



+61/1/60+

Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre →
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom :
BROILLET Virgile

Attention à ne pas vous tromper,
toute erreur invalide la copie !

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0
<input checked="" type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input checked="" type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1
<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input checked="" type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3
<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4
<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5
<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6
<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7
<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input checked="" type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8
<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9

AMALA A - Contrôle continu final - 10 mai 2023 -

Règlement – L'épreuve dure 2 heures. Les calculatrices sont interdites et les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les documents ne sont pas autorisés.

Question 1 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $(x + 1)(x - 5)$. Alors,

- ☐ La matrice A est inversible et son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{5}(A + 4I_6)$.
- ☐ La matrice A n'est pas diagonalisable.
- ☒ La matrice A est inversible et son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I_6)$.
- ☐ La matrice A est inversible et son inverse est $A^{-1} = -\frac{1}{5}(A + 4I_6)$.
- ☐ La matrice A n'est pas inversible
- ☒ La matrice A est inversible et son inverse est $A^{-1} = -\frac{1}{5}(A - 4I_6)$.

Question 2 Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors la matrice A possède

- ☐ au plus un sous-espace propre.
- ☐ trois sous-espaces propres.
- ☐ deux sous-espaces propres de dimension 1.
- ☐ trois valeurs propres distinctes.
- ☐ au plus deux vecteurs propres linéairement indépendants.
- ☒ trois vecteurs propres qui forment une base de \mathbb{R}^3 .

Question 3 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 2$, dont le polynôme minimal est $m_A(x) = (x - a)(x - b)$, avec $a \neq b$ et $ab \neq 0$. On désigne par Π_a et Π_b les projecteurs spectraux de la matrice A . On a

- ☐ $\Pi_a = -\frac{1}{2a}(A - 2aI_n)$ et $\Pi_b = \frac{1}{2b}(A + 2bI_n)$
- ☐ $\Pi_a = \frac{1}{2a}(A - 2aI_n)$ et $\Pi_b = -\frac{1}{2b}(A + 2bI_n)$
- ☐ $\text{rang } \Pi_a = \text{rang } \Pi_b$
- ☐ $\Pi_a + \Pi_b = (a + b)A$
- ☒ $\frac{1}{a}\Pi_a - \frac{1}{b}\Pi_b = A^{-1}$
- ☒ $a^2\Pi_a + b^2\Pi_b = A^2$



Question 4 On considère les trois matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

- 0/1
- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Les matrices A, B et C ne sont pas diagonalisables. | <input type="checkbox"/> Uniquement les matrices A et B sont diagonalisables. |
| <input type="checkbox"/> Uniquement les matrices B et C sont diagonalisables. | <input type="checkbox"/> Uniquement la matrice B est diagonalisable. |
| <input checked="" type="checkbox"/> Uniquement les matrices A et C sont diagonalisables. | <input checked="" type="checkbox"/> Les matrices A, B et C sont diagonalisables. |

Question 5 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\text{trace}(A) = 0$, $\det(A) = 0$ et 3 est valeur propre de A. Alors,

- 1/1
- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> La matrice A est inversible. | <input type="checkbox"/> La matrice A n'est pas diagonalisable. |
| <input type="checkbox"/> $\text{Ker}(A) = \{0\}$ et $\text{Spec}(A) = \{-3, 3\}$. | <input checked="" type="checkbox"/> $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$ et $\text{Spec}(A) = \{-3, 0, 3\}$. |
| <input type="checkbox"/> $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$ et $\text{Spec}(A) = \{-3, 3\}$. | <input type="checkbox"/> $\text{Ker}(A) = \{0\}$ et $\text{Spec}(A) = \{-3, 0, 3\}$. |

Question 6 Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Les projecteurs spectraux de la matrice A sont

- 1/1
- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \Pi' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$ | <input type="checkbox"/> $\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Pi' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$ |
| <input type="checkbox"/> $\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$ | <input type="checkbox"/> $\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$ |
| <input type="checkbox"/> $\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$ |

Question 7 Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Alors, dans \mathbb{R}^4 , la matrice A possède

- 0/1
- | | |
|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> deux sous-espaces propres de dimension 2. | <input type="checkbox"/> trois sous-espaces propres, dont deux de dimension 2 et un de dimension 1. |
| <input type="checkbox"/> trois sous-espaces propres de dimension 1. | <input type="checkbox"/> deux sous-espaces propres de dimension 1. |
| <input checked="" type="checkbox"/> trois sous-espaces propres, dont deux de dimension 1 et un de dimension 2. | <input type="checkbox"/> un sous-espace propre de dimension 3. |



Question 8 Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme minimal $m_A(x)$ de A est

☒ $x^3 + 3x^2 + 2x.$

☐ $x^3 + x^2 + 2x.$

☐ $x(x+1)(x-4).$

☐ $x^3 - 3x + 2.$

☐ $x(x+4)(x-1).$

☐ $x(x-1)(x+2).$

Question 9 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(A - 5I_7)(A - 7I_7) = 0.$$

☐ La matrice A n'est pas inversible.

☐ $\dim(\text{Ker}(A - 5I_7) \oplus \text{Ker}(A - 7I_7)) < 7.$

☐ La matrice A n'est pas trigonalisable

☒ $\text{Ker}(A - 5I_7) \oplus \text{Ker}(A - 7I_7) = \mathbb{R}^7.$

☐ La matrice A n'est pas diagonalisable.

☐ $\text{Ker}(A + 5I_7) \oplus \text{Ker}(A + 7I_7) = \mathbb{R}^7.$

Question 10 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$. On suppose que A a exactement deux valeurs propres 5 et 7. Alors,

☐ $\text{mult}_{\text{alg}}(5) + \text{mult}_{\text{alg}}(7) > 5.$

☒ $E_5 \cap E_7 \neq \{0\}$ et $\dim E_5 + \dim E_7 \leq 5.$

☐ $\dim E_5 + \dim E_7 < 5.$

☐ $\dim E_5 + \dim E_7 = 5.$

☐ $\text{mult}_{\text{alg}}(5) + \text{mult}_{\text{alg}}(7) < 5.$

☒ $E_5 \cap E_7 = \{0\}$ et $\dim E_5 + \dim E_7 \leq 5.$

Problème A

On considère trois espèces A , B et C qui coexistent dans un même environnement naturel. Le nombre d'individus d'une espèce augmente proportionnellement au nombre d'individus de cette même espèce et décroît proportionnellement au nombre d'individus des deux autres espèces. On suppose que la population de chaque espèce augmente de cinq fois le nombre d'individus de l'espèce et décroît de deux fois le nombre total d'individus des deux autres espèces. On note respectivement n_k^A , n_k^B et n_k^C le nombre d'individus de l'espèce A , B et C l'année k .

Toutes les questions de ce problème portent sur la matrice suivante de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Question 11 On modélise matriciellement ce problème d'évolution d'espèces par

☐ $\begin{bmatrix} n_k^A & n_k^B & n_k^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{k+1}^A & n_{k+1}^B & n_{k+1}^C \end{bmatrix} A.$

☒ $\begin{bmatrix} n_{k+1}^A \\ n_{k+1}^B \\ n_{k+1}^C \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} n_k^A \\ n_k^B \\ n_k^C \end{bmatrix}.$

☐ $\begin{bmatrix} n_{k+1}^A & n_{k+1}^B & n_{k+1}^C \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} n_k^A & n_k^B & n_k^C \end{bmatrix}.$

☐ $\begin{bmatrix} n_{k+1}^A \\ n_{k+1}^B \\ n_{k+1}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_k^A \\ n_k^B \\ n_k^C \end{bmatrix} A.$

☐ $\begin{bmatrix} n_{k+1}^B & n_{k+1}^A & n_{k+1}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_k^A & n_k^B & n_k^C \end{bmatrix} A.$

☐ $\begin{bmatrix} n_{k+1}^B & n_{k+1}^A & n_{k+1}^C \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} n_k^B & n_k^A & n_k^C \end{bmatrix}.$



Question 12 Le polynôme minimal de la matrice A est

☐ $m_A = (x+7)(x-1).$

☒ $m_A = (x-7)(x-1).$

☐ $m_A = (x-5)(x-1).$

☐ $m_A = (x+1/5)(x+1/2).$

☐ $m_A = (x+7)(x-1).$

☐ $m_A = (x-5)(x-2).$

Question 13 Les matrices des projecteurs spectraux de la matrice A sont

☐ $\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

☒ $\Pi = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

☐ $\Pi = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Question 14 Si Π et Π' désignent les deux projecteurs spectraux de la matrice A , pour tout entier naturel $k \geq 1$, on a

☒ $A^k = 7^k \Pi + \Pi'.$

☐ $A^k = \frac{1}{7^k} \Pi + \Pi'.$

☐ $A^k = 7^k \Pi + (-1)^k \Pi'.$

☐ $A^k = (-7)^k \Pi + \Pi'.$

☐ $A^k = (-7)^k \Pi + (-1)^k \Pi'.$

☐ $A^k = \frac{1}{7^k} \Pi + (-1)^k \Pi'.$

Question 15 On suppose que la répartition initiale de population est de 150 individus de chaque espèce. Que se passe-t-il à long terme ?

