Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук і кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Лабораторна робота №1
на тему:
Обтікання стаціонарною течією фіксованої перешкоди

Виконала
студентка 2 курсу магістратури
групи МСС-2
Тутушкіна Анна

Київ – 2023

Зміст

Зміст **2**
Опис математичної моделі **2**
Математична постановка задачі **2**
Алгоритм пошуку j **3**
Результати обчислювальних експериментів **3**

Опис математичної моделі

Дано:

- контур в системі координат L_d
- кількість дискретних особливостей M
- циркуляція навколо перешкоди Γ_0
- $\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty)$; $\left|\vec{V}_\infty\right|$=(0,1).

Де $L_d - 2, M = 100$; $\Gamma_0 = 0$; $\vec{V}_\infty = (0, 1)$.

Побудувати:

- векторне поле $\vec{V}(x, y)$;
- скалярне поле $\left|\vec{V}(x, y)\right|$;
- скалярне поле $\phi(x, y)$;
- скалярне поле $\phi_{special}(x, y)$;
- скалярне поле $\psi(x, y)$.

Математична постановка задачі

В області D задано контур L_d і течію на нескінченності:

$$\vec{V}_\infty = (u_\infty(x, y, t), v_\infty(x, y, t))$$

Вважатимемо течію безвихоровою:

$$\exists \varphi = \varphi(x, y, t) : \vec{V} = \nabla \varphi$$

Потенціал φ в області D задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

На контурі L_d виконується умова непроникності:

$$(\vec{V} \cdot \vec{n}) \big|_{\vec{r_\infty}} = 0, \qquad \vec{r} = \vec{r_\infty} \in L_d(t)$$

для $\vec{n}$– нормалі до поверхні L_d .

Для вільної границі L_v виконуються умови:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^-$$

$$p^+ = p^-$$

Вважатимемо, що з нескінченності набігає потік сталої швидкості:

$$\lim_{|r - r_\sigma| \to \infty} \nabla\varphi = \vec{V}$$

Також вважаємо що на гострих кутах контура L_d швидкість скінченна:

$$|\nabla \varphi| < \infty$$

Тут:

$$\vec{V}(x, y) = \vec{V}_{\infty} + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j \vec{V}_j\left(x, y,\ x_{0j}, y_{0j}\right);$$

$$\phi(x, y) = xu_{\infty} + yv_{\infty} + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi} arctg\left(\frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}\right)$$

$$\phi_{special}(x, y) = xu_{\infty} + yv_{\infty} + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^{j} \Gamma_k}{2\pi} \frac{\left(y_{0j+1}-y_{0j}\right)\left(x-x_j\right)-\left(x_{0j+1}-x_{0j}\right)\left(y-y_j\right)}{{R_j^{alt}}^2} + \frac{\Gamma_0}{2\pi} arctg\left(\frac{y-y_{0M}}{x-x_{0M}}\right)$$

$$\psi(x, y) = yu_{\infty} - xv_{\infty} - \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi} ln\left(R_j\right), \text{ де:}$$

$$R_j = \left\{r_j, \sqrt{\left(x - x_{0j}\right)^2 + \left(y - y_{0j}\right)^2}\right\}; R_j^{special} = \left\{r_j, \sqrt{\left(x - x_j\right)^2 + \left(y - y_j\right)^2}\right\};$$

$$\vec{V}_j\left(x, y,\ x_{0j}, y_{0j}\right) = \left(\frac{y_{0j}-y}{2\pi R_j^2}, \frac{x_{0j}-x}{2\pi R_j^2}\right).$$

Алгоритм пошуку Γ_j

Для знаходження чисельного розв'язку спершу дискретизуємо контур L_d. Виділимо М точок дискретних особливостей $(x_{0j}, y_{0j}),\ j = \overline{1, M}$ та $(M - 1)$ точку колокацій:

$$\{x_k = (x_{0k} + x_{0k+1})/2, y_k = (y_{0k} + y_{0k+1})/2\}$$
$$k = 1,\ldots, M-1$$

Нормалі в точках колокацій обчислюються наступним чином:

$$\vec{n}_k(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk}) \qquad n_{xk} = -(y_{0k+1} - y_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}$$
$$k = 1,\ldots, M-1 \qquad n_{yk} = (x_{0k+1} - x_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}$$

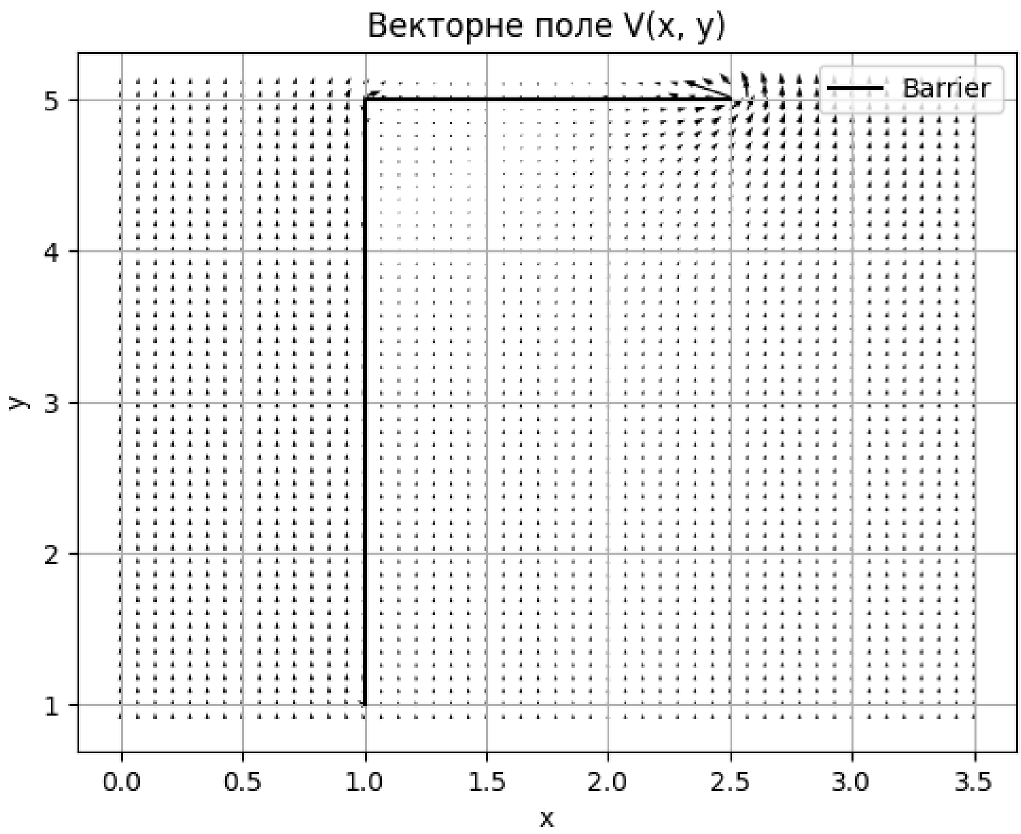
Для отримання коефіцієнтів Γ_j слід розв'язати СЛАР:

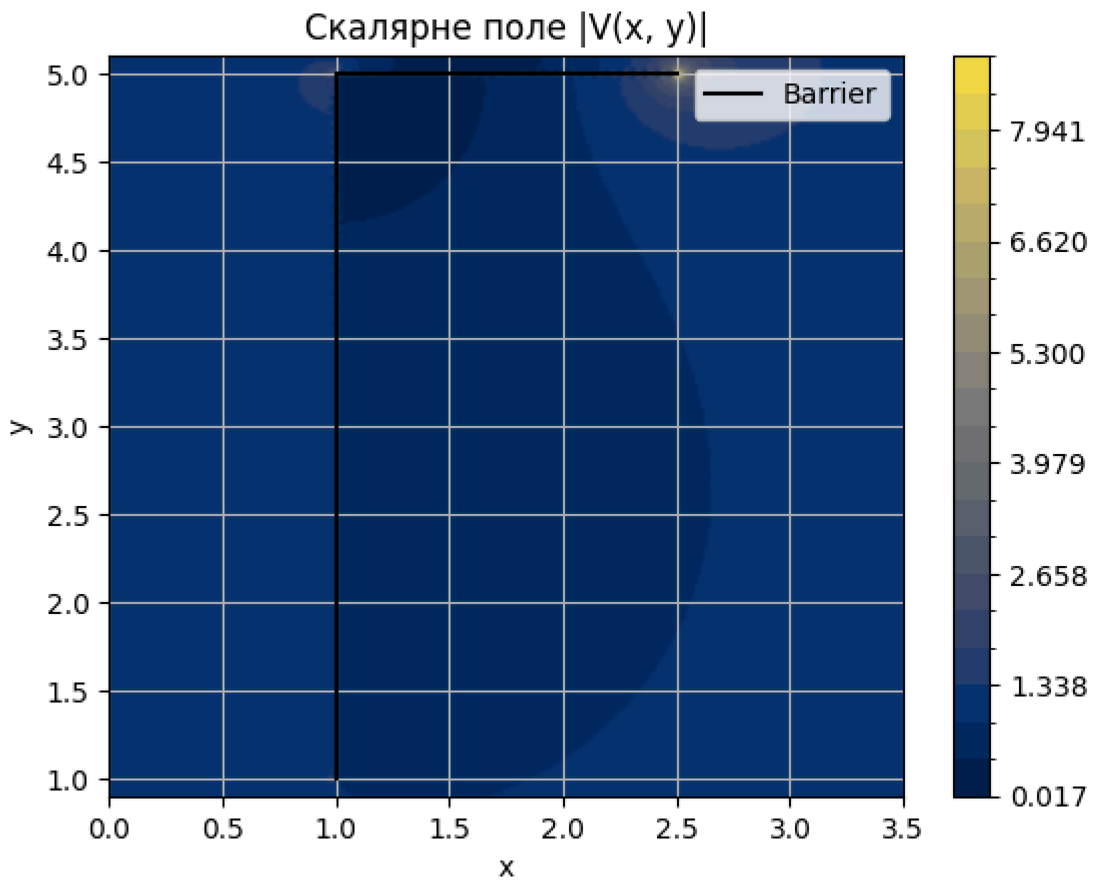
$$\sum_{j=1}^{M} \Gamma_j (\vec{n_k}(x_k, y_k \cdot) \vec{V_j}(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j})) = - \vec{n_k} \cdot \vec{V_\infty}$$

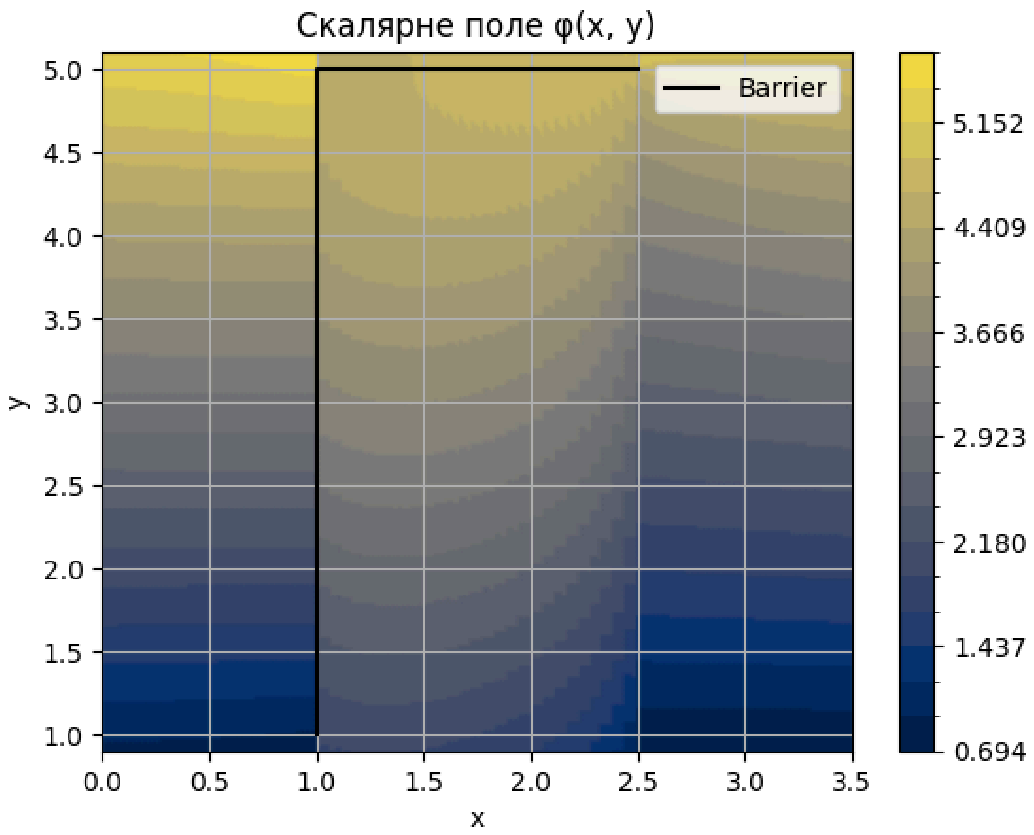
$$k = 1,\ M - 1$$

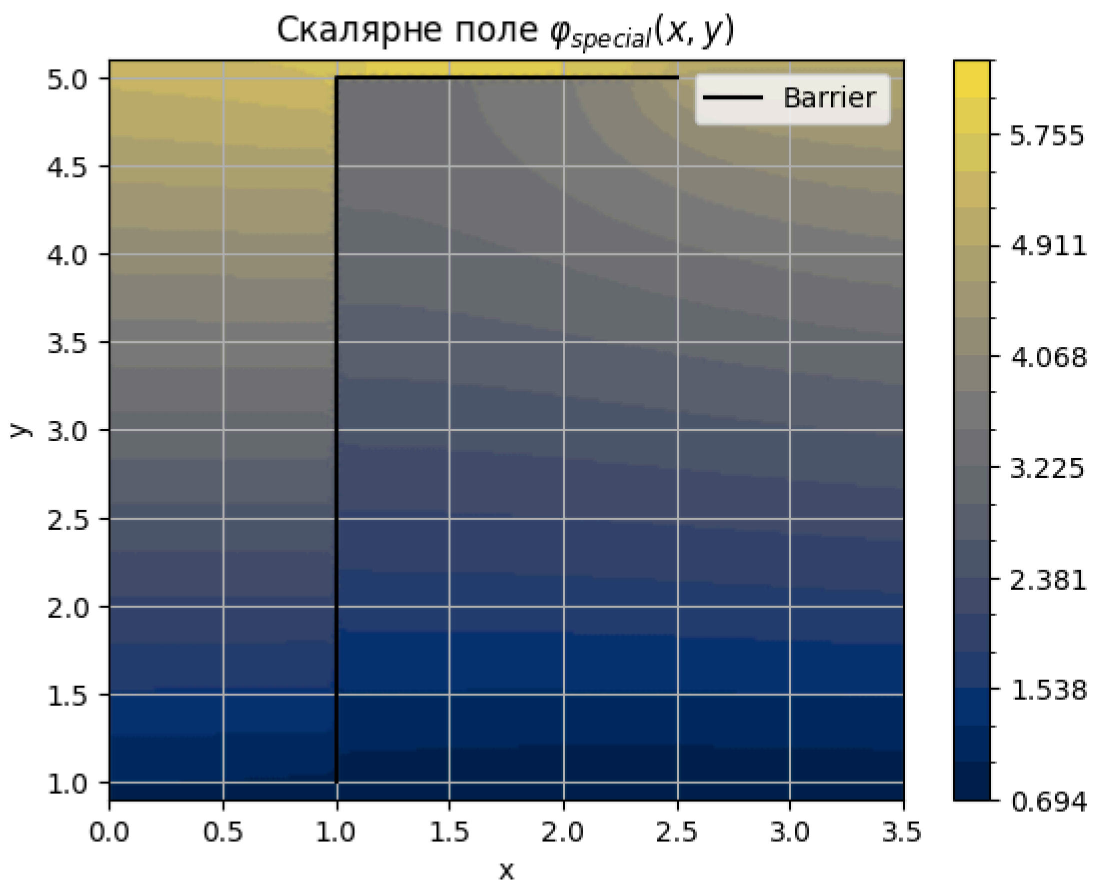
$$\sum_{j=1}^{M} \Gamma_j = \Gamma_0$$

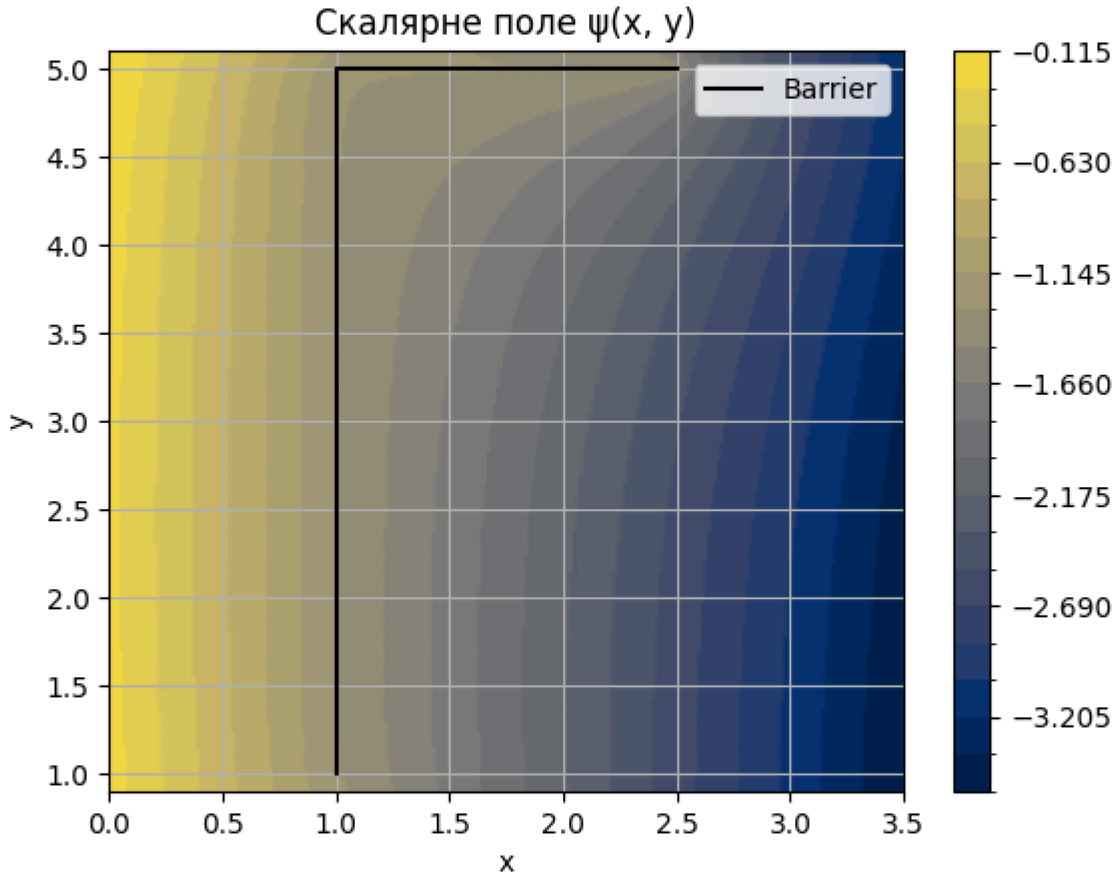
Результати обчислювальних експериментів






Скалярне поле φ(x, y)
Barrier
y
x
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
5.152
4.409
3.666
2.923
2.180
1.437
0.694


Скалярне поле $\varphi_{special}(x, y)$
Barrier
y
x
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
5.755
4.911
4.068
3.225
2.381
1.538
0.694


Скалярне поле ψ(x, y)
Barrier
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
y
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
x
−0.115
−0.630
−1.145
−1.660
−2.175
−2.690
−3.205