Skript Lineare Algebra & Geometrie 1, Hertrich-Jeromin

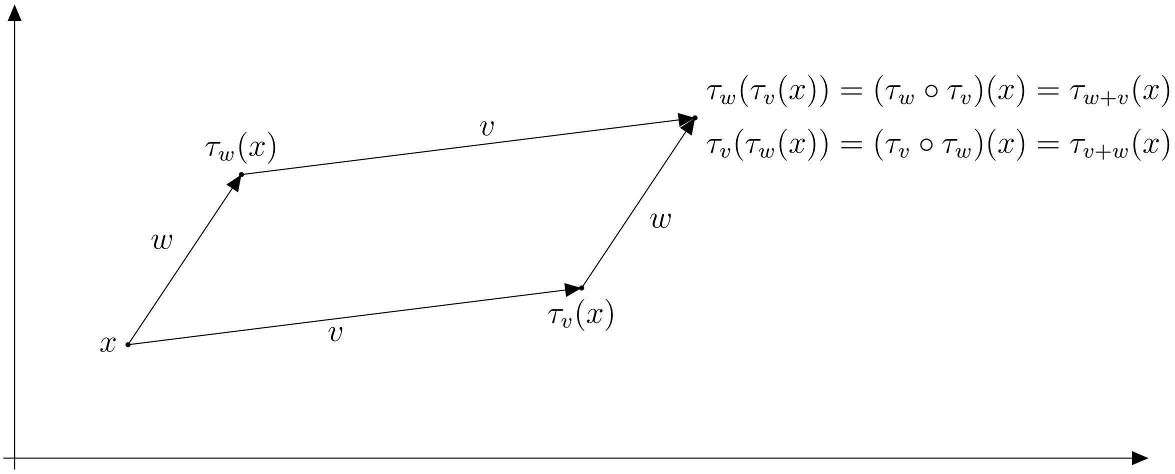
Studierendenmitschrift

1. Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

0 Affine Geometrie

0.1 Affine Räume



0.1.1 Definition (Geometrie nach Klein)

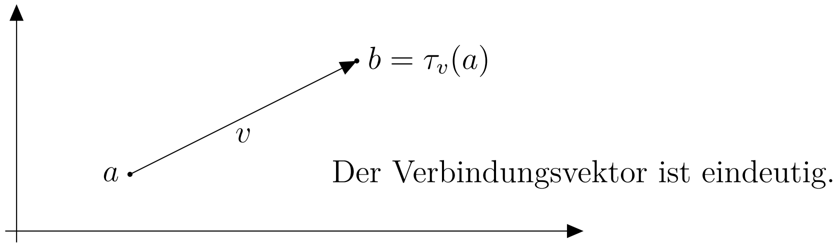
Eine Geometrie besteht aus einer Menge A (z.B. Punktmenge) und einer darauf operierenden Gruppe $(G, *)$, d.h., es gibt eine Gruppenoperation

$$\rho : G \times A \to A, (g, a) \mapsto \rho_g(a)$$

wobei gilt

(i) $\forall a \in A \forall g, h, \in G : (\rho_g \circ \rho_h)(a) = \rho_{g*h}(a)$

(ii) $\forall a \in A : \rho_e(a) = a$ für das neutrale Element $e \in G$



0.1.2 Definition (Affiner Raum)

Sei K ein Körper. Ein affiner Raum (AR) (A, V, τ) über K besteht aus einer Menge A, einem K-Vektorraum V und einer Gruppenoperation

$$\tau : V \times A \to A, (v, a) \mapsto \tau_v(a)$$

von V (als additive Gruppe $(V, +)$) auf A, die einfach transitiv ist, d.h.

$$\forall a, b \in A \exists! v \in V : b = \tau_v(a)$$

Weiters nennen wir

- Elemente von A Punkte,
- V den Richtungsvektorraum oder Tangentialraum von A,
- v mit $\tau_v(a) = b$ den Verbindungsvektor von a nach b,
- $\tau_v : A \to A, a \mapsto \tau_v(a)$ die Translation von v
- und $\dim V$ die Dimension des affinen Raums A

Bemerkung Die Translationen eines AR A bilden eine abelsche Gruppe.

Alternative Notation:

$$a + v := \tau_v(a) \text{ und } b - a := v, \text{ falls } b = \tau_v(a)$$

Mit dieser alternativen Schreibweise für die Operation von $(V, +)$ auf A, erscheinen die Bedingungen, dass $V = (V, +)$ einfach transitiv auf A operiert, „offensichtlich“.

Gruppenoperation:

(i) $\forall a \in A \forall v, w, \in V : (a+v)+w = a+(v+w)$ ist kurz für $\tau_w(\tau_v(a)) = \tau_{v+w}(a)$, entspricht also nicht der Assoziativität.

(ii) $\forall a \in A : a+0 = a$ entspricht $\tau_0(a) = a$

Transitivität:

$$\forall a, b \in A \exists v \in V : b = a + v$$

Nämlich: sind $a, b \in A$ gegeben, so liefert $v := b-a$ (weil V einfach transitiv operiert) eindeutig den gesuchten Vektor.

0.1.3 Beispiel & Definition (affiner Standardraum)

Jeder K-VR liefert einen affinen Raum (V, V, τ) mit der Operation

$$\tau : V \times V \to V, (v, a) \mapsto \tau_v(a) := a + v$$

von V auf sich selbst – die Unterscheidung zwischen Punkten und Vektoren wird dann etwas undurchsichtig.

Der affine Standardraum (K^n, K^n, τ) wird mit A^n bezeichnet.

0.1.4 Beispiel & Definition (Ursprung)

Sei (A, V, τ) AR, für jede Wahl eines Ursprungs $o \in A$ ist

$$\tau(o) : V \to A, v \mapsto \tau_v(o)$$

eine Bijektion – ein VR ist also ein „AR mit Ursprung“.

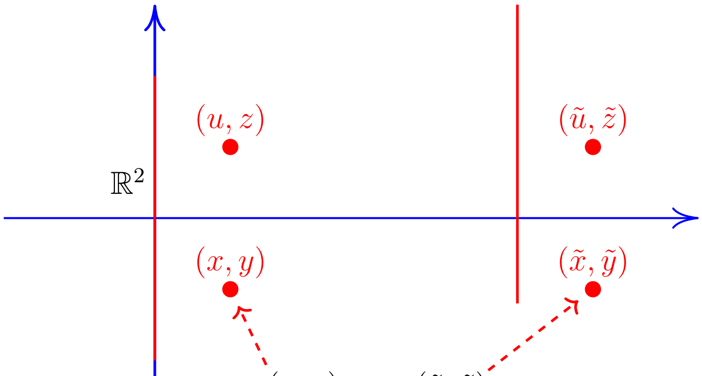
Beispiel Auf einem Zylinder

$$Z^2 := S^1 \times \mathbb{R} := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$$

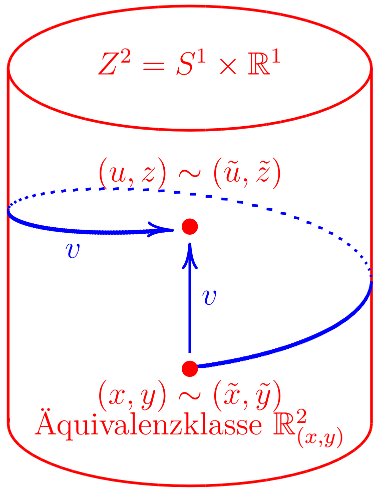
liefert die Operation

$$\tau : \mathbb{R}^2 \times Z^2 \to Z^2, (v, a) \mapsto a + v$$

keinen affinen Raum, da diese Operation nicht einfach transitiv ist: zu je zwei Punkten gibt es unendlich viele „Verbindungsvektoren“.



$$(x,y) \sim (\tilde{x},\tilde{y}) \;:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}: & \tilde{x} = x + 2k\pi, \\ & \tilde{y} = y \end{cases}$$



0.1.5 Beispiel & Definition (affiner Unterraum)

Ist $U \subset V$ UVR eines K-VR V, so liefert jedes $v \in V$ die Nebenklasse

$$A = v + U$$

einen affinen Raum (A, U, τ) mit

$$\tau : U \times A \to A, (u, a) \mapsto \tau_u(a) := a + u;$$

offensichtlich ist die Operation wohldefiniert (operiert auf der Nebenklasse) und einfach transitiv.

Eine Nebenklasse $A = v + U \subset V$ nennt man daher auch einen affinen Unterraum des VR V.

$A' \subset A$ ist affiner Unterraum (AUR) des affinen Raumes (A, V, τ), falls

$$\exists a \in A \exists U \subset V \text{UVR} : A' = a + U = \{\tau_u(a) \mid u \in U\}.$$

Ist $\dim A' = 1$ oder $\dim A' = 2$, so heißt A' (affine) Gerade bzw. Ebene; ist $\dim A' < \infty$ und $\dim A' = \dim A - 1$, so heißt A' (affine) Hyperebene.

Bemerkung Jeder AUR ist selbst AR mit der „geerbten“ (eingeschränkten) Operation.

Beispiel Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $w \in f(V)$, so erhält man einen affinen Raum

$$(f^{-1}(\{w\}), \ker f, \tau) \text{ mit } \tau_u(a) := a + u.$$

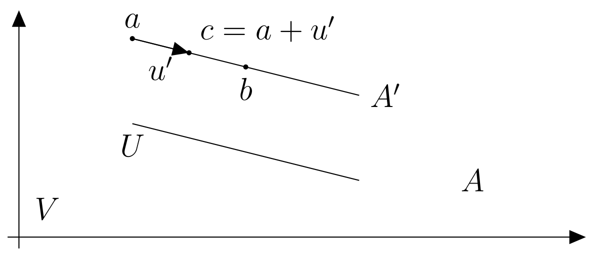
Ist $f \in V^* \setminus \{o\}$ (und $\dim V < \infty$), so wird $f^{-1}(\{x\}) \subset V$ für jedes $x \in K(= f(V))$ eine affine Hyperebene in (V, V, τ) – nach Rangsatz.

