# I/ 1) Une force centrale et conservative

Pour une force centrale conservative : $\vec{F}\cdot\vec{d\ell} = \vec{F}\cdot\vec{dr} = F.dr$

$\Rightarrow E_p(r,\theta,\varphi) = E_p(r)$

Si $F>0$ : La force éloigne l'objet de O, F est répulsive
$E_p \searrow$ avec r.

Si $F<0$ : ——— attire ——— vers ——— attractive
$E_p \nearrow$ avec r.

## 2) Interaction entre 2 masses ponctuelles

Force de gravitation : $\vec{F}_{1/2} = -\dfrac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12}$

$\mathcal{G} = 6{,}67\times10^{-11}\,m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

$F<0$ : La force est ~~a~~ attractive. (pas de masse négative)

La masse gravitationnelle utilisée est la même que la masse inerte du PFD : $m_{2\,inerte}\,\vec{a} = -\dfrac{\mathcal{G}}{r^2} m_{1\,grave}\, m_{2\,grave}\, \vec{e}_{12}$

En particulier pour la Terre, un corps à sa surface vérifie : $m_i\vec{a} = m_g\vec{g}$

avec $g = \mathcal{G}\dfrac{M_T}{R_T^2}$

Donc $a = \dfrac{m_g}{m_i}g$

Les expériences montrent $\dfrac{m_g}{m_i} = 1{,}0000 \pm 10^{-12}$

VIDEO

La chute libre ~~des corps~~ est identique pour tous les corps.

## 3) Interaction avec un corps non ponctuel

↳ Le champ gravitationnel créé par une distribution de masse :

$$\vec{G}(M) = -\sum_{i=1}^{N} \mathcal{G} m_i \frac{\vec{P_i M}}{|\vec{P_i M}|^3}$$

par principe de superposition.

Limite continue : $\vec{G}(M) = -\iiint_{\text{Distribu}\Theta} \mathcal{G} \rho(P) \times \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau(P)$

Pour un astre sphérique de rayon R :

- Si $\rho(r,\theta,\varphi) = \rho(r)$ :

  Il y a symétrie de révolution

  $$\iiint_{\text{Astre}} d\tau(P) = 4\pi \int_0^R r^2 dr$$

  donc :

  $$\begin{cases} \vec{G}(M) = -\mathcal{G} \frac{M_{astre}}{r^2} \vec{e_r} \\ M_{astre} = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr \end{cases}$$

- Si $r \gg R$ : $\vec{G}(M) = -\mathcal{G} \frac{M_{astre}}{r^3} \vec{r}$

- Simplifications encore valables si $\frac{dR}{R} \ll 1$ ou $r \gg dR$. ($dR$ : aspérités de l'astre)

Pour la Terre au niveau de Paris :

$G = g = 9{,}81\ m/s^2$

$R_T$ (équateur) $= 6378{,}1$ km

$R_T$ (pôle) $= 6356{,}7$ km

Mesure de G :

$m\ddot{z} = mg$

$\dot{z} = gt$ $(v_0 = 0)$ $\rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2 + z_0$

$\rightarrow \underbrace{z - z_0}_{\Delta z} = \frac{1}{2}g\Delta t^2$

Donc $\boxed{g = \frac{\Delta z}{\Delta t^2}}$

$\rightarrow g = 2\frac{\Delta z}{\Delta t^2}$

## II / Lois de Kepler

### 1) Loi des orbites (1605)

Démo : • Mouvement plan

Force centrale + TMC $\rightarrow \mathcal{L}$ est une cste du mouvement et $\vec{\mathcal{L}} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$

Le mouvement se fait dans le plan orthogonal à $\vec{\mathcal{L}}$

$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}) = r\vec{e_r} \wedge \vec{F_g} = rF_g\,\vec{e_r} \wedge \vec{e_r} = \vec{0}$

$\rightarrow$ Coordonnées polaires.

• Ellipses

PFD : $m\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}\vec{e_r}$

$$\begin{cases} /\vec{e_r} : m\frac{dv_r}{dt} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2} \\ /\vec{e_\theta} : m\frac{dv_\theta}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow r^2\dot{\theta} = \text{cste} = C$

Energie : $F_G = -\frac{dE_p}{dr} \rightarrow E_p = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r}$

$E_m = \text{cste} = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$

$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}$

$E_{p,eff} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$

$= \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$

Variables de Binet :

$$u = \frac{1}{r} \; ; \; \dot r = -C\frac{du}{d\theta} \; ; \; \ddot r = -C\frac{d^2u}{d\theta dt}$$

PFD : $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{GM}{C^2}$

Solutions :

$$u = A\cos(\theta-\theta_0) + \frac{GM}{C^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{AC^2\cos(\theta-\theta_0)+GM}{C^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{C^2/GM}{1+\frac{AC^2}{GM}\cos(\theta-\theta_0)}$$

