Feuille TD 4: Correction des exercices supplémentaires

Nous rappelons tout d'abord les lois usuelles, qui seront à connaître !

	notation	ensemble de réalisations	$\mathbb{P}(X = k)$	espérance	variance
loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$k \in [\![0, 1]\!]$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
loi binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$k \in [\![0, n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$k \in \mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$k \in \mathbb{N}$	$\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
loi uniforme	$\mathcal{U}([\![1, n]\!])$	$k \in [\![1, n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$

Exercice 4.8. Quel est le mode d'une v.a. de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$?

Réponse. La probabilité est $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ est une suite strictement décroissante car $(1-p) < 1$. Le mode, entier de plus haute probabilité, est donc le plus petit entier avec $P(X = n) \neq 0$ à savoir 1.

Exercice 4.9. Soient X et Y deux v.a. indépendantes, de loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètres respectifs p et q. Quelle loi suit la v.a. $Z = \min(X, Y)$?

Réponse. On calcule la fonction de répartition grâce à $P(Z \leq n) = 1 - P(Z > n)$. Un minimum est supérieur à une valeur si et seulement si chaque terme est supérieur, cela permet d'écrire l'évènement $\{Z > n\}$ comme une intersection et d'utiliser l'indépendance de X, Y :

$$P(Z > n) = P(X > n, Y > n) = P(X > n)P(Y > n).$$

Or pour une loi géométrique n utilisant le changement d'indice $l = k - n - 1$:

$$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^n \sum_{l=0}^{\infty} p(1-p)^l = (1-p)^n$$

en utilisant la série géométrique (ou le fait que la somme des probabilités est 1 pour les variables géométriques. De même $P(Y > n) = (1-q)^n$ Donc

$$P(Z > n) = (1-p)^n(1-q)^n = (1-p-q+pq)^n.$$

On voit que la fonction de répartition de Z coïncide avec celle d'une variable $\mathcal{G}(p + q - pq)$, c'est donc la loi de Z.

Exercice 4.10. On lance une piece (non-truquée) n fois au hasard. X désigne la différence entre le nombre de fois qu'on obtient pile et le nombre de fois qu'on obtient face.

1. Calculez l'espérance et l'écart type de X.
2. Trouver $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ t.q. $Y = aX + b$ suit une loi binomiale.

Réponse. Quand on fait la différence entre nombre de pile et nombre de fois face, on compte à chaque fois $X_i = 1$ si on obtient pile et $X_i = -1$ si on obtient face. D'habitude, quand on compte le nombre de piles, on compte $Y_i = 1$ si on obtient pile et $Y_i = 0$ sinon. On remarque que $Y_i = \frac{X_i+1}{2}, X_i = 2Y_i - 1$. La différence voulu est donc $X = \sum_{i=1}^n X_i$ alors que $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ est la variable binomiale habituelle obtenue par somme de variables de Bernoulli indépendantes.

1. Par liénarité et égalité des lois $E(X) = nE(X_i)$. Or $E(X_i) = P(X_i = 1) - P(X_i = -1) = \frac{1}{2}1 + (-1)(1 - \frac{1}{2}) = 0$ donc $E(X) = 0$.
   Par indépendance, $V(X) = nV(X_1)$ Or par homogénéité $V(X_1) = V(2Y_i - 1) = 4V(Y_1) = 4p(1-p)$ avec $p = 1/2$ donc $V(X) = n$.
2. Méthode A, si on a trouvé les formules $X_i = 2Y_i - 1$, on déduit $X = \sum_{i=1}^n 2Y_i - 1 = 2Y - n$ On trouve donc $Y = \frac{X+n}{2}$ soit $a = \frac{1}{2}, b = \frac{n}{2}$.
   Méthode B, On se doute que $Y \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ va être le compte du nombre de 1. On identifie par les formules de l'espérance et de la variance en cherchant $Y \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, si on veut $Y = aX + b$, $V(Y) = a^2V(X)$ Comme $V(Y) = \frac{n}{4}$, on trouve $a = 1/2$; On identifie ensuite b par l'espérance $E(Y) = \frac{E(X)}{2} + b$ donc $b = \frac{n}{2} - \frac{E(X)}{2} = \frac{n}{2}$.

Exercice 4.11. Un candidat se présente à un concours où les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. Le candidat répond au hasard aux questions. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance, sa variance.

