# 1 Uwarunkowanie

$\delta + 1 = \frac{1}{1-\delta} \qquad \delta^2 \approx 0$
Błąd względny wyniku:

$$\left|\frac{f(\widetilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{xf'(x)}{x}\right| |\delta|$$

$$cond(x) = \left|\frac{xf'(x)}{x}\right|$$

Uwarunkowanie zadania numerycznego:

$$\frac{||f(\widetilde{d}) - f(d)||}{||f(d)||} \leq cond(d)\frac{||d - \widetilde{d}||}{||d||}$$

# 2 Normy

## 2.1 Wektorowe

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

$$||x||_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_k| \quad ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

## 2.2 Macierzowe

$$||A||_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad ||A||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_2 = \sup_{x\neq 0,\ x\in\mathbb{C}^n} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sqrt{\rho\,(A^*A)} \quad A^* = \overline{A}^T$$

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |a_{ij}|^2}$$

zgodność norm jeśli: $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$
dla normy Frobeniusa: $||Ax||_F \leq ||A||_F ||x||_2$
dla dowolnej zachodzi: $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

# 3 Arytmetyka zmienno przecinkowa (fl)

Zbiór $M(2, t, k)$ nie jest zamknięty ze względu na działania arytmetyczne. $fl(x \diamond y) = rd(x \diamond y)$ zatem błąd arytmetyki jest taki sam jak błąd arytmetyki reprezentacji wyniku.
Zatem $fl(x \diamond y) = (x \diamond y)(1 + \delta)$
jeżeli $x = m_1 \cdot 2^{c_1}$ $y = m_2 \cdot 2^{c_2}$ oraz $c_1 - c_2 > t$ to $fl(x + y) = x$

# 4 Numeryczna poprawność

Def. Algorytm $A$ dla zadania $\varphi$ nazywamy numerycznie poprawnym jeśli istnieje stała $k$ niezależna od wskaźnika uwarunkowania i niezależna od arytmetyki tż dla dowolnej danej $d \in D$ istnieje dana $\widetilde{d}$ tż $||d - \widetilde{d}|| \leq K \cdot 2^{-t}||d||$ oraz $fl(A(d)) = \varphi(\widetilde{d})$
Czyli, wynik algorytmu A dla danej d (dokładniej) w arytmetyce $fl$ jest dokładnym wynikiem zadania $\varphi$ dla nieco zaburzonej danej.
Oszacowanie błędu alg. num. poprawnego:
$||fl(A(d)) - \varphi(d)|| \leq cond(d)\frac{K\cdot 2^{-t}||d||}{||d||}||\varphi(d)||$

# 5 Interpolacja

## 5.1 Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

gdzie:

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

## 5.2 Newton

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

gdzie:

$$c_k = f_{0,1,2,\ldots,k}$$

oraz

$$f_{i,i+1,\ldots,k+i} \stackrel{def}{=} \frac{f_{i+1,\ldots,k} + f_{i,\ldots,(i+k-1)}}{x_{i+k} - x_i}$$

Hermite identycznie tylko że w tabeli węzły się powtarzają i w miejscu różnic dzielonych których nie można otrzymać wpisujemy $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$ a w wielomianie interpolacyjnym składniki postaci $(x - x_i)$ będą posiadały odpowiednią potęgę

# 6 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędy $r$ jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnie $r - 1$ oraz istnieje wielomian stopnia r dla której nie jest dokładna

## 6.1 Trapezy

$$S(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1})) =$$

$$= \frac{H}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH)\right)$$

$$|E(f)| = \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12}\right| \leq \frac{H^2(b-a)}{12} \sup_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|$$

## 6.2 Prostokąty

$$S(f) = \sum_{k=1}^{N}(x_k - x_{k-1})f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = H\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)$$

$$|E(f)| \leq \frac{NH^3}{24} \sup_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)| = \frac{H^2}{24}(b-a) \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

## 6.3 Simpson

$$S(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{H}{6}\left(f(x_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{H}{2}\right) + f(x_k)\right)$$

$$|E(f)| = \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5}\right| \leq \frac{H^4(b-a)}{2^4} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

# 7 Rozwiązywanie układów r. liniowych

## 7.1 Metoda Eliminacji Gaussa GE

Tw.1 Jeśli $A$ jest macierzą dodatnio określoną, to metoda GE zastosowana do $Ax = b$ jest wykonalna
Tw.2 Jeśli A jest silnie diagonalnie dominująca, to metoda GE zastosowana do układu $Ax = b$ jest wykonalna

## 7.2 GEPP

W $k$-tym kroku wybieramy wierszowo (analog. kolumnowo) $\max_{i \in \{k,\dots,n\}} |a_{ik}|$ i zamieniamy $k$-ty wiersz z wierszem z maksymalnym el. w macierzy $[A^{(k-1)}|b^{(k-1)}]$

## 7.3 GECP

w $k$-tym kroku znajdujemy $p, q$ tż. $|a_{pq}| = \max_{i,j \in \{1,\dots,n\}} |a_{ij}|$ i zamieniamy $p$ wiersz z $k$ oraz $q$ kolumnę z $k$ przy zamianie kolumn następuje zamiana zmiennych w x

## 7.4 Rozkład LU

## 7.5 Rozkład PA=LU

## 7.6 Banachiewicz-Cholesky

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \dots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Fakt: $\sqrt{\omega_1} = l_{11} \dots \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}} = l_{kk}$ $\omega$ $det$-minorów wiodących

# 8 Iteracyjne metody rozwiązywania u.r.l.

Tw. Metoda iteracyjna $x^{(k+1)} = Bx^k + c$ jest zbieżna globalnie $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$
Tw. Jeśli $||B|| < 1$ gdzie $||\cdot||$ jest normą zgodną z pewną normą wektorową to metoda $x^{(k+1)} = Bx^k + c$ jest zbieżna globalnie
Tw. Greszgorin niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dla każdej wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$ istnieje $i \in \{1,\dots,n\}$ taki, że

$$\lambda \in K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ii}|$$

gdzie $K_i$ to $i$-te koło Greszgorina. Ponadto
$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i = G(A)$
gdzie $G(A)$ nazywany jest zbiorem Greszgorina.