Universidade Estadual de Santa Cruz
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Bacharelado em Ciência da Computação
Fundamentos Matemáticos para Computação

1. Métodos de prova:
   Construção;
   Contradição.

Técnicas de Demonstração

- Resultados matemáticos geralmente são expressos como teoremas da forma "se P, então Q" ou P → Q, onde P e Q podem representar sentenças compostas. Em um teorema desta forma, tentamos deduzir Q de P, usando axiomas e regras de inferência lógica. Se for possível usar somente axiomas da lógica pura (verdadeira em todas as interpretações), então o teorema também é verdadeiro para todas as interpretações.

Técnicas de Demonstração

- Suponha que você é um pesquisador tentando formular e demonstrar um teorema, e que examinou um elenco de casos nos quais se P é verdadeiro, então Q também é verdadeiro. (Por exemplo, você pode ter examinado sete ou oito inteiros divisíveis por 6, e constatou que estes inteiros também são divisíveis por 3.)
- Com base nesta experiência, você pode conjecturar: Se P, então Q (se um inteiro é divisível por 6, então ele também é divisível por 3). Quantos mais casos você encontrar nos quais Q resulta de P, mais confiante você estará em sua conjectura. Este passo ilustra o raciocínio **indutivo**, construindo uma conclusão baseada em experiência.
- Não importa o quanto a conjectura pareça confiável, você não ficará satisfeito até que tenha aplicado a ela o raciocínio **dedutivo**. Neste processo, você tenta verificar se sua conjectura é verdadeira ou falsa. Você pode elaborar a prova de que $P \rightarrow Q$ (construindo um teorema), ou então encontrar um exemplo que contrarie sua conjectura.

Técnicas de Demonstração

- Frequentemente é difícil decidir qual das duas abordagens você deverá seguir — demonstrar ou negar a conjectura! Suponha que você decida tentar negá-la. Você irá procurar um exemplo no qual P é verdadeiro, mas Q é falso — você procurará por um contraexemplo para a sua conjectura. Um único contraexemplo é suficiente para negar a conjectura. Então, você pode refutar a sua conjectura simplesmente encontrando um inteiro divisível por 6 mas não por 3. Se nossa conjectura for verdadeira, tal inteiro não existe. É claro que o fato de procurarmos por um contraexemplo sem achá-lo não constitui prova de que a conjectura é verdadeira.

Técnicas de Demonstração

- Considere a sentença "Todo inteiro menor que 10 é maior que 5", ou, expresso em uma implicação "Se um inteiro é menor que 10, então ele é maior que 5".

Técnicas de Demonstração

- Forneça contraexemplos para as seguintes sentenças:
  - Todos os animais que vivem nos oceanos são peixes;
  - As entradas para um programa de computador são sempre fornecidas através do teclado.

Métodos de Abordagem

- Suponha que você decida provar sua conjectura $P \rightarrow Q$. Ainda que um simples contraexemplo seja suficiente para refutar a conjectura, em geral muitos exemplos não provam a suposição — eles simplesmente fortalecem sua inclinação a procurar uma demonstração. A única exceção desta situação ocorre quando você está fazendo uma asserção sobre uma coleção finita. Neste caso, a asserção pode ser provada verdadeira desde que se mostre ser verdadeira para cada um dos elementos da coleção. Por exemplo, a asserção "Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então ele também é divisível por 3" pode ser provada, mostrando-se simplesmente para os inteiros divisíveis por 6 entre 1 e 20.

Abordagem Direta

- No caso geral, como podemos demonstrar que $P \rightarrow Q$ é verdadeira? A abordagem óbvia é a demonstração direta — assume-se a hipótese P como verdadeira e deduz-se a tese Q.

  Nós iremos dar uma demonstração direta para o exemplo dado como teorema. "Se um inteiro é divisível por 6, então ele também é divisível por 3."

Abordagem Direta

- O teorema faz uma afirmação sobre um inteiro arbitrário, sua forma é:

$$(\forall x)\ (x \text{ divisível por } 6 \rightarrow x \text{ divisível por } 3).$$

- onde o domínio de interpretação é entendido como sendo os inteiros. Vamos então representar por x um inteiro arbitrário e provar x divisível por *6* → *x* divisível por 3
- Para desenvolver a demonstração, assumimos que a hipótese de que x é divisível por 6 é verdadeira, e então deduzimos que a tese x é divisível por 3 também é verdadeira. Nós temos que utilizar a definição de divisibilidade — *a* é divisível por *b*, se *a* é igual ao produto de um inteiro por *b* — e também outras propriedades aritméticas.

Abordagem Direta

- Hipótese: x é divisível por 6

- 6 = 2.3 (fato numérico)
- x = k(2 . 3) (substituição)
- x = (k . 2)3 (associatividade do produto)
- k . 2 é um inteiro (fato conhecido dos inteiros)
- x = k .6 para algum inteiro k (definição de divisibilidade)

Abordagem Direta

- Uma demonstração direta de que o produto de dois pares é par é: Seja $x = 2m$ e $y = 2n$, com m e n inteiros.

- Então $xy = (2m)(2n) = 2(2mn)$, onde $2mn$ é um inteiro. Então xy é da forma $2k$, onde k é um inteiro, logo xy é par.

Abordagem por Contraposição

- Se você tiver tentado assiduamente, mas falhado, produzir uma demonstração direta de sua conjectura $P \rightarrow Q$ e ainda sente que a conjectura é verdadeira, você deve tentar algumas variantes da técnica de prova direta. Se você pode demonstrar o teorema $Q' \rightarrow P'$, pode concluir que $P \rightarrow Q$ pelo uso da tautologia $(Q' \rightarrow P') \rightarrow (P \rightarrow Q)$. $Q' \rightarrow P'$ é a contrapositividade de $P \rightarrow Q$. A técnica para demonstrar que $P \rightarrow Q$ construindo uma prova direta de $Q' \rightarrow P'$ é chamada de demonstração por contraposição. Já vimos demonstrações diretas, de forma que a única ideia nova aqui é a aplicação da contrapositividade.

Abordagem por Contraposição

- A implicação "Se a > 5 então a > 2" é verdadeira, no entanto a sua recíproca "Se a > 2 então a > 5" é falsa.

Abordagem por Contradição

- Além da demonstração direta e da demonstração por contraposição, podemos usar a técnica de demonstração por contradição (algumas vezes chamada demonstração indireta; entretanto este termo significa, na verdade, qualquer argumento que não seja uma demonstração direta).

Abordagem por Contradição

Vamos usar a prova por contradição para a sentença "Se um número somado a ele próprio resulta no próprio número, então o número é 0 (zero)". Representemos por x um número qualquer. A hipótese é $x + x = x$ e a conclusão é $x = 0$. Para construirmos uma demonstração por contradição, assumamos que $x + x = x$ e que $x \neq 0$. Então $2x = x$ e $x \neq 0$. Como $x \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação $2x = x$ por x, o que nos leva à contradição $2 = 1$. Logo $(x + x = x) \rightarrow (x = 0)$. •

Exercícios

- Prove que se n = 25, 100 ou 169 então n é um quadrado perfeito e é a soma de dois quadrados perfeitos (3).
- Prove que a soma de dois inteiros ímpares é par (7).
- Prove que o quadrado de um número par é divisível por 4 (11).
- Prove que se dois inteiros são ambos divisíveis por um inteiro n, então a sua soma é divisível por n (17).

  Prove que o produto dos quadrados de dois inteiros é um quadrado perfeito (23).
- Prove ou apresente um contraexemplo: O produto de quaisquer três inteiros consecutivos é par (28).
- Prove ou apresente um contraexemplo: A soma de um inteiro com o seu cubo é par (31).

Respostas

3. $25 = 5^2 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$
   $100 = 10^2 = 36 + 64 + 6^2 + 8^2$
   $169 = 13^2 = 25 + 144 = 5^2 + 12^2$

7. Seja $x — 2m + 1$ e $y = 2n + 1$, onde m e n são inteiros. Então

$$x + y - (2m + 1) + (2n + 1)$$
$$= 2m + 2n + 2$$
$$= 2(m + n + 1) \qquad \text{onde } m + n + 1 \text{ é um inteiro}$$

portanto, $x + y$ é par.

11. Seja $x = 2m$ onde m *é* um inteiro. Então $x^2 = (2m)^2 = 4m^2$, onde m^2 *é* um inteiro, portanto, x^2 é divisível por 4.

Respostas

17. Sejam x e y divisíveis por n. Então $x = k_1 n$ e $y = k_2 n$, onde k_1 e k_2 são inteiros, e $x + y = k_1 n + k_2 n = (k_1 + k_2)n$, onde $k_1 + k_2$ é um inteiro. Portanto, $x + y$ é divisível por n.

20. Seja $x = 2n + 1$; então

$$x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$
$$= 4n(n+1) + 1$$

Mas n(n + 1) é par (Exercício 9), então n(n + 1) = $2k$ para algum inteiro k. Portanto, $x^2 = 4(2k) + 1 = 8k + 1$.

23. $m^2n^2 = (mn)^2$

28. Demonstração: se x é par, então x - $2n$ e

$$x(x+1)(x+2) = (2n)(2n+1)(2n+2)$$
$$= 2[(n)(2n+1)(2n+2)]$$

que é par. Se x é ímpar, então $x = 2n + 1$ e

$$x(x+1)(x+2) = (2n+1)(2n+2)(2n+3)$$
$$= 2[(2n+1)(n+1)(2n+3)]$$

que é par.

Respostas

31. Demonstração: Se x é par, então x - $2n$ e

$$2n + (2n)^3 = 2n + 8n^3 = 2(n + 4n^3)$$

que é par. Se x é ímpar, então x — $2n + 1$ e

$$\begin{aligned}(2n + 1) + (2n + 1)^3 &= (2n + 1) + (8n^3 + 12n^2 + 6n + 1) \\ &= 8n^3 + 12N^2 + 8n + 2 \\ &= 2(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)\end{aligned}$$

que é par.

Referências

- GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. LTC Editora, 3ª Edição, 2001.