ALCTG

The Scientist must set in order. Science is built up with facts, as a house is with stones. But a collection of facts is no more a science than a heap of stones is a house.

Science and Hypothesis
Henri Poincare

Автор — Дима Гущин

Table of contents

Булева алгебра

§1.1 Булевы функции

Домашняя работа

Задача 1.1.1. x, y, z — целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(x = y) \wedge ((y < x) \to (2z > x)) \wedge ((x < y) \to (x > 2z)) \tag{1.1}$$

Чему равно x, если $z = 7$, $y = 16$?

Решение. Подставляем из условия значения z и y и преобразуем выражение (1.1)

$$\neg(x = 16) \wedge (\neg(x > 16) \vee (x < 14)) \wedge (\neg(x < 16) \vee (x > 14)),$$

$$(x \neq 16) \wedge ((x \leqslant 16) \vee (x < 14)) \wedge ((x \geqslant 16) \vee (x > 14)).$$

Заметим, что итоговое выражение, как и изначальное, является конъюнкцией трех выражений. Тогда оно истинно, если каждое из выражений должно быть истинным. Это умозаключение приводит нас к трем условиям:

1. $(x \neq 16) = 1$, если $x \neq 16$;
2. $((x \leqslant 16) \vee (x < 14)) = 1$, если $x \leqslant 16$;
3. $((x \geqslant 16) \vee (x > 14)) = 1$, если $x > 14$.

Пользуясь методом очень пристального взгляда, замечаем, что все три условия выше можно переписать так

$$14 < x < 16,$$

откуда

$$x = 15.$$

Ответ. $x = 15$

Задача 1.1.2. Постройте таблицу истинности для функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \downarrow (x_2 \to x_3) \tag{1.2}$$

Решение. Давайте преобразуем выражение (1.2). Для этого представим $x_2 \to x_3$ как $\neg x_2 \vee x_3$. Далее вспомним, что

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y},$$

откуда получаем, что

$$f = \neg(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2 \vee x_3).$$

Видно, что под отрицанием стоит дизъюнкция, которая на любых наборах будет равна единице, поэтому f — тождественный ноль.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Таблица истинности функции f.

Задача 1.1.3. Докажите, что

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \tag{1.3}$$

Решение. Пусть $f_1 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$, $f_2 = (x1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)$.

Видно, что векторы значений f_1 и f_2 совпадают, а значит, $f_1 = f_2$(т.е. утверждение (1.3) ВЕРНО).

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Таблица истинности функции f_1, f_2.

Задача 1.1.4. Докажите формулу

$$\bigvee_{i,j;i\neq j} x_i \oplus x_j = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \ldots \vee \neg x_n) \tag{1.4}$$

Решение. Рассмотрим 2 случая:

1. $\bigvee_{i,j;i\neq j} x_i \oplus x_j = 1 \Rightarrow$ есть как минимум одна пара разных значений($x_i = 1$,$x_j = 0$). Тогда $(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) = 1$,$\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \ldots \vee \neg x_n) = 1 \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \ldots \vee \neg x_n) = 1$;

2. $\bigvee_{i,j;i\neq j} x_i \oplus x_j = 1 \Rightarrow$ все x_i и x_j равны 0. Тогда в правой части либо $(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n) = 0$, либо $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee ... \vee \neg x_n) = 0$, а значит и вся правая часть равна 0.

Видно, что векторы значений левой и правой частей равенства совпадают, а значит, формула верна.

Задача 1.1.5. Постройте таблицу истинности для f и выразите её через операции $\vee$,$\wedge$,$\neg$, если

$$f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3. \quad (1.5)$$

Решение.

1. Функция f принимает значение 0 только при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.Во всех остальных случаях $f = 1$;

2. Перестроение с использованием $\vee$, $\wedge$, $\neg$:
   $f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.
   Видно, что функция f_1 принимает значение 0 только при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
   А во всех остальных случаях $f_1 = 1$.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблица истинности функции f.

Ответ. $f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

§1.2 Теорема Поста

Домашняя работа

Задача 1.2.1. Постройте СДНФ и СКНФ для функции $(xz \oplus \overline{y}) \equiv (x \to y)$.

Решение. Построим таблицу истинности:

x	y	z	$x \wedge y$	$\bar{z}$	$xz \oplus \bar{z}$	$x \to y$	f
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1

Таблица истинности функции.

1. $f = x^0y^0z^0 \vee x^0y^0z^1 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^1z^1$
2. $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xyz$ — СДНФ
3. $f = (x^1 \vee y^0 \vee z^1) \wedge (x^0 \vee y^1 \vee z^1) \wedge (x^1 \vee y^0 \vee z^0) \wedge (x^0 \vee y^0 \vee z^1)$
4. $f = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ — СКНФ

Задача 1.2.2. Постройте замыкание базиса $\{\neg, \oplus\}$.

Решение. Построив таблицы истинности $f_1 = \neg x, f_2 = x \oplus 1$, получим, что их векторы значений совпадают, значит, $\neg x = x \oplus 1$. Тогда

$$[\neg, \oplus] = [1, \oplus] \subseteq L$$

.

Задача 1.2.3. Укажите существенные и несущественные (фиктивные) переменные функции $f(x_1, x_2, x_3) = 00111100$ и разложите ее в ДНФ и КНФ.

Решение. Построим таблицу истинности и напишем сначала СДНФ и СКНФ данной функции f:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Таблица истинности функции f.

