Автор: Анна Смелова

Решение домашнего задания к уроку “Предел функции”

In [1]:
```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
import sympy as sym
import warnings
import math

warnings.filterwarnings('ignore')
%matplotlib inline

x_l = sym.symbols('x')
```

Тема “Предел функции”

1. Задание

Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.

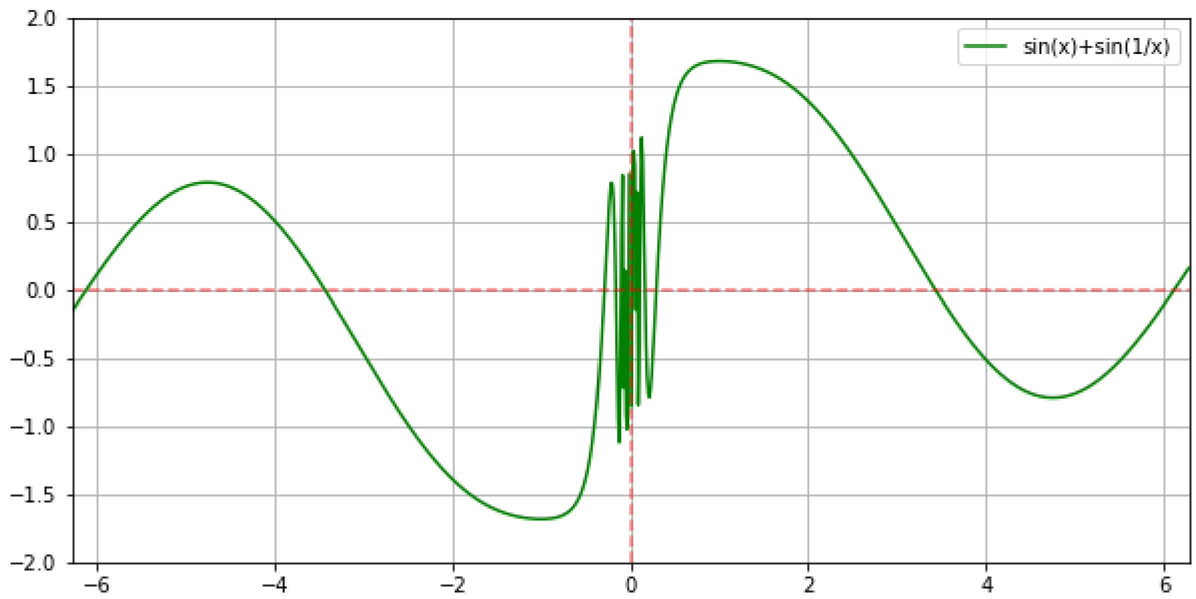
$$f(x) = \sin(x) + \sin(\frac{1}{x})$$

$f_1(x) = \sin x$ - периодическая функция, поэтому у нее не существует предела на бесконечностях.

$f_2(x) = \sin \frac{1}{x}$ - рассмотрим последовательность $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$, тогда
$f_2(x_n) = \sin \frac{\pi(2n+1)}{2} = \sin(\pi n + \frac{\pi}{2}) = \cos(\pi n) = (-1)^n$, получаем
$lim_{n \to \infty} x_n = lim_{n \to \infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} = 0$, т.е. $x_n \to 0$, а $f_2(x_n)$ не имеет предела при $n \to \infty$.
Значит и исследуемая функция $f_2(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Линейная комбинация этих двух функций и дает нам пример функции, не имеющей предела в нуле и бесконечностях.

