Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

jeudi 30 mai 2024 14:25

Niveau : Licence 2

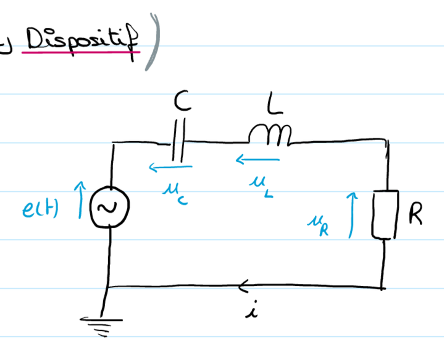
Biblio : Taillet : Dictionnaire de φ
Sanz, Badel : φ, tout en un MPSI, PCSI, PTSI, Dunod (3e édition)

Prérequis :
- Corde de Melde
- Electrocinétique (Mailles, noeuds, fonction transfert, filtres, RLC)
- Optique ondulatoire (Laser, Fabry-Pérot)
- Mécanique du point

Résonance : Excitation périodique d'un système à une pulsation ω proche de l'une de ses pulsations propres ω_0.
Cela provoque une réponse du système qui n'est pas proportionnel à l'excitation : grande amplitude

I/ Résonance à 1D : Le circuit RLC

1) Dispositif



$u_R = Ri$; $u_L = L\frac{di}{dt}$ et $i = C\frac{du_C}{dt}$ + Loi des mailles : $u_C + u_R + u_L = e$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = L\frac{\omega_0}{R}$:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L}\frac{de}{dt} \iff i'' + \Delta\omega\, i' + \omega_0^2 i = f(t)$$

formes canoniques

1) Résonance en intensité

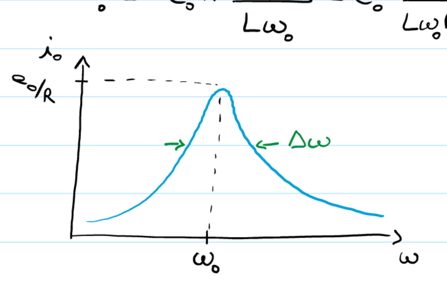
$\underline{i} = \underline{i}_0 \exp(j\omega t)$ et $\underline{e} = \underline{e}_0 \exp(j\omega t)$

(1) $\Rightarrow \underline{i}_0 = \dfrac{e}{\frac{L\omega_0}{Q} + jL\omega\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre et Q le facteur de qualité.

$Q \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

Si $\omega = \omega_0$:

$$i_0 = e_0 \times \frac{Q}{L\omega_0} = e_0 \frac{L\omega_0}{L\omega_0 R} = e_0/R$$



Montrer la courbe expérimentale et $\frac{\Delta\omega}{\omega} = 1/Q$

Préparation, tracer i en fonction de ω. Prendre 1 pts devant le jury.
↳ Vérifier que $i = e_0/R$ à la résonance et que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

On peut vérifier qualitativement que $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{Q}$ donc plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance est étroite.

↳ Diagramme de Bode $u_R(\omega) \propto i(\omega)$ ou juste slide

2) Etude énergétique

Loi des mailles : $e = Ri + L\frac{di}{dt} + u_C$

Puissance : $ei = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + u_C i$

$$\mathcal{P}_{géné} = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_C$$

Dans la bobine et le condensateur, u et i sont en quadrature de phase donc :
sur une période T, $\begin{cases} \langle u_C i \rangle_T = 0 \\ \langle u_L i \rangle_T = 0 \end{cases}$

Donc $\langle \mathcal{P}_{géné} \rangle_T = \langle \mathcal{P}_R \rangle_T$ et $\underline{i} = \dfrac{e}{\frac{L\omega_0}{Q} + jL\omega\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$

$$\Rightarrow i^2 = |\underline{i}|^2 = \frac{e^2}{\left(\frac{L\omega_0}{Q}\right)^2 + L^2\omega^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}$$

Donc $\langle \mathcal{P}_{Géné} \rangle_T = \dfrac{Re^2}{\left(\frac{L\omega_0}{Q}\right)^2 + L^2\omega^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}$

On obtient un maximum de la puissance moyenne fournie en $\omega = \omega_0$.

3) Résonance en tension

[Vieux Dunod MPSI, PTSI, PCSI (3e édition) p364]

Aux bornes de la capacité : $\underline{u}_C = \dfrac{\underline{i}}{jC\omega} = \dfrac{e}{jC\omega \times \left[\frac{L\omega_0}{Q} + jL\omega\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right]}$

$$= \frac{e}{j\frac{\omega}{Q\omega_0} - LC\omega^2\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$$

$LC = \frac{1}{\omega_0^2}$

$$\underline{u}_C = \frac{e}{j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1}$$

$$|\underline{u}_C| = u_C = \frac{e_0}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} \times \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$

$\Rightarrow u_C = \dfrac{e_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$ $\Rightarrow$ On étudie le dénominateur $\sqrt{D}$.

