Resolução da lista de exercícios de Sistemas Discretos

Aluna: Anna Gabriele Marques de Oliveira

Questão 1:

a) contraexemplo: O retângulo é uma figura geométrica com quatro ângulos retos e não é um quadrado.

b) contraexemplo: O número 0 não é positivo nem negativo.

d) contraexemplo: Para n = 8, $n^2 + 1 = 65$. 65 = 5 * 13.

Questão 2:

Essa é a "demonstração" apresentada pelo exercício:

x e y são pares $\longrightarrow$ x+y é múltiplo de 4
Supondo que
x = 2m y = 2m m $\in$ Z
Então
x + y = 2m + 2m = 4m
x+y é um múltiplo de 4

O problema com essa demonstração é que inicialmente queríamos provar que a soma de quaisquer números pares é um múltiplo de 4. Na demonstração incorreta foi atribuída a mesma variável 'm' para demonstrar que x e y são pares. Com isso a demonstração só seria válida se x e y forem iguais, uma vez que, segundo a demonstração, x = 2m = y.

Questão 3:

a) Se n = 25, 100 ou 169, então n é um quadrado perfeito e é uma soma de dois quadrados perfeitos.

Por prova direta: hipótese 1: 25 é quadrado perfeito. $25 = 5^2$ hipótese 2: 25 e é a soma de dois quadrados perfeitos. $25 = 9 + 16 = 3 \times 3 + 4 \times 4 = (3)^2 + (4)^2$

hipótese 1: 100 é quadrado perfeito. $100 = (10)^2$ hipótese 2: 100 e é a soma de dois quadrados perfeitos. $100 = 36 + 64 = 6 \times 6 + 8 \times 8 = (6)^2 + (8)^2$

hipótese 1: 169 é quadrado perfeito. $169 = (13)^2$ hipótese 2: 169 e é a soma de dois quadrados perfeitos. $169 = 25 + 144 = 5 \times 5 + 12 \times 12 = (5)^2 + (12)^2$ $\blacksquare$

c) A soma de um inteiro com o seu quadrado é par:

Dado um inteiro qualquer k, ou ele é par, ou é impar. (princípio do terceiro excluído)

Vamos provar por exaustão:

Se é k impar k = 2j + 1, tal que $j \in Z$.

Então: $k^2 = (2j + 1)^2$

$(2j + 1) + (2j + 1)^2 = 2j + 1 + (2j)^2 + 2 \times (2j) \times 1 + 1^2 = 2j + 14j^2 + 4j + 1 =$

$= 4j^2 + 6j + 2 = 2(2j^2 + 3j + 1)$

$(2j^2+3j+1)$ pertence aos inteiros pois é uma combinação de j, assim, $2(2j^2+3j+1)$ é par.

Se é k par: k = 2j, tal que tal que $j \in Z$.

$2j + (2j)^2 = 2j + 4j^2 = 2(j + 2j^2)$

$(j + 2j^2)$ pertence aos inteiros pois é uma combinação de j, assim, $2(j + 2j^2)$ é par. ■

e) Para todo inteiro n, o número $3(n^2 + 2n + 3)–2n^2$ é um quadrado perfeito (faça uma demonstração direta).

Usando a propiedade distributiva, temos:

$3(n^2 + 2n + 3)–2n^2 = 3n^2 + 6n + 9 - 2n^2 = n^2 + 6n + 9$

Podemos notar que n^2+6n+9 é um produto notável da forma: $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$.

Assim,

$n^2 + 6n + 9 = n^2 + 2 \times 3 \times n + (3)^2 = (n + 3)^2$.

Que descreve um quadrado perfeito. ■