computação
Universidade Federal de Pelotas

Lógica de Predicados

Disciplina: Lógica para Computação

Prof. Larissa Freitas, Renata Reiser, André DuBois
{larissa,reiser,dubois}@inf.ufpel.edu.br

computação
Universidade Federal de Pelotas

Lógica de Predicados

- Regras de Inferência para o ∀
- Regras de Inferência para o ∃

- Regras de Inferência para o ∀
- Regras de Inferência para o ∃

computação
Universidade Federal de Pelotas

Regras de inferência para o ∀

- <u>Eliminação Universal (EU):</u> Dada uma wff quantificada universalmente $\forall\beta\phi$, podemos inferir uma wff, da forma $\phi^{\alpha/\beta}$ a qual resulta substituindo-se cada ocorrência da variável β em ϕ por uma letra nominal α.

Regras de inferência para o ∀

- <u>Exemplo:</u>

Todos os homens são mortais.

Sócrates é um homem.

∴Sócrates é mortal.

H – ‘é homem’

M – ‘é mortal’

s – ‘Sócrates’

$\forall x(H(x) \to M(x)), H(s) \vdash M(s)$

computação
Universidade Federal de Pelotas

Regras de inferência para o ∀

- **Exemplo:**

$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), H(s) \vdash M(s)$

1. $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$ — **P**
2. $H(s)$ — **P**
3. $H(s) \rightarrow M(s)$ — 1 EU
4. $M(s)$ — 2,3 MP

Regras de inferência para o ∀

- Introdução Universal (IU): Para uma wff ϕ contendo uma letra nominal α que não ocorre em qualquer uma das premissas ou em qualquer hipótese vigente na linha em que ϕ ocorre, podemos inferir uma wff da forma $\forall\beta\phi^{\beta/\alpha}$onde $\phi^{\beta/\alpha}$ é o resultado de se substituir todas as ocorrências de α em ϕ por uma variável que não ocorre em ϕ.

Regras de inferência para o ∀

- <u>Exemplo:</u>

Todos os peixes são ciprinídeos.

Todos os ciprinídeos são vistosos.

∴Todos os peixes são vistosos.

H – ‘é ciprinídeo’

M – ‘é vistoso’ $\forall x(P(x)\text{->}C(x)), \forall x(C(x)\text{->}V(x)) \vdash \forall x(P(x)\text{->}V(x))$

s – ‘é peixe’

Regras de inferência para o ∀

- Exemplo:

$\forall x(P(x) \to C(x)), \forall x(C(x) \to V(x)) \vdash \forall x(P(x) \to V(x))$

1.	∀x(P(x)->C(x))	**P**
2.	∀x(C(x)->V(x))	**P**
3.	P(a) -> C(a)	1 EU
4.	C(a) -> V(a)	2 EU
5.	P(a) -> V(a)	3, 4 SH
6.	∀x(P(x)->V(x))	5 IU

Regras de inferência para o ∀

- **Derivações Inválidas:**

1.	P(a)	**P**
2.	∀x P(x)	1 IU

Incorreta, pois a letra nominal "a" substituída por x ocorre em uma <u>premissa</u>

computação
Universidade Federal de Pelotas

Regras de inferência para o ∀

- **Derivações Inválidas:**

1.	$\forall x$ (P(x) -> C(x))	**P**
2.	P(a) -> C(a)	1 EU
3.	| P(a)	H (PC)
4.	| C(a)	2,3 MP
5.	| $\forall x$ C(x)	4 IU
6.	P(a) -> $\forall x$ C(x)	3-5 PC

Incorreta, pois a letra nominal "a" substituída por x ocorre em uma <u>hipótese</u>

computação
Universidade Federal de Pelotas

Regras de inferência para o ∀

Eliminação universal (EU)	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi\{a / x\}}$	**Introdução universal** (IU)	$\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi\{x / a\}}$ φ contém a
φ{a/x} é o resultado da substituição de **todas** as ocorrências da variável "x" em φ por uma letra nominal "a".		φ{x/a} é o resultado da substituição de **todas** as ocorrências da letra nominal "a" em φ por uma variável "x". "a" não pode ocorrer em premissa ou hipótese vigente "x" não pode ocorrer em φ	

Regras de inferência para o ∃

- <u>Introdução Existencial (IE):</u> Dada uma wff ϕ contendo uma letra nominal α, podemos inferir uma wff da forma $\exists\beta\ \phi^{\beta/\alpha}$, onde $\phi^{\beta/\alpha}$é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em ϕ por uma variável β, que não ocorra em ϕ.

computação
Universidade Federal de Pelotas

Regras de inferência para o ∃

- Exemplo:

$\forall x(F(x) \lor G(x)) \vdash \exists x(F(x) \lor G(x))$

1.	$\forall x(F(x) \lor G(x))$	**P**
2.	$F(a) \lor G(a)$	1 EU
3.	$\exists x(F(x) \lor G(x))$	2 IE

Regras de inferência para o ∃

- Eliminação Existencial (EE): Dada uma wff quantificada existencialmente $\exists\beta\phi$ e uma derivação de alguma conclusão ψ de uma hipótese da forma $\phi^{\alpha/\beta}$, podemos descartar $\phi^{\alpha/\beta}$ e reafirmar ψ.
- **Restrição**: A letra nominal α não pode ocorrer em ψ, nem em qualquer premissa, nem em qualquer hipótese vigente na linha em que EE é aplicada.