Réponse. Si on appelle X_i la réponse du candidat à la question i, comme les réponses sont uniformes, il a $1/4$ de chance de répondre juste. $X_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{4})$. Comme le candidat répond au hasard sur l'espace produit des réponses $\Omega = [\![1, 4]\!]^{20}$, les réponses sont indépendantes, donc la note $S = \sum_{i=1}^{20} X_i$ est la somme de 20 variables de Bernoulli indépendantes, donc $S \sim \mathcal{B}(20, \frac{1}{4})$ Par le cours $E(S) = 20\frac{1}{4} = 5$, $V(S) = 20\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{15}{4}$.

Exercice 4.12. Dans un pot il y a dix billes dont quatre sont marquées avec le chiffre 1, trois avec le chiffre 2, deux avec le chiffre 3 et une avec le chiffre 4. On tire 3 billes au hasard, l'une après l'autre, en remettant chaque fois dans le pot la bille tirée.

1. Déterminez la loi de la variable X qui désigne le nombre de billes avec chiffre 1 ou 2 obtenus.
2. Déterminez la loi de la variable Y qui désigne la somme des chiffres obtenus.

Réponse.

1. Comme les billes sont remises après chaque tirage, l'espace de réalisation $\Omega = \Omega_0^3$ est le produit de l'espace des billes Ω_0 pour le tirage d'une bille. On a la probabilité uniforme sur cet espace produit (tirage au hasard), donc les tirages sont indépendants. Soit $X_i = 1$ si on tire une bille avec les chiffres 1 ou 2 au i-ème tirage. Comme il y a billes numérotées 1 ou 2 : $P(X_i = 1) = \frac{4+3}{10} = \frac{7}{10}$. Les X_i sont des variables de Bernoulli indépendantes donc leur somme (variable comptant le nombre de bille avec chiffre 1 ou 2 est de loi binomiale : $X = X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{7}{10}\right)$.

2. L'exercice est un peu fastidieux, Si on note Y_i la valeur de la i-ème bille tiréé, on a

$$P(Y_i = 1) = \frac{4}{10}, P(Y_i = 2) = \frac{3}{10}, P(Y_i = 3) = \frac{2}{10}, P(Y_i = 4) = \frac{1}{10}.$$

On doit exprimer la loi de $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ pour toutes les valeurs possibles dans $[\![3, 12]\!]$. Par exemple, par indépendance :

$$P(Z = 3) = P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1) = P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1) = \frac{4^3}{10^3} = \frac{64}{1000}.$$

L'évènement $Z = 4$ correspond à avoir exactement une des billes égale à 2. Donc, par union disjointe et indépendance :

$$\begin{aligned} P(Z = 4) &= P(Y_1 = 2)P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1) + P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 2)P(Y_3 = 1) \\ &\quad + P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 2) \\ &= 3P(Y_1 = 2)P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1) = \frac{3.3.4^2}{1000} = \frac{144}{1000}. \end{aligned}$$

On peut procéder ainsi pour toute les valeur, une somme de 5 correspond soit 3 deux des billes égales à 2 et une à 1, ou une égale à 3 et les autres à 1, ainsi, on trouve :

$$P(Z = 5) = 3P(Y_1 = 2)P(Y_2 = 2)P(Y_3 = 1) + 3P(Y_1 = 3)P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1) = \frac{204}{1000}.$$

Tous calculs faits, on obtient la loi suivante (il est vivement conseillé de vérifier que la somme des probabilités trouvées vaut bien 1...) :

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z = k)$	$\frac{64}{1000}$	$\frac{144}{1000}$	$\frac{204}{1000}$	$\frac{219}{1000}$	$\frac{174}{1000}$	$\frac{111}{1000}$	$\frac{56}{1000}$	$\frac{21}{1000}$	$\frac{6}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

Exercice 4.13. (Partiel 2021)

Deux étudiants choisissent au hasard (et indépendamment) chacun un code PIN de 4 chiffres DISTINCTS (parmi les 10 chiffres, ex : 1493 et 9163).

1. Quel est l'espace des réalisations Ω et la probabilité P sur Ω correspondant à l'expérience ?
2. Quelle est la probabilité que les 2 étudiants aient choisi le même code ?
3. Quelle est la probabilité que les 2 codes commencent par le même chiffre ? (ex : 1493 et 1695)

Solution modèle réduit. Supposons qu'au lieu de codes PIN à quatre chiffres choisis parmi $\{0, \dots, 9\}$, on ait des codes MINIPIN à deux lettres choisies parmi $\{A, B, C\}$. Dans ce modèle réduit, l'ensemble des *dix*[1] chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ est donc remplacé par l'ensemble des trois lettres $\{A, B, C\}$. Il va de soi que cet ensemble ne peut pas suffire pour décrire un code MINIPIN et encore moins *deux* codes MINIPIN.

Un code MINIPIN, c'est donc un mot de deux lettres, c'est-à-dire une liste ordonnée de deux lettres. L'énoncé impose que ces lettres soient différentes. Voici l'ensemble de ces mots :

$$\Omega_1 = \{AB, AC, BA, BC, CA, CB\}.$$

1. Un nombre conséquent d'entre vous pensent qu'il y a neuf chiffres de 0 à 9, cela semble improbable.

Le nombre d'éléments de Ω_1 est le nombre d'arrangements de 2 lettres parmi 3, c'est-à-dire :

$$\mathsf{A}_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6.$$

Pour décrire *deux* codes MINIPIN, un pour chaque étudiant, il faut donc... deux codes, entre lesquels on distingue le premier et le deuxième. On veut donc un *couple* de codes MINIPIN, c'est-à-dire un élément du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_1$. La figure 1 donne deux représentations de ce produit cartésien.

CB	(CB, AB)	(CB, AC)	(CB, BA)	(CB, BC)	(CB, CA)	(CB, CB)
CA	(CA, AB)	(CA, AC)	(CA, BA)	(CA, BC)	(CA, CA)	(CA, CB)
BC	(BC, AB)	(BC, AC)	(BC, BA)	(BC, BC)	(BC, CA)	(BC, CB)
BA	(BA, AB)	(BA, AC)	(BA, BA)	(BA, BC)	(BA, CA)	(BA, CB)
AC	(AC, AB)	(AC, AC)	(AC, BA)	(AC, BC)	(AC, CA)	(AC, CB)
AB	(AB, AB)	(AB, AC)	(AB, BA)	(AB, BC)	(AB, CA)	(AB, CB)
ét. 2\ét. 1	AB	AC	BA	BC	CA	CB

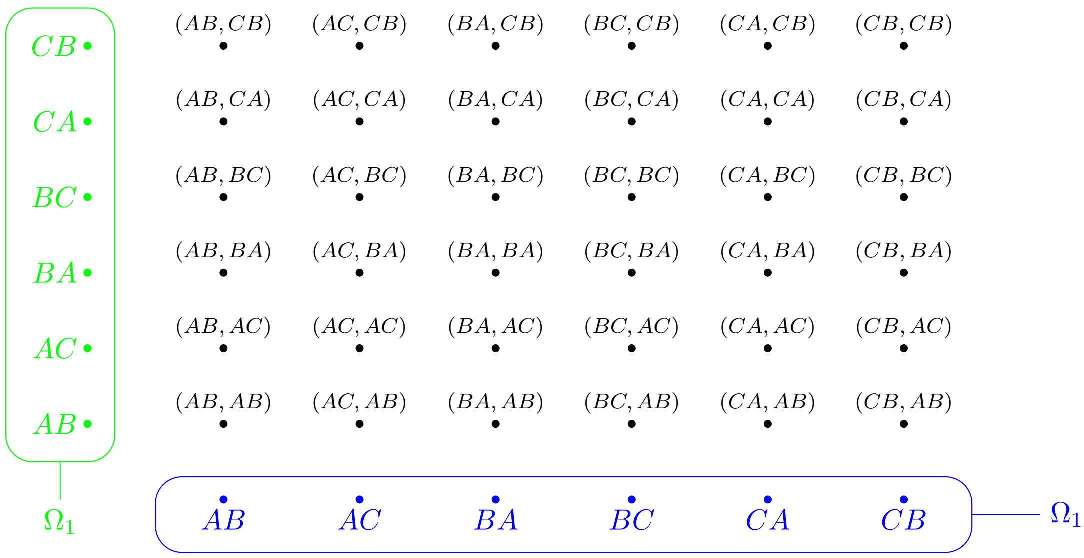

FIGURE 1 – Deux représentations du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_1$