In [2]:
```
x = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 1001)
y = np.sin(x)+np.sin(1/x)
plt.figure(figsize=(10,5))
plt.plot(x, y, label='sin(x)+sin(1/x)', c='g')
plt.plot([-2*np.pi, 2*np.pi], [0, 0], color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.plot([0, 0], [-2, 2], color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.axis([-2*np.pi, 2*np.pi, -2, 2])
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



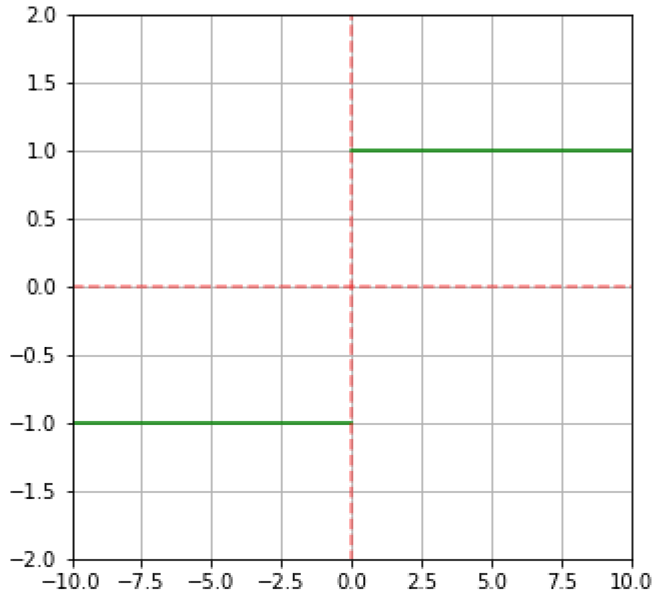
2. Задание

Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

$$f(x) = sgn(x)$$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$
$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$
Так как односторонние пределы справа и слева не совпадают, то предел функции $f(x)$ в нуле не существует. При этом функция определена в нуле: $f(0) = 0$.

In [3]:
```
x1 = np.linspace(-10, 0, 1001)
x2 = np.linspace(0, 10, 1001)
y1 = [-1]*len(x1)
y2 = [1]*len(x2)
plt.figure(figsize=(5,5))
plt.plot(x1, y1, c='g')
plt.plot(x2, y2, c='g')
plt.plot([-10, 10], [0, 0], color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.plot([0, 0], [-10, 10], color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.axis([-10, 10, -2, 2])
plt.grid()
plt.show()
```



3. Задание

Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$ по плану:

a. Область задания и область значений.
b. Нули функции и их кратность.
c. Отрезки знакопостоянства.
d. Интервалы монотонности.
e. Четность функции.
f. Ограниченность.
g. Периодичность.

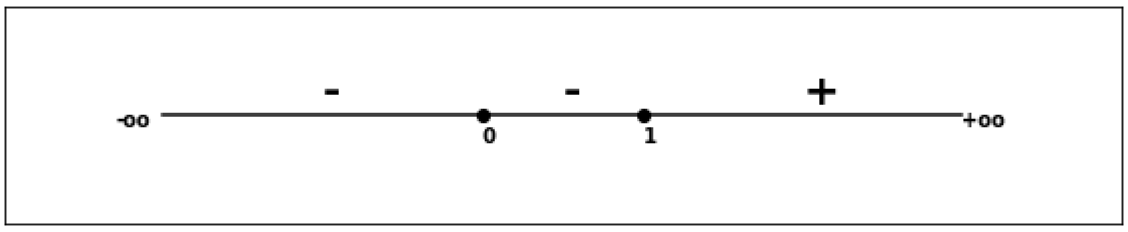
Решение:
a. Область задания и область значений:
$dom(f) = \mathbb{R}$
$ran(f) = \mathbb{R}$

b. Нули функции и их кратность:
$x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = 0. \end{array}\right.$

$x_1 = 1$ имеет кратность 1, $x_2 = 0$ имеет кратность 2

c. Отрезки знакопостоянства:

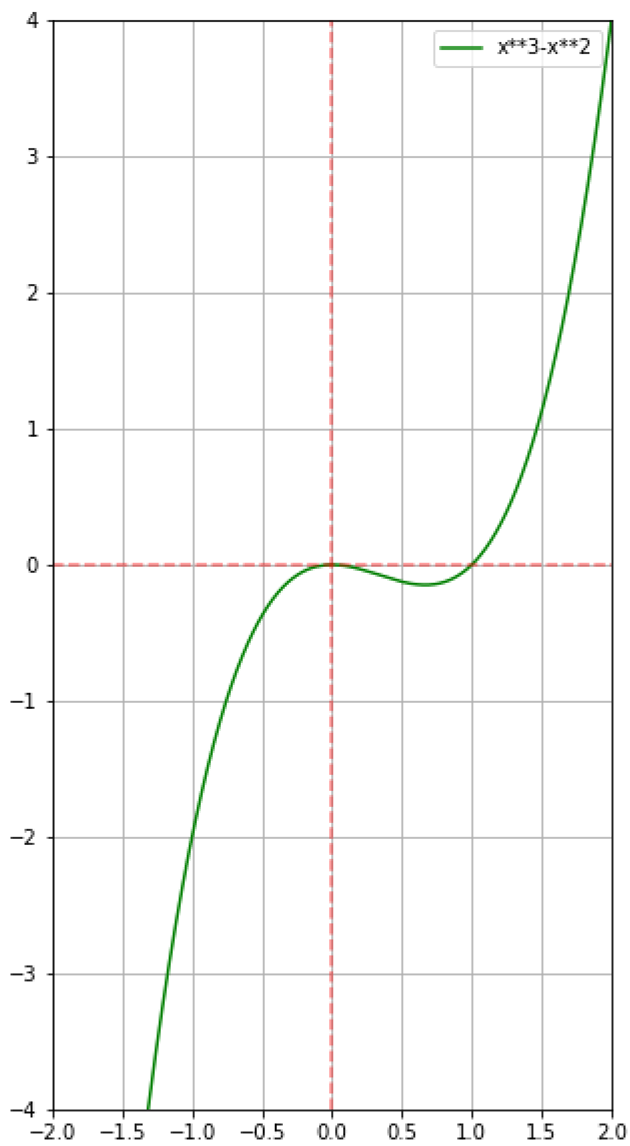
In [4]:
```
plt.figure(figsize=(10,2))
x = np.arange (-2, 3.1, 0.1)
x1 = np.arange (-2, 0.1, 0.1)
x2 = np.arange (0, 1.1, 0.1)
x3 = np.arange (1, 3.1, 0.1)
y = [0]*len(x)
plt.plot(x, y, c='black')
plt.plot(0, 0, c='black', marker='o')
plt.plot(1, 0, c='black', marker='o')

