

# POLITECHNIKA ŁÓDZKA

WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ, INFORMATYKI I  
MATEMATYKI STOSOWANEJ

Kierunek: Matematyka

Specjalność: Matematyczne Metody Analizy Danych Biznesowych

---

## Algorytmy Dekompozycji QR

Anna Szczepaniak  
Nr albumu: 210094

---

Praca licencjacka  
napisana w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej

Promotor: dr inż. Piotr Kowalski

ŁÓDŹ, WRZESIEŃ 2019

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Preliminaria</b>	<b>3</b>
2.1	Oznaczenia użyte w pracy . . . . .	3
2.2	Elementy algebry liniowej . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Algorytm QR</b>	<b>7</b>
3.1	Algorytm QR metodą odbić Householdera . . . . .	10
3.2	Algorytm QR metodą rotacji Givensa . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Eksperymenty numeryczne</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>18</b>

# Rozdział 1

## Wstęp

Tematem niniejszej pracy jest algorytm QR dekompozycji macierzy, który to został wynaleziony w 1961 roku przez Francisa i Kubłanowską. Jest on jedną z efektywniejszych znanych metod rozwiązywania pełnego zadania własnego dla macierzy symetrycznych lub niesymetrycznych. Należy on do najważniejszych algorytmów opracowanych w XX wieku. Pomimo tego, iż w czasie studiów podobne operacje wykonywane są za pomocą procesu ortogonalizacji Grama-Schmidta sam algorytm dekompozycji QR rozwiązywany jest na inne sposoby, które dalej zostaną dokładnie omówione. W pracy tej chcieliśmy zgromadzić informacje o samym algorytmie, matematycznych podstawach na których jest oparty oraz matematycznie opisać operacje, które są wykonywane przez rzeczywiste implementacje.

Praca uporządkowana jest w następujący sposób. W rozdziale 2 znajdują się preliminaria, w których umieszczone zostały wybrane elementy algebry liniowej wraz z kilkoma znanymi lematami, które zostały udowodnione samodzielnie na potrzeby tej pracy. W rozdziale 3 znajduje się twierdzenie o rozkładzie QR wraz z dowodem. Dowód ten został samodzielnie opracowany na podstawie szkiców z książek [2, 3, 4, 5]. W tym samym rozdziale omówimy również podstawy działania algorytmów służących do dekompozycji, tj. algorytmu QR metodą odbić Householdera oraz algorytmu QR metodą rotacji Givensa. W rozdziale 4 przedstawiamy opracowane własne implementacje z wykorzystaniem dokumentacji języka R [1] wraz z eksperymentami numerycznymi oraz obserwacjami jakie poczyniliśmy przy tychże eksperymentach. W rozdziale 5 zaprezentowane są wnioski z wyników naszej pracy w rozdziale 4.

# Rozdział 2

## Preliminaria

W niniejszym rozdziale przypomniane zostaną wybrane elementy z zakresu algebry liniowej, potrzebne do wyjaśnienia działania algorytmu QR.

### 2.1 Oznaczenia użyte w pracy

Poniżej prezentuję oznaczenia jakich będziemy używać w pracy:

- $\mathbb{R}^{m \times n}$  - przestrzeń wszystkich macierzy o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach
- $\text{span}$  - przestrzeń rozpięta na wektorach
- $(\cdot | \cdot)$  - iloczyn skalarny
- $\| \cdot \|$  - norma
- $A, B$  - macierze
- $x$  - szukana
- $I$  - macierz identycznościowa

### 2.2 Elementy algebry liniowej

Niniejszą część rozpoczniemy od zdefiniowania pojęcia macierzy. Warto nadmienić, że w znaczącej części literatury - pojęcie to nie jest definiowane w sposób matematycznie precyzyjny.

**Definicja 2.1** (Macierz [4]).

Niech  $n, m \in \mathbb{N}$ . Macierzą o  $m$  wierszach oraz  $n$  kolumnach (nazywaną również macierzą o wymiarach  $m$  na  $n$ ) i wyrazach w ciele  $\mathbb{R}$  nazywamy funkcję

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wartością funkcji dla argumentu  $(i, j)$ , gdzie  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  jest element  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . Macierz często zapisujemy w postaci tabeli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przez  $\mathbb{R}^{m \times n}$  oznaczmy zbiór wszystkich macierzy o wymiarach  $m$  na  $n$  i elementach z  $\mathbb{R}$ .

Macierze posiadają wiele istotnych dla nas podklas, posiadających określone cechy. Wymienimy kilka typów macierzy, szczególnie interesujących z perspektywy omawianego przez nas tematu.

**Definicja 2.2** (Rodzaje macierzy[4]).

- Macierz kwadratową o wymiarze  $n$  na  $n$  nazywamy macierz o równej liczbie wierszy i kolumn. Liczbę  $n$  nazywamy wtedy stopniem macierzy kwadratowej.
- Jeśli w macierzy kwadratowej  $[a_{ij}]$  wszystkie elementy poza główną przekątną są równe zero, to taką macierz nazywamy macierzą diagonalną, oznaczamy ją jako  $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ .
- Macierz jednostkową stopnia  $n$  nazywamy taką macierzą diagonalną, w której wszystkie elementy na głównej przekątnej są równe 1.
- Macierz symetryczną nazywamy macierz kwadratową  $A = [a_{ij}]$ , której wyrazy spełniają warunek

$$\forall_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

- Jeśli w macierzy kwadratowej  $[a_{ij}]$  wszystkie elementy poniżej głównej przekątnej są równe 0, to taką macierz nazywamy macierzą trójkątną górną. Analogicznie jeśli w macierzy kwadratowej  $[a_{ij}]$  wszystkie elementy powyżej głównej przekątnej są równe 0 to taką macierz nazywamy trójkątną dolną.

Następujące lematy zostały opracowane na potrzeby dowodu w rozdziale 3.

**Lemat 2.3** (O iloczynie macierzy trójkątnych górnych).

Niech  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  będą dwiema nieosobliwymi macierzami trójkątnymi górnymi. Wtedy

$$C = A \cdot B,$$

jest też nieosobliwą macierzą trójkątną górną. Ponadto, jeśli macierze  $A$  i  $B$  mają na przekątnej same 1, to również macierz  $C$  tak ma.

*Dowód.* Niech  $A, B$  jak w założeniach, oraz  $C = A \cdot B$ . Korzystając z twierdzenia Cauchy'ego o iloczynie macierzy otrzymujemy natychmiast, że macierz  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jest również nieosobliwa. Pozostaje pokazać, że jest macierzą trójkątną górną. Rozważmy dowolną  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  parę indeksów poniżej przekątnej, tj. takich dla których  $i > j$ . Wtedy

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (2.1)$$

Zauważmy, że elementy  $a_{i1}, \dots, a_{i(i-1)}$  są równe 0 gdyż pochodzą z macierzy trójkątnej górnej. Ponadto elementy  $b_{j(j+1)}, \dots, b_{jn}$  są z analogicznego powodu również równe 0. Skoro  $i > j$  to każdy składnik sumy (2.1) posiada czynnik równy 0. Zatem  $c_{ij}$  dla rozważanego indeksu jest równe 0. W dowolności wyboru  $i, j$  macierz  $C$  jest macierzą trójkątną górną. Załóżmy dalej, że  $A$  i  $B$  mają na przekątnej same 1. Niech  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wtedy

$$c_{ii} = a_{i1}b_{1i} + \dots + a_{in}b_{ni} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii} = 1.$$

Z dowolności wyboru  $i$  macierz  $C$  ma na przekątnej same 1. □

**Lemat 2.4** (O odwracaniu macierzy trójkątnej górnej).

Niech  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  będzie nieosobliwą macierzą trójkątną górną. Wtedy istnieje macierz  $A^{-1} = [\bar{a}_{ij}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$  i jest ona nieosobliwą macierzą trójkątną górną. Ponadto jeśli macierz  $A$  ma na przekątnej wyłącznie 1, to również macierz  $A^{-1}$  ma na przekątnej same 1.

*Dowód.* Niech  $A$  będzie macierzą jak w założeniach twierdzenia. Na mocy twierdzenia 9.23 z [4] i twierdzenia 9.22 z [4] i nieosobliwości macierzy  $A$  wiemy, że macierz  $A^{-1}$  istnieje i jest nieosobliwa. Pozostaje pokazać, że jest macierzą trójkątną. Pokazać ten fakt można na kilka różnych sposobów, zaprezentujemy tutaj najprostszy pod względem wiedzy teoretycznej dowód.

Wykorzystamy drugi krok z algorytmu eliminacji Gaussa. Przypomnijmy, że algorytm ten służy rozwiązaniu układu równań postaci

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

i składa się z dwóch kroków. Pierwszym jest redukcja macierzy metodą eliminacji do macierzy trójkątnej górnej. Drugim etapem jest iteracyjne policzenie rozwiązania. Przyjmijmy, że mamy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Skoro macierz  $A$  jest nieosobliwa to wiemy, że elementy na przekątnej są różne od 0, tzn.

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad a_{kk} \neq 0.$$

Wtedy prawdziwy jest wzór pozwalający na iteracyjne policzenie wektora  $\mathbf{x}$ , tj. dla każdego  $k$  począwszy od  $n$  do 1.

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left( b_k - \sum_{i=k+1}^n a_{ki} x_i \right). \quad (2.2)$$

Przypuśćmy nie wprost, że macierz  $A^{-1}$  nie jest trójkątną górną. Istnieje zatem takie  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i > j$  i  $\bar{a}_{ij} \neq 0$ . Rozważmy  $\mathbf{b} = [0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots]^T$ , gdzie  $\mathbf{b}_j = 1$ . Wtedy dla każdego  $k > i > j$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_k = 0$  oraz  $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot (0 - 0) = 0$ . Z drugiej strony  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . Stąd

$$x_i = \bar{a}_{i1}\mathbf{b}_1 + \bar{a}_{i2}\mathbf{b}_2 + \dots + \bar{a}_{in}\mathbf{b}_n = \bar{a}_{ij}\mathbf{b}_j = \bar{a}_{ij} \neq 0.$$

