quad \text{где} \quad Q_j \in \mathscr{P}.$$

Пример. Система $\mathscr{P}^1$ всевозможных полуоткрытых промежутков вида $[a,b)$, где $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leqslant b$, а также её часть $\mathscr{P}^1_r$, состоящая из промежутков с рациональными концами, суть полукольца.

Проверку этих простых, но важных фактов мы предоставляем читателю.

Всякая алгебра есть полукольцо, но, как видно из приведённых примеров, обратное неверно. Вместе с полукольцом $\mathscr{P}$ системы $\mathscr{P}\cap Y$ и $\mathscr{P}_Y$, очевидно, также являются полукольцами. Полукольцом является и любая система попарно дизъюнктных множеств, содержащая пустое множество.

Объединение и разность элементов полукольца могут не входить в него. Однако они допускают разбиения, состоящие из элементов полукольца. Мы докажем этот результат в несколько более сильной форме.

Теорема. *Пусть $\mathscr{P}$ — полукольцо, P, P_1, ... , $P_n, \ldots\in\mathscr{P}$. Тогда при любом N для множеств $P\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{N}P_n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{N}P_n$ справедливы представления*

$$P\setminus\bigcup_{n=1}^{N}P_n=\bigvee_{j=1}^{m}Q_j,\qquad \text{где}\ \ Q_j\in\mathscr{P}; \tag{2}$$

$$\bigcup_{n=1}^{N}P_n=\bigvee_{n=1}^{N}\bigvee_{j=1}^{m_n}Q_{nj},\quad \text{где}\ \ Q_{nj}\in\mathscr{P}\ \ \text{и}\ \ Q_{nj}\subset P_n. \tag{3}$$

Кроме того,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n=\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigvee_{j=1}^{m_n}Q_{nj},\quad \text{где}\ \ Q_{nj}\in\mathscr{P}\ \ \text{и}\ \ Q_{nj}\subset P_n. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что объединение произвольной (конечной или бесконечной) последовательности множеств P_n, входящих в полукольцо, может быть представлено как конечное или счётное дизъюнктное объединение "более мелких" (т. е. содержащихся в исходных) и попарно не пересекающихся множеств, по-прежнему принадлежащих полукольцу.

При доказательстве равенств (3), (4) мы опираемся на (2) и формулы (1), (1′). ▶

Следствие. *Пусть $\mathscr{P}$ полукольцо подмножеств множества X, $\mathcal{R}$ — система множеств, представимых в виде конечных объединений множеств из $\mathscr{P}$. Тогда объединение, пересечение и разность двух множеств из $\mathcal{R}$ снова входит в $\mathcal{R}$. Если $X\in\mathscr{P}$ (или хотя бы $X\in\mathcal{R}$), то $\mathcal{R}$ алгебра.*

Таким образом, система $\mathcal{R}$ конечных объединений множеств из полукольца $\mathscr{P}$ есть кольцо множеств. Очевидно, $\mathcal{R}$ есть минимальное кольцо, содержащее $\mathscr{P}$.

Замечание. Равенство (3) допускает следующее усиление: объединение P_n можно представить в виде

$$\bigcup_{n=1}^{N}P_n=\bigvee_{k=1}^{K}R_k,\quad \text{где}\ \ R_1,\ldots,R_K\in\mathscr{P},$$

и при любых k, n справедлива альтернатива: либо R_k содержится в P_n, либо их пересечение пусто.

При $N = 2$ для доказательства следует воспользоваться равенством

$$P_1 \cup P_2 = (P_1 \setminus P_2) \vee (P_1 \cap P_2) \vee (P_2 \setminus P_1)$$

и каждую из разностей $P_1 \setminus P_2$, $P_2 \setminus P_1$ представить по определению полукольца в виде дизъюнктного объединения. Общий случай исчерпывается с помощью индукции (обосновывая индукционный переход от N к $N+1$, в проведённом рассуждении следует заменить P_1 на $\bigcup\limits_{n=1}^{N} P_n$).

1.5. Пусть $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ полукольца подмножеств множеств X и Y соответственно. Рассмотрим декартово произведение $X \times Y$ и систему его подмножеств $\mathscr{P} \odot \mathscr{Q}$, состоящую из произведений множеств, входящих в $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$:

$$\mathscr{P} \odot \mathscr{Q} = \{P \times Q \mid P \in \mathscr{P},\ Q \in \mathscr{Q}\}.$$

Мы будем называть эту систему множеств *произведением полуколец* $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$.

Теорема. *Произведение полуколец есть полукольцо.*

Очевидно, система $\mathscr{P} \odot \mathscr{Q}$ удовлетворяет условию I из определения полукольца. Пусть $A = P \times Q$ и $B = P_0 \times Q_0$, где P, $P_0 \in \mathscr{P}$, Q, $Q_0 \in \mathscr{Q}$. Из тождества $A \cap B = (P \cap P_0) \times (Q \cap Q_0)$ следует, что система $\mathscr{P} \odot \mathscr{Q}$ удовлетворяет и условию II.

Проверяя условие III, можно считать, что $B \subset A$, т. е. $P_0 \subset P$ и $Q_0 \subset Q$ (в противном случае следует заменить B на $B \cap A$). Тогда согласно определению полукольца для некоторых $P_1, \ldots, P_m$ из $\mathscr{P}$ и $Q_1, \ldots, Q_n$ из $\mathscr{Q}$ справедливы равенства

$$P = P_0 \vee P_1 \vee \ldots \vee P_m \quad \text{и} \quad Q = Q_0 \vee Q_1 \vee \ldots \vee Q_n.$$

Поэтому всевозможные “прямоугольники” $P_k \times Q_j$, $0 \leqslant k \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant n$, образуют разбиение произведения $A = P \times Q$. Удалив из них $B = P_0 \times Q_0$, мы получим требуемое в условии III разбиение разности $A \setminus B$ множествами из системы $\mathscr{P} \odot \mathscr{Q}$. ►

1.6. Рассмотрим теперь два важнейших примера полуколец, состоящих из подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. Пространство $\mathbb{R}^m$ мы отождествляем с декартовым произведением $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (m сомножителей). Координаты точки x из $\mathbb{R}^m$ обозначаются той же буквой с индексами. Таким образом, $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. В некоторых случаях мы будем также стандартным образом отождествлять это пространство с произведением пространств меньшей размерности: $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ при $1 \leqslant k < m$.

Напомним, что расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x, y \in \mathbb{R}^m$ равно по определению $\Big(\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$. Функция $x \mapsto \Big(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \equiv \|x\|$ называется (евклидовой) *нормой.* Ясно, что $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Величина $\sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}$ называется *диаметром* множества $A \subset \mathbb{R}^m$ и обозначается символом $\operatorname{diam}(A)$.

Системы множеств, которые мы рассмотрим в первую очередь, состоят из прямоугольных параллелепипедов. Как известно, открытым *параллелепипедом* в $\mathbb{R}^m$, построенным на линейно независимых векторах $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ (или натянутым на эти векторы), называется множество (далее $a \in \mathbb{R}^m$)

$$P(a; v_1, \ldots, v_m) = \left\{ a + \sum_{j=1}^{m} t_j\, v_j \;\middle|\; 0 < t_j < 1 \ \text{ при } \ j = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

Заменяя условия $0 < t_j < 1$ условиями $0 \leqslant t_j \leqslant 1$, мы получим замкнутый параллелепипед $\overline{P}(a; v_1, \dots, v_m)$, являющийся, очевидно, замыканием открытого. Всякое множество P, удовлетворяющее включению

$$P(a; v_1, \dots, v_m) \subset P \subset \overline{P}(a; v_1, \dots, v_m),$$

мы также будем называть параллелепипедом.

Векторы v_j называются рёбрами параллелепипеда. Если они попарно ортогональны, параллелепипед называется *прямоугольным.* Векторы вида $a + \sum\limits_{j \in J} v_j$, где J — произвольное подмножество множества $\{1, \dots, m\}$, называют вершинами параллелепипеда, вектор $a + \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} v_j$ — его центром.

Особую роль для нас будут играть прямоугольные параллелепипеды специального вида с рёбрами, параллельными осям координат. Опишем их подробнее.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Будем писать $a \leqslant b$, если $a_j \leqslant b_j$ при всех $j = 1, \dots, m$. Запись $a < b$ означает, что $a_j < b_j$ при всех $j = 1, 2, \dots, m$. При $a \leqslant b$ мы, обобщая понятие одномерного интервала, полагаем

$$(a, b) = \prod_{j=1}^{m} (a_j, b_j) = \bigl\{x = (x_1, \dots, x_m) \,|\, a_j < x_j < b_j \ \text{ при всех } j = 1, \dots, m\bigr\}.$$

Таким образом, при $a < b$ можно сказать, что $(a, b) = P(a; v_1, \dots, v_m)$, где $v_j = (b_j - a_j)e_j$ для $j = 1, \dots, m$. Очевидно, длины рёбер этого параллелепипеда равны $b_1 - a_1, \dots, b_m - a_m$.

Соответствующий замкнутый параллелепипед, который есть не что иное, как $\prod\limits_{j=1}^{m} [a_j, b_j]$, мы будем по аналогии с одномерным случаем обозначать $[a, b]$. К сожалению, ни открытые, ни замкнутые параллелепипеды не образуют полуколец. Поэтому в дальнейшем особый интерес для нас представляют параллелепипеды $[a, b)$ иного вида, которые будем называть *ячейками* (размерности m). По определению

$$[a, b) = \prod_{j=1}^{m} [a_j, b_j) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \,|\, a_j \leqslant x_j < b_j \ \text{ при всех } \ j = 1, \dots, m\}.$$

Если $a_j = b_j$ хотя бы при одном j, то множества (a, b) и $[a, b)$ пусты. Таким образом, (a, b), $[a, b) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $a < b$. Заметим ещё, что декартово произведение ячеек размерностей m и l снова есть ячейка (размерности $m + l$).

Предложение. *Всякая непустая ячейка есть пересечение убывающей последовательности открытых параллелепипедов и объединение возрастающей последовательности замкнутых параллелепипедов.*

Доказательство. Непустую ячейку $[a, b)$ можно представить в виде $[a, a + h)$, где $h = b - a$ — вектор с положительными координатами. Рассмотрим параллелепипеды $I_k = (a - \frac{1}{k}h, b)$ и $S_k = [a, b - \frac{1}{k}h]$. Тогда $[a, b) = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} S_k = \bigcap\limits_{k \geqslant 1} I_k$. Детали мы оставляем читателю. ►

Как вытекает из предложения, всякая ячейка одновременно является и множеством типа G_δ, и множеством типа F_σ. В частности, каждая ячейка есть борелевское множество.

Ячейка, у которой все длины рёбер одинаковы, называется кубической ячейкой. Если все координаты вершин ячейки рациональны, то мы будем называть её ячейкой с рациональными вершинами. Отметим простое, но важное обстоятельство: всякая ячейка с рациональными вершинами есть дизъюнктное объединение конечного числа кубических ячеек.

Действительно, так как координаты вершин ячейки можно представить в виде дробей с общим знаменателем n, то её можно разбить на кубы с длиной рёбер $\frac{1}{n}$.

Систему всевозможных m-мерных ячеек будем обозначать символом $\mathscr{P}^m$, а её часть, состоящую из ячеек с рациональными вершинами, символом $\mathscr{P}_r^m$.

Теорема. *Системы $\mathscr{P}^m$ и $\mathscr{P}_r^m$ суть полукольца.*

Доказательство проведём с помощью индукции по размерности. В одномерном случае утверждение очевидно (см. пример 1.4). Индукционный переход основывается на теореме 1.5 и на том обстоятельстве, что по определению ячеек $\mathscr{P}^m = \mathscr{P}^{m-1} \odot \mathscr{P}^1$ и $\mathscr{P}_r^m = \mathscr{P}_r^{m-1} \odot \mathscr{P}_r^1$. ►

Замечание. В некоторых случаях (см. доказательство теоремы X.5.5) нам будет нужно вместо полукольца $\mathscr{P}_r^m$ рассматривать систему $\mathscr{P}_E^m$, состоящую из всевозможных ячеек, у которых координаты вершин принадлежат фиксированному множеству $E \subset \mathbb{R}$. Как легко убедиться, эта система также является полукольцом.

1.7. Теорема. *Всякое непустое открытое подмножество G пространства $\mathbb{R}^m$ есть объединение счётного семейства попарно не пересекающихся ячеек, содержащихся в G вместе с замыканием. Можно считать, что все эти ячейки имеют рациональные вершины.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in G$ найдём такую ячейку $R_x \in \mathscr{P}_r^m$, что $x \in R_x$, $\overline{R_x} \subset G$. Очевидно, $G = \bigcup_{x \in G} R_x$. Поскольку полукольцо $\mathscr{P}_r^m$ счётно, среди ячеек R_x имеется лишь счётное множество различных. Нумеруя эти ячейки, мы получим последовательность ячеек P_k $(k \in \mathbb{N})$ со свойствами:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = G, \quad \overline{P_k} \subset G \ \text{ при всех } \ k \in \mathbb{N}.$$

Чтобы получить представление G с помощью дизъюнктных ячеек с рациональными вершинами, остаётся воспользоваться представлением (4) теоремы 1.4 о свойствах полукольца. ►

Следствие. $\mathfrak{B}(\mathscr{P}^m) = \mathfrak{B}(\mathscr{P}_r^m) = \mathfrak{B}^m$.

Доказательство. Включения $\mathfrak{B}(\mathscr{P}_r^m) \subset \mathfrak{B}(\mathscr{P}^m) \subset \mathfrak{B}^m$ очевидны. Обратное включение $\mathfrak{B}^m \subset \mathfrak{B}(\mathscr{P}_r^m)$ верно по определению $\mathfrak{B}^m$, так как по доказанной выше теореме σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathscr{P}_r^m)$ содержит все открытые множества. ►

Замечание. Доказательство теоремы остаётся справедливым и для любого полукольца $\mathscr{P}_E^m$ при условии, что множество E всюду плотно. Вместе с теоремой остаётся справедливым и следствие.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что системы всех (одномерных) открытых промежутков и всех замкнутых промежутков не являются полукольцами.

2) Проверьте, что дуги окружности (в том числе вырожденные), угловой размер которых меньше π, образуют полукольцо, а без этого дополнительного ограничения утверждение неверно.

3) Какова борелевская оболочка системы всевозможных полупрямых вида $(-\infty, a)$, где $a \in \mathbb{R}$? Изменится ли ответ на этот вопрос, если рассматриваются только рациональные a? Если рассматриваются не открытые, а замкнутые полупрямые?

4) Симметрической разностью $A\Delta B$ множеств A, B называется множество $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Докажите, что $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Приведите пример симметричной системы множеств, которая вместе с любыми двумя входящими в неё множествами содержит их симметрическую разность, но не является алгеброй. Указание. Считая, что $X = \{a, b, c, d\}$, рассмотрите систему всевозможных подмножеств, состоящих из чётного числа точек.

5) Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра всевозможных подмножеств двухточечного множества. Убедитесь, что полукольцо $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{A}$ не содержит дополнений одноточечных множеств и, следовательно, не является алгеброй.

6) Докажите, что минимальная алгебра, содержащая n множеств, состоит не более чем из 2^{2^n} множеств. Убедитесь, что эта оценка точная.

7) Докажите, что всевозможные подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, которые одновременно являются множествами типа G_δ и типа F_σ, образуют алгебру, содержащую все открытые множества. Убедитесь, что это не σ-алгебра (например, она не содержит $\mathbb{Q}^m$).

8) Уточните теорему 1.7, доказав, что можно ограничиться кубическими ячейками, удовлетворяющими дополнительному условию — диаметр каждой из них существенно меньше расстояния до границы множества:

$$\operatorname{diam}(P) \leqslant C \, \min\bigl\{\|x-y\| \mid x \in P,\, y \in \partial G\bigr\}$$

($C > 0$ — сколь угодно малый наперёд заданный коэффициент).

9) Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — элементы полукольца. Докажите, что все элементы канонического разбиения, соответствующего этому набору множеств, кроме, возможно, множества $\bigcap\limits_{k=1}^{n} P_k^c$, представимы в виде дизъюнктного объединения множеств, входящих в полукольцо. Выведите отсюда результат, полученный в замечании п. 1.4.

10) Симметричная система множеств называется D-системой, если она содержит объединения не более чем счётных семейств входящих в неё попарно дизъюнктных множеств. Пусть D-система $\mathcal{E}$ содержит множества A, B. Докажите, что

а) если $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{E}$;

б) каждое из включений $A \cap B \in \mathcal{E}$, $A \cup B \in \mathcal{E}$, $A \setminus B \in \mathcal{E}$ влечёт остальные.

11) Пусть D-система содержит всевозможные конечные пересечения множеств $A_1, \ldots, A_n$. Докажите, что тогда она содержит и минимальную алгебру, порождённую этими множествами.

12) Система непустых подмножеств множества X называется фильтром (в X), если вместе с каждыми двумя множествами она содержит их пересечение. Например, фильтром является система всех окрестностей данной точки. Фильтр называется

ультрафильтром, если всякий фильтр, его содержащий, с ним совпадает. Примером ультрафильтра может быть система всех множеств, содержащих данную точку (тривиальный ультрафильтр).

Докажите, что фильтр в X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для каждого множества $A \subset X$ справедлива альтернатива: либо A, либо $X \setminus A$ входит в фильтр. Опираясь на лемму Цорна, докажите существование ультрафильтра, содержащего данный фильтр.

§ 2. Объём

В этом параграфе мы приступаем к изучению вопросов, которым главным образом посвящена эта глава. Речь идёт о свойствах так называемых аддитивных функций множества. Утверждение, что та или иная величина аддитивна означает, что её значение, связанное с целым объектом, равно сумме значений, соответствующих его частям, при "любом" разбиении объекта на части. Многочисленные примеры аддитивных величин, встречающихся в математике, и их прообразы в механике и физике хорошо известны. К ним относятся, в частности, длина, площадь, вероятность, масса, статический момент относительно фиксированной оси, количество электричества и др. В этой главе мы ограничимся изучением аддитивных величин с неотрицательными числовыми (возможно бесконечными) значениями. К изучению свойств аддитивных величин произвольного знака мы вернёмся в главе XI. Перейдём к более точным формулировкам.

2.1. Пусть X — произвольное множество, $\mathcal{E}$ — некоторая система его подмножеств.

Определение. Заданная на системе $\mathcal{E}$ функция $\varphi\colon \mathcal{E} \to (-\infty, +\infty]$ называется *аддитивной*, если

$$\varphi(A \vee B) = \varphi(A) + \varphi(B) \text{ при условии, что } A,\ B \in \mathcal{E} \text{ и } A \vee B \in \mathcal{E}. \tag{1}$$

Функция φ называется *конечно-аддитивной,* если для любого множества A из $\mathcal{E}$ и любого его конечного разбиения на множества $A_1, \ldots, A_n$ из $\mathcal{E}$ справедливо равенство

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k). \tag{1$'$}$$

Суммы в правых частях равенств (1) и (1$'$) всегда имеют смысл, так как входящие в них слагаемые не могут принимать бесконечные значения противоположных знаков (по определению $\varphi > -\infty$).

Замечание. Если функция φ задана на алгебре (или кольце) $\mathfrak{A}$, то из её аддитивности вытекает и конечная аддитивность. Это можно доказать с помощью равенства (1) по индукции.

2.2. Определение. Конечно аддитивная функция μ, заданная на полукольце подмножеств множества X, называется *объёмом* (в X), если она неотрицательна и $\mu(\varnothing) = 0$.

Согласно определению аддитивной функции объём может принимать и бесконечные значения. Он называется *конечным,* если X входит в полукольцо и $\mu(X) < +\infty$.

Объём называется *σ-конечным*, если X представимо в виде объединения последовательности множеств, объёмы которых конечны.

Примеры. 1) Длина промежутка на полукольце $\mathscr{P}^1$ есть объём.

Мы предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно.

2) Наряду с длиной важнейшим примером объёма является её обобщение — *классический объём* λ_m, который определяется на полукольце m-мерных ячеек $\mathscr{P}^m$ следующим образом:

$$\text{если} \quad P = \prod_{k=1}^{m} [a_k, b_k), \quad \text{то} \quad \lambda_m(P) = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k).$$

Очевидно, что при $m = 1$ классический объём совпадает с длиной промежутка, при $m = 2$ — с площадью прямоугольника, а при $m = 3$ с обычным объёмом параллелепипеда. Аддитивность классического объёма будет доказана в следствии 2.4.

3) Пусть g — неубывающая функция, заданная на $\mathbb{R}$. Определим на полукольце $\mathscr{P}^1$ функцию промежутка ν_g следующим образом: $\nu_g\big([a,b)\big) = g(b) - g(a)$. Функция ν_g есть объём, что мы предоставляем проверить читателю.

4) Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра подмножеств множества X, $x_0 \in X$, $a \in$ $\in [0, +\infty]$. Для $A \in \mathfrak{A}$ положим

$$\mu(A) = \begin{cases} a, & \text{если} \ \ x_0 \in A, \\ 0, & \text{если} \ \ x_0 \notin A. \end{cases}$$

Как легко убедиться, μ есть объём. Мы будем говорить, что он порождается нагрузкой a в точке x_0.

Вообще, если объём одноточечного множества $\{x_0\}$ равен $a > 0$, то мы будем говорить, что в точке x_0 он имеет нагрузку a.

Чтобы получить обобщение последнего примера, используем понятие суммы числового семейства. Семейство неотрицательных чисел будем для краткости называть положительным. Напомним, что символ $\operatorname{card}(E)$ обозначает мощность множества E.

Определение. Суммой положительного семейства $\{\omega_x\}_{x\in X}$ называется величина

$$\sup\left\{ \sum_{x\in E} \omega_x \;\middle|\; E \subset X,\ \operatorname{card}(E) < +\infty \right\},$$

которая обозначается символом $\sum\limits_{x\in X} \omega_x$.

Семейство $\{\omega_x\}_{x\in X}$ чисел произвольного знака называется *суммируемым*, если $\sum\limits_{x\in X} |\omega_x| < +\infty$. В этом случае *суммой* этого семейства называется величина

$$\sum_{x\in X} \omega_x = \sum_{x\in X} \omega_x^+ - \sum_{x\in X} \omega_x^-, \quad \text{где} \ \ \omega_x^{\pm} = \max\{\pm\omega_x, 0\}.$$

Для суммируемого семейства множество $\{x \in X \mid \omega_x \neq 0\}$ не более чем счётно. В самом деле, оно исчерпывается множествами $X_n = \{x \in X \mid |\omega_x| \geqslant \frac{1}{n}\}$ $(n \in \mathbb{N})$, каждое из которых конечно, так как

$$\operatorname{card}(X_n) \leqslant n \sum_{x\in X_n} |\omega_x| \leqslant n \sum_{x\in X} |\omega_x| < +\infty.$$

Поскольку, очевидно, для любого положительного семейства

$$\sum_{x\in X}\omega_x=\sum_{\{x\in X\,|\,\omega_x>0\}}\omega_x,$$

полученный результат позволяет свести вычисление суммы произвольного суммируемого семейства к сумме семейства со счётным множеством индексов. Последняя же может быть сведена к вычислению суммы ряда.

Если множество X счётно, то биекцию $\varphi\colon \mathbb{N}\to X$ мы будем называть нумерацией X и обозначать символом $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, где $x_n=\varphi(n)$.

Лемма. *Пусть* $\{\omega_x\}_{x\in X}$ *— произвольное положительное семейство. Если множество* X *счётно, то для его произвольной нумерации* $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ *справедливо равенство*

$$\sum_{x\in X}\omega_x=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{x_n}.$$

Доказательство. Обозначим S_1 и S_2 левую и правую части доказываемого равенства. С одной стороны, для любого конечного множества $E\subset X$ справедливо неравенство $\sum\limits_{x\in E}\omega_x\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega_{x_n}$ (ведь при каждом $x\in E$ число ω_x является членом ряда). Поэтому $S_1\leqslant S_2$.

С другой стороны, при любом k неравенство $\sum\limits_{n=1}^{k}\omega_{x_n}\leqslant S_1$ справедливо по определению суммы семейства, и поэтому $S_2\leqslant S_1$. С учётом того, что $S_1\leqslant S_2$, это завершает доказательство. ▶

Мы предоставляем читателю убедиться, что доказанное равенство справедливо для суммы любого суммируемого семейства со счётным множеством индексов.

Рассмотрим теперь следующий пример.

5) Пусть $\{\omega_x\}_{x\in X}$ — произвольное положительное семейство. Считая, что $\mathfrak{A}$ — алгебра подмножеств множества X, содержащая все одноточечные множества, определим на $\mathfrak{A}$ функцию μ следующим образом:

$$\mu(A)=\sum_{x\in A}\omega_x\qquad(A\in\mathfrak{A})$$

(по определению мы считаем, что $\sum\limits_{x\in\varnothing}\omega_x=0$). Отметим, что так как $\mu(E)=\omega_{x_1}+\ldots+\omega_{x_N}$ для всякого конечного множества $E=\{x_1,\ldots,x_N\}$, то

$$\mu(A)=\sup\{\mu(E)\,|\,E\subset A,\ \operatorname{card}(E)<+\infty\}.$$

В аддитивности μ читатель легко убедится самостоятельно.

6) Пример объёма, заданного на алгебре ограниченных множеств и их дополнений (см. п. 1.2, пример 1), можно получить следующим образом. Для $a > 0$ положим

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{если множество } A \text{ ограничено,} \\ a, & \text{если множество } A \text{ неограничено.} \end{cases}$$

Этот объём будет полезен нам в дальнейшем при построении контрпримеров.

2.3. Теорема. *Пусть μ — объём на полукольце $\mathscr{P}$, и пусть $P, P', P_1, \ldots, P_n \in \mathscr{P}$. Тогда*

1) если $P' \subset P$, то $\mu(P') \leqslant \mu(P)$;

2) если $\bigvee\limits_{k=1}^{n} P_k \subset P$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k) \leqslant \mu(P)$;

3) если $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, то $\mu(P) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k)$.

Свойства 1) и 2) называются *монотонностью* и *усиленной монотонностью объёма*; свойство 3) называется *полуаддитивностью объёма.*

Доказательство. Очевидно, что монотонность объёма следует из усиленной монотонности, которую мы и докажем.

По теореме о свойствах полукольца разность $P \setminus \bigvee\limits_{k=1}^{n} P_k$ представима в виде $P \setminus \bigvee\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigvee\limits_{j=1}^{m} Q_j$, где $Q_j \in \mathscr{P}$. Следовательно, $P = \left(\bigvee\limits_{k=1}^{n} P_k\right) \vee \left(\bigvee\limits_{j=1}^{m} Q_j\right)$, и в силу аддитивности объёма

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) + \sum_{j=1}^{m} \mu(Q_j) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k).$$

Для доказательства полуаддитивности объёма положим $P'_k = P \cap P_k$. Тогда $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k$, $P'_k \in \mathscr{P}$. По теореме о свойствах полукольца мы получаем, что

$$P = \bigvee_{k=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_k} Q_{kj},$$

где $Q_{kj} \in \mathscr{P}$ и $Q_{kj} \subset P'_k \subset P_k$ при $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m_k$. Из усиленной монотонности объёма вытекает, что $\sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu(Q_{kj}) \leqslant \mu(P_k)$. Следовательно,

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \mu(Q_{kj}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k). \quad \blacktriangleright$$

Отметим, что если объём задан на алгебре (или на кольце) $\mathfrak{A}$, то $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ при условии, что $A, B \in \mathfrak{A}$, $B \subset A$ и $\mu(B) < +\infty$. Действительно, так как $A \setminus B \in \mathfrak{A}$, то $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$.

Замечание. Объём μ, определённый на полукольце $\mathscr{P}$, единственным образом продолжается на кольцо $\mathcal{R}$, состоящее из конечных объединений множеств, входящих в $\mathscr{P}$. В самом деле, пусть $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, где $P_k \in \mathscr{P}$. Не умаляя общности, мы можем считать множества P_k попарно не пересекающимися (см. теорему 1.4). Положим $\widetilde{\mu}(E) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k)$. Мы предоставляем читателю доказать, что это определение корректно и что $\widetilde{\mu}$ есть объём, совпадающий с μ на $\mathscr{P}$.

2.4. Убедимся теперь, что классический объём действительно является объёмом в смысле нашего определения. Поскольку $\mathscr{P}^m = \mathscr{P}^1 \odot \mathscr{P}^{m-1}$, этот факт вытекает из следующей общей теоремы, в которой мы пользуемся понятием произведения произвольных полуколец (см. п. 1.5).

Теорема. *Пусть X, Y — непустые множества, а $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ — полукольца их подмножеств, на которых заданы объёмы μ и ν соответственно. Определим на полукольце $\mathscr{P} \odot \mathscr{Q}$ функцию λ равенством*

$$\lambda(P \times Q) = \mu(P) \cdot \nu(Q) \quad \textit{для любых } P \in \mathscr{P}, Q \in \mathscr{Q}$$

(произведения $0 \cdot (+\infty)$ и $(+\infty) \cdot 0$ считаем равными нулю).

Тогда λ — объём на $\mathscr{P} \odot \mathscr{Q}$.

Объём λ называется *произведением объёмов* μ и ν.

Доказательство. Нужно проверить лишь конечную аддитивность функции λ. Сначала рассмотрим разбиение множества $P \times Q$ специального вида. Пусть множества P и Q разбиты на части:

$$P = P_1 \vee \ldots \vee P_I, \qquad Q = Q_1 \vee \ldots \vee Q_J \qquad (P_i \in \mathscr{P},\ Q_j \in \mathscr{Q}).$$

Тогда множества $P_i \times Q_j$ $(1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J)$ принадлежат полукольцу $\mathscr{P} \odot \mathscr{Q}$ и образуют разбиение множества $P \times Q$, которое мы будем называть сеточным разбиением. Для него требуемое равенство очевидно:

$$\lambda(P \times Q) = \mu(P)\nu(Q) = \sum_{i=1}^{I} \mu(P_i) \sum_{j=1}^{J} \nu(Q_j) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant I \\ 1 \leqslant j \leqslant J}} \lambda\big(P_i \times Q_j\big).$$

Рассмотрим теперь произвольное разбиение множества $P \times Q$ элементами полукольца $\mathscr{P} \odot \mathscr{Q}$:

$$P \times Q = (P_1 \times Q_1) \vee \ldots \vee (P_N \times Q_N) \quad (P_n \in \mathscr{P}, Q_n \in \mathscr{Q}).$$

Вообще говоря, оно не является сеточным, но мы измельчим его, чтобы свести дело к такому разбиению. Ясно, что $P = P_1 \cup \ldots \cup P_N$ и $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$, причём множества $P_1, \ldots, P_N$ и соответственно $Q_1, \ldots, Q_n$ могут не быть дизъюнктными. Однако, как мы отмечали в § 1 (см. замечание п. 1.4), существуют такие разбиения

$$P = A_1 \vee \ldots \vee A_I \quad (A_i \in \mathscr{P}) \quad \text{ и } \quad Q = B_1 \vee \ldots \vee B_J \quad (B_j \in \mathscr{Q}),$$

что

$$\text{для всех } i,n \quad \text{либо } A_i \subset P_n, \quad \text{либо } A_i \cap P_n = \varnothing;$$
$$\text{для всех } j,n \quad \text{либо } B_j \subset Q_n, \quad \text{либо } B_j \cap Q_n = \varnothing.$$

Так как множества $A_i \times B_j$ образуют сеточное разбиение произведения $P \times Q$, то

$$\lambda(P \times Q) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant I \\ 1 \leqslant j \leqslant J}} \lambda(A_i \times B_j). \tag{2}$$

Вместе с тем ясно, что для любого n семейства $\{A_i \mid A_i \subset P_n\}$ и $\{B_j \mid B_j \subset Q_n\}$ — разбиения множеств P_n и Q_n соответственно. Поэтому $\{A_i \times B_j \mid A_i \subset P_n,\ B_j \subset Q_n\}$ — сеточное разбиение произведения $P_n \times Q_n$. Следовательно,

$$\lambda(P_n \times Q_n) = \sum_{\substack{i:\ A_i \subset P_n \\ j:\ B_j \subset Q_n}} \lambda(A_i \times B_j).$$

Перегруппировав слагаемые в правой части (2), мы получим отсюда требуемое равенство:

$$\lambda(P \times Q) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant I \\ 1 \leqslant j \leqslant J}} \lambda(A_i \times B_j) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \sum_{\substack{i:\ A_i \subset P_n \\ j:\ B_j \subset Q_n}} \lambda(A_i \times B_j) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \lambda(P_n \times Q_n). \ \blacktriangleright$$

Следствие. *Классический объём λ_m является объёмом в смысле определения 2.2.*

Доказательство основано на индукции по размерности. Одномерный случай мы предоставляем разобрать читателю самостоятельно. После этого аддитивность λ_m непосредственно вытекает из теоремы, поскольку $\mathscr{P}^m = \mathscr{P}^1 \odot \mathscr{P}^{m-1}$, а λ_m есть произведение объёмов λ_1 и λ_{m-1}. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

В задачах 1–3 μ — конечный объём, определённый на алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X.

1) Докажите, что для любых множеств из $\mathfrak{A}$ справедливы равенства

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B);$$
$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(B \cap C) - \mu(A \cap C) + \mu(A \cap B \cap C).$$

Обобщите эти равенства на случай четырёх и более множеств.

2) Пусть $\mu(X) = 1$ и пусть $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$. Докажите, что если $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) > n - 1$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \neq \varnothing$.

3) Докажите, что всякое разбиение множества X на подмножества положительного объёма не более чем счётно.

§ 3. Свойства меры

В определении объёма центральным является свойство конечной аддитивности, т. е. утверждение “объём целого есть сумма объёмов частей” при условии, что этих “частей” конечное число. Как мы увидим ниже, это правило может нарушаться, если “части” образуют бесконечную последовательность. Конечно, бесконечные разбиения возникают только как идеализация реальных ситуаций, и поэтому затруднительно представить какое-либо естественно-научное обоснование необходимости рассматривать объёмы с таким усиленным свойством аддитивности, которое называют счётной аддитивностью.

Вместе с тем, нарушение правила “объём целого есть сумма объёмов частей”, когда частей счётное множество, интуитивно представляется чем-то достаточно неестественным, если, например, иметь в виду длину или площадь. Именно наличие счётной аддитивности позволяет развить глубокую теорию, смыкающуюся с теорией интегрирования. Этот и следующий параграфы посвящены теории счётно-аддитивных объёмов, которую принято называть теорией меры. Она имеет многочисленные важные приложения. В связи с ними в первую очередь следует указать на то, что теория меры лежит в основе современного обоснования теории вероятностей. Перейдём к точным определениям.

3.1. Определение. Объём μ, заданный на полукольце $\mathscr{P}$, называется *счётно-аддитивным*, если для любого множества P из $\mathscr{P}$ и любого его разбиения $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящего из входящих в $\mathscr{P}$ множеств, справедливо равенство

$$\mu(P) = \sum_{k \geqslant 1} \mu(P_k).$$

Счётно-аддитивный объём называется *мерой.*

Используя понятие суммы семейства и лемму 2.2, определение счётной аддитивности можно сформулировать в эквивалентном, но формально более общем виде: объём μ, заданный на полукольце $\mathscr{P}$, счётно аддитивен, если для любого множества P из $\mathscr{P}$ и любого его счётного разбиения $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, состоящего из входящих в $\mathscr{P}$ множеств, справедливо равенство

$$\mu(P) = \sum_{\omega\in\Omega} \mu(P_\omega).$$

Счётная аддитивность не следует из конечной аддитивности, и поэтому не всякий объём есть мера. В частности, объём из примера 6 п. 2.2 не является мерой, в чём читатель легко убедится самостоятельно.

Примеры. 1) Классический объём есть мера (см. теорему II.1.1).

2) Рассмотрим объём $\nu_g\big([a,b)\big) = g(b) - g(a)$, определённый в примере 3 п. 2.2. Его счётная аддитивность означает, в частности, что если $[b_0,b) = \bigvee\limits_{n=0}^{\infty} [b_n, b_{n+1})$, где $b_n \to b$, $b_n < b_{n+1}$, то $\nu_g\big([b_0,b)\big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \nu_g([b_n,b_{n+1}))$. Так как $\nu\big([b_n,b_{n+1})\big) = g(b_{n+1}) - g(b_n)$, то это равносильно тому, что $g(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(b)$.

Таким образом, для счётной аддитивности ν_g необходимо, чтобы функция g была непрерывна слева.

Меру с помощью произвольной возрастающей функции g можно получить, положив $\mu_g\big([a,b)\big) = g(b-0) - g(a-0)$, где $g(a-0)$, $g(b-0)$ — пределы g в точках a и b слева. Мы докажем счётную аддитивность μ_g в теореме IV.10.2. Из неё, в частности, вытекает, что непрерывность слева функции g не только необходимое, но и достаточное условие того, что объём ν_g есть мера.

3) Объём, порождённый положительной нагрузкой в некоторой точке (см. пример 4 п. 2.2), есть мера.

4) Пусть X — произвольное множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра его подмножеств, содержащая все одноточечные множества. Определим на $\mathfrak{A}$ функцию μ следующим образом:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{число точек множества } A, & \text{если множество } A \text{ конечно;} \\ +\infty, & \text{если множество } A \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Мы предоставляем читателю убедиться, что так определенная функция μ действительно является мерой. Она называется *считающей мерой.*

5) Убедимся, что объём μ, построенный в примере 5) п. 2.2, счётно аддитивен, т. е. что μ — мера.

Действительно, пусть $A = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k$, где A, $A_k \in \mathfrak{A}$. Ясно, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(A) \geqslant \mu\Big(\bigvee_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k),$$

и поэтому $\mu(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. С другой стороны, если E — произвольное конечное подмножество A, то при некотором n справедливо включение $E \subset \bigvee_{k=1}^{n} A_k$. Следовательно,

$$\mu(E) \leqslant \mu\Big(\bigvee_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Отсюда вытекает, что

$$\mu(A) = \sup\{\mu(E) \,|\, E \subset A,\ \operatorname{card}(E) < +\infty\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Вместе с полученным ранее обратным неравенством это доказывает счётную аддитивность μ.

Будем говорить, что μ есть *дискретная мера*, порождённая нагрузками ω_x. Если $\omega_x \equiv 1$, то очевидно, μ — считающая мера.

3.2. Установим несколько важных свойств, характеризующих меры.

Теорема. *Определённый на полукольце $\mathscr{P}$ объём μ есть мера тогда и только тогда, когда он счётно полуаддитивен, т. е. когда*

$$\text{из условий } P \subset \bigcup_{k \geqslant 1} P_k,\ P, P_k \in \mathscr{P}, \quad \text{следует, что } \mu(P) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mu(P_k). \tag{1}$$

Доказательство[*]. Пусть объём μ счётно аддитивен. Заменяя множества P_k в условии (1) множествами $P'_k = P \cap P_k$, мы получаем, что

$$P = \bigcup_{k\geqslant 1} P'_k, \quad P'_k \in \mathscr{P} \ \ (k \in \mathbb{N}).$$

По теореме 1.4 P представимо в виде

$$P = \bigvee_{k\geqslant 1} \bigvee_{j=1}^{n_k} Q_{kj} \qquad (Q_{kj} \in \mathscr{P}).$$

Кроме того, $\bigvee\limits_{j=1}^{n_k} Q_{kj} \subset P'_k$. Поэтому ввиду усиленной монотонности объёма $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \mu(Q_{kj}) \leqslant \mu(P'_k) \leqslant \mu(P_k)$. Пользуясь счётной аддитивностью, мы получаем

$$\mu(P) = \sum_{k\geqslant 1} \sum_{j=1}^{n_k} \mu(Q_{kj}) \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \mu(P_k),$$

что и требовалось.

Докажем теперь, что счётная полуаддитивность влечёт счётную аддитивность объёма. Пусть $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}$ — разбиение множества P из $\mathscr{P}$. В силу счётной полуаддитивности мы имеем

$$\mu(P) \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \mu(P_k). \tag{2}$$

С другой стороны, из усиленной монотонности объёма вытекает, что $\mu(P) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что $\mu(P) \geqslant \sum\limits_{k\geqslant 1} \mu(P_k)$. Вместе с (2) это доказывает счётную аддитивность. ►

Из доказанной теоремы вытекает утверждение, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Следствие. *Пусть мера μ определена на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда счётное объединение множеств нулевой меры снова имеет меру нуль.*

Действительно, если множества e_n из $\mathfrak{A}$ имеют нулевые меры, то их объединение также принадлежит $\mathfrak{A}$ и $\mu\Big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1} e_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} \mu(e_n) = 0$. ►

3.3. Теорема. *Определённый на алгебре $\mathfrak{A}$ объём μ есть мера тогда и только тогда, когда он непрерывен снизу, т. е. когда*

$$\text{из условий } A, A_k \in \mathfrak{A},\ A_k \subset A_{k+1},\ A = \bigcup_{k\geqslant 1} A_k,\ \text{ следует, что } \mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A). \tag{3}$$

[*] Полезно сравнить это рассуждение с доказательством теоремы 2.3.

Замечание. Если алгебра $\mathfrak{A}$ в теореме есть σ-алгебра, то предположение $A \in \mathfrak{A}$ в условии непрерывности снизу может быть опущено, так как оно вытекает из равенства $A = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} A_k$.

Доказательство теоремы. Пусть объём μ счётно аддитивен и множества A, A_k удовлетворяют условиям (3). Положив $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ при $k > 1$, мы получим, что $B_k \in \mathfrak{A}$, $B_k \cap B_j = \varnothing$ при $k \neq j$ $(j, k \in \mathbb{N})$ и

$$A_k = \bigvee_{j=1}^{k} B_j, \ A = \bigvee_{j \geqslant 1} B_j.$$

Следовательно, $\mu(A_k) = \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(B_j)$ и

$$\mu(A) = \sum_{j \geqslant 1} \mu(B_j) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

Докажем теперь, что непрерывность снизу влечёт счётную аддитивность объёма. Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ — разбиение множества A из $\mathfrak{A}$. Положим $A_k = \bigvee\limits_{j=1}^{k} E_j$. Тогда

$$A_k \in \mathfrak{A}, \quad A_k \subset A_{k+1}, \quad A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k$$

и $\mu(A_k) = \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(E_j)$. Пользуясь непрерывностью объёма μ снизу, мы получаем

$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j) = \sum_{j \geqslant 1} \mu(E_j). \ \blacktriangleright$$

3.4. Напомним, что объём μ, заданный на полукольце $\mathscr{P}$ подмножеств множества X, называется конечным, если $X \in \mathscr{P}$ и $\mu(X) < +\infty$ (см. определение 2.2).

Теорема. *Пусть μ — конечный объём, определённый на алгебре $\mathfrak{A}$. Следующие утверждения равносильны:*

1) объём μ есть мера;

2) объём μ непрерывен сверху, т. е. из условий

$$A, \ A_k \in \mathfrak{A}, \quad A_k \supset A_{k+1}, \quad \bigcap_{k \geqslant 1} A_k = A \tag{4}$$

следует, что $\mu(A_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \mu(A)$;

3) объём μ непрерывен сверху на пустом множестве, т. е. из условий

$$A_k \in \mathfrak{A}, \quad A_k \supset A_{k+1}, \quad \bigcap_{k \geqslant 1} A_k = \varnothing \tag{4$'$}$$

следует, что $\mu(A_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть множества A_k удовлетворяют условию (4). Положим $B = A_1 \setminus A$, $B_k = A_1 \setminus A_k$. Тогда $B_k \subset B_{k+1}$, $B = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} B_k$. По непрерывности меры снизу мы получаем, что

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(B_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(B) = \mu(A_1) - \mu(A),$$

т. е. $\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) тривиальна.

Докажем, что 3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ — разбиение множества A из $\mathfrak{A}$. Положим $A_k = \bigvee\limits_{j=k+1}^{\infty} E_j$. Тогда $A_k \in \mathfrak{A}$, так как $A_k = A \setminus \bigvee\limits_{j=1}^{k} E_j$, и, очевидно, множества A_k удовлетворяют всем условиям (4$'$). Поэтому $\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Кроме того, $A = A_k \vee \bigvee\limits_{j=1}^{k} E_j$. Таким образом, $\mu(A) = \mu(A_k) + \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(E_j)$, $\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и, следовательно, $\mu(A) = \sum\limits_{j \geqslant 1} \mu(E_j)$, что и требовалось. ►

Следствие. *Всякая мера условно непрерывна сверху. Последнее означает, что из условий A, $A_k \in \mathfrak{A}$, $A_k \supset A_{k+1}$, $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} A_k = A$, $\mu(A_m) < +\infty$ при некотором m, следует, что $\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$.*

Для доказательства достаточно рассмотреть сужение меры μ на индуцированную алгебру $\mathfrak{A} \cap A_m$ (см. пример 4 п. 1.2) и воспользоваться непрерывностью сверху получающейся конечной меры. ►

Замечание 1. Если объём бесконечен, то из условной непрерывности сверху не следует счётная аддитивность (см. упр. 1).

Замечание 2. Если объём задан на полукольце, то теоремы 3.3 и 3.4 верны лишь в части необходимости (см. упр. 2).

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать меры, определённые на σ-алгебрах. Совокупность трёх объектов — множества X, σ-алгебры $\mathfrak{A}$ его подмножеств и меры μ, определённой на $\mathfrak{A}$, обозначается обычно символом $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и называется *пространством с мерой*. Множества, для которых определена мера, т. е. множества, принадлежащие σ-алгебре $\mathfrak{A}$, называются *измеримыми* или, точнее, измеримыми относительно $\mathfrak{A}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что бесконечный объём из примера 6 п. 2.2 ($a = +\infty$) условно непрерывен сверху, но не является мерой.

2) Пусть $X = [0,1) \cap \mathbb{Q}$ и пусть система $\mathscr{P}$ состоит из всевозможных множеств P вида $P \equiv [a,b) \cap \mathbb{Q}$, где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. Положим $\mu(P) = b - a$. Докажите, что $\mathscr{P}$ есть полукольцо, а μ — объём, который непрерывен сверху и снизу, но не является мерой.

3) Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой и пусть измеримые множества E_k таковы, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < +\infty$. Рассмотрим множества

$$A_n = \{x \in X \mid x \in E_k \ \text{ в точности при } n \text{ значениях } \ k\},$$

$$B_n = \{x \in X \mid x \in E_k \ \text{ не менее чем при } n \text{ значениях } \ k\}.$$