

LÓGICA PARA COMPUTAÇÃO

Dedução Natural



Formas de Argumento

- São padrões abstratos de raciocínio compartilhados por diversos argumentos.
- Observe os três argumentos a seguir:
 - ▣ Hoje é segunda-feira ou terça-feira.
Hoje não é segunda-feira.
Portanto, hoje é terça-feira.
 - ▣ Rembrandt pintou a Mona Lisa ou Michelangelo a pintou.
Não foi Rembrandt quem a pintou.
Portanto, Michelangelo pintou a Mona Lisa.
 - ▣ Ele é menor de 18 anos ou ele é jovem.
Ele não é menor de 18 anos.
Portanto, ele é jovem.
- A forma comum a eles é:

$$P \vee Q, \sim P \vdash Q$$



Dedução Natural

- Permite provar a validade de certas formas de argumento
- Fornece regras que permitem realizar cálculos sobre proposições
- As regras permitem inferir fórmulas a partir de outras.
- Uma prova constitui-se da aplicação destas regras sobre as premissas (e outras fórmulas inferidas a partir destas) obtendo-se eventualmente a conclusão.



Exemplo

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$P, S \rightarrow Q, P \rightarrow S \vdash Q$$



Exemplo

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$P, S \rightarrow Q, P \rightarrow S \vdash Q$$

- Prova:

- | | | |
|----|-------------------|---|
| 1. | P | P |
| 2. | $S \rightarrow Q$ | P |
| 3. | $P \rightarrow S$ | P |
| | \vdots | |

Q



Exemplo

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$P, S \rightarrow Q, P \rightarrow S \vdash Q$$

- Prova:

- | | | |
|----|-------------------------------------|---------------|
| 1. | P | P |
| 2. | $S \rightarrow Q$ | P |
| 3. | P \rightarrow S | P |
| 4. | S | 1,3 MP |
| | \vdots | |

Q



Exemplo

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$P, S \rightarrow Q, P \rightarrow S \vdash Q$$

- Prova:

1.	P	P
2.	$S \rightarrow Q$	P
3.	$P \rightarrow S$	P
4.	S	1,3 MP
5.	Q	2,4 MP

Q



Exemplo

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$P, S \rightarrow Q, P \rightarrow S \vdash Q$$

- Prova:

1.	P	P
2.	$S \rightarrow Q$	P
3.	$P \rightarrow S$	P
4.	S	1,3 MP
5.	Q	2,4 MP



Condicional

- Eliminação do condicional ou *Modos Ponens*

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \phi}{\psi} \quad MP$$



Eliminação do condicional

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$S, P \wedge Q, (P \wedge Q) \rightarrow (S \rightarrow T) \vdash T$$



Eliminação do condicional

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$S, P \wedge Q, (P \wedge Q) \rightarrow (S \rightarrow T) \vdash \textcolor{red}{T}$$

- Prova:

- | | | |
|----|--|--------|
| 1. | S | P |
| 2. | $P \wedge Q$ | P |
| 3. | $(P \wedge Q) \rightarrow (S \rightarrow T)$ | P |
| 4. | $S \rightarrow T$ | 2,3 MP |
| 5. | $\textcolor{red}{T}$ | 1,4 MP |

$\phi \rightarrow \psi$	ϕ	MP
ψ		



Dupla negação

□ Eliminação

$$\frac{\sim\sim\phi}{\phi} \quad E\sim$$



□ Introdução

$$\frac{\phi}{\sim\sim\phi} \quad I\sim$$

Dupla negação - Eliminação e Introdução

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$\sim\sim(Q \wedge R) \rightarrow \sim\sim S, Q \wedge R \vdash S$$



Dupla negação - Eliminação e Introdução

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$\sim\sim(Q \wedge R) \rightarrow \sim\sim S, Q \wedge R \vdash S$$

- Prova:

1. $\sim\sim(Q \wedge R) \rightarrow \sim\sim S$ P
2. $Q \wedge R$ P
3. $\sim\sim(Q \wedge R)$ 2 I~
4. $\sim\sim S$ 1,3 MP
5. S 4 E~

$$\frac{\sim\sim \phi}{\phi} \quad E\sim$$

$$\frac{\phi}{\sim\sim \phi} \quad I\sim$$



Conjunção

□ Eliminação

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} E_1 \wedge$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} E_2 \wedge$$

□ Introdução

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} I \wedge$$



Conjunção - Eliminação e Introdução

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$$



Conjunção - Eliminação e Introdução

- Provar que a forma de argumento é válido:

$$P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$$

- Prova:

1. $P \rightarrow (Q \wedge R)$ P
2. P P
3. $Q \wedge R$ 1,2 MP
4. Q 3 $E_1 \wedge$
5. $P \wedge Q$ 2,4 $I \wedge$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \quad E_1 \wedge$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \quad E_2 \wedge$$

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \quad I \wedge$$



Exercícios

- Prove que as seguintes formas de argumento são válidas:
 - $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$
 - $(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S), \sim\sim P, Q \vdash S$
 - $P \vdash P \wedge P$

