Diffraction par des structures périodiques

Jeudi 23 mai 2024 12h34

Niveau : Licence Biblio : Perez, Fromont

Prérequis : • Optique, Optique ondulatoire 2ème année
• Réseau optique
• Diffraction par un rectangle
• Interférences à 2 ondes
• Hecht, Optique.
• Cristallographie

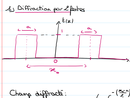
Ce cours est divisé en deux parties : I. Diffraction
II. Interférences à 2 ondes

Permet de mesurer des longueurs d'onde (i.e. spectromètre)
ou bien mesurer la taille d'une structure périodique (cristal)

Lorsque on interprète la mesure du photon, on est que le phénomène d'interférence est complexe. Nous allons essayer de comprendre ce phénomène.

I/ Intensité diffractée

1) Diffraction par 2 fentes



Fente :

Champ diffracté :

$$E = E_0 \times \frac{b}{\lambda z}\left(\int_{-\frac{(b-a)}{2}}^{-\frac{(b+a)}{2}} e^{-i2\pi\frac{x}{\lambda z}x'}\,dx' + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b+a}{2}} e^{-i2\pi\frac{x}{\lambda z}x'}\,dx'\right)$$

$$= E_0 \times \frac{b\,\lambda z}{\lambda z}\times\underbrace{\left(e^{-i2\pi\frac{x}{\lambda z}\frac{b+a}{2}} + e^{i2\pi\frac{x}{\lambda z}\frac{b+a}{2}}\right)}_{2\cos(\pi f_x x_m)}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b x}{\lambda z}\right)$$

$$I = |E|^2 = 4 I_0 \,\mathrm{sinc}^2(\pi f_x x) \times \cos^2(\pi f_x x_m)$$

$E_0 \frac{b a}{\lambda z} = I_0$

$$= 4 I_0 \,\mathrm{sinc}^2(\pi f_x x) \times \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\pi f_x x_m)\right)$$

$$I = \underbrace{2 I_0}_{\text{Intens}} \times \left(1 + \cos(2\pi f_x x_m)\right) \underbrace{\mathrm{sinc}^2(\pi f_x x)}_{\text{Diff}}$$

2) Réseau idéalisé

Une fonction de transmission suivant plusieurs complètes :

$$t_{ind}(\vec{\rho}) = \sum_{\vec{g}} t_{\vec{g}} e^{i2\pi\vec{g}\cdot\vec{\rho}} \quad \sum_{\vec{g}} t(\vec{\rho} - \vec{\rho}_{\vec{g}})$$

mais $t_{\vec{g}}$ son fonction du transparence du motif
contrôle la digit diffractée

On pose $\vec{g} = (f_x, f_y)$

Le champ se calcule :

$$E = \frac{E_0}{\lambda z}\int_{Obj} t_{ind} \times e^{-i2\pi\vec{f}\cdot\vec{\rho}_{\vec{g}}}\,d\vec{\rho}_{\vec{g}}$$

$$= \frac{E_0}{\lambda z}\int_{Obj}\left[\sum_{\vec{g}} t(\vec{\rho} - \vec{\rho}_{\vec{g}}) e^{-i2\pi\vec{f}\cdot\vec{\rho}_{\vec{g}}}\right]d\vec{\rho}_{\vec{g}}$$

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho}_{\vec{g}} - \vec{\rho}_{\vec{g}}$$

$$= \frac{E_0}{\lambda z} \times \sum_{\vec{g}}\underbrace{\left[\int_{Obj} t(\vec{\rho}') e^{-i2\pi\vec{f}\cdot\vec{\rho}'}\,d\vec{\rho}'\right]}_{\text{car tous les motifs sont identiques}}$$

Donc : $E = \underbrace{\frac{E_0}{\lambda z}}_{\text{facteur de transition}} \times \sum_{\vec{g}} e^{-i2\pi\vec{f}\cdot\vec{\rho}_{\vec{g}}} \times \left(\int_{Obj} t(\vec{\rho}) e^{-i2\pi\vec{f}\cdot\vec{\rho}'}\,d\vec{\rho}'\right)$

$\int_{Obj} t = 1$

facteur de forme

Lié à la répartition géométrique des motifs sur l'objet diffractant

↳ Dépend de la forme du motif répété.

Ce qui donne :

$$\boxed{I = I_{motif} \times \left|\sum_{g=1}^{N} e^{-i2\pi\vec{f}\cdot\vec{\rho}_{\vec{g}}}\right|^2}$$

3) Motifs identiques répartis périodiquement

Soit x_m la distance entre deux centres de motifs consécutifs.

$\vec{\rho}_{\vec{g}} = x_m$

On suppose que les motifs se rangent que selon l'axe (Ox).