Bemerkung Ist $A' = a + U \subset A$ AUR des AR (A, V, τ), so gilt

$$\forall b \in A' \exists u \in U : b = \tau_u(a)$$

und damit

$$\begin{aligned} b + U &= \{\tau_{u'}(b) \mid u' \in U\} \\ &= \{(\tau_{u'} \circ \tau_u)(a) = \tau_{u'+u}(a) \mid u' \in U\} \\ &= \{\tau_{u''}(a) \mid u'' \in U\} = a + U = A' \end{aligned}$$



Damit zeigt man: Ist $(A'_i)_{i \in I}$ eine Familie AUR $A'_i \subset A$ eines AR A, so ist der Schnitt leer oder ein affiner Unterraum. Ist nämlich der Schnitt nicht leer, d.h.,

$$\exists a \in A \forall i \in I : a \in A'_i,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} &\forall i \in I : A'_i = a + U_i \text{ mit einem geeigneten UVR } U_i \subset V \\ &\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A'_i = a + \bigcap_{i \in I} U_i \text{ und } U := \bigcap_{i \in I} U_i \subset V \text{ ist UVR.} \end{aligned}$$

0.1.6 Definition (affine Hülle)

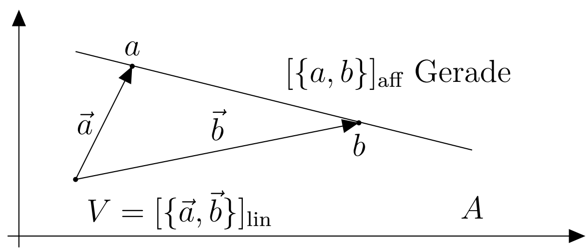
Die affine Hülle $[S]$ einer Teilmenge eines affinen Raumes A ist der Schnitt aller S enthaltenden AUR $A' \subset A$,

$$[S] = \bigcap_{S \subset A' \text{AUR}} A'.$$

Bemerkung Die affine Hülle einer Teilmenge $S \subset A$ ist also der kleinste S enthaltende affine Unterraum von A.

Achtung: In einem K-VR V (den kann man auch als AR auffassen, siehe Beispiel vorher) sind die lineare Hülle und die affine Hülle (in V aufgefasst als AR) im Allgemeinen verschieden:

$$[S]_{\text{lin}} = \bigcap_{S \subset U \text{ UVR}} U \neq \bigcap_{S \subset A \text{ AUR}} A = [S]_{\text{aff}}$$



Beispiel Für $S = \{a\} \subset V$ mit $a \neq 0$ gilt

$$[S]_{\text{lin}} = \{ax \in A = V \mid x \in K\} \neq \{a\} = [S]_{\text{aff}}$$

allgemein gilt:

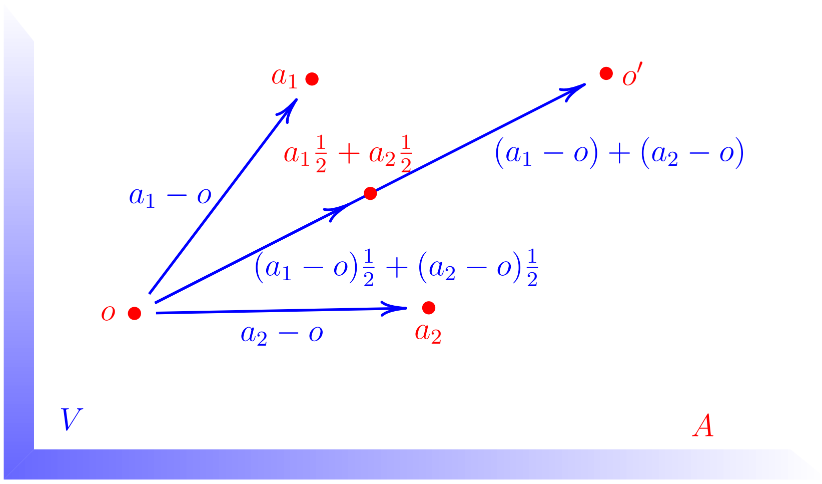
$$[S]_{\text{aff}} \subset [S \cup \{0\}]_{\text{aff}} = [S]_{\text{lin}}$$

Beweis in Aufgabe 45.

0.1.7 Lemma & Definition (baryzentrischer Kalkül)

Seien $(a_i)_{i \in I}$ und $(x_i)_{i \in I}$ Familien in einem AR A über K bzw. in K, wobei

$$\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty \text{ und } \sum_{i \in I} x_i = 1;$$



dann ist die mit einem beliebigen Ursprung $o \in A$ definierte Affinkombination

$$\sum_{i\in I} a_i x_i := o + \sum_{i\in I}(a_i - o)x_i$$

wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Ursprungs $o \in A$. Dann heißt

$$s := \sum_{i\in I} a_i x_i$$

Schwerpunkt oder Baryzentrum der Punkte a_i mit Gewichten x_i.

Beispiel Sind etwa $K = \mathbb{R}$ und $I = \{1, ..., n\}$, so erhält man mit $x_i = \frac{1}{n}$ für $i \in I$ den üblichen geometrischen Schwerpunkt der (endlichen) Punktmenge,

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{n}.$$

Achtung: Die Ausdrücke

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \text{ oder } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

sind sinnlos, da nicht definiert.

Beweis Zu zeigen: Sind $o, o' \in A$, so gilt

$$o' + \sum_{i\in I} v_i' x_i = o + \sum_{i\in I} v_i x_i, \text{ wobei } \begin{cases} v_i := a_i - o \\ v_i' := a_i - o' \end{cases}$$

Zunächst bemerken wir, dass mit $w := o' - o$ für $i \in I$ gilt: $v_i' + w = v_i$, denn:

$$\begin{aligned} \tau_{v_i'+w}(o) &= \tau_{v_i'}(\tau_w(o)) = \tau_{v_i'}(o') \\ &= a_i = \tau_{v_i}(o), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} o + \sum_{i\in I} v_i x_i &= o + \sum_{i \in I}(w + v_i')x_i = o + \sum_{i\in I} w x_i + \sum_{i\in I} v_i' x_i \\ = o + w \cdot \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} v_i' x_i &= o + w + \sum_{i\in I} v_i' x_i = o' + \sum_{i\in I} v_i' x_i \end{aligned}$$

0.1.8 Lemma (Affine Hülle und Affinkombination)

Ist $S \subset A$ Teilmenge eines AR A, so ist ihre affine Hülle

$$[S] = \{\sum_{a\in S} a x_a \mid \#\{a \in S \mid x_a \neq 0\} < \infty \wedge \sum_{a \in S} x_a = 1\}.$$

Beweis Wir setzen $S \neq \emptyset$ voraus und wählen $o \in S$, dann ist

$$[S] = o + [\{a - o \mid a \in S\}]$$

und die Behauptung folgt aus der entsprechenden für die lineare Hülle.

Beispiel Die affine Hülle zweier Punkte $a, b \in A, a \neq b$ ist die (affine) Gerade

$$[ab] := [\{a, b\}] = \{a(1-t) + bt \mid t \in K\}.$$

Die affine Hülle von drei verschiedenen Punkten $a, b, c \in A$ ist eine Gerade oder Ebene, je nachdem, ob $\dim[\{a, b, c\}]$ gleich 1 oder 2 ist. Im zweiten Fall sagen wir: das Dreieck $\{a, b, c\}$ sei nicht-degeneriert.

0.1.9 Definition (allgemeine Lage)

Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ von Punkten $a_i \in A$ eines AR A ist affin unabhängig, bzw. in allgemeiner Lage, falls

$$\forall i \in I : a_i \notin [\{a_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}],$$

und sonst affin abhängig; Punkte heißen kollinear bzw. koplanar, falls sie in einer Geraden oder einer Ebene liegen.

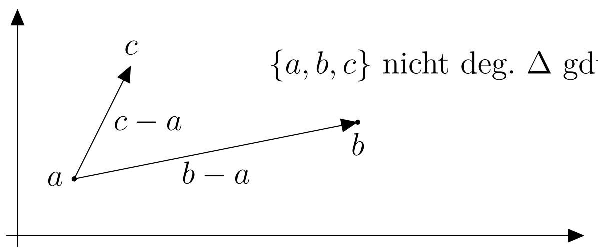
0.1.10 Lemma (Affine und lineare (Un-)Abhängigkeit)

Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann affin unabhängig, wenn für jedes $i \in I$ die Familie $(a_j - a_i)_{j\in I\setminus\{i\}}$ linear unabhängig ist.

Beweis Die Familie $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann affin abhängig, wenn

$$\exists i \in I : a_i \in [\{a_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}] \Leftrightarrow \exists i \in I \exists (x_j)_{j\in I\setminus\{i\}} : a_i = \sum_{j\neq i} a_j x_j \wedge 1 = \sum_{j\neq i} x_j$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I \exists (x_j)_(j \in I \setminus \{i\}) : 0 = \sum_{j\neq i} (a_j - a_i) x_j \wedge 1 = \sum_{j\neq i} x_j,$$

d.h., wenn die Familie $(a_j - a_i)_{j\in I\setminus\{i\}}$ eine nicht-triviale Linearkombination von 0 erlaubt, also linear abhängig ist.



