

```
In [1]: import numpy as np
```

Решение домашнего задания к уроку 3 “Матрицы и матричные операции. Часть 1”

1. Задача

Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерности полученных матриц:

- а) A — матрица 4×2 , B — матрица 4×2 ;
- б) A — матрица 2×5 , B — матрица 5×3 ;
- в) A — матрица 8×3 , B — матрица 3×8 ;
- г) A — квадратная матрица 4×4 , B — квадратная матрица 4×4 .

Решение:

Произведением матрицы $A = \|a_{ij}\|$, имеющей порядки m и n , и матрицы $B = \|b_{ij}\|$, имеющей порядки n и k , называется матрица $C = \|c_{ij}\|$, имеющая порядки m и k
Матрицу A можно умножить не на всякую матрицу B : необходимо, чтобы число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B .

- а) A — матрица 4×2 , B — матрица 4×2
 $4 \neq 2 \Rightarrow$ произведение AB не определено, аналогично произведение BA не определено.
- б) A — матрица 2×5 , B — матрица 5×3
 $5 = 5 \Rightarrow$ произведение AB определено и имеет размерность 2×3
 $2 \neq 3 \Rightarrow$ произведение BA не определено
- в) A — матрица 8×3 , B — матрица 3×8
 $8 = 8 \Rightarrow$ произведение AB определено и имеет размерность 8×8
 $3 = 3 \Rightarrow$ произведение BA определено и имеет размерность 3×3
- г) A — квадратная матрица 4×4 , B — квадратная матрица 4×4
 $4 = 4 \Rightarrow$ произведения AB и BA определены и имеют размерности 4×4 и 4×4 .

2. Задача

Найти сумму и произведение матриц

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение:

Сумма: $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Произведение: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 & -1-10 \\ 12+0 & -3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$

Произведение: $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -8+0 \\ 0+15 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$

```
In [2]: A = np.array([[1, -2], [3, 0]])
        B = np.array([[4, -1], [0, 5]])

        print(f'Матрица A:\n {A}')
        print(f'Матрица B:\n {B}')
        print(f'Сумма A+B:\n {A+B}')
        print(f'Матрица AB:\n {np.dot(A, B)}')
        print(f'Матрица BA:\n {np.dot(B, A)}')
```

Матрица A:
[[1 -2]
[3 0]]
Матрица B:
[[4 -1]
[0 5]]
Сумма A+B:
[[5 -3]
[3 5]]
Матрица AB:
[[4 -11]
[12 -3]]
Матрица BA:
[[1 -8]
[15 0]]

3. Задача

Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию $3A - 2B + 4C$ для матриц

$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

1) $3A = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$

2) $2B = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

3) $4C = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

4) $3A - 2B + 4C = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0 + 8 & 21 - 10 - 16 \\ 9 - 4 + 4 & -18 + 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$

```
In [3]: A = np.array([[1, 7], [3, -6]])
        B = np.array([[0, 5], [2, -1]])
        C = np.array([[2, -4], [1, 1]])
        print(f'Матрица A:\n {A}')
        print(f'Матрица B:\n {B}')
        print(f'Матрица C:\n {C}')
        print(f'3*A-2*B+4*C:\n {3*A-2*B+4*C}')
```

Матрица A:
[[1 7]
[3 -6]]
Матрица B:
[[0 5]
[2 -1]]
Матрица C:
[[2 -4]
[1 1]]
3*A-2*B+4*C:
[[11 -5]
[9 -12]]

4. Задача

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+1 & 20-2 & 8+3 \\ 20-2 & 25+4 & 10-6 \\ 8+3 & 10-6 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+25+4 & 4-10+6 \\ 4-10+6 & 1+4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

```
In [4]: A = np.array([[4, 1], [5, -2], [2, 3]])
print(f'Матрица A:\n {A}')
A_T = A.T
print(f'Транспонированная матрица AT:\n {A_T}')
print(f'Матрица AA_T:\n {np.dot(A, A_T)}')
print(f'Матрица A_TA:\n {np.dot(A_T, A)}')
```

Матрица A:

```
[[ 4  1]
 [ 5 -2]
 [ 2  3]]
```

Транспонированная матрица AT:

```
[[ 4  5  2]
 [ 1 -2  3]]
```

Матрица AA_T:

```
[[17 18 11]
 [18 29  4]
 [11  4 13]]
```

Матрица A_TA:

```
[[45  0]
 [ 0 14]]
```

5*. Задача

Написать на Python функцию для перемножения двух произвольных матриц, не используя NumPy.