On sait que le dénominateur est positif. On veut : $D' = 0$
et $D'' > 0$
(minimum de D → maximum de u_C)

$$\Rightarrow D' = 0 \iff 2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \times \left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2} = 0$$

$$\iff 4\omega^3 - 4\omega\omega_0^2 + \frac{2\omega}{Q^2}\omega_0^2 = 0$$

$$\iff \omega = 0 \text{ ou } 4\omega^2 = -\frac{2\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 = \left(4 - \frac{2}{Q^2}\right)\omega_0^2$$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\,\omega_0}$, on a bien $D'' > 0$ et, pour ω réel, il faut $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$

Ce qui donne, à la résonance : $u_C = \dfrac{e_0}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \times \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}} = \dfrac{e_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}}$

$\frac{1}{4Q^4} - \frac{1}{2Q^4} = -\frac{1}{4Q^4}$

A la résonance : $\boxed{u_C = \dfrac{e_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}} = \dfrac{2Q^2 e_0}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$

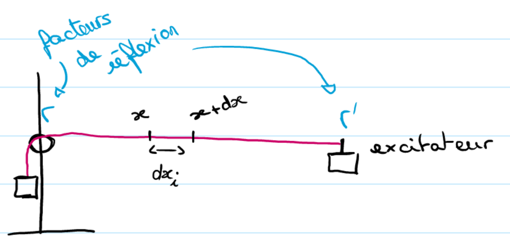
⇒ Montrer diagrammes de bode

4) Analogie oscillateur mécanique

Animation

II/ Les cavités résonantes

1) La corde de Melde



Hypothèses :
- Pas de frottement
- Masse de la corde négligeable
- Raideur négligeable

Chaque dx_i est un oscillateur couplé aux deux dx_{i-1} et dx_{i+1} voisins.

Il y a donc une infinité de résonateurs couplés donc une infinité de fréquences de résonance.

Rappel : $\lambda = \frac{2L}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Ici, la dimension du résonateur fixe les fréquences permises : Il s'agit d'une cavité résonante.

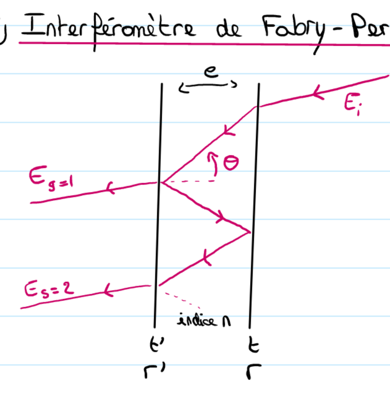
(⚠ L'élongation n'est pas infinie car phénomènes non linéaires à prendre en compte et frottements fluides)

Dans ce cas, le facteur de qualité s'exprime comme : $Q_n = \dfrac{n\pi\sqrt{rr'}}{1 - rr'}$

[Zone ΔN tq $A_{ventre} > \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$, $Q = \frac{N}{\Delta N}$]

[Energie linéique : $e = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$
$E_{pot,n} = \frac{n^2 T_0 \pi^2}{4L} \times a_0^2/\sin^2 kL$]

2) Interféromètre de Fabry-Perot



- Une analyse des différences de marche entre les rayons s et s+1 aboutit à : $\delta = 2ne\cos\theta$
donc $\Delta\phi = k \times 2ne\cos\theta$, le déphasage entre ces deux rayons.

- Soient t et t' les coefficients de transmission en entrée et en sortie.
- ——— r et r' ——— réflexion ———.

$\Rightarrow E_s = tt'E_i \times \underbrace{\left(rr'e^{i\Delta\phi}\right)^s}_{\text{raison}}$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $rr'e^{i\Delta\phi}$ (|raison| < 1)

$$E_{tot} = \sum_{s=0}^{\infty} E_s = tt'E_i \times \sum_{s=1}^{\infty}\left(rr'e^{i\Delta\phi}\right)^s$$

$$= tt'E_i \times \frac{1}{1 - rr'e^{i\Delta\phi}}$$

L'intensité lumineuse : $I = |E|^2 = |E_i|^2 \times \dfrac{|tt'|^2}{|1 - rr'e^{i\Delta\phi}|^2}$

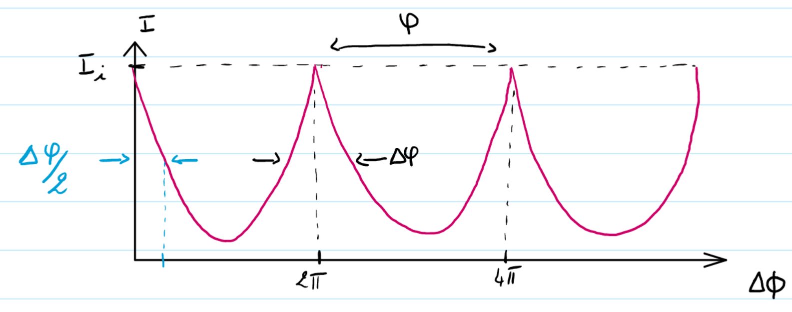
$$= I_i \times \frac{(tt')^2}{(1 - rr'\cos\Delta\phi)^2 + (rr'\sin\Delta\phi)^2}$$

$-2rr'\cos\Delta\phi = -2rr' \times \left(1 - 2\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

$$= I_i \frac{(tt')^2}{(1 - rr')^2 + 4rr'\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

On pose $T = tt'$ et $R = rr'$ et $T + R = 1$

$$\boxed{I = I_i \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} = I_i \times \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}}$$



Finesse de la cavité : ($\propto$ Facteur de qualité) $F = \dfrac{\varphi}{\Delta\varphi} = \dfrac{2\pi}{\Delta\varphi}$

On suppose qu'à mi-hauteur, pour le premier pic, on a : $\frac{\Delta\phi}{2} \ll 1$

$$\rightarrow \sin\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{\Delta\phi}{2} \text{ et } \Delta\phi = \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{I_i}{2} \iff \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\left(\frac{\Delta\varphi}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Donc, $\left[2(1-R)^2 - (1-R)^2\right] \times \frac{4}{R} = \Delta\varphi^2$

$$\iff \Delta\varphi^2 = 4\frac{(1-R)^2}{R}$$

$$\iff \Delta\varphi = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

On retrouve bien $\boxed{\mathcal{F} = \dfrac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = Q_{corde}}$

Conclusion : Résonance phénomènes global en physique :
- Electrocinétique
- Mécanique
- Optique
- Acoustique (pression → brise verre)