

# **Skript Lineare Algebra & Geometrie 1, Hertrich-Jeromin**

Studierendenmitschrift

20. Januar 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>0 Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>1 Lineare Räume und Abbildungen</b>	<b>7</b>
1.1 Von Geometrie zu Algebra . . . . .	7
1.2 Translationen und Vektoren . . . . .	12
1.3 Basis und Dimensionen . . . . .	19
1.4 Homomorphismen . . . . .	26
1.5 Summen, Produkte und Quotienten . . . . .	36
<b>2 Affine Geometrie</b>	<b>49</b>
2.1 Affine Räume . . . . .	49
2.2 Affine Abbildungen & Transformationen . . . . .	59
2.3 Dreiecke in der Affinen Geometrie . . . . .	67
<b>3 Buchhaltung</b>	<b>72</b>
3.1 Matrizen . . . . .	72
3.2 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	80
<b>4 Volumenmessung</b>	<b>85</b>
4.1 Determinantenformen . . . . .	85
4.2 Äquiaffine Geometrie . . . . .	96

# 0 Grundlagen

## Einleitung

Es existieren zwei Methoden zur präzisen Formulierung:

- Funktion einer Formulierung wird präzisiert durch:
  - Definition: Begriffsklärung
  - Satz (Lemma, Proposition, Korollar): Aussage über einen (mathematischen) Sachverhalt
  - Beweis: eine (logische) Argumentationskette, die erklärt, warum ein Satz/Lemma wahr ist
  - Bemerkung, Beispiel: zusätzliche Information/Illustration, die oft Eigenarbeit (Beweis) erfordert
- Formeln und (logische) Symbole werden verwendet:
  - $\forall$  – All-Quantor: „für alle“
  - $\exists(!)$  – Existenz-Quantor: „es existiert (genau) ein“
  - $\neg$  – logische Verneinung:  $\neg A$  ist wahr, wenn  $A$  falsch ist
  - $\wedge, \vee$  – logisches „und“ und „oder“
  - $\Rightarrow, \Leftrightarrow$  – Implikation und Äquivalenz

$A$	$B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Abbildung 0.1: Wahrheitstafel

Beispiele:

- Implikation: Für  $x, y \in \mathbb{R} : xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
- Für Aussagen  $A$  und  $B$  gilt:  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ , Beweis durch Wahrheitstafel

$A$	$B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Abbildung 0.2: Beweis durch Wahrheitstafel

**Bemerkung**  $\wedge$ ,  $\vee$ , und  $\Leftrightarrow$  sind kommutativ (symmetrisch),  $\Rightarrow$  jedoch nicht, d.h.:

$$\begin{aligned}
 (A \wedge B) &\Leftrightarrow (B \wedge A) \\
 (A \vee B) &\Leftrightarrow (B \vee A) \\
 (A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A) \\
 (A \Rightarrow B) &\not\Leftrightarrow (B \Rightarrow A)
 \end{aligned}$$

weil beispielsweise formal gilt:  $x, y \in \mathbb{R} : x = 0 \Rightarrow xy = 0$ , aber nicht  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ .

**Bemerkung (Beweisformen der Implikation)** Um eine Implikation  $A \Rightarrow B$  zu zeigen, bedient man sich häufig auch folgender Äquivalenzen:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \begin{cases} \neg B \Rightarrow \neg A & \text{(Indirekter Schluss)} \\ \neg(A \wedge \neg B) & \text{(Widerspruchsbeweis)} \end{cases}$$

**Beispiel** Für reelle Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$((xy = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)) \Leftrightarrow ((xy = 0 \wedge x \neq 0) \Rightarrow (y = 0))$$

bzw. allgemein:

$$(A \Rightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \Rightarrow C)$$

**Bemerkung (Mengenlehre)** Die Ähnlichkeit mit der Mengensymbolik ist nicht zufällig, z.B. Mengen  $X, Y$ :

$$\begin{aligned}(x \in X \cap Y) &\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y) \\(x \in X \cup Y) &\Leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y) \\(X \subset Y) &\Leftrightarrow \{\forall x : (x \in X \Rightarrow x \in Y)\}\end{aligned}$$

## Definition (Abbildung)

Eine Zuordnung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  heißt eine Abbildung, falls  $\forall x \in X : \exists! y \in Y : y = f(x)$ .

$X$  heißt der Definitionsbereich der Abbildung und  $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$  das Bild.

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt

- injektiv, falls  $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- surjektiv, falls  $\forall y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)$
- bijektiv, falls  $\forall y \in Y : \exists! x \in X : y = f(x)$

**Beispiel** Mit  $X = Y = \mathbb{R}$  definiert

- die Relation  $x^2 = y$  eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) = x^2$
- die Relation  $x = y^2$  keine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ , denn
  - für ein  $x$  gibt es zwei  $y$ -Werte
  - $x < 0$  ist nicht definiert

**Beispiel** Die Identität  $id_X : X \rightarrow X, x \mapsto id_X(x) := x$  ist eine bijektive Abbildung.

**Bemerkung** Eine Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

## Definition (Komposition)

Sind  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen, so ist ihre Komposition/Verkettung die Abbildung  $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$ .

**Beispiel:** Seien  $X = Y = Z = \mathbb{R}$  und  $f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) := x^2$ ,  $g : Y \rightarrow Z, y \mapsto g(y) := y^3 + y$ , so ist die Verkettung  $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto (g \circ f)(x) = (x^2)^3 + x^2 = x^6 + x^2$ .

## Lemma

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  Abbildungen. Dann gilt:

- i) ist  $g$  Linksinverse von  $f$ , d.h.  $g \circ f = id_X$ , so ist  $f$  injektiv
- ii) ist  $g$  Rechtsinverse von  $f$ , d.h.  $f \circ g = id_Y$ , so ist  $f$  surjektiv
- iii) ist  $g$  Links- und Rechtsinverse von  $f$ , so heißt  $g = f^{-1}$  Inverse von  $f$

**Beispiel**  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto f(n) := n + 1$  hat Linksinverse

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto g(n) := \begin{cases} 15700, & \text{falls } n = 0 \\ n - 1, & \text{falls } n \neq 0 \end{cases}$$

Tatsächlich ist  $f$  injektiv, da

$$\forall n, n' \in \mathbb{N} : n + 1 = f(n) = f(n') = n' + 1 \Rightarrow n = n'$$

jedoch  $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , daher kann keine Rechtsinverse existieren.

**Beweis** Zwei Aussagen sind zu beweisen:

- i) Sei  $g$  Linksinverse von  $f$ . Dann gilt für  $x, x' \in X$  mit  $f(x) = f(x') : x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$ , also ist  $f$  injektiv.
- ii) Sei  $g$  Rechtsinverse von  $f$  und  $y \in Y$ . Setze  $x := g(y) \in X$ , dann gilt  $f(x) = f(g(y)) = y$ . Damit existiert zu jedem  $y \in Y$  (mindestens) ein  $x = g(y)$ , sodass  $y = f(x)$ .

# 1 Lineare Räume und Abbildungen

## 1.1 Von Geometrie zu Algebra

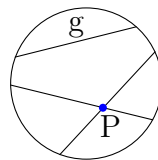
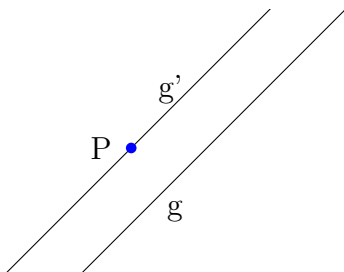
Euklids führte in den „Elementen“ (ca. 300 v. Chr.) das bis heute gültige Schema ein:

- Definition
- Axiom/Postulat
- Lehrsatz
- Beweis

### 1.1.1 Parallelenaxiom/-problem (Euklid, Formulierung nach Playfair)

Es existiert genau eine Parallele  $g'$  zum Punkt  $P \notin g$  zur Geraden  $g$ .

Kann das Axiom aus den anderen Axiomen hergeleitet/bewiesen werden? Nein, denn es existieren nichteuklidische, hyperbolische Geometrien (18. Jh.) in denen es mehrere derartige Parallelen gibt. Als Beispiel lässt sich eine Geometrie anführen, die nicht auf einer Ebene sondern auf einem Kreis operiert. Dort lassen sich zu einer Sekante mehrere parallele Sekanten betrachten (also Sekanten, die die ursprüngliche nicht schneiden).



**Was ist eine Geometrie?** Eine Geometrie ist durch eine Menge  $X$  und eine auf  $X$  operierende Transformationsgruppe gegeben.

### 1.1.2 Definition (Gruppe)

Ein Paar  $(G, \circ)$  bestehend aus einer Menge  $G$  und einer Verknüpfung  $(\circ : G \times G \rightarrow G) : (g, h) \mapsto g \circ h$  heißt Gruppe, falls:

- (i)  $\forall f, g, h \in G : f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$  (Assoziativität)
- (ii)  $\exists e \in G \forall g \in G : e \circ g = g$  (Existenz eines neutralen Elements)
- (iii)  $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g^{-1} \circ g = e$  (Existenz eines inversen Elements)

Die Gruppe heißt kommutativ oder abelsch, falls zusätzlich gilt:

$$\forall g, h \in G : g \circ h = h \circ g \text{ (Kommutativität)}$$

**Bemerkung** Das ist eine axiomatische Definition, d.h. der Begriff „Gruppe“ wird durch (aus vielen (!) Beispielen abstrahierten) „Rechenregeln“ definiert.

**Beispiel** Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  bilden mit der Addition eine Gruppe  $(\mathbb{Q}, +)$ . Die rationalen Zahlen ohne 0,  $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ , bilden mit der Multiplikation eine Gruppe  $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ .

### 1.1.3 Definition (Gruppenoperation)

Sind  $(G, \circ)$  eine Gruppe und  $X$  eine Menge, so heißt eine Abbildung

$$\cdot : G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$$

eine Gruppenoperation (von  $(G, \circ)$  auf  $X$ ), falls

- (i)  $\forall g, h \in G : \forall x \in X : g \cdot (h \cdot x) = (g \circ h) \cdot x$  (entspricht nicht der Assoziativität!)
- (ii)  $\forall x \in X : e \cdot x = x$  für das neutrale Element  $e$  der Gruppe  $(G, \circ)$

$(G, \circ)$  heißt dann Transformationsgruppe von  $X$ .



**Bemerkung** Operiert  $G$  (kurz für  $(G, \circ)$ , aus dem Zusammenhang ersichtlich) auf  $X$ , so ist für jedes  $g \in G$  die Abbildung

$$g : X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$$

eine bijektive Abbildung von  $X$  auf sich. Wegen der Axiome (i) und (ii) aus der Definition erhält man  $g^{-1} : X \rightarrow X$  als Inverse der Abbildung.

### 1.1.4 Beispiel und Definition (Permutationsgruppe)

Die bijektiven Abbildungen einer Menge  $X$  auf sich,

$$G := \{g : X \rightarrow X \mid g \text{ bij}\},$$

bilden (mit der Komposition  $\circ$ ) eine (Transformations-)Gruppe  $(G, \circ)$  (die auf  $X$  operiert): die Permutationsgruppe oder symmetrische Gruppe  $S_X$  von  $X$ . Für  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  schreibt man auch  $S_n$  statt  $S_{\{1, \dots, n\}}$ .

**Bemerkung** Im Gegensatz zu allgemeinen Abbildungen stimmen in (Permutations-)Gruppen Links- und Rechtsinverse stets überein.

### 1.1.5 Lemma (Eindeutigkeit des neutralen Elements)

Das neutrale Element einer Gruppe  $(G, \circ)$  ist eindeutig und  $\forall g \in G : g \circ e = g$ . Weiters:

$$\forall g \in G \exists! g^{-1} \in G : g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$$

**Beweis** Sei  $g \in G$  gegeben und (gemäß Gruppenaxiom (iii)):

- $h := g^{-1}$  (Linksinverse von  $g$ )
- $k := h^{-1}$  (Linksinverse von  $h$ )

Damit berechnen wir (multiplikative Schreibweise:  $a \circ b = ab$ ):

$$\begin{aligned} hg &= e = kh = k((hg)h) = k(h(gh)) = (kh)(gh) = gh \\ \text{und } ge &= g(hg) = (gh)g = eg \end{aligned}$$

Jedes (links-)neutrale Element  $e$  ist also auch rechtsneutral:

$$\forall g \in G : eg = ge = g$$

und ist  $e' \in G$  auch neutrales Element, dann:

$$e' = ee' = e'e = e$$

Weiters ist jedes (Links-)Inverse auch rechtsinvers:

$$\forall g \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = e$$

und sind  $h, h' \in G$  Inverse von  $g \in G$ , so gilt:

$$h' = h'(gh) = (h'g)h = h$$

d.h. Eindeutigkeit des Inversen.

### 1.1.6 Definition (Körper)

Ein Tripel  $(K, +, \cdot)$ , bestehend aus einer Menge  $K$  und zwei Verknüpfungen

$$+ : K \times K \rightarrow K, (x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : K \times K \rightarrow K, (x, y) \mapsto xy$$

heißt Körper, falls:

- (i)  $(K, +)$  ist abelsche Gruppe (mit neutralem Element 0 und inversem Element  $-x$  von  $x$ )
- (ii)  $(K^\times, \cdot)$  ist abelsche Gruppe (mit neutralem Element 1 und inversem Element  $\frac{1}{x} = x^{-1}$  von  $x \in K^\times$ )
- (iii) die Distributivgesetze gelten:

$$\forall x, y, z \in K : \begin{cases} x \cdot (y + z) = xy + xz \\ (x + y) \cdot z = xz + yz \end{cases}$$

**Bemerkung** In einem Körper gilt stets:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= x \cdot 0 = 0 \Rightarrow \\ 0 \cdot x &= (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \\ \Rightarrow 0 &= 0 \cdot x + -(0 \cdot x) \Rightarrow 0 = 0 \cdot x. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt damit:  $\forall x, y \in K : xy = yx$  (nicht nur für  $K^\times$  (Axiom)).

**Beispiel** Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  bilden mit den üblichen Verknüpfungen Körper.

**Bemerkung und Beispiel** Aufgrund der Axiome (i) und (ii) enthält  $K$  mindestens 2 Elemente, also  $\#K \geq 2$ , nämlich:

- 0, das neutrale Element bezüglich  $+$
- $1 (\neq 0)$ , das neutrale Element (in  $K^\times = K \setminus \{0\}$ ) bezüglich  $\cdot$

Es gibt auch einen Körper mit genau 2 Elementen  $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ , wobei

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	1

Dieser Körper wird auch  $\mathbb{Z}_2$  bezeichnet.

### 1.1.7 Bemerkung und Definition (Charakteristik)

In  $\mathbb{Z}_2$  :  $1 + 1 = 0$ . Allgemeiner definiert man die Charakteristik eines Körpers  $(K, +, \cdot)$  (mit neutralen Elementen 0 und 1 von  $+$  bzw.  $\cdot$ ) durch

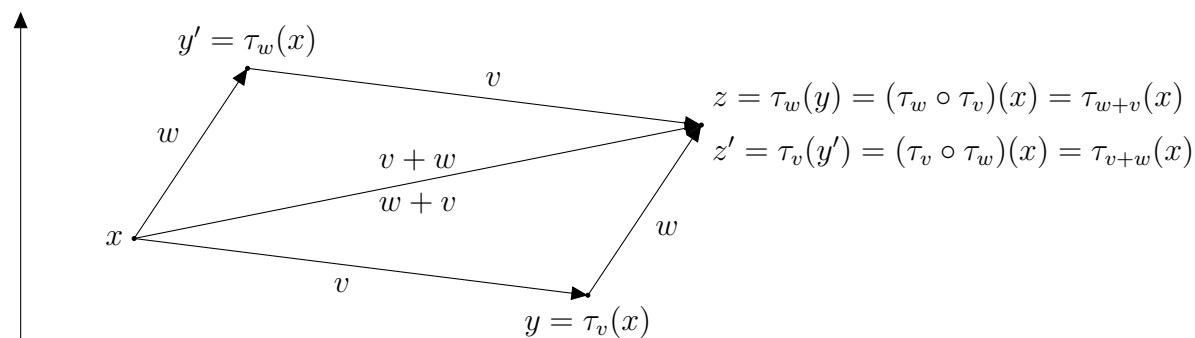
$$\text{Char}(K) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \forall n \in \mathbb{N}^\times : \sum_{j=1}^n 1 \neq 0 \\ \min\{n \in \mathbb{N}^\times \mid \sum_{j=1}^n 1 = 1 + \dots + 1 = 0\} & \end{cases}$$

z.B.  $\text{Char}(\mathbb{Z}_2) = 2$ , da

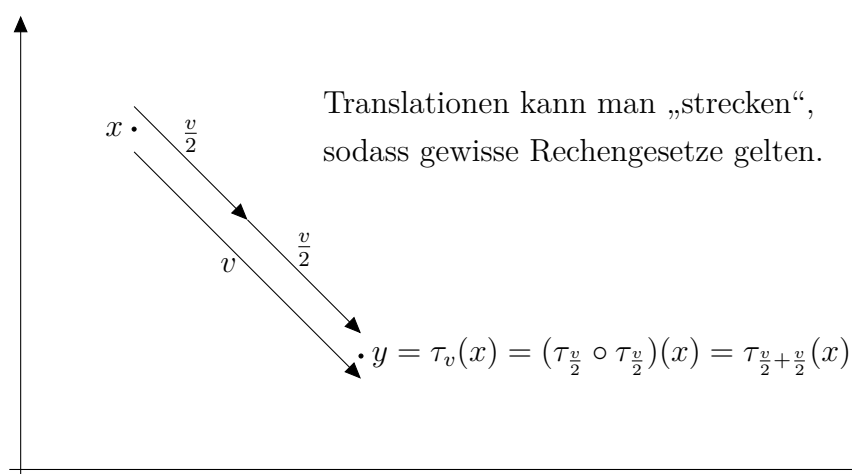
$$\begin{aligned} \{n \in \mathbb{N}^\times \mid 1 + \dots + 1 = 0\} &= \\ &= \{n \in \mathbb{N}^\times \mid n = 0 \bmod 2\} = \\ &= \{n \in \mathbb{N}^\times \mid n \text{ gerade}\} \\ \text{und damit: } \min\{n \in \mathbb{N}^\times \mid 1 + \dots + 1 = 0\} &= 2 \end{aligned}$$

Wir werden mitunter  $\text{Char}(K, +, \cdot) \neq 0$  oder (öfter)  $\text{Char}(K, +, \cdot) = 2$  ausschließen (müssen).

## 1.2 Translationen und Vektoren



Translationen „der“ Ebene bilden eine abelsche Gruppe



Translationen kann man „strecken“,  
sodass gewisse Rechengesetze gelten.

### 1.2.1 Definition (Vektorraum)

Sei  $K$  ein Körper. Eine Menge  $V$  mit zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \rightarrow V : (v, u) \mapsto v + u,$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V : (x, v) \mapsto vx,$$

heißt Vektorraum über  $K$  ( $K$ -VR), falls gilt:

- (i)  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe
- (ii)  $\forall v \in V : v \cdot 1 = v$  und  
 $\forall x, y \in K \forall v \in V : (vx)y = v(xy)$
- (iii)  $\forall x, y \in K \forall v \in V : v(x + y) = vx + vy$   
 $\forall x \in K \forall v, w \in V : (v + w)x = vx + wx$

**Bemerkung** Wir notieren die Skalarmultiplikation als Rechtsmultiplikation (Skalar steht rechts):

$$\cdot : K \times V \rightarrow V : (x, v) \mapsto vx$$

**Beispiel** Die Translationen eines affinen Raumes bilden einen Vektorraum (vgl. mit der Skizze oben): Diese Beispiel wird im nächsten Kapitel repräsentiert.

**Beispiel** Jeder Körper  $K$  ist ein  $K$ -VR (Vektorraum über sich selbst): das ist ein (trivialer) Spezialfall des folgenden...

## 1.2.2 Beispiel und Definition (Standardvektorraum)

Ist  $I$  eine Menge und  $K$  ein Körper, so bilden die  $K$ -wertigen Abbildungen

$$v : I \rightarrow K : i \mapsto v_i$$

einen Vektorraum mit der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation:

$$I \ni i \mapsto (v + w)_i := v_i + w_i \in K$$

$$i \mapsto (vx)_i := v_i x \in K$$

Dieser Vektorraum wird mit  $K^I$  bezeichnet und Standardvektorraum (über  $I$  und  $K$ ) genannt. Im Falle  $I = \{1, \dots, n\}$  schreibt man auch  $K^n := K^{\{1, \dots, n\}}$

## 1.2.3 Bemerkung und Definition (Familienschreibweise)

Anstelle der normalen Schreibweise

$$I \ni i \mapsto v(i) \in K$$

für die Auswertung einer Abbildung  $v : I \rightarrow K$  um einen Punkt  $i \in I$  haben wir die Indexschreibweise verwendet.

$$I \ni i \mapsto v_i \in K$$

Wir haben damit eine Abbildung  $v : I \rightarrow K$  als Familie von  $(v_i)_{i \in I}$  über der Indexmenge  $I$  aufgefasst – der Begriff Familie ist ein „alternativer“ Begriff für Abbildungen.

**Beispiel** Sei  $i$  eine „Zahl“ mit  $i^2 = -1$  ( $i$  entspricht nicht dem Element der Indexmenge aus dem vorherigen Abschnitt). Die komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

bilden mit der Addition und Multiplikation einen Körper:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} : ((x + y), (x' + y')) \mapsto ((x + iy) + (x' + iy')) := (x + x') + i(y + y') \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} : ((x + iy), (x' + iy')) \mapsto (x + iy) \cdot (x' + iy') := (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  bilden einen  $\mathbb{R}$ -VR mit

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

wie oben und der Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : (x', (x + iy)) \mapsto (x + iy)x' := xx' + iyx'$$

Diese Skalarmultiplikation ist also gerade die Einschränkung der komplexen Multiplikation auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$  wobei die Identifikation

$$\mathbb{R} \cong \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$$

verwendet wird.

## 1.2.4 Definition (Untervektorraum)

Eine Teilmenge  $U \subset V$  eines  $K$ -VR  $V$  heißt Unter(vektor)raum (UVR), falls  $U$  mit der eingeschränkten Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} +|_{U \times U} : U \times U &\rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w \\ \cdot|_{K \times U} : K \times U &\rightarrow V, (x, v) \mapsto vx \end{aligned}$$

selbst ein Vektorraum ist, d.h. wenn insbesondere

$$\begin{aligned} \forall v, w \in U : v + w &\in U \text{ und} \\ \forall x \in K \forall v \in U : vx &\in U. \end{aligned}$$

**Bemerkung** Eine nicht-leere Teilmenge  $U \subset V, U \neq \emptyset$ , ist genau dann ein UVR, wenn die auf  $U$  eingeschränkten Operationen wohldefiniert sind, d.h. wenn  $U$  bzgl.  $+$  und  $\cdot$  abgeschlossen ist.

Dies kann zum Unterraumkriterium zusammengefasst werden:

$$U \subset V \text{ ist UVR} \Leftrightarrow \begin{cases} U \neq \emptyset \\ \forall v, w \in U \forall x \in K : vx + w \in U \end{cases}$$

**Beispiel** Sei  $I = \{1, \dots, n\}$ . Für jedes (feste)  $i \in I$  ist

$$U_i := \{v : I \rightarrow K \mid v_i = 0\}$$

ein UVR von  $K^n$ , denn

1.  $v = 0 \in U_i$ , also  $U_i \neq \emptyset$
2. Seien  $v, w \in U_i$ , d.h.  $v, w \in K^n$  mit  $v_i = w_i = 0$ , und  $x \in K$ ; dann gilt  $(vx + w)_i = v_i x + w_i = 0 \cdot x + 0 = 0$ , also:  $vx + w \in U_i$  und damit ist  $U_i$  UVR nach Unterraumkriterium.

Kein UVR von  $K^n, n \geq 2$ , ist jedoch die Menge

$$N := \{v : I \rightarrow K \mid v_1 \cdot v_2 = 0\},$$

denn

1.  $N$  ist zwar nicht-leer,  $N \neq \emptyset$ , aber
2.  $+\mid_{N \times N} : N \times N \rightarrow N$  nicht wohldefiniert: seien  $v, w \in N$ , so dass

$$v_1 = 0, v_2 = 1 \text{ (} v_3 \dots v_n \text{ irrelevant)}$$

$$w_1 = 1, w_2 = 0 \text{ (} w_3 \dots w_n \text{ irrelevant)}$$

dann gilt:

$$(v + w)_1 = v_1 + w_1 = 0 + 1 = 1$$

$$(v + w)_2 = v_2 + w_2 = 1 + 0 = 1$$

und damit

$$(v + w)_1(v + w)_2 = 1 \Rightarrow v + w \notin N.$$

**Bemerkung und Beispiel** In analoger Weise definiert man die Begriffe

- einer Untergruppe  $H \subset G$  einer Gruppe  $(G, \cdot)$ , bzw.
- eines Unter- oder Teilkörpers  $T \subset K$  eines Körpers  $(K, +, \cdot)$

Z.B.: Jeder UVR  $U \subset V$  eines  $K$ -VR  $V$  bildet (mit der Addition) eine Untergruppe der Gruppe  $(V, +)$ . Und: In gleicher Weise ist eine nicht-leere (!) Teilmenge ein/e Unterkörper/-gruppe, falls die eingeschränkten Operationen wohldefiniert sind.

Z.B.: ist  $H \subset G$  eine Untergruppe, falls (Untergruppenkriterium):

1.  $H \neq \emptyset$
2.  $\forall g, h \in H : g \circ h^{-1} \in H$

Achtung: Inversenbildung muss im Kriterium explizit formuliert werden, sonst würde z.B.:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  als Teilmenge von  $(\mathbb{Z}, +)$  als Gruppe ein Gegenbeispiel liefern.

Z.B.:

- die Translationen bilden eine Untergruppe der Bewegungsgruppe
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  und  $\mathbb{R} \cong \{x + iy \mid y = 0\} \subset \mathbb{C}$  bilden Teilkörper von  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ .

### 1.2.5 Lemma (Schnitt von UVR)

Ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von UVR  $U_i \subset V$  eines  $K$ -VR  $V$ , so ist ihr Schnitt

$$U := \bigcap_{i \in I} U_i = \{u \in V \mid \forall i \in I : u \in U_i\}$$

ein UVR von  $V$ . (Beweis in Aufgabe 17)

### 1.2.6 Definition (Lineare Hülle)

Die lineare Hülle  $[S]$  einer Teilmenge  $S \subset V$  eines  $K$ -VR  $V$  ist der Schnitt aller  $S$  enthaltenden UVR  $U \subset V$ :

$$[S] := \bigcap_{S \subset U \text{ UVR}} U$$

Die lineare Hülle einer Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren  $v_i \in V$  in einem  $K$ -VR  $V$  ist:

$$[(v_i)_{i \in I}] := [\{v_i \mid i \in I\}]$$



**Bemerkung**  $[S]$  ist ein UVR (nach Lemma) – der „kleinste“ UVR, der  $S$  enthält, d.h. ist  $U \subset V$  UVR mit  $S \subset U$ , so gilt  $[S] \subset U$ ; da aber  $[S] = \bigcap_{S \subset \tilde{U} \text{ UVR}} \tilde{U} \subset U$ , da  $S \subset U$ , also  $U$  am Schnitt beteiligt ist.

**Bemerkung**  $[\emptyset] = \{o\}$  und  $[V] = V$ .

**Beispiel** Ist  $U \subset V$  UVR, so gilt  $[U] = U$ .

**Beispiel**  $N = \{v : I \rightarrow K \mid v_1 v_2 = 0\} \subset K^n, I = \{1, \dots, n\}, n \geq 2$ , hat lineare Hülle  $[N] = K^n$ .

**Beispiel** Für  $I = \{1, \dots, n\}$  und  $i \in I$  definiere  $e_i : I \rightarrow K, j \mapsto e_i(j) := \delta_{ij}$ , wobei

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

das Kroneckersymbol bezeichnet.

Dann ist die lineare Hülle der Familie  $(e_i)_{i \in I}$

$$[(e_i)_{i \in I}] = K^n.$$

Nämlich: Da  $[(e_i)_{i \in I}] \subset K^n$  ist, gilt für beliebige  $x_1, \dots, x_n \in K$

$$e_1 x_1 + \dots + e_n x_n \in [(e_i)_{i \in I}]$$

denn nach Unterraumkriterium:  $(e_1 x_1 + \dots + (e_{n-1} x_{n-1} + (e_n x_n + 0)) \dots) \in [(e_i)_{i \in I}]$

da  $[(e_i)_{i \in I}] \subset K^n$  UVR ist. Andererseits gilt für beliebiges  $v \in K^n$ :

$$v = \sum_{i=1}^n e_i v(i) : I \rightarrow K,$$

denn

$$\forall j \in I : \left( \sum_{i=1}^n e_i v(i) \right) (j) = \sum_{i=1}^n e_i(j) v(i) = (\delta_{ij}) v(j) = v(j)$$

damit ist gezeigt, dass die beiden Abbildungen übereinstimmen; da  $v \in K^n$  beliebig war, folgt  $K^n \subset [(e_i)_{i \in I}]$

### 1.2.7 Definition (Linearkombination)

Seien  $(v_i)_{i \in I}$  und  $(x_i)_{i \in I}$  Familien in einem  $K$ -VR bzw. dem Körper  $K$ , wobei

$$\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty, \text{ also}$$

$$\{i \in I \mid x_i \neq 0\} = \{i_1, \dots, i_n\} \text{ für ein geeignetes } n \in \mathbb{N}$$

Dann heißt die endliche Summe  $\sum_{i \in I} v_i x_i := \sum_{j=1}^n v_{i_j} x_{i_j}$  eine Linearkombination.

**Bemerkung** Die Bedingung

$$\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty$$

garantiert, dass die Summe wohldefiniert ist  $\rightarrow$  vgl. Reihen in der Analysis.

### 1.2.8 Lemma (Lineare Hülle und Linearkombinationen)

Ist  $(v_i)_{i \in I}$   $I \neq \emptyset$ , Familie in einem  $K$ -VR, so gilt:

$$[(v_i)_{i \in I}] = \left\{ \sum_{i \in I} v_i x_i \mid x : I \rightarrow K : \#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty \right\},$$

d.h. die lineare Hülle der Familie ist die Menge aller Linearkombinationen der Familie.

**Beweis** Wir zeigen (wie üblich) zwei Inklusionen:

$\supseteq$ : z.z.: jede Linearkombination liegt in der Linearen Hülle. Sei also  $(x_i)_{i \in I}$  eine geeignete Familie in  $K$ , dann gilt:

$$\sum_{i \in I} v_i x_i = v_{i_1} x_{i_1} + \dots + (v_{i_n} x_{i_n} + 0)$$

(i) für  $(v_{i_n} x_{i_n} + 0) \in [\dots]$  nach UR-Kriterium

(ii) für  $v_{i_1} x_{i_1} + \dots + (v_{i_n} x_{i_n} + 0) \in [\dots]$  nach UR-Kriterium (nach n-Schritten)

$\subseteq$ : Z.z.: Lineare Hülle der Familie ist Teilmenge von U. Setze die Menge der Linearkombinationen einer Familie  $U := \{\sum_{i \in I} v_i x_i \mid x : I \rightarrow K \text{ mit } \#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty\}$ , offenbar gilt:

$$\forall i \in I : v_i \in U$$

Wir zeigen, dass  $U$  ein Untervektorraum ist. Das heißt:

$$\begin{aligned} + |_{U \times U}: U \times U &\rightarrow U \subset V \\ \cdot |_{K \times U}: K \times U &\rightarrow U \subset V, \end{aligned}$$

also die Addition und Skalarmultiplikation vererben sich auf  $U$ .

**Zur Skalarmultiplikation** Sind  $(x_i)_{i \in I}$  mit  $\#\{i \in I | x_i \neq 0\} < \infty$  eine Familie in  $K$  und  $x \in K$ , so gilt für ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}$

$$\{i \in I | x_i \neq 0\} = \{i_1, \dots, i_n\}$$

und damit

$$\{i \in I | x_i x \neq 0\} = \begin{cases} \{i_1, \dots, i_n\}, & \text{falls } x \neq 0 \\ \emptyset, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in I} v_i x_i\right)x &= \left(\sum_{j=1}^n v_{i_j} x_{i_j}\right)x \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n v_{i_j} (x_{i_j} x) &= \sum_{i \in I} v_i (x_i x) \in U_i, \end{aligned}$$

da  $\sum_{i \in I} v_i (x_i x)$  Linearkombination (mit der Familie  $(x_i x)_{i \in I}$  in  $K$ ) ist.

**Zur Addition** Ähnlich (Vereinigung zweier Mengen, ist endlich), siehe Aufgabe.

**Bemerkung** Um triviale Diskussionen zu vermeiden, setzt man  $\sum_{i \in \emptyset} := 0$ .

## 1.3 Basis und Dimensionen

### 1.3.1 Definition (Basis)

Eine Teilmenge  $S \subset V$  oder eine Familie  $(v_i | i \in I)$  in  $V$  heißt:

- Erzeugendensystem von  $V$ , falls  $[S] = V$  bzw.  $[(v_i)_{i \in I}] = V$

- linear unabhängig, falls  $\forall v \in S : v \notin [S \setminus \{v\}]$  bzw.  $\forall i \in I : v_i \notin [(v_j)_{j \in I \setminus \{i\}}]$

und sonst linear abhängig. Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

**Bemerkung** Man kann jede (Teil-) Menge  $S \subset V$  als Familie in  $V$  auffassen mit

$$v : S \rightarrow V : v \mapsto id_S(v) = v.$$

Andererseits gilt für eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$ :

$$(v_i)_{i \in I} \text{ linear unabhängig} \Rightarrow \{v_i | i \in I\} \text{ linear unabhängig.}$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Eine Familie (in  $V$ ) enthält mehr Information als eine Teilmenge von  $V$ .

### 1.3.2 Beispiel und Definition (Standardbasis)

Für  $V = K^n$  ist  $(e_1, \dots, e_n)$ ,

$$e_i : \{1, \dots, n\} =: I \rightarrow K : j \mapsto e_i(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Basis – die Standardbasis des (Standard-)Vektorraumes  $K^n$ .

**Beweis** Z.z.:  $(e_i)_{i \in I}$  ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Bekannt ist:  $[(e_i)_{i \in I}] = K^n$ . Andererseits gilt für jedes  $i \in I$  und jede Familie  $(x_j | j \in I)$  in  $K$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j \in I \setminus \{i\}} e_j x_j \right) (i) &= \sum_{j \in I \setminus \{i\}} e_j(i) x_j = 0 \neq 1 = e_i(i) \\ &\Rightarrow \sum_{j \in I \setminus \{i\}} e_j x_j \neq e_i, \end{aligned}$$

also gilt:

$$\forall i \in I : e_i \notin [(e_j)_{j \in I \setminus \{i\}}] = \left\{ \sum_{j \in I \setminus \{i\}} e_j x_j \mid (x_j)_{j \in I} \right\} \text{ mit } \#\{j \in I \mid x_j \neq 0\} < \infty$$

### 1.3.3 Lemma

Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  ist linear unabhängig gdw. für jede Linearkombination

$$0 = \sum_{i \in I} v_i x_i \Rightarrow \forall i \in I : x_i = 0.$$

**Beweis** Wir zeigen zwei Richtungen der Äquivalenz der Negationen:

$$(v_i)_{i \in I} \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow \exists (x_i)_{i \in I} \neq (0)_{i \in I} : \sum_{i \in I} v_i x_i = 0.$$

$\Leftarrow$ : Wir nehmen an, es gäbe eine nicht-triviale Linearkombination der Null,

$$0 = \sum_{i \in I} v_i x_i, \text{ wobei } \exists j \in I : x_j \neq 0.$$

Für  $(y_i)_{i \in I}, y_i := -\frac{x_i}{x_j}$  ist dann

$$0 = v_j x_j + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} v_i x_i \Rightarrow v_j = - \left( \sum_{i \in I \setminus \{j\}} v_i x_i \right) x_j^{-1} = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} v_i y_i \in [(v_i)_{i \in I \setminus \{j\}}],$$

insbesondere ist also  $(v_i)_{i \in I}$  linear abhängig.

$\Rightarrow$ : siehe Aufgabe.

### 1.3.4 Korollar

Ist  $(v_i)_{i \in I}$  Basis von  $V$ , so ist jeder Vektor  $v \in V$  eindeutig in den  $v_i$  darstellbar:

$$\forall v \in V \exists! (x_i)_{i \in I} : v = \sum_{i \in I} v_i x_i$$

**Beweis** Sei  $v \in V$  beliebig, dann gilt:

$$v = [(v_i)_{i \in I}] \Rightarrow \exists (x_i)_{i \in I} : v = \sum_{i \in I} v_i x_i$$

liefern  $(x_i)_{i \in I}$  und  $(y_i)_{i \in I}$

$$v = \sum_{i \in I} v_i x_i = \sum_{i \in I} v_i y_i \Rightarrow 0 = \sum_{i \in I} v_i (x_i - y_i) \Rightarrow \forall i \in I : x_i = y_i \Rightarrow (x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I}$$

Damit ist die Basisdarstellung  $v = \sum_{i \in I} v_i x_i$  von  $v$  auch eindeutig.

### 1.3.5 Basislemma

Sei  $S \subset V$  lin. unabh. und  $E \subset V$  ein Erzeugendensystem mit  $S \subset E$ . Dann existiert eine Basis  $B$  von  $V$  mit  $S \subset B \subset E$ .

**Beweis** Wir gehen für den Beweis davon aus, dass  $\#E < \infty$ . Betrachte alle Teilmengen  $X \subset V$  mit  $S \subset X \subset E$  und  $X$  lin. unabh. Sei  $B$  eine solche Menge, die maximal ist, d.h.

$$\forall X \subset E : ((B \subset X \wedge X \text{ lin. unabh.}) \Rightarrow X = B)$$

Nach Konstruktion ist  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  lin. unabh. Zu zeigen:  $V = [B]$ .

Ist  $B = E$ , so folgt  $[B] = [E] = V$ .

Ist  $B \neq E$ , so ist  $B \cup \{v\}$  für (jedes)  $v \in E \setminus B$  lin. abh., da  $B$  maximal (Existenz einer maximalen Menge ist problematisch!) und lin. unabh. ist; also existiert eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors.

$$\exists x, x_1, \dots, x_n \in K : 0 = vx + \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

Wäre  $x = 0$ , so würde folgen  $x_1 = \dots = x_n = 0$ , da  $B$  lin. unabh. ist. Also ist  $x \neq 0$  und

$$v = - \sum_{i=1}^n b_i \frac{x_i}{x} \in [B].$$

Da dies für beliebiges  $v \in E \setminus B$  gilt, folgt

$$E \subset [B] \Rightarrow V = [E] \subset [[B]] = [B],$$

d.h.,  $B$  ist Erzeugendensystem und damit eine Basis mit  $S \subset B \subset E$ .

**Bemerkung** Ist  $\#E = \infty$ , so kann man einen analogen Beweis führen, falls man an die Existenz einer maximalen Menge glaubt: Dies garantiert das Zornsche Lemma bzw. Auswahlaxiom. Wir werden das Lemma auch im Falle  $\#E = \infty$  benutzen!

**Beispiel** Für  $V = K^3 = K^I$  mit  $I = \{1, 2, 3\}$  betrachte die Standardbasisvektoren

$$e_i : I \rightarrow K, j \mapsto e_i(j) = \delta_{ij}, \text{ und}$$

$$f_i : I \rightarrow K, j \mapsto f_i(j) := 1 - \delta_{ij};$$

dann sind  $S := \{e_1, f_1\}$  und  $E := \{e_i, f_i \mid i \in I\}$  lin. unabh. bzw. Erzeugendensystem von  $K^3$ . Ergänzung von  $S$  durch einen Vektor  $e_i$  oder  $f_i, i = 2, 3$  liefert eine Basis  $B$  mit  $S \subset B \subset E$ .

Zum Beispiel:  $B = \{e_1, f_1, f_2\}$  eine Basis, da sich jede Funktion  $v \in K^3$  aus den Funktionen  $e_1, f_1$  und  $f_2$  linear kombinieren lässt.

$$v = e_1x_1 + f_1y_1 + f_2y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v(2) = y_1 \\ v(3) - v(2) = y_1 + y_2 - y_1 = y_2 \\ v(1) + v(2) - v(3) = x_1 + y_2 - y_2 = x_1 \end{cases}$$

Dass  $B$  lin. unabh. folgt dann; Wäre  $B$  lin. abh., so würde folgen  $f_2 \in [\{e_1, f_1\}] \Rightarrow [B] \subset [\{e_1, f_1\}] \neq K^3$ , was nicht der Fall ist.

### 1.3.6 Basisergänzungssatz

Jede lin. unabh. Menge  $S \subset V$  kann zu einer Basis  $B$  von  $V$  ergänzt werden: Es existiert eine Basis  $B$  von  $V$  mit  $S \subset B$ .

**Beweis** Sei  $E \subset V$  ein Erzeugendensystem von  $V$  (z.B.  $E = V$ ). Dann ist  $S \cup E$  ein Erzeugendensystem von  $V$  mit  $S \subset S \cup E$ , das Basislemma liefert dann die gesuchte Basis.

### 1.3.7 Bemerkung

Strikt genommen haben wir den Basisergänzungssatz (BES) nur unter der Annahme bewiesen, dass  $V$  endlich erzeugt sei, d.h.  $V$  ein endliches Erz. Syst.  $E$  besitzt,  $V = [E]$  und  $\#E < \infty$ .

**Bemerkung** Wir haben für den BES die (in diesem Falle einfachere) Mengenschreibweise (anstelle der Familienschreibweise) verwendet.

**Bemerkung** Ähnlich kann man einen Verkürzungssatz beweisen: Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums  $V$  kann zu einer Basis verkürzt werden.

