Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук і кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Лабораторна робота №2
на тему:
Обтікання стаціонарною течією фіксованої перешкоди

Виконала
студентка 2 курсу магістратури
групи МСС-2
Тутушкіна Анна

Київ – 2023

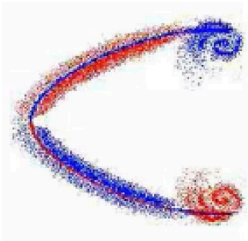
Зміст

Опис математичної моделі

Математична постановка Задачі 1

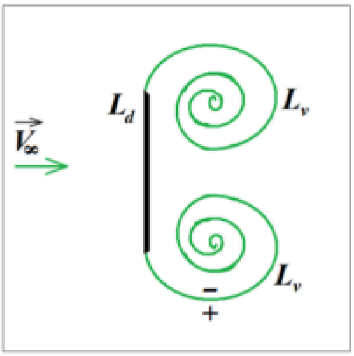
2

(для визначення $\varphi = \varphi(r,t)$: $\vec{V} = \nabla\varphi$)



$$t \ge t_0: \qquad \Delta\varphi = 0 \qquad \vec{r} \notin L_d, L_v \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \qquad \vec{r} = \vec{r}_d \in L_d(t) \tag{2}$$



$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^+ - \varphi^-\right)\Big|_{r_v} = 0 \qquad \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t) \tag{3}$$

$$\lim_{|r - r_L| \to \infty} \nabla\varphi = V_\infty \tag{4}$$

$$\frac{\partial\vec{r}_v}{\partial t} = \vec{V}(\vec{r}_v, t) \qquad \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t) \tag{5}$$

$$t = t_0: \quad L_0 = L_d(t_0) + L_v(t_0) \tag{6}$$

Математична модель

3

(інтегральне представлення розв'язку)

$$\overline{V}_\infty = u_\infty - iv_\infty$$

$$\Phi(z,t) = \varphi + i\psi = \overline{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)} f(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)} f(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega + Const \tag{7}$$

$$\overline{V}(z,t) = u - iv = \frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z} = \overline{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)}\frac{f(\omega,t)}{z-\omega}d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)}\frac{f(\omega,t)}{z-\omega}d\omega \tag{8}$$

Умова на детермінованої границі L_d

$$\begin{cases} z = \omega_d(t) \in L_d, \quad t \ge t_0: \\ \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_d}\frac{f(\omega,t)n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)}d\omega\right\} = -\mathrm{Re}\left\{\overline{V}_\infty n(\omega_d) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)}\frac{f(\omega,t)n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)}d\omega\right\} \\ \int_{L_0} f(\omega_d,t)d\omega_d = -\int_{L_{v_j}(t)} f(\omega_V,t)d\omega_V + C_j,\ j = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{9}$$

Умова на вільної границі L_v

$$\begin{cases} z = \omega_V(t) \in L_v(t), \quad t > t_0: \\ \frac{d\overline{\omega}_v(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_d}\frac{f(\omega,t)d\omega}{(\omega_v - \omega)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)}\frac{f(\omega,t)d\omega}{(\omega_v - \omega)} + \overline{V}_\infty, \\ \omega_v = \omega_d \Rightarrow f(\omega_v,t) = f(\omega_d,t), \\ t = t_0: \\ L_v(t_0) = L_{v0} \end{cases} \tag{10}$$

$$\boxed{P(z,t) = P_\infty - \rho\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Phi(z,t) + \frac{\overline{V}(z,t)\cdot\overline{\overline{V}(z,t)}}{2} - \frac{V_\infty\cdot\overline{V_\infty}}{2}\right\}} \tag{11}$$

Математична постановка задачі

Дано:

L_d - контур в системі координат

M - задана кількість дискретних особливостей

$\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty)$ $\left|\vec{V}_\infty\right| = 1$

Тут:

$$L_d - 2; M = 200$$

Побудувати:

- Векторне поле $\overline{V}(x, y)$;
- Вихрові точки (x_j^p, y_j^p);
- Доріжку Кармана.

Тут:

$$\vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1})\vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}\left(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})\right);$$

$$\vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \left(u(x, y, x_{0i}, y_{0i}), v(x, y, x_{0i}, y_{0i})\right); \{u(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \frac{1}{2\pi}\frac{y_{0i} - y}{R_{0i}^2} \; v(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \frac{1}{2\pi}\frac{x - x_{0i}}{R_{0i}^2}; R_{0i} = \left(\delta, \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2}\right);$$

$$\{x_i^p(t_{n+1}) = x_i^p(t_n) + u\left(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n\right)\tau_n \; y_i^p(t_{n+1}) = y_i^p(t_n) + v\left(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n\right)\tau_n;$$

$$\tau_n = \frac{\delta_k}{(|V|)}.$$

Алгоритм пошуку Γ_j

Для знаходження чисельного розв'язку спершу дискретизуємо контур L_d. Виділимо M точок дискретних особливостей (x_{0j}, y_{0j}), $j = \overline{1, M}$ та $(M - 1)$ точку колокацій:

$$\{x_k = (x_{0k} + x_{0k+1})/2, y_k = (y_{0k} + y_{0k+1})/2\}$$
$$k = 1,\ldots, M-1$$

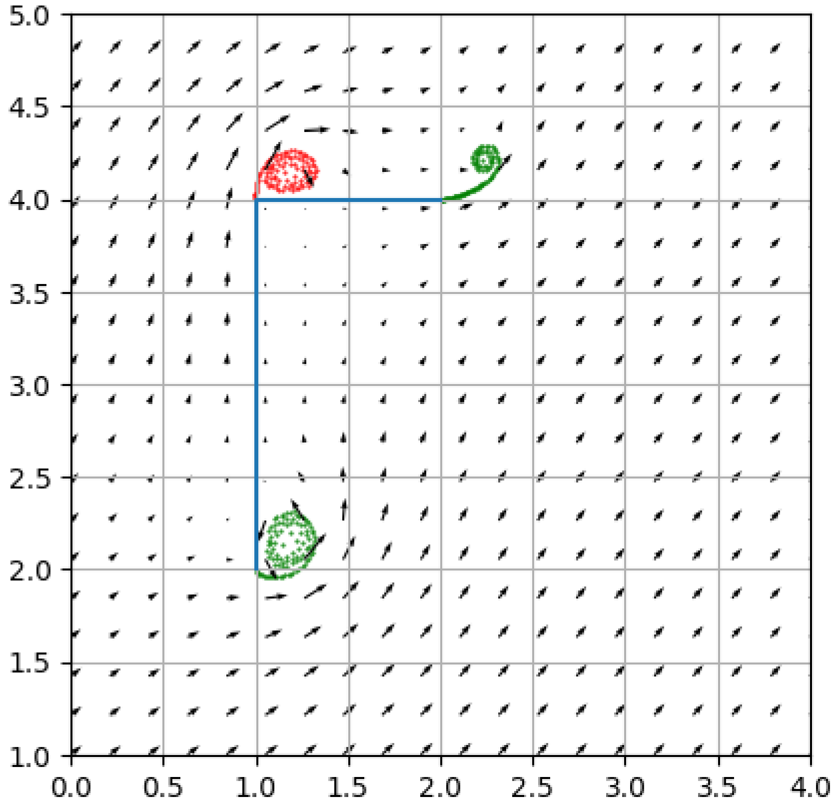
Нормалі в точках колокацій обчислюються наступним чином:

$$\vec{n}_k(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk}) \qquad n_{xk} = -(y_{0k+1} - y_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}$$
$$k = 1,\ldots, M-1 \qquad n_{yk} = (x_{0k+1} - x_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}$$

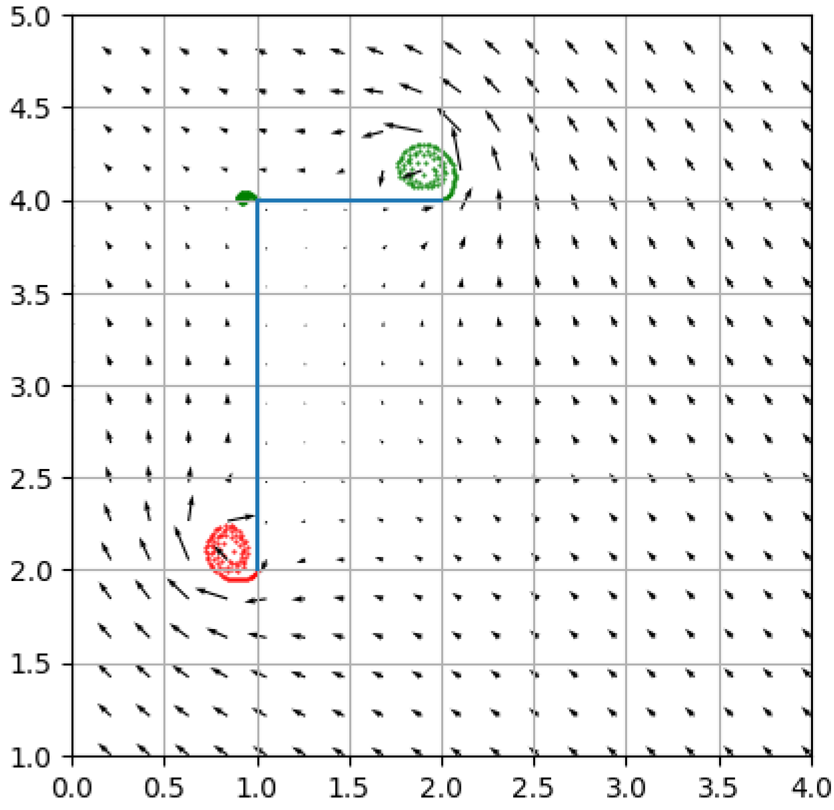
Для отримання коефіцієнтів Γ_j слід розв'язати СЛАР:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_j(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j})\right) = \\ = -\left(\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_\infty\right) - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma\left(n(x_k, y_k) \cdot \vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))\right) \\ \qquad k = \overline{1, M-1} \\ \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_n) = -\sum_p \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^p \end{cases}$$

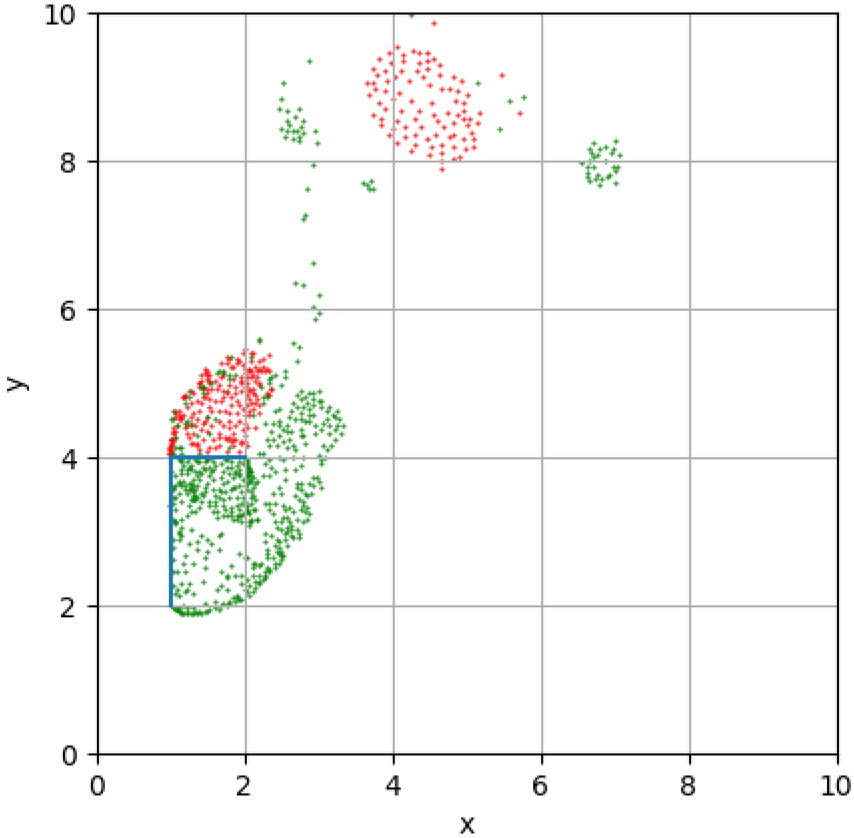
Результати обчислювальних експериментів



Вихрові точки за умови $n = 100$, $\overline{V} = \frac{\pi}{4}$



Вихрові точки за умови $n = 100$, $\overline{V} = \frac{3\pi}{4}$



Доріжка Кармана $n = 300, \overline{V} = \frac{\pi}{4}$

Висновок

У процесі виконання цієї лабораторної роботи я провела моделювання обтікання перешкоди у формі літери 'Г' нестаціонарною течією. Під час проведення експериментів було виявлено, що алгоритм має обмежену точність, яка впливає на достовірність отриманих результатів моделювання. Також обчислювальна складність не є легкою і потрібно досить довго очікувати результати.