plt.text(-2.3, -0.002, u'-oo', weight='bold')
plt.text(0, -0.005, u'0', weight='bold')
plt.text(1, -0.005, u'1', weight='bold')
plt.text(3, -0.002, u'+oo', weight='bold')

plt.text(-1, 0.002, u'-', weight='bold', fontsize=22)
plt.text(0.5, 0.002, u'-', weight='bold', fontsize=22)
plt.text(2, 0.002, u'+', weight='bold', fontsize=22)

plt.axis([-3, 4, -0.021, 0.021])
plt.xticks([])
plt.yticks([])
plt.show()
```



При $x \in (-\infty, 1]$ $f(x) \leq 0$, при $x \in [1, +\infty)$ $f(x) \geq 0$
$N = x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$
$P = x \in (1, +\infty)$

d. Интервалы монотонности:

In [5]:
```
x = np.linspace(-2, 2, 1001)
y = x**3-x**2
plt.figure(figsize=(5,10))
plt.plot(x, y, label='x**3-x**2', c='g')
plt.plot([-2, 2], [0, 0], color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.plot([0, 0], [-4, 4], color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.axis([-2, 2, -4, 4])
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$ - точки перегиба функции
Функция монотонно возрастает на $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$ и монотонно убывает на $x \in (0, \frac{2}{3})$

e. Четность функции:
$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2$
$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, поэтому функция не является ни четной, ни нечетной.

f. Ограниченность:
Функция не является ограниченной

g. Периодичность:
Функция не является периодической

4. Задание

Найти предел:

$$a. \lim_{x\to 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2}$$

Аналитическое решение: $\lim_{x\to 0} \frac{3x^3-2x^2}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(3x-2)}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x-2}{4} = \frac{-2}{4} = -0.5$

In [6]:
```
# Численное решение
func_a = (3*x_l**3 - 2*x_l**2)/(4*x_l**2)
print(sym.limit(func_a, x_l, 0))
```

```
-1/2
```

Ответ: -0.5

$$b^*. \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

Аналитическое решение:
$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(1+x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{3}{2} = 1.5$

In [7]:
```
# Численное решение
func_b = (sym.sqrt(1+x_l)-1)/((1+x_l)**(1/3)-1)
print(sym.limit(func_b, x_l, 0))
```

```
1.50000000000000
```

Ответ: 1.5

$$c^*. \lim_{x\to\infty} (\frac{x+3}{x})^{4x+1}$$

Аналитическое решение:
$\lim_{x\to\infty} (\frac{x+3}{x})^{4x+1} = \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{3}{x})^{4x+1} = \lim_{x\to\infty} ((1 + \frac{3}{x})(1 + \frac{3}{x})^{4x}) = \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{3}{x}) * \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{3}{x})^{4x} = 1 * \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{3}{x})^{4x} = |_{y=\frac{x}{3}}| =$
$\lim_{y\to\infty} (1 + \frac{1}{y})^{12y} = \lim_{y\to\infty} ((1 + \frac{1}{y})^{y})^{12} = |_{2\_замечательный\_предел}| = e^{12}$

In [8]:
```
# Численное решение
func_c = ((x_l+3)/(x_l))**(4*x_l+1)
print(sym.limit(func_c, x_l, sym.oo))
```

```
exp(12)
```

Ответ: e^{12}

Тема “Теоремы о пределах”

