

# Analisi di modelli State Space con KFAS

## Introduzione

I modelli in **forma state space** consentono di rappresentare una serie temporale tramite una **variabile di stato** latente che evolve nel tempo e un'**equazione di osservazione** che lega i dati osservati alla variabile di stato con aggiunta di rumore.

In questo documento si utilizza il pacchetto **KFAS** per stimare modelli state space sulla serie annuale delle portate del Nilo ([Nile](#)).

Solitamente alcuni dei parametri dei nostri modelli in forma state space sono ignoti e devono essere stimati. Se l'ipotesi di gaussianità dei disturbi del sistema è plausibile allora il filtro di Kalman consente di calcolare la verosimiglianza per qualunque set di valori dei parametri da stimare. Ma massimizzare la (log) verosimiglianza gaussiana anche quando i dati non sono normali porta a delle stime il cui comportamento asintotico è comunque noto (sotto condizioni di regolarità). Si parla di stime di quasi massima verosimiglianza (QML).

## Forma State Space

```
library(KFAS)
modello1 <- SSMModel(Nile~0+SSMtrend(1, NA), H = NA)
fit1 <- fitSSM(modello1, rep(log(var(diff(Nile))), 2))
fit1$optim.out$convergence
```

Andiamo a stimare un modello con random walk più rumore, in cui:

- **Equazione di osservazione:**

$$y_t = \alpha_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, H)$$

- **Equazione di stato** (trend locale di ordine 1):

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + \eta_t, \eta_t \sim N(0, Q)$$

Il modello ha dunque due varianze da stimare:

`SSMtrend(1, NA)` indica un trend locale con varianza ignota (`NA`).

`H = NA` specifica che anche la varianza del rumore di osservazione è ignota.

## Stime di massima verosimiglianza

### Primo metodo: funzione logLik()

```
# Creo una funzione che stima le varianze del modello LLT + WN

fit_RW_plus_WN <- function(model, pars.init = rep(log(var(diff(model$y))), 2))
```

```

objective <- function(pars) {
model$Q[1, 1, 1] <- exp(pars[1])
model$H[1, 1, 1] <- exp(pars[2])
-logLik(model) # cambio segno perche optim() minimizza
}

# Minimizziamo la funzione obiettivo (usando l'algoritmo BFGS)
# e chiediamo di calcolare l'hessiana nel punto di massimo

optout <- optim(pars.init, objective, method = "BFGS", hessian = TRUE)

estim <- exp(optout$par)
#stima di massima verosimiglianza delle varianze

mI<- solve(optout$hessian)
#inversa della stima dell'info. di Fisher

mV <- diag(estim) %*% mI %*% diag(estim)
# metodo delta in azione

sterr <- sqrt(diag(mV))
# vettore di errori standard

# Diamo i nomi ai parametri
names(estim) <- names(sterr) <-
colnames(mV) <- rownames(mV) <- c("var(eta)", "var(eps)")

list(parameters = estim, stderr = sterr, cov = mV, logLik = -optout$value, opti
}

fit1 <- fit_RW_plus_WN(modello1)

# Stima delle varianze e relativi standard error
cbind(param = fit1$parameters, stderr = fit1$stderr)

##           param  stderr
## var(eta)  1469.163 1280.358
## var(eps)  15098.651 3145.560

# Valore della log-verosimiglianza al suo massimo
fit1$logLik
#[1] -632.5456

# Numero di chiamate alla funzione objective() fatte da optim()
fit1$optim.out$counts
## function gradient
## 36 10

# Codice di convergenza di optim(): se è zero l'ottimizzazione è andata a buon
fit1$optim.out$convergence
#[1] 0

