Автор: Анна Смелова

Решение домашнего задания к уроку 1 “Линейное пространство. Основные понятия. Часть 1”

1. Задача

Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x.$$

Решение:

$\alpha_1 e^x + \alpha_2 + \alpha_3(x + 1) + \alpha_4(x - e^x) = 0$

$e^x(\alpha_1 - \alpha_4) + x(\alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_2 + \alpha_3) = 0$

$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_4 = 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_4, \\ \alpha_3 = -\alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \end{cases}$

Пусть $\alpha_4 = 1$, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1.$

$f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) + f_4(x) = 0 \Rightarrow$ векторы линейно зависимы.

Ответ: линейно зависимы.

2. Задача

Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x + 1)^2.$$

Решение:

$2\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4(x + 1)^2 = 0$

$2\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^2 + 2\alpha_4 x + \alpha_4 = 0$

$(2\alpha_1 + \alpha_4) + x(\alpha_2 + 2\alpha_4) + x^2(\alpha_3 + \alpha_4) = 0$

$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 2\alpha_1, \\ \alpha_3 = -2\alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = -4\alpha_1 = 0, \end{cases}$

Пусть $\alpha_1 = 1$, тогда $\alpha_2 = -4, \alpha_3 = -2, \alpha_4 = 2.$

$f_1(x) - 4f_2(x) - 2f_3(x) + 2f_4(x) = 0 \Rightarrow$ векторы линейно зависимы.

Ответ: линейно зависимы.

3. Задача

Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

Решение:

$x = (2, 3, 5) = 2\frac{b_2}{2} + 3b_3 + 5\frac{b_1}{10} = b_2 + 3b_3 + \frac{1}{2}b_1$

Ответ: $x = (\frac{1}{2}, 1, 3)$.

4. Задача

Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$:

а) в базисе $1, x, x^2$;

б) в базисе $x^2, x - 1, 1.$

Решение:
а) базис $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$
$3x^2 - 2x + 2 = 3b_3 - 2b_2 + 2b_1 \Rightarrow$ координаты вектора $(2, -2, 3)$

б) базис $b_1 = x^2, b_2 = x - 1, b_3 = 1$
$3x^2 - 2x + 2 = 3b_1 - 2b_2 + 4b_3 \Rightarrow$ координаты вектора $(3, -2, 4)$

Ответ: а) $(2, -2, 3)$**, б)** $(3, -2, 4)$**.**

5. Задача

Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Решение:
Подмножество L линейного пространства V является его подпространством тогда и только тогда, когда для любых элементов $u, v \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

$$1)\ u + v \in L;$$
$$2)\ \alpha \cdot u \in L.$$

а) Пусть $u = (0, a, b); v = (c, 0, d); a, b, c, d \neq 0$
Тогда:

1. $u + v = (c, a, b + d) \notin L$
2. $\alpha \cdot u = (0, \alpha a, \alpha b) \in L; \alpha \cdot v = (\alpha c, 0, \alpha d) \in L$
   Так как первый пункт не выполняется, то совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю не является линейным подпространством.

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ будет являться линейным подпространством, так как линейная комбинация линейных комбинаций(а пункты 1) $u + v$ и 2) αu - линейные комбинации) будет линейной комбинацией исходных векторов, то есть будет лежать в данном пространстве.

Ответ: а) не является, б) является.

Решение домашнего задания к уроку 2 “Линейное пространство. Основные понятия. Часть 2”

In [1]:
```
import numpy as np
from numpy.linalg import norm
```

1. Задача

Найти скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}$:

а) $x = (0, -3, 6),\ \ y = (-4, 7, 9);$
б) $x = (7, -4, 0, 1),\ \ y = (-3, 1, 11, 2).$

Решение:
а) $(x, y) = 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 33$
б) $(x, y) = 7 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 11 + 1 \cdot 2 = -23$

In [2]:
```
print(f'Скалярное произведение пункта а:{np.dot(np.array([0, -3, 6]), np.array([-4, 7, 9]))}')
print(f'Скалярное произведение пункта б:{np.dot(np.array([7, -4, 0, 1]), np.array([-3, 1, 11, 2]))}')
```

```
Скалярное произведение пункта а:33
Скалярное произведение пункта б:-23
```

Ответ: а) 33**, б)** -23**.**

2. Задача

Найти нормы векторов (4, 2, 4) и (12, 3, 4) и угол между ними

Решение:
$a = (4, 2, 4)$
$\|a\|_1 = \sum_i |x_i| = |4| + |2| + |4| = 10$ - манхэттенская норма
$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} = \sqrt{|4|^2 + |2|^2 + |4|^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$ - евклидова норма

$b = (12, 3, 4)$
$\|b\|_1 = \sum_i |x_i| = |12| + |3| + |4| = 19$ - манхэттенская норма
$\|b\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} = \sqrt{|12|^2 + |3|^2 + |4|^2} = \sqrt{144 + 9 + 16} = \sqrt{169} = 13$ - евклидова норма

