Resolução da lista de exercícios de Sistemas Discretos

Aluna: Anna Gabriele Marques de Oliveira

Questão 3:

a) $(A \cup B) \cap C = \{6\}$

b) $B - C = \{0, 1, 2, 4, 5\}$

c) $(B \cap C) - A = \{3\}$

d) $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{1, 3, 4, 6\}$

e) $(A \cup \emptyset) = \{1, 4, 6, 8, 10\}$

f) $(B \cap \emptyset) = \emptyset$

Questão 5:

a) $B \cap C = \{\text{t}\}$

b) $A \cup C = \{\text{p, q, r, s, t, u}\}$

c) $A \cap B \cap C = \emptyset$

d) $B - C = \{\text{r, v}\}$

e) $A \times B = \{\text{(p,r),(q,r),(r,r),(s,r),(p,t),(q,t),(r,t),(s,t),(p,v),(q,v),(r,v),(s,v)}\}$

f) $A + B = \{p_A, q_A, r_A, s_A, r_B, t_B, v_B\}$

g) $B + B = \{r_B, t_B, v_B\}$

Questão 6:

a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5\}$

b) $B \cup C = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

c) $(A \cup B) \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

d) $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

e) $B - D = \{0, 2, 3\}$

f) $(A \cap C) \cup C = \{0, 2, 5, 7, 9\}$

g) $A \cup D = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

Questão 10: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Seja x $\in A \cap (B \cap C)$:

Pela teoria básica de conjuntos temos por definição: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Assim, utilizando da definição temos:

$$A \cap (B \cap C) = \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\}.$$

Utilizando a propriedade distributiva, temos:

$$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in C)$$

Pela definição de interseção:

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in A \cap x \in B) \wedge (x \in A \cap x \in C)$$

Novamente utilizando a definição de interseção, concluímos que:

$$(x \in A \cap x \in B) \wedge (x \in A \cap x \in C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C \ \blacksquare$$

Questão 12: $A \cup (\sim A \cap B) = (A \cup B)$

Caso 1: Seja x $\in A \cup x \in (\sim A \cap B)$:

Utilizando da definição de união temos:

$$x \in A \vee (\sim A \cap B).$$

Utilizando da definição de interseção temos:

$$x \in A \vee (x \in \sim A \wedge x \in B).$$

Utilizando a propriedade distributiva, temos:

$$x \in A \vee (x \in \sim A \wedge x \in B) \leftrightarrow (x \in A \vee x \in \sim A) \wedge (x \in A \vee x \in B)$$

Assim, concluímos que $x \in A \vee x \in \sim A$ é uma tautologia, e, pela propiedade do elemento neutro, temos:

$$V \wedge p \leftrightarrow p$$

logo:

$$Tautologia \wedge (x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

Pela definição de união:

$$(x \in A \vee x \in B) = x \in A \cup B$$

Concluímos que: $A \cup (\sim A \cap B) \subseteq (A \cup B)$

Caso 2, queremos provar que: $(A \cup B) \subseteq A \cup (\sim A \cap B)$:

Seja x $\in (A \cup B)$:

pela propriedade do elemento neutro, temos:$A \cap U = A$

Então:

$x \in (A \cup B) = U \cap (x \in (A \cup B))$

Pela definição de união:

$U \cap (x \in (A \cup B)) \leftrightarrow U \cap (x \in A \vee x \in B)$

Utilizando da definição de interseção temos:

$U \cap (x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow U \wedge (x \in A \vee x \in B)$

Utilizando a propriedade de negação ou complemento, temos:

$U \wedge (x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow (A \cup \sim A) \wedge (x \in A \vee x \in B)$

Pela definição de união:

$(A \cup \sim A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow (x \in A \vee x \in \sim A) \wedge (x \in A \vee x \in B)$

Utilizando a propriedade distributiva, temos:

$(x \in A \vee x \in \sim A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow x \in A \vee (x \in \sim A \wedge x \in B)$

Pela definição de interseção:

$x \in A \vee (x \in \sim A \wedge x \in B) \leftrightarrow x \in A \vee x \in (\sim A \cap x \in B)$

Pela definição de união:

$x \in A \cup (\sim A \cap x \in B)$

Concluímos que: $(A \cup B) \subseteq A \cup (\sim A \cap B)$ ■