```

## Secondo metodo: funzione fitSSM()

```
updt <- function(pars, model) {
  model$Q[1, 1, 1] <- exp(pars[1])
  model$H[1, 1, 1] <- exp(pars[2])
  model
}
fit3 <- fitSSM(modello1, rep(log(var(diff(Nile)))), 2), updt)

# Controlliamo la convergenza dell'ottimizzazione:
fit3$optim.out$convergence
# [1] 0

# Vediamo le stime nelle matrici
fit3$model$Q
## , , 1
##
## [,1]
## [1,] 1466.32
fit3$model$H
## , , 1
##
## [,1]
## [1,] 15098.18
```

Effettivamente le stime sono quasi identiche a quelle ottenute col primo metodo. Se vogliamo calcolare gli errori standard delle stime possiamo usare il parametro formale `hessian = TRUE` che verrà passato a `optim()`.

```
fit3 <- fitSSM(modello1, rep(log(var(diff(Nile)))), 2), updt, hessian = TRUE)
V <- solve(fit3$optim.out$hessian)
GVG <- diag(exp(fit3$optim.out$par)) %*% V %*% diag(exp(fit3$optim.out$par))
stderr <- sqrt(diag(GVG))
cbind(param = exp(fit3$optim.out$par), stderr=stderr)

##          param      stderr
## [1,] 1466.32 1279.011
## [2,] 15098.18 3145.357
```

## Filtering e smoothing

Una volta stimati i parametri ignoti del modello in forma state space, è naturale volere usare il modello per prevedere le serie storiche, fare inferenza sulle loro componenti e infine diagnosticare la presenza di shock o cambiamenti strutturali nella serie.

Per ottenere stime ottimali delle componenti latenti utilizziamo lo **smoothing di Kalman**:

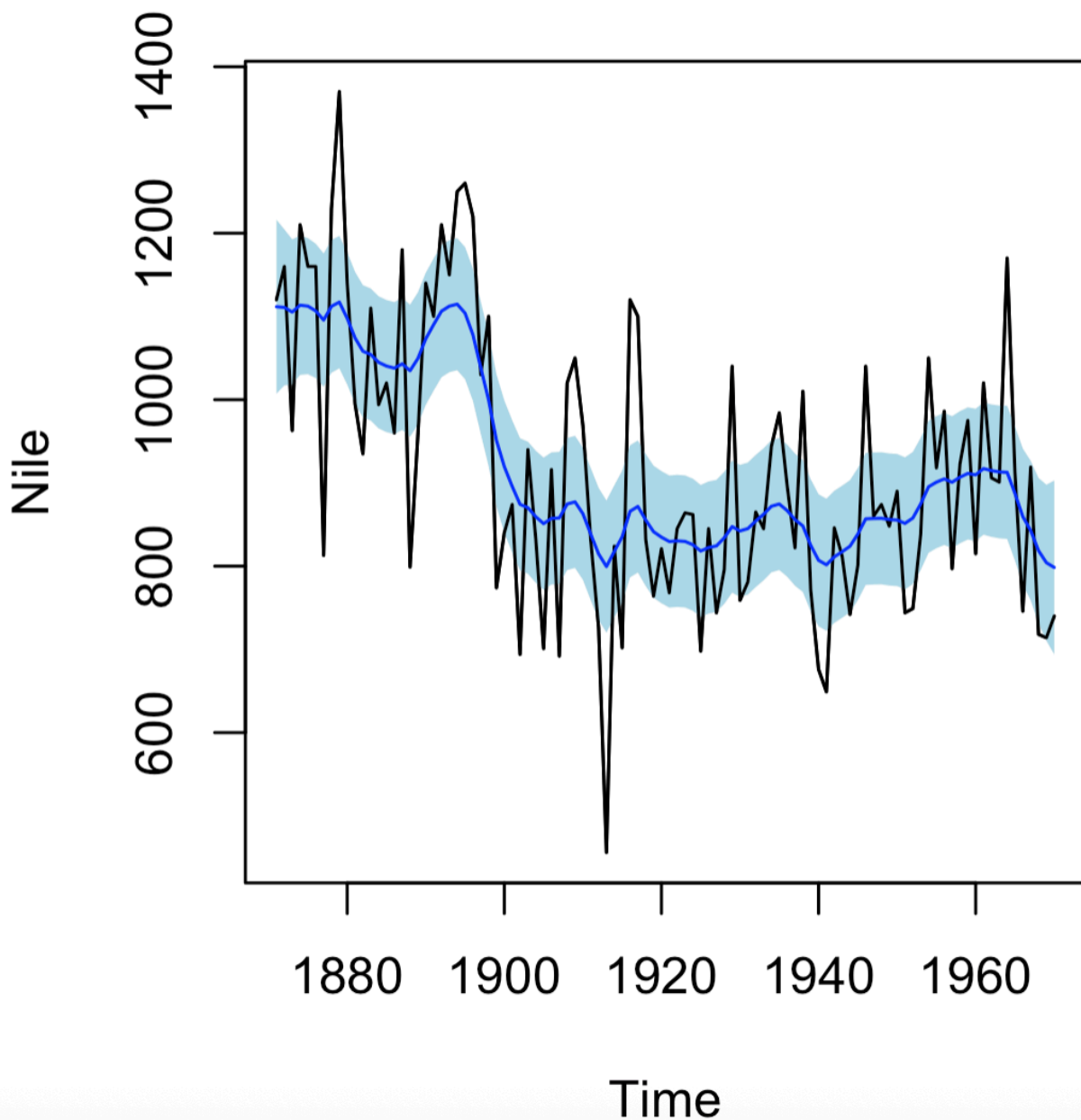
```
# Passo lo smoother di stato e disturbi
smo1 <- KFS(fit1$model, smoothing = c("state", "disturbance"))
```

```
plot(Nile) # Grafico della serie Nile

lines(smo1$alphahat[, 1], col = "blue")
# Aggiungo lo smoother del livello
```