☐ $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^A = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^B = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^C = 150.$

☐ $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^A = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^B = 150$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^C = 0.$

☒ $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^A = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^B = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^C = 150.$

☐ $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^B = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^A = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^C = 150.$

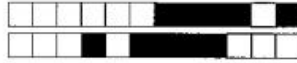
☐ $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^A = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^B = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^C = +\infty.$

☐ $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^A = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^B = \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k^C = 0.$

Problème B

Pour les trois questions suivantes, on considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - 2x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -3x_1(t) - 4x_2(t) \end{cases}$$



ainsi que sa formulation matricielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t),$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Toutes les questions de ce problème portent sur cette matrice.

Question 16 Le polynôme minimal de la matrice A est

☐ $m_A = (x+3)(x+4).$

☐ $m_A = (x+2)(x+5).$

☒ $m_A = (x-2)(x+5).$

☐ $m_A = (x-2)(x-5).$

☐ $m_A = (x-3)(x+4).$

☐ $m_A = (x-2)(x-3).$

Question 17 Les projecteurs spectraux de la matrice A sont

☒ $\Pi = \frac{1}{7}(A + 5I_2)$ et $\Pi' = -\frac{1}{7}(A - 2I_2).$

☐ $\Pi = \frac{1}{7}(A - 5I_2)$ et $\Pi' = -\frac{1}{7}(A + 2I_2).$

☐ $\Pi = \frac{1}{7}(A - 5I_2)$ et $\Pi' = \frac{1}{7}(A - 2I_2).$

☐ $\Pi = -\frac{1}{8}(A + 2I_2)$ et $\Pi' = \frac{1}{6}(A - 5I_2).$

☐ $\Pi = \frac{1}{5}(A + 7I_2)$ et $\Pi' = -\frac{1}{5}(A - 2I_2).$

☐ $\Pi = \frac{1}{3}(A + 2I_2)$ et $\Pi' = -\frac{1}{4}(A - 3I_2).$

Question 18 Les projecteurs spectraux de la matrice A sont

☒ $\Pi = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$

☐ $\Pi = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$

☐ $\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$

☐ $\Pi = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

☐ $\Pi = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$

☐ $\Pi = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$

Question 19 Pour tout réel t , l'exponentielle de la matrice tA est donnée par

☐ $e^{tA} = -\frac{1}{7}(e^{2t} + e^{-5t})A - \frac{1}{7}(5e^{2t} - 2e^{-5t})I_2.$

☒ $e^{tA} = \frac{1}{7}(e^{2t} - e^{-5t})A + \frac{1}{7}(5e^{2t} + 2e^{-5t})I_2.$

☐ $e^{tA} = \frac{1}{7}(e^{2t} + e^{-5t})A + \frac{1}{7}(5e^{2t} - 2e^{-5t})I_2.$

☐ $e^{tA} = \frac{1}{7}(e^{-2t} - e^{5t})A + \frac{1}{7}(5e^{-2t} + 2e^{5t})I_2.$

☐ $e^{tA} = \frac{1}{5}(e^{3t} - e^{-4t})A + \frac{1}{5}(5e^{3t} + 2e^{-4t})I_2.$

☐ $e^{tA} = \frac{1}{6}(e^{3t} - e^{4t})A + \frac{1}{6}(5e^{3t} + 2e^{4t})I_2.$



Question 20 On suppose que les conditions initiales du système sont $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 3$. Avec ces conditions initiales, la solution du système différentiel est

☐ $x_1(t) = 3e^{-5t}$ et $x_2(t) = e^{-5t}$.

☐ $x_1(t) = e^{5t}$ et $x_2(t) = 3e^{5t}$.

☒ $x_1(t) = e^{-5t}$ et $x_2(t) = 3e^{-5t}$.

☐ $x_1(t) = e^{-2t}$ et $x_2(t) = 3e^{-2t}$.

☐ $x_1(t) = e^{-2t}$ et $x_2(t) = 5e^{-3t}$.

☐ $x_1(t) = e^{5t}$ et $x_2(t) = 2e^{-5t}$.
