

1 Uwarunkowanie

$$\delta + 1 = \frac{1}{1-\delta} \quad \delta^2 \approx 0$$

Błąd względny wyniku:

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{xf'(x)}{x} \right| |\delta|$$

$$\text{cond}(x) = \left| \frac{xf'(x)}{x} \right|$$

Uwarunkowanie zadania numerycznego:

$$\frac{\|f(\tilde{d}) - f(d)\|}{\|f(d)\|} \leq \text{cond}(d) \frac{\|d - \tilde{d}\|}{\|d\|}$$

2 Normy

2.1 Wektorowe

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2.2 Macierzowe

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} \quad A^* = \overline{A}^T$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |a_{ij}|^2}$$

zgodność norm jeśli: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

dla normy Frobeniusa: $\|Ax\|_F \leq \|A\|_F \|x\|_2$

dla dowolnej zachodzi: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

3 Arytmetyka zmiennie przecinkowa (fl)

Zbiór $M(2, t, k)$ nie jest zamknięty ze względu na działania arytmetyczne. $fl(x \diamond y) = rd(x \diamond y)$ zatem błąd arytmetyki jest taki sam jak błąd arytmetyki reprezentacji wyniku.

Zatem $fl(x \diamond y) = (x \diamond y)(1 + \delta)$

jeżeli $x = m_1 \cdot 2^{c_1}$ $y = m_2 \cdot 2^{c_2}$ oraz $c_1 - c_2 > t$ to

$fl(x + y) = x$

4 Numeryczna poprawność

Def. Algorytm A dla zadania φ nazywamy numerycznie poprawnym jeśli istnieje stała k niezależna od wskaźnika uwarunkowania i niezależna od arytmetyki tż dla dowolnej danej $d \in D$ istnieje dana \tilde{d} tż $\|d - \tilde{d}\| \leq K \cdot 2^{-t} \|d\|$ oraz $fl(A(d)) = \varphi(\tilde{d})$

Czyli, wynik algorytmu A dla danej d (dokładniej) w arytmetyce fl jest dokładnym wynikiem zadania φ dla nieco zaburzonej danej.

Oszacowanie błędu alg. num. poprawnego:

$$\|fl(A(d)) - \varphi(d)\| \leq \text{cond}(d) \frac{K \cdot 2^{-t} \|d\|}{\|d\|} \|\varphi(d)\|$$

5 Interpolacja

5.1 Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$$

gdzie:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

5.2 Newton

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

gdzie:

$$c_k = f_{0,1,2,\dots,k}$$

oraz

$$f_{i,i+1,\dots,k+i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{i+1,\dots,k} + f_{i,\dots,(i+k-1)}}{x_{i+k} - x_i}$$

Hermite identycznie tylko że w tabeli węzły się powtarzają i w miejscu różnic dzielonych których nie można otrzymać wpisujemy $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$ a w wielomianie interpolacyjnym składniki postaci $(x - x_i)$ będą posiadały odpowiednią potęgę

6 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędu r jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia $r - 1$ oraz istnieje wielomian stopnia r dla której nie jest dokładna

6.1 Trapezy

$$\begin{aligned} S(f) &= \sum_{k=1}^N \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_k) + f(x_{k-1})) = \\ &= \frac{H}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH) \right) \end{aligned}$$

$$|E(f)| = \left| \sum_{k=1}^N \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12} \right| \leq \frac{H^2(b-a)}{12} \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

6.2 Prostokąty

$$S(f) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = H \sum_{k=0}^n f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)$$

$$|E(f)| \leq \frac{NH^3}{24} \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| = \frac{H^2}{24} (b-a) \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

6.3 Simpson

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{H}{6} \left(f(x_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{H}{2}\right) + f(x_k) \right)$$

$$|E(f)| = \left| \sum_{k=1}^N \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5} \right| \leq \frac{H^4(b-a)}{2^4} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

7 Rozwiązywanie układów r. liniowych

8.2 Gauss-Seidel

7.1 Metoda Eliminacji Gaussa GE

8.3 •

Tw.1 Jeśli A jest macierzą dodatnio określoną, to metoda GE zastosowana do $Ax = b$ jest wykonalna

Tw.2 Jeśli A jest silnie diagonalnie dominująca, to metoda GE zastosowana do układu $Ax = b$ jest wykonalna

7.2 GEPP

W k -tym kroku wybieramy wierszowo (analog. kolumnowo)

$\max_{i \in \{k, \dots, n\}} |a_{ik}|$ i zamieniamy k -ty wiersz z wierszem z

maksymalnym el. w macierzy $[A^{(k-1)}|b^{(k-1)}]$

7.3 GECP

w k -tym kroku znajdujemy p, q tż. $|a_{pq}| = \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |a_{ij}|$ i zamieniamy p wiersz z k oraz q kolumnę z k przy zamianie kolumn następuje zamiana zmiennych w x

7.4 Rozkład LU

7.5 Rozkład PA=LU

7.6 Banachiewicz-Cholesky

$$A = LL^T \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Fakt: $\sqrt{\omega_1} = l_{11} \dots \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}} = l_{kk}$ ω \det -minorów wiodących

8 Iteracyjne metody rozwiązywania u.r.l.

Tw. Metoda iteracyjna $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ jest zbieżna globalnie $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$

Tw. Jeśli $\|B\| < 1$ gdzie $\|\cdot\|$ jest normą zgodną z pewną normą wektorową to metoda $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ jest zbieżna globalnie

Tw. Greszgorin niech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dla każdej wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$ istnieje $i \in \{1, \dots, n\}$ taki, że

$$\lambda \in K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}$$

gdzie K_i to i -te koło Greszgorina. Ponadto

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i = G(A)$$

gdzie $G(A)$ nazywany jest zbiorem Greszgorina.

Warunki stopu:

1. $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d$ błąd bezwzględny
2. $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d\|x^{(k)}\|$ błąd względny
3. $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d_1\|x^{(k)}\| + d_2$ warunek Gilla
4. $\|Ax^{(k)} - b\| \leq d$ błąd residualny.

8.1 Metoda Jakobiego

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

for $p = 1, \dots, n$ do

$$x_p^{(k+1)} = \left(b_p - \sum_{j=1}^{p-1} a_{pj}x_j^{(k)} - \sum_{j=p+1}^n a_{pj}x_j^{(k)} \right) / a_{pp}$$

end for