Proviamo anche ad aggiungere le bande di confidenza (al 90%) dello smoother.

```
plot(Nile)
polygon(c(1871:1970, 1970:1871), c(smo1$alphahat[, 1]+qnorm(.95)*sqrt(smo1$V[1, 1]),
col = "lightblue", border = FALSE)
lines(Nile)
lines(smo1$alphahat[, 1], col = "blue")
```

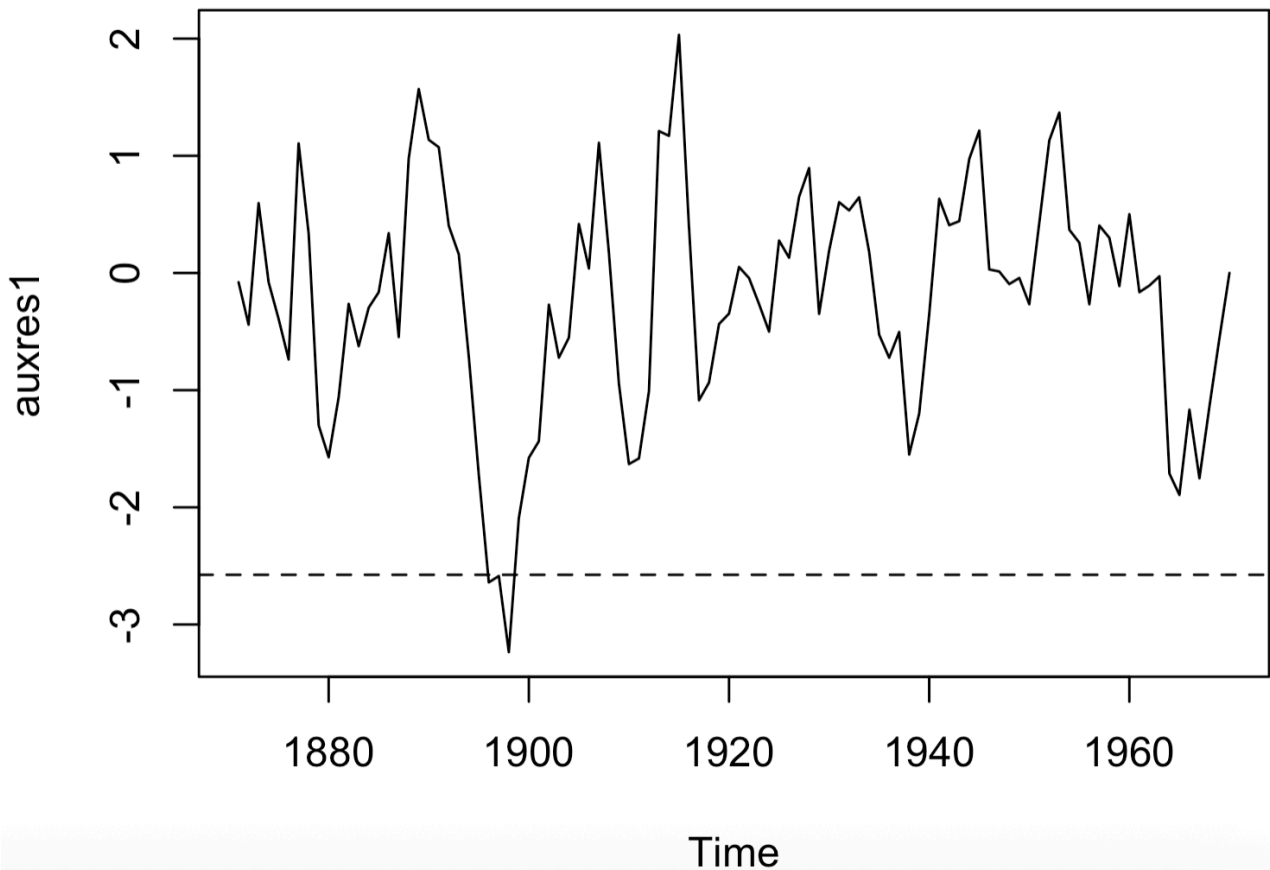


Usiamo i residui standardizzati per capire se vi è qualche shock estremo sui disturbi del random walk (questi comportano bruschi cambi di livello permanenti).

```
auxres1 <- rstandard(smo1, type = "state")
# Calcolo residui ausiliari
```

```
plot(auxres1)
# Grafico residui ausiliari

abline(h = c(qnorm(0.005), qnorm(0.995)), lty = 2) # Bande all'1%
```



Sembra che verso la fine del secolo XIX vi sia un repentino salto verso il basso.

```
time(auxres1)[which.min(auxres1)]
## [1] 1898
```

Il valore più estremo è quello del 1899, che si manifesta sulla serie storica nel 1899. Infatti, si rammenta che KFAS usa la forma  $\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t$  e quindi uno shock al tempo  $t$  si manifesta su  $\mu$ , e quindi su  $y$ , al tempo  $t+1$ .

Possiamo modificare il modello in modo da introdurre con un regressore un salto nel livello al tempo  $t=1899$ .

```
# Creazione variabile scalino
step <- Nile
step[] <- 0
window(step, start = 1899) <- 1
# Creazione forma state space e stima
modello2 <- SSMModel(Nile~0+step+SSMtrend(1, NA), H = NA)
fit2 <- fitSSM(modello2, rep(log(var(diff(Nile))), 2))
cat("Convergence code =", fit2$optim.out$convergence)
```

```
## Convergence code = 0
round(exp(fit2$optim.out$par), 3)
## [1] 0.001 16302.228
```

La varianza del disturbo del random walk è ora nulla e quindi il livello rimane costante. Pare che il cambio di livello repentino del 1899 assorba tutti i movimenti della componente livello. Il resto della varianza è dovuta al rumore di osservazione.