1. Задание

Найти предел:

$$a. \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{4x}$$

Аналитическое решение: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = |_{y=2x}| = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = |_{1\_замечательный\_предел}| = \frac{1}{2} = 0.5$

In [9]:
```
# Численное решение
func_a = (sym.sin(2*x_l))/(4*x_l)
print(sym.limit(func_a, x_l, 0))
```

```
1/2
```

Ответ: 0.5

$$b. \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)}$$

Аналитическое решение: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}(\frac{\sin(x)}{x})^{-1} = (\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x})^{-1} = |_{1\_замечательный\_предел}| = (1)^{-1} = 1$

In [10]:
```
# Численное решение
func_b = (x_l)/(sym.sin(x_l))
print(sym.limit(func_b, x_l, 0))
```

```
1
```

Ответ: 1

$$c. \lim_{x \to 0} \frac{x}{\arcsin(x)}$$

Аналитическое решение: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin(x)} = |_{x=\sin y}| = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = |_{1\_замечательный\_предел}| = 1$

In [11]:
```
# Численное решение
func_c = (x_l)/(sym.asin(x_l))
print(sym.limit(func_c, x_l, 0))
```

```
1
```

Ответ: 1

$$d. \lim_{x \to \infty} (\frac{4x+3}{4x-3})^{6x}$$

Аналитическое решение:

$\lim_{x\to\infty}(\frac{4x+3}{4x-3})^{6x} = \lim_{x\to\infty}(\frac{4x-3+6}{4x-3})^{6x} = \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{6}{4x-3})^{6x} = |^{y=\frac{4x-3}{6}}_{x=\frac{6y+3}{4}}| = \lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{6*\frac{6y+3}{4}} = \lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{9y+\frac{9}{2}} = \lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{\frac{9}{2}}$

$* (\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y})^{9} = |_{2\_замечательный\_предел}| = 1 * (e)^9 = e^9$

In [12]:
```
# Численное решение
func_d = ((4*x_l+3)/(4*x_l-3))**(6*x_l)
print(sym.limit(func_d, x_l, sym.oo))
```

```
exp(9)
```

Ответ: e^9

$$e^*. \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x + \ln x}{x}$$

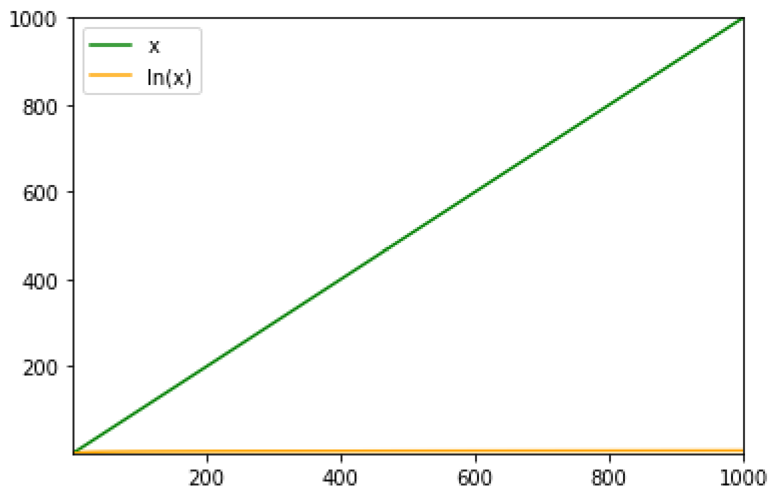
Аналитическое решение: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

$\sin(x)$-ограниченная функция ($\sin x \in [-1,1] \forall x \in \mathbb{R}$)$\Rightarrow$ при $x \to \infty$: $\frac{\sin x}{x} \to 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Функция $f(x) = x$ растет сильно быстрее, чем функция $f(x) = \ln x$ (это видно на графике снизу; также это можно доказать, взяв производные, но мы их еще не проходили в этом курсе), поэтому при $x \to \infty$: $\frac{\ln x}{x} \to 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x+\ln x}{x} = 0 + 0 = 0$

In [13]:
```
x = np.linspace(1, 1000, 101)
y = x
y2 = np.log(x)
plt.plot(x, y, label='x', c='g')
plt.plot(x, y2, label='ln(x)', c='orange')
plt.axis([1, 1000, 1, 1000])
plt.legend()
plt.show()
```



In [14]:
```
# Численное решение
func_e = (sym.sin(x_l)+sym.ln(x_l))/(x_l)
print(sym.limit(func_e, x_l, sym.oo))
```

0

Ответ: 0

$$f^*. \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + \ln(x)}{x}$$

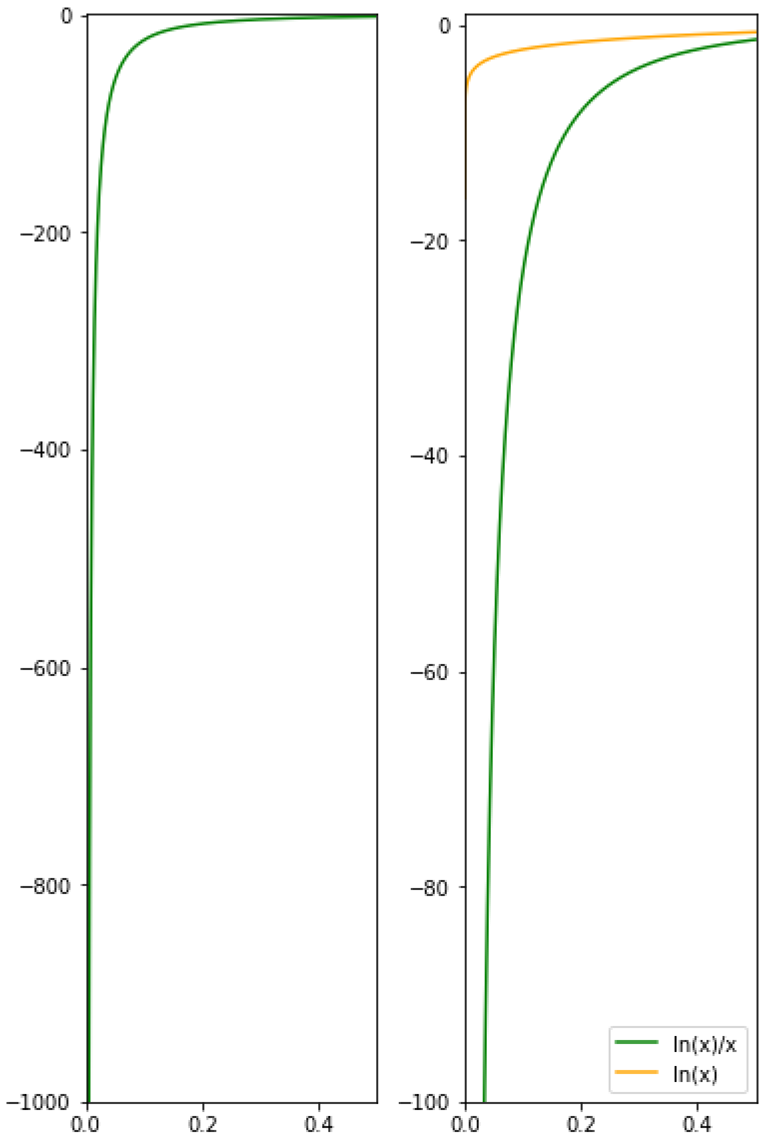
Аналитическое решение: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\ln x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = |_{1\_\text{замечательный\_предел}}| = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x}$ - посмотрим на график функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ (внизу)
Функция $f(x) = \ln x$ не определена в 0, при этом она убывает при $x \to 0_+$ (то есть на интервале $(0, +\infty)$ сама функция возрастает, но если смотреть в другом направлении, то как бы убывает, уменьшается при уменьшении x), т.е. при $x \to 0$ $f(x) = \ln x \to -\infty$, а мы пытаемся поделить ее еще на 0, т.е. при $x \to 0$ функция $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ очень быстро "убегает" на $-\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\ln x}{x} = 1 + (-\infty) = -\infty$

In [15]:
```
x = np.linspace(10**(-7), 0.5, 1001)
y = np.log(x) / x
y2 = np.log(x)
fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=2)
ax1, ax2 = ax.flatten()
fig.set_size_inches(6, 10)
fig.subplots_adjust(hspace=0.25, wspace=0.3)
ax1.plot(x, y, label='ln(x)/x', c='g')
ax1.set_xlim([0, 0.5])
ax1.set_ylim([-1000, 1])
ax2.plot(x, y, label='ln(x)/x', c='g')
ax2.plot(x, y2, label='ln(x)', c='orange')
ax2.set_xlim([0, 0.5])
ax2.set_ylim([-100, 1])
plt.legend()
plt.show()
```



In [16]:
```
# Численное решение
func_e = (sym.sin(x_l)+sym.ln(x_l))/(x_l)
print(sym.limit(func_e, x_l, 0))
```

```
-oo
```

Ответ: $-\infty$

In [ ]: