Mécanique : Gravitation

Bonjour les lapins ①

* ~~Tube de Newton~~ Vidéo chute vide
* Chute libre rectiligne.

* Michel, φ, PCSI, deboeck
* BFR, mécaniq 1

*Pré-requis : ~~Force centrales~~ * TMC. * Dyn. point * TEM. * Fresnel

I / ~~Le champ grav~~ ~~La force~~ Interaction grav

~~1) D'une masse~~ ~~Entre 2 masses ponctuelles~~

1) Une force centrale et conservative.

Coordonnées polaires pour simplifier

Déf : force centrale de centre O : $\vec{F} = f\vec{e_r}$, Le support de la force passe par O.

~~Déf~~ Force ~~centrale est~~ conservative, càd que $\vec{F}.\vec{dr} = -dE_p$, dérive d'une E_p.

~~En géométrie sphérique, il y a invariance par rotat d'angle θ et φ donc $E_p(r)$~~

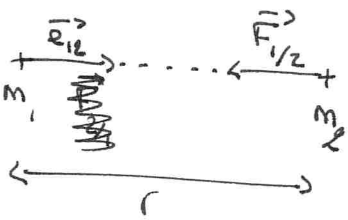
~~$d\vec{r} = dr\vec{e_r} + rd\vec{e_r}$ et $d\vec{e_r} = +d\theta\vec{e_\theta}$~~

~~$d\vec{r} = dr\vec{e_r} + rd\theta\vec{e_\theta}$~~

~~$\vec{F}.d\vec{r} = Fdr = -dE_p$ donc $F = -\frac{dE_p}{dr}$~~

* Si $F>0$: la force s'éloigne de O, elle est répulsive et E_p est une fonction décroissante de r
* Si $F<0$: ____ est dirigée vers O, ____ attractive ____ ____ croissante de r.

2) Interaction entre 2 masses ponctuelles



: Force de gravitation : $\vec{F_{1/2}} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\vec{e_{12}}$

$F_{1/2} < 0$: force attractive.

$G = 6,67 \times 10^{-11}\ kg^{-1}.m^3.s^{-2}$

La masse gravitationnelle utilisée est la même que la masse inerte de la relation f^{ale} dyn. : $\underset{m_{inerte}}{m\vec{a}} = +\frac{G\, m_{grave}\, M_\oplus}{r^2} = m_g\vec{g}$

Exp. qualitative dans le vide

(chute libre identique pr ts les corps de les masses doivent se simplifier ds l'équation)

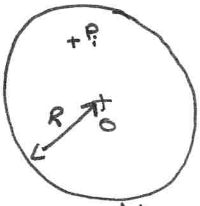
$a = \left(\frac{m_g}{m_i}\right)g$; $\frac{m_g}{m_i} = 1 \pm 10^{-12}$.

~~$m_i = m_g \pm 10^{-12}$~~

3) Interaction entre 2 astres

* Champ de gravitation créé par une distribution de masse :

$+ M (M)$



Astre

Champ créé par l'ensemble des points $P_i (m_i)$ au point M :

$$\boxed{\vec{G}(M) = \sum_{i=1}^{N} -\mathcal{G}\, m_i \frac{\vec{P_iM}}{P_iM^3}}$$

Principe de superposition

Passage continue :

$$\boxed{\vec{G}(M) = \iiint_{\text{Astre}} -\mathcal{G}\, \rho(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3}\, d\tau(P)}$$

Simplificat° ; Astre sphérique de rayon R :

↳ $\rho(P) = \rho(r_p)$: Symétrie de révolution ; $d\tau(P) = r_p^2\, dr_p\, d\theta \sin\theta\, d\varphi$

$$\cancel{\vec{G} = -\mathcal{G} \times 4\pi \int \frac{\rho(r_p) \times \vec{e_r}}{r^2} dr_p = -4\pi \mathcal{G} \times}$$

$$\vec{G} = -\mathcal{G} \times \frac{1}{r^2}\vec{e_r} \times \int_0^R r_p^2 4\pi \rho(r_p) dr_p = -\mathcal{G} \frac{M_{Astre}}{r^2} \vec{e_r} \quad , \quad M_{Astre} = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr$$

↳ $r \gg R$: $\quad \vec{G}(M) = -\mathcal{G} M_{Astre} \frac{\vec{r}}{r^3}$ (après un DL)

Si pas sphérique :

↳ valable si $r \gg dR$

↳ valable si $dR/R \ll 1$

Pour la terre, au niveau de Paris $\boxed{\vec{G} = g = 9{,}81\ m/s^2}$.

→ Mesure expérimentale chute libre, plusieurs fois, incertitude type A.

II/ Lois de Kepler

Johannes Kepler, 16.... ....

~~1) Loi~~ 1) Trajectoires des planètes, loi des orbites (1605)

"Les planètes du système solaire décrivent des ellipses dont le soleil est l'un des foyers."

