Algorytmy dekompozycji QR

Anna Szczepaniak, 210094

Praca licencjacka przygotowana pod opieką dr inż. Piotra Kowalskiego

19.09.2019

Twierdzenie (Grama-Schmidta[4])

Dla każdego układu liniowo niezależnego wektorów $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ *w przestrzeni euklidesowej istnieje układ ortonormalny* $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ *taki, że*

$$span(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k) = span(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$$

dla każdej liczby k *ze zbioru* $(1, \ldots, n)$.

Lemat (O postaci macierzowej w algorytmie Grama-Schmidta)

Algorytm Grama Schmidta jest równoważny następującym transformacjom macierzy. Załóżmy, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ są kolumnami macierzy A oraz że są liniowo niezależne. Wtedy z twierdzenia Grama-Schmidta istnieją wektory $u_1, \ldots, u_n$, które są transformacją wektorów $v_1, \ldots, v_n$ przez algorytm Grama-Schmidta. Niech U będzie macierzą utworzoną kolumnowo z tych wektorów $u_1, \ldots, u_n$. Wtedy

$$U = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{(v_2;u_1)}{(u_1;u_1)} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{(v_3;u_1)}{(u_1;u_1)} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{(v_3;u_2)}{(u_2;u_2)} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{(v_n;u_1)}{(u_1;u_1)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{(v_n;u_2)}{(u_2;u_2)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{(v_n;u_3)}{(u_3;u_3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{(v_n;u_{n-1})}{(u_{n-1};u_{n-1})} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lemat (Macierz transformująca algorytmu Grama-Schmidta)

Niech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *będzie macierzą, której kolumny są liniowo niezależne. Niech* $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *będzie macierzą uzyskaną poprzez połączenie jako kolumn wektorów uzyskanych z algorytmu Grama-Schmidta. Wtedy istnieje trójkąta górna macierz* $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *taka, że*

$$U = A \cdot T,$$

gdzie $T = [t_{ij}]_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$ *i* $t_{kk} = 1$*, dla dowolnego* $k \in \{1, \ldots, n\}$*.*

Twierdzenie (O rozkładzie QR)

Niech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, gdzie $m \geqslant n$, której kolumny są liniowo niezależne. Istnieje wtedy jedyny rozkład QR, tzn. że istnieją takie macierze Q i R, że

$$A = QR$$

i

- *macierz $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jest taka, że*

  $$Q^T \cdot Q = D,$$

  gdzie $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$, oraz $d_k > 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, oraz

- *macierz $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest trójkątną górną spełniającą dodatkowo warunek*

  $$r_{kk} = 1$$

  dla wszystkich $k = 1, 2, \ldots, n$.

Uwaga

Rozkładem QR nazwiemy również sytuacje, gdy

$$A = QR$$

oraz $Q^T Q = I$ *i* R *jest macierzą trójkątną górną, niekoniecznie z* 1 *na przekątnej. Powodem tego jest, że prezentowana tu postać oraz postać z twierdzenia 4 są sobie równoważne.*

Definicja (Macierz Householdera)

Macierzą Householdera H, zwaną również refleksją, nazywamy macierz postaci

$$H = I - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T,$$

gdzie $\|v\|_2 = 1$.

Twierdzenie (Transformacja Householdera)

Niech $\mathbf{v} \in R^m$, *i* $\mathbf{v} \neq 0$. *Wówczas transformacją Householdera nazywamy macierz postaci:*

$$H = I - W\mathbf{v}\mathbf{v}^T,$$

gdzie

$$W = \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}.$$

Macierz H *jest macierzą symetryczną i ortogonalną.*

Przykład

1. *Wyznaczamy* P_1 *tak, że:*

$$A_1 \equiv P_1 \cdot A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}.$$

2. *Wyznaczamy*

$$P_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2' \end{array}\right]$$

tak, że

$$A_2 \equiv P_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}.$$

```
> house = function(x) {
+   norm_x = sqrt(t(x)\cdot x)
+   if (x[1] > 0) {
+     x[1] = x[1] + norm_x;
+   } else {
+     x[1] = x[1] - norm_x;
+   }
+   return(x)
+ }
```

```
> qr_householer = function(A)
+ {
+  R = A
+  dimm = dim(A)
+  n = dimm[2]
+   m = dimm[1]
+   Q = diag(n)
+   for (i in 1:min(m-1,n)){
+     u = house(R[i:m,i])
+     den =  (t(u) %*% u)[1,1]
+     P = diag(n+1-i) - 2/den * ( u%*% t(u)  )
+     R[i:m,i:n] = P %*% R[i:m,i:n]
+     if (i>1)
+       Q[i:n,1:(i-1)] = P %*% Q[i:n,1:(i-1)]
+     Q[i:n,i:n] = P %*% Q[i:n,i:n]
+   }
+   return(list(R=R, Q=t(Q)))
+ }
```

Definicja (Macierz Givensa)

Niech $i, j \in 1, \ldots, n$ *i* $\theta \in \mathbb{R}$. *Macierz* $R(i,j,\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *zdefiniowana następująco:*

$$R(i,j,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą rotacji Givensa.

Przykład

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(1,2)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(1,3)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(1,4)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}$$

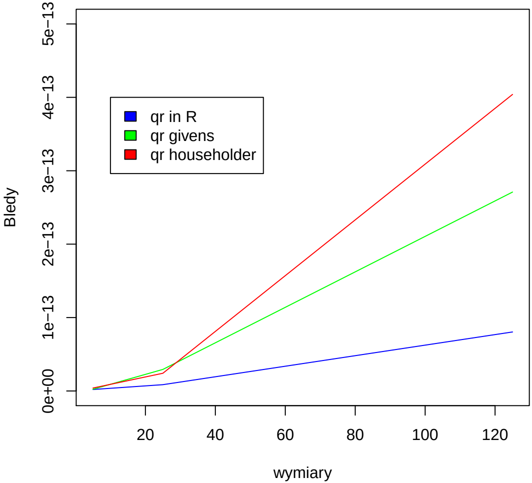
$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(2,3)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(2,4)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(3,4)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

```
> givens = function(i,j,A){
+   dimm = dim(A)
+   n = dimm[1]
+   G = diag(n)
+   p = sqrt((A[i,i])^2 + (A[j,i])^2)
+   G[i,i] = A[i,i]/ p
+   G[i,j] = (A[j,i])/p
+   G[j,i] = -(A[j,i])/p
+   G[j,j] = A[i,i]/ p
+
+ return(G)
+
+ }
```

```
> qr_givens = function(A){
+   R = A
+
+   n = dim(A)[2]
+   m = dim(A)[1]
+   Q = diag(n)
+   for (i in 1:(n-1)) {
+     for (j in (i+1):m) {
+       G = givens(i,j,R)
+       R = G %*% R
+       Q = Q %*% t(G)
+     }
+   }
+   return(list(R=R, Q=Q))
+ }
```

Z eksperymentów, które przeprowadziliśmy wypływa wniosek, iż nasze algorytmy dekompozycji QR są nieco gorsze jakościowo od gotowej funkcji w R.



Bibliografia

[1] Dokumentacja online języka r.
`https://www.rdocumentation.org`.

[2] Åke Björck. *Numerical Methods for Least Squares Problems*. Siam, 1996.

[3] James W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*. Siam, 1997.

[4] Jacek Jędrzejewski and Tadeusz Poreda. *Algebra liniowa z elementami geometrii analitycznej*. Politechnika Łodzka, 2011.

[5] James H. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*. Clarendon Press, Oxford University Press, 1988.