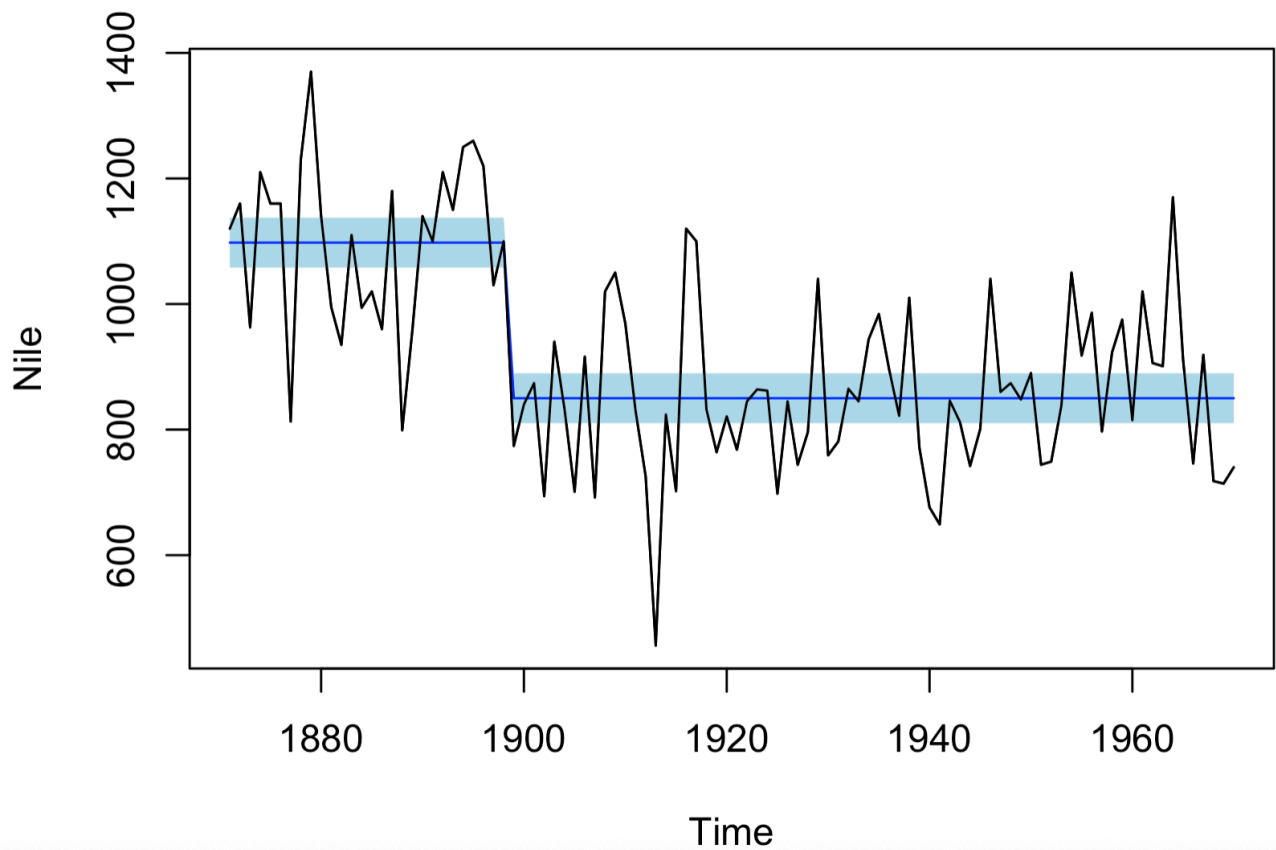
Testiamo ora con una statistica t se il cambio di livello del 1899 è statisticamente nullo.

```
smo2 <- KFS(fit2$model, smoothing = c("state", "disturbance", "signal","mean")
ttest <- smo2$alphahat[length(Nile), 1] / sqrt(smo2$V[1, 1, length(Nile)])
pvalue <- pnorm(-abs(ttest))*2
round(rbind(tstat=ttest, pvalue=pvalue), 4)

## step
## tstat -8.7132
## pvalue 0.0000
```

Il salto è significativo a qualunque livello usuale. Sovrapponiamo ora il grafico della serie Nile con la somma di livello e coefficiente\*step.

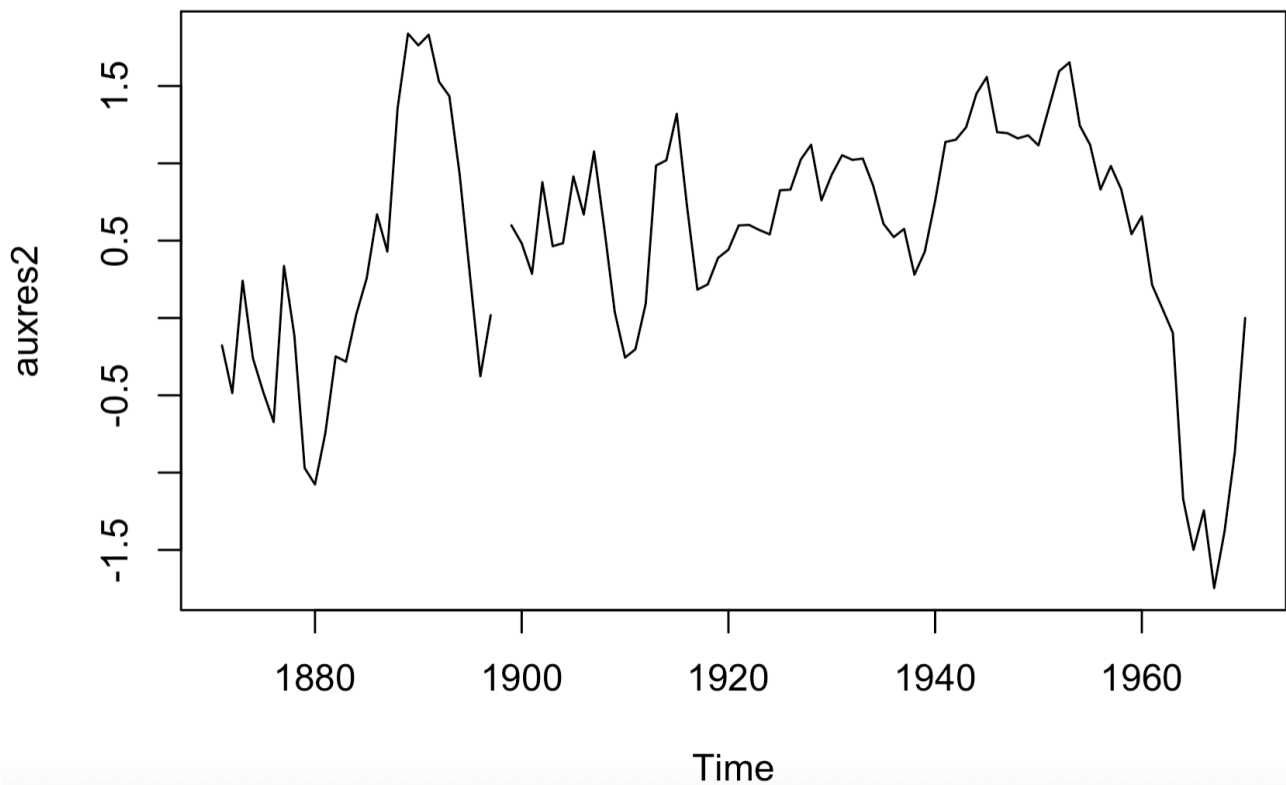
```
# Creo variabile coeff_step*step + level
lvl_jump <- smo2$alphahat[, "step"]*step + smo2$alphahat[, "level"]
plot(Nile)
polygon(c(1871:1970, 1970:1871), c(lvl_jump + qnorm(.95)*sqrt(smo2$V[2, 2, ]),
col = "lightblue", border = FALSE)
lines(lvl_jump, col = "blue")
lines(Nile)
```



Il grafico mostra chiaramente il cambio di regime dal 1899 in poi.