(+ Trajectoire plane)

ⓐ Mouvement plan

TMC : $\frac{d\vec{\mathcal{L}}_o}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_o(\vec{F}_i)$

$\mathcal{M}_o(\vec{F}_G) = \cancel{mF_G \vec{e}_r \wedge}$

$= \cancel{cte} \cdot \vec{e}_r \wedge F_G \vec{e}_r$

$= 0$

$\to \vec{\mathcal{L}} = cte$

Chap. Force centrale :

* Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}} = m_p \vec{OP} \wedge \vec{v}$, m_p masse planète, P : planète

$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = m_p r \vec{e}_r \wedge \vec{v}$

* PFD : $m_p \frac{d\vec{v}}{dt} = m_p \vec{G}_\odot \Rightarrow m_p \frac{d\vec{v}}{dt} \,//\, \vec{e}_r$ donc $\vec{v}$ selon $\vec{e}_r$

$\vec{\mathcal{L}}$ est une constante du mouvement

$\mathcal{L}$ se conserve $\to m\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{cte}$.

Le mvt se fait dans le plan ⊥ à $\vec{\mathcal{L}}$. avec $\vec{\mathcal{L}} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$

ⓑ Trajectoire elliptique

PFD : $m\vec{a} = -G\frac{M_\odot m}{r^2}\vec{e}_r$

$+ \xleftarrow{\;r\;} +$ M, m, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_r$ coordonnées polaires.

$\vec{OM} = r\vec{e}_r$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

$$\begin{cases} /\vec{e}_r : & m\frac{dv_r}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2} \\ /\vec{e}_\theta : & m\frac{dv_\theta}{dt} = 0 \end{cases}$$

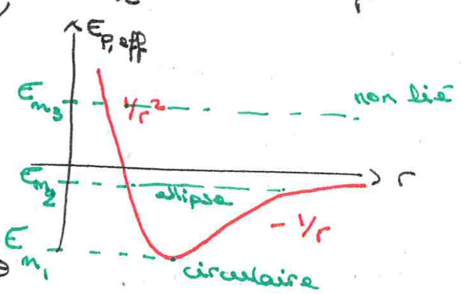
$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{m\ddot{r} = -G\frac{Mm}{r^2}} & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \\ \cancel{m\, r\ddot{\theta} = 0} & 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 : \boxed{r^2\dot{\theta} = cte} = C \end{cases}$$

~~Variable~~ F_G est une force centrale conservative, $F_G = -\frac{dE_p}{dr}$; $E_p = -\frac{Mm G}{r}$

Donc : $E_m = cte = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)^2 - \frac{MmG}{r}$

$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}$ avec $E_{p,eff} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{MmG}{r}$

$E_{p,eff} = \frac{1}{2}m\frac{C}{r^2} - \frac{MmG}{r}$



Variable de Binet : $u = 1/r$; $\dot{r} = -C\frac{du}{d\theta}$; $\ddot{r} = -C\frac{d\dot{u}}{dt\,d\theta}$

PFD : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}$

Solutions : $u = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{C^2}$

$\frac{1}{r} = \frac{AC^2\cos(\theta-\theta_0) + GM}{C^2}$

$r = \frac{C^2/GM}{1 + \frac{AC^2}{GM}\cos(\theta - \theta_0)}$

$\theta_0 = 0$

$\rightarrow r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ $\left(\begin{array}{l} p = C^2/GM \\ e = \dfrac{AC^2}{GM} = Ap \end{array} \right)$ <u>Equation de conique.</u>

↳ p : paramètre

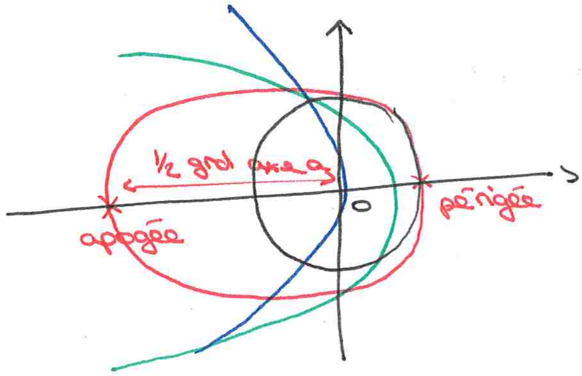
↳ e : excentricité

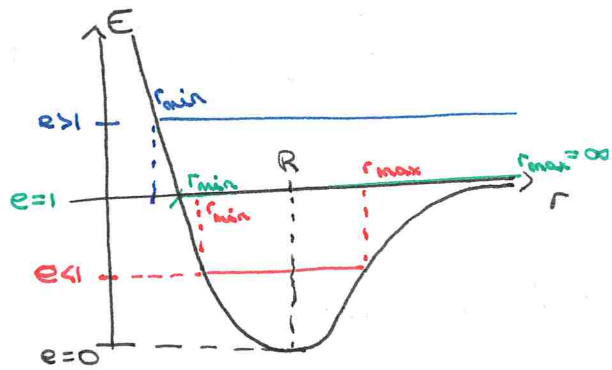
<u>4 cas</u> : $e = 0$: $r = $ cste, traj. circ. —

$e < 1$: ellipse —

$e = 1$: parabole —, apogée à l'∞

$e > 1$: hyperbole —, état de diff.

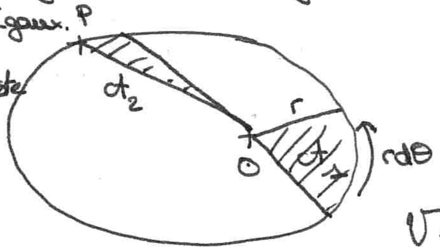




2) <u>Loi des aires</u> (1604)

Des aires égales sont balayées pdt des tps égaux.

↳ $\dfrac{d\mathcal{A}}{dt} = $ cste



$\mathcal{L} = $ cste $\Rightarrow r^2\dot\theta = $ cste $= C$ constante des aires

<u>PFD</u> : $\begin{cases} \ddot r - \dfrac{C^2}{r^3} = -\dfrac{Mm\mathcal{G}}{r^2} \\ \dot\theta = \dfrac{C}{r^2} \end{cases}$

<u>$\mathcal{V}$ = Vitesse aréolaire</u> : Vitesse à laquelle le rayon vecteur balaie l'aire définie par la trajectoire $\mathcal{A}$:

$\mathcal{V} = \dfrac{d\mathcal{A}}{dt}$

Aire balayée pdt dt :

$r^2 \dfrac{d\theta}{2} < d\mathcal{A} < (r+dr)^2 \dfrac{d\theta}{2}$

~~L'aire balayée pendant dt est une cste du au tps t~~

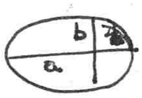
A l'ordre 1 : ~~mouvement~~ est ~~donc~~ $\cancel{\mathcal{A}(t) = \frac{C}{2}t + \text{cste}}$

$d\mathcal{A} = r^2 \dfrac{d\theta}{2} \Rightarrow \mathcal{V} = \dfrac{d\mathcal{A}}{dt} = \left(\dfrac{r^2 d\theta}{2\,dt}\right) = \dfrac{1}{2} r^2\dot\theta = \dfrac{C}{2} = $ cste.

et $\mathcal{A} = \dfrac{C}{2}t + \underbrace{\text{cste}}_{0}$

3) <u>Loi des périodes</u> $T^2/a^3 = $ cste
(1618)

Sur une période T, $\mathcal{A} = \pi ab$ pour



$= \dfrac{CT}{2}$ et $b^2 = (1 - e^2)a^2$

$$\pi a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{CT}{2} \quad \text{et} \quad C=\sqrt{GMp} \Rightarrow \pi^2 a^4(1-e^2) = \frac{GMT^2}{4}p \quad \text{et} \quad p=a(1-e^2)$$

$$\Rightarrow \pi^2 a^3 = \frac{GMT^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\cancel{4}\pi^2 a^3}{\cancel{4}\pi^2 T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}} \longleftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

III/ Vitesses cosmiques

1) 1ère v_1

Vitesse de satellisation, orbite circulaire à la surf. de la Terre.

Orbite circulaire : $\vec{v} = R_T\dot{\theta}\vec{e_\theta}$
et $\mathcal{L} = \text{cste} = mR_T^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cste}$
$R_T\dot{\theta} = v_0 \Rightarrow \vec{v} = v_0\vec{e_\theta}$

Trajectoire circulaire : $\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{e_r}$

PFD : $-m\frac{v^2}{R_T}\vec{e_r} = -\frac{GM_Tm}{R_T^2}\vec{e_r} \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}} \simeq 7{,}9\ \text{km/s}$.

2) 2e v_2

Vitesse de lib. de la Terre : Part de la Terre, vitesse nulle à l'∞

Conservat° E_m :

$$E_{m_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = \cancel{GM}\ 0 = E_{m_\infty}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{GM_T}{R_T} \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}} \simeq 11{,}2\ \text{km/s}$$

3) 3e v_3

Vitesse de lib du ~~syst. Terre-Soleil~~ Soleil depuis la Terre : $v_3 = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a}}$, a = dist. $\odot - \oplus$

$\simeq 42{,}1\ \text{km/s}$

4) Limite :

* Frottements : échauffement trop fort.
* Vitesse initiale pas réalisable.

utilisation de moteur pour fournir de l'énergie au cours de la montée et pas catapultée.

Ccl :

En exo : * mise en orbite de sat., cas part. du sat géostat.
~~* modèle planétaire de l'atome,~~

Vérifier hyp : loi périodes $M \gg m$
(cf PFD)