Автор: Анна Смелова

Решение домашнего задания к уроку “Производная функции одной переменной”

In [1]:
```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from math import pi,sqrt,sin,cos,log,atan,degrees
import sympy as sym
import warnings

warnings.filterwarnings('ignore')
%matplotlib inline

x = sym.symbols('x')
```

Тема “Понятие о производной”

1. Задание

Найти производную выражения:

$$a. \sin x \cdot \cos x$$

Аналитическое решение:
$f(x) = \sin x \cdot \cos x$
$f'(x) = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' = \cos x^2 - \sin x^2 = \cos 2x$

In [2]:
```
# Численное решение
f = sym.sin(x)*sym.cos(x)
df = sym.diff(f, x)
print(f"f'(x)={sym.simplify(df)}")
```

```
f'(x)=cos(2*x)
```

Ответ: $\cos 2x$

$$b. \ln{(2x+1)^3}$$

Аналитическое решение:
$f(x) = \ln{(2x+1)^3}$
$f'(x) = 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(2x+1)^3} = \frac{6}{2x+1}$

In [3]:
```
# Численное решение
f = sym.ln((2*x+1)**3)
df = sym.diff(f, x)
print(f"f'(x)={sym.simplify(df)}")
```

```
f'(x)=6/(2*x + 1)
```

Ответ: $\frac{6}{2x+1}$

$$c. \sqrt{\sin^2{(\ln{(x^3)})}}$$

Аналитическое решение:
$f(x) = \sqrt{\sin^2{(\ln{(x^3)})}}$
$f'(x) = ((\sin^2{(\ln{(x^3)})})^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2{(\ln{(x^3)})})^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\sin{(\ln{(x^3)})} \cdot \cos{(\ln{(x^3)})} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3 \cdot \cos{(\ln{(x^3)})} \cdot \sin{(\ln{(x^3)})}}{x \cdot \sqrt{\sin^2{(\ln{(x^3)})}}}$

$= \frac{3 \cdot \cos{(\ln{(x^3)})} \cdot \sin{(\ln{(x^3)})} \cdot \sqrt{\sin^2{(\ln{(x^3)})}}}{x \cdot \sin^2{\ln{(x^3)}}} = \frac{3 \cdot \cos{(\ln{(x^3)})} \cdot \sqrt{\sin^2{(\ln{(x^3)})}}}{x \cdot \sin{(\ln{(x^3)})}} = \frac{3 \cdot \sqrt{\sin^2{(\ln{(x^3)})}}}{x \cdot tg(\ln{(x^3)})}$

In [4]:
```
# Численное решение
f = sym.sqrt((sym.sin(sym.ln(x**3)))**2)
df = sym.diff(f, x)
print(f"f'(x)={sym.simplify(df)}")
```

```
f'(x)=3*sqrt(sin(log(x**3))**2)/(x*tan(log(x**3)))
```

Ответ: $\frac{3 \cdot \sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}}{x \cdot tg(\ln(x^3))}$

$$d. \frac{x^4}{\ln(x)}$$

Аналитическое решение:
$f(x) = \frac{x^4}{\ln(x)}$
$f'(x) = \frac{(x^4)' \cdot \ln(x) - x^4 \cdot (\ln(x))'}{\ln^2(x)} = \frac{4 \cdot x^3 \cdot \ln(x) - \frac{x^4}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{x^3 \cdot (4\ln(x) - 1)}{\ln^2(x)}$

In [5]:
```
# Численное решение
f = x**4 / sym.ln(x)
df = sym.diff(f, x)
print(f"f'(x)={sym.simplify(df)}")
```

```
f'(x)=x**3*(4*log(x) - 1)/log(x)**2
```

Ответ: $\frac{x^3 \cdot (4\ln(x) - 1)}{\ln^2(x)}$

2. Задание

Найти выражение производной функции и ее значение в точке:

$$f(x) = \cos(x^2 + 3x), x_0 = \sqrt{\pi}$$

Аналитическое решение:
$f(x) = \cos(x^2 + 3x)$
$f'(x) = -\sin(x^2 + 3x) \cdot (2x + 3)$
$f'(x_0) = f'(\sqrt{\pi}) = -(2\sqrt{\pi} + 3) \cdot \sin(\pi + 3\sqrt{\pi}) = (2\sqrt{\pi} + 3) \cdot \sin(3\sqrt{\pi})$

In [6]:
```
# Численное решение
f = sym.cos(x**2+3*x)
df = sym.diff(f, x)
print(f"f'(x)={sym.simplify(df)}")
```

```
f'(x)=-(2*x + 3)*sin(x*(x + 3))
```

In [7]:
```
def func_2(t):
    return -(2*t+3)*sin(t**2+3*t)
print(f'Значение производной в точке sqrt(pi): {func_2(sqrt(pi))}')
```

```
Значение производной в точке sqrt(pi): -5.383302410890619
```

Ответ: $-\sin(x^2 + 3x) \cdot (2x + 3); (2\sqrt{\pi} + 3) \cdot \sin(3\sqrt{\pi}) \approx -5.383302410890619$

3. Задание

* **Найти значение производной функции в точке:**

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{1 + 2x + 3x^2 - 4x^3}, x_0 = 0$$

Аналитическое решение:

$f(x) = \frac{x^3-x^2-x-1}{1+2x+3x^2-4x^3}$

$f'(x) = \frac{(x^3-x^2-x-1)' \cdot (1+2x+3x^2-4x^3)-(x^3-x^2-x-1) \cdot (1+2x+3x^2-4x^3)'}{(1+2x+3x^2-4x^3)^2} = \frac{(3x^2-2x-1) \cdot (1+2x+3x^2-4x^3)-(x^3-x^2-x-1) \cdot (12x^2-6x-2)}{(1+2x+3x^2-4x^3)^2}$

$= \frac{-12x^5+9x^4+6x^3+3x^2+8x^4-6x^3-4x^2-2x+4x^3-3x^2-2x-1+12x^5-6x^4-2x^3-12x^4+6x^3+2x^2-12x^3+6x^2+2x-12x^2+6x+2}{(1+2x+3x^2-4x^3)^2} = \frac{-x^4-4x^3-8x^2+4x+1}{(1+2x+3x^2-4x^3)^2}$

$f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{1} = 1$

In [8]:
```
# Численное решение
f = (x**3 - x**2 - x - 1) / (1 + 2*x + 3*x**2 - 4*x**3)
df = sym.diff(f, x)
print(f"f'(x)={sym.simplify(df)}")
```

```
f'(x)=(-x**4 - 4*x**3 - 8*x**2 + 4*x + 1)/(16*x**6 - 24*x**5 - 7*x**4 + 4*x**3 + 10*x**2 + 4*x + 1)
```

In [9]:
```
def func_3(t):
    return (-t**4 - 4*t**3 - 8*t**2 + 4*t + 1)/(16*t**6 - 24*t**5 - 7*t**4 + 4*t**3 + 10*t**2 + 4*t + 1)
print(f'Значение производной в точке 0: {func_3(0)}')
```

```
Значение производной в точке 0: 1.0
```

Ответ: 1

4. Задание

Найти угол наклона касательной к графику функции в точке:

$$f(x) = \sqrt{3x} \cdot \ln x, x_0 = 1$$

Аналитическое решение:

$f(x) = \sqrt{3x} \cdot \ln x$

$f'(x) = ((3x)^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x)' = \frac{3}{2\sqrt{3x}} \cdot \ln x + \frac{\sqrt{3x}}{x} = \frac{\ln x \cdot \sqrt{3x}}{2x} + \frac{2 \cdot \sqrt{3x}}{2x} = \frac{\sqrt{3x} \cdot (\ln x+2)}{2x}$

$f'(x_0) = f'(1) = \frac{\sqrt{3} \cdot (\ln 1+2)}{2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ тангенс угла наклона касательной к графику в точке $x_0 = 1$ равен $\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ угол наклона касательной равен 60°

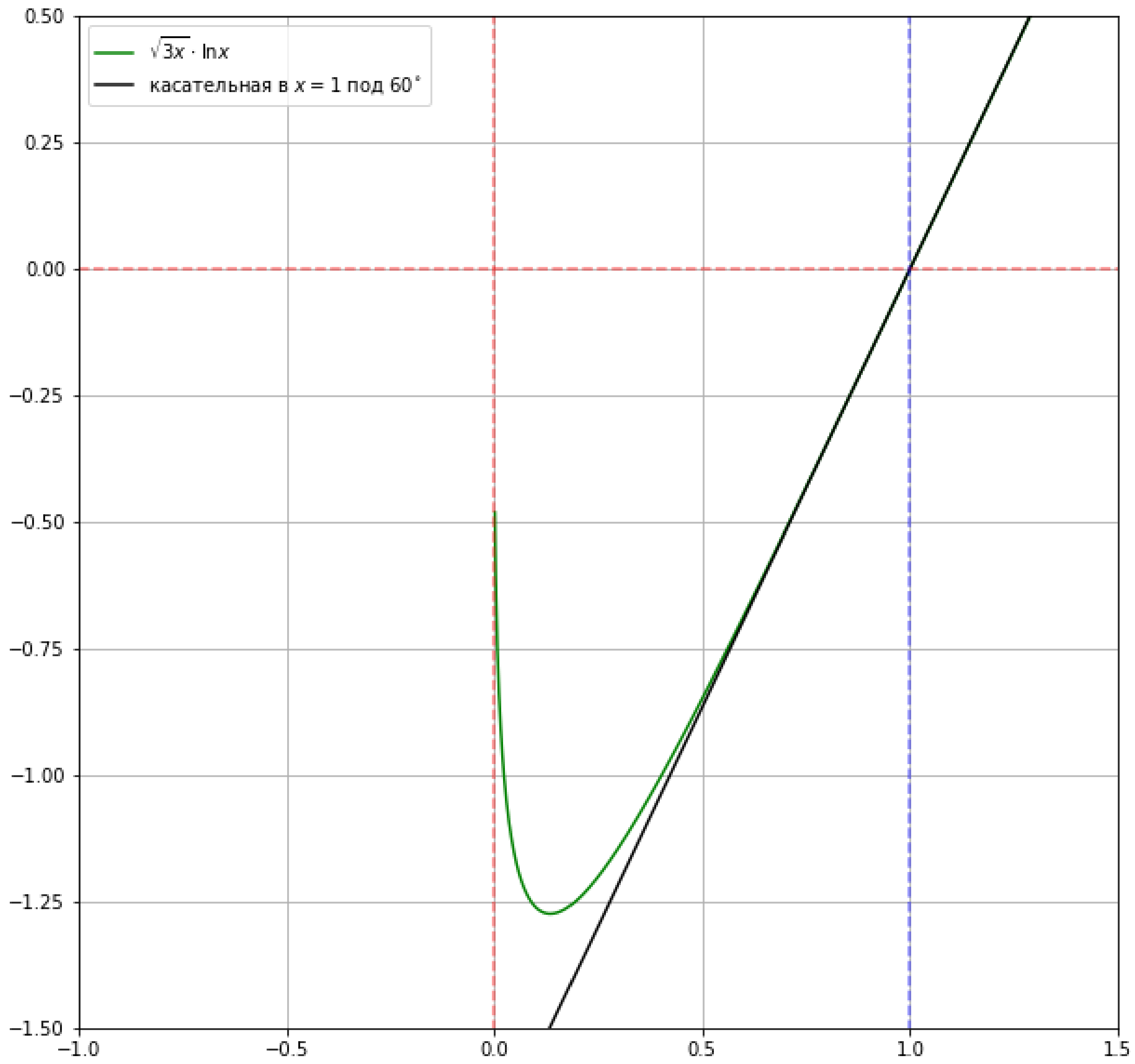
In [10]:
```
# Численное решение
f = sym.sqrt(3*x)*sym.ln(x)
df = sym.diff(f, x)
print(f"f'(x)={sym.simplify(df)}")
```

```
f'(x)=sqrt(3)*(log(x) + 2)/(2*sqrt(x))
```

In [11]:
```
def func_4(t):
    return sqrt(3)*(log(t) + 2)/(2*sqrt(t))
print(f'Значение производной в точке 1: {func_4(1)}')
print(f'Угол наклона касательной: {degrees(atan(func_4(1)))}')
```

```
Значение производной в точке 1: 1.7320508075688772
Угол наклона касательной: 60.00000000000001
```

In [12]:
```
x_g = np.linspace(0, 2, 1001)
y_g = np.sqrt(3*x_g)*np.log(x_g)
k_g = np.tan(np.pi/3)*(x_g-1)
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(x_g, y_g, label='$\sqrt{3x}\cdot\ln{x}$', c='g')
plt.plot(x_g, k_g, label='касательная в $x=1$ под $60^{\circ}$', c='black')
plt.plot([-1, 2], [0, 0], color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.plot([0, 0], [-2, 2], color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.plot([1, 1], [-2, 2], color='b', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.axis([-1, 1.5, -1.5, 0.5])
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Ответ: 60°

In [ ]: