Автор: Анна Смелова

Решение домашнего задания к уроку “Производная функции нескольких переменных” часть 2

In [1]:
```
import warnings

import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
from pylab import *

warnings.filterwarnings('ignore')
%matplotlib inline
```

1. Задание

Исследовать функцию на условный экстремум:

$U = 3 - 8x + 6y$, если $x^2 + y^2 = 36$

Решение:
$f(x, y) = U = 3 - 8x + 6y$, $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 36$

Составим функцию Лагранжа: $L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \phi(x, y)$
$L(\lambda, x, y) = 3 - 8x + 6y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 36)$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -8 + 2x\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 6 + 2y\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 36 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \frac{16}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 36. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \lambda^2 = \frac{25}{36}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda}, \\ y = -\frac{3}{\lambda}, \\ \left[\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{5}{6}, \\ \lambda = \dfrac{5}{6} \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = -\frac{5}{6}, \\ x = -\frac{24}{5}, \\ y = \frac{18}{5}; \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = \frac{5}{6}, \\ x = \frac{24}{5}, \\ y = -\frac{18}{5}. \end{cases} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow M_1(-\frac{5}{6}, -\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$, $M_2(\frac{5}{6}, \frac{24}{5}, -\frac{18}{5})$ - стационарные точки

Выясним характер экстремумов:
$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$
$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2$
$d^2L\big|_{M_1} = -\frac{5}{3}(dx^2 + dy^2) < 0 \Rightarrow M_1(-\frac{5}{6}, -\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$ - точка условного максимума
$d^2L\big|_{M_2} = \frac{5}{3}(dx^2 + dy^2) > 0 \Rightarrow M_2(\frac{5}{6}, \frac{24}{5}, -\frac{18}{5})$ - точка условного минимума

Геометрическая интерпретация:
Точки условного максимума и минимума - точки максимального и минимального значения функции в области пересечения значений функции и условия.

На графиках ниже:

1. Синяя плоскость - значения функции
2. Зеленый цилиндр - ограничивающие условия
3. Черный эллипс - контур пересечения функции и условий
4. Красные точки - точки условного экстремума

In [2]:
```python
# Возвращает значение функции в точках (x,y)
def get_func_1(x,y):
    return 3 - 8*x + 6*y

# Отрисовывает основную функцию // синяя плоскость
def plot_func(ax):
    x_p = np.linspace(-7, 7, 100)
    y_p = np.linspace(-7, 7, 100)
    X_p, Y_p = np.meshgrid(x_p, y_p)
    Z_p = 3 - 8*X_p + 6*Y_p
    ax.plot_surface(X_p, Y_p, Z_p, alpha=0.3, color='b', shade=True)
    ax.plot_wireframe(X_p, Y_p, Z_p, alpha=0.2, rstride=4, cstride=4, color='b')

# Отрисовывает условия на (x,y) // зеленый цилиндр
def plot_condition(ax):
    x_c = np.linspace(-6,6,100)
    z_c = np.linspace(-100,100,100)
    X_c, Z_c=np.meshgrid(x_c, z_c)
    Y_c = np.sqrt(36-X_c**2)

    ax.plot_wireframe(X_c, Y_c, Z_c, alpha=0.4, rstride=4, cstride=4, color='g')
    ax.plot_wireframe(X_c, -Y_c, Z_c, alpha=0.4, rstride=4, cstride=4, color='g')

# Отрисовывает контур пересечения основной функции с условиями // черный эллипс
def plot_contour(ax):
    X_m = np.linspace(-6,6,100)
    Y_m = np.sqrt(36-X_m**2)
    Z_m_1 = 3 - 8*X_m + 6*Y_m
    Z_m_2 = 3 - 8*X_m - 6*Y_m

    ax.plot(X_m, Y_m, Z_m_1,color='black')
    ax.plot(X_m, -Y_m, Z_m_2,color='black')

# Отрисовывает критические точки, оси координат, задает границы графика
def plot_additions(ax):
    # Отмечаем оси координат
    ax.plot((-7,7), (0,0), (0,0), alpha=0.5, c='r', linestyle='--')
    ax.plot((0,0), (-7,7), (0,0), alpha=0.5, c='r', linestyle='--')
    ax.plot((0,0), (0,0), (-100,100), alpha=0.5, c='r', linestyle='--')

    # Отмечаем критические точки M_1(-24/5,18/5,63), M_2(24/5,-18/5,-57)
    ax.scatter(-24/5,18/5,get_func_1(-24/5,18/5),'z',50,'red')
    ax.scatter(24/5,-18/5,get_func_1(24/5,-18/5),'z',50,'red')
    ax.text(-24/5,18/5,get_func_1(-24/5,18/5),'M_1')
    ax.text(24/5,-18/5,get_func_1(24/5,-18/5),'M_2')

    # Границы графика
    ax.set_xlim((-7,7))
    ax.set_ylim((-7,7))

    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('y')
    ax.set_zlabel('z')
```

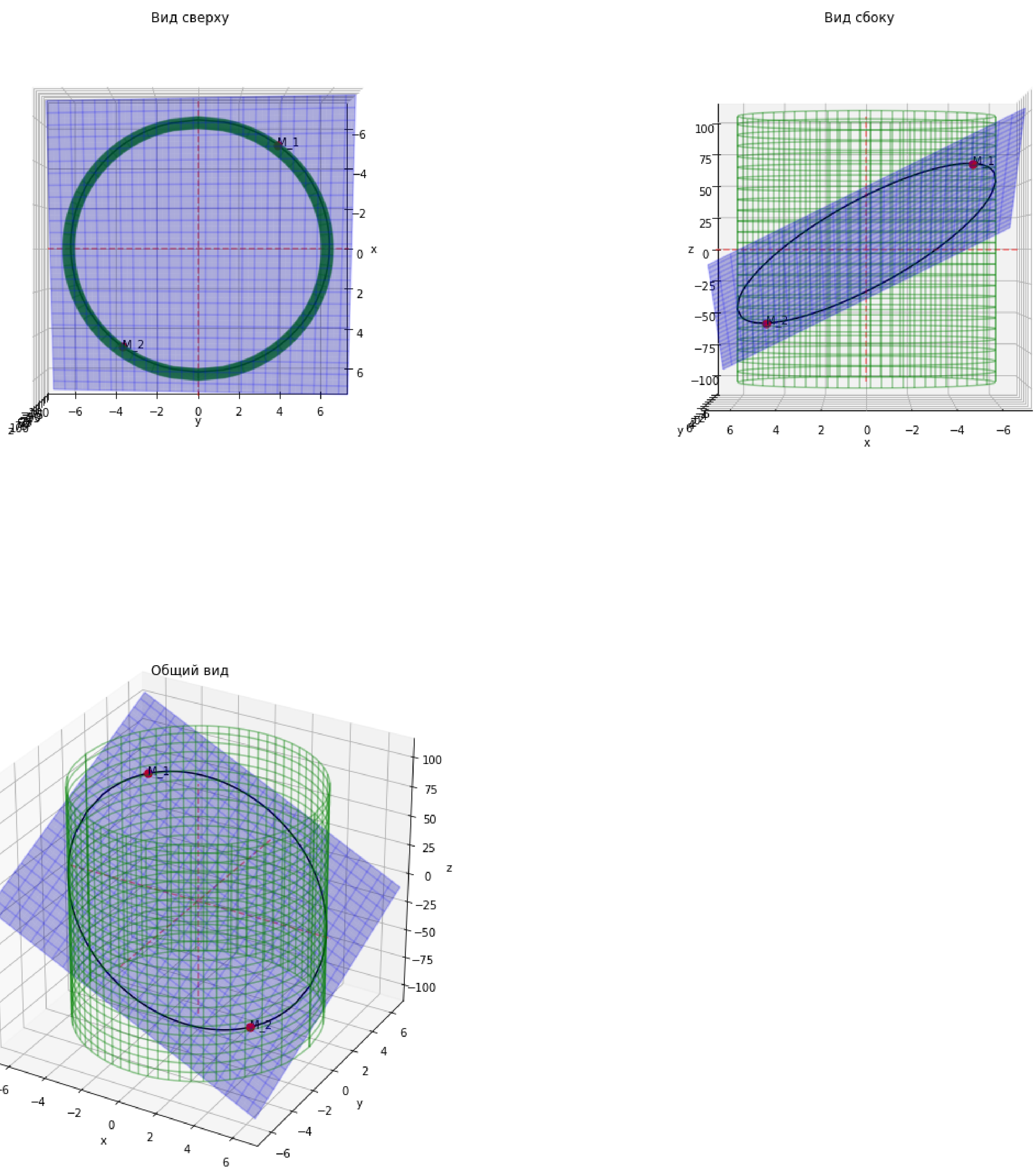
In [3]:
```python
fig = plt.figure(figsize=(20,20))

ax = fig.add_subplot(221, projection='3d')
plot_func(ax)
plot_condition(ax)
plot_contour(ax)
plot_additions(ax)
ax.view_init(90, 0)
ax.set_title('Вид сверху')

ax = fig.add_subplot(222, projection='3d')
plot_func(ax)
plot_condition(ax)
plot_contour(ax)
plot_additions(ax)
ax.view_init(0, 90)
ax.set_title('Вид сбоку')

ax = fig.add_subplot(223, projection='3d')
plot_func(ax)
plot_condition(ax)
plot_contour(ax)
plot_additions(ax)
ax.set_title('Общий вид')

plt.show()
```



Ответ: $M_1(-\frac{5}{6}, -\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$-точка условного максимума, $M_2(\frac{5}{6}, \frac{24}{5}, -\frac{18}{5})$-точка условного минимума

2. Задание

Исследовать функцию на условный экстремум:

$U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$, если $x^2 + 16y^2 = 64$

Решение:
$f(x, y) = U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15,\ \phi(x, y) = x^2 + 16y^2 - 64$

Составим функцию Лагранжа: $L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \phi(x, y)$
$L(\lambda, x, y) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda \cdot (x^2 + 16y^2 - 64)$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 4x + 12y + 2x\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 12x + 64y + 32y\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 16y^2 - 64 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x(\lambda+2)}{6}, \\ \frac{18x}{6} - \frac{16x(\lambda+2)}{6} - \frac{8\lambda x(\lambda+2)}{6} = 0, \\ x^2 + 16y^2 = 64. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x(\lambda+2)}{6}, \\ -8\lambda^2 x - 32\lambda x - 14x = 0, \\ x^2 + 16y^2 = 64. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x(\lambda+2)}{6}, \\ x^2 + 16y^2 = 64, \\ \left[\begin{array}{l} \lambda = -\frac{1}{2}, \\ \lambda = -\frac{7}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2}, \\ x = 4\sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2}, \\ x = -4\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = -\frac{7}{2}, \\ x = 4\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = -\frac{7}{2}, \\ x = -4\sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow M_1(-\frac{1}{2}, 4\sqrt{2}, -\sqrt{2}), M_2(-\frac{1}{2}, -4\sqrt{2}, \sqrt{2}),$
$M_3(-\frac{7}{2}, 4\sqrt{2}, \sqrt{2}), M_4(-\frac{7}{2}, -4\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ - стационарные точки

Выясним характер экстремумов:
$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 4 + 2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 12,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 64 + 32\lambda$
$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = (4 + 2\lambda)dx^2 + 24dxdy + (64 + 32\lambda)dy^2$
$d^2 L\big|_{M_1} = d^2 L\big|_{M_2} = (4 - 1)dx^2 + 24dxdy + (64 - 16)dy^2 = 3(dx + 4dy)^2 > 0 \Rightarrow M_1(-\frac{1}{2}, 4\sqrt{2}, -\sqrt{2}), M_2(-\frac{1}{2}, -4\sqrt{2}, \sqrt{2})$ - точки условного минимума
$d^2 L\big|_{M_3} = d^2 L\big|_{M_4} = (4 - 7)dx^2 + 24dxdy + (64 - 7 \cdot 16)dy^2 = -3(dx - 4dy)^2 < 0 \Rightarrow M_3(-\frac{7}{2}, 4\sqrt{2}, \sqrt{2}), M_4(-\frac{7}{2}, -4\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ - точки условного максимума

Геометрическая интерпретация:
Точки условного максимума и минимума - точки максимального и минимального значения функции в области пересечения значений функции и условия.

На графиках ниже:

1. Синяя поверхность - значения функции
2. Зеленый цилиндр - ограничивающие условия
3. Черная кривая - контур пересечения функции и условий
4. Красные точки - точки условного экстремума

In [4]:

```python
# Возвращает значение функции в точках (x,y)
def get_func_2(x,y):
    return 2*x**2 + 12*x*y + 32*y**2 + 15

# Отрисовывает основную функцию // синяя поверхность
def plot_func(ax):
    x_p = np.linspace(-8, 8, 100)
    y_p = np.linspace(-8, 8, 100)
    X_p, Y_p = np.meshgrid(x_p, y_p)
    Z_p = 2*X_p**2 + 12*X_p*Y_p + 32*Y_p**2 + 15
    ax.plot_surface(X_p, Y_p, Z_p, alpha=0.3, color='b', shade=True)
    ax.plot_wireframe(X_p, Y_p, Z_p, alpha=0.1, rstride=4, cstride=4, color='b')

# Отрисовывает условия на (x,y) // зеленый цилиндр
def plot_condition(ax):
    x_c = np.linspace(-8,8,100)
    z_c = np.linspace(0,1000,100)
    X_c, Z_c=np.meshgrid(x_c, z_c)
    Y_c = np.sqrt((64-X_c**2)/16)

    ax.plot_wireframe(X_c, Y_c, Z_c, alpha=0.4, rstride=4, cstride=4, color='g')
    ax.plot_wireframe(X_c, -Y_c, Z_c, alpha=0.4, rstride=4, cstride=4, color='g')

# Отрисовывает контур пересечения основной функции с условиями
def plot_contour(ax):
    X_m = np.linspace(-8,8,100)
    Y_m = np.sqrt((64-X_m**2)/16)
    Z_m_1 = 2*X_m**2 + 12*X_m*Y_m + 32*Y_m**2 + 15
    Z_m_2 = 2*X_m**2 - 12*X_m*Y_m + 32*Y_m**2 + 15

    ax.plot(X_m, Y_m, Z_m_1,color='black')
    ax.plot(X_m, -Y_m, Z_m_2,color='black')

# Отрисовывает критические точки, оси координат, задает границы графика
def plot_additions(ax):
    # Отмечаем оси координат
    ax.plot((-8,8), (0,0), (0,0), alpha=0.5, c='r', linestyle='--')
    ax.plot((0,0), (-8,8), (0,0), alpha=0.5, c='r', linestyle='--')
    ax.plot((0,0), (0,0), (10,1000), alpha=0.5, c='r', linestyle='--')

    # Отмечаем критические точки
    ax.scatter(4*2**(0.5),-2**(0.5),get_func_2(4*2**(0.5),-2**(0.5)),'z',50,'red')
    ax.text(4*2**(0.5),-2**(0.5),get_func_2(4*2**(0.5),-2**(0.5)),'M_1')
    ax.scatter(-4*2**(0.5),2**(0.5),get_func_2(-4*2**(0.5),2**(0.5)),'z',50,'red')
    ax.text(-4*2**(0.5),2**(0.5),get_func_2(-4*2**(0.5),2**(0.5)),'M_2')
    ax.scatter(4*2**(0.5),2**(0.5),get_func_2(4*2**(0.5),2**(0.5)),'z',50,'red')
    ax.text(4*2**(0.5),2**(0.5),get_func_2(4*2**(0.5),2**(0.5)),'M_3')
    ax.scatter(-4*2**(0.5),-2**(0.5),get_func_2(-4*2**(0.5),-2**(0.5)),'z',50,'red')
    ax.text(-4*2**(0.5),-2**(0.5),get_func_2(-4*2**(0.5),-2**(0.5)),'M_4')

    # Границы графика
    ax.set_xlim((-10,10))
    ax.set_ylim((-10,10))
    ax.set_zlim((10,1000))

    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('y')
    ax.set_zlabel('z')
```

