Guía Unidad I

1. Considere cuatro objetos a, b, c, d. Supóngase que el orden en el cual se anotan esos objetos representa el resultado de un experimento. Sean A y B los sucesos definidos como sigue: A = {a está en el primer lugar}; B = {b está en el segundo lugar}.

a) Anote todos los elementos del espacio muestral.

U: { abcd, bacd, cabd, dabc,
abdc, badc, cadb, dacb,
acbd, bcad, cbad, dbac,
acdb, bcda, cbda, dbca,
adcb, bdca, cdca, dcab,
adbc, bdac, cdac, dcba }

b) Anote todos los elementos de los sucesos $A \cap B$ y $A \cup B$

Sea

A: { abcd, abdc, acbd, acdb, adcb, adbc }

B: { abcd, abdc, cbad, cbda, dbac, dbca }

$A \cap B$ = { abcd, abdc }

$A \cup B$ = { abcd, abdc, acbd, acdb, adcb, adbc, abcd, abdc, cbad, cbda, dbac, dbca }

2. a) Demuestre que para dos sucesos cualesquiera A_1 y A_2 tenemos que

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

Tenemos que por Teorema 1.3. (veáse Meyer, P. "Probabilidad y Aplicaciones Est." p.15)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

donde

$$P(A_1 \cap A_2) \geq 0$$

ent

$$P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

luego

$$\underline{P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)} \quad //$$

b) Demuestre que para n sucesos cualesquiera $A_1, \dots, A_n$ tenemos

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Por Inducción Matemática, tenemos que:

$$P(A) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

para $n=1$ se cumple ya que

$$P(A_1) = P(A_1).$$

para $n=k$ se cumple

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

para $n=k+1$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right] = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) - P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right)$$

como

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right) \geq 0$$

ent.

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right] \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}).$$

luego

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) \quad //$$

3. Demuestre que para enteros positivos n y k, con $k \leq n$ se cumple que

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,[n-1-(r-1)]!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!}$$

multiplicamos x 1 cada termino;

$$= \frac{(n-1)!\,r}{(r-1)!\,(n-r)!\,r} + \frac{(n-1)!\,(n-r)}{r!\,(n-r-1)!\,(n-r)}$$

$$= \frac{(n-1)!\,r}{r!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!\,(n-r)}{r!\,(n-r)!} = \frac{(n-1)!\,(r+n-r)}{r!\,(n-r)!} = \frac{(n-1)!\,n}{r!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r} \quad //$$

4.

a) Supóngase que se escriben tres dígitos 1, 2 y 3 en un orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un dígito ocupe su lugar propio?

A: { 123, 132, 213, 231, 312, 321 }

$$f(a) = \frac{4}{3!} = \frac{4}{6}$$

b) Lo mismo que en a) con los dígitos 1, 2, 3 y 4

B: { 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321 }

$$P(b) = \frac{15}{4!} = \frac{15}{24}$$

c) Lo mismo que en a) con los dígitos $1, 2, 3, \ldots, n$.

Sea

A: al menos un dígito ocupa su lugar propio.

& A_1: 1 ocupa su lugar propio.

A_2: 2 ocupa su lugar propio.

A_3: 3 ocupa su lugar propio.

⋮

A_n: n ocupa su lugar propio.

por lo que: por Teorema 1.4 (Meyer P. "Probabilidad y Apl. Est" p.1

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<r=3}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \ldots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k).$$

d) Discutir la respuesta de c) si 'n' es grande.

Si 'n' es grande, la probabilidad 'parece' crecer, sin embargo no lo hace proporcionalmente debido a que la condición de restarle la intersección entre sucesos.

5. Un lote contiene n artículos. Si se sabe que r artículos son defectuosos y se inspeccionan en un orden aleatorio, ¿Cuál es la probabilidad de que el k-ésimo artículo ($k \geq r$) inspeccionado sea el último defectuoso en el lote?

- A: Suceso de que el k-ésimo artículo ($k \geq r$) sea el último defectuoso.
  - $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$: Los casos totales son las formas de escoger 'k' objetos entre 'n' posibles importando el orden en que se hace.

- $C_{k-1}(r-1) = \binom{k-1}{r-1}$: los casos favorables los podemos escribir como una combinación. Sabemos que en la posición 'k' saldrá uno de los objetos 'r' defectuosos. los otros "r-1" saldrán entre el resto de 'k-1' primeros puestos.

- $P(r) = r!$: Tenemos una permutación del resto de objetos defectuosos ordenados.

- $V_{k-r}(n-r) = \frac{(n-r)!}{[(n-\cancel{r})-(k-\cancel{r})]!} = \frac{(n-r)!}{(n-k)!}$: formas de elegir los puestos no defectuosos.

Por lo que:

$$P(A) = \frac{C_{k-1}(r-1) \cdot P(r) \cdot V_{k-r}(n-r)}{V_k(n)}$$

$$= \frac{\binom{k-1}{r-1} \cdot r! \cdot \frac{(n-r)!}{(n-k)!}}{\frac{n!}{(n-k)!}}$$