Автор: Анна Смелова

```
In [1]: import numpy as np
```

Решение домашнего задания к уроку 5 “Линейные преобразования”

1. Задача

Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Характеристическое уравнение:

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-6)+12 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) - 3(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$

Получили собственные значения, равные 2 и 3.

Найдем собственные векторы: $\mathbf{A}x = \lambda x$

$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Для $\lambda_1 = 2$:

$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1, \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_1, \\ 0 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2a, \\ x_2 = -a, \forall a \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix}$

Для $\lambda_1 = 3$:

$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1, \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_1, \\ 0 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3b, \\ x_2 = -2b, \forall b \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3b \\ -2b \end{pmatrix}$

Получили два собственных значения:

$\lambda_1 = 2$, ему соответствует множество собственных векторов $x_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix}$, где a-любое число

и $\lambda_2 = 3$, ему соответствует множество собственных векторов $x_2 = \begin{pmatrix} 3b \\ -2b \end{pmatrix}$, где b-любое число.

```
In [2]: a = np.array([[-1, -6], [2, 6]])
        w, v = np.linalg.eig(a)

        print(f'Матрица A:\n{a}')
        print(f'Собственные значения:\n{w}')
        print(f'Собственные векторы:\n{v}')
```

```
Матрица A:
[[-1 -6]
 [ 2  6]]
Собственные значения:
[2. 3.]
Собственные векторы:
[[-0.89442719  0.83205029]
 [ 0.4472136  -0.5547002 ]]
```

2. Задача

Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что любой вектор является для него собственным.

Решение:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Возьмем вектор $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и посмотрим, как его преобразует данный оператор:

$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot a + 0 \cdot b \\ 0 \cdot a - 1 \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -x$

Получили, что произвольно взятый вектор $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ является собственным вектором данного поворота, заданного матрицей A, соответствующий собственному значению $\lambda = -1$.

3. Задача

Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение:

$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1 \\ -1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x$

Вектор $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором оператора, заданного матрицей A, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$.

4. Задача

Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение:

$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \lambda x.$

Следовательно, вектор $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ не является собственным вектором оператора, заданного матрицей A.