Proviamo a vedere i residui ausiliari del livello in questo modello.

```
auxres2 <- rstandard(smo2, type = "state")  
plot(auxres2)  
abline(h = qnorm(c(0.005, 0.995)), lty = 2)
```

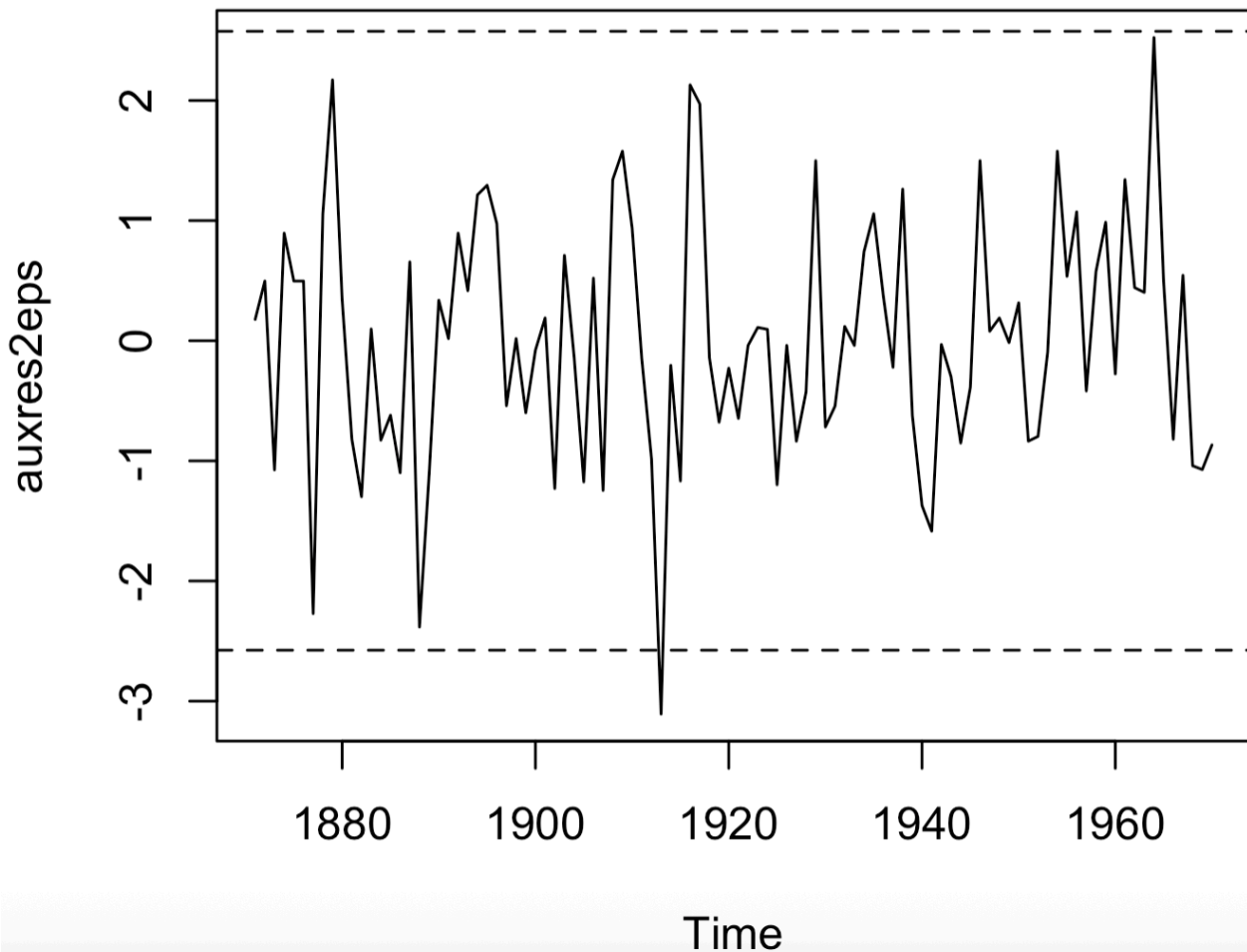


Ora non vi sono disturbi che eccedono i valore soglia che abbiamo fissato  $(-2.58, 2.58)$ , cioè valori nell'1% delle code. Il modello con scalino cattura bene la dinamica del livello.