Решение:

```
In [5]: # Вспомогательная функция
# Возвращает транспонированную матрицу
def get_matrix_transpose(A):
    A_T = []
    n = len(A)
    m = len(A[0])
    for j in range(m):
        col = []
        for i in A:
            col.append(i[j])
        A_T.append(col)
    return A_T

# Функция для перемножения двух матриц
# Матрицы задаем обычным двумерным массивом
# Возвращает результат произведения
def get_matrix_multiply(A,B):
    if not A or not A[0] or not B or not B[0] or type(A[0])==int or type(B[0])==int:
        print(f'Укажите матрицы, используя двумерные массивы.')
        return 'error'

    n = len(A) # количество строк A
    m = len(A[0]) # количество столбцов A
    p = len(B) # количество строк B
    k = len(B[0]) # количество столбцов B
    if n != k:
        print(f'Произведение не определено, причина: размерность указанных матриц')
        return 'error'

    B_T = get_matrix_transpose(B)
    C = [[None]*n for _ in range(n)] # результирующая матрица
    for i in range(n): # зафиксировали строку A
        for j in range(k): # зафиксировали столбец B(строку B_T)
            el = 0 # [i,j] элемент результирующей матрицы
            for ii in range(m): # зафиксировали элемент строки A
                el += A[i][ii]*B_T[j][ii]
            C[i][j] = el

    print(f'Первая матрица:\n {A}')
    print(f'Вторая матрица:\n {B}')
    print(f'Произведение:\n {C}')
    return C
```

```
In [6]: # Test
A = [[1, -2], [3, 0]]
B = [[4, -1], [0, 5]]
get_matrix_multiply(A,B)
print(f'Проверка через numpy:\n {np.dot(np.array(A), np.array(B))}\n')
C = [[4, 1], [5, -2], [2, 3]]
C_T = [[4, 5, 2], [1, -2, 3]]
get_matrix_multiply(C,C_T)
print(f'Проверка через numpy:\n {np.dot(np.array(C), np.array(C_T))}\n')
```

Первая матрица:
[[1, -2], [3, 0]]
Вторая матрица:
[[4, -1], [0, 5]]
Произведение:
[[4, -11], [12, -3]]
Проверка через numpy:
[[4 -11]
[12 -3]]

Первая матрица:
[[4, 1], [5, -2], [2, 3]]
Вторая матрица:
[[4, 5, 2], [1, -2, 3]]
Произведение:
[[17, 18, 11], [18, 29, 4], [11, 4, 13]]
Проверка через numpy:
[[17 18 11]
[18 29 4]
[11 4 13]]

Решение домашнего задания к уроку 4 “Матрицы и матричные операции. Часть 2”

1. Задача

Вычислить определитель:

а)
$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix};$$

б)
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix};$$

в)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение:

а)
$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

б)
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 9 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 180 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 180$$

в)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 45 + 96 + 84 - 105 - 72 - 48 = 0$$

```
In [7]: b = np.array([[4, 2, 3], [0, 5, 1], [0, 0, 9]])
print(f'Матрица б):\n {b}')
print(f'Определитель б):\n {np.linalg.det(b):.0f}')
c = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
print(f'Матрица в):\n {c}')
print(f'Определитель в):\n {np.linalg.det(c):.0f}')
```

Матрица б):
[[4 2 3]
[0 5 1]
[0 0 9]]
Определитель б):
180
Матрица в):
[[1 2 3]
[4 5 6]
[7 8 9]]
Определитель в):
-0

2. Задача

Определитель матрицы A равен 4. Найти:

- а) $\det(A^2)$;
- б) $\det(A^T)$;
- в) $\det(2A)$.

Решение:

а) $\det(AB) = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det(A^2) = \det(AA) = \det A \cdot \det A = 4^2 = 16$

б) $\det A^T = \det A = 4$

в) $\det(2A)$ зависит от размерности матрицы A. Если матрица A размером $n \times n$, то $\det(2A) = 2^n \cdot \det(A) = 2^n \cdot 4$

3. Задача

Доказать, что матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

вырожденная.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-2) \cdot (-14) \cdot 13 + 7 \cdot 6 \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 \cdot 7 - (-3) \cdot (-14) \cdot (-3) - 7 \cdot 4 \cdot 13 - (-2) \cdot 6 \cdot 7 = 364 - 126 - 84 + 126 - 364 + 84 = 0$$

Матрица называется сингулярной, или вырожденной, если ее определитель равен нулю. чтд.

```
In [8]: A = np.array([[ -2, 7, -3], [4, -14, 6], [-3, 7, 13]])
print(f'Матрица A:\n {A}')
print(f'Определитель A:\n {np.linalg.det(A):.0f}')
```

Матрица A:

```
[[ -2  7 -3]
 [  4 -14 6]
 [-3  7 13]]
```

Определитель A:

```
0
```

4. Задача

Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

Решение:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⇒ ранг матрицы A равен 2.

