computação
Universidade Federal de Pelotas

Lógica Proposicional

Disciplina: Lógica para Computação

Prof. Larissa Freitas, Renata Reiser, André Du Bois
{larissa, reiser, dubois}@inf.ufpel.edu.br

Árvores de Refutação (AR)

- Fornecem uma maneira mais eficiente de determinar a validade das formas de um argumento.
- A ***refutação*** de uma forma de prova de argumentos lógicos estruturada da seguinte forma:

“Se, quando todas as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa não obtemos uma refutação, então podemos afirmar a validade do argumento”

- Um *árvore de refutação* é uma análise na qual uma lista de formulas é desmembrada sub-listas contendo variáveis proposicionais ou suas negações.

Árvores de Refutação

- Construção da árvore de refutação para uma forma de argumento:
  - Constrói-se uma lista com suas premissas e a **negação** de sua conclusão.
  - Faz-se uma busca desmembrando as FBF da lista em variáveis proposicionais ou suas negações.
- Análise da validade da forma de argumento:
  - A forma de argumento é **inválida**, caso encontremos uma refutação.
    - A refutação pode ser encontrada definindo valores V ou F para as variáveis proposicionais que tornem verdadeiras todas as fórmulas da lista.
  - Caso contrário, a forma de argumento é **válida**.

Árvores de Refutação

- Mostre se $P \wedge Q \vdash {\sim}{\sim}P$ é válida ou não:

1. $P \wedge Q$
2. ${\sim}{\sim}{\sim}P$

- Inicialmente, a lista é formada com a premissa (1) e a negação da conclusão (2).

Árvores de Refutação

- Mostre se $P \land Q \vdash {\sim}{\sim}P$ é válida ou não:

1.	✓	$P \land Q$	
2.		${\sim}{\sim}{\sim}P$	
3.		P	$1 \land$
4.		Q	$1 \land$

- Podemos substituir $P \land Q$ por essas variáveis.

Árvores de Refutação

- Mostre se $P \land Q \vdash \sim\sim P$ é válida ou não:

1.	✓	$P \land Q$	
2.	✓	$\sim\sim\sim P$	
3.		P	$1 \land$
4.		Q	$1 \land$
5.		$\sim P$	$2 \sim\sim$

- Da mesma forma, podemos substituir $\sim\sim\sim P$ por $\sim P$.
- Neste ponto, todas as fórmulas foram desmembradas.

Árvores de Refutação

- Mostre se $P \wedge Q \vdash \sim\sim P$ é válida ou não:

1.	✓	$P \wedge Q$	
2.	✓	$\sim\sim\sim P$	
3.		P	$1 \wedge$
4.		Q	$1 \wedge$
5.		$\sim P$	$2 \sim\sim$

- A árvore está completa, pois não há mais fórmulas a serem desmembradas.

Árvores de Refutação

- Mostre se $P \land Q \vdash \sim\sim P$ é válida ou não:

1. ✓ $P \land Q$
2. ✓ $\sim\sim\sim P$
3. P 1 $\land$
4. Q 1 $\land$
5. $\sim P$ 2 $\sim\sim$
6. X

- Podemos tentar encontrar a refutação: atribuindo V para as variáveis atômicas.
- Como encontramos na lista P e ~P, não há nenhuma atribuição que torne todas as fórmulas da lista verdadeiras (coloca-se o X para indicar que o ramo está fechado).
- Assim a fórmula é **válida**.

Regra Geral de Análise da Árvore de Refutação

- Qualquer ramo que contém uma fórmula e sua negação é um ramo em que falha a refutação, assim pode-se ***fechar*** o ramo.
- Um ramo ***termina*** se ele se fecha ou se as FBF não-marcadas são variáveis proposicionais ou suas negações.
- Uma árvore está ***completa*** se todos os seus ramos terminam.
- Se todos os ramos de uma árvore completa estão fechados o argumento é válido. Caso contrário, o argumento é inválido.

Regras para Desmembrar Fórmulas

- **Negação negada (~~):** Se um ramo aberto contém uma FBF não-marcada da forma $\sim\sim\phi$, marca-se $\sim\sim\phi$ e escreve-se ϕ no final de cada ramo aberto que contém $\sim\sim\phi$ marcada.

- **Conjunção ($\land$):** Se um ramo aberto contém uma FBF não-marcada da forma $\phi \land \psi$, marca-se $\phi \land \psi$ e escreve-se ϕ e ψ no final de cada ramo aberto que contém $\phi \land \psi$ marcada.

