

Решение домашнего задания к уроку 4 “Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей. Равномерное и нормальное распределение. Центральная предельная теорема”

1. Задача

Случайная непрерывная величина А имеет равномерное распределение на промежутке (200, 800].

Найдите ее среднее значение и дисперсию.

Решение:

Равномерное распределение:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b; \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$
$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$a = 200, b = 800$$
$$M(X) = \frac{200+800}{2} = 500$$
$$D(X) = \frac{(800-200)^2}{12} = 30000$$

Ответ: среднее значение 500, дисперсия 30000.

2. Задача

О случайной непрерывной равномерно распределенной величине В известно, что ее дисперсия равна 0.2.

Можно ли найти правую границу величины В и ее среднее значение зная, что левая граница равна 0.5?

Если да, найдите ее.

Решение:

Равномерное распределение:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b; \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$
$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$D(X) = 0.2, a = 0.5, b = ?, M(X) = ?$$
$$\frac{(b-0.5)^2}{12} = 0.2 \Rightarrow \frac{(2b-1)^2}{4} = 2.4 \Rightarrow (2b-1)^2 = 9.6 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{9.6}+1}{2} = 2.049193338482967$$
$$M(X) = \frac{0.5+\frac{\sqrt{9.6}+1}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{9.6}+1}{4} = \frac{2+\sqrt{9.6}}{4} = 1.2745966692414834$$

```
In [1]: print(f'b={(9.6**(0.5)+1) / 2}')
        print(f'M(X)={(2+9.6**(0.5)) / 4}')

b=2.049193338482967
M(X)=1.2745966692414834
```

Ответ: правая граница 2.049193338482967, среднее значение 1.2745966692414834.

3. Задача

Непрерывная случайная величина X распределена нормально и задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{32}}$$

Найдите:

а). $M(X)$

б). $D(X)$

в). $std(X)$ (среднее квадратичное отклонение)

Решение:

Нормальное распределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$a = M(X), \sigma^2 = D(X).$

а) $M(X) = a = -2$

б) $D(X) = \sigma^2 = 16$

в) $std(X) = \sigma = 4$

Ответ: а) -2 , б) 16 , в) 4 .

4. Задача

Рост взрослого населения города X имеет нормальное распределение.

Причем, средний рост равен 174 см, а среднее квадратичное отклонение равно 8 см.

Какова вероятность того, что случайным образом выбранный взрослый человек имеет рост:

а). больше 182 см

б). больше 190 см

в). от 166 см до 190 см

г). от 166 см до 182 см

д). от 158 см до 190 см

е). не выше 150 см или не ниже 190 см

ё). не выше 150 см или не ниже 198 см

ж). ниже 166 см.

Решение:

По правилу 3 сигм:

а) больше 182 см: $k = \frac{182-174}{8} = 1 \Rightarrow$ в диапазоне $\mu \pm 1\sigma$ находятся 68.26% значений, значит вероятность того, что рост будет более 182см или менее $174 - 8 = 166$ см равна $100 - 68.26 = 31.74\%$, тогда вероятность того, что случайным образом выбранный человек имеет рост выше 182см равна $P(> 182) = \frac{31.74}{2} = 15.87\%$.

б) больше 190 см: $k = \frac{190-174}{8} = 2 \Rightarrow$ в диапазоне $\mu \pm 2\sigma$ находятся 95.44% значений значит вероятность того, что рост будет более 190см равна $P(> 190) = \frac{100-95.44}{2} = 2.28\%$.

в) от 166 см до 190 см: вероятность того, что рост будет в диапазоне от 174см до 190см равна $P(174 < x < 190) = P(\mu + 2\sigma) = \frac{P(\mu \pm 2\sigma)}{2} = \frac{P(158 < x < 190)}{2} = \frac{95.44}{2} = 47.72\%$;
вероятность того, что рост будет в диапазоне от 166см до 174см равна $P(166 < x < 174) = P(\mu - 1\sigma) = \frac{P(\mu \pm 1\sigma)}{2} = \frac{P(166 < x < 182)}{2} = \frac{68.26}{2} = 34.13\%$;
вероятность того, что рост будет в диапазоне от 166 см до 190 см равна $P(166 < x < 190) = P(166 < x < 174) + P(174 < x < 190) = 34.13 + 47.72 = 81.85\%$.

г) от 166 см до 182 см: $P(166 < x < 182) = P(\mu \pm 1\sigma) = 68.26\%$.

