

MODELLI DELLA FISICA MATEMATICA

Annalisa Ori

12 giugno 2023

1 Introduzione: MODELLO SIRS

Consideriamo l'evoluzione di un'epidemia all'interno di una popolazione ospite, di cui il totale di individui sia costante (ed uguale ad N). Supponiamo che la popolazione sia suddivisa nei tre compartimenti: suscettibili S , individui che possono contrarre l'infezione e non sono ancora stati contagiati; infettivi I , coloro che si sono ammalati e che possono contagiare altri; rimossi R , individui guariti (ed immuni) o isolati o deceduti.

Il modello si basa sulle seguenti ipotesi:

- Si considera la popolazione spazialmente omogenea: le variazioni dipendono solo dal tempo e non dalla posizione;
- Si tralasciano le dinamiche demografiche (infatti si suppone il numero di individui costante);
- Non vi è incubazione, si suppone dunque il contagio istantaneo;
- Tutti gli infetti sono ugualmente contagiosi;
- Si assume che l'immunità acquisita sia momentanea, pertanto una percentuale dei rimossi può tornare a far parte dei suscettibili.

L'epidemia può essere descritta dal seguente sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + \nu R \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I - \nu R \end{cases}$$

con β = tasso di infezione; γ = tasso di rimozione; ν = tasso di suscettibilità per chi è già guarito; tutti parametri positivi.

Osservazione: il modello, correttamente, garantisce che il numero di individui totale si mantiene costante, infatti:

$$\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$$

da cui segue: $N(t) := S(t) + I(t) + R(t) = \text{costante}$

ovvero la funzione N è un integrale primo del moto.

Ciò permette di ridurre la dimensione del sistema, considerando solo le variabili S e I , e ricavando R per differenza: $R = N - S - I$.

La dinamica del sistema è allora completamente determinata dalle condizioni iniziali e dal sottosistema SI :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + \nu(N - S - I) \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I \end{cases}$$

Definisco allora il campo vettoriale f associato al sistema, che verrà poi richiamato in seguito.

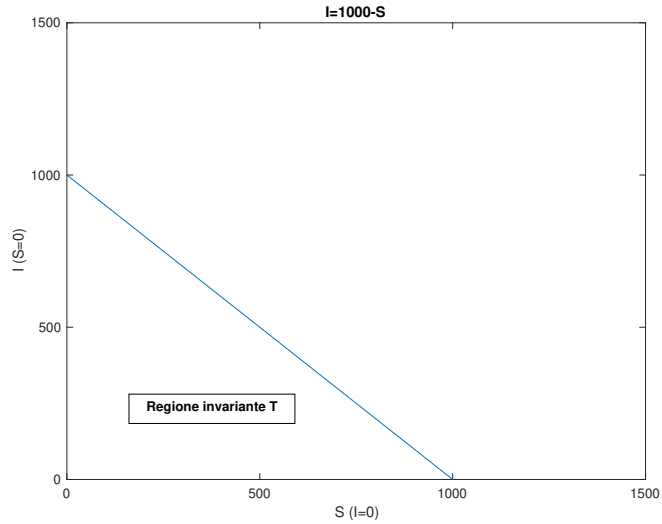
$$\begin{cases} f_1 = -\beta SI + \nu(N - S - I) \\ f_2 = \beta SI - \gamma I \end{cases}$$

2 Consistenza del modello

Poichè, come precedentemente introdotto, S , I e R rappresentano un numero di individui, e in quanto tali non potranno mai assumere valori negativi, occorre dimostrare che partendo da valori iniziali positivi o nulli, le tre variabili si manterranno positive ad ogni istante di tempo considerato.

Tesi: $S(t) \geq 0 \ \forall t$, $I(t) \geq 0 \ \forall t$ a partire da $S(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$.

Posso utilizzare il teorema della regione invariante.



Considero la regione T, delimitata dall'asse S (di equazione $I=0$), dall'asse I (di equazione $S=0$), e dalla retta di equazione $I=N-S$.

Essa soddisfa le ipotesi del teorema della trapping reason:

- T è un sottoinsieme di R^2 , limitato, con frontiera regolare a tratti.
- $f \in C^1(T)$
- Detta $\underline{\eta}(\underline{x})$ la normale esterna a \underline{x} punto regolare per $\partial(T)$, se $\underline{f} \cdot \underline{\eta} \leq 0$ quasi ovunque in $\partial(T)$

allora posso concludere che T è invariante per le traiettorie, nel senso che le traiettorie che partono in T, se raggiungessero la frontiera di T, non uscirebbero da questa regione, ma al più si muoverebbero sulla tangente.

Dimostro l'ultima condizione

- Sull'asse I,

$$S=0 \rightarrow \dot{S} = \nu(N - I) = f_1 \geq 0$$

perchè infatti ν parametro positivo, mentre $N \geq I$ per definizione, dunque è chiaro che la componente orizzontale del campo punta verso destra, cioè verso la regione T.

- Sull'asse S,

$$I=0 \rightarrow \dot{I} = 0 \rightarrow I = \text{costante} = \text{soluzione}$$

\rightarrow l'asse S viene percorso con legge

$$\dot{S} = \nu(N - S) = \nu N - \nu S$$

e in quanto traiettoria non può essere attraversato.

- Parametrizzo la retta $I = N - S$ con $(S, N - S)$, con $S \in [0, N]$. Il versore normale all'ipotenusa sarà $\underline{\eta} = (1, 1)$.
- $$\rightarrow \underline{f} \cdot \underline{\eta} = \underline{f}_1(S, N - S) + \underline{f}_2(S, N - S) = -\beta S(N - S) + \nu(N - S - (N - S)) + \beta S(N - S) - \gamma(N - S) = -\gamma(N - S) \leq 0$$

Ho dimostrato dunque la positività delle soluzioni.

3 Equilibri

Gli equilibri sono tutti e soli i punti che annullano il campo vettoriale \underline{f} associato al sistema, così definito :

$$\begin{cases} f_1 = -\beta SI + \nu(N - S - I) \\ f_2 = \beta SI - \gamma I \end{cases}$$

Si osserva annullando la seconda componente:

$$f_2 = 0 \iff (\beta S - \gamma) I = 0 \iff I = 0 \text{ oppure } S = \gamma/\beta$$

Sostituendo nella prima equazione si ricavano i due equilibri:

- $I = 0 \rightarrow E_1 = (N, 0)$;
(situazione in cui tutta la popolazione è suscettibile, mentre il numero degli individui infetti è nullo.)
- $S = \frac{\gamma}{\beta} \rightarrow E_2 = (\frac{\gamma}{\beta}, \frac{(N - \frac{\gamma}{\beta})\nu}{\gamma + \nu})$

esso esiste solamente se $N > \frac{\gamma}{\beta}$ e rappresenta una situazione di equilibrio endemica in cui coesistono suscettibili e infetti.

Nel caso particolare in cui $N = \frac{\gamma}{\beta}$, E_1 coincide con E_2 .

4 Isocline e direzione del campo

Per uno studio qualitativo più approfondito, cerchiamo le isocline: curve su cui si annulla una delle componenti del campo vettoriale $\underline{f}(\underline{x})$ che definisce il sistema.

- 1-isoclina: (x_1, x_2) tali che $f_1(x_1, x_2) = 0$
ovvero il luogo dei punti a tangente verticale.

$$f_1 = 0 \leftrightarrow I = \frac{\nu(N - S)}{\beta S + \nu}$$

$$\text{E si ha } f_1 \geq 0 \leftrightarrow I \leq \frac{\nu(N - S)}{\beta S + \nu}$$

Il campo ha allora la prima componente positiva quando calcolato al di sotto dell'iperbole che rappresenta la 1-isoclina, mentre ha prima componente negativa se valutato al di sopra.

- 2-isoclina: (x_1, x_2) tali che $f_2(x_1, x_2) = 0$
ossia il luogo dei punti a tangente orizzontale.

$$f_2 = 0 \leftrightarrow I = 0 \text{ oppure } S = \frac{\gamma}{\beta}$$

In particolare nel caso in cui $I = 0 \rightarrow f_2 \geq 0$.

$$\text{Mentre se } I \neq 0 \rightarrow f_2 \geq \frac{\gamma}{\beta} \leftrightarrow S \geq \frac{\gamma}{\beta}$$

Il campo ha allora la seconda componente positiva sull'asse S e a destra della retta verticale che rappresenta la 2-isoclina.

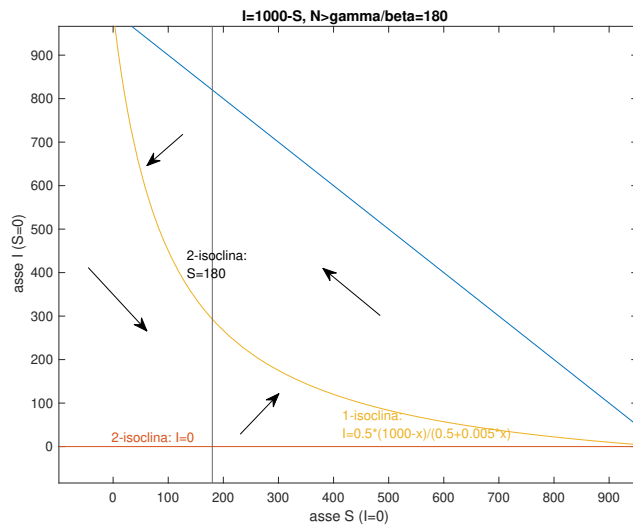
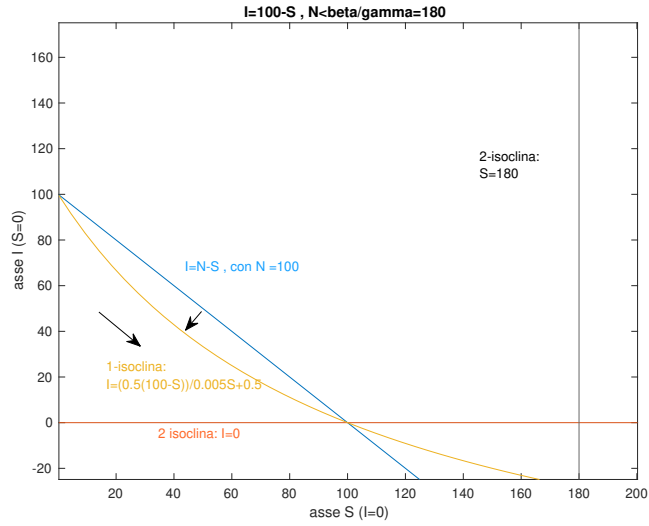
Osservazione 1: I punti di equilibrio precedentemente trovati sono, correttamente, i punti in cui si intersecano le due isocline.

Osservazione 2:

Nel caso in cui $N < \frac{\gamma}{\beta}$, la 2-isoclina $S = \frac{\gamma}{\beta}$ sta al di fuori della regione T.

Dunque in questo caso, la seconda componente del campo sarebbe sempre negativa. Per avere un ipotetico ciclo, dovrei avere quattro direzioni possibili per il campo vettoriale, condizione che in questo caso non può verificarsi.

Dallo studio della direzione del campo vettoriale posso allora escludere la presenza di cicli nel caso in cui $N < \frac{\gamma}{\beta}$.



Nel caso in cui $N > \frac{\gamma}{\beta}$, studiando la direzione del campo vettoriale, si vede che la rotazione è antioraria intorno all'equilibrio E_2 , che è infatti l'intersezione dell'iperbole in giallo con la retta verticale $S = \frac{\gamma}{\beta}$. Non è dunque esclusa per ora la presenza di cicli o spirali.

5 Stabilità degli equilibri

Valuto la matrice Jacobiana del campo vettoriale f nei punti equilibri per caratterizzarne la stabilità, utilizzando quindi il I teorema di Liapunov.

$$J(S,I) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(S,I) \\ \nabla f_2(S,I) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta I - \nu & -\beta S - \nu \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{pmatrix}$$

- Studiamo l'equilibrio $E_1 = (N, 0)$.

$$J(N,0) = \begin{pmatrix} -\nu & -\beta N - \nu \\ 0 & \beta N - \gamma \end{pmatrix}$$

Dal calcolo delle radici del polinomio caratteristico trovo due autovalori:

$\lambda_1 = -\nu$ e $\lambda_2 = \beta N - \gamma$.

Il primo, λ_1 , è sempre negativo;

Il secondo, $\lambda_2 < 0 \iff N < \frac{\gamma}{\beta}$

Allora posso concludere che

* se $N < \frac{\gamma}{\beta}$, E_1 è un equilibrio asintoticamente stabile, e in particolare, localmente, è un nodo a due tangenti.

* se $N > \frac{\gamma}{\beta}$, ottengo il determinante dello Jacobiano negativo e autovalori discordi, allora E_1 è instabile, in particolare un punto sella.

- Studiamo l'equilibrio $E_2 = (\frac{\gamma}{\beta}, \frac{(N - \frac{\gamma}{\beta})\nu}{\gamma + \nu})$

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -\nu \frac{N\beta + \nu}{(\beta N - \gamma)\nu} & -\gamma - \nu \\ \frac{(\beta N - \gamma)\nu}{\gamma + \nu} & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè l'equilibrio E_2 esiste solo quando $N > \frac{\gamma}{\beta}$, e per tali valori di N , risulta allora la traccia negativa e il determinante positivo, dal criterio traccia-determinante, posso concludere che, quando esiste, l'equilibrio E_2 è stabile asintoticamente. Visualizziamo l'andamento delle traiettorie vicino all'equilibrio E_2 . Poichè gli autovalori della matrice $J(E_2)$, sono le soluzioni dell'equazione:

$$p(\lambda) = (\lambda)^2 - tr(J(E_2))\lambda + \det(J(E_2))$$

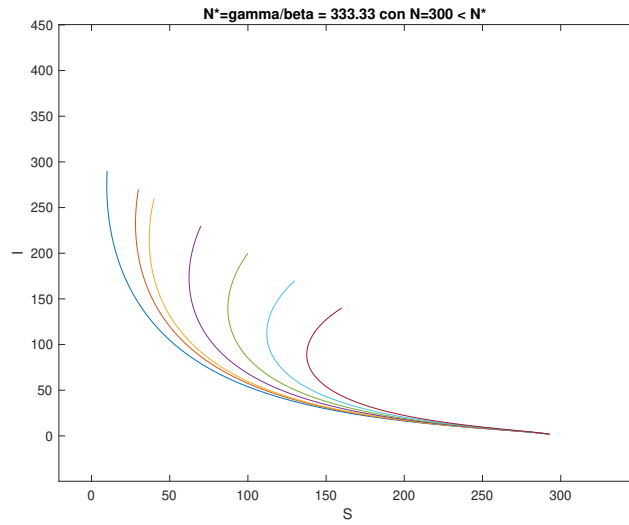
$$\text{si ha: } \lambda_{1,2} = (tr(J(E_2)) \pm \sqrt{\Delta})/2$$

Allora si ha $\Delta = (\frac{\nu(N\beta + \nu)}{\gamma + \nu})^2 - 4(N\beta - \gamma)\nu$.

Perciò se $\Delta < 0 \rightarrow \lambda_1$ e λ_2 sono complessi coniugati $\rightarrow E_2$ è un fuoco a spirale asintoticamente stabile.

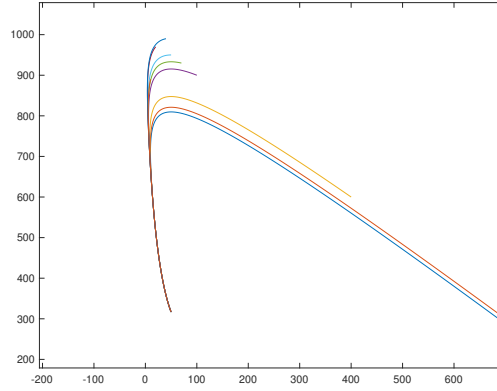
Mentre se $\Delta > 0 \rightarrow \lambda_1$ e λ_2 sono reali negativi distinti $\rightarrow E_2$ è un nodo a due tangenti asintoticamente stabile.