Exemplo

- Mostre se $P \vee Q, P \vdash {\sim}Q$ é válida ou não:

1. $P \vee Q$
2. P
3. ${\sim}{\sim}Q$

Exemplo

- Mostre se $P \vee Q, P \vdash \sim Q$ é válida ou não:

1. $P \vee Q$
2. P
3. ✓ $\sim\sim Q$
4. Q 3 $\sim\sim$

Exemplo

- Mostre se $P \lor Q$, $P \vdash \sim Q$ é válida ou não:

1. ✓ $P \lor Q$
2. P
3. ✓ $\sim\sim Q$
4. Q 3 ~~
5. P $1\lor$ Q $1\lor$

Exemplo

- Mostre se P ∨ Q, P ⊢ ~Q é válida ou não:

1. ✓ P ∨ Q
2. P
3. ✓ ~~Q
4. Q 3 ~~
5. P 1∨ Q 1∨

- Neste ponto, a árvore está completa e ambos os ramos terminam.
- Como há ramos que não estão fechados, podemos concluir que o argumento **é inválido.**

Contra-exemplo

- Mostre se $P \vee Q, P \vdash \sim Q$ é válida ou não:

1. ✓ $P \vee Q$
2. P
3. ✓ $\sim\sim Q$
4. Q $3\sim\sim$
5. P $1\vee$ Q $1\vee$

- Vamos procurar uma refutação em algum dos ramos abertos: $P = V$ e $Q = V$

Estes valores que definem a refutação constituem um contra-exemplo

Árvores de Refutação

- Cada ramo aberto de uma árvore completa é uma "receita" para construir contra-exemplos.
  - As fórmulas não-marcadas num ramo aberto são variáveis proposicionais ou suas negações.
  - Qualquer situação em que as variáveis não-negadas são verdadeiras e as negadas são falsas é um contra-exemplo.

Regras para Desmembrar Fórmulas

- **Implicação ($\rightarrow$):** Se um ramo aberto contém uma FBF não-marcada da forma $\phi \rightarrow \psi$, marca-se $\phi \rightarrow \psi$ e bifurca-se cada ramo aberto que contém $\phi \rightarrow \psi$ marcada, no final do primeiro ramo escreve-se $\sim\phi$ e no final do segundo ramo escreve-se ψ.

Exemplo

- Mostre se P, P Q -> R ⊦ R é válida ou não:

1. ✓ P
2. P ∧ Q -> R
3. ✓ ~R
4. ~(P ∧ Q) 2–> R 2–>
5. ~P 4 ~Q 4 X
6. X

Vamos procurar uma refutação em algum dos ramos abertos: P = V e Q = F e R = F

Regras para Desmembrar Fórmulas

- **Bicondicional ($\leftrightarrow$):** Se um ramo aberto contém uma FBF não-marcada da forma $\phi \leftrightarrow \psi$, marca-se $\phi \leftrightarrow \psi$ e bifurca-se cada ramo aberto que contém $\phi \leftrightarrow \psi$ marcada, no final do primeiro ramo escreve-se ϕ e ψ e no final do segundo ramo escreve-se $\sim\phi$ e $\sim\psi$.

Exemplo

- Determinar se a seguinte forma é válida: $p \leftrightarrow q, \sim p \vdash \sim q$

1.	✓	$p \leftrightarrow q$		
2.		$\sim p$		
3.		$\sim\sim q$		
4.		p $1\leftrightarrow$		$\sim p$ $1\leftrightarrow$
5.		q $1\leftrightarrow$		$\sim q$ $1\leftrightarrow$
6.		X $2,4\sim$		X $3,5\sim$

É válida pois todos os ramos da árvore estão fechados

computação
Universidade Federal de Pelotas

Exercícios

- Construa as árvores de refutação para determinar se as formas de argumento a seguir são válidas ou não. Caso não seja válida, dê um contra-exemplo.

a) $p \land q, p \vdash \sim q$

b) $p \lor q, \sim p \vdash \sim\sim q$

c) $r \land \sim s, \sim\sim r \vdash s$

d) $(q \land r) \rightarrow p, \sim q, \sim r \vdash \sim p$

e) $\sim p \land \sim q, r \leftrightarrow p \vdash \sim r$

Lógica Proposicional

E-mail para dúvidas:
{larissa, reiser, dubis}@inf.ufpel.edu.br

Resolvam os exercícios!