д) от 158 см до 190 см: $P(158 < x < 190) = P(\mu \pm 2\sigma) = 95.44\%$.

е) не выше 150 см или не ниже 190 см:
 $P(150 < x < 174) = P(\mu - 3\sigma) = \frac{P(\mu \pm 3\sigma)}{2} = \frac{P(150 < x < 198)}{2} = \frac{99.72}{2} = 49.86\%$;
 $P(174 < x < 190) = P(\mu + 2\sigma) = \frac{P(\mu \pm 2\sigma)}{2} = \frac{P(158 < x < 190)}{2} = \frac{95.44}{2} = 47.72\%$;
 $P(x < 150 \& x > 190) = 100 - P(150 < x < 190) = 100 - P(150 < x < 174) - P(174 < x < 190) = 100 - 49.86 - 47.72 = 2.42\%$.

ё) не выше 150 см или не ниже 198 см: $P(x < 150 \& x > 198) = 1 - P(\mu \pm 3\sigma) = 100 - 99.72 = 0.28\%$.

ж) ниже 166 см: $k = \frac{174-166}{8} = 1 \Rightarrow$ в диапазоне $\mu \pm 1\sigma$ находятся 68.26% значений, значит вероятность того, что рост будет ниже 166см или более $174 + 8 = 182$ см равна $100 - 68.26 = 31.74\%$, тогда вероятность того, что случайным образом выбранный человек имеет рост ниже 166см равна $P(< 166) = \frac{31.74}{2} = 15.87\%$.

z-таблица:

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

а) больше 182 см: $\frac{182-174}{8} = 1 \Rightarrow P(X > 182) = 1 - P(X < 182) = 1 - P(+1\sigma) = 1 - 0.8413 = 0.1587 = 15.87\%$.

б) больше 190 см: $\frac{190-174}{8} = 2 \Rightarrow P(X > 190) = 1 - P(X < 190) = 1 - P(+2\sigma) = 1 - 0.9772 = 0.0228 = 2.28\%$.

в) от 166 см до 190 см:

$P(166 < X < 190) = P(X < 190) - P(X < 166) = P(+2\sigma) - P(-1\sigma) = P(+2\sigma) - (1 - P(+1\sigma)) = 0.9772 - (1 - 0.8413) = 0.8185 = 81.85\%$.

г) от 166 см до 182 см: $P(166 < X < 182) = P(X < 182) - P(X < 166) = P(+1\sigma) - (1 - P(+1\sigma)) = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826 = 68.26\%$.

д) от 158 см до 190 см: $P(158 < X < 190) = P(X < 190) - P(X < 158) = P(+2\sigma) - (1 - P(+2\sigma)) = 0.9772 - (1 - 0.9772) = 0.9544 = 95.44\%$.

е) не выше 150 см или не ниже 190 см:

$P(X < 150 \& X > 190) = P(X < 150) + (1 - P(X < 190)) = P(-3\sigma) + (1 - P(+2\sigma)) = 1 - P(+3\sigma) + 1 - P(+2\sigma) = 1 - 0.9987 + 1 - 0.9772 = 0.0241 = 2.41\%$

ё) не выше 150 см или не ниже 198 см: $P(X < 150 \& X > 198) = P(X < 150) + (1 - P(X < 198)) = 1 - P(+3\sigma) + 1 - P(+3\sigma) = 0.0026 = 0.26\%$.

ж) ниже 166 см: $P(X < 166) = P(-1\sigma) = 1 - P(+1\sigma) = 1 - 0.8413 = 0.1587 = 15.87\%$.

Ответ: Результаты, полученные через правило 3 сигм и через z-таблицы, совпадают с точностью до сотых долей процента:

а) 15.87%, б) 2.28%, в) 81.85%, г) 68.26%, д) 95.44%, е) 2.41%, ё) 0.26%, ж) 15.87%.

5. Задача

На сколько сигм (средних квадратичных отклонений) отклоняется рост человека, равный 190 см, от математического ожидания роста в популяции, в которой $M(X) = 178$ см и $D(X) = 25$ кв.см?

Решение:

$$k = \frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{190 - 178}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} = 2.4$$

Рост человека, равный 190, отклоняется от математического ожидания на 2.4σ .

Вероятность такого отклонения: $P(X = 190) = 1 - P(X < 190) = 1 - P(+2.4\sigma) = 1 - 0.9918 = 0.0082 = 0.82\%$.

Ответ: 2.4σ .