

# Lógica Proposicional

Disciplina: Lógica para Computação

Prof. Larissa Freitas, Renata Reiser, André Du Bois

{larissa, reiser, dubois}@inf.ufpel.edu.br



# Árvores de Refutação (AR)

- Fornecem uma maneira mais eficiente de determinar a validade das formas de um argumento.
- A **refutação** de uma forma de prova de argumentos lógicos estruturada da seguinte forma:  
“Se, quando todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa não obtemos uma refutação, então podemos afirmar a validade do argumento”
- Um *árvore de refutação* é uma análise na qual uma lista de formulas é desmembrada sub-listas contendo variáveis proposicionais ou suas negações.



# Árvores de Refutação

- Construção da árvore de refutação para uma forma de argumento:
  - Constrói-se uma lista com suas premissas e a **negação** de sua conclusão.
  - Faz-se uma busca desmembrando as FBF da lista em variáveis proposicionais ou suas negações.
- Análise da validade da forma de argumento:
  - A forma de argumento é **inválida**, caso encontremos uma refutação.
    - A refutação pode ser encontrada definindo valores V ou F para as variáveis proposicionais que tornem verdadeiras todas as fórmulas da lista.
  - Caso contrário, a forma de argumento é **válida**.



# Árvores de Refutação

- Mostre se  $P \wedge Q \vdash \sim\sim P$  é válida ou não:
  1.  $P \wedge Q$
  2.  $\sim\sim\sim p$
- Inicialmente, a lista é formada com a premissa (1) e a negação da conclusão (2).



# Árvores de Refutação

- Mostre se  $P \wedge Q \vdash \sim\sim P$  é válida ou não:

1. ✓  $P \wedge Q$

2.  $\sim\sim\sim P$

3.  $P$  1  $\wedge$

4.  $Q$  1  $\wedge$

- Podemos substituir  $P \wedge Q$  por essas variáveis.



# Árvores de Refutação

- Mostre se  $P \wedge Q \vdash \sim\sim P$  é válida ou não:

1. ✓  $P \wedge Q$

2. ✓  $\sim\sim\sim P$

3.  $P$  1  $\wedge$

4.  $Q$  1  $\wedge$

5.  $\sim P$  2  $\sim\sim$



- Da mesma forma, podemos substituir  $\sim\sim\sim P$  por  $\sim P$ .
- Neste ponto, todas as fórmulas foram desmembradas.

# Árvores de Refutação

- Mostre se  $P \wedge Q \vdash \sim\sim P$  é válida ou não:

1. ✓  $P \wedge Q$

2. ✓  $\sim\sim\sim P$

3.  $P$  1  $\wedge$

4.  $Q$  1  $\wedge$

5.  $\sim P$  2  $\sim\sim$

- A árvore está completa, pois não há mais fórmulas a serem desmembradas.



# Árvores de Refutação

- Mostre se  $P \wedge Q \vdash \sim\sim P$  é válida ou não:

1.	✓	$P \wedge Q$	
2.	✓	$\sim\sim\sim P$	
3.		$P$	1 $\wedge$
4.		$Q$	1 $\wedge$
5.		$\sim P$	2 $\sim\sim$
6.		X	

- Podemos tentar encontrar a refutação: atribuindo V para as variáveis atômicas.
- Como encontramos na lista  $P$  e  $\sim P$ , não há nenhuma atribuição que torne todas as fórmulas da lista verdadeiras (coloca-se o X para indicar que o ramo está fechado).
- Assim a fórmula é **válida**.





# Regra Geral de Análise da Árvore de Refutação

- Qualquer ramo que contém uma fórmula e sua negação é um ramo em que falha a refutação, assim pode-se **fechar** o ramo.
- Um ramo **termina** se ele se fecha ou se as FBF não-marcadas são variáveis proposicionais ou suas negações.
- Uma árvore está **completa** se todos os seus ramos terminam.
- Se todos os ramos de uma árvore completa estão fechados o argumento é válido. Caso contrário, o argumento é inválido.



# Regras para Desmembrar Fórmulas

- **Negação negada (  $\sim\sim$  ):** Se um ramo aberto contém uma FBF não-marcada da forma  $\sim\sim\phi$ , marca-se  $\sim\sim\phi$  e escreve-se  $\phi$  no final de cada ramo aberto que contém  $\sim\sim\phi$  marcada.
- **Conjunção (  $\wedge$  ):** Se um ramo aberto contém uma FBF não-marcada da forma  $\phi \wedge \psi$ , marca-se  $\phi \wedge \psi$  e escreve-se  $\phi$  e  $\psi$  no final de cada ramo aberto que contém  $\phi \wedge \psi$  marcada.