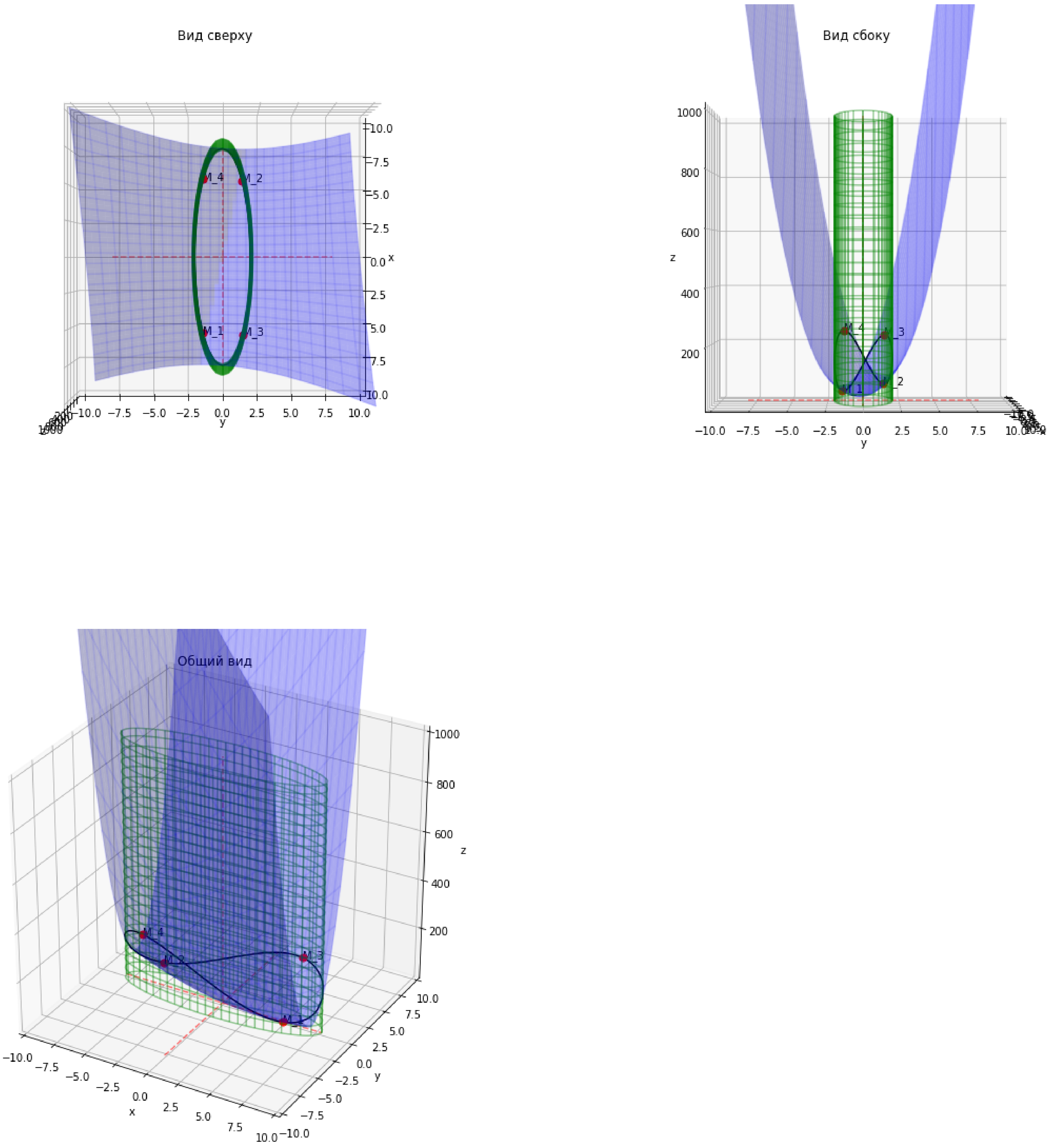
In [5]:
```python
fig = plt.figure(figsize=(20,20))

ax = fig.add_subplot(221, projection='3d')
plot_func(ax)
plot_condition(ax)
plot_contour(ax)
plot_additions(ax)
ax.view_init(90, 0)
ax.set_title('Вид сверху')

ax = fig.add_subplot(222, projection='3d')
plot_func(ax)
plot_condition(ax)
plot_contour(ax)
plot_additions(ax)
ax.view_init(0, 0)
ax.set_title('Вид сбоку')

ax = fig.add_subplot(223, projection='3d')
plot_func(ax)
plot_condition(ax)
plot_contour(ax)
plot_additions(ax)
ax.set_title('Общий вид')

plt.show()
```



Ответ: $M_1(-\frac{1}{2}, 4\sqrt{2}, -\sqrt{2}), M_2(-\frac{1}{2}, -4\sqrt{2}, \sqrt{2})$ **- точки условного минимума,** $M_3(-\frac{7}{2}, 4\sqrt{2}, \sqrt{2}), M_4(-\frac{7}{2}, -4\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **- точки условного максимума**

3. Задание

Найти производную функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\overrightarrow{c}(-9, 8, -12)$ в точку $M(8, -12, 9)$

Решение:
Найдем частные производные в точке $M(8, -12, 9)$:
$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{(8,-12,9)} = 16$

$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{(8,-12,9)} = -24$

$\frac{\partial U}{\partial z} = 2z \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{(8,-12,9)} = 18$

Найдем координаты направляющего вектора единичной длины:
$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{(-9)^2 + 8^2 + (-12)^2} = \sqrt{81 + 64 + 144} = \sqrt{289} = 17$
$\overrightarrow{c_0} = (-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}) \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{9}{17}, \cos\beta = \frac{8}{17}, \cos\gamma = -\frac{12}{17}$

$\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{c}} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$

$\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{c}}\Big|_{M(8,-12,9)} = 16 \cdot (-\frac{9}{17}) + (-24) \cdot \frac{8}{17} + 18 \cdot (-\frac{12}{17}) = \frac{-144-192-216}{17} = -\frac{552}{17} < 0 \Rightarrow$ функция U по направлению вектора $\overrightarrow{c}$ в точке $M(8, -12, 9)$ убывает.

Ответ: $-\frac{552}{17}$

4. Задание

Найти производную функции $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\overrightarrow{d}(4, -13, -16)$ в точку $L(-16, 4, -13)$

Решение:
Найдем частные производные в точке $L(-16, 4, -13)$:
$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{(-16,4,-13)} = -32e^{441}$

$\frac{\partial U}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{(-16,4,-13)} = 8e^{441}$

$\frac{\partial U}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{(-16,4,-13)} = -26e^{441}$

Найдем координаты направляющего вектора единичной длины:
$|\overrightarrow{d}| = \sqrt{4^2 + (-13)^2 + (-16)^2} = \sqrt{16 + 169 + 256} = \sqrt{441} = 21$
$\overrightarrow{d_0} = (\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{21}, \cos\beta = -\frac{13}{21}, \cos\gamma = -\frac{16}{21}$

$\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{d}} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$

$\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{d}}\Big|_{L(-16,4,-13)} = -32e^{441} \cdot \frac{4}{21} + 8e^{441} \cdot (-\frac{13}{21}) + (-26e^{441}) \cdot (-\frac{16}{21}) = \frac{}{21} = -\frac{-128e^{441} - 104e^{441} + 416e^{441}}{21} = \frac{184e^{441}}{21} > 0 \Rightarrow$ функция U по направлению вектора $\overrightarrow{d}$ в точке $L(-16, 4, -13)$ возрастает.

Ответ: $\frac{184e^{441}}{21}$

```
In [ ]:
```