б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⇒ ранг матрицы B равен 3.

```
In [9]: A = np.array([[1, 2, 3], [1, 1, 1], [2, 3, 4]])
r_A = np.linalg.matrix_rank(A)
print(f'Ранг матрицы A: {r_A}')
```

Ранг матрицы A: 2

```
B = np.array([[0, 0, 2, 1], [0, 0, 2, 2], [0, 0, 4, 3], [2, 3, 5, 6]])
r_B = np.linalg.matrix_rank(B)
print(f'Ранг матрицы B: {r_B}')
```

Ранг матрицы B: 3

5*. Задача

Написать на Python функцию для вычисления определителя матрицы методом разложения по первой строке.

Решение:

```
In [10]: def get_det_by_first_row(A):
print(f'Считаем для матрицы: {A}')
if not A or not A[0] or type(A[0])!=int:
    print(f'Укажите матрицу, используя двумерный массив.')
    return 'error'
n = len(A)  # количество строк=количество столбцов
if n == 1:
    print(f'det={n}\n')
    return n
if n==2:
    print(f'det={A[0][0]*A[1][1] - A[0][1]*A[1][0]}\n')
    return A[0][0]*A[1][1] - A[0][1]*A[1][0]
det = 0
first_row = A[0]  # первая строка
for i in range(n):
    B = [[None]*(n-1) for _ in range(n-1)]
    for p in range(n):
        for k in range(n):
            if p != 0:
                if k<i:
                    B[p-1][k] = A[p][k]
                elif k>i:
                    B[p-1][k-1] = A[p][k]
    print(f'Элемент разложения по первой строке: {first_row[i]*(-1)**(i)}*{B}\n')
    det += first_row[i]*(-1)**(i)*get_det_by_first_row(B)
return det
```

In [11]:

```
# Test
A = [[-1, 2, -3, 4], [5, -6, 7, 8], [9, 10, -11, 12], [13, -14, 15, 16]]
print(f'Определитель матрицы: {get_det_by_first_row(A)}')
print()
print(f'Проверка через numpy:\n {np.linalg.det(np.array(A)):.0f}')
```

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \\ 13 & -14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$
Элемент разложения по первой строке: $-1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 7 & 8 \\ 10 & -11 & 12 \\ -14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} -6 & 7 & 8 \\ 10 & -11 & 12 \\ -14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$
Элемент разложения по первой строке: $-6 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} -11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$
 $\det = -356$

Элемент разложения по первой строке: $-7 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ -14 & 16 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ -14 & 16 \end{bmatrix}$
 $\det = 328$

Элемент разложения по первой строке: $8 \cdot \begin{vmatrix} 10 & -11 \\ -14 & 15 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 10 & -11 \\ -14 & 15 \end{bmatrix}$
 $\det = -4$

Элемент разложения по первой строке: $-2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & -11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & -11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$
Элемент разложения по первой строке: $5 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} -11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$
 $\det = -356$

Элемент разложения по первой строке: $-7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$
 $\det = -12$

Элемент разложения по первой строке: $8 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 9 & -11 \\ 13 & 15 \end{bmatrix}$
 $\det = 278$

Элемент разложения по первой строке: $-3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & -14 & 16 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & -14 & 16 \end{bmatrix}$
Элемент разложения по первой строке: $5 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ -14 & 16 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ -14 & 16 \end{bmatrix}$
 $\det = 328$

Элемент разложения по первой строке: $6 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$
 $\det = -12$

Элемент разложения по первой строке: $8 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 13 & -14 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & -14 \end{bmatrix}$
 $\det = -256$

Элемент разложения по первой строке: $-4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 9 & 10 & -11 \\ 13 & -14 & 15 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 9 & 10 & -11 \\ 13 & -14 & 15 \end{bmatrix}$
Элемент разложения по первой строке: $5 \cdot \begin{vmatrix} 10 & -11 \\ -14 & 15 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 10 & -11 \\ -14 & 15 \end{bmatrix}$
 $\det = -4$

Элемент разложения по первой строке: $6 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 9 & -11 \\ 13 & 15 \end{bmatrix}$
 $\det = 278$

Элемент разложения по первой строке: $7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 13 & -14 \end{vmatrix}$

Считаем для матрицы: $\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & -14 \end{bmatrix}$
 $\det = -256$

Определитель матрицы: 1152

Проверка через numpy:
1152

In []: