Автор: Анна Смелова

```
In [1]: import numpy as np
        import copy
```

Решение домашнего задания к уроку 6 “Системы линейных уравнений. Часть 1”

1. Задача

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \end{array}\right)$$

Перейдем обратно к системе:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{3}{2}x_4 - 2, \\ x_2 = x_3 + 5x_4 + 2, \\ x_1 = -x_2 + x_3 + 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2}x_4 - 2, \\ x_2 = \frac{3}{2}x_4 + 5x_4, \\ x_1 = -\frac{13}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_4 - 2 + 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_4 - 2, \\ x_2 = \frac{13}{2}x_4, \\ x_3 = \frac{3}{2}x_4 - 2 \end{cases}$$

Система имеет бесконечное множество решений. Запишем решение в общем виде:

Пусть $x_4 = a, a \in \mathbb{R}$, тогда искомое решение: $x = (-3a - 2, \frac{13}{2}a, \frac{3}{2}a - 2, a)$.

Подставив общее решение в исходную систему, получим тождества: $\begin{cases} -3a - 2 + \frac{13}{2}a - \frac{3}{2}a + 2 - 2a = 0, \\ -6a - 4 + \frac{13}{2}a - \frac{3}{2}a + 2 + a = -2, \\ -3a - 2 + \frac{13}{2}a - \frac{9}{2}a + 6 + a = 4. \end{cases}$.

2. Задача

Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2. \end{cases}$

Решение:

а) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Число уравнений равно числу неизвестных.

...в случае, когда число уравнений равно числу неизвестных и матрица коэффициентов невырождена, если векторы столбцов коэффициентов $a1$,$a2$,...,an линейно независимы, то такая система совместна, и ее решение единственно при любом векторе свободных членов b ...

Вычислим определитель и ранг матрицы A:

In [2]:
```
A = np.array([[3,-1,1], [2,-5,-3], [1,1,-1]])
print(f'Матрица A:\n {A}')
print(f'Определитель A:\n {np.linalg.det(A):.0f}')
print(f'Ранг матрицы A: {np.linalg.matrix_rank(A)}')
```

```
Матрица A:
 [[ 3 -1  1]
 [ 2 -5 -3]
 [ 1  1 -1]]
Определитель A:
 32
Ранг матрицы A: 3
```

Определитель матрицы коэффициентов $31 \neq 0$, значит матрица невырождена. Ранг матрицы равен 3, значит векторы столбцов коэффициентов линейно независимы. Следовательно, исследуемая система уравнений **совместна** и имеет **единственное решение**.

б) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right)$
Число уравнений равно числу неизвестных.
При этом векторы коэффициентов линейно зависимы, и вектор свободных членов не принадлежит одномерному подпространству, которое они образуют. Решим систему уравнений методом Гаусса:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$
Следовательно, данная система **несовместна**.

в) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right)$
Число уравнений меньше числа неизвестных.
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 23 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{14-23x_3}{5}, \\ x_1 = 4 - 5x_3 - 2x_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{14-23x_3}{5}, \\ x_1 = \frac{-8+21x_3}{5}, \end{cases}$
Система **совместна** и имеет **бесконечное множество решений**. Запишем решение в общем виде:
Пусть $x_3 = a, a \in \mathbb{R}$, тогда искомое решение: $x = (\frac{21a-8}{5}, \frac{14-23a}{5}, a)$.

3. Задача

Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Решение:
Число уравнений равно числу неизвестных.
Так как ранг матрицы коэффициентов и ранг расширенной матрицы равны между собой и равны 4, т.е. числу неизвестных, следовательно, данная система линейных уравнений **совместна и определена**(имеет единственное решение).

In [3]:
```
A = np.array([[1,3,-2,4], [0,5,0,1], [0,0,3,0], [0,0,0,2]])
print(f'Матрица A:\n {A}')
A_ = np.array([[1,3,-2,4,3], [0,5,0,1,2], [0,0,3,0,4], [0,0,0,2,1]])
print(f'Расширенная матрица A_:\n {A_}')
print(f'Ранг матрицы A: {np.linalg.matrix_rank(A)}')
print(f'Ранг матрицы расширенной A_: {np.linalg.matrix_rank(A_)}')
```

```
Матрица A:
 [[ 1  3 -2  4]
 [ 0  5  0  1]
 [ 0  0  3  0]
 [ 0  0  0  2]]
Расширенная матрица A_:
 [[ 1  3 -2  4  3]
 [ 0  5  0  1  2]
 [ 0  0  3  0  4]
 [ 0  0  0  2  1]]
Ранг матрицы A: 4
Ранг матрицы расширенной A_: 4
```

In [4]:
```
# Проверка
b = np.array([3,2,4,1])
print(f'x={np.linalg.solve(A,b)}')
```

```
x=[2.76666667 0.3        1.33333333 0.5       ]
```

4. Задача

Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей. Найти соотношение между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right).$$

Решение:

...если $rank A < rank\tilde{A}$, то система несовместна...

In [5]:
```
A = np.array([[1,2,3], [4,5,6], [7,8,9]])
print(f'Матрица A:\n {A}')
print(f'Ранг матрицы A: {np.linalg.matrix_rank(A)}')
```

```
Матрица A:
 [[1 2 3]
 [4 5 6]
 [7 8 9]]
Ранг матрицы A: 2
```

Ранг матрицы коэффициентов равен 2, следовательно, чтобы система была несовместна, надо подобрать такие параметры a, b и c, при которых ранг расширенной матрицы будет равен 3.
Преобразуем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & \frac{b-4a}{-3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{c-7a}{-6} \end{array}\right)$$

Следовательно, искомое соотношение: $\frac{b-4a}{-3} \neq \frac{c-7a}{-6} \Leftrightarrow$

$$2b - c \neq a$$

Возьмем, например, $a = 3, b = 1, c = 1$:

In [6]:
```
A_ = np.array([[1,2,3,3], [4,5,6,1], [7,8,9,1]])
print(f'Расширенная матрица A_:\n {A_}')
print(f'Ранг расширенной матрицы A_: {np.linalg.matrix_rank(A_)}')
```

```
Расширенная матрица A_:
 [[1 2 3 3]
 [4 5 6 1]
 [7 8 9 1]]
Ранг расширенной матрицы A_: 3
```

Решение домашнего задания к уроку 7 “Системы линейных уравнений. Часть 2”

1. Задача

Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Решение:

а) Количество уравнений совпадает с количеством неизвестных.

Найдем определитель матрицы коэффициентов:

$det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0$, следовательно, система совместна.

Найдем определители $det A_1$, $det A_2$:

$det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} == -4 + 14 = 10,$

$det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} == 7 - 3 = 4$

Найдем решение по формулам Крамера:

$x_1 = \frac{det A_1}{det A} = \frac{10}{2} = 5,$

$x_2 = \frac{det A_2}{det A} = \frac{4}{2} = 2$

Ответ: (5,2)

б) Количество уравнений совпадает с количеством неизвестных.

Найдем определитель матрицы коэффициентов:

$det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 20 - 10 + 24 + 1 = 43 \neq 0$, следовательно, система совместна.

Найдем определители $det A_1$, $det A_2$, $det A_3$:

$det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} == 10 - 40 + 3 - 5 + 120 - 2 = 86,$

$det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} == -4 + 5 - 60 + 20 + 6 - 10 = -43$

$det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} == 2 + 40 + 4 - 20 + 16 + 1 = 43$

Найдем решение по формулам Крамера:

$x_1 = \frac{det A_1}{det A} = \frac{86}{43} = 2,$

$x_2 = \frac{det A_2}{det A} = \frac{-43}{43} = -1$

$x_3 = \frac{det A_3}{det A} = \frac{43}{43} = 1$

Ответ: (2,-1,1)

