Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Ciência e Engenharia de Computação
Disciplina: Sistemas Discretos
Lista de Exercícios – Técnicas de Demonstração (Parte 1)

1) Dê contraexemplos para as proposições a seguir:

   a. Toda figura geométrica com quatro ângulos retos é um quadrado.
   Um retângulo que não é quadrado.
   b. Se um número real não for positivo, terá que ser negativo.
   O zero é um número real não positivo, mas não é negativo.
   c. Todas as pessoas com cabelo ruivo têm olhos verdes ou são altas
   Uma pessoa ruiva com olhos castanhos e baixa
   d. Se n for um número par, então $n^2 + 1$ será um número primo
   $n = 0$ ou $n = 8$
   e. Se $n^2 > 0$, então $n > 0$.
   $n = -1$ (qualquer inteiro negativo)

2) Encontre o erro na seguinte "demonstração" de que a soma de dois números pares é um múltiplo de 4.
   x e y são pares $\rightarrow$ x+y é múltiplo de 4
   Supondo que
   $x = 2m \qquad y = 2m \qquad m \in Z$
   Então
   $x + y = 2m + 2m = 4m$
   Logo
   x+y é um múltiplo de 4

   O erro está em escolher o mesmo inteiro m para x e y, o que torna os dois iguais. Neste caso a prova está sendo dada para um caso específico, onde x = y.

3) Prove as proposições a seguir:

   a. Se n = 25, 100 ou 169, então n é um quadrado perfeito e é uma soma de dois quadrados perfeitos.
   $n \in \{25, 100, 169\} \rightarrow$
   n é um quadrado perfeito e n é a soma de dois quadrados perfeitos

   $n = 25 \qquad = 5^2 \qquad = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$
   $n = 100 \qquad = 10^2 \qquad = 36 + 64 = 6^2 + 8^2$
   $n = 169 \qquad = 13^2 \qquad = 25 + 144 = 5^2 + 12^2$

   b. Se n for um inteiro par tal que $4 \leq n \leq 12$, então n será uma soma de dois números primos.
   $n \in \{4, 6, 8, 10, 12\} \rightarrow$ n é a soma de dois primos

$n = 4 \quad = 2 + 2$
$n = 6 \quad = 3 + 3$
$n = 8 \quad = 3 + 5$
$n = 10 \quad = 3 + 7$
$n = 12 \quad = 5 + 7$

c. A soma de um inteiro com o seu quadrado e par.

x é um inteiro $\rightarrow$ $x + x^2$ é par

Supondo que $x \in Z$

Então

- Se x é par: $x = 2k$ $\quad k \in Z$

$$
\begin{aligned}
x + x^2 &= 2k + (2k)^2 \\
&= 2k + 4k^2 \\
&= 2(k + 2k^2) \qquad k + 2k^2 \in Z
\end{aligned}
$$

- Se x é ímpar: $x = 2k + 1$ $\quad k \in Z$

$$
\begin{aligned}
x + x^2 &= (2k + 1) + (2k + 1)^2 \\
&= 2k + 1 + 4k^2 + 4k + 1 \\
&= 4k^2 + 6k + 2 \\
&= 2(2k^2 + 3k + 1) \qquad 2k^2 + 3k + 1 \in Z
\end{aligned}
$$

Logo $x + x^2$ é par

d. Para n um natural par e $n > 2$, $2^n - 1$ não é primo.

NOTA: Um natural x não é primo se: i) for 0 ou 1 ou ii) ou se for maior que 1, ele têm **fatoração não trivial**; ou seja, podem ser fatorados como $x = a \times b$, onde tanto a como b são distintos de x e 1.

n é par e $n > 2 \rightarrow 2^n - 1$ não é primo

Supondo que $n > 2$

$n = 2k$ $\quad$ com $k > 1$ e $k \in N$

Então

$$
\begin{aligned}
2^n - 1 &= 2^{2k} - 1 \\
&= (2^k + 1)(2^k - 1)
\end{aligned}
$$

como $k > 1$, $(2^k - 1) > 1$, essa é uma fatoração não trivial ($(2^k + 1)$ e $(2^k - 1)$ são diferentes de 1 e $2^n - 1$)

Logo $2^n - 1$ não é primo

e. Para todo inteiro *n*, o número $3(n^2 + 2n + 3) - 2n^2$ é um quadrado perfeito (faça uma demonstração direta).

$n \in Z \rightarrow 3(n^2 + 2n + 3) - 2n^2$ é quadrado perfeito

Supondo que $n \in Z$

Então

$3(n^2 + 2n + 3) - 2n^2 \quad = 3n^2 + 6n + 9 - 2n^2$

$= n^2 + 6n + 9$

$= (n + 3)^2$

Logo $3(n^2 + 2n + 3) - 2n^2$ é quadrado perfeito

f. Se n, m e p forem inteiros tais que $n \mid m$ e $m \mid p$, então $n \mid p$.

NOTA: dados dois inteiros n e m, n **divide** m, denotado por $n \mid m$, significa que m é divisível por n.

$n \mid m$ e $m \mid p \rightarrow n \mid p$

Supondo que

$m = nk \qquad p = mj \qquad k,j \in Z$

Então

$p = mj = n(kj) \qquad kj \in Z$

Logo

$n \mid p$