

1 Uwarunkowanie

$$\delta + 1 = \frac{1}{1-\delta} \delta^2 \approx 0$$

Błąd względny wyniku:

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{xf'(x)}{x} \right| |\delta|$$

$$\text{cond}(x) = \left| \frac{xf'(x)}{x} \right|$$

Uwarunkowanie zadania numerycznego:

$$\frac{\|f(\tilde{d}) - f(d)\|}{\|f(d)\|} \leq \text{cond}(d) \frac{\|d - \tilde{d}\|}{\|d\|}$$

2 Normy

2.1 wektorowe

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2.2 macierzowe

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} \quad A^* = \overline{A}^T$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

zgodność norm jeśli: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

dla normy Frobeniusa: $\|Ax\|_F \leq \|A\|_F \|x\|_2$

dla dowolnej zachodzi: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

3 Arytmetyka zmianno przecinkowa (fl)

Zbiór $M(2, t, k)$ nie jest zamknięty ze względu na działania arytmetyczne. $fl(x \diamond y) = rd(x \diamond y)$ zatem błąd arytmetyki jest taki sam jak błąd arytmetyki reprezentacji wyniku.

Zatem $fl(x \diamond y) = (x \diamond y)(1 + \delta)$

jeżeli $x = m_1 \cdot 2^{c_1}$ $y = m_2 \cdot 2^{c_2}$ oraz $c_1 - c_2 > t$ to

$fl(x + y) = x$

4 Numeryczna poprawność

Def. Algorytm A dla zadania φ nazywamy numerycznie poprawnym jeśli istnieje stała k niezależna od wskaźnika uwarunkowania i niezależna od arytmetyki tż dla dowolnej danej $d \in D$ istnieje dana \tilde{d} tż $\|d - \tilde{d}\| \leq K \cdot 2^{-t} \|d\|$ oraz $fl(A(\tilde{d})) = \varphi(\tilde{d})$

Czyli, wynik algorytmu A dla danej d (dokładniej) w arytmetyce fl jest dokładnym wynikiem zadania φ dla nieco zaburzonej danej.

Oszacowanie błędu alg. num. poprawnego:

$$\|fl(A(d)) - \varphi(d)\| \leq \text{cond}(d) \frac{K \cdot 2^{-t} \|d\|}{\|d\|} \|\varphi(d)\|$$

5 Interpolacja

5.1 Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$$

gdzie:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

5.2 Newton

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

gdzie:

$$c_k = f_{0,1,2,\dots,k}$$

oraz

$$f_{i,i+1,\dots,k+i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{i+1,\dots,k} + f_{i,\dots,(i+k-1)}}{x_{i+k} - x_i}$$

Hermit identycznie tylko że w tabeli węzły się powtarzają i w miejscu różnic dzielonych których nie można otrzymać wpisujemy $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$ a w wielomianie interpolacyjnym składniki postaci $(x - x_i)$ będą posiadały odpowiednią potęgę

6 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędu r jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia $r-1$ oraz istnieje wielomian stopnia r dla której nie jest dokładna

6.1 Trapezy

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_k) + f(x_{k-1})) = \frac{H}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH) \right)$$

$$|E(f)| = \left| \sum_{k=1}^N \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12} \right| \leq \frac{H^2(b-a)}{12} \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

6.2 Prostokąty

$$S(f) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = H \sum_{k=0}^n f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)$$

$$|E(f)| \leq \frac{NH^3}{24} \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| = \frac{H^2}{24} (b-a) \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

6.3 Simpson

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{H}{6} \left(f(x_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{H}{2}\right) + f(x_k) \right)$$

$$|E(f)| = \left| \sum_{k=1}^N \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5} \right| \leq \frac{H^4(b-a)}{2^4} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

7 Rozwiązanie układów r. liniowych