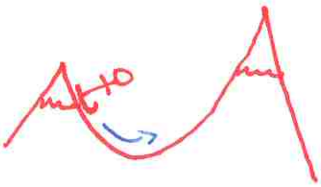
Effet tunnel : Application à la radioactivité α

Niveau : Licence

Prérequis :
- Introduction à la mécanique quantique
- Equation de Schrodinger
- Radioactivité (niveau lycée)

Introduction :

Cas classique

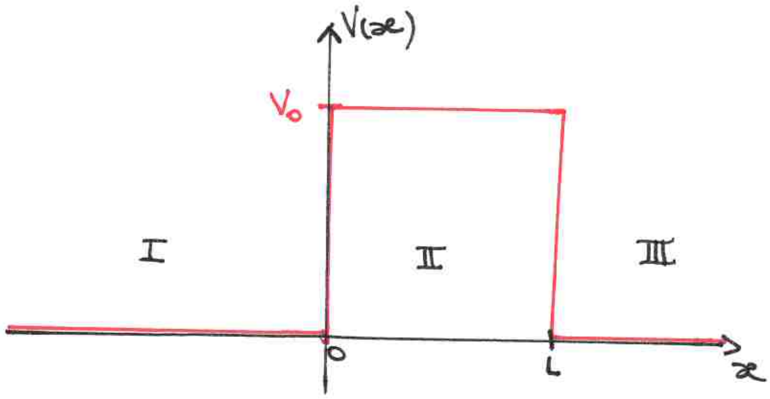


vs. cas quantique : une particule peut traverser une barrière de potentiel dont l'énergie est supérieure à celle de la particule.

I/ Effet tunnel

1) Le problème

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \in [0; L] \\ 0, & x > L \end{cases}$$



On se restreint au cas $0 < E < V_0$.

Equation de Schrodinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\,\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

On se restreint aux solutions stationnaires : $\psi = \phi(x)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

et $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x)$$

Régions I et III : $\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\phi = 0$ avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Régions II : $\frac{d^2\phi}{dx^2} - q^2\phi = 0$ avec $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

Solutions :

I : $\phi_1 = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx)$

II : $\phi_2 = A_2 \exp(qx) + B_2 \exp(-qx)$

III : $\phi_3 = A_3 e^{ikx} \underbrace{+ B_3 e^{-ikx}}_{=0}$ car pas de terme source/réflexion à droite.

Simulation superposition d'onde.

2) Conditions limites

ϕ est toujours continue et ϕ' est continue tant que la marche de potentiel n'est pas infinie

Donc $\begin{cases} \text{en } 0 : \ \phi_1(0) = \phi_2(0) \ \text{ et } \ \phi_1'(0) = \phi_2'(0) \\ \text{en } L : \ \phi_2(L) = \phi_3(L) \ \text{ et } \ \phi_2'(L) = \phi_3'(L) \end{cases}$

3) Transmission

Possibilité pour une particule de traverser la barrière de potentiel ?

* $\underline{t} = \frac{A_3}{A_1}$: Coef. de transmission en amplitude complexe.

* $\underline{r} = \frac{B_1}{A_1}$: —— réflexion ——

Donc $\phi_1 = A_1 \left(e^{ikx} + \underline{r}\, e^{-ikx} \right)$ et $\phi_3 = A_1 \underline{t}\, e^{ikx}$

③

D'après le système de CL : $\underline{t} = \dfrac{\exp(-ikL)}{ch(qL) + iC\, sh(qL)}$ avec $C = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)$

(pérez, p140)

Coef. de transmission en intensité ? $T = \dfrac{j_{inc}}{j_{trans}}$ $\left(= \dfrac{I_{inc}}{I_{trans}} \text{ car } I = j \cdot S \right)$

avec j le courant de probabilité :

$$j = Re\left(-\frac{i\hbar}{m}\left(\frac{d\varphi}{dx}\varphi^*\right)\right)$$

Dans la zone III :

$$j_t = Re\left(-\frac{i\hbar}{m} \times ik \underbrace{\varphi_3 \cdot \varphi_3^*}_{|A_1|^2|\underline{t}|^2}\right) = \frac{\hbar}{m} k\, |A_1|^2 |\underline{t}|^2$$

De m̂ : $j_i = \dfrac{|A_1|^2 \hbar k}{m}$ ce qui donne : $T = |\underline{t}|^2 = \dfrac{4k^2q^2}{4k^2q^2 + (k^2+q^2)^2 sh(qL)}$

Slide : Ce qui donne $T = \dfrac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2\, sh^2\left(\dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \times L\right)}$

Donc $L \to 0 : T \to 1$ $\quad V_0 \to 0 : T \to 1$

$L \to \infty : T \to 0$ $\quad m \to +\infty : T \to 0$

Approximation de la barrière épaisse : $sh^2(qL) \underset{qL \gg 1}{\sim} \frac{1}{4}\exp(2qL)$

donc $T \simeq \dfrac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2qL}$

Slide : Cas classique / Quantique / Barrière épaisse : Graph. + ODG.

L'effet tunnel permet de comprendre certains phénomènes naturels.

II/ La radioactivité α

1) Rappels

Slide : Historique | 1898 : Découverte par Rutherford
1904 : Particule α = noyau d'Hélium, Rutherford, Geiger

Emission par un noyau instable d'une particule α : $\boxed{{}^4_2He \text{ à une énergie } E_\alpha}$

Ex : $${}^{236}_{92}U \longrightarrow {}^{232}_{90}Th + {}^4_2He$$

Loi d'évolution du nombre de noyau : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$

$t_{1/2}$ = temps de 1/2 vie.

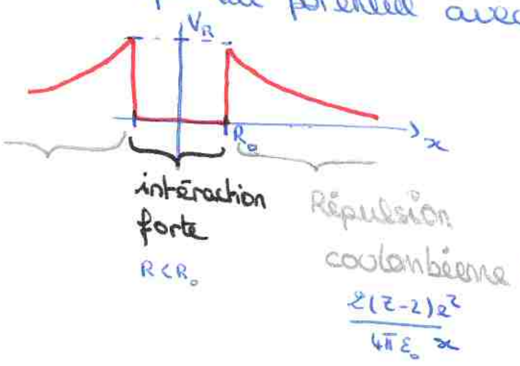
Slide : 1911 Geiger et Nuttal établissent une loi empirique de décroissance :

$$\ln(t_{1/2}) = A + \frac{B}{\sqrt{E_\alpha}}$$

Nous allons chercher à déterminer d'où vient cette loi et que valent A et B.

2) Modèle de Gamow, Gurney et Condon

Slide : Hypothèses : Particule α pré-existante dans le noyau
Profil du potentiel avec explications.

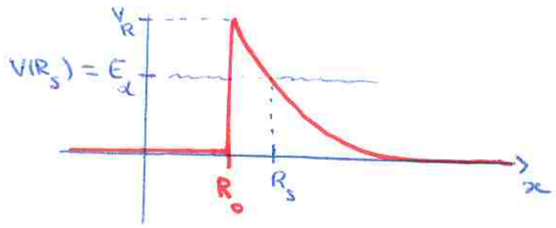


$R_0 \sim 7{,}7$ fm pour l'uranium.

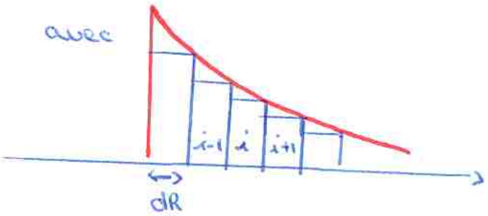
$\left.\begin{matrix} V_R \sim 30\,MeV \\ E_\alpha \sim 4\,MeV \end{matrix}\right\}$ Effet tunnel.

Pour pouvoir appliquer le résultat précédent, on découpe en sous parties : "méthode des rectangles", en barrière épaisse.

Soit R_s le rayon de sortie de la barrière de potentiel :



$T = \prod_i T_i$ avec



donc $\ln T = \sum_i \ln T_i$

avec $T_i = \dfrac{16 E_\alpha (V_i - E_\alpha)}{V_i^2} \times \exp\left(\dfrac{\sqrt{2m(V_i - E_\alpha)}}{\hbar} \times (-2) dR \right)$

Ce qui donne $\ln T_i = -\dfrac{2dR}{\hbar}\sqrt{2m(V_i - E_\alpha)} + \text{cste}$ car $\dfrac{16 E_\alpha (V_i - E_\alpha)}{V_i^2} \simeq 3$ en moyenne.

Notation continue :

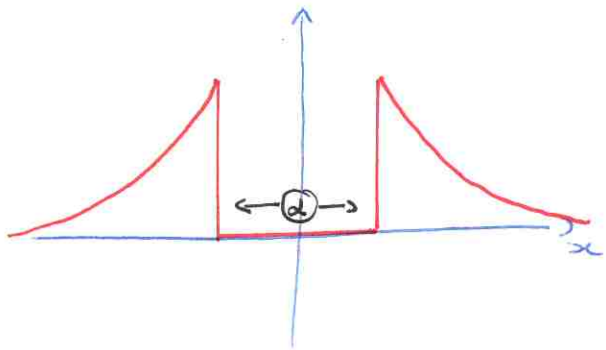
$$\ln T \simeq -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{R_0}^{R_s} \sqrt{V(x) - E_\alpha}\, dx \quad \text{avec } V(x) \propto \frac{C}{x}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \left[x\sqrt{\frac{C}{x} - E} - \frac{C \tan^{-1}\sqrt{\frac{C}{xE} - 1}}{\sqrt{E}} \right]_{R_0}^{R_s}$$

$$\Rightarrow \ln(T) = X + \frac{Y}{\sqrt{E_\alpha}}$$

Slide : Tracé numériquement avec données p.134 du manuel de radioactivité.

3) Loi de désintégration



On suppose que la particule α fait des allers-retours dans le noyau et est transmise avec la probabilité T à chaque fois qu'elle atteint la barrière.

Proba de réflexion pour $n = \frac{t}{\tau_0}$ rencontres avec la barrière :

$$P_R = (1 - T)^n$$

avec τ_0 tps de traversée de R_0 à $-R_0$.

Avec l'approx. de la barrière épaisse : $T \ll 1$ (quelques %)
(ellipse p.850)

Donc :
Slide ?
$$\begin{cases} P_R = 1 - \frac{Tt}{\tau_0} \text{ et } N(t) = N_0 \times P_R(t) \text{ or } N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \\ \text{Donc : } -\lambda t = \ln\left(1 - \frac{Tt}{\tau_0}\right) \simeq -\frac{Tt}{\tau_0} \text{ et } \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \end{cases}$$

Donc : $t_{1/2} = \ln(2) \frac{\tau_0}{T}$, on retrouve bien la loi de Nutall et Geiger :

$$\ln(t_{1/2}) = \ln(\ln(2)\tau_0) - \ln(T) \text{ et } \ln(T) = X + \frac{Y}{\sqrt{E_\alpha}}$$

Donc $\ln(t_{1/2}) = A + \frac{B}{\sqrt{E_\alpha}}$ Justifie la forte influence de E_α pour un même élément (≠ isotopes)

Slide.
$$\begin{cases} \hookrightarrow {}^{210}Po : t_{1/2} = 138{,}4\,j, \; E_\alpha = 5{,}41 \text{ MeV} \\ {}^{214}Po : t_{1/2} = 164{,}3\,\mu s, \; E_\alpha = 7{,}83 \text{ MeV} \end{cases}$$

4) Limites

* Forme du potentiel
* Oscillations de α dans le noyau ($\nu \simeq 10^{21}$ Hz)
* Marche surtout pour les noyaux lourds et pairs ($Z = 2n$)

Barrière épaisse

Ccl : Microscope effet tunnel (Slide)