Oscillateurs ; portraits de phase et non linéarités

lundi 3 juin 2024 19:30

Niveau : L3

Bibliographie : Dico. Ψ, Taillet
Mécanique, Pérez
BUP, 744

Prérequis : Oscillateur harmonique
Electronique.
Méca du point
Méca. du solide
TF

→ Horloge, ♡ qui bat, pendule de Foucault, ...

Oscillateurs : Système soumis à 2 effets antagonistes, faisant osciller son état autour d'une position d'équilibre
(ex : Pendule pesant)

Nous avons vu l'oscillateur harmonique les années précédentes.
Cependant, nous sommes limités au régime des petits angles et en négligeant les frottements.
Dans cette leçon, nous allons relaxer ces 2 hypothèses et utiliser un outil d'étude : le portrait.

I/ Etude des oscillateurs conservatifs

1) Le portrait de phase

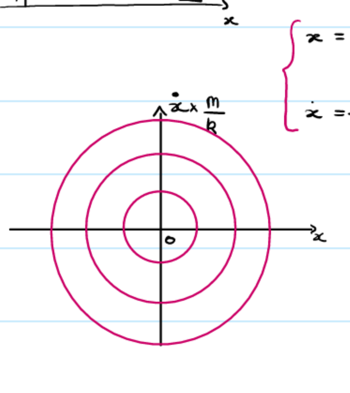
Portrait de phase : Représentation graphique des variations d'une variable dynamique en fonction de sa dérivée temporelle.

Une trajectoire de phase dépend des conditions initiales.
L'ensemble des trajectoires de phase forme le portrait de phase.

Cas de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\begin{cases} x = x_0 \cos\left(\frac{k}{m}t + \phi\right) \\ \dot{x} = -\frac{x_0 k}{m}\sin\left(\frac{k}{m}t + \phi\right) \end{cases}$$



Permet de tester le caractère sinusoïdal de l'évolution de l'oscillateur.

2) Le pendule pesant

On va retrouver l'éq. du mouvement à l'aide du TMC :

- Moment d'inertie du pendule % à Δ : J_Δ

facultatif

$$J_\Delta = J_{M/\Delta} + J_{tige/\Delta}$$

Mx^2 ; $\frac{1}{12}mL^2 + ma^2$

$$J_\Delta = Mx^2 + m\left(\frac{L^2}{12} + a^2\right)$$

- Centre de masse G_S :

par rapport à Δ : $\Delta G_S = l$ par définition.

et

$$\Delta G_S = \frac{ma + Mx}{M + m}$$ facultatif.

On écarte le pendule de sa position d'un angle Θ et on regarde l'évolution $\Theta(t)$.

- BFE : $\vec{P} = (M+m)\vec{g}$ en G_S

→ TMC : $\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}$, $\mathcal{L}_\Delta = J_\Delta \frac{d\Theta}{dt}$

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = J_\Delta \frac{d^2\Theta}{dt^2} = (\vec{\Delta G_S} \wedge (M+m)\vec{g}) \cdot \vec{u}_\Delta$$
$$= -l(M+m)g\sin\Theta$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{l(M+m)g}{J_\Delta}}_{\omega_0^2}\sin\Theta = 0$$

- Jusqu'à maintenant :

$\sin\Theta \sim \Theta$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{gl(M+m)}}$, $\Theta = \Theta_0 \sin(\omega t)$

→ portrait phase python
identifier les comportements, BUP, p721

→ Portrait de phase Θ_0 grand → amortissement → nouvelle solution nécessaire

3) Non-linéarité

- Maintenant : $\sin\Theta \sim \Theta - \frac{\Theta}{3!}$ [Pérez, méca]

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \omega_0^2\left(\Theta - \frac{\Theta^3}{3!}\right) = 0$$

On injecte $\Theta = \Theta_0 \sin(\omega t)$, solution approchée.

$$-\omega^2\Theta_0 \times \sin(\omega t) + \omega_0^2\Theta_0 \sin(\omega t) - \frac{\omega_0^2\Theta_0^3}{6}\sin^3(\omega t) = 0$$

Et $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$$\Rightarrow \forall t, \left(-\omega^2\Theta_0 + \omega_0^2\Theta_0 - \frac{\omega_0^2\Theta_0^3}{8}\right)\sin(\omega t) + \underbrace{\frac{\omega_0^2\Theta_0^3}{24}\sin(3\omega t)}_{\text{négligeable}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2\Theta_0 + \omega_0^2\Theta_0 - \frac{\omega_0^2\Theta_0^3}{8}\right) = 0$$

$$\omega^2 = -\frac{\omega_0^2\Theta_0^2}{8} + \omega_0^2$$

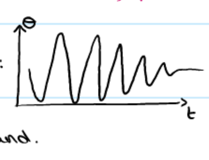
$$\frac{1}{T^2} = \frac{-\Theta_0^2 + 8}{8T_0^2}$$

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{8}{8 - \Theta_0^2}$$

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Theta_0^2}{8}}} = 1 + \frac{\Theta_0^2}{16}}$$

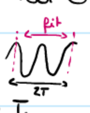
Formule de Borda, perte de l'isochronisme.

