

Lógica Proposicional

Sintaxe e Semântica

Disciplina: Lógica para Computação

Prof^a. Larissa A. de Freitas

larissa@inf.ufpel.edu.br



Lógica Proposicional

- Ao apresentarmos uma linguagem formal, precisamos inicialmente fornecer os componentes básicos da linguagem, chamado de **alfabeto**, para em seguida fornecer as **regras de formação** da linguagem, também chamada de **gramática**.
- O **alfabeto** da lógica proposicional é constituído por:

P, Q, R, S
verdadeiro, falso
 \sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
(,)

variáveis proposicionais
símbolo de verdade
conectivos/operadores lógicos
símbolo de pontuação /parênteses

• Ao apresentarmos uma linguagem formal, precisamos inicialmente fornecer os componentes básicos da linguagem, chamado de **alfabeto**, para em seguida fornecer as regras de formação da linguagem, também chamada de **gramática**.

O alfabeto da lógica proposicional é constituído por:
P, Q, R, S variáveis proposicionais
verdadeiro, falso símbolo de verdade
 \sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow conectivos/operadores lógicos
(,) símbolos de pontuação /parênteses

Lógica Proposicional

- Os elementos da linguagem da lógica proposicional são chamados de fórmulas (ou fórmulas-bem-formadas)
- Uma **fórmula-bem-formada** (FBF) é qualquer sequência de símbolos do **alfabeto** definida pelas regras:
 - Regra 1) Qualquer variável proposicional é uma FBF
 - Regra 2) Se P é FBF, então $\sim P$ é FBF
 - Regra 3) Se P e Q são FBF, então $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$ são FBF



Lógica Proposicional

- Usamos abreviações que permitem omitir os parênteses em uma diversas situações:
 - Os parênteses mais externos de uma fórmula podem ser omitidos.
Por exemplo: $P \wedge Q$ ao invés de $(P \wedge Q)$
 - O uso repetido dos conectivos \wedge , \vee , \rightarrow e \leftrightarrow dispensa o uso de parênteses.
Por exemplo: $P \rightarrow Q \rightarrow R$ ao invés de $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
 - Em fórmulas onde há uma combinação de conectivos existe uma precedência entre eles.
Por exemplo: $P \vee Q \wedge R$ representa $P \vee (Q \wedge R)$

Lógica Proposicional

- Para reduzir o número de parênteses necessários em uma FBF, deve-se obedecer a seguinte ordem de aplicação dos operadores (**ordem de precedência**):
 1. **Negação** (\sim)
 2. **Conjunção** (\wedge)
 3. **Disjunção** (\vee)
 4. **Implicação** (\rightarrow)
 5. **Equivalência** (\leftrightarrow)



Exercícios

- Identificar as fórmulas que são FBF.

a) P FBF

b) $((P \rightarrow Q) \wedge R)$ FBF

c) $(P \wedge (Q \vee R))$ \neg FBF

d) $(P \vee Q)$ \neg FBF

e) $(\sim(P \vee R) \vee Q)$ FBF

Exercícios

- Simplificar as fórmulas, removendo os parênteses desnecessários.

- a) ~~$(P \vee Q)$~~ $P \vee Q$
 b) $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$ $P \vee (Q \wedge R) \vee S$
 c) ~~$\sim(P \vee (Q \wedge R))$~~ $\sim(P \vee (Q \wedge R))$
 d) ~~$\sim(P \wedge (Q \vee R))$~~ $\sim(P \wedge (Q \vee R))$
 e) ~~$((P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q)$~~ $((P \wedge P) \rightarrow Q) \rightarrow Q$
 $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$



Lógica Proposicional

- Na linguagem natural, usam-se palavras para interligar frases dotadas de algum sentido. Na lógica, estas palavras são substituídas por símbolos denominados **conectivos/operadores lógicos**.
- Trabalharemos com cinco operadores que substituirão simbolicamente as expressões:
 - **Negação** (\sim)
 - **Conjunção** (\wedge)
 - **Disjunção** (\vee)
 - **Implicação/condicional** (\rightarrow)
 - **Equivalência/bi-condicional** (\leftrightarrow)



Lógica Proposicional

- Negação:
 - Representação: \sim
 - Leitura: não, não é o caso que
 - Exemplos:
 - **Não** fui premiado na loteria semana passada.
 - **Não é o caso que** fui premiado na loteria semana passada.
 - Formalização: $\sim P$



Lógica Proposicional

- **Conjunção:**
 - Representação: \wedge
 - Leitura: e, mas, além disso, ...
 - Exemplo:
 - Comprei um bilhete da loteria **e** fui premiado na loteria semana passada.
 - Comprei um bilhete da loteria, **além disso** fui premiado na loteria semana passada.
 - Formalização: $P \wedge Q$



Lógica Proposicional

- Disjunção:
 - Representação: \vee
 - Leitura: ou, ou ... ou ...
 - Exemplo:
 - Hoje está chovendo **ou** vou ficar em casa.
 - **Ou** hoje está chovendo **ou** vou ficar em casa.
 - Formalização: $P \vee Q$



Lógica Proposicional

- Implicação:
 - Representação: \rightarrow
 - Leitura: se, se...então, somente se
 - Exemplo:
 - **Se** hoje estiver chovendo **então** ficarei em casa.
 - **Se** hoje estiver chovendo, ficarei em casa.
 - Ficarei em casa **se** hoje estiver chovendo.
 - Hoje estará chovendo **somente se** eu ficar em casa.
 - Formalização: $P \rightarrow Q$



Lógica Proposicional

- Equivalência:
 - Representação: \leftrightarrow
 - Leitura: se e somente se
 - Exemplo:
 - Fui premiado na loteria semana passada **se e somente se** comprei um bilhete da loteria.
 - Formalização: $P \leftrightarrow Q$

Exercícios

- Traduzir para a linguagem simbólica as proposições:

$$A \rightarrow \neg M$$

$$A \vee \neg M$$

$$\neg A \wedge M$$

- a) Se Alfredo escreve para Maria então ela não irá para outra cidade.
- b) Ou Alfredo escreve para Maria ou ela não irá para outra cidade.
- c) Alfredo não escreveu para Maria e ela irá para outra cidade.
- d) Alfredo escreverá para Maria, se e somente se, ela for para outra cidade.
- e) Se Alfredo escrever para Maria e João for ao encontro dela, então Maria não irá para outra cidade.
- f) Se Alfredo for ao encontro de Maria ou João for ao encontro de Maria, ela não ficará mais na cidade.

$$A \leftrightarrow M$$

$$(A \wedge J) \rightarrow \neg M$$

$$(B \vee J) \rightarrow \neg C$$



Exercícios

- Sejam as proposições: P = Carlos é argentino e Q = João é brasileiro. Traduzir para a linguagem natural as proposições:

- a) $P \vee Q$
- b) $\sim P \wedge Q$
- c) $P \rightarrow Q$
- d) $P \rightarrow \sim Q$
- e) $\sim P \leftrightarrow Q$
- f) $\sim P \wedge \sim Q$



Exercícios

- Sejam as proposições: P = Carlos é argentino e Q = João é brasileiro. Traduzir para a linguagem natural as proposições:

- a) $P \vee Q$ Carlos é argentino **OU** João é brasileiro
- b) $\sim P \wedge Q$ Carlos **NÃO** é argentino **E** João é brasileiro
- c) $P \rightarrow Q$ **SE** Carlos é argentino **ENTÃO** João é brasileiro
- d) $P \rightarrow \sim Q$ **SE** Carlos é argentino **ENTÃO** João **NÃO** é brasileiro
- e) $\sim P \leftrightarrow Q$ Carlos **NÃO** é argentino **SE E SOMENTE SE** João é brasileiro
- f) $\sim P \wedge \sim Q$ Carlos **NÃO** é argentino **E** João **NÃO** é brasileiro



Lógica Proposicional

- Relações definidas entre premissas e conclusão de argumentos :
 - Baseada na sintaxe: $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$, significa a partir das premissas $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ podemos derivar a conclusão ψ . Definida pelas **regras de dedução natural**.
 - Baseada na semântica: $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$, significa que sempre que as premissas $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ são verdadeiras, a conclusão ψ será também verdadeira. Definida pelo valor verdade das fórmulas (**tabela-verdade**).



Exercícios

- Formalize os argumentos abaixo e utilize a tabela-verdade para afirmar se eles são válidos ou não:
 - a) Se eu passar na prova, irei viajar. Não passei na prova. Logo, não viajei.
 - b) Vou passar de ano se, e somente se, eu estudar e não viajar. Não estudei. Viajei. Logo, passei de ano.
 - c) Se o avião não tivesse caído então teríamos feito contato pelo rádio. Não fizemos contato pelo rádio. Portanto, o avião caiu.

Exercícios

- Formalize os argumentos abaixo e utilize a tabela-verdade para afirmar se eles são válidos ou não:

$$P \rightarrow V, \neg P \vdash \neg V$$

- a) Se eu passar na **prova**, irei **viajar**. Não passei na prova. Logo, não viajei.

P	V	$P \rightarrow V$	$\neg P$	$\neg V$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

\neg é
ou lido

$V(P) = F$
 $V(V) = V$



Exercícios

$$P \leftrightarrow (E \wedge \neg V), \neg E, V \neq P$$

b) Vou **passar** de ano se, e somente se, eu **estudar** e **não** **viajar** **Não** estudei. Viajei. Logo, passei de ano.

				P ₁	P ₂	P ₃	C
P	E	V	$\neg V$	$(E \wedge \neg V)$	$P \leftrightarrow (E \wedge \neg V)$	$\neg E$	V
V	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

$V(P) = F$
 $V(E) = F$
 $V(V) = V$
 \neg é verdadeiro

Exercícios

$$\neg C \Rightarrow R, \neg R \neq C$$

c) Se o avião não tivesse caído então teríamos feito contato pelo rádio. Não fizemos contato pelo rádio. Portanto, o avião caiu.

C	R	$\neg C$	$\neg C \Rightarrow R$	$\neg R$	C
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F

é válido