1. $f = x_1^0 x_2^1 x_3^0 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^0 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^1$,
   $f = \bar{x_1} x_2 \bar{x_3} \vee \bar{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x_2} \bar{x_3} \vee x_1 \bar{x_2} x_3$ — СДНФ.

2. $f = (x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^1) \wedge (x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^0) \wedge (x_1^0 \vee x_2^0 \vee x_3^1) \wedge (x_1^0 \vee x_2^0 \vee x_3^0)$,
   $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x_3}) \wedge (\bar{x_1} \vee \bar{x_2} \vee x_3) \wedge (\bar{x_1} \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3})$ — СКНФ.

Из таблицы истинности видно, что если брать одинаковые значения x_1 и x_2, то значени функции при изменении значений x_3 меняться не будет. Значит, x_3 - фиктивная переменная. Про x_1, x_2 такого сказать нельзя, поэтому они являются существенными переменными. Тогда:

1. КНФ: $f = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x_1} \vee \bar{x_2}) \wedge (\bar{x_1} \vee \bar{x_2} \vee)$

2. ДНФ: $f = \bar{x_1} x_2 \vee \bar{x_1} x_2 \vee x_1 \bar{x_2} \bar{\vee} x_1 \bar{x_2}$

Задача 1.2.4. Докажите или опровергните полноту системы функций $\{\oplus, \to\}$.

Решение. Выразим функции $\oplus$ и $\to$ через $\vee$,$\wedge$,$\neg$:

1. $(x \to y) \equiv (\neg x \vee y)$,

2. $(x \oplus y) \equiv (x\bar{y} \vee \bar{x}y)$

Значит, система функций $\{\oplus, \to\}$ полна.

Задача 1.2.5. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — несамодвойственная функция. Докажите, что константы $0, 1$ вычисляются в базисе $\{\neg, f\}$.

Решение. Так как f — несамодвойственная функция, то существует последовательность значений $/a_1, ..., a_n/$ из нулей и единиц, такая что $f(a_1, ..., a_n) = f(\bar{a_1}, ..., \bar{a_n}) = c$, где $c = 0$ или $c = 1$;
Подставим для любых i в качестве аргументов в f:
$x_i = x$, если $a_i = 1$ и $x_i = \bar{x}$, если $a_i = 0$;
$g(x) = f(x_1, ..., x_n)$:

1. $g(1) = f(a_1, ..., a_n)$
2. $g(0) = f(\bar{a_1}, ..., \bar{x_n})$

$g(x) = c$, а $g(\bar{x}) = \bar{c}$.

Задача 1.2.6. Запишите в виде КНФ функцию от n переменных, принимающую значение 0 лишь на $\vec{0}$ и на $\vec{1}$. Покажите, что эта функция равна дизъюнкции всевозможных скобок $(x_i \oplus x_j)$, где $i \neq j$.

Решение. КНФ:
$(x_1 \vee ... \vee x_n) \wedge (x_1 \vee ... \vee xn_)$
Покажем, что функция равна дизъюнкции всевозможных скобок $(x_i \oplus x_j)$ для всех $i \neq j$

1. если $x_i = x_j$:
   $(0 \oplus 0) \vee ... \vee (0 \oplus 0) = 0;$
   $(1 \oplus 1) \vee ... \vee (1 \oplus 1) = 0;$
2. найдется скобка, где $x_i \neq x_j$:
   $(0 \oplus 0) \vee ... \vee (0 \oplus 1) \vee ... \vee (1 \oplus 1) = 1;$

Задача 1.2.7. Функцию алгебры логики называют *симметрической,* если она не меняет своего значения при любой перестановке значений переменных местами. Покажите, что функция $\overline{xy} \vee \overline{yz} \vee \overline{zx}$ — симметрическая. Найдите число симметрических функций от n переменных.

Решение. Построим таблицу истинности для функции f:

x	y	z	$\bar{xy}$	$\bar{xz}$	$\bar{yz}$	f
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Таблица истинности функции f.

В каждом из наборов, где количество единиц меняется от 0 до 3 в наборе, функция принимает одинаковое значение. То есть на наборах $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$,$(1, 0, 0)$ функция не меняет значение. Аналогично для наборов, где единицы 2 единицы из трех. Поменяв местами переменные, вектор значений не изменился, значит, функция является симметрической.

Симметрических функций от n переменных существует 2^{n+1} штук, потому что существует 2 варианта значения функции, не зависящих от расположения переменных на одном наборе. Таких наборов $n+1$ штук, а значит, симметрических функций от n переменных 2^{n+1}.

Задача 1.2.8. Докажите, что любая неконстантная симметрическая функция существенно зависит от всех своих переменных.

Решение. Предположим обратное. Значит неконстантная симметрическая функция несущественно зависит от переменных, то есть

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, ...x_n) = f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, ...x_n)$$

, а так как эта функция симметрическая, то от перестановки переменных значение ее меняться не будет: $f(\overleftarrow{x}) = 0 \vee f(\overleftarrow{x}) = 1$, что противоречит высказыванию о том, что функция неконстантная. Значит, неконстантная симметрическая функция существенно зависит от переменных.

Задача 1.2.9. Докажите, что если система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ полна, то и система двойственных функций $\{f_1^*, \ldots, f_n^*\}$ также полна.

Решение. Донт ноу!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!