In [3]:
```
a = np.array([4, 2, 4])
print(f'манхэттенская норма(l1) вектора a:{norm(a, ord=1)}')
print(f'евклидова норма(l2) вектора a:{norm(a, ord=2)}')
b = np.array([12, 3, 4])
print(f'манхэттенская норма(l1) вектора b:{norm(b, ord=1)}')
print(f'евклидова норма(l2) вектора b:{norm(b, ord=2)}')
```

```
манхэттенская норма(l1) вектора a:10.0
евклидова норма(l2) вектора a:6.0
манхэттенская норма(l1) вектора b:19.0
евклидова норма(l2) вектора b:13.0
```

Ответ: а) 10 **и** 6**, б)** 19 **и** 13**.**

3. Задача

Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов;
б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

Решение:
Линейное пространство над полем вещественных чисел называется евклидовым пространством, если на нем введено правило, согласно которому каждой упорядоченной паре векторов x и y поставлено в соответствие вещественное число, называемое скалярным произведением и обозначаемое символом (x, y).

При этом указанное правило должно подчиняться четырем аксиомам:
1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

а) $\overline{u} = (x, y), \overline{v} = (a, b)$
$u = \sqrt{x^2 + y^2}, v = \sqrt{a^2 + b^2}$, тогда: $(\overline{u}, \overline{v}) = u \cdot v$
1) $(\overline{u}, \overline{v}) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = (\overline{v}, \overline{u})$ - выполнено
2) $(\lambda\overline{u}, \overline{v}) = \lambda\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda(\overline{u}, \overline{v})$ - выполнено
3) $\overline{u_1} + \overline{u_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); u_1 + u_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$
$(\overline{u_1} + \overline{u_2}, \overline{v}) = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$
$(\overline{u_1}, \overline{v}) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$
$(\overline{u_2}, \overline{v}) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$
$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \neq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \Rightarrow (\overline{u_1} + \overline{u_2}, \overline{v}) = (\overline{u_1}, \overline{v}) + (\overline{u_2}, \overline{v})$ - не выполнено
$\Rightarrow$ если за скалярное произведение принять произведение длин векторов, то линейное пространство не будет евклидовым.

б) $\overline{u} = (x, y), \overline{v} = (a, b)$
$(\overline{u}, \overline{v}) = 3(x \cdot a + y \cdot b)$
1) $(\overline{u}, \overline{v}) = 3(x \cdot a + y \cdot b) = 3(a \cdot x + b \cdot y) = (\overline{v}, \overline{u})$ - выполнено
2) $(\lambda\overline{u}, \overline{v}) = 3(\lambda \cdot x \cdot a + \lambda \cdot y \cdot b) = 3\lambda(x \cdot a + y \cdot b) = \lambda(\overline{u}, \overline{v})$ - выполнено
3) $\overline{u_1} + \overline{u_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$(\overline{u_1} + \overline{u_2}, \overline{v}) = 3((x_1 + x_2) \cdot a + (y_1 + y_2) \cdot b) = 3(x_1 \cdot a + x_2 \cdot a + y_1 \cdot b + y_2 \cdot b) = 3(x_1 \cdot a + y_1 \cdot b) + 3(x_2 \cdot a + y_2 \cdot b) = (\overline{u_1}, \overline{v}) + (\overline{u_2}, \overline{v})$ - выполнено
4) $(\overline{u}, \overline{u}) = 3(x \cdot x + y \cdot y) = 3(x^2 + y^2) > 0; 3(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow \overline{u} = 0$ - выполнено
$\Rightarrow$ если за скалярное произведение принять утроенное обычное скалярное произведение векторов, то линейное пространство будет евклидовым.

Ответ: а) не будет, б) будет.

4. Задача

Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$:

а) $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$;
б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$;
в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1)$;
г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$?

Решение:
Определение. В конечномерном евклидовом пространстве базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется ортонормированным, если

$(e_i, e_j) = 0\ \forall\ i \neq j$ и $(e_i, e_i) = 1\ \forall\ i \in [1, n]$.

а) $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1)$
$(e_1, e_1) = 1 + 0 + 0 = 1; (e_2, e_2) = 0 + 0 + 1 = 1$
$(e_1, e_2) = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow$ базис ортонормированный

б) $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), e_3 = (0, 0, 1)$
$(e_1, e_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1; (e_2, e_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1; (e_3, e_3) = 0 + 0 + 1 = 1$
$(e_1, e_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0; (e_1, e_3) = 0 + 0 + 0 = 0; (e_2, e_3) = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow$ базис ортонормированный

в) $e_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), e_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), e_3 = (0, 0, 1)$
$(e_1, e_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}, (e_2, e_2) = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, (e_3, e_3) = 0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ базис не ортонормированный

г) $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$
$(e_1, e_1) = 1 + 0 + 0 = 1; (e_2, e_2) = 0 + 1 + 0 = 1; (e_3, e_3) = 0 + 0 + 1$
$(e_1, e_2) = 0 + 0 + 0; (e_1, e_3) = 0 + 0 + 0; (e_2, e_3) = 0 + 0 + 0 \Rightarrow$ базис ортонормированный

Ответ: а) ортонормированный, б) ортонормированный, в) не ортонормированный, г) ортонормированный.

In [ ]: