Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Niveau : CPGE, 2A

Prérequis :
- Hydrostatique.
- Fluide réel
- Equation N-S
- Nombre de Reynolds
- Couche limite.

Bibliographie :
- Dunod, Physique PC-PC*
- Ellipse, " "
- Amiroudine, Dunod, Méca. des fluides

I/ Ecoulement parfait

1) Définitions

Fluide parfait : Pas de viscosité, $\eta = 0$

↳ Pas de phénomène de dissipation, diffusion transformation réversible et adiabatique → isentropique.

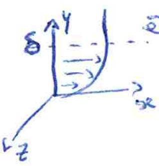
↳ Modèle

Ecoulement parfait : Un fluide réel se comporte comme un fluide parfait

2) Domaine de validité

Loin de la couche limite d'épaisseur δ, situé autour des obstacles du flot : $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{Re}}$

Dans cette couche limite, pour un écoulement parallèle :



$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \text{(cisaillement selon } y\text{)}$$

donc :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}P + \eta \Delta \vec{v}$$

et le problème est invariant par translation selon x et z donc $P \perp x, z$: $P(M) = P(y_M)$

donc $-\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e_x} = \vec{0}$

$$\rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

$$\rho \times \frac{1}{\tau} = \eta \times \frac{1}{\delta^2} \rightarrow \delta \propto \sqrt{\frac{\eta \tau}{\rho}}$$

$$\left(R_e = \frac{\rho v L}{\eta}\right) \qquad \propto \boxed{\sqrt{\frac{v L \tau}{Re}}}$$

→ Modèle de l'écoulement parfait dans les écoulements turbulents où $Re \gg 1 \Rightarrow \delta \ll 1$.

2) Equation d'Euler

Navier-Stokes : (que incompres. car $\eta \Delta \vec{v}$)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g} + \underbrace{\cancel{\eta \Delta \vec{v}}}_{\eta = 0} + \vec{f_m}$$

⇒ **Equation d'Euler** : (~1757)

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g} + \vec{f_m}}$$

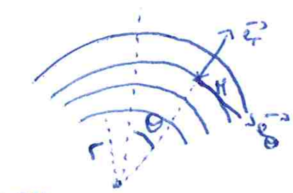
Comp. et incompr.

où

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{rot}\,\vec{v}) \wedge \vec{v} + \vec{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \ldots$$

3) Conséquence : Effet Coanda

f_m nulle (g négligé)



$\vec{v} = v(r)\vec{e_\theta}$ ⊥ θ car sym.

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = v(r) \times \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v(r)\vec{e_\theta}\right)$$

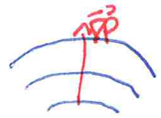
$$= \frac{v^2(r)}{r}\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial \theta} = \frac{v^2(r)}{r}\underbrace{\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial \theta}}_{-\dot{\theta}\vec{e_r} \times \frac{1}{\dot{\theta}}}$$

$$= -\frac{v^2(r)}{r}\vec{e_r}.$$

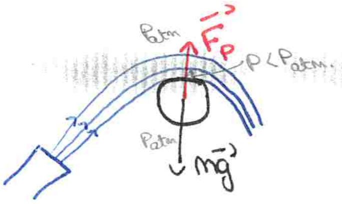
Donc, selon $\vec{e_r}$:

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r} > 0$$

P est une fct croissante de r



Ex : Balle de Ping-pong
reste piégée sous le flux d'air d'un sèche cheveux



II / Le théorème de Bernoulli

Ecoulement parfait, stat, incompr., homogène, $f_m \neq g$ nulles.

1) Démonstration du théorème

Rotationnel

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = cste$$

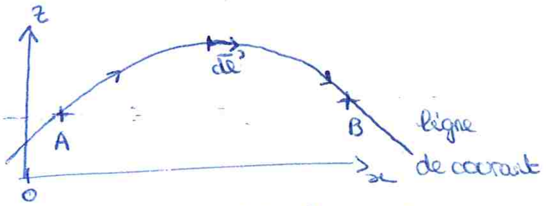
le long d'une ligne de courant

Irrotationnel, (1738)

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = cste$$

(assez direct, on ne démontre pas ici)

Si $\downarrow z$ $\Rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} - gz = cste$.



Par définition : $(\vec{rot}\,\vec{v}) \wedge \vec{v} \cdot \vec{dl} = 0$ et $\vec{g} = -\vec{grad}(gz)$

Donc Euler :

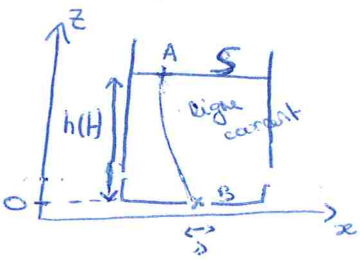
$$\vec{grad}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = -\vec{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v}$$

Irrotationnel : $\vec{rot}\,\vec{v} = 0$ donc $\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = cste$, ∀ le fluide

Rotationnel :
$\int \text{Euler} \cdot \vec{dl} \Rightarrow \int_A^B d\left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = 0$

Donc : $\frac{P(B)}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B = \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A \rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$ conservé le lg d'une ligne de courant

2) Vidange d'un réservoir : Formule de Toricelli



Fluide "parfait", incomp. : $\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} + gh = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_0}{\rho}$

$s \ll S$.

$P_A = P_0$ surf. libre
$P_B = P_0 \rightarrow //$ et pas ⌒

Conservation débit : $v_A S = v_B s \Rightarrow s \ll S \Rightarrow v_B \gg v_A$
(car incomp.)

donc

$\frac{v_A^2}{2}$ négligeable dvt $\frac{v_B^2}{2} \Rightarrow v_B^2 \simeq 2gh(t)$

Temps de vidange :

$v_A = -\frac{dh}{dt}$ donc $v_B s = v_A S \Rightarrow \sqrt{2gh(t)}\,s = -\frac{dh(t)}{dt} S$.

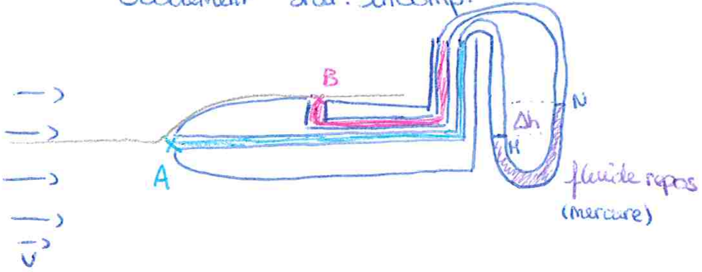
~~$\Rightarrow \frac{dh}{dt} + \frac{s}{S}\sqrt{2gh} = 0$~~ $\sqrt{2gh(t)}\,s\,dt = -dh\,S$

$$\sqrt{2g}\,s\,T_f = s\sqrt{2g}\int_0^{T_f} \cancel{\sqrt{h}}\,dt = -S\int_{h_0}^{0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2S\sqrt{h_0}$$

$T_f = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,\frac{S}{s}$ ⟶ vérifier loi

3) Tube de Pitot

Écoulement stat. incomp.



Bernoulli sur — :

$$\frac{P_A}{\rho}+\frac{v_A^2}{2}+gz_A=\frac{P_B}{\rho}+\frac{v_B^2}{2}+gz_B .$$

hyp : $v_A=0$ car point d'arrêt

$z_A-z_B\ll 1$

$$\Rightarrow \frac{P_A-P_B}{\rho}=\frac{v_B^2}{2} \Rightarrow \boxed{P_A-P_B=\frac{\rho}{2}v_B^2}$$

$P_M=P_A$ et $P_N=P_B$

, mercure au repos : $P_M+\rho_{Hg}\,g\,z_M=P_N+\rho_{Hg}\,g\,z_N$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2}v_B^2=\rho_{Hg}\,g\times\underbrace{(z_N-z_M)}_{\Delta h} \Rightarrow \boxed{v_B=\sqrt{\frac{\rho_{Hg}\times 2g\Delta h}{\rho}}}$$

Ccl : Limites → Écoulement de Poiseuille, perte de charge.