Notion de viscosité. Fluides visqueux

Niveau : 2e année CPGE

Prérequis :
- Hydrostat.
- Forces surf. / volumiques | de pression ~~de grav.~~
- * Eulérienne / Lagrangienne dérivée. $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$ $\left(\frac{Dv}{Dt}\right)$

Biblio : Dunod, PC*
Amiroudine, Dunod.

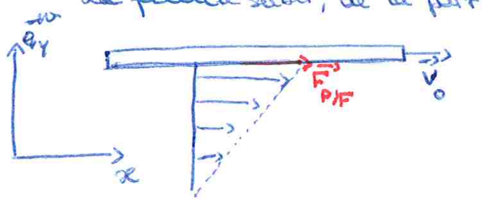
I/ Notion de viscosité

Vidéo Youtube : ~3'50" : Deformation of continuous media
Le liquide adhère à la paroi.

1) Force de viscosité

a) Fluide-plaque

Le fluide subit, de la part de la plaque une force : $\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S \vec{e_x}$, S surf. de la plaque en contact avec le fluide.



↳ Force tangentielle : force de viscosité de cisaillement

η dépend du fluide : Viscosité dynamique. en Poiseuille (Pl) ou Pa.s (1 Pl = 1 Pa.s)

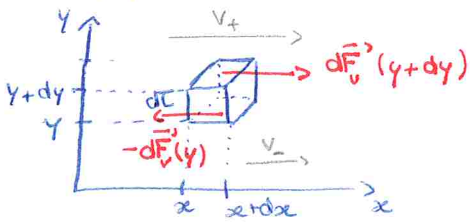
(Slide : valeurs de η pour diff. fluides)

Un fluide vérifiant cette loi est appelé fluide Newtonien.

Contrainte :
$$\underset{v}{\sigma} = \frac{d^2F}{d^2S} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e_x}$$

Dérivée particulaire :
$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})v_x$$
acc. particulaire ; acc. locale ; ↳ acc. convective.

b) Fluide - fluide



$$d\vec{F}_{tot} = -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Big|_y \cancel{(y)}\, dx\,dz\, \vec{e_x} + \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Big|_{y+dy} \cancel{(y+dy)}\, dx\,dz\, \vec{e_x}$$
$$= \eta\, dx\, dz \times \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dy\ \vec{e_x}$$

Généralisation pr un fluide incomp. :
$$d\vec{F}_{tot} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) d\tau \vec{e_x} = \eta \Delta \vec{v} d\tau \quad \text{car } v(x,y,z) = v(x)$$

$$\boxed{d\vec{F}_{tot} = \vec{f}_{visc} d\tau = \eta \Delta \vec{v} d\tau}$$ avec $\vec{f}_{visc}$ équivalent volumique des forces de viscosité de cisaillement

2) Diffusion

PFD :
$$\rho d\tau \times \frac{dv_x}{dt} = f_{visc_x} d\tau + f_{P_x} d\tau \Rightarrow \rho \frac{dv_x}{dt} = \eta (\Delta v)_x \underbrace{- \mathrm{grad}(P)_x}_{0}$$
$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \underbrace{\left(v_x \frac{\partial}{\partial x}\right)v_x}_{0}\right) = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \cancel{-\frac{\partial P}{\partial x}} \Rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)} \cancel{-\frac{\partial P}{\partial x}}$$

Quantité de mvt volumiq. : $\rho v_x = p_x \rightarrow \boxed{\frac{\partial p_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \times \frac{\partial^2 p_x}{\partial y^2}}$ avec $\frac{\eta}{\rho} = \nu$, visc. cinématique

coef. de diff. ← en m^2/s

Annexe : densité de courant de p_x

$$\nu \frac{\partial^2 p_x}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\nu \frac{\partial p_x}{\partial y}\right)$$

$$\rightarrow \vec{j}_{p_x} = -\nu \frac{\partial p_x}{\partial y} \vec{u}_y = -\nu \, \overrightarrow{\text{grad}}\, p_x$$

$$\rightarrow \frac{\partial p_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{p_x}}{\partial y} = 0$$

3) Facteur influençant η

* $\eta = 0$ dans la limite des fluides parfaits (vu plus tard)
* $\eta \nearrow$, $T \nearrow$: gaz — newtonien
  savoir retrouver $\leftarrow$ $\eta \propto \exp\left(\frac{A}{k_B T}\right)$
* $\eta \searrow$, $T \nearrow$: liquide

Slide : Fig 1.6 p.9 Méca flux, Amiroudine.

II / Dynamique d'un fluide visqueux

1) Equation de N. St.

Fluide incomp.

Syst. : Particule mésoscopique de fluide de volume $d\tau$.

Forces : – Poids – Pression
– Viscosité
– Autres forces poss. : E.M ($\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$)
ρ : densité vol. de charges.

Archimède

PFD volumiq. :

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}}$$

Equa° de Navier-Stokes pr fluide ~~comp~~ incomp.

(+ terme en div$(\vec{v})$ si compr.)

(+ forces d'inertie si non galiléen)

Théorème Π

2) Nombre de Reynolds

$$R_e = \frac{\text{diffusion convective}}{\text{diffusion visqueuse}} = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho U L}{\eta} \sim \frac{\|\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta\vec{v}\|}$$

U, L : vitesse et taille caractéristique de l'écoulement

$Re \ll 1$: Viscosité importante, ~~laminaire~~

$Re \gg 1$: Viscosité négligeable, ~~turbulent~~

Couche limite : Région de l'écoulement, au voisinage d'une paroi, où η n'est pas négligeable, d'épaisseur $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{Re}}$

3) Loi de Stokes

Chute bille dans glycerine.

Syst : Bille

BFE : • Poids : $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_B \vec{g} = \vec{P}$

• Archimède : $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_g \vec{g}$

• $\vec{F}$ trainée $\Rightarrow \vec{F} = -6\pi\eta_g R\vec{V}$ à $Re < 1$ (cisaill. + pression)
Stokes

PFD stat :

$$\frac{4\pi}{3}R^3(\rho_B\vec{g} - \rho_g\vec{g}) = 6\pi\eta_g R\vec{V}$$

$\vec{g} \parallel \vec{v}$:

$$\frac{2}{9}\frac{R^2(\rho_B - \rho_g)g}{\eta_g} = V_{max}$$

Expérience chute de plusieurs billes

→ Droite ?
→ Pente = $\frac{2}{9} \times g \frac{\Delta\rho}{\eta_g}$

~~Slide : Figure C~~

Conclusion : Prochain chapitre. Ecoulement parfait.

$1\, e^{-x^2}$ $\frac{1}{-2x} e^{-x^2}$

e^u $\left(\frac{1}{u'} e^u\right)' =$