Expérience : On trace :



Pour Θ grand.

- On fit



ce qui donne Θ_0

- On mesure T.
  - → Met dans un tableur
  - → On trace $T = f(\Theta_0^2)$ et on essaie de retrouver $\frac{1}{16}$
- Connaissant T_0 mesuré en préparation (période petits angles)

(Si on fait la TF → Signal avec plusieurs pics)
Le portrait de phase permet d'avoir des informations sur le système sans avoir à résoudre d'équaΘ.

Cpdt, sur le système étudié, les oscillations finissent par s'amortir.

Ce système ne permet donc pas d'expliquer les battements du coeur ou d'une horloge.

II / Oscillateurs amortis ou entretenus

1) Considérations générales

Dans les cas précédents, nous n'avons pas considéré de terme en dérivée première de la variable : Cas particulier.

Si on généralise :

$$\boxed{\ddot{x} + A(x)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Si $A(x) > 0$: Amortissement

Si $A(x) < 0$: Amplification

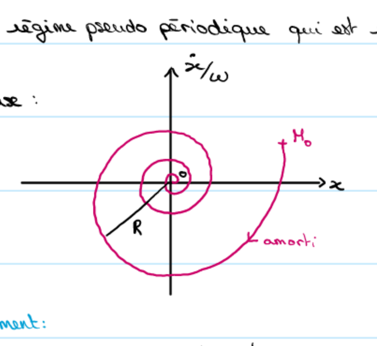
2) Les oscillateurs amortis.

Par frottements fluide : $m\ddot{x} = -h\dot{x} - kx$
pour le pendule élastique.

On pose $\begin{cases} \omega^2 = \frac{k}{m} \\ Q = \frac{m\omega}{h} \text{, le facteur de qualité} \end{cases}$

Si $Q > \frac{1}{2}$, régime pseudo périodique qui est intéressant.

Portrait phase :



Energétiquement :

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{k}{2}\underbrace{\left(x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2\right)}_{\text{Rayon}^2 \text{ du portrait de phase}}$$

$$\rightarrow E = \frac{kR^2}{2} \quad \left(-h\dot{x}^2 = \frac{dE}{dt}\right)$$

Quand le système perd de l'énergie, le rayon de la trajectoire diminue.
O est un attracteur
(Si $Q > 1$, Q donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations observables avant la relaxation vers l'état d'équilibre)

Pour le pendule pesant :

$$\ddot{\Theta} + \frac{\omega}{Q}\dot{\Theta} + \omega^2\sin\Theta = 0$$

Il y a une infinité d'attrateurs ponctuels en $x \equiv 0\ [2\pi]$
Slide

3) Oscillateur auto-entretenu

Système qui, tel une horloge, évolue indéfiniment de façon périodique.
Il a besoin qu'on lui fournisse de l'énergie pour compenser ses pertes :
→ injection d'énergie : $A(x)\dot{x}$, $A(x) > 0$
→ pertes : $-p\dot{x}$, $p > 0$

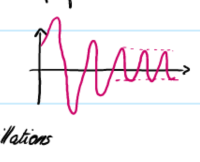
Equation de Van der Pol :

$$\ddot{x} + (x^2 - p)\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$A(x) > 0$

↳ x_0 petit : $x_0^2 - p < 0$ → amplification

↳ $x_0^2 - p > 0$: amortissement



↳ Régulation des oscillations

Slide Apparition d'un cycle limite non circulaire donc l'oscillateur de Van der Pol est non sinusoïdal.
Cycle limite ⫫ $(x_0 ; \dot{x}_0)$

Ccl.

Dans quel domaine de valeur peut-on linéariser le sin(θ) sans commettre une trop grande erreur? En général, au-délà de 20° il faut ajouter le terme en cube, puis à 40° le terme en puissance 5 et après il faut très vite rajouter beaucoup de termes.