Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Ciência e Engenharia de Computação
Disciplina: Sistemas Discretos
Lista de Exercícios – Técnicas de Demonstração (Parte 1)

1) Dê contraexemplos para as proposições a seguir:

   a. Toda figura geométrica com quatro ângulos retos é um quadrado.
   b. Se um número real não for positivo, terá que ser negativo.
   c. Todas as pessoas com cabelo ruivo têm olhos verdes ou são altas
      Uma pessoa ruiva com olhos castanhos e baixa
   d. Se n for um número par, então $n^2 + 1$ será um número primo
   e. Se $n^2 > 0$, então $n > 0$.
      $n = -1$ (qualquer inteiro negativo)

2) Encontre o erro na seguinte "demonstração" de que a soma de dois números pares é um múltiplo de 4.

   x e y são pares $\rightarrow$ x+y é múltiplo de 4

   Supondo que

   $x = 2m \qquad y = 2m \qquad m \in Z$

   Então

   $x + y = 2m + 2m = 4m$

   Logo

   x+y é um múltiplo de 4

3) Prove as proposições a seguir:

   a. Se n = 25, 100 ou 169, então n é um quadrado perfeito e é uma soma de dois quadrados perfeitos.
   b. Se n for um inteiro par tal que $4 \leq n \leq 12$, então n será uma soma de dois números primos.

      $n \in \{4, 6, 8, 10, 12\} \rightarrow n$ é a soma de dois primos

      $n = 4 \qquad = 2 + 2$
      $n = 6 \qquad = 3 + 3$
      $n = 8 \qquad = 3 + 5$
      $n = 10 \qquad = 3 + 7$
      $n = 12 \qquad = 5 + 7$

   c. A soma de um inteiro com o seu quadrado e par.
   d. Para n um natural par e n > 2, $2^n – 1$ não é primo.
      NOTA: Um natural x não é primo se: i) for 0 ou 1 ou ii) ou se for maior que 1, ele têm **fatoração não trivial**; ou seja, podem ser fatorados como $x = a \times b$, onde tanto a como b são distintos de x e 1.

n é par e n > 2 → $2^n - 1$ não é primo

Supondo que $n > 2$

$n = 2k$ com $k > 1$ e $k \in N$

Então

$2^n - 1 = 2^{2k} - 1$

$= (2^k + 1)(2^k - 1)$ como $k > 1$, $(2^k - 1) > 1$, essa é uma fatoração não trivial ($(2^k + 1)$ e $(2^k - 1)$ são diferentes de 1 e $2^n - 1$)

Logo $2^n - 1$ não é primo

e. Para todo inteiro n, o número $3(n^2 + 2n + 3) - 2n^2$ é um quadrado perfeito (faça uma demonstração direta).

f. Se n, m e p forem inteiros tais que $n \mid m$ e $m \mid p$, então $n \mid p$.

NOTA: dados dois inteiros n e m, n **divide** m, denotado por $n \mid m$, significa que m é divisível por n.

$n \mid m$ e $m \mid p \rightarrow n \mid p$

Supondo que

$m = nk$ $p = mj$ $k,j \in Z$

Então

$p = mj = n(kj)$ $kj \in Z$

Logo

$n \mid p$