$\{a, b, c\}$ nicht deg. Δ gdw. Vektoren lin. unab.

0.1.11 Lemma (Eindeutigkeit der Punktdarstellung)

Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann affin unabhängig, wenn jeder Punkt ihrer affinen Hülle eine eindeutige Affinkombination hat:

$$\forall a \in [\{a_i \mid i \in I\}] \exists! (x_i)_{i\in I} : \begin{cases} 1 = \sum_{i\in I} x_i \\ a = \sum_{i\in I} a_i x_i \end{cases}$$

Beweis Hat jeder Punkt $a \in [\{a_i \mid i \in I\}]$ eine eindeutige Affinkombination, so gilt insbesondere

$$\forall i \in I : a_i = a_i \cdot 1 \notin [\{a_j \mid j \neq i\}].$$

Hat andererseits der Punkt a zwei Affindarstellungen,

$$a = \sum_{i \in I} a_i x_i = \sum_{i \in I} a_i y_i,$$

so folgt mit einem Ursprung $o \in A$ und $v_i = a_i - o$

$$a = o + \sum_{i \in I} v_i x_i = o + \sum_{i \in I} v_i y_i \Rightarrow 0 = \sum_{i \in I} v_i (y_i - x_i).$$

Ist $(a_i)_{i \in I}$ affin unabhängig, so ist $(v_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$ linear unabhängig für ein beliebiges $i \in I$ und $o := a_i$. Es folgt:

$$\forall j \in I \setminus \{i\} : x_j = y_j \Rightarrow x_i = 1 - \sum_{j \neq i} x_j = 1 - \sum_{j \neq i} y_j = y_i$$

$$\text{also } (x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I}$$

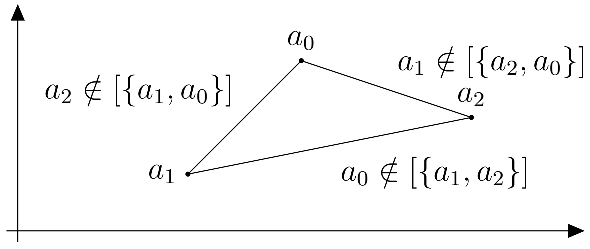
0.1.12 Definition (Affines/baryzentrisches Bezugssystem)

Ein affines Bezugssystem $(o; B)$ eines affinen Raumes (A, V, τ) besteht aus einem Ursprung $o \in A$ und einer Basis B von V; ein baryzentrisches Bezugssystem $(a_i)_{i \in I}$ ist eine affin unabhängige Familie von Punkten, sodass

$$[\{a_i \mid i \in I\}] = A.$$

Bemerkung Ist $n = \dim A$, so enthält

- ein affines Bezugssystem $(o; b_1, ..., b_n)$ einen Punkt und n Vektoren;
- ein baryzentrisches Bezugssystem $(a_0, ..., a_n)$ $n + 1$ Punkte (und keinen Vektor).



Beispiel Drei Punkte $a_0, a_1, a_2 \in A$ sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sie die Ecken eines nicht degenerierten Dreiecks sind. Sie bilden dann ein baryzentrisches Bezugssystem der Ebene des Dreiecks. Andernfalls sind sie kollinear.

0.1.13 Definition (Teilverhältnis)

Sind $a, b, c \in A$ kollinear, $c \neq b$, so ist ihr Teilverhältnis

$$(ac : bc) = t :\Leftrightarrow a = bt + c(1-t).$$

Bemerkung Sind $a, b \in A, a \neq b$ gegeben, so bestimmt das Teilverhältnis t die Lage eines Punktes c auf der Verbindungsgeraden $[\{a, b\}]$ eindeutig:

$$\begin{gathered}(ac : bc) = t \Leftrightarrow a = bt + c(1-t) = c + (b-c)t + (c-c)(1-t) \text{ (nach Affinkomb. mit } o = c) \\ \Leftrightarrow a = \tau_{(b-c)t}(c) \Leftrightarrow a - c = (b-c)t \\ \Leftrightarrow a - b \stackrel{*}{=} (a-c) + (c-b) = (b-c)t + (c-b) \stackrel{*}{=} (c-b)(1-t) \\ \Leftrightarrow (a-b)\frac{1}{1-t} = c - b \Leftrightarrow \tau_{(a-b)\frac{1}{1-t}}(b) = c \\ \Leftrightarrow c = b + (a-b)\frac{1}{1-t} + (b-b)(1 - \frac{1}{1-t}) = a\frac{1}{1-t} + b(1 - \frac{1}{1-t}) = a\frac{1}{1-t} + b\frac{-t}{1-t}\end{gathered}$$

Dabei erhält man $c = a$ mit $t = 0$, wegen $a \neq b$ muss $t = 1$ ausgeschlossen werden und $c = b$ wird durch kein Teilverhältnis realisiert. (* vgl. Beweis baryzentrischer Kalkül)

Ist $K = \mathbb{R}$, so ist $t < 0$ genau dann, wenn der Punkt c „zwischen" a und b liegt, d.h. wenn

$$c \in \{a(1-s) + bs \mid s \in (0, 1)\}.$$

Man sagt daher auch: „c teilt die Strecke $\overline{ab}$ im Verhältnis $(ac : bc)$."