Réponse. 1. Un code PIN est un quadruplet (a, b, c, d), ou, pour simplifier, *abcd*, formé de chiffres distincts : c'est une application de $\{1, 2, 3, 4\}$ (indice qui donne la position du chiffre) vers l'ensemble des chiffres $\{0, 1, \ldots, 9\}$ (l'image de 1 est a, celle de 2 est b, etc.), qui est injective puisqu'un chiffre ne peut pas être répété. **Avec les notations du cours leur ensemble est** $\mathrm{Inj}([\![1, 4]\!], [\![0, 9]\!])$. Autrement dit, c'est un arrangement de 4 chiffres de $\{0, \ldots, 9\}$. Il y en a

$$N = \mathsf{A}_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

Une réalisation est un couple de tels arrangements : Ω est l'ensemble des couples (C_1, C_2) où C_1 et C_2 sont des arrangements de 4 éléments parmi les 10 chiffres $\{0, \ldots, 9\}$. **Avec les notations du cours** $\Omega = \mathrm{Inj}([\![1, 4]\!], [\![0, 9]\!])^2$

Faute d'informations plus précises [2], on munit Ω de la probabilité uniforme. Le cardinal d'un singleton est $\frac{1}{Card(\Omega)} = \frac{1}{N^2}$. La formule pour la probabilité d'un évènement A est

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{Card(A)}{5040^2}$$

2. Il est pourtant plausible que le code « 1234 » sera plus souvent choisi que d'autres...

2. L'événement A : « les deux étudiants ont choisi le même code » est l'ensemble des couples (C, C), où C parcourt l'ensemble des arrangements. Le cardinal de A est $N = \mathsf{A}_{10}^4$ et sa probabilité est :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{5040}.$$

3. L'événement B : « les deux codes commencent par le même chiffre » est l'ensemble des couples $(abcd, ab'c'd')$.

   Choisissons le premier chiffre $a \in \{0, \ldots, 9\}$. Un code $abcd$ est déterminé par un arrangement des trois chiffres bcd à choisir dans $\{0, \ldots, 9\} \setminus \{a\}$: il y en a A_9^3 ; idem pour les codes $ab'c'd'$. Le nombre de couples de codes qui commencent par a est donc $\left(\mathsf{A}_9^3\right)^2$, indépendant de a, et la probabilité de B est :

$$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{10 \times \left(\mathsf{A}_9^3\right)^2}{N^2} = \frac{10 \times (9 \times 8 \times 7)^2}{(10 \times 9 \times 8 \times 7)^2} = \frac{1}{10},$$

   ce qui n'est pas fait pour nous surprendre.

Exercice 4.14. (Partiel 2020) Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 12 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute peut être considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. Soit X le nombre de personnes se présentant au guichet entre 10h et 12h.

1. Calculer la loi de X.
2. Calculer $P(X \leq 118)$.
3. Quelle est l'espérance de la variable X ? Quelle est sa variance ?

Réponse. 1. Soit X le nombre de personnes arrivées durant les deux heures.

   En deux heures, il y a 120 minutes d'arrivées possibles. Soit X_i la variable à valeur dans $\{0, 1\}$, qui vaut 1 si à la i-ème minute un client est arrivé à la poste. Par hypothèse, c'est une variable de Bernoulli $\mathcal{B}(1, 0.1)$ (puisque la probabilité pour qu'une personne se présente donne le paramètre de la variable de Bernoulli p). Le nombre de personnes arrivées est $X = \sum_{k=1}^{120} X_k$ est la somme de 120 variables de Bernoulli indépendantes donc X est de loi binomiale $\mathcal{B}(120, 0.1)$.

2. En considérant l'évènement complémentaire : $P(X \leq 118) = 1 - P(X > 118) = 1 - P(X = 119) - P(X = 120)$.

   Or, en utilisant la loi binomiale $P(X = k) = \binom{120}{k}(0.1)^k(0.9)^{120-k}$, on obtient donc

$$P(X = 120) = (0.1)^{120}$$

   et

$$P(X = 119) = \frac{120!}{119!1!}(0.05)(0.95)^{119} = 120(0.9)(0.1)^{119}.$$

   Ainsi

$$P(X \leq 118) = 1 - 120(0.9)(0.1)^{119} - (0.1)^{120} \simeq 1.$$

3. Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ l'espérance est $\mathbb{E}(X) = np$ et la variance est $V(X) = np(1-p)$. Donc ici on obtient $\mathbb{E}(X) = 120 * 0.1 = 12$ et $V(X) = 120 * 0.1 * 0.9 = 10.8$.