### 1.3.8 Austauschlemma

Seien  $B, B' \subset V$  Basen von  $V$ . Dann gilt:

$$\forall b \in B \exists b' \in B' : (B \setminus \{b\}) \cup \{b'\} \text{ ist Basis}$$

**Beweis** Sei  $b \in B$  beliebig gewählt und  $S := B \setminus \{b\}$ . Da  $B$  lin. unabh. ist, gilt  $b \notin [S] \Rightarrow \emptyset \neq V \setminus [S] = [B'] \setminus [S] \Rightarrow B' \not\subset [S]$ , d.h. es existiert  $b' \in B'$  mit  $b' \notin [S]$ . Wir zeigen, dass  $B'' := S \cup \{b'\} = (B \setminus \{b\}) \cup \{b'\}$  Basis ist.  $B''$  ist Erzeugendensystem: Da  $b' \in [B]$  existiert  $(x_j)_{j \in B}$  mit

$$b' = \sum_{j \in B} j x_j$$

mit  $x_b \neq 0$ , da  $b' \notin [S]$ .

Damit ist  $b = (b' - \sum_{j \in S} j x_j) \frac{1}{x_b} \in [B''] \Rightarrow V = [B] \subset [B'' \cup \{b\}] \subset [B'']$ .

$B''$  ist linear unabhängig.  $B''$  ist Erz. Syst. und  $S \subset B' = S \cup \{b'\}$  lin. unabh., kann also (nach Basislemma) ergänzt werden zu einer Basis  $\tilde{B}$  mit  $S \subset \tilde{B} \subset B''$ . Da  $[S] \neq V$  gilt  $\tilde{B} \neq S$  und damit  $\tilde{B} = B''$  Basis, insbesondere linear unabhängig.

**Bemerkung** Hier haben wir die Familienschreibweise (mit  $B$  bzw.  $S$  als Indexmenge) verwendet, um Linearkombinationen darzustellen.

### 1.3.9 Basissatz

Sei  $V$  ein endlich erzeugter  $K$ -VR,  $V = [E]$  mit  $\#E < \infty$ . Dann gilt:

- (i)  $V$  besitzt eine endliche Basis  $B$  mit  $n := \#B \leq \#E$ .
- (ii) Ist  $B' \subset V$  eine Basis von  $V$ , so ist  $\#B' = \#B = n$ .



## Beweis

(i) Dies folgt direkt aus dem Basislemma (mit  $S = \emptyset$ ).

(ii) Seien  $B, B'$  Basen von  $V$ ,  $B = (b_1, \dots, b_n)$ .

Annahme:  $\#B' < n$ ,  $B' = (b'_1, \dots, b'_k)$  mit  $k < n$ . Wiederholte Anwendung des Austauschlemmas auf die Basen  $B$  und  $B'$  liefert nach (spätestens)  $k+1 \leq n$  Schritten einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der neuen Basis  $B''$ , da Vektoren  $b'_i$  doppelt vorkommen müssen.

Annahme:  $\#B' > n$ ,  $B' = (b'_1, \dots, b'_n, b'_{n+1})$ : Das gleiche Argument mit vertauschten Rollen der Basen führt wieder zum Widerspruch.

### 1.3.10 Definition (Dimension)

Sei  $V$  ein  $K$ -VR, die Dimension von  $V$  ist dann:

- $\dim V := \#B$ , falls  $V$  endlich erzeugt und  $B$  eine Basis von  $V$  ist;
- $\dim V := \infty$ , falls  $V$  nicht endlich erzeugt ist.

**Bemerkung** Nach dem Basissatz hängt  $\dim V = \#B$  (falls  $V$  endlich erz.) nicht von der Basis  $B$  ab, d.h.  $\dim V$  ist wohldefiniert.

**Beispiel**  $\dim K^n = \#\{e_1, \dots, e_n\} = n$  (Standardbasis).

### 1.3.11 Korollar (Dimension und Teilmengen)

Sei  $V$  ein  $K$ -VR mit  $\dim V =: n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

- (i) Ist  $S \subset V$  linear unabhängig, so ist  $\#S \leq n$  und  $\#S = n$  genau dann, wenn  $S$  Basis ist.
- (ii) Ist  $E \subset V$  Erzeugendensystem, so ist  $\#E \geq n$ , bzw.  $\#E = n$  genau dann, wenn  $E$  eine Basis ist.

**Bemerkung** Insbesondere: Ist  $U \subset V$  UVR mit  $\dim U = \dim V < \infty$ , so gilt  $U = V$ .

## Beweis

(i) Ist  $S$  linear unabhängig, so existiert (nach BES) eine Basis  $B$  von  $V$  mit

$$S \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} \#S \leq \#B \\ \#S = \#B \Leftrightarrow S = B \end{cases}$$

(ii) Analog (mit Basislemma), siehe Aufgabe 23.

## 1.4 Homomorphismen

### 1.4.1 Definition

Sind  $V$  und  $W$   $K$ -VR, so heißt eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  ( $K$ -)linear oder ein (Vektorraum-)Homomorphismus  $f \in \text{Hom}(V, W)$ , falls gilt:

$$(i) \quad \forall v, w \in V : f(v + w) = f(v) + f(w);$$

$$(ii) \quad \forall v \in V \quad \forall x \in K : f(vx) = f(v)x$$

das heißt,  $f$  ist verträglich mit den Vektorraumoperationen in  $V$  und  $W$ .

**Bemerkung** Damit die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation sinnvoll ist, müssen  $V$  und  $W$  Vektorräume über demselben Körper  $K$  sein.

**Bemerkung** Für  $f \in \text{Hom}(V, W)$  gilt stets  $f(0_V) = f(0_V \cdot 0_K) = f(0_V) \cdot 0_K = 0_W$ .

### 1.4.2 Bemerkung & Definition

Ebenso erklärt man zum Beispiel *Gruppenhomomorphismen* oder *Körperhomomorphismen*. Sind etwa  $(G, \circ)$  und  $(H, \cdot)$  Gruppen, so ist eine Abbildung  $f : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus, falls

$$\forall g, h \in G : f(g \circ h) = f(g) \cdot f(h)$$

**Beispiel** Ist  $f \in \text{Hom}(V, W)$  ein Vektorraumhomomorphismus so ist  $f$  nach (i) Gruppenhomomorphismus von  $(V, +)$  in  $(W, +)$ .

**Beispiel** Sei  $V$  ein  $K$ -VR und  $y \in K$  fest, dann ist die Streckung um  $y : \eta_y : V \rightarrow V : v \mapsto \eta_y(v) := vy$  ein Homomorphismus von  $V$  in sich,  $\eta_y \in \text{Hom}(V, V)$ . Eine Streckung nennt man auch Homothetie.

**Beispiel** Sei  $V = \mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , dann ist die komplexe Konjugation  $\mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto x - iy =: \bar{z} \in \mathbb{C}$  kein Homomorphismus von  $\mathbb{C}$  in sich, wenn man  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{C}$ -VR auffasst. Hingegen ist sie ein Homomorphismus von  $\mathbb{C}$  in sich, wenn man  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -VR auffasst.

### 1.4.3 Lemma (Linearkombinationen und Homomorphismen)

$f : V \rightarrow W$  ist genau dann ein Homomorphismus, wenn für jede beliebige Linearkombination gilt:

$$f\left(\sum_{i \in I} v_i x_i\right) = \sum_{i \in I} f(v_i) x_i$$

**Beweis** Eine Richtung ist trivial, die andere mit vollständiger Induktion zu zeigen.

### 1.4.4 Fortsetzungssatz

Seien  $V$  und  $W$   $K$ -VR,  $(b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$  und  $(c_i)_{i \in I}$  eine Familie in  $W$ . Dann gilt:

$$\exists! f \in \text{Hom}(V, W), \forall i \in I : f(b_i) = c_i$$

**Bemerkung** Anders ausgedrückt: ist  $B \subset V$  eine Basis von  $V$ , so kann jede Abbildung  $f : B \rightarrow C \subset W$  eindeutig zu einem Homomorphismus  $f : V \rightarrow W$  fortgesetzt werden.

**Beweis** Wir beweisen die Existenz und die Eindeutigkeit getrennt.

1. Eindeutigkeit: Sei  $f \in \text{Hom}(V, W)$  so, dass  $\forall i \in I : f(b_i) = c_i$ . Sei  $v \in V$  beliebig. Da  $B$  Erzeugendensystem ist, lässt sich  $v$  als Linearkombination in  $(b_i)_{i \in I}$  mit geeigneten Koeffizienten  $(x_i)_{i \in I}$  in  $K$  darstellen.

$$v = \sum_{i \in I} b_i x_i \Rightarrow f(v) = \sum_{i \in I} f(b_i) x_i = \sum_{i \in I} c_i x_i$$

Damit ist  $f(v)$  eindeutig durch  $v$  und die  $c_i = f(b_i) x_i$  bestimmt.

2. Existenz: Da  $(b_i)_{i \in I}$  auch linear unabhängig ist, ist jedes  $v \in V$  eindeutig als Linearkombination in  $(b_i)_{i \in I}$  dargestellt, damit ist durch

$$f : V \rightarrow W, \quad v = \sum_{i \in I} b_i x_i \mapsto f(v) := \sum_{i \in I} c_i v_i$$

eine Abbildung wohldefiniert.

Weiters ist  $f \in \text{Hom}(V, W)$  wegen

$$f(v + w) = \sum_{i \in I} c_i (x_i + y_i) = f(v) + f(w) \text{ für alle } v = \sum_{i \in I} b_i x_i \in V, w = \sum_{i \in I} b_i y_i \in V$$

und

$$f(vx) = \sum_{i \in I} c_i (x_i x) = \sum_{i \in I} (c_i x_i) x = \left( \sum_{i \in I} c_i x_i \right) x = f(v)x \text{ für } x \in K \text{ und } v = \sum_{i \in I} b_i x_i \in V.$$

Damit ist die Linearität von  $f$  gezeigt.

### 1.4.5 Beispiel und Definition (Dualraum)

Der Dualraum  $V^* := \text{Hom}(V, K)$  eines  $K$ -VRs  $V$  ist ein  $K$ -VR ( $\subset K^V$ ). Ist  $\dim V =: n < \infty$  so ist  $\dim V^* = n$ . Ist  $B = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$  ( $\dim V < \infty$ ), so definieren wir für  $i = \{1, \dots, n\}$  die Linearform (nach Fortsetzungssatz):

$$b_i^* \in V^* : V \rightarrow K, \forall j \in \{1, \dots, n\} : b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$$

die zu  $B$  duale Basis  $B^*$  von  $V^*$ .

**Beweis**  $V^*$  ist  $K$ -VR. Wir zeigen  $V^* \subset K^V$  ist UVR.

- $0 : V \rightarrow K$  ist linear, d.h.  $0 \in V^* \Rightarrow V^* \neq \emptyset$
- Seien  $f, g \in V^*$  und  $x \in K$ ; dann gilt

$$\begin{aligned} \forall v, w \in V : (fx + g)(v + w) &= f(v + w)x + g(v + w) \\ &= (f(v) + f(w))x + (g(v) + g(w)) \\ &= (f(v)x + g(v)) + (f(w)x + g(w)) \\ &= (fx + g)(v) + (fx + g)(w) \end{aligned}$$

genauso:

$$\begin{aligned}\forall v \in V, y \in K : (fx + g)(vy) &= f(vy)x + g(vy) \\ &= f(v)yx + g(v)y \\ &= (f(v)x + g)y = ((fx + g)y)(v)\end{aligned}$$

Damit gilt:  $fx + g \in \text{Hom}(V, K) = V^*$

Da  $f, g \in V^*$  und  $x \in K$  beliebig waren, zeigt das UR-Kriterium, dass  $V^* \subset K^V$  ein UVR ist und damit selbst  $K$ -VR ist.

**Beweis**  $B^*$  ist Basis. Wir zeigen  $B^*$  ist linear unabhängig und Erzeugendensystem.

- $B^*$  ist linear unabhängig: Seien  $x_1, \dots, x_n$  so, dass

$$0 = \sum_{i=1}^n b_i^* x_i \Rightarrow \forall j = 1, \dots, n : 0 = \left( \sum_{i=1}^n b_i^* x_i \right) (b_j) = \sum_{i=1}^n b_i^* (b_j) x_i = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} x_i = x_j.$$

Also  $x_1 = \dots = x_n = 0$  und damit ist  $B^*$  linear unabhängig.

- $B^*$  ist Erzeugendensystem: Sei  $f \in V^*$  beliebig, dann gilt:

$$\forall j = 1, \dots, n : f(b_j) = \sum_{i=1}^n b_i^* (b_j) f(b_i) = \left( \sum_{i=1}^n b_i^* f(b_i) \right) b_j \Rightarrow f = \sum_{i=1}^n b_i^* f(b_i) \in [B^*].$$

Da  $f \in V^*$  beliebig war, ist also  $V^* = [B^*]$ .

Damit ist  $B^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$  eine Basis von  $V^*$  – insbesondere also  $\dim V^* = n = \dim V = \dim K \cdot \dim V$ .

**Bemerkung** Ist  $\dim V = \infty$  und  $B = (b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , so liefert  $B^* = (b_i^*)_{i \in I}$  mit  $\forall j \in I : b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$  eine linear unabhängige Familie. Diese ist jedoch kein Erzeugendensystem von  $V^* : f \in \text{Hom}(V, K) = V^*$  mit  $\forall j \in I : f(b_j) = 1$  lässt sich nicht in  $B^*$  linear kombinieren. Wäre  $f = \sum_{i \in I} b_i^* x_i$ , so gälte  $\forall j \in I : x_j = \sum_{i \in I} b_i^*(b_j) x_i = \sum_{i \in I} \delta_{ij} x_i = f(b_j) = 1$ .

Das heißt,  $(x_i)_{i \in I}$  wäre eine Familie in  $K$  mit  $\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} = \infty$ .

### 1.4.6 Satz (Homomorphismen als VR)

$\text{Hom}(V, W)$  ist ein VR. Die Dimension der Homomorphismen  $\dim \text{Hom}(V, W) = m \cdot n$ , falls  $m := \dim W < \infty, n := \dim V < \infty$ .

**Beweis** Addition und Skalarmultiplikation in  $\text{Hom}(V, W)$  werde (wie für  $K$ -wertige Abbildungen oder in  $V^*$ ) punktweise definiert:

- für  $f, g \in \text{Hom}(V, W)$  setzt man  $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$  für alle  $v \in V$ ,
- für  $f \in \text{Hom}(V, W)$  und  $x \in K$  setzt man  $(fx)(v) := f(v)x$  für alle  $v \in V$ .

Die so definierten Abbildungen  $f + g, fx : V \rightarrow W$  sind linear,  $f + g, fx \in \text{Hom}(V, W)$ , aufgrund der VR-Eigenschaften von  $V$ .

Damit zeigt man:  $\text{Hom}(V, W)$  ist  $K$ -VR (siehe Aufgabe 27).

Seien nun  $\dim V = n < \infty$  und  $\dim W = m < \infty$ .

Wir wählen (nach BES) Basen  $B = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  und  $C = (c_1, \dots, c_m)$  von  $W$  und definieren

$$\text{Hom}(V, W) \ni f_{ij} := c_i \cdot b_j^* \text{ für } \begin{cases} i \in I := \{1, \dots, m\} \\ j \in J := \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Behauptung:  $F = (f_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$  ist Basis von  $\text{Hom}(V, W)$ .

Da  $(c_i)_{i \in I}$  linear unabhängig in  $W$  ist, gilt für jede Familie  $(x_{ij})_{i,j}$  in  $K$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f_{ij} x_{ij} \\ \Rightarrow \forall k \in J : 0 &= \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (f_{ij} x_{ij})(b_k) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_i b_j^*(b_k) x_{ij} = \sum_{i \in I} c_i x_{ik} \\ &\Rightarrow \forall k \in J \forall i \in I : x_{ik} = 0 \end{aligned}$$

Also ist  $F$  linear unabhängig.

Da  $(c_i)_{i \in I}$  Erzeugendensystem von  $W$  ist, existiert zu jedem (fest gegebenen)  $f \in \text{Hom}(V, W)$  eine Familie  $(x_{ij})_{i,j}$  in  $K$ , sodass

$$\begin{aligned} \forall k \in J : f(b_k) &= \sum_{i \in I} c_i x_{ik} \quad (\text{da } (c_i)_{i \in I} \text{ Erzeugendensystem}) \\ &= \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_i b_j^*(b_k) x_{ij} = \left( \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f_{ij} x_{ij} \right)(b_k) \end{aligned}$$

also (nach Fortsetzungssatz):

$$f = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f_{ij} x_{ij} \in [F]$$

Da  $f \in \text{Hom}(V, W)$  beliebig war, gilt also  $\text{Hom}(V, W) = [F]$ . Damit ist  $F$  Basis von  $\text{Hom}(V, W)$  und  $\dim \text{Hom}(V, W) = \#F = m \cdot n$

### 1.4.7 Lemma und Definition (Bild, Kern, Rang & Defekt)

Sei  $f \in \text{Hom}(V, W)$ . Dann sind Bild und Kern von  $f$ :

$$f(V) = \{f(v) \in W \mid v \in V\} \subset W \text{ bzw. } \ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$$

UVR von  $W$  bzw.  $V$ . Ihre Dimensionen heißen Rang und Defekt von  $f$ :

$$\text{rg } f := \dim f(V) \text{ bzw. } \text{def } f := \dim \ker f$$

**Bemerkung** Da  $f(0) = 0$  für  $f \in \text{Hom}(V, W)$  gilt  $\{o_V\} \in \ker f$  und  $\{o_W\} \in f(V)$ .

**Beweis** Zu zeigen: Das Bild  $f(V) \subset W$  und  $\ker f \subset V$  sind UVR. Nach Bemerkung gilt  $f(V) \neq \emptyset$  und  $\ker f \neq \emptyset$  – wir verwenden dann das UR-Kriterium.

Das Bild  $f(V)$  ist UVR:  $f(V) \neq \emptyset$ . Es bleibt zu zeigen:

$$\forall w_1, w_2 \in f(V), \forall x \in K : w_1x + w_2 \in f(V).$$

Seien also  $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2) \in f(V)$  und  $x \in K$ ; dann gilt:

$$w_1x + w_2 = f(v_1)x + f(v_2) = f(v_1x + v_2) \in f(V)$$

Der Kern  $\ker f$  ist UVR:  $\ker f \neq \emptyset$ ; seien  $v_1, v_2 \in \ker f$  und  $x \in K$ , dann gilt:

$$f(v_1x + v_2) = f(v_1)x + f(v_2) = 0 \cdot x + 0 = 0 \Rightarrow v_1x + v_2 \in \ker f$$

**Bemerkung** Allgemeiner kann man für  $f \in \text{Hom}(V, W)$  zeigen:

1. Ist  $U \subset V$  UVR, so ist  $f(U) \subset W$  UVR.
2. Ist  $U \subset W$  UVR, so ist  $f^{-1}(U) = \{v \in V \mid f(v) \in U\} \subset V$  ein UVR.

**Bemerkung** Die Funktion  $f \in \text{Hom}(V, W)$  ist genau dann injektiv, wenn  $\ker f = \{0\}$ . Nämlich:

- ist  $f$  injektiv und  $v \in \ker f$ , so gilt  $f(v) = 0 = f(0) \Rightarrow v = 0$
- ist  $\ker f = \{0\}$  und sind  $v, w \in V$  mit  $f(v) = f(w)$ , so folgt  
 $0 = f(v) - f(w) = f(v - w) \Rightarrow v - w \in \ker f = \{0\} \Rightarrow v = w$

**Bemerkung** Eine lineare Abbildung  $f \in \text{Hom}(V, W)$  ist genau dann

- (i) injektiv, wenn  $\forall S \subset V : S \text{ lin. unabh.} \Rightarrow f(S) \text{ lin. unabh.}$
- (ii) surjektiv, wenn  $\forall E \subset W : E \text{ Erz. Syst.} \Rightarrow f^{-1}(E) \text{ Erz. Syst.}$
- (iii) bijektiv, wenn  $\forall B \subset V : B \text{ Basis} \Rightarrow f(B) \text{ Basis}$

Ist  $f \in \text{Hom}(V, W)$  bijektiv, so ist  $f^{-1} \in \text{Hom}(W, V)$ .

### 1.4.8 Rangsatz

Sei  $f \in \text{Hom}(V, W)$ . Ist  $\dim V = n < \infty$ , so gilt  $\text{rg } f + \text{def } f = \dim V$ . Ist  $\dim V = \infty$ , so gilt  $\text{rg } f = \infty$  oder  $\text{def } f = \infty$ .

**Beweis** Wir nehmen an, dass  $\text{def } f = k \neq \infty$ . Sei  $(b_1, \dots, b_k)$  eine Basis von  $\ker f$ ; nach BES ergänzen wir zu einer Basis  $(b_j)_{j \in J}$  von  $V$  (bemerke:  $\{1, \dots, k\} \subset J$ ). Wir setzen  $I := J \setminus \{1, \dots, k\}$  und  $\forall i \in I : c_i := f(b_i)$ .

Behauptung:  $(c_i)_{i \in I}$  ist eine Basis von  $f(V)$ .