Bei nicht geordneten Körpern ist diese Aussage sinnlos!

Bemerkung Das Teilungsverhältnis $t = (ac : bc) = -\frac{s}{1-s}$ für $c = a(1-s) + bs$.

0.2 Affine Abbildungen & Transformationen

0.2.1 Definition

Eine Abbildung $\alpha : A \to A'$ zwischen affinen Räumen A und A' (über dem gleichen Körper K) heißt affin, falls sie

(i) *geradentreu* ist, d.h. die Bilder kollinearer Punkte sind kollinear;

(ii) *teilverhältnistreu* ist, d.h. das Teilverhältnis kollinearer Punkte wird erhalten (solange die Punkte nicht alle zusammenfallen).

Eine bijektive affine Abbildung $\alpha : A \to A$ heißt Affinität oder affine Transformation.

Bemerkung Sei $\alpha : A \to A'$ und $a, b \in A$ sodass $\alpha(a) \neq \alpha(b)$; insbesondere ist dann auch $a \neq b$. Ist α geradentreu, so gilt für jeden Punkt

$$c_s = a(1-s) + bs;\; s = (ca : ba),$$

dass $c_s \in [\{a, b\}]$, d.h.

$$\forall s \in K \exists t \in K : \alpha(c_s) = \alpha(a(1-s) + bs) = \alpha(a)(1-t) + \alpha(b)t \in [\{\alpha(a), \alpha(b)\}]$$

Ist α dann auch teilverhältnistreu, so folgt

$$\frac{-t}{1-t} = (\alpha(a)\alpha(c_s) : \alpha(b)\alpha(c_s)) = (ac_s : bc_s) = \frac{-s}{1-s} \Rightarrow t = s.$$

Insbesondere bildet α die Gerade $[ab]$ dann bijektiv auf die Gerade $[\alpha(a), \alpha(b)]$ durch die Bildpunkte von a und b ab, und

$$\forall s \in K : \alpha(a(1-s) + bs) = \alpha(a)(1-s) + \alpha(b)s.$$

Enthält die Gerade durch a und b, $a \neq b$ keine Punkte, deren Bilder verschieden sind, so wird die Gerade auf einen einzigen Punkt abgebildet – und die vorherige Gleichung gilt ebenfalls.

Beispiel Die Translationen eines affinen Raumes sind Affinitäten, denn für

$$c_s = a(1-s) + bs = a + ws, \text{ mit } w := b - a$$

gilt, mit Translationsvektor $v \in V$,

$$\tau_v(c_s) = \tau_v(a + ws) = \tau_v(\tau_{ws}(a)) = \tau_{v+ws}(a) = \tau_{ws+v}(a) = \tau_{ws}(\tau_v(a)) = \tau_v(a) + ws,$$

insbesondere gilt also

$$\tau_v(b) = \tau_v(a) + w$$

und damit

$$\tau_v(c_s) = \tau_v(a) + ws = \tau_v(a) + (\tau_v(b) - \tau_v(a))s = \tau_v(a)(1 - s) + \tau_v(b)s.$$

Also sind $\tau_v(a), \tau_v(b)$ und $\tau_v(c_s)$ kollinear und erhalten das Teilverhältnis

$$(\tau_v(a)\tau_v(c_s) : \tau_v(b)\tau_v(c_s)) = (ac_s : bc_s).$$

0.2.2 Lemma

$\alpha : A \to A'$ ist genau dann affin, wenn für jede Affinkombination in A gilt:

$$\alpha(\sum_{i \in I} a_i x_i) = \sum_{i \in I} \alpha(a_i) x_i.$$

Beweis Wir haben schon gesehen: $\alpha : A \to A'$ ist affin genau dann, wenn

$$\forall a, b, \in A \forall x \in K : \alpha(a(1 - s) + bs) = \alpha(a)(1 - s) + \alpha(b)s$$

Offenbar ist die vorherige Bemerkung ein Spezialfall des Lemmas. Es bleibt die andere Richtung zu zeigen. Wir benutzen vollständige Induktion über $k = \#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty$.

Induktionsanfang Für $k = 1$ trivial.

