BROILLET VIRGILE
Note: 6/20 (score total : 3/10)

+81/1/40+

Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre ⟶
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom :
BROILLET Virgile

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

AMALA A - Troisième contrôle continu - 19 avril 2023 -

Règlement – L'épreuve dure 60 minutes. Les calculatrices sont interdites et les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les documents ne sont pas autorisés.

Question 1 Soient $\mathbf{A}$ une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. Alors,

0/1

- ☐ $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) < n$.
- ☒ $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$.
- ☐ $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) = -\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$.
- ■ $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) < \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$.
- ☐ $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda) < n$.
- ☐ $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) > \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$.

Question 2 Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 2$, dont le polynôme minimal est $m_{\mathbf{A}}(x) = (x-a)(x+a)$, avec $a \neq 0$. On désigne par Π_a et Π_{-a} les projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$. On a

0/1

- ☒ $\frac{1}{a}\Pi_a - \frac{1}{a}\Pi_{-a} = \mathbf{A}^{-1}$
- ☐ $\Pi_a + \Pi_{-a} = -a\mathbf{A}$
- ☐ $\mathrm{rang}\,\Pi_a = \mathrm{rang}\,\Pi_{-a}$
- ☐ $\Pi_a + \Pi_{-a} = a\mathbf{A}$
- ☐ $\Pi_a = -\frac{1}{2a}(\mathbf{A} - 2a\mathbf{1}_n)$ et $\Pi_{-a} = \frac{1}{2a}(\mathbf{A} + 2a\mathbf{1}_n)$
- ■ $\Pi_a = \frac{1}{2a}(\mathbf{A} - 2a\mathbf{1}_n)$ et $\Pi_{-a} = -\frac{1}{2a}(\mathbf{A} + 2a\mathbf{1}_n)$

Question 3 Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le polynome minimal $m_{\mathbf{A}}(x)$ de $\mathbf{A}$ est

0/1

- ■ $x^3 + x^2 + x$.
- ☐ $-x(x-4)$.
- ☐ $x^3 - x - 1$.
- ☐ $x(x-4)^2$.
- ☐ $x^2(x-4)$.
- ☒ $x^3 - x^2 - x$.

Question 4 On considère les trois matrices suivantes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

0/1

- ☐ Uniquement la matrice **B** est diagonalisable.
- ■ Uniquement les matrices **A** et **C** sont diagonalisables.
- ☒ Les matrices **A**, **B** et **C** sont diagonalisables.
- ☐ Uniquement les matrices **A** et **B** sont diagonalisables.
- ☐ Uniquement les matrices **B** et **C** sont diagonalisables.
- ☐ Les matrices **A**, **B** et **C** ne sont pas diagonalisables.

Question 5 Soit **A** une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, vérifiant la relation suivante

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1}_n)(\mathbf{A} + \mathbf{1}_n) = \mathbf{0}.$$

0/1

- ☐ La matrice **A** n'est pas trigonalisable.
- ☐ La matrice **A** n'est pas inversible
- ■ Le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}(x)$ de **A** est $(x-1)(x+1)$.
- ☐ La matrice **A** n'est pas diagonalisable.
- ☐ La matrice **A** est inversible et son inverse est $-\mathbf{A}$.
- ☒ La matrice **A** est inversible et son inverse est **A**.

Problème

On considère le problème de migration de population entre les zones urbaines et les zones rurales. Chaque année, un mouvement de population entre ces deux zones s'opère de la façon suivante :

i) la moitié des habitants en zone urbaine partent habiter en zone rurale, alors que l'autre moitié reste résidante en zone urbaine,

ii) un quart des habitants en zone rurale rejoignent une zone urbaine, les trois autres quarts restant en zone rurale.

Notons r_k la proportion de la population totale qui habite en zone rurale au terme de la k-ième année et u_k la proportion de population qui habite en zone urbaine au terme de cette même année. S'agissant de proportion de population, on a $r_k + u_k = 1$, pour toute année k.

Toutes les questions de ce problème portent sur la matrice suivante de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Question 6 On modélise matriciellement ce problème de migration de populations par

1/1

- [ ] $\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ r_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k \\ r_k \end{bmatrix} \mathbf{A}$.
- [ ] $\begin{bmatrix} u_{k+1} & r_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_k & r_k \end{bmatrix}$.
- [ ] $\begin{bmatrix} r_{k+1} & u_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} r_k & u_k \end{bmatrix}$.
- [ ] $\begin{bmatrix} r_{k+1} & u_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k & u_k \end{bmatrix} \mathbf{A}$.
- [ ] $\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ r_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_k \\ r_k \end{bmatrix}$.
- [x] $\begin{bmatrix} u_{k+1} & r_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k & r_k \end{bmatrix} \mathbf{A}$.

Question 7 Le polynôme minimal de la matrice $\mathbf{A}$ est

1/1

- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x+1/4)$.
- [x] $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x-1/4)$.
- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x+3/4)$.
- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x+1)(x-1/4)$.
- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x-1/2)(x-1/4)$.
- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x+1/2)(x-1/4)$.

Question 8 Les matrices des projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$ sont

0/1

- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.
- [x] $\Pi = \begin{bmatrix} 1/3 & 3/2 \\ 1/3 & 3/2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

Question 9 Si Π et Π' désignent les deux projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$, pour tout entier naturel $k \geq 1$, on a

1/1

- [ ] $\mathbf{A}^k = \frac{1}{2^k}\Pi + \frac{3}{4^k}\Pi'$.
- [ ] $\mathbf{A}^k = \frac{1}{3^k}\Pi + \Pi'$.
- [x] $\mathbf{A}^k = \Pi + \frac{1}{4^k}\Pi'$.
- [ ] $\mathbf{A}^k = \frac{1}{4^k}\Pi + \frac{1}{4^k}\Pi'$.
- [ ] $\mathbf{A}^k = \Pi + \Pi'$.
- [ ] $\mathbf{A}^k = \Pi + \frac{1}{2^k}\Pi'$.

0/1

Question 10 On suppose que la répartition initiale de populations est de 1 250 individus dans chaque zone. Que se passe-t-il à long terme ?

- [x] $\lim_{k\to+\infty} u_k = 1/3$ et $\lim_{k\to+\infty} r_k = 3/2$.
- [ ] $\lim_{k\to+\infty} u_k = 1/3$ et $\lim_{k\to+\infty} r_k = 1/3$.
- [ ] $\lim_{k\to+\infty} u_k = 2/3$ et $\lim_{k\to+\infty} r_k = 2/3$.
- [ ] $\lim_{k\to+\infty} u_k = 2/3$ et $\lim_{k\to+\infty} r_k = 1/3$.
- [ ] $\lim_{k\to+\infty} u_k = 1/3$ et $\lim_{k\to+\infty} r_k = 2/3$.
- [ ] $\lim_{k\to+\infty} u_k = 3/2$ et $\lim_{k\to+\infty} r_k = 3/2$.