

ALCTG

The Scientist must set in order. Science is built up with facts, as a house is with stones. But a collection of facts is no more a science than a heap of stones is a house.

Science and Hypothesis
Henri Poincare

Table of contents

| | | |
|----------------|-----------------------|----------|
| Глава 1 | Булева алгебра | 3 |
| 1.1 | Булевы функции | 3 |
| 1.1.1 | Теория..... | 4 |
| 1.1.2 | Задачи | 4 |

Введение

If you give a man a fish he is hungry again in an hour. If you teach him to catch a fish you do him a good turn.

— Proverbial wisdom

Булева алгебра

§1.1 Булевы функции

Теория

Задачи

Задача 1.1.1.

Задача 1.1.2.

Мини к/р №1. Алгебра логики: введение. В1

Ех. 1. Постройте таблицу истинности для функции $f = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3$

Требуемая таблица представлена ниже:

| x_1 | x_2 | x_3 | $(x_1 \oplus x_2)$ | f |
|-------|-------|-------|--------------------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Ех. 2. Докажите формулу разложения:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \wedge (\neg x_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_n))$$

Пусть переменная x_1 — —. :

$$f(0, \dots, x_n) = f(1, \dots, x_n)$$

Если $f(x) = 1$ при фиксированных x_2, \dots, x_n

$$1 = (x_1 \vee 1) \wedge (\neg x_1 \vee 1)$$

$$1 = 1 \wedge 1 = 1$$

Если $f(x) = 0$ при фиксированных x_2, \dots, x_n

$$0 = (x_1 \vee 0) \wedge (\neg x_1 \vee 0)$$

$$0 = x_1 \wedge \neg x_1 = 0$$

Пусть переменная x_1 — —. :

$$f(0, \dots, x_n) \neq f(1, \dots, x_n)$$

$$\text{При } f(0, \dots, x_n) = 1, f(1, \dots, x_n) = 0$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = (0 \vee x_1) \wedge (1 \vee x_1) = x_1 \wedge 1 = x_1$$

Обратное допущение доказывается аналогично.

Ех. 3. Выразите конъюнкцию и дизъюнкцию, используя только штрих Шеффера.

а) Сравним векторы значений функций $f_1 = (x \wedge y)$ и $f_2 = (x | y)$:

$$f_1 = 0001, f_2 = 1110$$

$$f_2, \cdot, f_1, f_2(f_2, f_2) \text{ или } (x | y) | (x | y)$$

| x | y | $(x y)$ | $(x y)$ | $f_2(f_2, f_2)$ |
|-----|-----|-----------|-----------|-----------------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Данная таблица значений совпадает с конъюнкцией.

б) Пусть $f_3 = x \vee y$

$$f_3 = 0111$$

$$x = 0101, y = 0011$$

$f_2(x, x)$ получаем вектор значений 1010 (по аналогии с инверсией, т.к. штрих Шеффера при 2 истинах возвращает ложь).

При $f_2(y, y)$ вектор значений – 1100

Очевидно, для того, чтобы в результате получился вектор значений 0111, достаточно использовать штрих Шеффера на $f_2(x, x)$ и $f_2(y, y)$ (при нем первые значения соответствующих функций равны истине и обращаются в ложь, а остальные дают истину)

Т.е. $(x | x) | (y | y)$ и есть искомая функция.

Ех. 4.