$(\theta_0 = 0)$

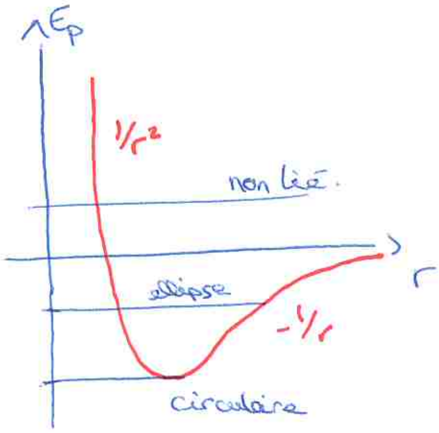
facultatif

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad , \quad p = C^2/GM \quad e = \frac{AC^2}{GM}$$

Equation de conique

p : paramètre

e : excentricité




2) Loi des aires (1604)

Viressese aréolaire : Vitesse à laquelle le rayon vecteur balaie l'aire $\mathcal{A}$ définie par la trajectoire : $\mathcal{V} = \dfrac{d\mathcal{A}}{dt}$

On montrera que $\mathcal{A}(t) = \dfrac{Ct}{2}$.

TD : Aire balayée pdt $dt$ ? $d\mathcal{A} = \dfrac{r^2 d\theta}{2} \rightarrow \mathcal{V} = \dfrac{C}{2} = \text{cste}$

$\mathcal{A}(t) = \dfrac{Ct}{2}$

## 3) Loi des périodes (1618)

$\dfrac{T^2}{a^3}$ est une constante.

Sur une période $T$, $c^t = \pi ab = \dfrac{CT}{2}$

et $b^2 = (1-e^2)a^2$

$\Rightarrow c^t = \pi a^2\sqrt{1-e^2} = \dfrac{CT}{2}$

$C = \sqrt{GMp}$

$\Rightarrow {c^t}^2 = \dfrac{C^2T^2}{4} \Rightarrow \pi^2 a^4(1-e^2) = G\dfrac{MT^2 p}{4}$

et $p = a(1-e^2)$

$\Longrightarrow \pi^2 a^4 (1-e^2) = \dfrac{GM}{4} T^2 a(1-e^2)$

$$\boxed{\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}}$$

Rajouter le calcul pour le cas où les masses des objets sont similaires : Pluton/Charon
cf : http://villemin.gerard.free.fr/Cosmogra/aCALCUL/Charon.htm

III/ Satellisation (peut sauter)

1/ Vitesse de libération

Ne pas parler des vitesses cosmiques.

# III / Vitesses cosmiques

## 1) Première vitesse cosmique

Vitesse pour mettre un objet en orbite à la surface de la Terre, avec un tir horizontal.

$\Rightarrow$ Orbite circulaire : $\vec{v} = R_T \dot{\theta} \vec{e_\theta}$

$\Rightarrow \mathcal{L} = cste = m R_T^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = cste$

$\Rightarrow R_T \dot{\theta} = v_0 \rightarrow \vec{v} = v_0 \vec{e_\theta}$

$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{e_r}$

PFD: $-m \frac{v^2}{R_T} \vec{e_r} = -\frac{G M_T m}{R_T^2} \vec{e_r}$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T}} \simeq 7{,}9 \text{ km/s}.}$$

## 2) 2e vitesse cosmique

Vitesse de libération de la Terre : vitesse nulle à l'$\infty$

Conservation $E_m$ :

$$E_{m_{ini}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{G M_T m}{R_T} = E_{m_\infty} = 0$$

Donc $v_2 = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}} \simeq 11{,}2 \text{ km/s}$

## 3) 3e vitesse cosmique

Vitesse de libération du soleil pour un satellite lancé depuis la terre.

$$v_3 = \sqrt{\frac{2 G M_\odot}{1 \, UA}} \simeq 42{,}1 \text{ km/s}. \qquad UA = 150 \times 10^6 \text{ km}$$

## 4) Limites

- Frottements : Chauffe trop
- $V_{ini}$ pas réalisable

$\rightarrow$ Moteurs

CCl.

0,428

0,472

0,583

0,493

0,435

0,436

0,471

0,451

0,[illegible]

0,[illegible]

0,442

0,448

$\phi$ bille = 15 mm

$D = 93{,}95\ (\pm 0{,}05) - 0{,}17$

- Refaire dessin bien pour mettre dans slides
- Revoir Gauss, Théorème de Gauss.
  ↳ Champ nul ~~ds~~ Planète creuse.
- Montrer au moins 1ère et 3e
  2e Lois de Kepler
  ↳ Conservation moment cinétique.
- ~~G~~

- Newton, avec ses 3 lois permet d'expliquer / retrouver les lois de Kepler.
- Slide analogie Electromag - Gravitaθ.
- Vitesses cosmiques → juste libération en exemple ou traiter satellite.
- Revoir Cavendish.
- Equation de poisson $\vec{G} = -\vec{\text{grad}}\,\phi$

  $\Delta\phi = \dots ?$

Phénomène de marée +
Référentiels non galiléens