Ritratto di fase nel caso in cui $\nu = 0.5, \beta = 0.003, \gamma = 1, N = 300$ dunque $N < \frac{\gamma}{\beta} = 333.33$. In questo caso l'equilibrio E_1 , cui tendono le traiettorie, risulta essere $(N, 0) = (300, 0)$.



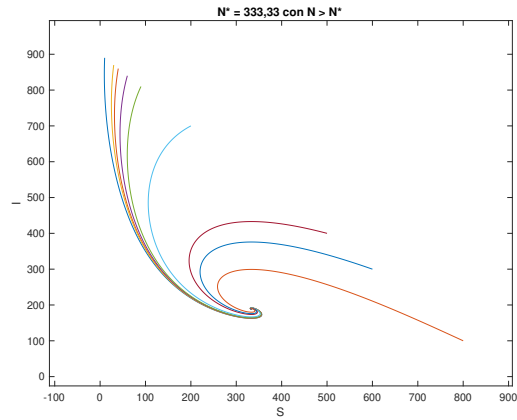
Ritratto di fase nel caso in cui $\nu = 0.5, \beta = 0.02, \gamma = 1, N = 1000$ dunque $N > \frac{\gamma}{\beta} = 50$.

In questo caso $\Delta > 0$, dunque l'equilibrio $E_2 = (\frac{\gamma}{\beta}, \frac{(N - \frac{\gamma}{\beta})\nu}{\gamma + \nu}) = (50, 316.6)$ è un nodo a due tangenti asintoticamente stabile.



Ritratto di fase nel caso in cui $\nu = 0.5, \beta = 0.003, \gamma = 1, N = 900$ dunque $N > \frac{\gamma}{\beta} = 333.33$.

In questo caso $\Delta < 0$, dunque l'equilibrio $E_2 = (\frac{\gamma}{\beta}, \frac{(N - \frac{\gamma}{\beta})\nu}{\gamma + \nu}) = (333, 189)$ risulta un fuoco a spirale asintoticamente stabile.



6 Esclusione della presenza di cicli

Abbiamo già visto che nel caso in cui $N < \frac{\gamma}{\beta}$, la direzione del campo esclude la presenza di cicli.

Per il caso generale si può utilizzare invece il criterio di Dulac. Poichè T è un sottoinsieme di R^2 semplicemente connesso, basta trovare una funzione

$\rho : T \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho \in C^1(T)$ tale che $\text{div}(\rho f)$ ha segno costante su T .

Definisco: $\rho(S, I) = \frac{1}{I}$

Si ha: $\text{div}(\rho f) = -\beta - \frac{\nu}{I} < 0 \quad \forall (S, I) \in T$

cioè, $\text{div}(\rho f)$ ha segno costante in T .

Posso concludere allora che non esistono cicli interamente contenuti in T .

7 Biforcazioni

Finora abbiamo trovato che:

- per $N < N^* = \frac{\gamma}{\beta}$ esiste ed è unico l'equilibrio E_1 asintoticamente stabile.
- per $N > N^* = \frac{\gamma}{\beta}$ E_1 è un equilibrio instabile mentre E_2 risulta essere asintoticamente stabile.

Dunque N^* risulta essere un valore critico:

le soluzioni del sistema per $N < N^*$ e per $N > N^*$ non sono topologicamente equivalenti: cambia il numero di equilibri e la loro stabilità, dunque anche le traiettorie di fase.

Tesi: (E_1, N^*) è un punto di biforcazione stazionaria semplice.

1. $\underline{f}(E_1, N^*) = 0$ per definizione, in quanto E_1 è un punto di equilibrio.

