BROILLET VIRGILE
Note: 8/20 (score total : 2/5)

+147/1/8+

Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre ⟶
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom :
BROILLET Virgile

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

AMALA A - Quatrième contrôle continu - 19 avril 2023 -

Règlement – L'épreuve dure 45 minutes. Les calculatrices sont interdites et les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les documents ne sont pas autorisés.

On considère deux espèces A et B qui coexistent dans un même environnement naturel. Le nombre d'individus d'une espèce augmente proportionnellement au nombre d'individus de cette même espèce et décroit proportionnellement au nombre d'individus de l'autre espèce. On suppose que la population de chaque espèce augmente de quatre fois le nombre d'individus de l'espèce et décroit de trois fois le nombre d'individus de l'autre espèce. On note n_k^A le nombre d'individus de l'espèce A l'année k et n_k^B le nombre d'individus de l'espèce B l'année k.

Toutes les questions de ce problème portent sur la matrice suivante de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Question 1 On modélise matriciellement ce problème d'évolution d'espèces par

0/1

- [ ] $\begin{bmatrix} n_k^A & n_k^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{k+1}^A & n_{k+1}^B \end{bmatrix} \mathbf{A}$.
- [ ] $\begin{bmatrix} n_{k+1}^B & n_{k+1}^A \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} n_k^B & n_k^A \end{bmatrix}$.
- [ ] $\begin{bmatrix} n_{k+1}^A \\ n_{k+1}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_k^A \\ n_k^B \end{bmatrix} \mathbf{A}$.
- [ ] $\begin{bmatrix} n_{k+1}^B & n_{k+1}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_k^A & n_k^B \end{bmatrix} \mathbf{A}$.
- [x] $\begin{bmatrix} n_{k+1}^A \\ n_{k+1}^B \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} n_k^A \\ n_k^B \end{bmatrix}$.
- [ ] $\begin{bmatrix} n_{k+1}^A & n_{k+1}^B \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} n_k^A & n_k^B \end{bmatrix}$.

Question 2 Le polynôme minimal de la matrice $\mathbf{A}$ est

1/1

- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x+1)(x-7)$.
- [x] $m_{\mathbf{A}} = (x-7)(x-1)$.
- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x-1/3)(x-1/4)$.
- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x+1)(x+7)$.
- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x+7)$.
- [ ] $m_{\mathbf{A}} = (x+1/3)(x-1/4)$.

Question 3 Les matrices des projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$ sont

1/1

- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.
- [x] $\Pi = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.
- [ ] $\Pi = \begin{bmatrix} 1/3 & 3/2 \\ 1/3 & 3/2 \end{bmatrix}$ et $\Pi' = \begin{bmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Question 4 Si Π et Π' désignent les deux projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$, pour tout entier naturel $k \geq 1$, on a

0/1

- ☐ $\mathbf{A}^k = \Pi + \frac{1}{2^k}\Pi'$.
- ☐ $\mathbf{A}^k = \frac{1}{7^k}\Pi + \Pi'$.
- ☐ $\mathbf{A}^k = \frac{1}{7^k}\Pi + \frac{3}{7^k}\Pi'$.
- ☐ $\mathbf{A}^k = \Pi + \frac{1}{7^k}\Pi'$.
- ☒ $\mathbf{A}^k = \Pi' + 7^k\Pi$.
- ☐ $\mathbf{A}^k = \Pi + \Pi'$.

Question 5 On suppose que la répartition initiale de population est de 150 individus de l'espèce A et 150 individus de l'espèce B. Que se passe-t-il à long terme ?

0/1

- ☐ $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^A = +\infty$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^B = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^A = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^B = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^A = 100$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^B = 200$
- ☒ $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^A = 150$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^B = 150$
- ☐ $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^A = 200$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^B = 100$
- ☐ $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^A = 100$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k^B = 100$