

# *ALCTG*

*The Scientist must set in order. Science is built up with facts, as a house is with stones. But a collection of facts is no more a science than a heap of stones is a house.*

*Science and Hypothesis*  
Henri Poincare

# Table of contents

<b>Глава 1</b>	<b>Булева алгебра</b>	<b>2</b>
1.1	Булевы функции	2
1.1.1	Домашняя работа .....	3

# Булева алгебра

## §1.1 Булевы функции

### Домашняя работа

**Задача 1.1.1.**  $x, y, z$  — целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(x = y) \wedge ((y < x) \rightarrow (2z > x)) \wedge ((x < y) \rightarrow (x > 2z)) \quad (1.1)$$

Чему равно  $x$ , если  $z = 7, y = 16$ ?

**Решение.** Подставляем из условия значения  $z$  и  $y$  и преобразуем выражение (1.5)

$$\begin{aligned} &\neg(x = 16) \wedge (\neg(x > 16) \vee (x < 14)) \wedge (\neg(x < 16) \vee (x > 14)), \\ &(x \neq 16) \wedge ((x \leq 16) \vee (x < 14)) \wedge ((x \geq 16) \vee (x > 14)). \end{aligned}$$

Заметим, что итоговое выражение, как и изначальное, является конъюнкцией трех выражений. Тогда оно истинно, если каждое из выражений должно быть истинным. Это умозаключение приводит нас к трем условиям:

1.  $(x \neq 16) = 1$ , если  $x \neq 16$ ;
2.  $((x \leq 16) \vee (x < 14)) = 1$ , если  $x \leq 16$ ;
3.  $((x \geq 16) \vee (x > 14)) = 1$ , если  $x > 14$ .

Пользуясь методом очень пристального взгляда, замечаем, что все три условия выше можно переписать так

$$14 < x < 16,$$

откуда

$$x = 15.$$

**Ответ.**  $x = 15$

**Задача 1.1.2.** Постройте таблицу истинности для функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \downarrow (x_2 \rightarrow x_3) \quad (1.2)$$

**Решение.** Таблица истинности:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Функция на всех значениях  $x_1, x_2, x_3$  принимает значение 0.

**Задача 1.1.3.** Докажите, что

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1) \quad (1.3)$$

**Решение.** Пусть  $f_1 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$ ,  $f_2 = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1)$ . Тогда

$x_1$	$x_2$	$f_1$	$f_2$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Видно, что векторы значений  $f_1$  и  $f_2$  совпадают, а значит,  $f_1 = f_2$  (т.е. утверждение (1.3) ВЕРНО).

**Задача 1.1.4.** Докажите формулу

$$\bigvee_{i,j;i \neq j} x_i \oplus x_j = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n) \quad (1.4)$$

**Решение.** Рассмотрим 2 случая:

1.  $\bigvee_{i,j;i \neq j} x_i \oplus x_j = 1 \Rightarrow$  есть как минимум одна пара разных значений ( $x_i = 1, x_j = 0$ ). Тогда  $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) = 1, \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n = 1 \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n) = 1$ ;
2.  $\bigvee_{i,j;i \neq j} x_i \oplus x_j = 1 \Rightarrow$  все  $x_i$  и  $x_j$  равны 0. Тогда в правой части либо  $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) = 0$ , либо  $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n) = 0$ , а значит и вся правая часть равна 0.

Видно, что векторы значений левой и правой частей равенства совпадают, а значит, формула верна.

**Задача 1.1.5.** Постройте таблицу истинности для  $f$  и выразите её через операции  $\vee, \wedge, \neg$ , если

$$f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3. \quad (1.5)$$

**Решение.** Таблица истинности:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Перестроение с использованием  $\vee, \wedge, \neg$ :

$$f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3.$$

**Ответ.**  $f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3.$