Induktionsannahme Für $a_1, ..., a_k \in A$ und $x_1, ..., x_k \in K^\times$ mit $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$ gelte

$$\alpha(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha(a_i) x_i.$$

Induktionsschluss Seien $a_1, ..., a_{k+1} \in A$ und $x_1, ..., x_{k+1} \in K^\times$ Gewichte, sodass $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1$, o.B.d.A. $x_{k+1} \neq 1$; dann gilt

$$\alpha(\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i) = \alpha((\sum_{i=1}^{k} a_i \frac{x_i}{1 - x_{k+1}})(1 - x_{k+1}) + a_{k+1}x_{k+1})$$

$$= \alpha(\sum_{i=1}^{k} a_i \frac{x_i}{1 - x_{k+1}})(1 - x_{k+1}) + \alpha(a_k + 1)x_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha(a_i) \frac{x_i}{1 - x_{k+1}}(1 - x_{k+1}) + \alpha(a_{k+1})x_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha(a_i)x_i.$$

Damit ist die Behauptung für affine Abbildungen α bewiesen.

Bemerkung Im Beweis wurde benutzt: für Affinkombinationen ist (falls $x_j \neq 1$)

$$\sum_{i \in I} a_i x_i = \left(\sum_{i \neq j} a_i \frac{x_i}{1 - x_j} \right) (1 - x_j) + a_j x_j$$

Bemerkung Mit der Verträglichkeit affiner Abbildungen mit Affinkombinationen folgt, dass die Inverse $\alpha^{-1} : A' \to A$ einer bijektiven affinen Abbildung $\alpha : A \to A'$ ebenfalls affin ist:

$$\alpha \left(\sum_{i \in I} \alpha^{-1}(a_i')x_i \right) = \sum_{i \in I} (\alpha \circ \alpha')(a_i')x_i = \sum_{i \in I} a_i' x_i = \alpha \left(\alpha^{-1}(\sum_{i \in I} a_i' x_i) \right)$$
$$\Rightarrow \sum_{i \in I} \alpha^{-1}(a_i')x_i = \alpha^{-1}(\sum_{i \in I} a_i' x_i),$$

da die Affinkombination $\sum_{i \in I} a_i' x_i \in A'$ beliebig war, folgt damit die Behauptung. Insbesondere sind damit auch die Inversen von Affinitäten Affinitäten.

Bemerkung Sind $\alpha : A \to A'$ und $\beta : A' \to A''$ geraden- und teilverhältnistreu, so ist auch

$$\beta \circ \alpha : A \to A''$$

geraden- und teilverhältnistreu, d.h. die Komposition affiner Abbildungen ist affin. Insbesondere ist damit die Menge G aller affinen Transformationen eines affinen Raumes A abgeschlossen unter der Komposition

$$\circ : G \times G \to G;$$

außerdem ist G abgeschlossen unter Inversenbildung. Damit folgt: G ist Untergruppe der Permutationsgruppe (der symmetrischen Gruppe) des affinen Raumes A: Diese Gruppe bezeichnet man als *affine Gruppe*.

0.2.3 Definition

Die auf einem affinen Raum A operierende Gruppe G der Affinitäten von A bestimmt eine *affine Geometrie*.

Bemerkung Die Verträglichkeit einer affinen Abbildung $\alpha : A \to A'$ mit Affinkombinationen lässt sich auch mithilfe von Vektoren formulieren (unabhängig von der Wahl des Ursprungs $o \in A$):

$$v_i = a_i - o \Rightarrow \alpha\left(\sum_{i\in I} a_i x_i\right) = \alpha\left(o + \sum_{i\in I} v_i x_i\right)$$
$$\sum_{i\in I} \alpha(a_i) x_i = \sum_{i\in I} \alpha(o + v_i) x_i$$
$$\Rightarrow \alpha\left(o + \sum_{i\in I} v_i x_i\right) - \alpha(o) = \sum_{i\in I} \alpha(o+v_i)x_i - \alpha(o)\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} (\alpha(o - v_i) - \alpha(o))x_i,$$

setzt man also

$$\lambda : V \to V', v \mapsto \lambda(v) := \alpha(o+v) - \alpha(o),$$

wobei V und V' die zu A bzw. A' gehörenden Richtungsvektorräume sind, so erhält man einen Homomorphismus $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$, da sie mit Linearkombinationen verträglich ist:

$$\lambda\left(\sum_{i\in I} v_i x_i\right) = \alpha\left(o + \sum_{i\in I} v_i x_i\right) - \alpha(o) = \sum_{i\in I} (\alpha(o+v_i) - \alpha(o)) = \sum_{i\in I} \lambda(v_i) x_i$$

0.2.4 Lemma & Definition

Seien A und A' AR mit RVR V bzw. V'; dann ist eine Abbildung $\alpha : A \to A'$ genau dann affin, wenn es $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$ gibt, sodass

$$\forall a \in A \forall v \in V : \alpha(a+v) = \alpha(a) + \lambda(v).$$

Wir nennen λ den *linearen Anteil* einer affinen Abbildung α.

Beweis Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

$\Rightarrow$: Sei $\alpha : A \to A'$ affin. Zu zeigen ist nun die Existenz eines geeigneten $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$. Nämlich: Wähle $o \in A$ und definiere

$$\lambda : V \to V', v \mapsto \lambda(v) := \alpha(o + v) - \alpha(o).$$

Wegen der Verträglichkeit von α mit Affinkombinationen ist λ linear. Für $a \in A, v \in V$ gilt dann mit $w := a - o$:

$$\alpha(a + v) = \alpha(o + w + v) = \alpha(o) + \lambda(w + v) =$$
$$\alpha(o) + \lambda(w) + \lambda(v) = \alpha(o + w) + \lambda(v) = \alpha(a) + \lambda(v)$$

Insbesondere ist der lineare Anteil $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$ von α wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\Leftarrow$: Für $\alpha : A \to A'$ gilt mit einem $\lambda \in \mathrm{Hom}(V, V')$

$$\forall a \in A \forall v \in V : \alpha(a + v) = \alpha(a) + \lambda(v)$$

Wegen der Verträglichkeit von λ mit Linearkombinationen ist α verträglich mit Affinkombinationen (siehe oben) und damit affin.

Bemerkung Jede affine Transformation setzt sich also zusammen aus einer Translation und und einem Automorphismus $\lambda \in \mathrm{Aut}(V)$. Insbesondere: Ist $\tau_w : A \to A'$ Translation eines affinen Raumes A über V, so ist für $a \in A$ und $v \in V$

$$\tau_w(a+v) = (a+v)+w = a+(v+w) = a+(w+v) = (a+w)+v = \tau_w(a)+v = \tau_w(a)+\mathrm{id}_V(v),$$

d.h. der lineare Anteil einer Translation ist trivial – also die Identität auf V.

0.2.5 Definition

Die Automorphismen eines VR V bilden seine *allgemeine lineare Gruppe*

$$Gl(V) := \{\lambda \in \mathrm{End}(V) \mid \lambda \text{ invertierbar}\}.$$

0.2.6 Bemerkung & Definition

Sind $g_i = [a_i b_i] = a_i + [v]$ mit $b_i = a_i + v$ für $i = 1, 2$ zwei Geraden mit dem gleichen RVR $[v]$, d.h. *parallel*, so sind auch ihre Bilder unter einer affinen Transformation α parallele Geraden,

$$\alpha(g_i) = \alpha(a_i) + [\lambda(v)] \text{ mit } \lambda \in Gl(V).$$

0.2.7 Beispiel & Definition

Sei (A, V, τ) ein AR über K und $\lambda \in \mathrm{End}(V)$ eine *Homothetie*, $\lambda = \mathrm{id}_V \cdot c$ für ein $c \in K$.

Ist die zugehörige affine Abbildung $\alpha : A \to A, o + v \mapsto \alpha(o + v) := o + v \cdot c$

eine affine Transformation, d.h., $\lambda \in Gl(V) \Leftrightarrow c \in K^\times$,

so nennt man α eine *Streckung* mit *Zentrum* $o \in A$. Ist $c \neq 1$, d.h. $\alpha \neq \mathrm{id}_A$, so gilt

$$\alpha(a) = a \Leftrightarrow a = o.$$

also hat die Abbildung α genau einen *Fixpunkt* $a = o$.

0.2.8 Beispiel & Definition

Sind $p \in \mathrm{End}(V)$ eine Projektion ($p^2 = p$) und $o \in A$, so liefert

$$\pi : A \to A, o + v \mapsto \pi(o + v) := o + p(v)$$

eine Parallelprojektion von A auf dem affinen Unterraum $o+p(V)$. Ist $p \neq \mathrm{id}_V$, so ist $p \notin Gl(V)$ und also π keine affine Transformation (sondern eine nicht bijektive Affinität), so hat π nicht-triviale *Fasern*

$$\pi^{-1}(\{a'\}) \subset A \text{ für } a' \in \pi(A),$$

wobei $\dim \pi^{-1}(\{a'\}) = \operatorname{def} p \geq 1$.

0.2.9 Beispiel & Definition

Seien $\omega \in V^*$ und $w \in \ker \omega$, sei $o \in A$; die *Scherung*

$$\sigma : A \to A, o + v \mapsto \sigma(o+v) := o + v + w\omega(v)$$

ist dann eine affine Transformation, denn $\lambda = \mathrm{id}_V + w \cdot \omega \in Gl(V)$

mit $\lambda^{-1} = \mathrm{id}_v - w \cdot \omega.$

Ist $w \cdot \omega \in \mathrm{End}(V) \setminus \{o\}$, so hat σ Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}_\sigma = o + \ker \omega$ und jeder Punkt und sein Bild liegen auf einer zu $o + [w]$ parallelen Geraden:

$$\forall a \in A \setminus \mathrm{Fix}_\sigma : [a\sigma(a)] \parallel o + [w]$$