BROILLET VIRGILE
Note: 10.5/20 (score total : 6/11)

Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre ⟶
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom :
BROILLET VIRGILE

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

AMALA A - Premier contrôle continu - 22 février 2023 -

Règlement – L'épreuve dure 1h15. Les calculatrices sont interdites et les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les documents ne sont pas autorisés.

Question 1 On considère un modèle d'évolution de mulots au sein d'une forêt en termes d'adultes et de jeunes. Notons x_k le nombre d'adultes l'année k et y_k le nombre de jeunes l'année k. Chaque année, la moitié des adultes survivent et le quart des jeunes survivent et deviennent adultes. De plus, chaque année, chaque adulte engendre en moyenne deux jeunes. On modélise matriciellement ce problème d'évolution par l'équation

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice $\mathbf{A}$ est

0/1

- [x] $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,5 & 2 \\ 0,25 & 0 \end{bmatrix}$.
- [x] $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0,25 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0,5 & 0,25 \end{bmatrix}$.

Question 2 On considère le problème de Fibonacci : *Un homme possède un couple de lapins dans un lieu clos et souhaite savoir combien il aura de couples au bout d'un an si par nature chaque couple de lapins donne naissance à partir de deux mois de vie à un nouveau couple de lapins tous les mois.* En notant x_k le nombre de couples de lapins le k-ième mois, le nombre de couples de lapins satisfait la relation de récurrence suivante :

0/1

- [x] $x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$.
- [x] $x_{k+1} = x_k + 2x_{k-1}$.
- [ ] $x_{k+1} = 2x_k + x_{k-1}$.
- [ ] $x_{k+1} = 2x_k + 2x_{k-1}$.

Question 3 On considère deux espèces A et B qui coexistent dans un même environnement naturel. Le nombre d'individus d'une espèce augmente proportionnellement au nombre d'individus de cette même espèce et décroit proportionnellement au nombre d'individus de l'autre espèce. On suppose que la population de chaque espèce augmente de trois fois le nombre d'individus de l'espèce et décroit de deux fois le nombre d'individus de l'autre espèce. On note n_k^A le nombre d'individus de l'espèce A l'année k et n_k^B le nombre d'individus de l'espèce B l'année k. On modélise matriciellement ce problème d'évolution par l'équation

$$\begin{bmatrix} n_{k+1}^A \\ n_{k+1}^B \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} n_k^A \\ n_k^B \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice $\mathbf{A}$ est

1/1

- [ ] $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$.
- [x] $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Question 4 On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$. Choisir la bonne réponse.

1/1

- [ ] Soient u, v, w trois vecteurs propres de $\mathbf{A}$ alors il existe a, b, c réels pas tous nuls tels que $au + bv + cw = 0$.
- [x] La matrice $\mathbf{A}$ possède trois vecteurs propres qui forment une base de $\mathbb{R}^3$.
- [ ] Tous les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ sont colinéaires.
- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ possède au plus deux vecteurs propres linéairement independents.

Question 5 On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$. Choisir la bonne réponse.

1/1

- [ ] Le vecteur $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 0.
- [ ] Le vecteur $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 0.
- [x] Le vecteur $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 1.
- [ ] Le vecteur $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 1.

Question 6 On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$. Choisir la bonne réponse.

1/1

- [x] Les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ associées à la même valeur propre.
- [ ] Les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ associées à la même valeur propre.
- [ ] Les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ associées à des valeurs propres différentes.
- [ ] Les vecteurs $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$associées à des valeurs valeurs propres différentes.

Question 7 On considère la matrice suivante de $M_6(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'ensemble des valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ est

1/1

- [ ] $\mathrm{Spec}(\mathbf{AB}) = \{6, -6\}$
- [ ] $\mathrm{Spec}(\mathbf{AB}) = \{6\}$
- [x] $\mathrm{Spec}(\mathbf{AB}) = \{6, 0\}$
- [ ] $\mathrm{Spec}(\mathbf{AB}) = \{0\}$

Question 8 Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ deux matrices dans $M_2(\mathbb{R})$. Choisir la bonne réponse :

0/1

- [ ] $\mathbf{B}$ est l'inverse de $\mathbf{A}$.
- [ ] $\mathbf{A}$ est l'inverse de $\mathbf{B}$.
- [x] Le noyau de $\mathbf{B}$ est nul.
- [x] $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont les mêmes valeur propres.

0/1

Question 9 De laquelle des matrices suivantes dans $M_3(\mathbb{R})$, 5 n'est PAS une valeur propre ?

- [x] $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
- [x] $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

1/1

Question 10 Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ deux matrices dans $M_2(\mathbb{R})$. L'ensemble des valeurs propres de la matrice produit $\mathbf{AB}$ est

- [ ] $\text{Spec}(\mathbf{AB}) = \{1, -1, 2\}$
- [x] $\text{Spec}(\mathbf{AB}) = \{1, 2\}$
- [ ] $\text{Spec}(\mathbf{AB}) = \{2, -1\}$
- [ ] $\text{Spec}(\mathbf{AB}) = \{1, -2\}$

0/1

Question 11 Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $\text{trace}(\mathbf{A}) = 0, \det(\mathbf{A}) = 0$ et 1 est valeur propre de $\mathbf{A}$. Choisir la bonne réponse.

- [ ] $Ker(\mathbf{A}) = \{0\}$ et $Spec(\mathbf{A}) = \{0, 1\}$.
- [x] $Ker(\mathbf{A}) \neq \{0\}$ et $Spec(\mathbf{A}) = \{0, 1, -1\}$.
- [ ] $Ker(\mathbf{A}) \neq \{0\}$ et $Spec(\mathbf{A}) = \{0, 1\}$.
- [x] $Ker(\mathbf{A}) \neq \{0\}$ et $Spec(\mathbf{A}) = \{1, -1\}$.