$\vec{\rho}_{\vec{g}} = (j-1)x_m\vec{u}_x$

Donc ce cas : $I = I_{motif} \times \left|\sum_{j=1}^{N} e^{-i\vec{f}\cdot x_m\vec{u}_x}\right|^2$ avec $n = j-1$

Somme terme suite géométrique de raison $e^{-i2\pi f_x x}$

$$I = I_{motif} \times \left|\frac{1 - e^{-i2\pi f_x x_m N}}{1 - e^{-i2\pi f_x x_m}}\right|^2$$

$$\boxed{I = I_{motif} \times \left(\frac{\sin^2(\pi N f_x x_m)}{\sin^2(\pi f_x x_m)}\right)}$$

II/ Etude spectrale d'un réseau

1) Les zéroses

On applique la formule trouvée au cas des zéroses : N fentes espacées de x_m

$I_{motif} = I_0 \times \mathrm{sinc}^2(\pi f_x a)$

$$\rightarrow \boxed{I = I_0 \,\mathrm{sinc}^2(\pi f_x a) \times \frac{\sin^2(\pi N f_x x_m)}{\sin^2(\pi f_x x_m)}}$$

On étudie le second terme : $\frac{\sin^2(\pi N f_x x_m)}{\sin^2(\pi f_x x_m)} = g$

La fonction des zéroses : $g = 0$

quand $\begin{cases}\sin(\pi N \frac{x_m x}{\lambda z}) = 0 \\ \sin(\pi \frac{x_m x}{\lambda z}) \neq 0\end{cases} \rightarrow x = n \times \frac{\lambda z}{N x_m}$
$x \neq n \times \frac{\lambda z}{x_m}$

Donc $\boxed{x_{zer} = n \frac{\lambda z}{N x_m}, \; n \in \mathbb{Z}\setminus\{mN\}}$

$\boxed{x_{max} = m \frac{\lambda z}{x_m}, \; m \in \mathbb{Z}}$

La fonction des extrema : $g'(x_{max}) = 0$

$$g' = \frac{2\cos(\pi N \frac{x_m x}{\lambda z})\sin(\pi N \frac{x_m x}{\lambda z})}{2\cos(\pi f_x x_m)}$$

$$g' = 0 \rightarrow \cos\left(\pi N \frac{x_m x}{\lambda z}\right) = 0$$

ou

$$\sin\left(\pi N \frac{x_m x}{\lambda z}\right) = 0$$

$$\boxed{x = \frac{\pi z}{2} + \frac{\lambda z}{N f_x x_m} = n \frac{\lambda z}{2N x_m}}$$

2) Mesure de longueur d'onde

* Résolution des zéroses :

Largeur d'une pic : $\Delta x = \frac{\lambda z}{x_m} \times \frac{2}{N}$

distance entre deux pics à λ de $\lambda + d\lambda$

$$dx = n\frac{\lambda z}{x_m} - n\frac{(\lambda + d\lambda)z}{x_m} = -n\frac{d\lambda z}{x_m}$$

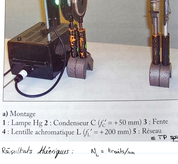
$$\rightarrow \frac{\Delta x}{2} < dx \rightarrow \frac{\lambda z}{N x_m} < n\frac{d\lambda z}{x_m}$$

$$\rightarrow \boxed{R = \frac{\lambda}{d\lambda} = nN}$$

* Formule fondamentale des réseaux astronomiques

On démontre en TD. $x_m\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right) = n\lambda$

* Spectre d'une lampe à vapeur de mercure : (Hecht, p380 + p340)



a) Montage
1 : Lampe Hg 2 : Condenseur C ($f'_C = +50$ mm) 3 : Fente
4 : Lentille achromatique L ($f'_C = +200$ mm) 5 : Réseau
→ TP spectro.

Résultats Théoriques : $N_0 = 6000$ traits/mm

Mercure (Hg)					
Raies	UV	Violet	Indigo	Vert	Jaune
λ ($N_1 = 80$)	369	406	444	550	581
λ ($N_1 = 300$)	371	410	443	552	584
λ (tabulée)		404,6	435,8	546,1	577/579

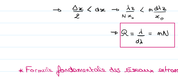
→ Diffraction circulaire - optique pour déterminer λ_{air} dans un fluide.
→ Zoom sur pente +1 pour un réseau 3D ?

III/ Etude des cristaux

Arrangement régulier des atomes/molécules dans un cristal, ce qui forme un réseau 3D.

1) Expérience de Von Laue

Théorème de Babinet : La figure de diffraction est la même pour une fente et son complémentaire.



2) Expérience de Bragg

Formule de Bragg : $\boxed{2d\sin\theta = m\lambda}$ non mesure d'intensité

En mesurant θ, on peut remonter à d.

Or16 : λ_0 20pm
Cristal NaCl
ordre -1

Or mesure $\theta_{mesuré} = 29{,}3°$
donc $d = 239{,}5$pm

→ Cristal NaCl = Cristaux pour contrôle de paramètre de maille + d

On peut aussi diffracter des électrons.

Cel : La diffraction est due à la fente son incertitude (Hecht) et son coût de mesure (spectre d'Bohr)