# Exemplo

- Mostre se  $P \vee Q, P \vdash \sim Q$  é válida ou não:

1.  $P \vee Q$

2.  $P$

3.  $\sim\sim Q$



# Exemplo

- Mostre se  $P \vee Q, P \vdash \sim Q$  é válida ou não:

1.  $P \vee Q$

2.  $P$

3. ✓  $\sim\sim Q$

4.  $Q$  3  $\sim\sim$



# Exemplo

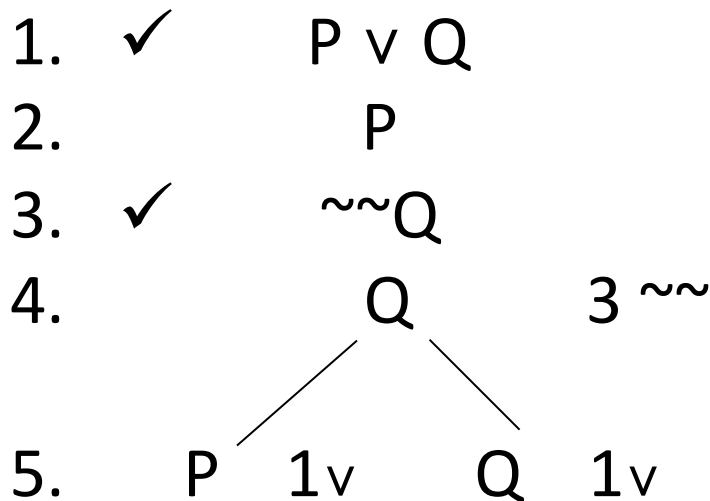
- Mostre se  $P \vee Q, P \vdash \sim Q$  é válida ou não:

1. ✓  $P \vee Q$   
2.  $P$   
3. ✓  $\sim\sim Q$   
4.  $Q$  3  $\sim\sim$   
5.  $P$  1v  $Q$  1v



# Exemplo

- Mostre se  $P \vee Q, P \vdash \sim Q$  é válida ou não:

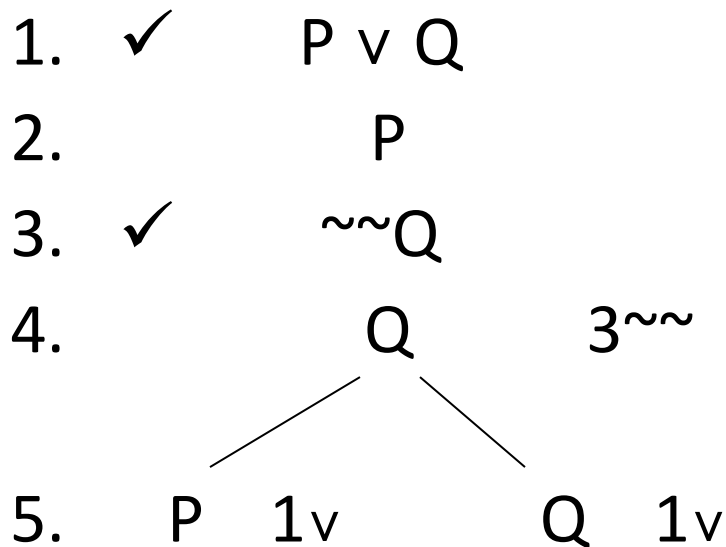


- Neste ponto, a árvore está completa e ambos os ramos terminam.
- Como há ramos que não estão fechados, podemos concluir que o argumento **é inválido**.



# Contra-exemplo

- Mostre se  $P \vee Q, P \vdash \sim Q$  é válida ou não:



- Vamos procurar uma refutação em algum dos ramos abertos:

$P = V$  e  $Q = V$

Estes valores que definem a refutação constituem um contra-exemplo



# Árvores de Refutação

- Cada ramo aberto de uma árvore completa é uma “receita” para construir contra-exemplos.
  - As fórmulas não-marcadas num ramo aberto são variáveis proposicionais ou suas negações.
  - Qualquer situação em que as variáveis não-negadas são verdadeiras e as negadas são falsas é um contra-exemplo.





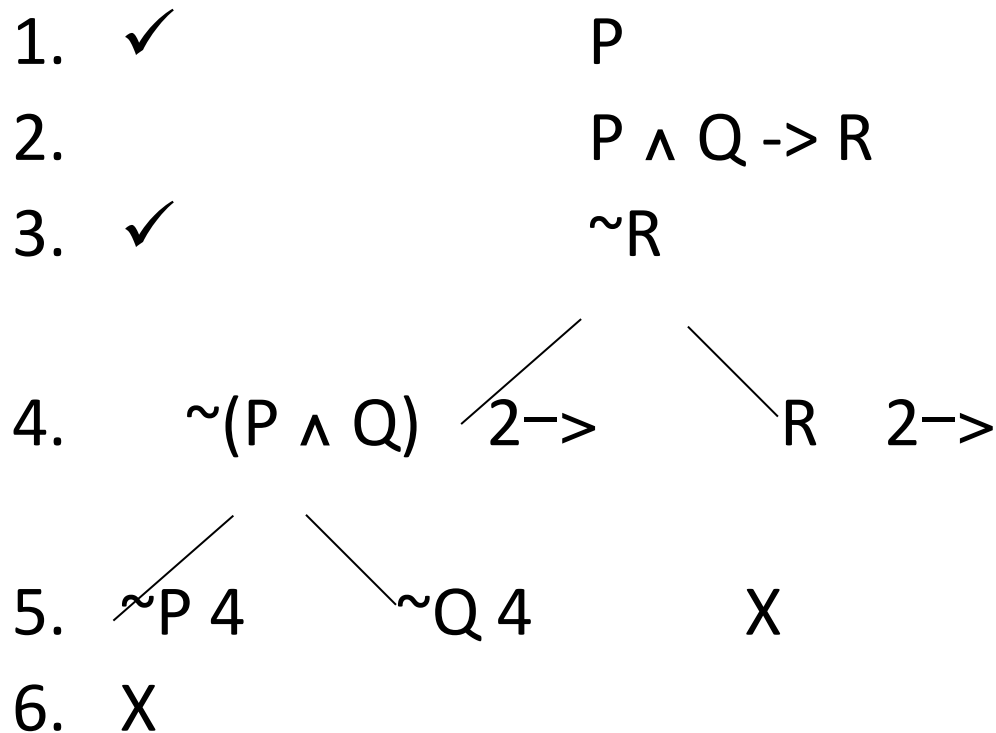
# Regras para Desmembrar Fórmulas

- **Implicação ( $\rightarrow$ ):** Se um ramo aberto contém uma FBF não-marcada da forma  $\phi \rightarrow \psi$ , marca-se  $\phi \rightarrow \psi$  e bifurca-se cada ramo aberto que contém  $\phi \rightarrow \psi$  marcada, no final do primeiro ramo escreve-se  $\sim\phi$  e no final do segundo ramo escreve-se  $\psi$ .



# Exemplo

- Mostre se  $P, P \wedge Q \rightarrow R \vdash R$  é válida ou não:



Vamos procurar uma refutação em algum dos ramos abertos:  $P = V$  e  $Q = F$  e  $R = F$



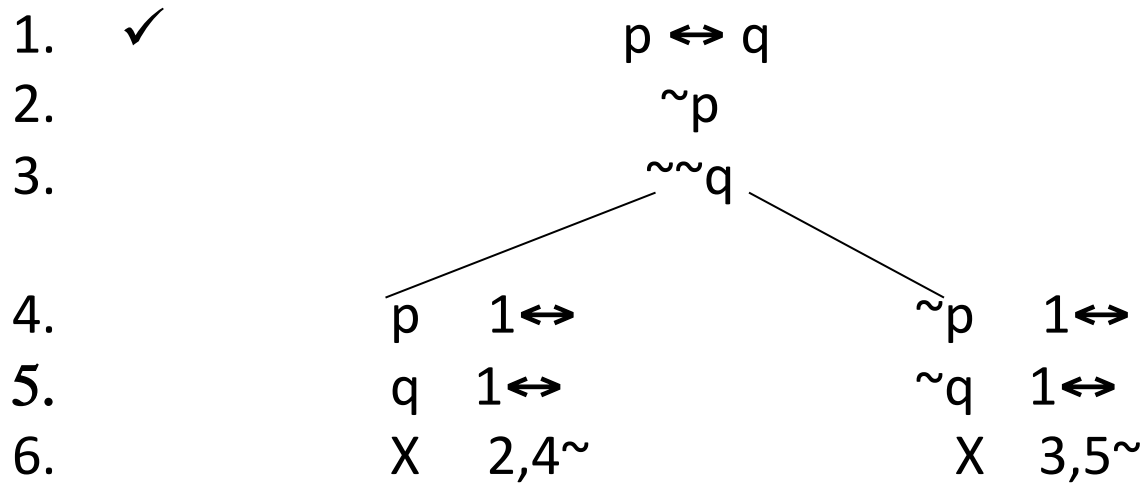
# Regras para Desmembrar Fórmulas

- **Bicondicional (  $\leftrightarrow$  ):** Se um ramo aberto contém uma FBF não-marcada da forma  $\phi \leftrightarrow \psi$ , marca-se  $\phi \leftrightarrow \psi$  e bifurca-se cada ramo aberto que contém  $\phi \leftrightarrow \psi$  marcada, no final do primeiro ramo escreve-se  $\phi$  e  $\psi$  e no final do segundo ramo escreve-se  $\sim\phi$  e  $\sim\psi$ .



# Exemplo

- Determinar se a seguinte forma é válida:  $p \leftrightarrow q, \sim p \vdash \sim q$



É válida pois todos os ramos da árvore estão fechados



# Exercícios

- Construa as árvores de refutação para determinar se as formas de argumento a seguir são válidas ou não. Caso não seja válida, dê um contra-exemplo.
  - a)  $p \wedge q, p \vdash \sim q$
  - b)  $p \vee q, \sim p \vdash \sim \sim q$
  - c)  $r \wedge \sim s, \sim \sim r \vdash s$
  - d)  $(q \wedge r) \rightarrow p, \sim q, \sim r \vdash \sim p$
  - e)  $\sim p \wedge \sim q, r \Leftrightarrow p \vdash \sim r$



# Lógica Proposicional

E-mail para dúvidas:

[{larissa, reiser, dubis}@inf.ufpel.edu.br](mailto:{larissa, reiser, dubis}@inf.ufpel.edu.br)

**Resolvam os exercícios!**