Regras de inferência para o ∃

- Exemplo:

$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \exists xF(x) \vdash \exists xG(x)$

1.	$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	**P**
2.	$\exists xF(x)$	**P**
3.	$\mid F(a)$	H (EE)
4.	$\mid F(a) \rightarrow G(a)$	1 EU
5.	$\mid G(a)$	3, 4 MP
6.	$\mid \exists xG(x)$	5 IE
7.	$\exists xG(x)$	2, 3-6 EE

computação
Universidade Federal de Pelotas

Regras de inferência para o ∃

- **Derivações Inválidas:**

1.	$\forall x\ \exists y\ F(y, x)$	**P**
2.	$\exists y\ F(y, a)$	1 EU
3.	$\mid F(a,a)$	H (EE)
4.	$\mid \exists x\ F(x, x)$	3 IE
5.	$\exists x\ F(x, x)$	2, 3-4 EE

Incorreta, pois a letra nominal "a" introduzida na hipótese já ocorria em $\exists y\ F(y, a)$

Regras de inferência para o ∃

- **Derivações Inválidas:**

1.	$\exists y\ H(x, x)$	**P**
2.	$\mid H(a, a)$	H (EE)
3.	$\mid \exists x\ H(a, x)$	3 IE
4.	$\exists x\ H(a, x)$	2, 3-4 EE

Incorreta, pois a letra nominal "a" introduzida na hipótese ocorre em $\exists x\ H(a, x)$

Regras de inferência para o ∃

- **Derivações Inválidas:**

1.	$\exists x\, G(x)$	**P**
2.	$F(a)$	**P**
3.	$\mid G(a)$	H (EE)
4.	$\mid F(a) \land G(a)$	2, 3 I $\land$
5.	$\mid \exists x\, (F(x) \land G(x))$	4 IE
6.	$\exists x\, (F(x) \land G(x))$	1, 3-5 EE

Incorreta, pois a letra nominal "a" introduzida na hipótese ocorre na premissa F(a)

computação
Universidade Federal de Pelotas

Regras de inferência para o ∃

- **Derivações Inválidas:**

1.	$\exists x\ G(x)$	**P**
2.	$\mid F(a)$	H (PC)
3.	$\mid\mid G(a)$	H (EE)
4.	$\mid\mid F(a) \land G(a)$	2, 3 I ∧
5.	$\mid\mid \exists x\ (F(x) \land G(x))$	4 IE
6.	$\mid \exists x\ (F(x) \land G(x))$	1, 3-5 EE
7.	$F(a) \rightarrow \exists x\ (F(x) \land G(x))$	2-6 PC

Incorreta, pois a letra nominal "a" introduzida na hipótese G(a) ocorre na hipótese F(a) vigente

computação
Universidade Federal de Pelotas

Regras de inferência para o ∃

Introdução existencial (IE)	$\dfrac{\varphi}{\exists x \varphi\{x/a\}}$ $\quad \varphi$ contém a	**Eliminação existencial** (EE)	$\exists x \varphi$ $\left[\begin{array}{ll} \varphi\{a/x\} & H(EE) \\ \vdots & \\ \psi & \end{array}\right]$ $\overline{\qquad\psi\qquad}$
φ{x/a} é o resultado da substituição de **uma ou mais** ocorrências da letra nominal "a" em φ por uma variável "x". "x" não pode ocorrer em φ		φ{a/x} é o resultado da substituição de **todas** as ocorrências da variável "x" em φ por uma letra nominal "a". "a" não pode ocorrer em premissa ou hipótese vigente "a" não pode ocorrer em φ "a" não pode ocorrer em ψ	

computação
Universidade Federal de Pelotas

Lógica de Predicados

E-mail para dúvidas:

larissa@inf.ufpel.edu.br

Resolvam os exercícios!

Exercícios

1) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \forall x F(x) \vdash G(a)$
2) $\sim F(a) \vdash \sim \forall x F(x)$
3) $\forall x \, \forall y \, F(x,y) \vdash F(a,a)$
4) $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \vdash \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$
5) $\forall x(F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x))), \forall x \sim G(x) \vdash \forall x F(x) \rightarrow \forall x H(x)$
6) $\forall x(F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x))), \forall x \sim G(x) \vdash \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$
7) $\forall x F(a,x), \forall x \forall y(F(x,y) \rightarrow G(y,x)) \vdash \forall x G(x,a)$
8) $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x), \sim G(a) \vdash \sim \forall x F(x)$

Exercícios

9) $\forall x(F(x) \vee G(x)) \vdash \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$

10) $\sim \exists xF(x) \vdash \forall x \sim F(x)$

11) $\sim \exists x(F(x) \wedge \sim G(x)) \vdash \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

12) $\exists x(F(x) \vee G(x)) \vdash \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$

13) $\exists xF(x) \vee \exists xG(x) \vdash \exists x(F(x) \vee G(x))$

14) $\exists x \forall y L(x,y) \vdash \forall x \exists y L(y,x)$

15) $\forall x(F(x) \rightarrow \exists yL(x,y)), \exists x(F(x) \wedge G(x)) \vdash \exists x \exists y(G(x) \wedge L(x,y))$

16) $\forall x(F(x) \rightarrow \sim G(x)) \vdash \sim\exists x(F(x) \wedge G(x))$