2. $\det J \underline{f}(E_1, N^*) = 0$ infatti risulta

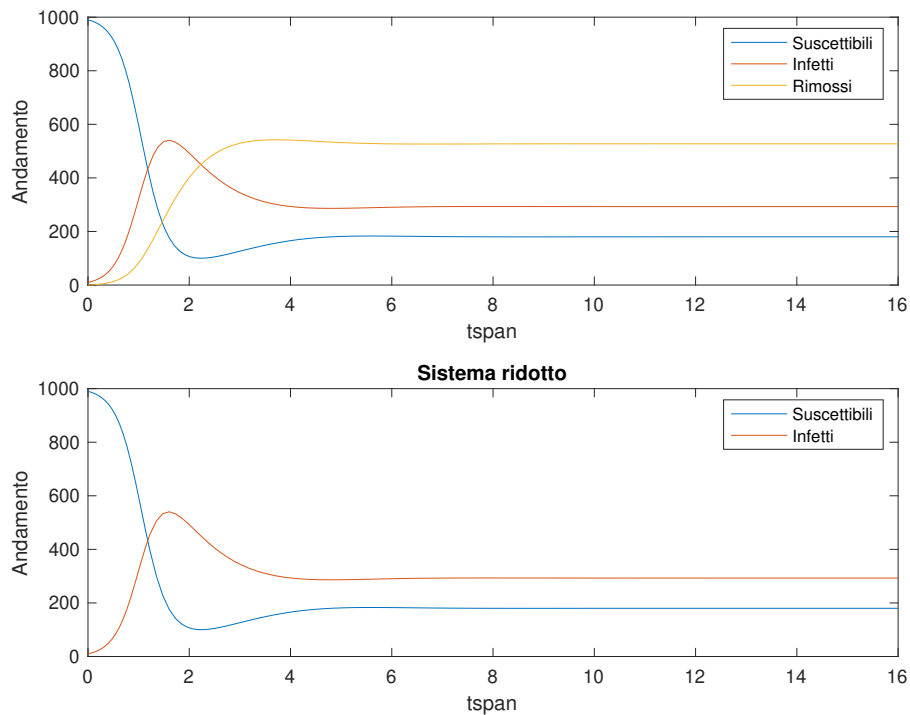
$$J \underline{f}(E_1, N^*) = \begin{pmatrix} -\nu & -\gamma - \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $J \underline{f}(E_1, N^*)$ ha l'autovalore semplice $\lambda = 0$ e questo implica, come sappiamo, che $\text{rg}(J \underline{f}(E_1, N^*)) = 1$.

4. $\frac{\partial f}{\partial N^*} = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(J \underline{f}(E_1, N^*) \quad \frac{\partial f}{\partial N^*} \right)$ ha ancora rango 1.

8 Simulazione numerica

Dai dati disponibili per una malattia con una popolazione di riferimento di $N = 1000$ risulta che $v = 0.5$; $\beta = 0.005$; $\gamma = 0.9$; simulare numericamente l'andamento delle classi S , I , R con valori iniziali $S(0) = 990$, $I(0) = 10$, $R(0) = 0$. Gli infettivi presentano un picco? In caso affermativo stimare il tempo t_M in cui si presenta tale picco, nel caso il tempo sia misurato in settimane e si volessero allarmare gli ospedali presenti sul territorio.



Nel primo grafico è rappresentata la soluzione del sistema differenziale completo, dunque si può osservare l'andamento nel tempo del numero di individui suscettibili, infetti e rimossi.

Supponendo che il tempo sia misurato in settimane, si vede che il numero di infetti presenta un picco dopo circa 2 settimane dal tempo iniziale considerato. Nel frattempo decrescono i suscettibili: coloro che appunto in questo lasso di tempo si ammalano, da suscettibili diventano infetti. Sempre considerando le prime 2 settimane dall'inizio dell'epidemia, si nota che l'andamento dei rimossi è simile a quello degli infetti ma traslato nel tempo: gli individui infatti prima si ammalano, poi successivamente guariscono.

Dopo circa 3 settimane dal tempo zero, si osserva una 'stabilizzazione' del numero di individui nei tre compartimenti. Anche i suscettibili presentano una crescita: dovuta al fatto che coloro che si sono ammalati e poi guariti, ritornano contagiabili una volta persa l'immunità.

Dopo circa già 6 settimane, si osserva che i numeri di individui suscettibili, infetti e rimossi è ormai stabile, e tutti e tre non nulli.

Nel secondo grafico è riportata invece la soluzione del sistema differenziale ridotto. Dallo studio di quanto raffigurato, si riconferma il picco degli infetti dopo circa 2 settimane dall'inizio della pandemia, e una stabilizzazione, anche in questo caso con coesistenza di suscettibili e infetti, dopo circa 6 settimane.