Föreläsning 8

Johan Richter

Kurvintegraler av funktioner

Detta diskuteras i avsnitt 8.3.

Anta att vi har en kurva, C, i planet med parametrisering $r(t), a \leq t \leq b$ som är deriverbar och så att $r'(t) \neq 0$ för alla t. Dessa vilkor innebär att vi har att göra med en trevlig och slät kurva. Låt oss också anta att vi har en kontinuerlig reellvärd funktion definierad på något område som innehåller hela bilden av kurvan $r(t)$.

Låt oss ta och göra följande definition.

Definition. Kurvintegralen längs kurvan C ges av

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Vi noterar att om $f(x,y) = 1$ för alla värden på (x,y) så blir integralen samma som vi använde för att räkna längden av kurvan.

Kurvintegralen av f kan approximeras med en Riemann-summa om vi delar in kurvan i småbitar, väljer en punkt, $P_i = (x_i^*, y_i^*)$, på varje liten kurvbit och sedan räknar summan

$$\sum_i f(x_i^*, y_i^*)\delta s_i,$$

där δs_i är längden av kurvbiten. Se sidan 1063 i boken.

En viktig egenskap hos kurvintegraler är att det inte spelar någon roll vilken parametrisering vi väljer så länger vi går igenom samma kurva i samma riktning.

Exempel. Räkna kurvintegralen $\int_C x\mathrm{d}s$ om C är övre halvan av enhetscirkeln genomlöpt medurs.

Vi väljer parametriseringen $x(t) = -\cos(t), y(t) = \sin(t), 0 \leq t \leq \pi$. Kurvintegralen kan nu räknas

$$\int_C x\mathrm{d}s = \int_0^\pi -\cos(t)\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^\pi -\cos(t)\,\mathrm{d}t = [-\sin(t)]_0^\pi = -\sin(\pi)+\sin(0) = 0.$$

Anta att C är kurvan som består av ett linjestycke från $(0,0)$ till $(0,1)$. Betrakta $\int_C f(x,y)\mathrm{d}s$ för någon funktion f.

Vi kan välja parametrisering $x(t) = t, y(t) = 0$ och integralen blir i detta fall bara

$$\int_0^1 f(t,0)\,\mathrm{d}t.$$

Så vanliga envariabelintegraler är ett specialfall av kurvintegraler. Att byta parametriseringen kallas i detta fall för variabelbyte.

En möjlig tolkning av $\int_C f\mathrm{d}s$ är att f kan representera densiten. Då blir integralen lika med massan av kurvan.

Exempel. Låt kurvan C ha parametriseringen $x(t) = t^2, y(t) = t^3 - 1$ där vi tillåter t att variera mellan 0 och 2. Anta att densiten på C ges av $f(x,y) = 8\sqrt{x} + 36y + 36$. Då blir massan av C lika med

$$\int_0^2 (8t+36t^3)\sqrt{4t^2+9t^4}\,\mathrm{d}t = \left[2\frac{(4t^2+9t^4)^{3/2}}{3}\right]_0^2 = \frac{1280}{3}\sqrt{10}.$$

Kurvintegraler av ett vektorfält

Nu kommer vi in på kapitel 9.

Kurvintegraler av vektorfält kan motiveras med fysikaliska tillämpningar.

Från fysikkurser på gymnasiet kan ni komma ihåg något som kallades för arbetet. Kraften gånger vägen ger arbetet var en formel ni lärde er.

Mer precist, om en partikel rör sig från A till B under inverkan av en konstant kraft F så är arbetet $W = \overrightarrow{AB} \cdot F$. Jag har formulerat denna definition med hjälp av skalärprodukten, vilket är en annan formulering än vad ni förmodligen såg i gymnasiet. Enheten för arbete i SI–systemet är Joule.

Exempel. Jag drar ett block uppför en ramp från $(0, 0)$ till $(1, 2)$ med hjälp av kraften $(1, 3)$. Arbetet jag utträttar är $(1, 2) \cdot (1, 3) = 7$.

Arbetet är ett mått på hur mycket energi det krävs för att någon fysikalisk process ska kunna ske. Det är ett viktigt begrepp och vi vill ha ett mått på arbetet när partikeln inte rör sig i en rak linje och där kraften kan variera med läget.

Vi har alltså en partikel som rör sig längs kurvan $(x(t), y(t))$ och vi har ett kraftfält $(P(x, y), Q(x, y))$.

Metoden vi använder för att definiera detta är en metod vi använt flera gånger förut i den här kursen. Betraktar vi en tillräcklig liten bit av kurvan är den nästan en rät linje och kraftfältet är nästan konstant på den biten av kurvan.

Väljer vi parametervärden $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ tänker vi oss att vi kan approximera arbetet med formeln

$$W \approx \sum_{i=1}^{n}(r(t_i) - r(t_{i-1}) \cdot (P(r(t_i), Q(r(t_i)) \approx \sum_{i=1}^{n} r'(t_i)(t_i - t_{i-1}) \cdot (P(r(t_i), Q(r(t_i)).$$

Vi kan skriva detta som en integral,

$$\int_a^b (P(r(t), Q(r(t)) \cdot r'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exempel. Vilket arbete utträttar kraftfältet $F(x, y) = (x^2, -xy)$ när en partikel rör sig längs kurvan $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Det räknar vi med integralen

$$\int_C F(r) \cdot \mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\cos^2(t)\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}.$$

Konservativa fält

När vi sysslar med vektoranalys så använder vi ofta notationen $\nabla f = \operatorname{grad} f$.

Om vektorfältet F har egenskapen att $F = \nabla f$ för en reellvärd funktion f så blir kurvintegralen av F enkel att beräkna.

Sats. *Om C är en kurva med parametriseringen $r(t), a \leq t \leq b$ och f är en funktion med kontinuerlig gradient så gäller att*

$$\int_C \nabla f \cdot \mathrm{d}r = f(r(b)) - f(r(a)).$$

Denna sats är en motsvarighet till analysens huvudsats för kurvintegraler. Den är inte användbar lika ofta, eftersom inte alla vektorfält är gradienten av en funktion.

Exempel. Om vi sätter

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\arctan(y^2), \frac{2xy}{1+y^4}\right)$$

och vill räkna integralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

där C är kurvan med parametrisering

$$x(t) = e^{t^2-t} + e^{t^3-t},\ y(t) = t^3 + t^2 - t,\ 0 \leq t \leq 1.$$

Eftersom det finns en potential, $U(x, y) = x \arctan(y^2)$, kan vi räkna

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = U(2, 1) - U(2, 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Om $\mathbf{F} = \nabla U$ säger vi att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält med potential U. Det visar sig att potentialfält och konservativa fält är samma sak.

Sats. *Om det kontinuerligt deriverbara vektorfältet* (P, Q) *uppfyller att* $(P(x, y), Q(x, y)) = \nabla U$ *så gäller det att*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Detta följer från att ordningen inte spelar någon roll när vi tar blandade partialderivator av snälla funktioner.

Exempel. Är vektorfältet $(P(x, y), Q(x, y)) = (x^2 + e^y, \cos(xy))$ lika med gradienten av någon funktion? Nej, eftersom

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y$$

och

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -y \sin(xy).$$

Om $F = \nabla f$ för någon funktion f så säger vi att F är ett *konservativt* vektorfält.

Exempel. Sätter vi

$$(P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

så kan man kontrollera att $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ på hela definitionsmängden $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Men om vi räknar kurvintegralen

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

där C är enhetscirkeln genomlöpt moturs får vi svaret 2π. Det är alltså inte ett potentialfält.

Definition. Vi kallar en mängd enkelt sammanhängande om den är sammanhängande och inte omsluter några hål.

Sats. *Om* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ *i ett öppet, enkelt sammanhängande område så är* (P, Q) *ett konservativt vektorfält.*

En sats som funkar även i områden som inte är enkelt sammanhängande är följande:

Sats. *Ett vektorfält* (P, Q) *är konservativt om och endast om alla kurvintegraler över slutna kurvor är* 0 *och om och endast om alla kurvintegraler är vägoberoende.*

Flödesintegraler

Räknar vi kurvintegralen av vektorfältet $(-Q, P)$, dvs $\int_C -Q\mathrm{d}x + P\mathrm{d}y$, så kallar vi det flödesintegralen av vektorfältet (P, Q). Om (P, Q) är ett hastighetsfält för en fluid representear flödesintegralen hur mycket som rinner igenom kurvan.