Tramite i residui standardizzati dell'errore di osservazione possiamo anche individuare eventuali outliers additivi.

```
auxres2eps <- rstandard(smo2, type = "pearson")  
plot(auxres2eps)  
abline(h = qnorm(c(0.005, 0.995)), lty = 2)
```





Vi è un solo valore che eccede le bande di confidenza al 99%. Tuttavia, essendovi 100 residui ausiliari, il risultato è atteso (sotto l'ipotesi nulla che i residui ausiliari siano normali standard un valore ogni 100 in media eccede le bande di confidenza al 99%).

## Conclusioni

L'analisi svolta sui dati delle portate annuali del Nilo utilizzando modelli in forma state space ha permesso di cogliere aspetti importanti della dinamica della serie e di migliorare la comprensione delle sue componenti latenti. In particolare, attraverso la stima con il pacchetto **KFAS** e l'applicazione del filtro e smoother di Kalman, si sono tratte le seguenti conclusioni:

### 1. Adeguatezza del modello local level con rumore di osservazione

Il modello iniziale, un **random walk con rumore bianco additivo**, è risultato in grado di rappresentare la serie temporale dal punto di vista generale, separando una componente di livello latente che evolve nel tempo da una componente di rumore di osservazione. Le stime delle varianze ottenute tramite massima verosimiglianza riflettono una forte variabilità sia nella dinamica del livello sia nel rumore di osservazione.

Tuttavia, l'analisi dei residui standardizzati di stato ha evidenziato un'anomalia significativa: uno shock improvviso e marcato alla fine del XIX secolo (intorno al 1899) che il modello base non era in grado di spiegare con gradualità. Ciò si traduce in un residuo estremo oltre le soglie di significatività, indice di un cambio strutturale.

## 2. Identificazione e modellazione del cambio strutturale nel 1899

Per gestire questa evidenza, è stata introdotta una variabile dummy (scalino) che attiva un cambiamento permanente nel livello della serie a partire dal 1899. Questo approccio consente di modellare esplicitamente un **cambio di regime**: un salto netto nel livello che non viene più interpretato come un semplice shock temporaneo ma come una modifica stabile del sistema.

L'inserimento di questo regressore ha portato a un modello più parsimonioso e interpretabile, dove la varianza del disturbo del random walk diventa trascurabile, segno che la dinamica del livello è sostanzialmente costante dopo il salto, e la variabilità residua è attribuibile principalmente al rumore di osservazione.

## 3. Significatività statistica e implicazioni pratiche

Il test t sul coefficiente associato al salto ha confermato la significatività del cambio di livello con un p-value praticamente nullo. Ciò indica con elevata sicurezza statistica che l'evento del 1899 ha causato una rottura strutturale nel regime del Nilo, presumibilmente legata a fenomeni naturali, climatici o antropici di lungo termine.

Questo risultato sottolinea l'importanza di includere nei modelli componenti che permettano di catturare eventi eccezionali e cambiamenti di regime, fondamentali per una corretta rappresentazione e previsione della serie.

## 4. Validazione diagnostica e qualità del modello migliorato

L'analisi dei residui ausiliari standardizzati, sia di stato sia di osservazione, ha mostrato che nel modello con scalino:

- Non si osservano più residui di stato estremi, suggerendo che tutte le variazioni importanti del livello sono state adeguatamente modellate.
- I residui di osservazione sono compatibili con l'ipotesi di rumore bianco normale, con solo pochi outlier attesi in base alla dimensione del campione.

Questa diagnostica finale conferma che il modello con salto strutturale è ben calibrato e più adatto a rappresentare la dinamica della serie storica.