Sprzeczność jest efektem przypuszczenia, że macierz  $A^{-1}$  nie jest macierzą trójkątną górną. Rozważmy dalej przypadek, że macierz  $A$  ma na przekątnej same 1. Przypuśćmy nie wprost, że macierz  $A^{-1}$  nie ma wyłączenie 1 na przekątnej. Istnieje zatem takie  $i \in \{1, \dots, n\}$ , że  $\bar{a}_{ii} \neq 1$ . Rozważmy  $\mathbf{b} = [0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots]^T$ , gdzie  $\mathbf{b}_i = 1$ . Wtedy dla każdego  $k > i$ ,  $\mathbf{x}_k = 0$  oraz  $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot (1 - 0) = 1$ . Z drugiej strony  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . Stąd

$$x_i = \bar{a}_{i1}\mathbf{b}_1 + \bar{a}_{i2}\mathbf{b}_2 + \dots + \bar{a}_{in}\mathbf{b}_n = \bar{a}_{ii}\mathbf{b}_i = \bar{a}_{ii} \neq 1.$$

Sprzeczność jest efektem przypuszczenia, że macierz  $A^{-1}$  nie ma na przekątnej wyłącznie 1.  $\square$

### Definicja 2.5.

Niech  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Wtedy macierz  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$  spełniająca warunek taki, że

$$d_{ij} = a_{ji},$$

dla dowolnych  $i \in \{1, \dots, n\}$  oraz  $j \in \{1, \dots, m\}$  nazywamy macierzą transponowaną do  $A$ . Z reguły tę macierz  $D$  oznaczamy symbolem  $A^T$ .

### Definicja 2.6 (Iloczyn macierzy[4]).

Niech  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  i  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix},$$

to iloczynem macierzy  $B$  i  $A$  nazywamy taką macierz  $C = [c_{lj}]_{j=1, \dots, n}^{l=1, \dots, k}$ , że dla  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$

$$c_{lj} = \sum_{i=1}^m b_{li} \cdot a_{ij}.$$

**Definicja 2.7** (Macierz odwrotna[4]).

Macierz  $A$  jest odwracalna, jeśli istnieje taka macierz  $B$ , że zachodzi

$$A \cdot B = B \cdot A = I,$$

gdzie  $I$  jest macierzą jednostkową. Macierz  $B$  nazywa się wówczas macierzą odwrotną do macierzy  $A$  i oznacza się przez  $A^{-1}$ .

Macierz  $A$  nazywamy nieosobliwą, jeśli istnieje macierz  $B$ , która jest do niej odwrotna.

**Definicja 2.8.**

Macierzą ortogonalną nazywamy macierz kwadratową  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  o elementach będących liczbami rzeczywistymi spełniającą równość:

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n.$$

**Lemat 2.9** (O iloczynie macierzy ortogonalnych).

Niech  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  będą dwiema ortogonalnymi macierzami. Wówczas

$$C = AB$$

jest też macierzą ortogonalną.

*Dowód.* Niech  $A$  i  $B$  będą dwiema ortogonalnymi macierzami, tzn. że zachodzi:

$$A^T A = I$$

$$B^T B = I$$

Niech dalej  $C = AB$ . Należy sprawdzić, czy  $C^T C = I$ . Istotnie

$$C^T C = B^T A^T AB = B^T I B = B^T B = I.$$

Zatem  $C$  jest ortogonalna. □

**Definicja 2.10.**

Wektorem kolumnowym nazywamy macierz z przestrzeni  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ .

Tak zdefiniowane wektory można utożsamiać z elementami przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicja 2.11.**

Niech  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  będą różnymi elementami przestrzeni liniowej  $\mathbb{R}^k$ . Zbiór wektorów  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  nazywamy liniowo niezależnymi jeżeli

$$\forall_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}} (a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0)$$

# Rozdział 3

## Algorytm QR

W tym rozdziale zaprezentujemy elementy teorii dokonywania rozkładów QR macierzy. Rozpocniemy od sformułowania i udowodnienia twierdzenia o istnieniu takiego rozkładu. Wiele analizowanych pozycji literaturowych sygnalizowało posiadanie dowodu poniższego twierdzenia. W naszej ocenie prezentowane tam dowody bliższe są jednak jedynie ich szkicowi. Wobec powyższego prezentujemy własne opracowanie dowodu twierdzenia o istnieniu rozkładu QR, stworzonego na podstawie szkiców omówionych w literaturze oraz pracy własnej.

**Twierdzenie 3.1** (O rozkładzie QR).

Niech  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , gdzie  $m \geq n$ , której kolumny są liniowo niezależne. Istnieje wtedy jedyny rozkład QR, tzn. że istnieją takie macierze  $Q$  i  $R$ , że

$$A = QR$$

i

- macierz  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$  jest taka, że

$$Q^T \cdot Q = D,$$

gdzie  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , oraz  $d_k > 0$  dla  $k = 1, 2, \dots, n$ , oraz

- macierz  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jest trójkątną górną spełniającą dodatkowo warunek

$$r_{kk} = 1$$

dla wszystkich  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Aby udowodnić powyższe, zaprezentujemy potrzebną teorię (twierdzenia oraz lematy) wraz z dowodami, na której to będziemy bazować przy dowodzeniu głównego twierdzenia o rozkładzie QR.

**Twierdzenie 3.2** ([4, Twierdzenie 14.12]).

Wektor  $\mathbf{x}$  jest ortogonalny do podprzestrzeni  $W$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest ortogonalny do każdego wektora jakiegokolwiek bazy tej podprzestrzeni.

**Twierdzenie 3.3** (Nierówność Bessela [4, Twierdzenie 14.22]).

Jeśli  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  jest układem ortonormalnym w przestrzeni euklidesowej  $V$ , to dla każdego wektora  $\mathbf{x}$  z przestrzeni  $V$  spełniona jest nierówność

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2,$$

gdzie  $\alpha_i = (\mathbf{x} | \mathbf{b}_i)$ . Ponadto, wektor  $\mathbf{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{b}_i$  jest ortogonalny do podprzestrzeni  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ .



*Dowód.* Niech  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{b}_i$ . Oczywiście  $\|\mathbf{x}'\|^2 \geq 0$ . Zatem

$$0 \leq (\mathbf{x}' | \mathbf{x}') = (\mathbf{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{b}_i | \mathbf{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{b}_i) = (\mathbf{x} | \mathbf{x}) - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (\mathbf{x} | \mathbf{b}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot (\mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j) =$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

Przekształcając ostatnią nierówność, otrzymujemy

$$\|\mathbf{x}\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2,$$

czyli nierówność Bessela. Niech  $j$  będzie dowolną liczbą ze zbioru  $1, \dots, n$ . Obliczamy  $(\mathbf{x}' | \mathbf{b}_j)$ .

$$(\mathbf{x}' | \mathbf{b}_j) = (\mathbf{x} | \mathbf{b}_j) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (\mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j) = (\mathbf{x} | \mathbf{b}_j) - \alpha_j = 0.$$

Wynika stąd, że wektor  $\mathbf{x}'$  jest ortogonalny do każdego wektora  $\mathbf{b}_j$ , jest więc, na mocy poprzedniego twierdzenia ortogonalny do podprzestrzeni  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ .  $\square$

**Twierdzenie 3.4** (Twierdzenie(Grama-Schmidta)[4]).

*Dla każdego układu liniowo niezależnego wektorów  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  w przestrzeni euklidesowej istnieje układ ortonormalny  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  taki, że*

$$\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) = \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$$

*dla każdej liczby  $k$  ze zbioru  $(1, \dots, n)$ .*

*Dowód.* Oczywiście wektory  $\mathbf{x}_i$  są niezerowe, zatem mają długość dodatnią. Niech więc

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_1\|} \cdot \mathbf{x}_1.$$

Wektor  $\mathbf{b}_1$  ma długość 1 oraz oczywiście  $\text{span}(\mathbf{b}_1) = \text{span}(\mathbf{x}_1)$ . Załóżmy teraz, że zdefiniowaliśmy już wektory  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  tworzące układ ortonormalny taki, że

$$\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) = \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k),$$

gdzie  $k < n$ . Niech teraz

$$\mathbf{b}'_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{b}_i) \cdot \mathbf{b}_i$$

oraz

$$\mathbf{b}_{k+1} = \frac{1}{\|\mathbf{b}'_{k+1}\|} \cdot \mathbf{b}'_{k+1}.$$

Na mocy twierdzenia 3.3 poprzedniego wnioskujemy, że wektor  $\mathbf{b}_{k+1}$  jest ortogonalny do wszystkich wektorów  $\mathbf{b}_i$ , gdzie  $i \in \{1, \dots, k\}$  oraz ma długość równą 1. Ponieważ  $\mathbf{b}_{k+1} \in \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1})$ , więc

$$\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k+1}) \subset \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}). \quad (3.1)$$

Zauważmy, że skoro  $\mathbf{x}_{k+1} \notin \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ , to  $\mathbf{b}_{k+1} \notin \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$ . Zatem przestrzenie  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  i  $\text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  mają ten sam wymiar. Przestrzenie  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k+1})$  i  $\text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1})$  spełniające (3.1) i mające ten sam wymiar, muszą być równe. W ten sposób określiliśmy iteracyjnie wektory  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , spełniające żądane warunki.  $\square$

**Lemat 3.5** (O postaci macierzowej w algorytmie Grama-Schmidta).

Powyżej omówiony algorytm Grama Schmidta jest równoważny następującym transformacjom macierzy. Załóżmy, że wektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  są kolumnami macierzy  $A$  oraz że są liniowo niezależne. Wtedy z twierdzenia 3.4 istnieją wektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ , które są transformacją wektorów  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  przez algorytm Grama-Schmidta. Niech  $U$  będzie macierzą utworzoną kolumnowo z tych wektorów  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ . Wtedy

$$U = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{(v_2;u_1)}{(u_1;u_1)} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{(v_3;u_1)}{(u_1;u_1)} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{(v_3;u_2)}{(u_2;u_2)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{(v_n;u_1)}{(u_1;u_1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{(v_n;u_2)}{(u_2;u_2)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{(v_n;u_3)}{(u_3;u_3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{(v_n;u_{n-1})}{(u_{n-1};u_{n-1})} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dowód powyższego faktu jest oczywisty.

**Lemat 3.6** (Macierz transformująca algorytmu Grama-Schmidta).

Niech  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  będzie macierzą, której kolumny są liniowo niezależne. Niech  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  będzie macierzą uzyskaną poprzez połączenie jako kolumn wektorów uzyskanych z algorytmu Grama-Schmidta. Wtedy istnieje trójkąta górna macierz  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  taka, że

$$U = A \cdot T,$$

gdzie  $T = [t_{ij}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$  i  $t_{kk} = 1$ , dla dowolnego  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

*Dowód.* Niech  $A, U$  takie jak w założeniach lematu. Wtedy wobec lematu 3.5 zachodzi

$$U = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{(v_2;u_1)}{(u_1;u_1)} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{(v_3;u_1)}{(u_1;u_1)} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{(v_3;u_2)}{(u_2;u_2)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{(v_n;u_1)}{(u_1;u_1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{(v_n;u_2)}{(u_2;u_2)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{(v_n;u_3)}{(u_3;u_3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{(v_n;u_{n-1})}{(u_{n-1};u_{n-1})} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że mnożenie macierzowe jest łączne. Możemy je mnożyć wykonując kolejne mnożenia patrząc od prawej strony. Stosując  $n - 2$  krotnie lemat 2.3 otrzymujemy macierz  $T$  która jest nieosobliwą macierzą trójkątną górną. Ponadto zauważmy, że te wszystkie macierze mają wyłączenie 1 na przekątnej, zatem macierz  $T$  również.  $\square$

Istotną obserwacją jaką można poczynić jest taka, że macierzy tej nie można sobie w łatwy sposób od tak wyznaczyć. Aby ją uzyskać trzeba przeprowadzić cały algorytm Grama-Schmidta i dopiero po jego przeprowadzeniu macierz tę daje się jawnie wyznaczyć.

Teraz możemy przystąpić do dowodu głównego twierdzenia.

*Dowód twierdzenia 3.1.* Niech  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  będzie macierzą jak w założeniach. Wtedy z lematu 3.6 przy zastosowaniu algorytmu Grama-Schmidta otrzymujemy równość

$$U = A \cdot T,$$

gdzie  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i  $U$  składa się z wektorów ortogonalnych, a  $T$  jest macierzą trójkątną górną i ma na przekątnej same 1. Na mocy lematu 2.4 wiemy, że macierz  $T$  jest odwracalna

i macierz do niej odwrotna jest trójkątną górną. Wykonując mnożenie prawostronne przez tę macierz otrzymujemy:

$$\begin{aligned}U \cdot T^{-1} &= A \cdot T \cdot T^{-1}, \\U \cdot T^{-1} &= A.\end{aligned}$$

Postać, którą mamy powyżej jest rozkładem QR, gdzie  $U = Q$  i  $T^{-1} = R$ . Pozostaje uzasadnić, że  $U^T \cdot U = D$ , gdzie  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , oraz  $d_k > 0$  dla  $k = 1, 2, \dots, n$ . Istotnie rozważmy element  $d_{ij}$  macierzy  $D$ . Z tego, że  $U^T \cdot U = D$  mamy, że  $d_{ij} = (u_i | u_j)$ . Jeśli  $i \neq j$ , to  $d_{ij} = 0$ . Zatem macierz  $D$  jest przekątniowa. Jeśli  $i = j$ , to  $d_{ii} = (u_i | u_i) = \|u_i\|^2 > 0$ . □

Ortogonalizacja Gram-Schmidta może nie obliczyć macierzy ortogonalnej  $Q$ , gdy wektory, które są ortogonalizowane, są prawie liniowo zależne, więc nie możemy jej użyć do stabilnego obliczenia rozkładu QR. Zamiast tego opieramy nasze algorytmy na pewnych łatwo obliczalnych ortogonalnych macierzach zwanych odbiciami Householdera lub rotacjami Givensa. Możemy je wybrać, tak aby wprowadzić zera do macierzy za pomocą mnożenia.

### 3.1 Algorytm QR metodą odbić Householdera

Metoda Householdera pozwala znaleźć rozkład QR dowolnej macierzy prostokątnej  $m$  na  $n$  ( $m \geq n$ ).

**Definicja 3.7** (Macierz Householdera).

Macierz  $H$  Householdera  $H$  zwaną również refleksją nazywamy macierz postaci  $H = I - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T$ , gdzie  $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$ .

**Twierdzenie 3.8** (Transformacja Householdera).

Niech  $\mathbf{v} \in R^m$ , i  $\mathbf{v} \neq 0$ . Wówczas transformację Householdera nazywamy macierz postaci:

$$H = I - W \mathbf{v} \mathbf{v}^T,$$

gdzie

$$W = \frac{2}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}.$$

Macierz  $H$  jest macierzą symetryczną i ortogonalną. Jej interpretacja jest następująca: dowolny wektor  $x$  wymiaru  $m$  jest odbiciem lustrzanym wektora  $Hx$  względem hiperpłaszczyzny (wymiaru  $m - 1$ ) prostopadłej do wektora  $\mathbf{v}$ .

*Dowód.* Łatwo sprawdzić, że tak jest ponieważ:

$$H^T = \left( I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right)^T = I - \left( \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right)^T = I - \frac{2}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} (\mathbf{v}\mathbf{v}^T)^T = I - \frac{2}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} (\mathbf{v}^T)^T \mathbf{v}^T = I - \frac{2}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \mathbf{v}\mathbf{v}^T = H$$

oraz

$$\begin{aligned}H^2 &= \left( I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right)^2 = I - \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} + 4 \left( \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right)^2 = I - \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} + 4 \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T \mathbf{v}\mathbf{v}^T}{(\mathbf{v}^T \mathbf{v})^2} \\&= I - \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} + \frac{4}{(\mathbf{v}^T \mathbf{v})^2} \mathbf{v}^T \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = I - \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} + \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = I.\end{aligned}$$

Z pierwszej równości wynika symetria, z drugiej ortogonalność, ponieważ

$$H^T H = H H = I.$$

□

**Przykład 3.9.**

Pokażemy, jak obliczyć rozkład  $QR$  macierzy  $A$  o wymiarach 5 na 4 przy użyciu transformacji Householdera. Ten przykład uwidoczni wzór dla ogólnych macierzy  $m$  na  $n$ . W poniższych macierzach  $P_i$  jest macierzą ortogonalną 5 na 5,  $x$  oznacza ogólny niezerowy wpis, a  $o$  oznacza zero.

1. Wyznaczamy  $P_1$  tak, że:

$$A_1 \equiv P_1 \cdot A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}.$$

2. Wyznaczamy

$$P_2 = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P'_2 \end{array} \right]$$

tak, że

$$A_2 \equiv P_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}.$$

3. Wyznaczamy

$$P_3 = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P'_3 \end{array} \right]$$

tak, że

$$A_3 \equiv P_3 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

4. Wyznaczamy

$$P_4 = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & P'_4 \end{array} \right]$$

tak, że

$$A_3 \equiv P_4 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tutaj wybraliśmy macierz Householdera  $P'_i$  aby wyzerować subdiagonale wyrazy w kolumnie  $i$ . Jednocześnie nie zakłóca to zer wprowadzonych już w poprzednich kolumnach. Istotnie macierz  $A_k$  ma postać

$$\begin{bmatrix} T & A_{1k} \\ 0 & A_{2k} \end{bmatrix}.$$

Wtedy w mnożeniu dostajemy:

$$P'_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P'_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T & A_{1k} \\ 0 & A_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & A_{1k} \\ 0 & P'_k \cdot A_{2k} \end{bmatrix}.$$

Stąd widać, że zera pod przekątną są faktycznie zachowane. Nazwijmy ostatnią trójkątną górną macierz 5 na 4  $\tilde{R} = A_4$ . Następnie

$$A = P_1^T \cdot P_2^T \cdot P_3^T \cdot P_4^T \cdot R = QR,$$

gdzie  $Q$  to pierwsze cztery kolumny

$$P_1^T \cdot P_2^T \cdot P_3^T \cdot P_4^T = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4$$

(ponieważ wszystkie  $P_i$  są symetryczne), a  $R$  to pierwsze cztery rzędy  $\tilde{R}$ .

Oto ogólny algorytm dekompozycji  $QR$  z wykorzystaniem transformacji Householdera.

---

**Algorithm 1** Algorytm QR metodą transformacji Householdera

---

```

for  $i$  from 1 to  $\min(m-1, n)$  do
     $u_i = \text{House}(A(i:m, i))$ 
     $P'_i = I - 2 \cdot u_i \cdot u_i^T$ 
     $A(i:m, i:n) = P'_i \cdot A(i:m, i:n)$ 
end for

```

---

## 3.2 Algorytm QR metodą rotacji Givensa

**Uwaga 3.10.**

Rotacja Givensa postaci:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

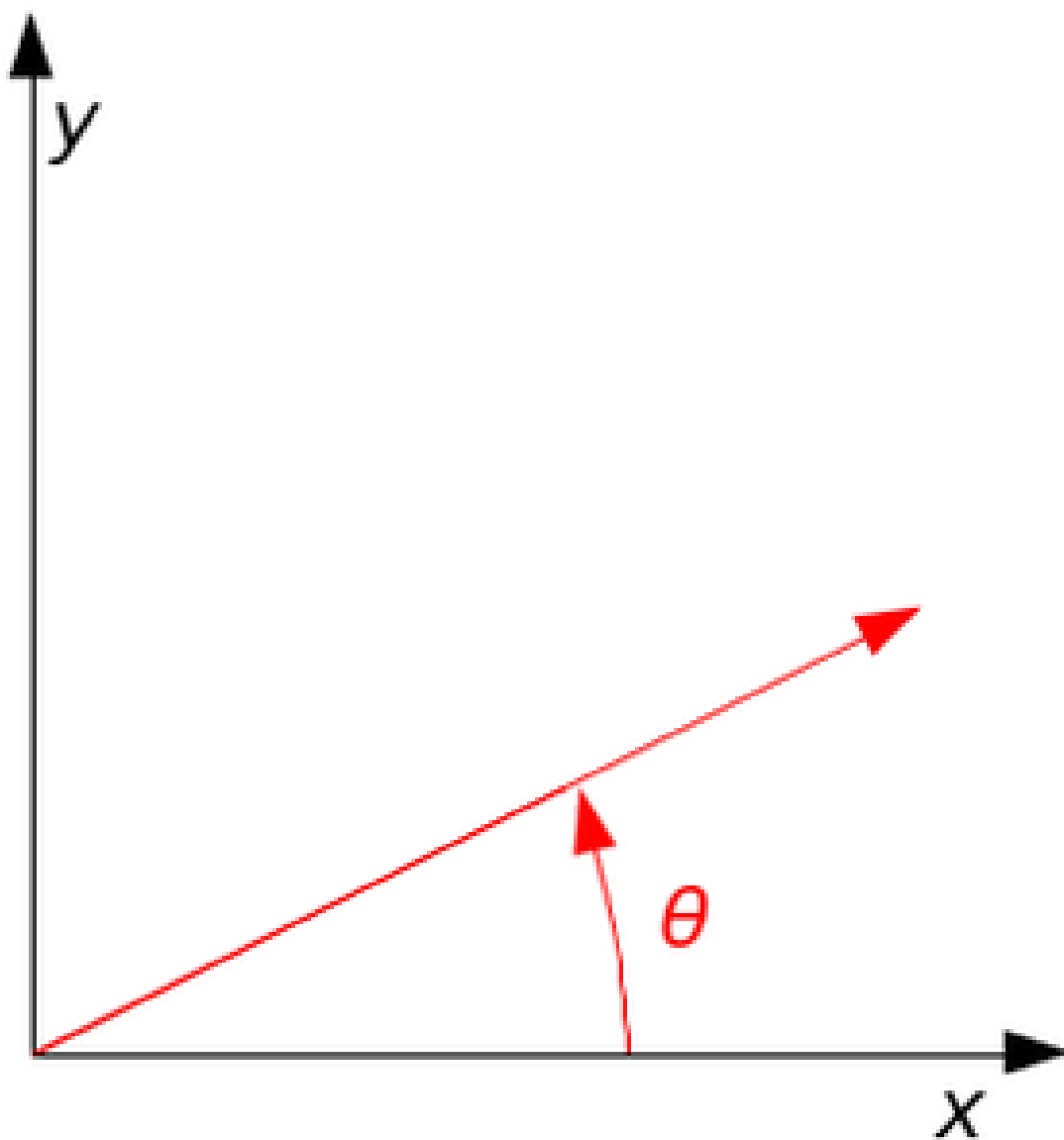
obrać dowolny wektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara o  $\theta$ . Obrót ten prezentuje grafika 3.1.

**Definicja 3.11** (Macierz Givensa).

Niech  $i, j \in 1, \dots, n$  i  $\theta \in \mathbb{R}$ . Macierz  $R(i, j, \theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zdefiniowana następująco:

$$R(i, j, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \cos \theta & \dots & -\sin \theta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \sin \theta & \dots & \cos \theta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą rotacji Givensa.



Rysunek 3.1: Rotacja Givensa

**Lemat 3.12** (O macierzy Givensa).

*Każda macierz Givensa jest macierzą ortogonalną.*

*Dowód.* Niech  $n \in \mathbb{N}$ , rozważmy macierze Givensa rozmiaru  $n$  na  $n$ . Niech  $i, j \in 1, \dots, n$  i  $\theta \in \mathbb{R}$ . Pokażemy, że macierz  $R(i, j, \theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jest ortogonalna. Wystarczy pokazać, że układ kolumn  $(r_s)$ ,  $s = 1, \dots, n$  tej macierzy jest układem ortonormalnym. Weźmy dwie kolumny  $k$ -tą i  $l$ -tą. Rozważmy przypadki:

1. Gdy  $k \notin (i, j)$ ,  $l \notin (i, j)$ ,  $k \neq l$ , wtedy

$$(\mathbf{r}_k | \mathbf{r}_l) = ([0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] | [0, \dots, 0, 0, 1, 0, \dots, 0]) = 0$$

$$(\mathbf{r}_k | \mathbf{r}_k) = ([0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] | [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]) = 1$$

2.  $k \in (i, j)$ ,  $l \in (i, j)$ ,  $k \neq l$

$$(\mathbf{r}_i | \mathbf{r}_j) = ([0, \dots, 0, \cos \theta, 0, \dots, 0, \sin \theta, 0, \dots, 0] | [0, \dots, 0, -(\sin \theta), 0, \dots, 0, \cos \theta, 0, \dots, 0]) = \cos \theta \cdot (-\sin \theta) + \sin \theta \cdot \cos \theta = 0$$

$$(\mathbf{r}_i | \mathbf{r}_i) = ([0, \dots, 0, \cos \theta, 0, \dots, 0, \sin \theta, 0, \dots, 0] | [0, \dots, 0, \cos \theta, 0, \dots, 0, \sin \theta, 0, \dots, 0]) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_j) = ([0, \dots, 0, -(\sin \theta), 0, \dots, 0, \cos \theta, 0, \dots, 0] | [0, \dots, 0, -(\sin \theta), 0, \dots, 0, \cos \theta, 0, \dots, 0]) = -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

3.  $k = j$ ,  $l \notin (i, j)$

$$(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_l) = (\mathbf{r}_l | \mathbf{r}_j) = ([0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] | [0, \dots, 0, -(\sin \theta), 0, \dots, 0, \cos \theta, 0, \dots, 0]) = 0$$

4.  $k = i$ ,  $l \notin (i, j)$

$$(\mathbf{r}_i | \mathbf{r}_l) = (\mathbf{r}_l | \mathbf{r}_i) = ([0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] | [0, \dots, 0, \cos \theta, 0, \dots, 0, \sin \theta, 0, \dots, 0]) = 0$$

Z uwagi na symetrię oznaczeń, również przypadek gdy  $k \notin i, j$ ,  $l = i \vee l = j$ , to ich iloczyn skalarny jest równy 0. Podsumowując powyższe przypadki z dowolności wyboru kolumn  $k$ -tej i  $l$ -tej układ kolumn  $r(s)$  jest ortonormalny. Zatem macierz Givensa jest ortogonalna.  $\square$

**Lemat 3.13.**

*Niech  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Wtedy macierz Givensa  $R(i, j, \theta)$ , gdzie  $\theta$  spełnia warunki:*

$$\cos \theta = \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{-(a_{ji})}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}$$

*powoduje, że jeśli  $[b_{ij}]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n} = B = R(i, j, \theta) \cdot A$ , to  $b_{ji} = 0$ .*

*Dowód.* Niech  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i, j \in 1, \dots, n$  i  $\theta$  spełniająca warunki. Niech  $B = R(i, j, \theta) \cdot A$ . Wtedy

$$b_{ji} = \sin \theta \cdot a_{ii} + \cos \theta \cdot a_{ji} = \frac{-(a_{ji})}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \cdot a_{ii} + \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \cdot a_{ji} = 0.$$

$\square$

Zatem macierz  $R$  można użyć do "generowania zer w macierzy".

---

**Algorithm 2** Algorytm QR metodą rotacji Givensa

---

```
for  $i$  from 1 to  $\min(m-1, n)$  do
  for  $j$  from  $i+1$  to  $m$  do
     $G = \text{Givens}(i, j, A[i, i], A[j, i])$ 
     $A = G \cdot A$ 
  end for
end for
```

---

**Obserwacja 3.14.**

Zauważmy jak zachowuje się macierz przy mnożeniu przez macierz Givensa.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ \cos \theta \cdot A_{21} - \sin \theta \cdot A_{41} & \cos \theta \cdot A_{22} - \sin \theta \cdot A_{42} & \cos \theta \cdot A_{23} - \sin \theta \cdot A_{43} & \cos \theta \cdot A_{24} - \sin \theta \cdot A_{44} & \cos \theta \cdot A_{25} - \sin \theta \cdot A_{45} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ \sin \theta \cdot A_{21} + \cos \theta \cdot A_{41} & \sin \theta \cdot A_{22} + \cos \theta \cdot A_{42} & \sin \theta \cdot A_{23} + \cos \theta \cdot A_{43} & \sin \theta \cdot A_{24} + \cos \theta \cdot A_{44} & \sin \theta \cdot A_{25} + \cos \theta \cdot A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}$$

**Obserwacja 3.15.**

Wykonanie rotacji macierzą  $G(i, j, A[i, i], A[j, i])$  zachowuje zera w kolumnie  $j$ .

*Szkic dowodu.* Istotnie z obserwacji 3.14 po wykonaniu obrotu Givensa względem  $i$  i  $j$  inne zera będą reprezentowane przez pola  $A_{12}, A_{32}, A_{52}, \dots$  i nie ulegają zmianie.  $\square$

**Obserwacja 3.16.**

Wykonanie rotacji macierzą  $G(i, j, A[i, i], A[j, i])$  zachowuje zera w wierszach  $i, j$  na miejscach  $A[i, 1:i], A[j, 1:i]$ .

*Szkic dowodu.* Istotnie założmy, że  $G(i, j, A[i, i], A[j, i])$  są wypełnione zerami. Odpowiada to polom  $A_{21}, A_{41}$ . Wtedy po rotacji mamy

$$A_{21} = \cos \theta A_{21} - \sin \theta A_{41} = 0,$$

$$A_{41} = \sin \theta A_{21} - \cos \theta A_{41} = 0.$$

$\square$

**Przykład 3.17.**

Poniżej zilustrujemy etapy obliczania rozkładu QR macierzy 4 na 4 przy użyciu rotacji Givensa.

Dla  $i = 1$

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(1,2)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(1,3)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(1,4)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}$$

Dla  $i = 2$

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(2,3)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(2,4)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$



Dla  $i = 3$

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{G(3,4)} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Na mocy obserwacji 3.15 i 3.16 widzimy, że wykonanie obrotu Givensa zgodnie z zaprezentowanym wyżej przykładem zachowuje odpowiednie zera w macierzy. Z książki "Applied Numerical Linear Algebra" autorstwa Jamesa W. Demmela możemy uzyskać informację, że koszt rozkładu  $QR$  za pomocą rotacji Givensa jest dwa razy większy niż koszt rozkładu za pomocą metody Householdera.

## Rozdział 4

### Eksperymenty numeryczne

## Rozdział 5

### Podsumowanie

# Bibliografia

- [1] Dokumentacja online języka r. <https://www.rdocumentation.org>.
- [2] Åke Björck. *Numerical Methods for Least Squares Problems*. Siam, 1996.
- [3] James W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*. Siam, 1997.
- [4] Jacek Jędrzejewski and Tadeusz Poreda. *Algebra liniowa z elementami geometrii analitycznej*. Politechnika Łódzka, 2011.
- [5] James H. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*. Clarendon Press, Oxford University Press, 1988.