Автор: Анна Смелова

Решение домашнего задания к уроку “Производная функции нескольких переменных”

In [1]:
```
import sympy as sym
import warnings

import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
from pylab import *

warnings.filterwarnings('ignore')
%matplotlib inline

x, y = sym.symbols('x y', real=True)
dx = sym.Symbol('dx')
dy = sym.Symbol('dy')
```

1. Задание

Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{1 - x^3} + \ln{(y^2 - 1)}$$

Решение:

$$dom(z) = \begin{cases} 1 - x^3 \geq 0, \\ y^2 - 1 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+x+1) \leq 0, \\ (y-1)(y+1) > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1) \leq 0, [(x^2+x+1) > 0 \forall x] \\ \left[\begin{array}{l} y < -1, \\ y > 1. \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ \left[\begin{array}{l} y < -1, \\ y > 1. \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty, 1]$, $y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

2. Задание

Найти производные 1-го порядка функции:

$$z = (1 + \frac{\ln x}{\ln y})^3$$

Аналитическое решение:

$$z = (1 + \frac{\ln x}{\ln y})^3 = (\frac{\ln y + \ln x}{\ln y})^3 = (\frac{\ln{(xy)}}{\ln y})^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(\frac{\ln{(xy)}}{\ln y})^2 \frac{1}{\ln y} \frac{1}{xy} y = \frac{3 \ln^2{(xy)}}{x \ln^3 y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3(\frac{\ln{(xy)}}{\ln y})^2 \frac{(\ln{(xy)})' \ln y - \ln{(xy)}(\ln y)'}{\ln^2 y} = 3 \frac{\ln^2{(xy)}}{\ln^2 y} \frac{\frac{x \ln y}{xy} - \frac{\ln{(xy)}}{y}}{\ln^2 y} = 3 \frac{\ln^2{(xy)}}{\ln^2 y} \frac{\ln \frac{y}{xy}}{y \ln^2 y} = 3 \frac{\ln^2{(xy)} \ln \frac{1}{x}}{y \ln^4 y} = \frac{-3 \ln x \ln^2{(xy)}}{y \ln^4 y}$$

In [2]:
```
# Численное решение
z = (1+sym.ln(x)/sym.ln(y))**3
dzx = sym.diff(z, x)
dzy = sym.diff(z, y)
print(f"z'_x={sym.simplify(dzx)}")
print(f"z'_y={sym.simplify(dzy)}")
```

```
z'_x=3*(log(x) + log(y))**2/(x*log(y)**3)
z'_y=-3*(log(x) + log(y))**2*log(x)/(y*log(y)**4)
```

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3 \ln^2{(xy)}}{x \ln^3 y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3 \ln x \ln^2{(xy)}}{y \ln^4 y}$

3. Задание

Найти полный дифференциал функции в точке (1;1):

$$z = \sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}$$

Аналитическое решение:
$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(2xy + \cos\frac{x}{y})^{-\frac{1}{2}}(2y - \frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}) = \frac{2y^2 - \sin\frac{x}{y}}{2y\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(2xy + \cos\frac{x}{y})^{-\frac{1}{2}}(2x - \sin\frac{x}{y}(-\frac{x}{y^2})) = \frac{2xy^2 + x\sin\frac{x}{y}}{2y^2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}$

$dz = \frac{2y^2 - \sin\frac{x}{y}}{2y\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}dx + \frac{2xy^2 + x\sin\frac{x}{y}}{2y^2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}dy = \frac{1}{2y\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}((2y^2 - \sin\frac{x}{y})dx + (2xy + \frac{x}{y}\sin\frac{x}{y})dy)$

$dz(1;1) = \frac{1}{2\sqrt{2+\cos 1}}((2 - \sin 1)dx + (2 + \sin 1)dy)$

In [3]:
```
# Численное решение
z = sym.sqrt(2*x*y+sym.cos(x/y))
dzx = sym.diff(z, x)
dzy = sym.diff(z, y)
print(f"z'_x={sym.simplify(dzx)}")
print(f"z'_y={sym.simplify(dzy)}")
print(f"dz={sym.simplify(dzx*dx+dzy*dy)}")
```

```
z'_x=(y**2 - sin(x/y)/2)/(y*sqrt(2*x*y + cos(x/y)))
z'_y=x*(2*y**2 + sin(x/y))/(2*y**2*sqrt(2*x*y + cos(x/y)))
dz=(dx*y*(2*y**2 - sin(x/y)) + dy*x*(2*y**2 + sin(x/y)))/(2*y**2*sqrt(2*x*y + cos(x/y)))
```

Ответ: $dz(1;1) = \frac{1}{2\sqrt{2+\cos 1}}((2 - \sin 1)dx + (2 + \sin 1)dy)$

4. Задание

Исследовать на экстремум функцию:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

Решение:
Необходимое условие:

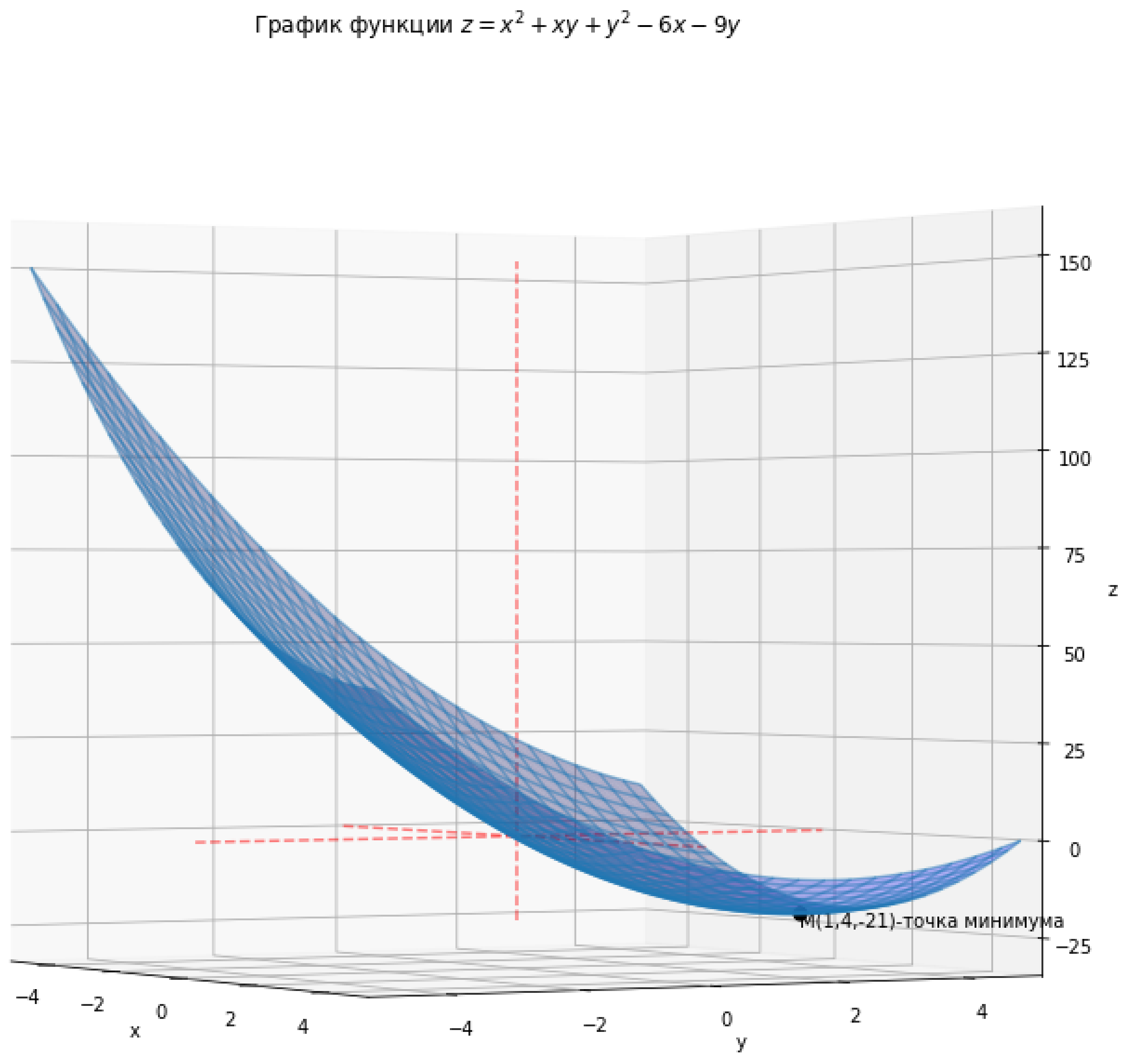
$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 6 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 9 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x, \\ 2y = 9 - x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x, \\ 12 - 4x = 9 - x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases} \Rightarrow M(1,4)$ - критическая точка

Достаточное условие:

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow M$-точка экстремума

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0 \Rightarrow M(1,4)$-точка минимума

In [4]:
```
fig = plt.figure(figsize=(10,10))
ax = Axes3D(fig)

x_p = np.linspace(-5, 5, 100)
y_p = np.linspace(-5, 5, 100)
X_p, Y_p = np.meshgrid(x_p, y_p)
Z_p = X_p**2 + X_p*Y_p + Y_p**2 - 6*X_p - 9*Y_p

ax.plot_surface(X_p, Y_p, Z_p, alpha=0.3, color='b', shade=True)
ax.plot_wireframe(X_p, Y_p, Z_p, alpha=0.5, rstride=4, cstride=4)
ax.view_init(0, -30)

# Отмечаем оси координат
ax.plot((-5,5), (0,0), (0,0), alpha=0.5, c='r', linestyle='--')
ax.plot((0,0), (-5,5), (0,0), alpha=0.5, c='r', linestyle='--')
ax.plot((0,0), (0,0), (-22,150), alpha=0.5, c='r', linestyle='--')

# Отмечаем критическую точку M(1,4,-21)
ax.scatter(1,4,-21,'z',50,'black')
ax.text(1,4,-25,'M(1,4,-21)-точка минимума')

# Границы графика
ax.set_xlim((-5,5))
ax.set_ylim((-5,5))
#ax.set_zlim((-22,100))

ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
plt.title(f'График функции $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$')
plt.show()
```



Ответ: $M(1, 4)$-точка минимума функции

In [ ]: