

Lógica de Predicados

Disciplina: Lógica para Computação

Profs. Larissa Freitas, Renata Reiser, André Du Bois

{larissa,reiser,dubois}@inf.ufpel.edu.br



Lógica de Predicados

- Árvore de Refutação
 - Regras para quantificadores universal e existencial



Árvore de Refutação

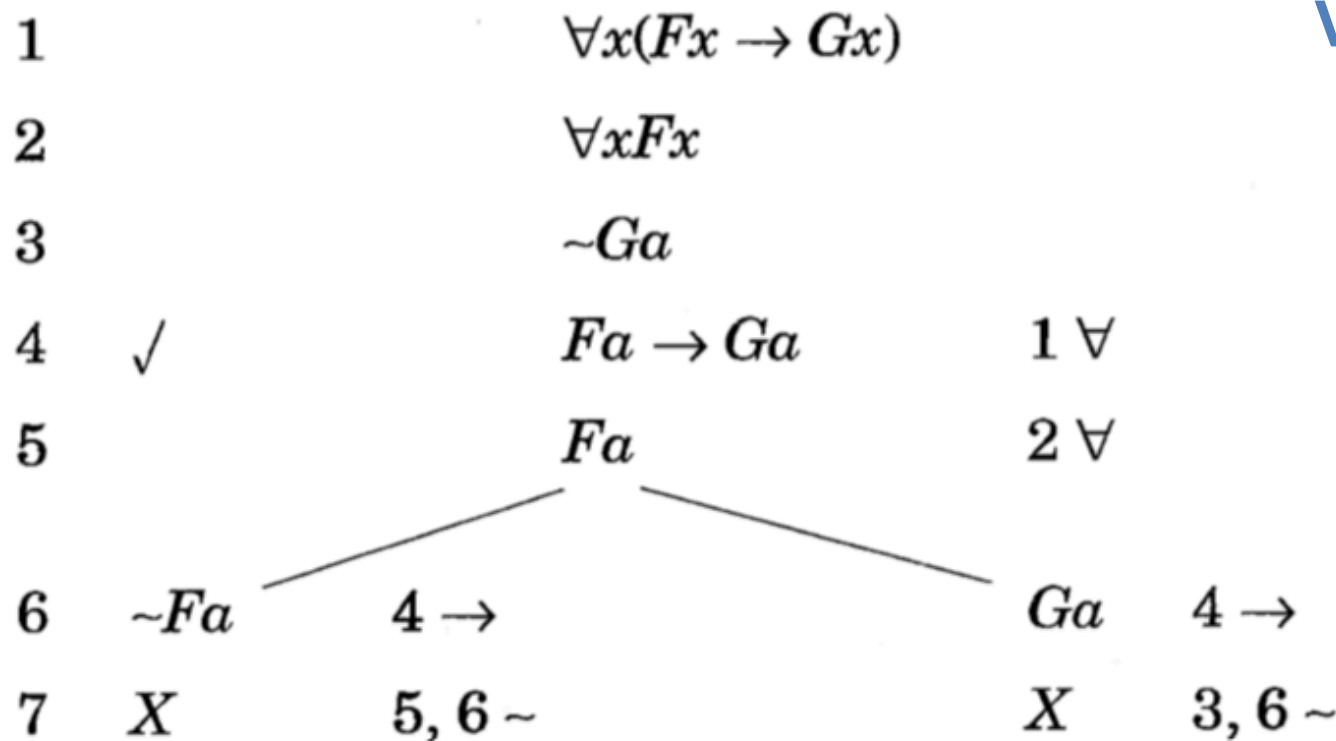
- Quantificação Universal (\forall): Se uma wff da forma $\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto, e se α é uma letra nominal que ocorre numa wff desse ramo, então escrevemos $\phi\uparrow\alpha/\beta$ no final do ramo. Se nenhuma wff contendo uma letra nominal, aparece no ramo, então escolhemos uma letra nominal α , e escrevemos $\phi\uparrow\alpha/\beta$ no final do ramo. Em cada caso, não marcamos $\forall\beta\phi$.



Árvore de Refutação

- Exemplo:** $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \forall xF(x) \vdash G(a)$

Válida



Árvore de Refutação

- Exemplo:** $F(a) \rightarrow G(b), \forall x \sim F(x) \vdash \sim G(b)$

1	✓	$Fa \rightarrow Gb$	
2		$\forall x \sim Fx$	
3	✓	$\sim \sim Gb$	
4		Gb	3 ~ ~
5		$\sim Fa$	2 \forall
6		$\sim Fb$	2 \forall
7		$\sim Fa$ $\xrightarrow{1 \rightarrow}$ Gb $\xrightarrow{1 \rightarrow}$	

Inválida



Árvore de Refutação

- Quantificação Existencial Negada ($\sim\exists$): Se uma wff não-marcada da forma $\sim\exists\beta\phi$ aparece num ramo aberto, marcamos ela e escrevemos $\forall\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff marcada recentemente.



Árvore de Refutação

- Quantificação Universal Negada ($\sim\forall$): Se uma wff não-marcada da forma $\sim\forall\beta\phi$ aparece num ramo aberto, marcamos ela e escrevemos $\exists\beta\sim\phi$ no final de cada ramo aberto que contém a wff marcada recentemente.



Árvore de Refutação

- Exemplo:** $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \sim \exists xG(x) \vdash \sim F(a)$

Válida

1		$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	
2	✓	$\sim \exists xGx$	
3		$\sim \sim Fa$	
4	✓	$\forall x \sim Gx$	2 $\sim \exists$
5		$\sim Ga$	4 \forall
6	✓	$Fa \rightarrow Ga$	1 \forall
7	$\sim Fa$	6 \rightarrow	Ga 6 \rightarrow
8	X	3, 7 \sim	X 5, 7 \sim



Árvore de Refutação

- Exemplo:** $\sim \exists x(F(x) \wedge G(x)) \vdash \sim F(a)$

Inválida

1	✓	$\sim \exists x(Fx \ \& \ Gx)$	
2	✓	$\sim \sim Fa$	
3		$\forall x \sim (Fx \ \& \ Gx)$	1 $\sim \exists$
4		Fa	2 $\sim \sim$
5	✓	$\sim (Fa \ \& \ Ga)$	3 \forall
6	$\sim Fa$	5 $\sim \&$	$\sim Ga$ 5 $\sim \&$
7	X	4, 6~	



Árvore de Refutação

- Exemplo:** $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x), \sim \exists x G(x) \vdash \exists x \sim F(x)$

Válida

1	✓		$\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx$	
2	✓		$\sim \exists x Gx$	
3			$\sim \exists x \sim Fx$	
4			$\forall x \sim Gx$	2 $\sim \exists$
			•	
5	✓	$\sim \forall x Fx$	1 \rightarrow	$\forall x Gx$ 1 \rightarrow
6		$\exists x \sim Fx$	5 $\sim \forall$	Ga 5 \forall
7		X	3, 6 \sim	$\sim Ga$ 4 \forall
8				X 6, 7 \sim



Árvore de Refutação

- Quantificação Existencial (\exists): Se uma wff não marcada da forma $\exists\beta\phi$ aparece num ramo aberto, marcamos ela. Escolhemos, então, uma letra nominal α que ainda não apareceu naquele ramo e escrevemos $\phi\uparrow\alpha/\beta$ no final de cada ramo aberto contendo a wff recentemente marcada.



Árvore de Refutação

- Exemplo:** $\exists xF(x) \vdash \forall xF(x)$

1	✓	$\exists xFx$	
2	✓	$\sim \forall xFx$	
3		Fa	1 \exists
4	✓	$\exists x \sim Fx$	2 $\sim \forall$
5		$\sim Fb$	4 \exists

Inválida



Árvore de Refutação

- Exemplo:** $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \vdash \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Válida

1	✓		$\exists x(Fx \& Gx)$		
2	✓		$\sim(\exists xFx \& \exists xGx)$		
3	✓		$Fa \& Ga$	1 \exists	
4			Fa	3 $\&$	
5			Ga	3 $\&$	
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> \swarrow $\sim\exists xFx$ </div> <div style="text-align: center;"> \searrow $\sim\exists xGx$ </div> </div>					
6	✓		$\forall x \sim Fx$	2 $\sim\&$	✓ $\sim\exists xGx$ 2 $\sim\&$
7			$\sim Fa$	6 $\sim\exists$	$\forall x \sim Gx$ 6 $\sim\exists$
8			X	4, 8 \sim	$\sim Ga$ 7 \forall
9					X 5, 8 \sim



Árvore de Refutação

- Identidade (=): Se uma wff da forma $\alpha=\beta$ aparece num ramo aberto e se outra wff ϕ , contendo ou α ou β , aparece não-marcada naquele ramo, então escrevemos no final do ramo qualquer wff que ainda não esteja no ramo, que é o resultado da substituição de uma ou mais ocorrências de qualquer uma dessas letras nominais pela outra em ϕ . Não marcamos $\alpha=\beta$ nem ϕ .



Árvore de Refutação

- Identidade Negada ($\sim =$): Fecha-se qualquer ramo aberto no qual uma wff da forma $\sim \alpha = \alpha$ ocorra.



Árvore de Refutação

- Exemplo:** $a = b \vdash F(a,b) \rightarrow F(b,a)$

Válida

1	$a = b$	
2	$\sim(Fab \rightarrow Fba)$	
3	$\checkmark \quad \sim(Faa \rightarrow Faa)$	1, 2 =
4	Faa	3 $\sim \rightarrow$
5	$\sim Faa$	3 $\sim \rightarrow$
6	X	4, 5 \sim



Árvore de Refutação

- **Exemplo:** $a = b \vdash b = a$

Válida

1 $a = b$

2 $\sim b = a$

3 $\sim a = a$

4 X

1, 2 =

3 \sim =



Lógica de Predicados

E-mail para dúvidas:

larissa@inf.ufpel.edu.br

Resolvam os exercícios!



Exercícios

1. $\exists x F(x) \vdash F(a)$
2. $\forall x F(x) \vdash F(a)$
3. $F(a) \vdash \exists x F(x)$
4. $F(a) \vdash \forall x F(x)$
5. $\forall x F(x) \vdash \sim \exists x \sim F(x)$
6. $\sim \exists x \sim F(x) \vdash \forall x F(x)$
7. $\forall x \sim F(x) \vdash \sim \forall x F(x)$
8. $\sim \forall x F(x) \vdash \forall x \sim F(x)$
9. $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \vdash \forall x (F(x) \vee G(x))$
10. $\forall x (F(x) \vee G(x)) \vdash \forall x F(x) \vee \forall x G(x)$



Exercícios

11. $\vdash \forall x(F(x) \vee \sim F(x))$
12. $\vdash \forall x \sim(F(x) \rightarrow \sim F(x))$
13. $\vdash \exists x F(x) \leftrightarrow \sim \forall x \sim F(x)$
14. $\exists x(F(x) \wedge \sim F(x)) \vdash P$
15. $\exists x F(x) \wedge \exists x \sim F(x) \vdash P$
16. $\sim \exists x F(x) \vdash \forall x(F(x) \rightarrow P)$
17. $\forall x \forall y(L(x,y) \rightarrow L(y,x)), \exists x L(a,x) \vdash \exists x L(x,a)$
18. $\exists x \exists y L(x,y) \vdash \exists x L(x,x)$
19. $\forall x(F(x) \rightarrow \forall y G(y)) \vdash \forall x G(x)$
20. $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \vdash G(a)$

