Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Ciência e Engenharia de Computação
Disciplina: Sistemas Discretos
Lista de Exercícios – Álgebra de Conjuntos

1. Sejam A = {p, q, r, s}, B = {r, t, v} e C = {p, s, t, u}. Encontre:
U = {p, q, r, s, t, u, v, x}

a) B∩C = {t}
b) A∪C = { p,q,r,s,t,u }
c) C’ = { q,r,v,x }
d) A∩B∩C = {}
e) B-C = { r,v }
f) (A∪B)’ = { u,x }
g) A×B = { (p,r), (p,t), (p,v), (q,r), (q,t), (q,v), (r,r), (r,t), (r,v), (s,r), (s,t), (s,v)}
h) (A∪B)∩C = {p,s,t}

2. Sejam A = { 2, 4, 5, 6, 8}, B = {1, 4, 5, 9} e C = { x | x ∈ ℤ e 2 ≤ x < 5 }. Encontre:
U = {1,2,3,4,5,6,8,9} C = {2,3,4}

a) A∪B = { 1,2,4,5,6,8,9 }
b) A∩B = { 4,5 }
c) A∩C = { 2,4 }
d) B∪C = { 1,2,3,4,5,9 }
e) A-B = { 2,6,8 }
f) A’ = { 1,3,9 }
g) A∩A’ = { }
h) (A∩B)’ = { 1,2,3,6,8,9 }
i) C-B = { 2,3}
j) (C∩B)∪A’ = { 1,3,4,9 }
k) (B-A)’ ∩ (A-B) = { 2,6,8 }
l) (C’-B)’ = {1,2,3,4,5,9}
m) B×C = {(1,2), (1,3), (1,4), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (5,3), (5,4), (9,2), (9,3), (9,4)}

3. Sendo A={1, 4, 6, 8, 10}, B={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) e C={3, 6, 9, 12}. Determine:

a) (A∪B) ∩ C = {3, 6}
b) B-C = {0,1,2,4,5}
c) (B∩C) – A = {3}
d) (A∩B) ∪ (B∩C) = {1,3,4,6}
e) A ∪ Ø = A
f) B ∩ Ø = {}

4. Sendo A = {$x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7$} , B = { $x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4$}. Determine:

a) A ∪ B = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,...}
b) A-B = {0,1,2,3}
c) A ∩ B = {4,5,6,7}
d) B-A = {8,9,...}

5. Suponha o conjunto universo S = {p, q, r, s, t, u, v, w}, bem como A = {p, q, r, s}, B = {r, t, v}, C = {p, s, t, u}. Determine:

a) B ∩ C = {t}
b) A ∪ C = {p,q,r,s,t,u}
c) A ∩ B ∩ C = {}
d) B – C = {r, v}
e) A x B = {(p,r),(p,t),(p,v),(q,r),(q,t),(q,v),(r,r),(r,t),(r,v),(s,r),(s,t),(s,v)}
f) A + B = {p_A, q_A , r_A, s_A, r_B, t_B, v_B}
g) B + B = {r_B, t_B, v_B}

6. Sendo A = {0, 1, 2, 3}, B = {0, 2, 3, 5}, C = {x ∈ ℕ | x é número par menor que 10}, D = { x ∈ ℕ | x é número ímpar compreendido entre 4 e 10}. Determine:
C = {0, 2, 4, 6, 8}
D = {5, 7, 9}

a) A ∪ B = {0,1,2,3,5}
b) B ∪ C = {0,2,3,4,5,6,8}
c) (A ∪ B) ∪ C = {0,1,2,3,4,5,6,8}
d) A ∪ C = {0,1,2,3,4,6,8}
e) B-D = {0,2,3}
f) (A ∩ C) ∪ D = {0,2,5,7,9}
g) A ∪ D = {0,1,2,3,5,7,9}

7. Prove que A ∪ A = A

Caso 1, A ⊆ A ∪ A

Caso 2, A ∪ A ⊆ A

Seja x ∈ A. Então:

x ∈ A ⇔ idempotência da disjunção

x ∈ A V x ∈ A ⇔ definição da união

x ∈ A ∪ A

Portanto, A ⊆ A ∪ A (1)

Seja x ∈ A ∪ A. Então:

x ∈ A ∪ A ⇔ definição da união

x ∈ A V x ∈ A ⇔ idempotência da disjunção

$x \in A$

Portanto, $A \cup A \subseteq A$ (2)

De (1) e (2) concluímos $A \cup A = A$

8. Prove que $A \cup B = B \cup A$

Caso 1, $A \cup B \subseteq B \cup A$

Caso 2, $B \cup A \subseteq A \cup B$

Seja $x \in A \cup B$. Então:

$x \in A \cup B$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in A \lor x \in B$ $\Leftrightarrow$ comutatividade da disjunção

$x \in B \lor x \in A$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in B \cup A$

Portanto, $A \cup B \subseteq B \cup A$ (1)

Seja $x \in B \cup A$. Então:

$x \in B \cup A$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in B \lor x \in A$ $\Leftrightarrow$ comutatividade da disjunção

$x \in A \lor x \in B$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in A \cup B$

Portanto, $B \cup A \subseteq A \cup B$ (2)

De (1) e (2) concluímos $A \cup B = B \cup A$

9. Prove que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Caso 1, $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

Caso 2, $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

Seja $x \in (A \cup B) \cup C$. Então:

$x \in (A \cup B) \cup C$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in (A \cup B) \vee x \in C$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$ $\Leftrightarrow$ associatividade da disjunção

$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in A \vee x \in (B \cup C)$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in A \cup (B \cup C)$

Portanto, $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ (1)

Seja $x \in A \cup (B \cup C)$. Então:

$x \in A \cup (B \cup C)$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in A \vee x \in (B \cup C)$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$ $\Leftrightarrow$ associatividade da disjunção

$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in (A \cup B) \vee x \in C$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in (A \cup B) \cup C$

Portanto, $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ (2)

De (1) e (2) concluímos $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

10. Prove que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Caso 1, $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

Caso 2, $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

Seja $x \in A \cap (B \cap C)$. Então:

$x \in A \cap (B \cap C)$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$x \in A \wedge x \in (B \cap C)$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$ $\Leftrightarrow$ associatividade da conjunção

$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$x \in (A \cap B) \wedge x \in C$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$x \in (A \cap B) \cap C$

Portanto, $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

Seja $x \in (A \cap B) \cap C$. Então:

$x \in (A \cap B) \cap C$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$x \in (A \cap B) \wedge x \in C$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$ $\Leftrightarrow$ associatividade da conjunção

$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$x \in A \wedge x \in (B \cap C)$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$x \in A \cap (B \cap C)$

Portanto, $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

De (1) e (2) concluímos $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

11. Prove que (suponha A e B conjuntos quaisquer) $(A \cap B) \cup A = A$

Caso 1, $(A \cap B) \cup A \subseteq A$

Caso 2, $A \subseteq (A \cap B) \cup A$

Seja $x \in (A \cap B) \cup A$. Então:

$x \in (A \cap B) \cup A$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in (A \cap B) \vee x \in A$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in A$ $\Leftrightarrow$ distributividade da disjunção sobre a conjunção

$(x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B)$ $\Leftrightarrow$ idempotência da disjunção

$(x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B)$ $\Leftrightarrow$ absorção

$x \in A$

Portanto, $(A \cap B) \cup A \subseteq A$ (1)

Seja $x \in A$. Então:

$x \in A$ $\Leftrightarrow$ absorção

$(x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B)$ $\Leftrightarrow$ distributividade da conjunção sobre a disjunção

$(x \in A \wedge x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$ $\Leftrightarrow$ idempotência da conjunção

$x \in A \vee (x \in A \cap x \in B)$ $\Leftrightarrow$ definição de intersecção

$x \in A \vee x \in (A \cap B)$ $\Leftrightarrow$ comutatividade da disjunção

$x \in (A \cap B) \vee x \in A$ $\Leftrightarrow$ definição de união

$x \in (A \cap B) \cup A$

Portanto, $A \subseteq (A \cap B) \cup A$ (2)

De (1) e (2) concluímos $(A \cap B) \cup A = A$

12. Prove que (suponha A e B conjuntos quaisquer) $A \cup (\sim A \cap B) = A \cup B$

Caso 1, $A \cup ({\sim}A \cap B) \subseteq A \cup B$

Caso 2, $A \cup B \subseteq A \cup ({\sim}A \cap B)$

Seja $x \in A \cup ({\sim}A \cap B)$. Então:

$x \in A \cup ({\sim}A \cap B)$	$\Leftrightarrow$ definição de união
$x \in A \lor x \in ({\sim}A \cap B)$	$\Leftrightarrow$ definição de intersecção
$x \in A \lor (x \in {\sim}A \land x \in B)$	$\Leftrightarrow$ distributividade
$(x \in A \lor x \in {\sim}A) \land (x \in A \lor x \in B)$	$\Leftrightarrow$ negação
Verdade $\land (x \in A \lor x \in B)$	$\Leftrightarrow$ elemento neutro
$(x \in A \lor x \in B)$	$\Leftrightarrow$ definição de união
$x \in (A \cup B)$	

Portanto, $A \cup ({\sim}A \cap B) \subseteq A \cup B$ (1)

Seja $x \in A \cup B$. Então:

$x \in (A \cup B)$	$\Leftrightarrow$ definição de união
$(x \in A \lor x \in B)$	$\Leftrightarrow$ elemento neutro
Verdade $\land (x \in A \lor x \in B)$	$\Leftrightarrow$ negação
$(x \in A \lor x \in {\sim}A) \land (x \in A \lor x \in B)$	$\Leftrightarrow$ distributividade
$x \in A \lor (x \in {\sim}A \land x \in B)$	$\Leftrightarrow$ definição de intersecção
$x \in A \lor x \in ({\sim}A \cap B)$	$\Leftrightarrow$ definição de união
$x \in A \cup ({\sim}A \cap B)$	

Portanto, $A \cup B \subseteq A \cup ({\sim}A \cap B)$ (2)

De (1) e (2) concluímos $A \cup ({\sim}A \cap B) = A \cup B$