

ALCTG

The Scientist must set in order. Science is built up with facts, as a house is with stones. But a collection of facts is no more a science than a heap of stones is a house.

Science and Hypothesis
Henri Poincare

Table of contents

| | | |
|----------------|-----------------------|----------|
| Глава 1 | Булева алгебра | 2 |
| 1.1 | Булевы функции | 2 |
| 1.1.1 | Домашняя работа | 3 |

Булева алгебра

§1.1 Булевы функции

Домашняя работа

Задача 1.1.1. x, y, z — целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(x = y) \wedge ((y < x) \rightarrow (2z > x)) \wedge ((x < y) \rightarrow (x > 2z)) \quad (1.1)$$

Чему равно x , если $z = 7, y = 16$?

Решение. Подставляем из условия значения z и y и преобразуем выражение (1.5)

$$\begin{aligned} &\neg(x = 16) \wedge (\neg(x > 16) \vee (x < 14)) \wedge (\neg(x < 16) \vee (x > 14)), \\ &(x \neq 16) \wedge ((x \leq 16) \vee (x < 14)) \wedge ((x \geq 16) \vee (x > 14)). \end{aligned}$$

Заметим, что итоговое выражение, как и изначальное, является конъюнкцией трех выражений. Тогда оно истинно, если каждое из выражений должно быть истинным. Это умозаключение приводит нас к трем условиям:

1. $(x \neq 16) = 1$, если $x \neq 16$;
2. $((x \leq 16) \vee (x < 14)) = 1$, если $x \leq 16$;
3. $((x \geq 16) \vee (x > 14)) = 1$, если $x > 14$.

Пользуясь методом очень пристального взгляда, замечаем, что все три условия выше можно переписать так

$$14 < x < 16,$$

откуда

$$x = 15.$$

Ответ. $x = 15$

Задача 1.1.2. Постройте таблицу истинности для функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \downarrow (x_2 \rightarrow x_3) \quad (1.2)$$

Решение. Таблица истинности:

| x_1 | x_2 | x_3 | f |
|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Функция на всех значениях x_1, x_2, x_3 принимает значение 0.

Задача 1.1.3. Докажите, что

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1) \quad (1.3)$$

Решение. Пусть $f_1 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$, $f_2 = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1)$. Тогда

| x_1 | x_2 | f_1 | f_2 |
|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Видно, что векторы значений f_1 и f_2 совпадают, а значит, $f_1 = f_2$ (т.е. утверждение (1.3) ВЕРНО).

Задача 1.1.4. Докажите формулу

$$\bigvee_{i,j;i \neq j} x_i \oplus x_j = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n) \quad (1.4)$$

Решение. Рассмотрим 2 случая:

1. $\bigvee_{i,j;i \neq j} x_i \oplus x_j = 1 \Rightarrow$ есть как минимум одна пара разных значений ($x_i = 1, x_j = 0$). Тогда $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) = 1, \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n = 1 \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n) = 1$;
2. $\bigvee_{i,j;i \neq j} x_i \oplus x_j = 0 \Rightarrow$ все x_i и x_j равны 0. Тогда в правой части либо $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) = 0$, либо $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n) = 0$, а значит и вся правая часть равна 0.

Видно, что векторы значений левой и правой частей равенства совпадают, а значит, формула верна.

Задача 1.1.5. Постройте таблицу истинности для f и выразите её через операции \vee, \wedge, \neg , если

$$f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3. \quad (1.5)$$

Решение. Таблица истинности:

| x_1 | x_2 | x_3 | f |
|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Перестроение с использованием \vee, \wedge, \neg :

$$f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3.$$

Ответ. $f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3.$