In [7]:
```
# Проверка - численное решение
# а)
A_a = np.array([[1,-2],[3,-4]])
b_a = np.array([1,7])
print(f'x_a={np.linalg.solve(A_a,b_a)}')
# б)
A_b = np.array([[2,-1,5],[1,1,-3],[2,4,1]])
b_b = np.array([10,-2,1])
print(f'x_b={np.linalg.solve(A_b,b_b)}')
```

```
x_a=[5. 2.]
x_b=[ 2. -1.  1.]
```

2*. Задача

Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов:

а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$$

Решение:

а) Друг под другом: сверху формируем матрицу U, снизу матрицу L:

U: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U$

L: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = L$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

б) Друг под другом: сверху формируем матрицу U, снизу матрицу L:

U: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U$

L: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} = L$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3*. Задача

Решить систему линейных уравнений методом LU-разложения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Решение:

Немного преобразуем исходную матрицу для простоты вычислений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 11 & 7 & 5 & -6 \\ 9 & 8 & 4 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 22 & 14 & 10 & -12 \\ 18 & 16 & 8 & -10 \end{array}\right)$$

Друг под другом: сверху формируем матрицу U, снизу матрицу L:

U: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 22 & 14 & 10 \\ 18 & 16 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -23 \\ 0 & 7 & -19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -23 \\ 0 & 0 & \frac{104}{3} \end{pmatrix} = U$

L: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \\ 9 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \\ 9 & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix} = L$

Решим систему $Ly = b$:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 11y_1 + y_2 = -12 \\ 9y_1 + \frac{7}{3}y_2 + y_3 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -23 \\ y_3 = \frac{104}{3} \end{cases}$$

Решим систему $Ux = y$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 - 23x_3 = -23 \\ \frac{104}{3}x_3 = \frac{104}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Ответ: (-1,0,1)

4*. Задача

Решить систему линейных уравнений методом Холецкого

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

Решение:

Произведем разложение на LL^T: $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{81} = 9,$

$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-45}{9} = -5,$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{45}{9} = 5,$

$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50 - 25} = \sqrt{25} = 5,$

$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{21}l_{31}) = \frac{1}{5}(-15 + 25) = \frac{10}{5} = 2,$

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38 - 25 - 4} = \sqrt{9} = 3.$

Получили матрицу $L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Решим систему $Ly = b$:

$$\begin{cases} 9y_1 = 531, \\ -5y_1 + 5y_2 = -460, \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 193. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 59, \\ y_2 = -33, \\ y_3 = -12. \end{cases}$$

И решим систему $L^T x = y$:

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59, \\ 5x_2 + 2x_3 = -33, \\ 3x_3 = -12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = -4. \end{cases}$$

Ответ: (6,-5,-4)

In [8]:
```python
# Проверка - численное решение
A = np.array([[81,-45,45],[-45,50,-15],[45,-15,38]])
b = np.array([531,-460,193])
print(f'x={np.linalg.solve(A,b)}')
```

```
x=[ 6. -5. -4.]
```

5*. Задача

Написать на Python программу с реализацией одного из изученных алгоритмов решения СЛАУ.

Решение:

In [9]:
```python
def solve_by_Cramer(A,b):
    x = []
    det_A = np.linalg.det(A)
    A_T = A.T
    for i in range(len(A_T)):
        Ai = copy.deepcopy(A_T)
        Ai[i] = b
        det_Ai = np.linalg.det(Ai.T)
        x.append(det_Ai / det_A)
    return x
```

In [10]:
```python
A = np.array([[2, -1, 5], [1, 1, -3], [2, 4, 1]])
b = np.array([10, -2, 1])
print(f'A={A}')
print(f'b={b}')
```

```
A=[[ 2 -1  5]
 [ 1  1 -3]
 [ 2  4  1]]
b=[10 -2  1]
```

In [11]:
```python
solve_by_Cramer(A,b)
```

Out[11]:
```
[2.0000000000000018, -1.0000000000000009, 1.0]
```

In [ ]: