Автор: Анна Смелова

Решение домашнего задания к уроку “Интеграл. Ряды”

In [1]:
```
import numpy as np
import sympy as sym
from matplotlib import pyplot as plt
import math
import warnings

warnings.filterwarnings('ignore')
sym.init_session()
%matplotlib inline
```

```
IPython console for SymPy 1.6.1 (Python 3.7.3-64-bit) (ground types: python)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at https://docs.sympy.org/1.6.1/
```

Тема "Ряды"

1. Задание

Исследовать ряд на сходимость, используя признак д’Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

Теория:
Признак Даламбера
Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами. Тогда справедливы следующие свойства:

- Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться. В этом случае для установления сходимости нужно использовать другие признаки.

Решение:
$a_n = \frac{n^n}{(n!)^2} > 0$

$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{(n!)^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^n}{(n!)^2(n+1)} = \frac{(n+1)^{n-1}}{(n!)^2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n-1}(n!)^2}{(n!)^2 n^n} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n(n+1)} = \frac{1}{n+1}(1 + \frac{1}{n})^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}(1 + \frac{1}{n})^n = 0 < 1$
$\Rightarrow sup(\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|) < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ **сходится** по признаку д’Аламбера.

In [2]:
```
# численное решение:
sym.Sum((n**n / (sym.factorial(n))**2), (n, 1, oo)).evalf()
```

Out[2]: 3.54812822600731

Ответ: по признаку д'Аламбера ряд сходится.
Численно сходится к 3.54812822600731.

2. Задание

Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Теория:
Радикальный признак Коши
Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами. Согласно признаку Коши:

- Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ остается открытым.

Решение:
$a_n = \frac{n}{2^n} > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{2^n})^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ ряд **сходится** по признаку Коши.

In [3]:
```
# численное решение:
sym.Sum((n / 2**n), (n, 1, oo)).evalf()
```

Out[3]: 2.0

Ответ: по признаку Коши ряд сходится.
Численно сходится к 2.0.

3. Задание

Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$$

Теория:
Признак Лейбница
Для знакочередующихся рядов действует достаточный признак сходимости Лейбница.
Пусть $\{a_n\}$ является числовой последовательностью, такой, что:

1. $a_{n+1} < a_n$ для всех n;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда знакочередующиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходятся.
Абсолютная и условная сходимость
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ также сходится.
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Решение:

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = -\frac{1}{1+\ln 1} + \frac{1}{2+\ln 2} - \frac{1}{3+\ln 3} + \frac{1}{4+\ln 4} - \frac{1}{5+\ln 5} + \ldots \Rightarrow$ ряд является знакочередующимся

$a_n = \frac{1}{n+\ln n} > 0 \forall n \in [1, \infty)$

1. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1 \ln (n+1)}{n+\ln (n)} = \frac{n+\ln (n)+1+\ln \frac{n+1}{n}}{n+\ln (n)} = 1 + \frac{1+\ln (1+\frac{1}{n})}{n+\ln (n)}$
   Т.к. $(1 + \frac{1}{n}) > 1$, то $\ln (1 + \frac{1}{n}) > 0 \forall n \in [1, \infty)$
   Т.к. $n \geq 1$, то $n + \ln (n) > 0 \forall n \in [1, \infty)$
   $\Rightarrow \frac{1+\ln (1+\frac{1}{n})}{n+\ln (n)} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1+\ln (1+\frac{1}{n})}{n+\ln (n)} > 1$
   $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \forall n \in [1, \infty)$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\ln n} = 0$

Следовательно, по признаку сходимости Лейбница, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$ сходится.

Определим характер сходимости: воспользуемся 2 признаком сравнения, в качестве "эталонного" ряда возьмем гармонический ряд
$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{\ln n}{n}) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ сходимость у рядов одинаковая.
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln n}$ тоже расходится.

Значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$ является **условно сходящимся**.

Ответ: по признаку Лейбница ряд сходится условно.

4. Задание

Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

Теория:

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами. Согласно признаку Раабе: $R_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$
Если существует предел: $R = \lim_{n\to\infty} R_n$, то при $R > 1$ ряд сходится, а при $R < 1$ — расходится. Если $R = 1$, то признак Раабе не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда.

Решение:

$a_n = \frac{3^n}{2^n}$
Вообще здесь $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty \neq 0$, т.е. не выполняется необходимое условие сходимости,но проверим еще по признаку Раабе.
$a_n > 0 \forall n \in [1, \infty)$
$R_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n(\frac{3^n 2^{n+1}}{2^n 3^{n+1}} - 1) = n(\frac{2}{3} - 1) = n(-\frac{1}{3}) = -\frac{n}{3}$
$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (-\frac{n}{3}) = -\infty \leq 1 \Rightarrow$ ряд **расходится** по признаку Раабе.

Ответ: по признаку Раабе ряд расходится.

5. Задание

Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x) = \ln (16x^2)$$

Теория:

Ряд Тейлора: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$

Решение:

$f(x) = \ln(16x^2),\ f(1) = \ln(16)$
$f'(x) = \frac{2}{x},\ f'(1) = 2$
$f^{(2)}(x) = -\frac{2}{x^2},\ f^{(2)}(1) = -2$
$f^{(3)}(x) = \frac{4}{x^3},\ f^{(3)}(1) = 4$
$f^{(4)}(x) = -\frac{12}{x^4},\ f^{(4)}(1) = -12$

$f(x) = \ln(16x^2) = \ln(16) + 2(x-1) - \frac{2(x-1)^2}{2!} + \frac{4(x-1)^3}{3!} - \frac{12(x-1)^4}{4!} + \ldots = \ln(2^4) + 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{2} + \frac{2(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{3}\ldots$
$= 4\ln(2) + \frac{2(x-1)^1}{1} - \frac{2(x-1)^2}{2} + \frac{2(x-1)^3}{3} - \frac{2(x-1)^4}{4} + \ldots = 4\ln(2) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(x-1)^n}{n}$

Ответ: $\ln(16x^2) = 4\ln(2) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(x-1)^n}{n}$

6^*. Задание

Дана функция $f(x) = x^2$

a. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x \in [-2; 0]$

b. Построить график функции и ее разложения.

Теория:

Ряд Фурье функции $f(x)$ представляется в виде: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$
где коэффициенты Фурье a_0, a_n и b_n определяются формулами:
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$
Разложение в ряд Фурье непериодических функций в интервале $[a; b]$:
Если функция $f(x)$ определена в интервале $[a, b]$, то ее разложение в ряд Фурье определяется формулой:
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos\frac{(n\pi x)}{L} + b_n \sin\frac{(n\pi x)}{L}\}$, где $L = \frac{b-a}{2}$, а коэффициенты вычисляются следующим образом:
$a_0 = \frac{1}{L}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{a}^{b} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{a}^{b} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

Решение:

$[a; b] = [-2; 0],\ L = \frac{b-a}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$a_0 = \int\limits_{-2}^{0} x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_{-2}^{0} = 0 - \frac{-8}{3} = \frac{8}{3}$

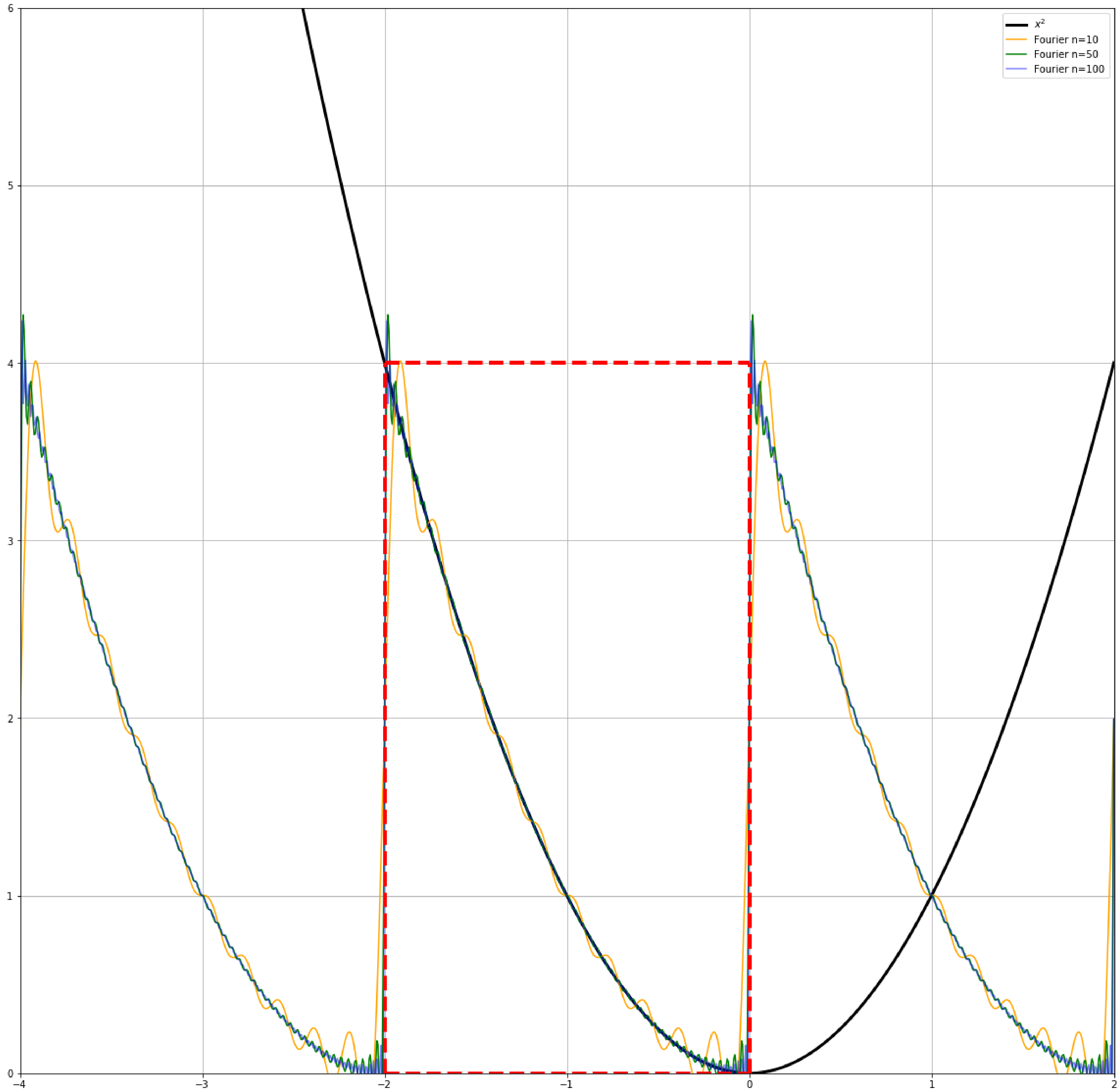
$a_n = \int\limits_{-2}^{0} x^2\cos(\pi nx)dx = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-2}^{0} x^2 d\sin(\pi nx) = \frac{x^2\sin(\pi nx)}{\pi n}|_{-2}^{0} - \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-2}^{0}\sin(\pi nx)2xdx = \frac{2}{\pi^2 n^2}\int\limits_{-2}^{0} xd\cos(\pi nx) = \frac{2x\cos(\pi nx)}{\pi^2 n^2}|_{-2}^{0} - \frac{2}{\pi^2 n^2}\int\limits_{-2}^{0}\cos(\pi nx)dx$
$= 0 - \frac{-4\cos(-2\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi^3 n^3}\sin(\pi nx)|_{-2}^{0} = \frac{4}{\pi^2 n^2}$

$b_n = \int\limits_{-2}^{0} x^2\sin(\pi nx) = \frac{-1}{\pi n}\int\limits_{-2}^{0} x^2 d\cos(\pi nx) = \frac{-x^2\cos(\pi nx)}{\pi n}|_{-2}^{0} + \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-2}^{0}\cos(\pi nx)2xdx = 0 - \frac{-4\cos(-2\pi n)}{\pi n} + \frac{2}{\pi^2 n^2}\int\limits_{-2}^{0} xd\sin(\pi nx) = \frac{4}{\pi n} + \frac{2x\sin(\pi nx)}{\pi^2 n^2}|_{-2}^{0}$
$- \frac{2}{\pi^2 n^2}\int\limits_{-2}^{0}\sin(\pi nx)dx = \frac{4}{\pi n} - \frac{2}{\pi^3 n^3}\cos(\pi nx)|_{-2}^{0} = \frac{4}{\pi n}$

$\Rightarrow f(x) = x^2 = \frac{4}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\{\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(\pi nx) + \frac{4}{\pi n}\sin(\pi nx)\}$

In [4]:
```
def get_sum(x, n):
    result = []
    for el in x:
        res = 4/3
        i = 1
        while i<=n:
            res += (4*math.cos(math.pi*i*el))/(math.pi*i)**2 + (4*math.sin(math.pi*i*el))/(math.pi*i)
            i += 1
        result.append(res)
    return np.array(result)
```

In [5]:
```
x = np.linspace(-4, 2, 1000)
y1 = x**2
y2 = get_sum(x, 10)
y3 = get_sum(x, 50)
y4 = get_sum(x, 100)
plt.figure(figsize=(20,20))
plt.plot(x, y1, label='$x^2$', c='black',linewidth=3)
plt.plot(x, y2, label='Fourier n=10', c='orange')
plt.plot(x, y3, label='Fourier n=50', c='g')
plt.plot(x, y4, label='Fourier n=100', c='b', alpha=0.5)
plt.plot([-2, 0], [0, 0], color='r', linestyle='--', linewidth=4, alpha=1)
plt.plot([0, 0], [0, 4], color='r', linestyle='--', linewidth=4, alpha=1)
plt.plot([-2, 0], [4, 4], color='r', linestyle='--', linewidth=4, alpha=1)
plt.plot([-2, -2], [0, 4], color='r', linestyle='--', linewidth=4, alpha=1)
plt.axis([-4, 2, 0, 6])
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Ответ: $x^2 = \frac{4}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \{ \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x) + \frac{4}{\pi n} \sin(\pi n x) \}$

```
In [ ]:
```

Тема "Понятие об интеграле"

1. Задание

Найти неопределенный интеграл:

$$\int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)dx$$

Решение:
$\int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)dx = \int (2x^2)dx - \int (2x)dx - \int dx + \int \sin x dx - \int \cos x dx + \int \ln x dx + \int e^x dx = 2\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - x - \cos x - \sin x + x\ln x - x + e^x + Const = \frac{2x^3}{3} - x^2 - 2x - \cos x - \sin x + x\ln x + e^x + Const$

Ответ: $\frac{2x^3}{3} - x^2 - 2x - \cos x - \sin x + x\ln x + e^x + Const$

2. Задание

Найти неопределенный интеграл:

$$\int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)dx$$

Решение:
$\int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)dx = \int (2x)dx + \int (6xz^2)dx - \int (5x^2y)dx - \int (3\ln z)dx = 2\frac{x^2}{2} + 6z^2\frac{x^2}{2} - 5y\frac{x^3}{3} - 3\ln zx + C = x^2 + 3x^2z^2 - \frac{5x^3y}{3} - 3x\ln z + C$

Ответ: $x^2 + 3x^2z^2 - \frac{5x^3y}{3} - 3x\ln z + C$

3. Задание

Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^\pi 3x^2 \sin(2x)dx$$

Решение:
$\int\limits_0^\pi 3x^2\sin(2x)dx = \int\limits_0^\pi -3x^2\frac{1}{2}d\cos(2x) = \frac{-3x^2}{2}\cos(2x)|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \frac{3}{2}\cos(2x)dx^2 = \frac{-3\pi^2}{2}\cos(2\pi) + 0 + \int\limits_0^\pi \frac{3}{2}\cos(2x)2dx = -\frac{3\pi^2}{2} + \frac{3}{2}\sin(2x)|_0^\pi = -\frac{3\pi^2}{2}$

Ответ: $-\frac{3\pi^2}{2}$

4. Задание

Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

Решение:

Пусть $y = \sqrt{x+1}$, тогда $dy = d(x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \int 2dy = 2y + Const = 2\sqrt{x+1} + Const$

Ответ: $2\sqrt{x+1} + Const$

In [ ]: