

## 1 Uwarunkowanie

$$\delta + 1 = \frac{1}{1-\delta} \quad \delta^2 \approx 0$$

Błąd względny wyniku:

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{xf'(x)}{x} \right| |\delta|$$

$$\text{cond}(x) = \left| \frac{xf'(x)}{x} \right|$$

Uwarunkowanie zadania numerycznego:

$$\frac{\|f(\tilde{d}) - f(d)\|}{\|f(d)\|} \leq \text{cond}(d) \frac{\|d - \tilde{d}\|}{\|d\|}$$

## 2 Normy

### 2.1 Wektorowe

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \quad \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

### 2.2 Macierzowe

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} \quad A^* = \overline{A}^T$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

zgodność norm jeśli:  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

dla normy Frobeniusa:  $\|Ax\|_F \leq \|A\|_F \|x\|_2$

dla dowolnej zachodzi:  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

## 3 Arytmetyka zmiennie przecinkowa (fl)

Zbiór  $M(2, t, k)$  nie jest zamknięty ze względu na działania arytmetyczne.  $fl(x \diamond y) = rd(x \diamond y)$  zatem błąd arytmetyki jest taki sam jak błąd arytmetyki reprezentacji wyniku.

Zatem  $fl(x \diamond y) = (x \diamond y)(1 + \delta)$

jeżeli  $x = m_1 \cdot 2^{c_1}$   $y = m_2 \cdot 2^{c_2}$  oraz  $c_1 - c_2 > t$  to

$fl(x + y) = x$

## 4 Numeryczna poprawność

Def. Algorytm  $A$  dla zadania  $\varphi$  nazywamy numerycznie poprawnym jeśli istnieje stała  $k$  niezależna od wskaźnika uwarunkowania i niezależna od arytmetyki tż dla dowolnej danej  $d \in D$  istnieje dana  $\tilde{d}$  tż  $\|d - \tilde{d}\| \leq K \cdot 2^{-t} \|d\|$  oraz  $fl(A(d)) = \varphi(\tilde{d})$

Czyli, wynik algorytmu  $A$  dla danej  $d$  (dokładniej) w arytmetyce  $fl$  jest dokładnym wynikiem zadania  $\varphi$  dla nieco zaburzonej danej.

Oszacowanie błędu alg. num. poprawnego:

$$\|fl(A(d)) - \varphi(d)\| \leq \text{cond}(d) \frac{K \cdot 2^{-t} \|d\|}{\|d\|} \|\varphi(d)\|$$

## 5 Interpolacja

### 5.1 Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$$

gdzie:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

### 5.2 Newton

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

gdzie:

$$c_k = f_{0,1,2,\dots,k}$$

oraz

$$f_{i,i+1,\dots,k+i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{i+1,\dots,k} + f_{i,\dots,(i+k-1)}}{x_{i+k} - x_i}$$

Hermite identycznie tylko że w tabeli węzły się powtarzają i w miejscu różnic dzielonych których nie można otrzymać wpisujemy  $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$  a w wielomianie interpolacyjnym składniki postaci  $(x - x_i)$  będą posiadały odpowiednią potęgę

## 6 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędu  $r$  jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia  $r - 1$  oraz istnieje wielomian stopnia  $r$  dla której nie jest dokładna

### 6.1 Trapezy

$$\begin{aligned} S(f) &= \sum_{k=1}^N \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_k) + f(x_{k-1})) = \\ &= \frac{H}{2} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH) \right) \end{aligned}$$

$$|E(f)| = \left| \sum_{k=1}^N \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12} \right| \leq \frac{H^2(b-a)}{12} \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

### 6.2 Prostokąty

$$S(f) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = H \sum_{k=0}^n f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)$$

$$|E(f)| \leq \frac{NH^3}{24} \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| = \frac{H^2}{24} (b-a) \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

### 6.3 Simpson

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{H}{6} \left( f(x_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{H}{2}\right) + f(x_k) \right)$$

$$|E(f)| = \left| \sum_{k=1}^N \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5} \right| \leq \frac{H^4(b-a)}{2^4} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

## 7 Rozwiązywanie układów r. liniowych

### 7.1 Metoda Eliminacji Gaussa GE

Tw.1 Jeśli  $A$  jest macierzą dodatnio określoną, to metoda GE zastosowana do  $Ax = b$  jest wykonalna

Tw.2 Jeśli  $A$  jest silnie diagonalnie dominująca, to metoda GE zastosowana do układu  $Ax = b$  jest wykonalna

### 7.2 GEPP

W  $k$ -tym kroku wybieramy wierszowo (analog. kolumnowo)

$\max_{i \in \{k, \dots, n\}} |a_{ik}|$  i zamieniamy  $k$ -ty wiersz z wierszem z

maksymalnym el. w macierzy  $[A^{(k-1)}|b^{(k-1)}]$

### 7.3 GECP

w  $k$ -tym kroku znajdujemy  $p, q$  tż.  $|a_{pq}| = \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |a_{ij}|$  i

zamieniamy  $p$  wiersz z  $k$  oraz  $q$  kolumnę z  $k$  przy zamianie kolumn następuje zamiana zmiennych w  $x$

### 7.4 Rozkład LU

### 7.5 Rozkład PA=LU

### 7.6 Banachiewicz-Cholesky

$$A = LL^T \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Fakt:  $\sqrt{\omega_1} = l_{11} \dots \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}} = l_{kk}$   $\omega$   $\det$ -minorów wiodących

## 8 Iteracyjne metody rozwiązywania u.r.l.

Tw. Metoda iteracyjna  $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$  jest zbieżna globalnie  $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$

Tw. Jeśli  $\|B\| < 1$  gdzie  $\|\cdot\|$  jest normą zgodną z pewną normą wektorową to metoda  $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$  jest zbieżna globalnie

Tw. Greszgorin niech  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dla każdej wartości własnej  $\lambda \in \sigma(A)$  istnieje  $i \in \{1, \dots, n\}$  taki, że

$$\lambda \in K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}$$

gdzie  $K_i$  to  $i$ -te koło Greszgorina. Ponadto

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i = G(A)$$

gdzie  $G(A)$  nazywany jest zbiorem Greszgorina.

Warunki stopu:

1.  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d$  błąd bezwzględny
2.  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d\|x^{(k)}\|$  błąd względny
3.  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d_1\|x^{(k)}\| + d_2$  warunek Gilla
4.  $\|Ax^{(k)} - b\| \leq d$  błąd residualny.