**Lineare Unabhängigkeit** gilt für eine Linearkombination in  $(c_i)_{i \in I}$ :

$$0 = \sum_{i \in I} c_i x_i = \sum_{i \in I} f(b_i) x_i = f\left(\sum_{i \in I} b_i x_i\right)$$



so folgt

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} b_i x_i \in \ker f \\
& \Rightarrow \exists y_1, \dots, y_k \in K : \sum_{i \in I} b_i x_i = \sum_{j=1}^k b_j y_j \\
& \Rightarrow 0 = \sum_{i \in I} b_i x_i - \sum_{j=1}^k b_j y_j \\
& \Rightarrow \begin{cases} \forall j = 1, \dots, k : y_j = 0 \\ \forall i \in I : x_i = 0, \end{cases} \quad \text{da } (b_j)_{j \in J} \text{ linear unabhängig ist.}
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt also  $\forall i \in I : x_i = 0$  damit folgt die lineare Unabhängigkeit nach Lemma.

**Erzeugendensystem** Sei  $w \in f(V)$ , also existiert  $v \in V$  mit  $w = f(v)$ . Da  $(b_j)_{j \in J}$  Basis von  $V$  ist, existiert eine Familie  $(x_j)_{j \in J}$  in  $K$  so, dass

$$v = \sum_{j \in J} b_j x_j$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
w &= f(v) = f\left(\sum_{j \in J} b_j x_j\right) = \sum_{j \in J} f(b_j x_j) \\
J &= I \cup \{1, \dots, k\} \Rightarrow \sum_{j=1}^k f(b_j) x_j + \sum_{i \in I} f(b_i) x_i = \sum_{i \in I} c_i x_i \in [(c_i)_{i \in I}].
\end{aligned}$$

Da  $(c_i)_{i \in I}$  also Basis von  $f(V)$  ist folgt:

1. Fall  $(\dim V = n < \infty)$  dann ist  $\#J = n$  und  $\#I = \#J - k$ , also  $\text{rg } f = n - k = \dim V - \text{def } f$ .
2. Fall  $(\dim V = \infty)$ , dann ist  $\#J = \infty$  und damit auch  $\#I = \#(J \setminus \{1, \dots, k\}) = \infty$ , also  $\text{rg } f = \infty$ .

**Bemerkung** Die Annahme  $\text{def } f = k < \infty$ , im Beweis ist keine Einschränkung:

1. ist  $\dim V < \infty$ , so folgt  $\text{def } f < \infty$ , da  $\ker f \subset V$  Untervektorraum ist;
2.  $\dim V = \infty$ , so ist man mit dem Beweis fertig, falls  $\text{def } f = \infty$ .

**Korollar (Homomorphismen zwischen gleichdimensionalen VR)** Sei  $f \in \text{Hom}(V, W)$  und  $\dim W = \dim V = n < \infty$ . Dann gilt: Ist  $f$  injektiv oder surjektiv, so ist  $f$  bijektiv.

**Beweis** Der Rangsatz liefert:

1. Wenn  $f$  injektiv ist, dann ist  $\ker f = \{0\}$ , also ist  $\text{def } f = 0 \Rightarrow \text{rg } f = \dim V - 0 = \dim V \Rightarrow f(V) = W \Leftrightarrow f$  surjektiv
2.  $f(V) = W \Rightarrow \text{rg } f = \dim W = \dim V \Rightarrow \text{def } f = \dim V - \text{rg } f = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}$

**Beispiel** Der Shiftoperator für Folgen  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $K$ ,  $s : K^{\mathbb{N}} \rightarrow K^{\mathbb{N}} : (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  wobei

$$y_i := \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \\ x_{i-1} & \text{für } i \neq 0 \end{cases}$$

ist ein injektiver Homomorphismus,  $s \in \text{Hom}(K^{\mathbb{N}}, K^{\mathbb{N}})$  von  $K^{\mathbb{N}}$  in sich (damit gilt  $\dim \text{Definitionsbereich} = \dim K^{\mathbb{N}} = \dim \text{Wertebereich}$ ). Aber  $s$  ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv.

**Übrigens** Damit folgt  $\dim K^{\mathbb{N}} = \infty$  (sonst hätte man einen Widerspruch zum Korollar).

### 1.4.9 Definition (Spezielle Homomorphismen)

Sei  $f \in \text{Hom}(V, W)$  ein Homomorphismus, dann heißt  $f$ :

- Endomorphismus,  $f \in \text{End}(V)$ , falls  $W = V$ ;
- Isomorphismus,  $f \in \text{Iso}(V, W)$ , falls  $f$  bijektiv ist;
- Automorphismus,  $f \in \text{Aut}(V)$ , falls  $W = V$  und  $f$  bijektiv ist.

Zwei  $K$ -VR  $V$  und  $W$  heißen isomorph,  $W \cong V$ , falls  $\text{Iso}(V, W) \neq \emptyset$ .

**Bemerkung** Ein Isomorphismus  $f \in \text{Iso}(V, W)$  bildet jede Basis  $B$  von  $V$  auf eine Basis  $C = f(B)$  von  $W$  ab.

Andererseits: Bildet eine lineare Abbildung  $f \in \text{Hom}(V, W)$ , eine Basis  $B$  von  $V$  auf eine Basis  $C = f(B)$  von  $W$  ab, so ist  $f$  ein Isomorphismus.

Nämlich: Ist  $B$  Basis von  $V$  und  $C = f(B)$  Erzeugendensystem, so ist  $f$  surjektiv, da  $f(V) = f([B]) = [f(B)] = [C] = W$ ; ist  $C = f(B)$  linear unabhängig, so ist  $f$  injektiv, denn für

$$\begin{aligned} v = \sum_{b \in B} b x_b \in \ker f &\Rightarrow 0 = f(v) = f\left(\sum_{b \in B} b x_b\right) = \sum_{b \in B} f(b) x_b \\ &\Rightarrow \forall b \in B : x_b = 0 \Rightarrow v = 0, \text{ d.h., } \ker f = \{0\}. \end{aligned}$$

### 1.4.10 Isomorphielemma

Seien  $V$  und  $W$   $K$ -VR mit  $\dim V, \dim W < \infty$ . Dann gilt:  $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$ .

**Beweis** Folgt aus obiger Bemerkung. Ausführlich:

$\Rightarrow$ :

Annahme:  $V \cong W$ ; sei  $f \in \text{Iso}(V, W) (\neq 0)$ . Wähle eine Basis  $B = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  (BES); da  $f$  bijektiv, ist dann:

$$C = f(B) = (f(b_1), \dots, f(b_n))$$

eine Basis von  $W$ , damit ist  $\dim W = n = \dim V$ .

$\Leftarrow$ :

Sei  $\dim W = \dim V = n$ ; wähle Basen  $B = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  und  $C = (c_1, \dots, c_n)$  von  $W$  (BES und Basissatz) und definiere  $f \in \text{Hom}(V, W)$  durch (Fortsetzungssatz):

$$\forall i = 1, \dots, n : f(b_i) = c_i$$

Da  $f$  eine Basis auf eine Basis abbildet ist  $f \in \text{Iso}(V, W)$ . Damit folgt also  $\text{Iso}(V, W) \neq \emptyset \Rightarrow V \cong W$ .

**Beispiel:** Ist  $V$   $K$ -VR mit  $\dim V < \infty$ , so ist  $V^* \cong V$ . (Achtung: Es gibt aber viele Isomorphismen, keiner ist besonders d.h., „kanonisch“.)

**Bemerkung:** Ist  $f \in \text{Iso}(V, W)$ , so ist  $f^{-1} \in \text{Iso}(W, V)$ , denn

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})\left(\sum_{i \in I} v_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i \in I} f^{-1}(v_i) x_i\right) = \sum_{i \in I} (f \circ f^{-1})^{(=\text{id})}(v_i) x_i \\ &\Rightarrow f^{-1}\left(\sum_{i \in I} v_i x_i\right) = \sum_{i \in I} f^{-1}(v_i) x_i. \end{aligned}$$

## 1.5 Summen, Produkte und Quotienten

### 1.5.1 Definition (Summe von UVR)

Die Summe einer Familie  $(U_i)_{i \in I}$  von UVR  $U \subset V$  eines  $K$ -VR ist die Menge

$$\sum_{i \in I} U_i := \left\{ \sum_{i \in I} u_i \mid \forall i \in I : u_i \in U_i \wedge \#\{i \in I \mid u_i \neq 0\} < \infty \right\}.$$

**Bemerkung** Offenbar ist  $\sum_{i \in I} U_i \subset V$  UVR mit

$$\bigcup_{i \in I} U_i \subset \sum_{i \in I} U_i \Rightarrow [\bigcup_{i \in I} U_i] \subset \sum_{i \in I} U_i;$$

andererseits gilt:

$$\sum_{i \in I} U_i \subset \left\{ \sum_{j \in J} v_j x_j \mid \forall j \in J v_j \in \bigcup_{i \in I} U_i \wedge \#\{j \in J \mid x_j \neq 0\} < \infty \right\} \subset [\bigcup_{i \in I} U_i].$$

Damit ist die Summe einer Familie  $(U_i)_{i \in I}$  gerade die lineare Hülle ihrer Vereinigung  $\bigcup_{i \in I} U_i$ ,

$$\sum_{i \in I} U_i = [\bigcup_{i \in I} U_i].$$

**Beispiel** Sei  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  der Raum der reellen Folgen. Für  $n \in \mathbb{N}$  setze

$$U_n := \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N} : j > n \Rightarrow v_j = 0\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}};$$

dann gilt  $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \subset U_{n+1}$ , und damit auch

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq n} U_i &= U_n = \bigcup_{i \leq n} U_i, \text{ aber} \\ \sum_{i \in \mathbb{N}} U_i &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \neq V. \end{aligned}$$

Nun setze für  $i \in \{0, 1\}$

$$\tilde{U}_i := \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N} : j = i \bmod 2 \Rightarrow v_j = 0\}$$

dann ist

$$\bigcup_{i \in \{0,1\}} \tilde{U}_i \neq \sum_{i \in \{0,1\}} \tilde{U}_i = V.$$

## 1.5.2 Dimensionssatz

Sind  $U_i \subset V$  UVR mit  $\dim U_i < \infty$  für  $i \in \{1, 2\}$ , so ist

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Ist  $\dim U_1 = \infty$  oder  $\dim U_2 = \infty$ , so ist auch  $\dim(U_1 + U_2) = \infty$ .

**Beweis** Seien

- $B_0 \subset U_1 \cap U_2$  eine Basis von  $U_0 := U_1 \cap U_2$ ;
- $S_i \subset U_i$  lin. unabh., sodass  $B_i = B_0 \cup S_i$  Basen von  $U_i$  sind ( $i = 1, 2$ ; BES).

Offenbar gilt dann, da  $B_i = B_0 \cup S_i$  lin. unabh. sind,

$$B_0 \cap S_1 = \emptyset \text{ und } B_0 \cap S_2 = \emptyset$$

und

$$S_1 \cap S_2 \subset U_1 \cap U_2 = [B_0] \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

Wir zeigen, dass  $B := B_0 \cup S_1 \cup S_2$  Basis von  $U_1 + U_2 =: U$  ist.

$B \subset U$  ist Erz. Syst. nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2\} : U_i &= [B_i] \subset [B] \\ \Rightarrow U_1 + U_2 &= [U_1 \cup U_2] \subset [B] \end{aligned}$$

**$B$  ist linear unabhängig:** Gegeben sei eine Linearkombination von  $0 \in U$ ,

$$0 = \sum_{b \in B} bx_b = \sum_{b \in B_0} bx_b + \sum_{b \in S_1} bx_b + \sum_{b \in S_2} bx_b =: b_0 + s_1 + s_2$$

mit  $b_0 \in [B_0] = U_0$  und  $s_i \in [S_i]$  für  $i = 1, 2$ ;

dann gilt etwa,  $B_1 = B_0 \cup S_1$  lin. unabh.,

$$b_0 + s_1 = -s_2 \in U_1 \cap [S_2] \subset U_0 \Rightarrow s_1 = 0$$

und damit, da  $B_2 = B_0 \cup S_2$  lin. unabh. ist,

$$0 = b_0 + s_1 + s_2 \Rightarrow b_0 = s_2 = 0.$$

Mit der linearen Unabhängigkeit von  $B_0, S_1$  und  $S_2$  folgt dann

$$0 = \sum_{b \in B_0} bx_b = \sum_{b \in S_1} bx_b = \sum_{b \in S_2} bx_b \Rightarrow \forall b \in B : x_b = 0.$$

Mit

$$\begin{aligned} \#B + \#B_0 &= (\#B_0 + \#S_1 + \#S_2) + \#B_0 \\ &= (\#B_0 + \#S_1) + (\#B_0 + \#S_2) = \#B_1 + \#B_2 \end{aligned}$$

folgt dann die Behauptung.

**Bemerkung** Im Beweis haben wir benutzt:

Ist z.B.  $B_1 = B_0 \cup S_1$  lin. unabh., und  $b_0 \in [B_0]$  und  $s_1 \in [S_1]$  mit  $b_0 + s_1 = 0$ , so folgt  $b_0 = s_1 = 0$ : sind nämlich  $b_0 = \sum_{b \in B_0} bx_b$  und  $s_1 = \sum_{b \in S_1} bx_b$ , so gilt

$$0 = b_0 + s_1 = \sum_{b \in B_0} bx_b + \sum_{b \in S_1} bx_b = \sum_{b \in B_1} bx_b \Rightarrow \forall b \in B_1 : x_b = 0 \Rightarrow b_0 = s_1 = 0.$$

**Bemerkung** Ist  $U_1 \cap U_2 = \{o\}$  bzw.  $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$ , so zeigt der Beweis auch:

$$\forall v \in U_1 + U_2 \exists! u_1 \in U_1 \exists! u_2 \in U_2 : v = u_1 + u_2$$

### 1.5.3 Definition (Komplementäre UVR)

Zwei UVR  $U_1, U_2 \subset V$  heißen komplementär in  $V$ , falls

$$U_1 + U_2 = V \text{ und } U_1 \cap U_2 = \{o\}.$$

### 1.5.4 Lemma (Komplementäre UVR)

Zu jedem UVR  $U \subset V$  existiert ein (in  $V$ ) komplementärer UVR.

**Beweis** Sei  $U \subset V$  UVR eines  $K$ -VR  $V$ . Seien

- $B \subset U$  eine Basis von  $U$ ;
- $S \subset V$  lin. unabh., sodass  $C = B \cup S$  Basis von  $V$  ist (BES).

Definiere  $U' := [S]$ . Dann ist  $U' \subset V$  UVR mit

- (i)  $U + U' \supset [C] = V$ , da  $C \subset U \cup U'$  Erz. Syst. von  $V$  ist;
- (ii)  $U \cap U' = [B] \cap [S] = \{o\}$ , da  $C = B \cup S$  linear unabhängig ist.

**Bemerkung** Zu einem UVR  $U \subset V$  gibt es normalerweise viele komplementäre UVR  $U' \subset V$ .  
Z.B.: Zu

$$U := \{v \in K^2 \mid v_2 = 0\}$$

ist jeder UVR  $U' = [u']$  mit  $u'_2 \neq 0$  komplementär in  $K^2$ .

### 1.5.5 Lemma & Definition (direkte Summe)

Sei  $U = \sum_{i \in I} U_i \subset V$  Summe einer Familie von UVR  $U_i \in V$ ; dann besitzt jeder Vektor  $u \in U$  eine eindeutige Zerlegung als Summe von  $u_i$ , genau dann, wenn

$$\forall i \in I : U_i \cap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} U_j = \{o\}.$$

In diesem Falle heißt die Summe „direkt“ und man schreibt

$$U = \bigoplus_{i \in I} U_i.$$

**Bemerkung** Eine Summe  $V = \sum_{i \in I} U_i$  ist genau dann direkt, wenn

$$\forall i \in I : U_i, \sum_{j \in I \setminus \{i\}} U_j \subset V$$

komplementäre UVR in  $V$  sind.

**Beweis** Zu zeigen ist die Eindeutigkeitsaussage. Sei also  $u \in \bigoplus_{i \in I} U_i$ ,

$$u = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u'_i \text{ mit } \forall i \in I : u_i, u'_i \in U_i;$$

dann gilt für jedes  $i \in I$ :

$$u_i - u'_i = \sum_{j \neq i} u_j - \sum_{j \neq i} u'_j = \sum_{j \neq i} u_j - u'_j \in U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{o\},$$

da die Summe als direkt angenommen wurde; damit folgt  $\forall i \in I : u_i = u'_i$ , d.h. die Zerlegung ist eindeutig.

Die Umkehrung ist trivial:

$$\begin{aligned} \exists i \in I : U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j \neq \{o\} &\Rightarrow \exists i \in I \exists u_i \in U_i \setminus \{o\} \exists (u_j)_{j \in I \setminus \{i\}} : \\ &(\forall j \in I \setminus \{i\} : u_j \in U_j) \wedge u_i = \sum_{j \neq i} u_j, \end{aligned}$$

d.h., die Zerlegung von  $u_i \in \sum_{i \in I} U_i$  ist nicht eindeutig.

**Bemerkung** Sind  $\dim V < \infty$  und  $\#I < \infty$  so gilt

$$\forall i \in I : \dim U_i < \infty$$

und es gilt die Dimensionsformel für direkte Summen (Beweis in Aufgabe 35):

$$\dim \bigoplus_{i \in I} U_i = \sum_{i \in I} \dim U_i.$$

Ist insbesondere  $B = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$ , so gilt

$$\dim V = \dim \bigoplus_{i=1}^n [b_i] = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

**Bemerkung** Seien  $U, U' \subset V$  komplementäre UVR, also  $V = U \oplus U'$ , dann werden durch

$$v = u + u' \mapsto \begin{cases} p(v) := u \\ p'(v) := u' \end{cases}$$



Endomorphismen  $p, p' \in \text{End}(V)$  (wohl-)definiert, da  $u, u'$  durch  $v$  eindeutig bestimmt sind (Linearität von  $p, p'$  ist klar). Offenbar ist

$$p(V) = U \text{ und } \ker p = U'$$

und es gilt

$$p^2 := p \circ p = p$$

und analog für  $p'$ ; außerdem gilt ( $\circ$  ausgelassen)

$$p + p' = \text{id}_V \text{ und } p'p = 0 = pp'.$$

### 1.5.6 Definition (Projektion)

$p \in \text{End}(V)$  heißt Projektion, falls  $p^2 = p$  (d.h. falls  $p$  idempotent ist).

### 1.5.7 Satz (Projektionen)

Sei  $p \in \text{End}(V)$  Projektion, dann ist  $p' = \text{id}_V - p$  Projektion mit  $pp' = p'p = 0$ . Gilt andererseits  $p + p' = \text{id}_V$  und  $pp' = 0$  für  $p, p' \in \text{End}(V)$ , so sind  $p, p'$  Projektionen mit

$$V = p(V) \oplus p'(V) = \ker p' \oplus \ker p.$$

**Beweis** Seien  $p \in \text{End}(V)$  Projektion und  $p' := \text{id}_V - p$ ; dann gilt:

$$p \circ p' = p(\text{id}_V - p) = p - p^2 = 0; (p^2 = p \circ p)$$

$$p' \circ p = (\text{id}_V - p) \circ p = p - p^2 = 0$$

und

$$p' \circ p' = p'^2 = p' \circ (\text{id}_V - p) = p' - p' \circ p = p',$$

d.h.,  $p' \in \text{End}(V)$  ist Projektion.

Andererseits: Seien  $p + p' = \text{id}_V$  und  $pp' = 0$ .

Dann gilt:

$$p - p^2 = p(\text{id}_V - p) = pp' = 0$$

d.h.,  $p \in \text{End}(V)$  ist Projektion, damit ist auch  $p'$  Projektion (erster Teil) und  $p'p = 0$ . Weiters liefert

$$\forall v \in V : v = \text{id}_v(v) = p(v) + p'(v) \Rightarrow V = p(V) + p'(V),$$

und ist  $w = p(v) = p'(v')$  für geeignete  $v, v' \in V$  (d.h.,  $w \in p(V) \cap p'(V)$ ), so gilt

$$w = p(v) = p^2(v) = p(p(v)) = p(w) = p(p'(v')) = pp'(v') = 0,$$

also  $p(V) \cap p'(V) = 0$  und damit  $V = p(V) \oplus p'(V)$ . Weiters gilt

$$0 = p \circ p' \rightarrow p'(V) \subset \ker p$$

und ist  $v \in \ker p$ , so folgt

$$v = p(v) + p'(v) = 0 + p'(v) \in p'(V) \Rightarrow \ker p \subset p'(V).$$

Für  $p'$  gilt das Gleiche und wir haben  $\ker p = p'(V)$  und  $\ker p' = p(V)$ . Damit folgt die letzte Behauptung

$$V = \ker p \oplus \ker p'.$$

**Bemerkung** Im Beweis haben wir etwas mehr bewiesen als behauptet - nämlich:

$$\ker p = p'(V) \text{ und } \ker p' = p(V)$$

### 1.5.8 Beispiel und Definition (Involution)

Sei  $s \in \text{End}(V)$  eine Involution d.h.,

$$s^2 = \text{id}_V \text{ und } p_{\pm} := \frac{1}{2}(\text{id}_v \pm s).$$

Offenbar gilt dann

$$p_+ + p_- = \text{id}_V \text{ und } p_+p_- = \frac{1}{4}(\text{id}_V + s)(\text{id}_V - s) = \frac{1}{4}(\text{id}_v^2 - s^2) = 0$$

also (Satz) sind  $p_{\pm} \in \text{End}(V)$  Projektionen mit komplementären Bildern bzw. Kernen.

### 1.5.9 Lemma und Definition (Produkt von VR)

Ist  $(V_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $K$ -VR  $V_i$ , so wird das (mengentheoretische) Produkt:

$$V := \prod_{i \in I} V_i = \{(v_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : v_i \in V_i\}$$

mit den komponentenweise definierten VR-Operationen zu einem  $K$ -VR. Dies ist der Produktraum der Familie  $(V_i)_{i \in I}$ .

**Beweis** Aufgabe!

**Bemerkung** Ist  $V = \prod_{i \in I} V_i$  ein Produktraum, so erhält man kanonische UVR

$$U_i := \{v = (v_i)_{i \in I} \in V \mid \forall j \neq i : v_j = 0\} \subset V,$$

die isomorph zu den  $V_i$  sind mittels der Faktorprojektionen

$$\pi_i : V \rightarrow V_i : (v_j)_{j \in I} \mapsto v_i,$$

bzw. Faktor-Injektionen

$$\iota_i : V_i \rightarrow V : v_i \mapsto (v_j)_{j \in I}, \text{ wobei } v_j := \begin{cases} v_i & \text{falls } j = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist dann  $\#I < \infty$ , so erhält man

$$\prod_{i \in I} V_i \cong \bigoplus_{i \in I} U_i (= \bigoplus_{i \in I} V_i);$$

ist  $\#I = \infty$ , so ist diese Identifikation im Allgemeinen falsch!

**Beispiel** Für einen Körper  $K$  liefert das  $n$ -fache Produkt den Standardraum

$$\prod_{i=1}^n K = \{(x_i)_{i=1, \dots, n} \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \in K\} = K^n \cong \bigoplus_{i=1}^n \{(x_i)_{i=1, \dots, n} \mid \forall j \neq i : x_j = 0\};$$

für den Raum der  $K$ -wertigen Folgen ist jedoch

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} K = K^{\mathbb{N}} \neq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \forall j \neq i : x_j = 0\}.$$

### 1.5.10 Lemma und Definition (Nebenklassen)

Sei  $U \subset V$  UVR. Die Menge der Nebenklassen

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\},$$

wobei

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}$$

die Nebenklasse zu  $v \in V$  bezeichnet, wird mit den durch

$$(v + U) + (w + U) := (v + w) + U \text{ und } (v + U)x := vx + U$$

bzw.

$$\begin{aligned} + : V/U \times V/U &\rightarrow ((v + U), (w + U)) \mapsto (v + w) + U, \\ \cdot : K \times V/U &\rightarrow V/U, (x, (v + U)) \mapsto (vx) + U, \end{aligned}$$

definierten Operationen ein Vektorraum: der Quotientenraum  $V/U$ .

**Beweis** Zu zeigen: Wohldefiniertheit der Operationen und VR-Axiome (werden übergangen).

Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation:

Ist  $x \in K$  und sind  $(v + U), (v' + U) \in V/U$  gleich, also  $v + U = v' + U$ , so gilt

$$\begin{aligned} v + U = v' + U &\Leftrightarrow v - v' \in U \\ \Rightarrow (v - v')x \in U &\Rightarrow vx + U = v'x + U \end{aligned}$$

Das Resultat der Skalarmultiplikation bringt also nicht von dem Repräsentanten  $v$  einer Nebenklasse  $v + U$  ab, sondern nur von der Nebenklasse.

Die Wohldefiniertheit der Addition ist analog zu beweisen.

### 1.5.11 Bemerkung & Definition (Äquivalenzrelation)

Der Definition von  $V/U$  liegt ein allgemeineres Prinzip zugrunde:

$$v \sim w :\Leftrightarrow (v + U) = (w + U) \Leftrightarrow w - v \in U$$

definiert für jeden UVR  $U \subset V$  eines  $K$ -VR  $V$  eine Äquivalenzrelation auf  $V$ , d.h.:

- (i)  $\forall v \in V : v \sim v$  (Reflexivität;)
- (ii)  $\forall v, w \in V : v \sim w \Leftrightarrow w \sim v$  (Symmetrie);
- (iii)  $\forall u, v, w \in V : u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$  (Transitivität).

**Beweis** ( $v \sim w :\Leftrightarrow w - v \in U$  definiert Äquivalenzrelation)

- Reflexivität: Sei  $v \in V$  beliebig, dann gilt  $v - v = 0 \in U$ , da  $U$  UVR.
- Symmetrie: Seien  $v, w \in V$  beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} v \sim w &\Leftrightarrow w - v \in U \\ &\Leftrightarrow v - w \in U \Leftrightarrow w \sim v. \end{aligned}$$

- Transitivität: Seien  $u, v, w \in V$  beliebig; gilt nun

$$\begin{aligned} u \sim v, \text{ d.h. } v - u \in U, \text{ und: } v \sim w, \text{ d.h. } w - v \in U, \\ \text{so gilt auch: } (w - v) + (v - u) = w - u \in U \Leftrightarrow u \sim w. \end{aligned}$$

Ist dann  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $X$ , so zerfällt  $X$  in Äquivalenzklassen

$$X_a = \{y \in X \mid y \sim a\}$$

d.h.,  $X$  ist disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen:

$$X = \dot{\bigcup}_{a \in X} X_a \text{ und } X_a \cap X_b \neq \emptyset \Rightarrow X_a = X_b.$$

Insbesondere zerfällt also ein VR  $V$  in Äquivalenzklassen („Nebenklassen“)

$$v + U (= V_v) \subset V,$$

wenn  $U$  ein UVR von  $V$  ist – nach Lemma wird die Menge der Neben- bzw. Äquivalenzklassen wird dann wieder ein VR. Ähnlich wie den Quotientenvektorraum definiert man (z.B.) die Faktorgruppe [Havlicek 1.11.11].

**Bemerkung** Allgemeiner definiert man eine (binäre) Relation  $(X, Y, \Gamma)$  zwischen Mengen  $X, Y$  durch den Graph der Relation, eine Teilmenge

$$\Gamma \subset X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Zum Beispiel ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  eine Relation  $(X, Y, \Gamma_f)$ , sodass

$$\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in \Gamma_f.$$

Ein anderes Beispiel ist die Ordnungsrelation auf  $\mathbb{Z}$ , definiert durch

$$x \leq y :\Leftrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y - x \in \mathbb{N}\},$$

eine Ordnungsrelation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch (also  $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ). Die Teilmengenrelation

$$Y \subset \tilde{Y} \text{ für } Y, \tilde{Y} \in \mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subset X\}$$

liefert auch eine Ordnungsrelation auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  von  $X$ , jedoch nur eine Halbordnung – im Gegensatz zur Totalordnung auf  $\mathbb{Z}$ , wo je zwei Elemente vergleichbar sind, d.h.,

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leq y \vee y \leq x.$$

Auf  $\mathcal{P}(X)$  gilt dies im Allgemeinen nicht, denn z.B. in  $\mathcal{P}(\{0, 1\})$  sind  $\{0\}, \{1\}$  nicht vergleichbar, denn

$$\{0\} \not\subset \{1\} \wedge \{1\} \not\subset \{0\}.$$

### 1.5.12 Lemma (Dimensionen von komplementären UVR)

Ist  $U \subset V$  UVR und  $U'$  komplementärer UVR zu  $U$  in  $V$ , so gilt

$$U' \cong V/U$$

vermöge

$$U' \ni u' \mapsto u' + U \in V/U.$$

Ist  $\dim V < \infty$ , so gilt  $\dim U + \dim V/U = \dim V$ .

**Beweis** Zu zeigen:  $\phi$  ist Isomorphismus. Dass  $\phi$  Homomorphismus ist, folgt aus der Definition der VR-Operationen auf  $V/U$ .

Injektivität: Sei  $u' \in \ker \phi$ , d.h.

$$\begin{aligned} \phi(u') &= u' + U = 0 + U \in V/U \\ \Rightarrow u' &\in U' \cap U = \{0\} \Rightarrow u' = 0 \end{aligned}$$

Surjektivität: Sei  $v + U \in V/U$  mit  $v \in V = U \oplus U'$ ; mit der Projektion

$$\begin{aligned} p' : V &\rightarrow V, v = u + u' \mapsto p'(v) := u' \\ \text{ist } v + U &= u' + u + U = u' + U = \phi(p'(v)), \\ \text{also } V/U &= \phi(U'). \end{aligned}$$

Die Dimensionsformel folgt dann aus der für direkte Summen:

$$\dim U' = \dim V/U \Rightarrow \dim V/U = \dim V - \dim U$$

**Beispiel** Ist  $p \in \text{End}(V)$  eine Projektion, so auch  $p' := \text{id}_V - p$  und es gilt

$$V = \ker p \oplus \ker p' = \ker p \oplus p(V),$$

also gilt

$$p(V) \cong V/\ker p.$$

### 1.5.13 Homomorphiesatz für lineare Abbildungen:

Für  $f \in \text{Hom}(V, W)$  ist  $f(V) \cong V/\ker f$  vermöge

$$V/\ker f \ni v + \ker f \xrightarrow{\phi} f(v) \in f(V).$$

**Beweis** Wohldefiniertheit von  $\phi$ :

Sind  $v + \ker f, v' + \ker f \in V/\ker f$  und  $v + \ker f = v' + \ker f$ , so gilt

$$\begin{aligned} v' - v &\in \ker f \Rightarrow f(v') - f(v) = f(v' - v) = 0 \\ &\Rightarrow f(v') = f(v) \end{aligned}$$

d.h.  $\phi$  ist wohldefiniert.

Linearität:

- Für  $x \in K$  und  $v + \ker f \in V/\ker f$  ist  $\phi((v + \ker f)x) = f(vx) = f(v)x = \phi(v + \ker f) \cdot x$

- Für  $v + \ker f, w + \ker f \in V/\ker f$  ist

$$\begin{aligned}\phi((v + \ker f) + (w + \ker f)) &= \phi((v + w) + \ker f) = \\ f(v + w) &= f(v) + f(w) = \phi(v + \ker f) + \phi(w + \ker f)\end{aligned}$$

Injektivität: Sei  $v + \ker f \in \ker \phi$ , also

$$\phi(v + \ker f) = f(v) = 0;$$

dann folgt

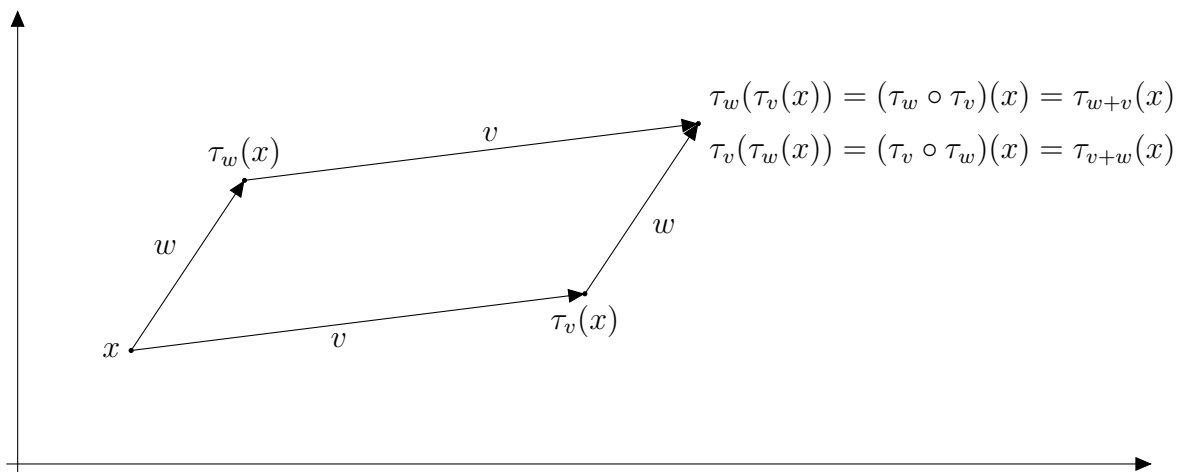
$$v \in \ker f \Rightarrow v + \ker f = \ker f = 0 \in V/\ker f.$$

Surjektivität: folgt direkt aus der Definition.



## 2 Affine Geometrie

### 2.1 Affine Räume



#### 2.1.1 Definition (Geometrie nach Klein)

Eine Geometrie besteht aus einer Menge  $A$  (z.B. Punktmenge) und einer darauf operierenden Gruppe  $(G, *)$ , d.h., es gibt eine Gruppenoperation

$$\rho : G \times A \rightarrow A, (g, a) \mapsto \rho_g(a),$$

wobei gilt

- (i)  $\forall a \in A \forall g, h \in G : (\rho_g \circ \rho_h)(a) = \rho_{g*h}(a)$
- (ii)  $\forall a \in A : \rho_e(a) = a$  für das neutrale Element  $e \in G$ .

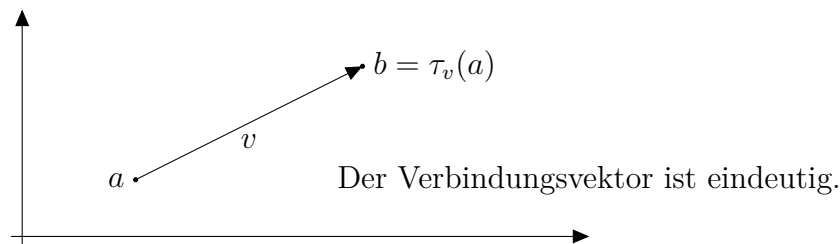
### 2.1.2 Definition (Affiner Raum)

Sei  $K$  ein Körper. Ein affiner Raum (AR)  $(A, V, \tau)$  über  $K$  besteht aus einer Menge  $A$ , einem  $K$ -Vektorraum  $V$  und einer Gruppenoperation

$$\tau : V \times A \rightarrow A, (v, a) \mapsto \tau_v(a)$$

von  $V$  (als additive Gruppe  $(V, +)$ ) auf  $A$ , die einfach transitiv ist, d.h.

$$\forall a, b \in A \exists! v \in V : b = \tau_v(a)$$



Weiters nennen wir

- Elemente von  $A$  Punkte,
- $V$  den Richtungsvektorraum oder Tangentialraum von  $A$ ,
- $v$  mit  $\tau_v(a) = b$  den Verbindungsvektor von  $a$  nach  $b$ ,
- $\tau_v : A \rightarrow A, a \mapsto \tau_v(a)$  die Translation von  $v$
- und  $\dim V$  die Dimension des affinen Raums  $A$

**Bemerkung** Die Translationen eines AR  $A$  bilden eine abelsche Gruppe.

Alternative Notation:

$$a + v := \tau_v(a) \text{ und } b - a := v, \text{ falls } b = \tau_v(a)$$

Mit dieser alternativen Schreibweise für die Operation von  $(V, +)$  auf  $A$ , erscheinen die Bedingungen, dass  $V = (V, +)$  einfach transitiv auf  $A$  operiert, „offensichtlich“.

Gruppenoperation:

- (i)  $\forall a \in A \forall v, w \in V : (a + v) + w = a + (v + w)$  ist kurz für  $\tau_w(\tau_v(a)) = \tau_{v+w}(a)$ , entspricht also nicht der Assoziativität.

(ii)  $\forall a \in A : a + 0 = a$  entspricht  $\tau_0(a) = a$

Transitivität:

$$\forall a, b \in A \exists v \in V : b = a + v$$

Nämlich: sind  $a, b \in A$  gegeben, so liefert  $v := b - a$  (weil  $V$  einfach transitiv operiert) eindeutig den gesuchten Vektor.

### 2.1.3 Beispiel & Definition (affiner Standardraum)

Jeder  $K$ -VR liefert einen affinen Raum  $(V, V, \tau)$  mit der Operation

$$\tau : V \times V \rightarrow V, (v, a) \mapsto \tau_v(a) := a + v$$

von  $V$  auf sich selbst – die Unterscheidung zwischen Punkten und Vektoren wird dann etwas undurchsichtig.

Der affine Standardraum  $(K^n, K^n, \tau)$  wird mit  $A^n$  bezeichnet.

### 2.1.4 Beispiel & Definition (Ursprung)

Sei  $(A, V, \tau)$  AR, für jede Wahl eines Ursprungs  $o \in A$  ist

$$\tau(o) : V \rightarrow A, v \mapsto \tau_v(o)$$

eine Bijektion – ein VR ist also ein „AR mit Ursprung“.

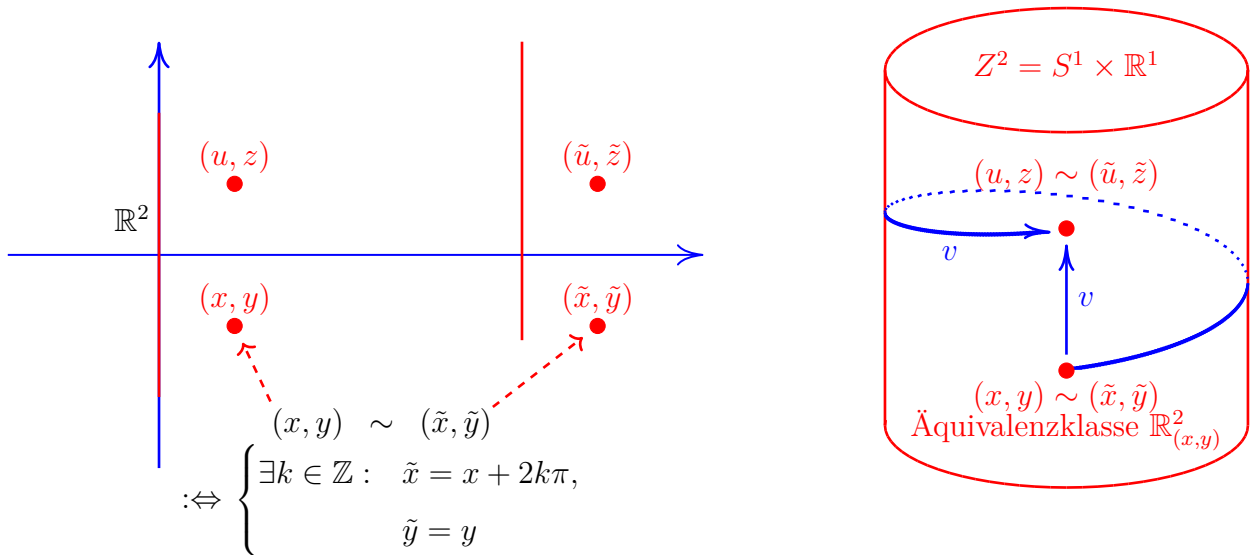
**Beispiel** Auf einem Zylinder

$$Z^2 := S^1 \times \mathbb{R} := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$$

liefert die Operation

$$\tau : \mathbb{R}^2 \times Z^2 \rightarrow Z^2, (v, a) \mapsto a + v$$

keinen affinen Raum, da diese Operation nicht einfach transitiv ist: zu je zwei Punkten gibt es unendlich viele „Verbindungsvektoren“.



### 2.1.5 Beispiel & Definition (affiner Unterraum)

Ist  $U \subset V$  UVR eines  $K$ -VR  $V$ , so liefert jedes  $v \in V$  die Nebenklasse

$$A = v + U$$

einen affinen Raum  $(A, U, \tau)$  mit

$$\tau : U \times A \rightarrow A, (u, a) \mapsto \tau_u(a) := a + u;$$

offensichtlich ist die Operation wohldefiniert (operiert auf der Nebenklasse) und einfach transitiv.

Eine Nebenklasse  $A = v + U \subset V$  nennt man daher auch einen affinen Unterraum des VR  $V$ .

$A' \subset A$  ist affiner Unterraum (AUR) des affinen Raumes  $(A, V, \tau)$ , falls

$$\exists a \in A \exists U \subset V \text{ UVR} : A' = a + U = \{\tau_u(a) \mid u \in U\}.$$

Ist  $\dim A' = 1$  oder  $\dim A' = 2$ , so heißt  $A'$  (affine) Gerade bzw. Ebene; ist  $\dim A' < \infty$  und  $\dim A' = \dim A - 1$ , so heißt  $A'$  (affine) Hyperebene.

**Bemerkung** Jeder AUR ist selbst AR mit der „geerbten“ (eingeschränkten) Operation.

**Beispiel** Ist  $f \in \text{Hom}(V, W)$  und  $w \in f(V)$ , so erhält man einen affinen Raum

$$(f^{-1}(\{w\}), \ker f, \tau) \text{ mit } \tau_u(a) := a + u.$$

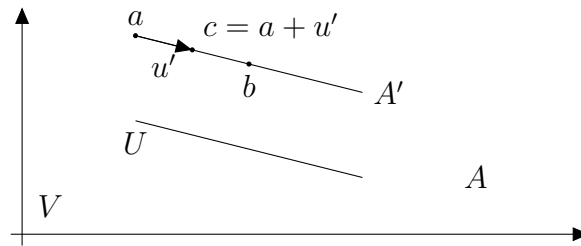
Ist  $f \in V^* \setminus \{0\}$  (und  $\dim V < \infty$ ), so wird  $f^{-1}(\{x\}) \subset V$  für jedes  $x \in K(= f(V))$  eine affine Hyperebene in  $(V, V, \tau)$  – nach Rangsatz.

**Bemerkung** Ist  $A' = a + U \subset A$  AUR des AR  $(A, V, \tau)$ , so gilt

$$\forall b \in A' \exists u \in U : b = \tau_u(a)$$

und damit

$$\begin{aligned} b + U &= \{\tau_{u'}(b) \mid u' \in U\} \\ &= \{(\tau_{u'} \circ \tau_u)(a) = \tau_{u'+u}(a) \mid u' \in U\} \\ &= \{\tau_{u''}(a) \mid u'' \in U\} = a + U = A' \end{aligned}$$



Damit zeigt man: Ist  $(A'_i)_{i \in I}$  eine Familie AUR  $A'_i \subset A$  eines AR  $A$ , so ist der Schnitt leer oder ein affiner Unterraum. Ist nämlich der Schnitt nicht leer, d.h.,

$$\exists a \in A \forall i \in I : a \in A'_i,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \forall i \in I : A'_i &= a + U_i \text{ mit einem geeigneten UVR } U_i \subset V \\ \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A'_i &= a + \bigcap_{i \in I} U_i \text{ und } U := \bigcap_{i \in I} U_i \subset V \text{ ist UVR.} \end{aligned}$$

### 2.1.6 Definition (affine Hülle)

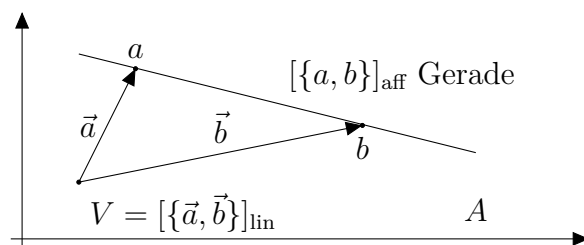
Die affine Hülle  $[S]$  einer Teilmenge eines affinen Raumes  $A$  ist der Schnitt aller  $S$  enthaltenden AUR  $A' \subset A$ ,

$$[S] = \bigcap_{S \subset A' \text{ AUR}} A'.$$

**Bemerkung** Die affine Hülle einer Teilmenge  $S \subset A$  ist also der kleinste  $S$  enthaltende affine Unterraum von  $A$ .

Achtung: In einem  $K$ -VR  $V$  (den kann man auch als AR auffassen, siehe Beispiel vorher) sind die lineare Hülle und die affine Hülle (in  $V$  aufgefasst als AR) im Allgemeinen verschieden:

$$[S]_{\text{lin}} = \bigcap_{S \subset U \text{ UVR}} U \neq \bigcap_{S \subset A \text{ AUR}} A = [S]_{\text{aff}}$$



**Beispiel** Für  $S = \{a\} \subset V$  mit  $a \neq 0$  gilt

$$[S]_{\text{lin}} = \{ax \in A = V \mid x \in K\} \neq \{a\} = [S]_{\text{aff}}$$

allgemein gilt:

$$[S]_{\text{aff}} \subset [S \cup \{0\}]_{\text{aff}} = [S]_{\text{lin}}$$

Beweis in Aufgabe 45.

### 2.1.7 Lemma & Definition (baryzentrischer Kalkül)

Seien  $(a_i)_{i \in I}$  und  $(x_i)_{i \in I}$  Familien in einem AR  $A$  über  $K$  bzw. in  $K$ , wobei

$$\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty \text{ und } \sum_{i \in I} x_i = 1;$$

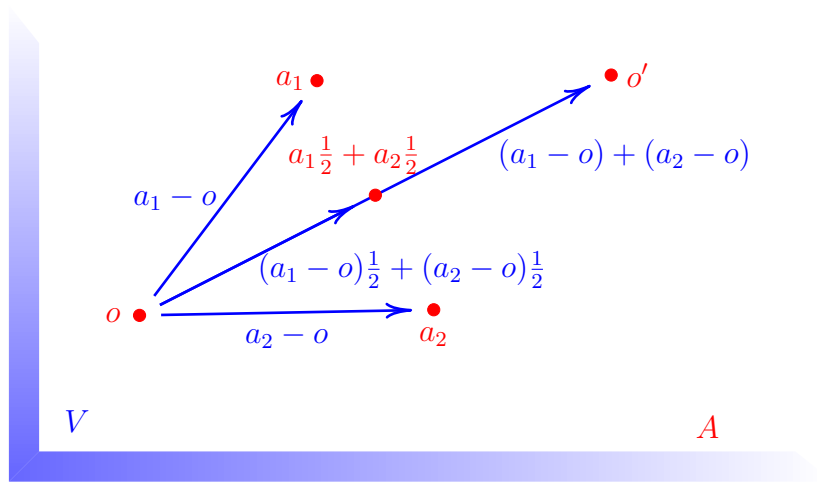
dann ist die mit einem beliebigen Ursprung  $o \in A$  definierte Affinkombination

$$\sum_{i \in I} a_i x_i := o + \sum_{i \in I} (a_i - o) x_i$$

wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Ursprungs  $o \in A$ . Dann heißt

$$s := \sum_{i \in I} a_i x_i$$

Schwerpunkt oder Baryzentrum der Punkte  $a_i$  mit Gewichten  $x_i$ .



**Beispiel** Sind etwa  $K = \mathbb{R}$  und  $I = \{1, \dots, n\}$ , so erhält man mit  $x_i = \frac{1}{n}$  für  $i \in I$  den üblichen geometrischen Schwerpunkt der (endlichen) Punktmenge,

$$s = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{n}.$$

Achtung: Die Ausdrücke

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \text{ oder } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

sind sinnlos, da nicht definiert.

**Beweis** Zu zeigen: Sind  $o, o' \in A$ , so gilt

$$o' + \sum_{i \in I} v'_i x_i = o + \sum_{i \in I} v_i x_i, \text{ wobei } \begin{cases} v_i := a_i - o \\ v'_i := a_i - o' \end{cases}$$

Zunächst bemerken wir, dass mit  $w := o' - o$  für  $i \in I$  gilt:  $v'_i + w = v_i$ , denn:

$$\begin{aligned}\tau_{v'_i+w}(o) &= \tau_{v'_i}(\tau_w(o)) = \tau_{v'_i}(o') \\ &= a_i = \tau_{v_i}(o),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}o + \sum_{i \in I} v_i x_i &= o + \sum_{i \in I} (w + v'_i) x_i = o + \sum_{i \in I} w x_i + \sum_{i \in I} v'_i x_i \\ &= o + w \cdot \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} v'_i x_i = o + w + \sum_{i \in I} v'_i x_i = o' + \sum_{i \in I} v'_i x_i\end{aligned}$$

### 2.1.8 Lemma (Affine Hülle und Affinkombination)

Ist  $S \subset A$  Teilmenge eines AR  $A$ , so ist ihre affine Hülle

$$[S] = \left\{ \sum_{a \in S} a x_a \mid \#\{a \in S \mid x_a \neq 0\} < \infty \wedge \sum_{a \in S} x_a = 1 \right\}.$$

**Beweis** Wir setzen  $S \neq \emptyset$  voraus und wählen  $o \in S$ , dann ist

$$[S] = o + [\{a - o \mid a \in S\}]$$

und die Behauptung folgt aus der entsprechenden für die lineare Hülle.

**Beispiel** Die affine Hülle zweier Punkte  $a, b \in A, a \neq b$  ist die (affine) Gerade

$$[ab] := [\{a, b\}] = \{a(1-t) + bt \mid t \in K\}.$$

Die affine Hülle von drei verschiedenen Punkten  $a, b, c \in A$  ist eine Gerade oder Ebene, je nachdem, ob  $\dim[\{a, b, c\}]$  gleich 1 oder 2 ist. Im zweiten Fall sagen wir: das Dreieck  $\{a, b, c\}$  sei nicht-degeneriert.

### 2.1.9 Definition (allgemeine Lage)

Eine Familie  $(a_i)_{i \in I}$  von Punkten  $a_i \in A$  eines AR  $A$  ist affin unabhängig, bzw. in allgemeiner Lage, falls

$$\forall i \in I : a_i \notin [\{a_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}],$$



und sonst affin abhängig; Punkte heißen kollinear bzw. koplanar, falls sie in einer Geraden oder einer Ebene liegen.

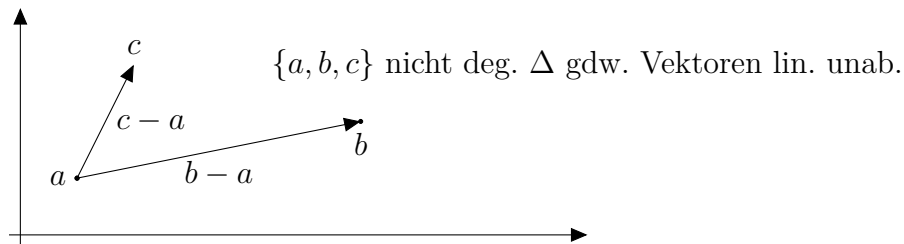
### 2.1.10 Lemma (Affine und lineare (Un-)Abhängigkeit)

Eine Familie  $(a_i)_{i \in I}$  ist genau dann affin unabhängig, wenn für jedes  $i \in I$  die Familie  $(a_j - a_i)_{j \in I \setminus \{i\}}$  linear unabhängig ist.

**Beweis** Die Familie  $(a_i)_{i \in I}$  ist genau dann affin abhängig, wenn

$$\begin{aligned} \exists i \in I : a_i \in [\{a_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}] &\Leftrightarrow \exists i \in I \exists (x_j)_{j \in I \setminus \{i\}} : a_i = \sum_{j \neq i} a_j x_j \wedge 1 = \sum_{j \neq i} x_j \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I \exists (x_j)_{j \in I \setminus \{i\}} : 0 = \sum_{j \neq i} (a_j - a_i) x_j \wedge 1 = \sum_{j \neq i} x_j, \end{aligned}$$

d.h., wenn die Familie  $(a_j - a_i)_{j \in I \setminus \{i\}}$  eine nicht-triviale Linearkombination von 0 erlaubt, also linear abhängig ist.



### 2.1.11 Lemma (Eindeutigkeit der Punktdarstellung)

Eine Familie  $(a_i)_{i \in I}$  ist genau dann affin unabhängig, wenn jeder Punkt ihrer affinen Hülle eine eindeutige Affinkombination hat:

$$\forall a \in [\{a_i \mid i \in I\}] \exists! (x_i)_{i \in I} : \begin{cases} 1 = \sum_{i \in I} x_i \\ a = \sum_{i \in I} a_i x_i \end{cases}$$

**Beweis** Hat jeder Punkt  $a \in [\{a_i \mid i \in I\}]$  eine eindeutige Affinkombination, so gilt insbesondere

$$\forall i \in I : a_i = a_i \cdot 1 \notin [\{a_j \mid j \neq i\}].$$

Hat andererseits der Punkt  $a$  zwei Affindarstellungen,

$$a = \sum_{i \in I} a_i x_i = \sum_{i \in I} a_i y_i,$$

so folgt mit einem Ursprung  $o \in A$  und  $v_i = a_i - o$

$$a = o + \sum_{i \in I} v_i x_i = o + \sum_{i \in I} v_i y_i \Rightarrow 0 = \sum_{i \in I} v_i (y_i - x_i).$$

Ist  $(a_i)_{i \in I}$  affin unabhängig, so ist  $(v_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$  linear unabhängig für ein beliebiges  $i \in I$  und  $o := a_i$ . Es folgt:

$$\forall j \in I \setminus \{i\} : x_j = y_j \Rightarrow x_i = 1 - \sum_{j \neq i} x_j = 1 - \sum_{j \neq i} y_j = y_i$$

$$\text{also } (x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I}$$

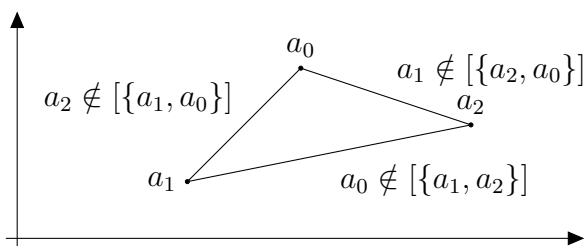
### 2.1.12 Definition (Affines/baryzentrisches Bezugssystem)

Ein affines Bezugssystem  $(o; B)$  eines affinen Raumes  $(A, V, \tau)$  besteht aus einem Ursprung  $o \in A$  und einer Basis  $B$  von  $V$ ; ein baryzentrisches Bezugssystem  $(a_i)_{i \in I}$  ist eine affin unabhängige Familie von Punkten, sodass

$$[\{a_i \mid i \in I\}] = A.$$

**Bemerkung** Ist  $n = \dim A$ , so enthält

- ein affines Bezugssystem  $(o; b_1, \dots, b_n)$  einen Punkt und  $n$  Vektoren;
- ein baryzentrisches Bezugssystem  $(a_0, \dots, a_n)$   $n + 1$  Punkte (und keinen Vektor).



**Beispiel** Drei Punkte  $a_0, a_1, a_2 \in A$  sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sie die Ecken eines nicht degenerierten Dreiecks sind. Sie bilden dann ein baryzentrisches Bezugssystem der Ebene des Dreiecks. Andernfalls sind sie kollinear.

### 2.1.13 Definition (Teilverhältnis)

Sind  $a, b, c \in A$  kollinear,  $c \neq b$ , so ist ihr Teilverhältnis

$$(ac : bc) = t \Leftrightarrow a = bt + c(1 - t).$$

**Bemerkung** Sind  $a, b \in A, a \neq b$  gegeben, so bestimmt das Teilverhältnis  $t$  die Lage eines Punktes  $c$  auf der Verbindungsgeraden  $[\{a, b\}]$  eindeutig:

$$\begin{aligned}(ac : bc) = t &\Leftrightarrow a = bt + c(1 - t) = c + (b - c)t + (c - c)(1 - t) \text{ (nach Affinkomb. mit } o = c) \\ &\Leftrightarrow a = \tau_{(b-c)t}(c) \Leftrightarrow a - c = (b - c)t \\ &\Leftrightarrow a - b \stackrel{*}{=} (a - c) + (c - b) = (b - c)t + (c - b) \stackrel{*}{=} (c - b)(1 - t) \\ &\Leftrightarrow (a - b) \frac{1}{1 - t} = c - b \Leftrightarrow \tau_{(a-b) \frac{1}{1-t}}(b) = c \\ &\Leftrightarrow c = b + (a - b) \frac{1}{1 - t} + (b - b) \left(1 - \frac{1}{1 - t}\right) = a \frac{1}{1 - t} + b \left(1 - \frac{1}{1 - t}\right) = a \frac{1}{1 - t} + b \frac{-t}{1 - t}\end{aligned}$$

Dabei erhält man  $c = a$  mit  $t = 0$ , wegen  $a \neq b$  muss  $t = 1$  ausgeschlossen werden und  $c = b$  wird durch kein Teilverhältnis realisiert. (\* vgl. Beweis baryzentrischer Kalkül)

Ist  $K = \mathbb{R}$ , so ist  $t < 0$  genau dann, wenn der Punkt  $c$  „zwischen“  $a$  und  $b$  liegt, d.h. wenn

$$c \in \{a(1 - s) + bs \mid s \in (0, 1)\}.$$

Man sagt daher auch: „ $c$  teilt die Strecke  $\overline{ab}$  im Verhältnis  $(ac : bc)$ .“

Bei nicht geordneten Körpern ist diese Aussage sinnlos!

**Bemerkung** Das Teilungsverhältnis  $t = (ac : bc) = -\frac{s}{1-s}$  für  $c = a(1 - s) + bs$ .

## 2.2 Affine Abbildungen & Transformationen

### 2.2.1 Definition

Eine Abbildung  $\alpha : A \rightarrow A'$  zwischen affinen Räumen  $A$  und  $A'$  (über dem gleichen Körper  $K$ ) heißt affin, falls sie

- (i) *geradentreu* ist, d.h. die Bilder kollinearier Punkte sind kollinear;

- (ii) *teilverhältnistreu* ist, d.h. das Teilverhältnis kollinearer Punkte wird erhalten (solange die Punkte nicht alle zusammenfallen).

Eine bijektive affine Abbildung  $\alpha : A \rightarrow A$  heißt Affinität oder affine Transformation.

**Bemerkung** Sei  $\alpha : A \rightarrow A'$  und  $a, b \in A$  sodass  $\alpha(a) \neq \alpha(b)$ ; insbesondere ist dann auch  $a \neq b$ . Ist  $\alpha$  geradentreu, so gilt für jeden Punkt

$$c_s = a(1 - s) + bs; \quad s = (ca : ba),$$

dass  $c_s \in [\{a, b\}]$ , d.h.

$$\forall s \in K \exists t \in K : \alpha(c_s) = \alpha(a(1 - s) + bs) = \alpha(a)(1 - t) + \alpha(b)t \in [\{\alpha(a), \alpha(b)\}]$$

Ist  $\alpha$  dann auch teilverhältnistreu, so folgt

$$\frac{-t}{1 - t} = (\alpha(a)\alpha(c_s) : \alpha(b)\alpha(c_s)) = (ac_s : bc_s) = \frac{-s}{1 - s} \Rightarrow t = s.$$

Insbesondere bildet  $\alpha$  die Gerade  $[ab]$  dann bijektiv auf die Gerade  $[\alpha(a), \alpha(b)]$  durch die Bildpunkte von  $a$  und  $b$  ab, und

$$\forall s \in K : \alpha(a(1 - s) + bs) = \alpha(a)(1 - s) + \alpha(b)s.$$

Enthält die Gerade durch  $a$  und  $b$ ,  $a \neq b$  keine Punkte, deren Bilder verschieden sind, so wird die Gerade auf einen einzigen Punkt abgebildet – und die vorherige Gleichung gilt ebenfalls.

**Beispiel** Die Translationen eines affinen Raumes sind Affinitäten, denn für

$$c_s = a(1 - s) + bs = a + ws, \quad \text{mit } w := b - a$$

gilt, mit Translationsvektor  $v \in V$ ,

$$\tau_v(c_s) = \tau_v(a + ws) = \tau_v(\tau_{ws}(a)) = \tau_{v+ws}(a) = \tau_{ws+v}(a) = \tau_{ws}(\tau_v(a)) = \tau_v(a) + ws,$$

insbesondere gilt also

$$\tau_v(b) = \tau_v(a) + w$$

und damit

$$\tau_v(c_s) = \tau_v(a) + ws = \tau_v(a) + (\tau_v(b) - \tau_v(a))s = \tau_v(a)(1 - s) + \tau_v(b)s.$$

Also sind  $\tau_v(a), \tau_v(b)$  und  $\tau_v(c_s)$  kollinear und erhalten das Teilverhältnis

$$(\tau_v(a)\tau_v(c_s) : \tau_v(b)\tau_v(c_s)) = (ac_s : bc_s).$$

### 2.2.2 Lemma

$\alpha : A \rightarrow A'$  ist genau dann affin, wenn für jede Affinkombination in  $A$  gilt:

$$\alpha\left(\sum_{i \in I} a_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \alpha(a_i) x_i.$$

**Beweis** Wir haben schon gesehen:  $\alpha : A \rightarrow A'$  ist affin genau dann, wenn

$$\forall a, b, \in A \forall s \in K : \alpha(a(1-s) + bs) = \alpha(a)(1-s) + \alpha(b)s$$

Offenbar ist die vorherige Bemerkung ein Spezialfall des Lemmas. Es bleibt die andere Richtung zu zeigen. Wir benutzen vollständige Induktion über  $k = \#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty$ .

**Induktionsanfang** Für  $k = 1$  trivial.

**Induktionsannahme** Für  $a_1, \dots, a_k \in A$  und  $x_1, \dots, x_k \in K^\times$  mit  $\sum_{i=1}^k x_i = 1$  gelte

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^k a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha(a_i) x_i.$$

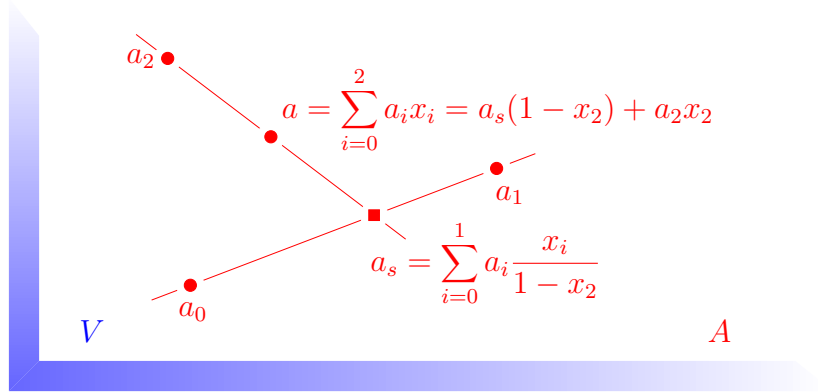
**Induktionsschluss** Seien  $a_1, \dots, a_{k+1} \in A$  und  $x_1, \dots, x_{k+1} \in K^\times$  Gewichte, sodass  $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1$ , o.B.d.A.  $x_{k+1} \neq 1$ ; dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i\right) &= \alpha\left(\left(\sum_{i=1}^k a_i \frac{x_i}{1-x_{k+1}}\right)(1-x_{k+1}) + a_{k+1}x_{k+1}\right) \\ &= \alpha\left(\sum_{i=1}^k a_i \frac{x_i}{1-x_{k+1}}\right)(1-x_{k+1}) + \alpha(a_{k+1})x_{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha(a_i) \frac{x_i}{1-x_{k+1}} (1-x_{k+1}) + \alpha(a_{k+1})x_{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha(a_i) x_i. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für affine Abbildungen  $\alpha$  bewiesen.

**Bemerkung** Im Beweis wurde benutzt: für Affinkombinationen ist (falls  $x_j \neq 1$ )

$$\sum_{i \in I} a_i x_i = \left( \sum_{i \neq j} a_i \frac{x_i}{1 - x_j} \right) (1 - x_j) + a_j x_j$$



**Bemerkung** Mit der Verträglichkeit affiner Abbildungen mit Affinkombinationen folgt, dass die Inverse  $\alpha^{-1} : A' \rightarrow A$  einer bijektiven affinen Abbildung  $\alpha : A \rightarrow A'$  ebenfalls affin ist:

$$\begin{aligned} \alpha \left( \sum_{i \in I} \alpha^{-1}(a'_i) x_i \right) &= \sum_{i \in I} (\alpha \circ \alpha')(a'_i) x_i = \sum_{i \in I} a'_i x_i = \alpha \left( \alpha^{-1} \left( \sum_{i \in I} a'_i x_i \right) \right) \\ &\Rightarrow \sum_{i \in I} \alpha^{-1}(a'_i) x_i = \alpha^{-1} \left( \sum_{i \in I} a'_i x_i \right), \end{aligned}$$

da die Affinkombination  $\sum_{i \in I} a'_i x_i \in A'$  beliebig war, folgt damit die Behauptung. Insbesondere sind damit auch die Inversen von Affinitäten Affinitäten.

**Bemerkung** Sind  $\alpha : A \rightarrow A'$  und  $\beta : A' \rightarrow A''$  geraden- und teilverhältnistreu, so ist auch

$$\beta \circ \alpha : A \rightarrow A''$$

geraden- und teilverhältnistreu, d.h. die Komposition affiner Abbildungen ist affin. Insbesondere ist damit die Menge  $G$  aller affinen Transformationen eines affinen Raumes  $A$  abgeschlossen unter der Komposition

$$\circ : G \times G \rightarrow G;$$

außerdem ist  $G$  abgeschlossen unter Inversenbildung. Damit folgt:  $G$  ist Untergruppe der Permutationsgruppe (der symmetrischen Gruppe) des affinen Raumes  $A$ : Diese Gruppe bezeichnet man als *affine Gruppe*.

### 2.2.3 Definition

Die auf einem affinen Raum  $A$  operierende Gruppe  $G$  der Affinitäten von  $A$  bestimmt eine *affine Geometrie*.

**Bemerkung** Die Verträglichkeit einer affinen Abbildung  $\alpha : A \rightarrow A'$  mit Affinkombinationen lässt sich auch mithilfe von Vektoren formulieren (unabhängig von der Wahl des Ursprungs  $o \in A$ ):

$$\begin{aligned} v_i = a_i - o &\Rightarrow \alpha \left( \sum_{i \in I} a_i x_i \right) = \alpha \left( o + \sum_{i \in I} v_i x_i \right) \\ &= \sum_{i \in I} \alpha(a_i) x_i = \sum_{i \in I} \alpha(o + v_i) x_i \\ &\Rightarrow \alpha \left( o + \sum_{i \in I} v_i x_i \right) - \alpha(o) = \sum_{i \in I} \alpha(o + v_i) x_i - \alpha(o) \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} (\alpha(o + v_i) - \alpha(o)) x_i, \end{aligned}$$

setzt man also

$$\lambda : V \rightarrow V', v \mapsto \lambda(v) := \alpha(o + v) - \alpha(o),$$

wobei  $V$  und  $V'$  die zu  $A$  bzw.  $A'$  gehörenden Richtungsvektorräume sind, so erhält man einen Homomorphismus  $\lambda \in \text{Hom}(V, V')$ , da sie mit Linearkombinationen verträglich ist:

$$\lambda \left( \sum_{i \in I} v_i x_i \right) = \alpha \left( o + \sum_{i \in I} v_i x_i \right) - \alpha(o) = \sum_{i \in I} (\alpha(o + v_i) - \alpha(o)) x_i = \sum_{i \in I} \lambda(v_i) x_i$$

### 2.2.4 Lemma & Definition

Seien  $A$  und  $A'$  AR mit RVR  $V$  bzw.  $V'$ ; dann ist eine Abbildung  $\alpha : A \rightarrow A'$  genau dann affin, wenn es  $\lambda \in \text{Hom}(V, V')$  gibt, sodass

$$\forall a \in A \forall v \in V : \alpha(a + v) = \alpha(a) + \lambda(v).$$

Wir nennen  $\lambda$  den *linearen Anteil* einer affinen Abbildung  $\alpha$ .

**Beweis** Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

$\Rightarrow$ : Sei  $\alpha : A \rightarrow A'$  affin. Zu zeigen ist nun die Existenz eines geeigneten  $\lambda \in \text{Hom}(V, V')$ . Nämlich: Wähle  $o \in A$  und definiere

$$\lambda : V \rightarrow V', v \mapsto \lambda(v) := \alpha(o + v) - \alpha(o).$$

Wegen der Verträglichkeit von  $\alpha$  mit Affinkombinationen ist  $\lambda$  linear. Für  $a \in A, v \in V$  gilt dann mit  $w := a - o$ :

$$\begin{aligned}\alpha(a + v) &= \alpha(o + w + v) = \alpha(o) + \lambda(w + v) = \\ \alpha(o) + \lambda(w) + \lambda(v) &= \alpha(o + w) + \lambda(v) = \alpha(a) + \lambda(v)\end{aligned}$$

Insbesondere ist der lineare Anteil  $\lambda \in \text{Hom}(V, V')$  von  $\alpha$  wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\Leftarrow$ : Für  $\alpha : A \rightarrow A'$  gilt mit einem  $\lambda \in \text{Hom}(V, V')$

$$\forall a \in A \forall v \in V : \alpha(a + v) = \alpha(a) + \lambda(v)$$

Wegen der Verträglichkeit von  $\lambda$  mit Linearkombinationen ist  $\alpha$  verträglich mit Affinkombinationen (siehe oben) und damit affin.

**Bemerkung** Jede affine Transformation setzt sich also zusammen aus einer Translation und einem Automorphismus  $\lambda \in \text{Aut}(V)$ . Insbesondere: Ist  $\tau_w : A \rightarrow A'$  Translation eines affinen Raumes  $A$  über  $V$ , so ist für  $a \in A$  und  $v \in V$

$$\tau_w(a + v) = (a + v) + w = a + (v + w) = a + (w + v) = (a + w) + v = \tau_w(a) + v = \tau_w(a) + \text{id}_V(v),$$

d.h. der lineare Anteil einer Translation ist trivial – also die Identität auf  $V$ .

## 2.2.5 Definition

Die Automorphismen eines VR  $V$  bilden seine *allgemeine lineare Gruppe*

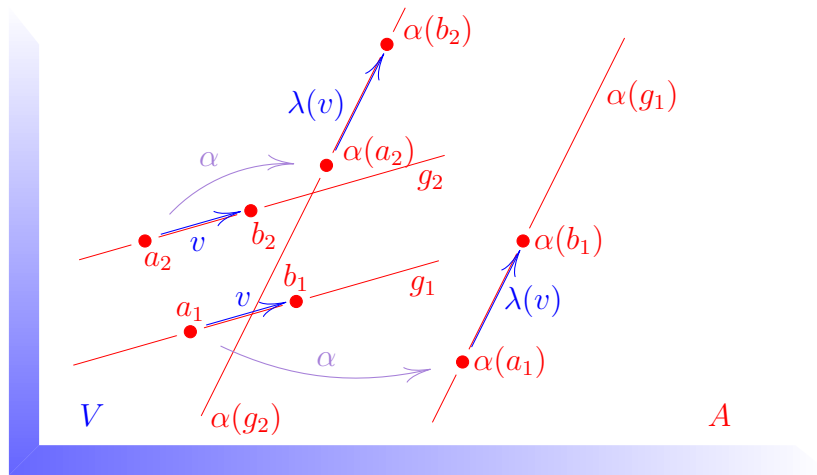
$$Gl(V) := \{\lambda \in \text{End}(V) \mid \lambda \text{ invertierbar}\}.$$

## 2.2.6 Bemerkung & Definition

Sind  $g_i = [a_i b_i] = a_i + [v]$  mit  $b_i = a_i + v$  für  $i = 1, 2$  zwei Geraden mit dem gleichen RVR  $[v]$ , d.h. *parallel*, so sind auch ihre Bilder unter einer affinen Transformation  $\alpha$  parallele Geraden,

$$\alpha(g_i) = \alpha(a_i) + [\lambda(v)] \text{ mit } \lambda \in Gl(V).$$





### 2.2.7 Beispiel & Definition

Sei  $(A, V, \tau)$  ein AR über  $K$  und  $\lambda \in \text{End}(V)$  eine *Homothetie*,  $\lambda = \text{id}_V \cdot c$  für ein  $c \in K$ .

Ist die zugehörige affine Abbildung  $\alpha : A \rightarrow A, o + v \mapsto \alpha(o + v) := o + v \cdot c$

eine affine Transformation, d.h.,  $\lambda \in \text{Gl}(V) \Leftrightarrow c \in K^\times$ ,

so nennt man  $\alpha$  eine *Streckung* mit *Zentrum*  $o \in A$ . Ist  $c \neq 1$ , d.h.  $\alpha \neq \text{id}_A$ , so gilt

$$\alpha(a) = a \Leftrightarrow a = o.$$

also hat die Abbildung  $\alpha$  genau einen *Fixpunkt*  $a = o$ .

### 2.2.8 Beispiel & Definition

Sind  $p \in \text{End}(V)$  eine Projektion ( $p^2 = p$ ) und  $o \in A$ , so liefert

$$\pi : A \rightarrow A, o + v \mapsto \pi(o + v) := o + p(v)$$

eine *Parallelprojektion* von  $A$  auf dem affinen Unterraum  $o + p(V)$ . Ist  $p \neq \text{id}_V$ , so ist  $p \notin \text{Gl}(V)$  und also  $\pi$  keine affine Transformation (sondern eine nicht bijektive affine Abbildung), so hat  $\pi$  nicht-triviale *Fasern*

$$\pi^{-1}(\{a'\}) \subset A \text{ für } a' \in \pi(A),$$

wobei  $\dim \pi^{-1}(\{a'\}) = \text{def } p \geq 1$ .

## 2.2.9 Beispiel & Definition

Seien  $\omega \in V^*$  und  $w \in \ker \omega$ , sei  $o \in A$ ; die *Scherung*

$$\sigma : A \rightarrow A, o + v \mapsto \sigma(o + v) := o + v + w\omega(v)$$

ist dann eine affine Transformation, denn

$$\lambda = \text{id}_V + w \cdot \omega \in \text{Gl}(V)$$

mit

$$\lambda^{-1} = \text{id}_V - w \cdot \omega.$$

Ist  $w \cdot \omega \in \text{End}(V) \setminus \{o\}$ , so hat  $\sigma$  Fixpunktmenge  $\text{Fix}_\sigma = o + \ker \omega$  und jeder Punkt und sein Bild liegen auf einer zu  $o + [w]$  parallelen Geraden:

$$\forall a \in A \setminus \text{Fix}_\sigma : [a, \sigma(a)] \parallel o + [w]$$

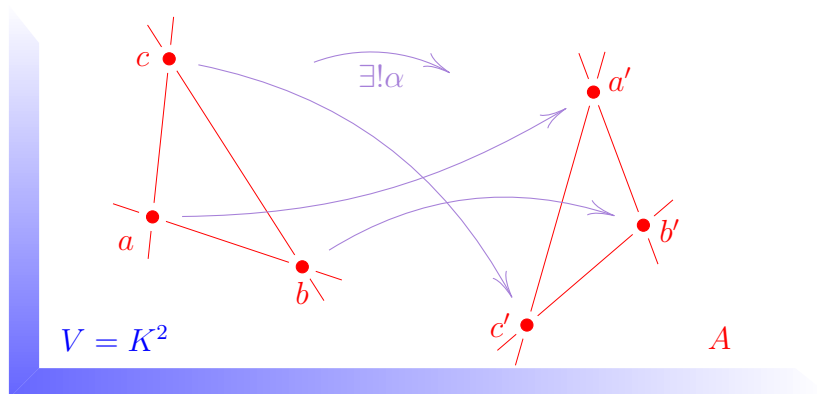
## 2.2.10 Korollar (Fortsetzungssatz für affine Abbildungen)

Eine affine Abbildung  $\alpha : A \rightarrow A'$  ist durch die (beliebige) Angabe der Bilder  $a'_i = \alpha(a_i)$  der Punkte eines baryzentrischen Bezugssystems  $(a_i)_{i \in I}$  von  $A$  eindeutig bestimmt.

Beweis ist analog dem des Fortsetzungssatzes für lineare Abbildungen: Mit der Verträglichkeit der gesuchten affinen Abbildung mit Affinkombinationen muss gelten:

$$\alpha \left( \sum_{i \in I} a_i x_i \right) = \sum_{i \in I} \alpha(a_i) x_i \text{ für } a = \sum_{i \in I} a_i x_i \text{ mit } \sum_{i \in I} x_i = 1$$

Eindeutigkeit folgt, da jeder Punkt  $a \in A$  eine Affindarstellung  $a = \sum_{i \in I} a_i x_i$  besitzt. Existenz von  $\alpha$  folgt aus der Eindeutigkeit der Affindarstellung jedes Punktes  $a \in A$  im baryzentrischen Bezugssystem  $(a_i)_{i \in I}$ .



**Beispiel** Gegeben sind die Ecken eines nicht-degenerierten Dreiecks  $a, b, c \in A^2 := (A, K^2, \tau)$  und drei Punkte  $a', b', c' \in A^2$ ; es existiert genau eine affine Abbildung  $\alpha : A^2 \rightarrow A^2$  mit  $(a, b, c) \mapsto (a', b', c')$ . Dieses  $\alpha$  ist genau dann eine affine Transformation von  $A^2$ , wenn das Bilddreieck  $\{a', b', c'\}$  nicht-degeneriert ist, d.h.  $(a', b', c')$  ein baryzentrisches Bezugssystem ist (dann bekommt man die Inverse mittels Fortsetzungssatz durch  $(a', b', c') \xrightarrow{\alpha^{-1}} (a, b, c)$ ).

## 2.3 Dreiecke in der Affinen Geometrie

### 2.3.1 Beispiel & Definition

Der (geometrische) Schwerpunkt zweier Punkte  $a, b \in A$  eines affinen Raumes über dem Körper  $K$  ist ihr Mittelpunkt

$$s_{a,b} = a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{1}{2}.$$

Dies ist sinnlos, falls  $\text{Char } K = 2$  ist, was wir also ausschließen müssen. Ist etwa  $A$  AR über  $K = \mathbb{Z}_2$ , so enthält jede Gerade genau zwei Punkte,

$$\forall a, b \in A : [ab] = \begin{cases} \{a, b\}, & \text{falls } a \neq b \\ \{a\}, & \text{falls } a = b \end{cases}$$

Für den Rest des Kapitels wird  $\text{Char } K \neq 0$  ausgeschlossen.

**Bemerkung** Ist  $K$  ein geordneter Körper, e.g.  $K = \mathbb{R}$ , so kann man die *Strecke*

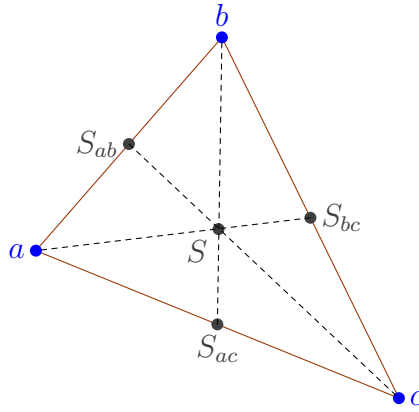
$$\overline{ab} := \{a(1-s) + bs \mid 0 \leq s \leq 1\}$$

zwischen zwei Punkten  $a, b \in A$  definieren. Jeder Punkt  $c \in \overline{ab}$  auf der Strecke liegt *zwischen* ihren *Endpunkten*  $a$  und  $b$ ;  $s_{ab}$  ist dann auch Mittelpunkt der Strecke  $\overline{ab}$ .

Offenbar ist das sinnlos, wenn der Körper  $K$  nicht angeordnet ist.

### 2.3.2 Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt eines nicht-degenerierten Dreieck  $\{a, b, c\} \subset A$  ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, die er im Verhältnis  $-\frac{1}{2}$  teilt.



**Beweis** Der (geometrische) Schwerpunkt des Dreiecks  $\{a, b, c\} \subset A$  ist

$$s = a \cdot \frac{1}{3} + b \cdot \frac{1}{3} + c \cdot \frac{1}{3} = \left(a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{2}{3} + c \cdot \frac{1}{3} = s_{ab} \cdot \frac{2}{3} + c \cdot \frac{1}{3} \in [s_{ab}c];$$

weitere gilt

$$(s_{ab}s : cs) = -\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2},$$

$s$  teilt die Strecke  $\overline{s_{ab}c}$  im Verhältnis  $-\frac{1}{2}$ . Aus Symmetriegründen gelten diese Resultate genauso für die anderen Seitenhalbierenden.

**Bemerkung** Andere bekannte Schnittsätze im Dreieck machen in der affinen Geometrie keinen Sinn. Sätze wie der Höhensatz oder über den Umkreismittelpunkt können gar nicht erst formuliert werden: in der affinen Geometrie kennt man weder Längen- noch Winkelmessung.

Dem gegenüber sind die Sätze von Menelaos und Ceva „affine Sätze“, d.h. sie können rein affin formuliert werden und beschreiben unter affinen Transformationen *invariante* Sachverhalte.

### 2.3.3 Bemerkung & Definition

Sind  $\alpha : A \rightarrow A'$  und  $\beta : A' \rightarrow A''$  affine Abbildungen und bezeichnen  $\lambda : V \rightarrow V'$  bzw.  $\mu : V' \rightarrow V''$  ihre linearen Anteile,

$$\forall a \in A \forall v \in V : \alpha(a + v) = \alpha(a) + \lambda(v) \text{ und } \forall a' \in A' \forall v' \in V' : \beta(a' + v') = \beta(a') + \mu(v'),$$

so gilt für ihre Komposition

$$(\beta \circ \alpha)(a + v) = \beta(\alpha(a) + \lambda(v)) = \beta(\alpha(a)) + \mu(\lambda(v)) = (\beta \circ \alpha)(a) + (\mu \circ \lambda)(v),$$

d.h. der lineare Anteil einer Komposition von affinen Abbildungen ist die Komposition der linearen Anteile.

Da eine affine Transformation, deren linearer Anteil Vielfaches der Identität ist, eine Translation oder eine Streckung ist, bilden die Translationen und Streckungen eines affinen Raumes eine Gruppe, die *Dilatationsgruppe*.

### 2.3.4 Satz von Menelaos

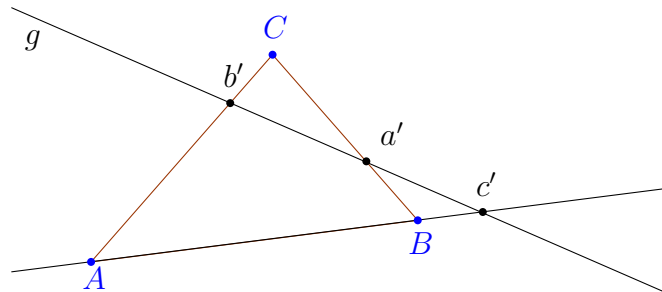
Seien  $\{a, b, c\} \subset A$  ein nicht-degeneriertes Dreieck und  $g \subset A$  eine Gerade, die die drei Seiten des Dreiecks außerhalb der Ecken des Dreiecks schneidet;

$$a' \in g \cap [bc], b' \in g \cap [ca] \text{ und } c' \in g \cap [ab]$$

bezeichne die Schnittpunkte. Dann gilt:

$$(ac' : bc')(ba' : ca')(cb' : ab') = 1$$

Umgekehrt garantiert die TV-Bedingung, dass drei Punkte  $a' \in [bc], b' \in [ca]$  und  $c' \in [ab]$  auf den Seiten des Dreiecks kollinear sind.



**Beweis** Betrachte Streckung  $\gamma$  mit Zentrum  $c'$  und Faktor  $s_{ab} \in K^\times$ ,

$$\gamma : A \rightarrow A, c' + v \mapsto \gamma(c' + v) := c' + vs_{ab};$$

insbesondere ist für  $s_{ab} = \frac{1}{(ac' : bc')}$

$$\gamma(a) = c' + (a - c') \frac{1}{(ac' : bc')} = c' + (b - c') = b.$$

Definiert man Streckungen  $\alpha$  und  $\beta$  entsprechend, mit Zentren  $a'$  bzw.  $b'$  und Faktoren  $s_{bc} = \frac{1}{(ba':ca')}$  bzw.  $s_{ca} = \frac{1}{cb':ab'}$ , so liefert die Komposition eine affine Transformation

$$\delta := \beta \circ \alpha \circ \gamma : A \rightarrow A, a + v \mapsto \delta(a + v) := a + v s_{ab} s_{bc} s_{ca},$$

da

$$a \xrightarrow{\gamma} b \xrightarrow{\alpha} c \xrightarrow{\beta} a.$$

Damit gilt

$$(ac' : bc')(ba' : ca')(cb' : ab') = 1 \Leftrightarrow \delta = \text{id}_A$$

Wegen  $a \notin [c'a']$  ist andererseits

$$\delta = \text{id}_A \Leftrightarrow [c'a'] = \delta([c'a']) = \beta([c'a']),$$

da  $\gamma([c'a']) = [c'a']$  und  $\alpha([c'a']) = [c'a']$ , was die letzte Gleichung liefert, damit ist

$$\delta = \text{id}_A \Leftrightarrow [c'a'] = \beta([c'a']) \Leftrightarrow b' \in [c'a'],$$

da  $\beta$  Streckung mit Zentrum  $b'$  ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

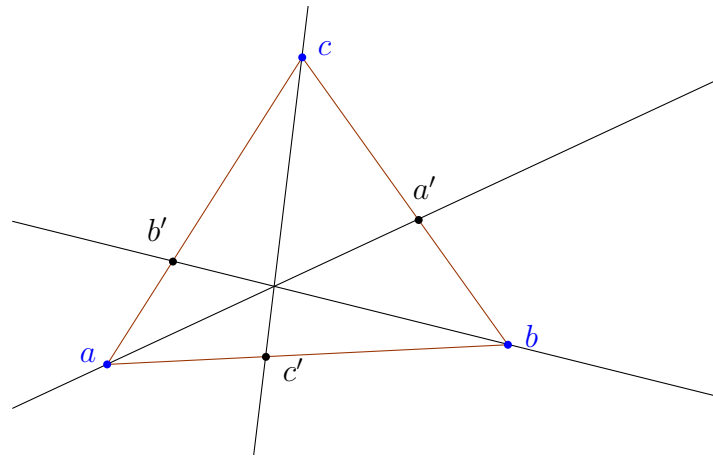
### 2.3.5 Satz von Ceva

Seien  $\{a, b, c\} \subset A$  ein nicht-degeneriertes Dreieck und

$$a' \in [bc] \setminus \{b, c\}, b' \in [ac] \setminus \{a, c\}, c' \in [ab] \setminus \{a, b\}.$$

Schneiden sich die drei Transversalen  $[aa']$ ,  $[bb']$  und  $[cc']$  in einem Punkt, so gilt

$$(ac' : bc')(ba' : ca')(cb' : ab') = -1.$$



Beweis in Aufgabe 59.

**Bemerkung** Für die Seitenmitten gilt der Satz (Schwerpunktsatz).

# 3 Buchhaltung

Dieses Kapitel zeigt eine Art „Tabellenkalkül“ – eine effiziente Rechenmethode in der linearen Algebra.

Vorteil: Selbst durch einen Trottler (e.g. einen Computer) ausführbar.

Nachteil: Selbst durch einen Trottler ausführbar.

**Generalvoraussetzung** Alle VR haben in diesem Kapitel endliche Dimension.

## 3.1 Matrizen

**Idee** Ein Homomorphismus  $f \in \text{Hom}(V, W)$  wird (nach Fortsetzungssatz) durch die Bilder  $f(b_j)$  der Vektoren einer Basis  $(b_j)_{j \in J}$  eindeutig festgelegt; ist  $(c_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $W$ , so hat jedes dieser  $f(b_j)$  eine eindeutige Basisdarstellung.

$$\forall j \in J \exists! (x_i)_{i \in I} : f(b_j) = \sum_{i \in I} c_i x_{ij}$$

Sind  $n = \dim V$  und  $m = \dim W$  endlich, so kann man also  $f$  mithilfe der Basen  $(b_j)_{j \in J}$  von  $V$  und  $(c_i)_{i \in I}$  von  $W$  komplett durch die Tabelle der Koeffizienten beschreiben:

$f$	$f(b_1)$	$f(b_2)$	$\dots$	$f(b_j)$	$\dots$	$f(b_n)$
$c_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\dots$	$x_{1j}$	$\dots$	$x_{1n}$
$c_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$\dots$	$x_{2j}$	$\dots$	$x_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$c_i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$\dots$	$x_{ij}$	$\dots$	$x_{in}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$c_m$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	$\dots$	$x_{mj}$	$\dots$	$x_{mn}$



Dabei spielt es prinzipiell keine Rolle, ob die Bilder  $f(b_j)$  der Basisvektoren in den Spalten stehen (wie oben) oder in den Zeilen der Tabelle – es ist aber wichtig, dass dies konsistent gemacht wird.

In dieser LVA: Bilder  $f(b_j)$  der Basisvektoren werden durch Spalten beschrieben.

### 3.1.1 Definition

Eine *Matrix*  $X \in K^{m \times n}$  ist eine Tabelle von Elementen  $x_{ij} \in K$  mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Die (*Darstellungs-*)*Matrix* eines Homomorphismus  $f \in \text{Hom}(V, W)$  bzgl. Basen  $B = (b_1, \dots, b_n)$  und  $C = (c_1, \dots, c_m)$  von  $V$  bzw.  $W$ , ist die Matrix

$$X = \xi_B^C(f) \in K^{m \times n} \text{ mit } \forall j = 1, \dots, n : f(b_j) = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}.$$

**Bemerkung** Mit  $I := \{1, \dots, m\}$  und  $J := \{1, \dots, n\}$  kann eine Matrix auch als Abbildung aufgefasst werden

$$X = (x_{ij})_{i \in I, j \in J} \text{ bzw. } X : I \times J \rightarrow K, (i, j) \mapsto x_{ij}.$$

Ist  $f \in \text{Hom}(V, W)$  und sind  $B = (b_1, \dots, b_n)$  und  $C = (c_1, \dots, c_m)$  Basen von  $V$  bzw.  $W$ , so sind

$$x_{ij} = c_i^*(f(b_j))$$

die Komponenten der Darstellungsmatrix  $\xi_B^C(f)$  von  $f$  bzgl. der Basen  $B$  und  $C$  mit der zu  $C$  dualen Basis  $C^* = (c_1^*, \dots, c_m^*)$  von  $W^*$ .

Mit der zu  $B$  dualen Basis  $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$  von  $V^*$  ist dann auch

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i x_{ij} b_j^*.$$

### 3.1.2 Lemma

Mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf  $K^{m \times n}$ ,

$$(x_{ij}) + (y_{ij}) := (x_{ij} + y_{ij}) \text{ und } (x_{ij}) \cdot z := (x_{ij} \cdot z),$$

wird  $K^{m \times n}$  ein Vektorraum und man erhält einen Isomorphismus zu Basen  $B$  und  $C$  von  $V$  bzw.  $W$ .

$$\xi_B^C : \text{Hom}(V, W) \rightarrow K^{m \times n}, f \mapsto \xi_B^C(f).$$

**Bemerkung** Die komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation sind gerade die Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen als Abbildungen.

Wir wissen bereits, dass  $\text{Hom}(V, W)$  ein  $K$ -VR ist (vgl. Kap. 1.4).

**Beweis** Dass  $\text{Hom}(V, W)$  und  $K^{m \times n}$   $K$ -VR sind, ist bekannt. Die Linearität von  $\xi_B^C$  folgt direkt, da mit der zu  $C$  dualen Basis  $C^*$  von  $W^*$

$$\forall_{i=1, \dots, m} \forall_{j=1, \dots, n} : x_{ij} = c_i^*(f(b_j)).$$

Nämlich: für  $f, g \in \text{Hom}(V, W)$  und  $x, y \in K$  ist dann

$$\begin{aligned} \forall_{i=1, \dots, m} \forall_{j=1, \dots, n} : c_i^*((fx + gy)(b_j)) \\ = c_i^*(f(b_j)x + g(b_j)y) = c_i^*(f(b_j))x + c_i^*(g(b_j))y. \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$K^{m \times n} \ni X = (x_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i x_{ij} b_j^* = f \in \text{Hom}(V, W)$$

liefert die Inverse von  $f \mapsto \xi_B^C(f)$ , also ist  $\xi_B^C$  ein Isomorphismus.

**Bemerkung** Damit folgt (vgl. Kap. 1.4):  $\dim \text{Hom}(V, W) = \dim K^{m \times n} = m \cdot n$ .

### 3.1.3 Lemma & Definition

Sind  $U, V, W$   $K$ -VR mit Basen  $A = (u_1, \dots, u_p), B = (v_1, \dots, v_n), C = (w_1, \dots, w_m)$ , so gilt für  $g \in \text{Hom}(U, V)$  und  $f \in \text{Hom}(V, W)$

$$\xi_A^C(f \circ g) = \xi_B^C(f) \cdot \xi_A^B(g),$$

wobei die *Matrixmultiplikation*

$$\cdot : K^{m \times n} \times K^{n \times p} \rightarrow K^{m \times p}, (X, Y) \mapsto X \cdot Y = Z$$

definiert ist durch

$$z_{ik} := \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{jk}.$$

**Bemerkung** Das Element  $z_{ik}$  in der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte von  $Z = XY$  wird also aus der  $i$ -ten Zeile von  $X$  und der  $k$ -ten Spalte von  $Y$  berechnet.

$$i \rightarrow \left( \begin{array}{c} \text{---} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right)$$

**Beweis** Wir verwenden die Darstellungsmatrizen

$$\begin{cases} X = \xi_B^C(f) \in K^{m \times n} & \text{von } f \in \text{Hom}(V, W) \\ Y = \xi_A^B(g) \in K^{n \times p} & \text{von } g \in \text{Hom}(U, V) \end{cases}$$

bezüglich  $B$  und  $C$  bzw.  $A$  und  $B$ , dann gilt für  $k = 1, \dots, p$

$$(f \circ g)(u_k) = f\left(\sum_{j=1}^n v_j y_{jk}\right) = \sum_{j=1}^n f(v_j) y_{jk} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_i x_{ij} y_{jk} = \sum_{i=1}^m w_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} y_{jk}\right),$$

d.h. durch  $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}, K = \{1, \dots, p\}$  und

$$\xi_A^C(f \circ g) = Z = (z_{ik})_{i \in I, k \in K}$$

mit

$$\forall i \in I \ \forall k \in K : z_{ik} = \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{jk}$$

erhält man die Darstellungsmatrix

$$\xi_A^C(f \circ g) = \xi_B^C(f) \xi_A^B(g)$$

der Komposition als Produkt der Darstellungsmatrizen von  $f$  und  $g$ .

### 3.1.4 Notation & Definition

Wir notieren die definierende Gleichung einer Darstellungsmatrix  $X = \xi_B^C(f)$  von  $f \in \text{Hom}(V, W)$  auch in Kurzform

$$CX = (c_1, \dots, c_m)X = (f(b_1), \dots, f(b_n)) = f(B).$$

Für die *Koordinatenspalten eines Vektors*

$$Y \in K^{n \times 1} \text{ mit } v = \sum_{j=1}^n b_j y_{j1}$$

ist dann

$$f(v) = (f(b_1), \dots, f(b_n))Y = (c_1, \dots, c_m)XY.$$

Die Familien  $(c_i, \dots, c_m)$  und  $(f(b_1), \dots, f(b_n))$  sind keine Matrizen, denn die Elemente sind Vektoren!

**Bemerkung** Wir schreiben die Skalarmultiplikation als Rechts-Multiplikation.

**Beispiel** Die neue Notation liefert einen „alternativen Beweis“ für  $\xi_A^C(f \circ g) = \xi_B^C(f)\xi_A^B(g)$ :  
gilt für jeden Vektor  $a_k, k = 1, \dots, p$

$$g(a_k) = \sum_{j=1}^n b_j y_{jk}, \text{ wobei } Y = \xi_A^B(g)$$

so erhalten wir

$$(f(g(a_1)), \dots, f(g(a_p))) = (f(b_1), \dots, f(b_n))Y = (c_1, \dots, c_m)\xi_B^C(f) \cdot Y = C \cdot XY$$

womit nun

$$(f \circ g)(A) = C \cdot XY,$$

also

$$\xi_A^C(f \circ g) = X \cdot Y = \xi_B^C(f) \cdot \xi_A^B(g).$$

Einfacher (aber weniger überzeugend) ist die folgende, die Linearität von  $f$  benutzende Version:

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)) = f(BY) = f(B) \cdot Y = C \cdot XY$$

**Bemerkung** Sei  $f \in \text{Hom}(V, W)$  mit  $r := \text{rg } f$ , dann existieren Basen  $B$  und  $C$  von  $V$  bzw.  $W$ , sodass

$$\xi_B^C(f) = X \text{ mit } x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \leq r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.

$$X = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Nämlich – wie im Beweis des Rangsatzes: Die Basen  $B$  und  $C$  werden so gewählt, dass

- (i)  $(b_{r+1}, \dots, b_n)$  Basis von  $\ker f$  ist, und dann
- (ii)  $c_i := f(b_i)$  für  $i = 1, \dots, r$  eine Basis von  $f(V)$  liefert.

Offenbar hat  $\xi_B^C(f)$  dann die gewünschte Form:

$$f(b_1) = c_1, \dots, f(b_r) = c_r, f(b_{r+1}) = 0, \dots, f(b_n) = 0,$$

d.h.

$$f(B) = (f(b_1), \dots, f(b_n)) = (c_1, \dots, c_m) \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) = CX.$$

Umgekehrt: gibt es eine Darstellungsmatrix von  $f$  dieser Form, so ist  $\text{rg } f = r$ .

### 3.1.5 Beispiel & Definition

Ist  $B = (b_1, \dots, b_n)$  Basis von  $V$ , so hat der Isomorphismus

$$\phi : V \rightarrow K^n \text{ mit } \forall j = 1, \dots, n : \phi(b_j) = e_j$$

bezüglich  $B$  und der Standardbasis  $E = (e_1, \dots, e_n)$  von  $K^n$  die  $n$ -reihige *Einheitsmatrix* als Darstellungsmatrix:

$$\xi_B^E(\phi) = E_n := (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

**Beispiel** Sind  $B = (b_1, \dots, b_n)$  und  $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$  Basen von  $V$ , wobei

$$\forall j = 1, \dots, n : b_j = \sum_{i=1}^n b'_i x_{ij},$$

so hat die Identität  $\text{id}_V$  die Darstellungsmatrix

$$\xi_B^{B'}(\text{id}_V) = X = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Sind dann  $B$  und  $B'$  Basen von  $V$  und  $C$  und  $C'$  Basen von  $W$ , so erhält man für  $f \in \text{Hom}(V, W)$  die Transformationsformel

$$\xi_{B'}^{C'}(f) = \xi_{B'}^{C'}(\text{id}_W \circ f \circ \text{id}_V) = \xi_C^{C'}(\text{id}_W) \cdot \xi_B^C(f) \cdot \xi_B^{B'}(\text{id}_V)$$

### 3.1.6 Beispiel & Definition

Ist  $f \in \text{Iso}(V, W)$  mit Basen  $B$  und  $C$  von  $V$  bzw.  $W$ , so gilt (mit  $n = \dim V = \dim W$ )

$$\xi_C^B(f^{-1}) \cdot \xi_B^C(f) = \xi_B^B(f^{-1} \circ f) = \xi_B^B(\text{id}_V) = E_n$$

und

$$\xi_B^C(f) \cdot \xi_C^B(f^{-1}) = \xi_C^C(f \circ f^{-1}) = \xi_C^C(\text{id}_W) = E_n.$$

Eine Matrix  $X \in K^{n \times n}$  nennt man invertierbar mit Inverser  $X^{-1}$ , falls

$$\exists X^{-1} \in K^{n \times n} : X^{-1}X = E_n$$

Damit ist die Darstellungsmatrix der Inversen die Inverse der Darstellungsmatrix:

$$\xi_C^B(f^{-1}) = (\xi_B^C(f))^{-1}$$

### 3.1.7 Bemerkung & Definition

Jedes  $X \in K^{m \times n}$  liefert (eindeutig)  $f_X \in \text{Hom}(K^n, K^m)$  nach Fortsetzungssatz via

$$f_X : K^n \rightarrow K^m, f_X(e_j) = \sum_{i=1}^m e'_i x_{ij} \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Bezüglich der Standardbasen  $E = (e_1, \dots, e_n)$  von  $K^n$  und  $E' = (e'_1, \dots, e'_m)$  von  $K^m$  ist dann

$$\xi_E^{E'}(f_X) = X.$$

Damit definiert man den Rang einer Matrix  $X \in K^{m \times n}$  als

$$\text{rg } X := \text{rg } f_X$$

Eine Matrix  $X \in K^{n \times n}$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\text{rg } X = n$ . Man setzt

$$Gl(n) := \{X \in K^{n \times n} \mid \text{rg } X = n\}.$$

### 3.1.8 Bemerkung & Definition

Nach der Transformationsformel für Darstellungsmatrizen gilt bei Basiswechseln in  $V$  und  $W$  für  $f \in \text{Hom}(V, W)$

$$\xi_{B'}^{C'}(f) = \xi_C^{C'}(\text{id}_W) \cdot \xi_B^C(f) \cdot \xi_{B'}^B(\text{id}_V).$$

Dabei sind  $\xi_{B'}^B(\text{id}_V) \in Gl(n)$  und  $\xi_C^{C'}(\text{id}_W) \in Gl(m)$  invertierbar, da etwa

$$\xi_{B'}^B(\text{id}_V) \cdot \xi_B^{B'}(\text{id}_V) = \xi_B^B(\text{id}_V) = E_n;$$

Sind andererseits die Basis  $B$  und  $P \in Gl(n)$  gegeben, so ist

$$\xi_B^{B'}(\text{id}_V) = P^{-1} \text{ für } B' := BP,$$

d.h. jedes  $P \in Gl(n)$  realisiert einen Basiswechsel in  $V$ , kommt also in der Transformationsformel vor.

Daher definiert man auch Matrizen  $X, X' \in K^{m \times n}$  als *äquivalent*,

$$X \sim X', \quad \text{falls } \exists P \in Gl(n) \exists Q \in Gl(m) : X' = QXP^{-1}.$$

## 3.2 Lineare Gleichungssysteme

Mission: Viele Probleme in Anwendungen oder Naturwissenschaften werden zu „linearen Problemen“ reduziert, d.h. auf lineare Gleichungssysteme unterschiedlicher Komplexität. Diese Reduktion ist etwa eine wichtige Aufgabe der Analysis; Aufgabe der linearen Algebra ist dann die Lösung bzw. Strukturanalyse der linearen Gleichungssysteme.

### 3.2.1 Definition

Ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) ist ein System von  $m$  Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \quad (**)$$

für  $n$  Unbekannte  $x_1, \dots, x_n \in K$ , wobei die Parameter  $a_{ij}, y_i \in K$  gegeben sind. Ist  $y_1 = \dots = y_m = 0$ , so heißt das System *homogen*, anderenfalls *inhomogen*.

**Bemerkung** Mit Matrizen  $A \in K^{m \times n}$ ,  $X \in K^{n \times 1}$  und  $Y \in K^{m \times 1}$  lässt sich ein lineares Gleichungssystem kompakter schreiben als

$$AX = Y \quad (*)$$

Die Standardbasen  $E$  und  $E'$  von  $K^n$  bzw.  $K^m$  liefern den Isomorphismus

$$K^{m \times n} \ni A \mapsto f_A \in \text{Hom}(K^n, K^m), \text{ wobei } f_A(E) = E'A,$$

damit lässt sich  $(*)$  umformulieren als Gleichung eines affinen Unterraumes von  $K^n$ :

$$f_A(x) = y \text{ mit } x = EX \text{ und } y = E'Y.$$

Nämlich: Existiert eine Lösung  $x \in f_A^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ , so ist der Lösungsraum

$$f_A^{-1}(\{y\}) = x + \ker f_A \subset K^n$$

ein affiner Unterraum.



Das nächste Lemma folgt dann mit dem Basisisomorphismus:

$$K^{n \times 1} \ni X \mapsto EX =: x \in K^n$$

### 3.2.2 Definition & Lemma

Der *Lösungsraum*  $L_{A,Y}$  eines linearen Gleichungssystems,

$$L_{A,Y} := \{X \in K^{n \times 1} \mid AX = Y\} \subset K^{n \times 1}$$

ist leer oder ein affiner Unterraum der Dimension  $k = n - \text{rg } A$ .

Ist  $Y = 0$ , so gilt  $0 \in L_{A,Y}$  und  $L_{A,Y} \subset K^{n \times 1}$  ist ein linearer Unterraum (UVR).

**Bemerkung** Jede Lösung  $X_l$  eines (inhomogenen) linearen Gleichungssystems lässt sich schreiben als Summe einer *Partikulärlösung*  $X_0 \in K^{n \times 1}$ ,  $AX_0 = Y$ , und einer Lösung  $V$  des homogenen LGS  $AX = 0$ :

$$\forall X_l \in L_{A,Y} \exists V \in L_{A,0} : X_l = X_0 + V = \tau_V(X_0)$$

**Bemerkung** Der Lösungsraum eines „unendlichen linearen Gleichungssystems“ hat die gleiche Struktur eines affinen Unterraums wie im endlichen Fall, z.B.:

$$\{x \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R} : x''(t) = t^2\}$$

ist ein (2-dim) AUR, des unendlich-dim. R-VR  $C^\infty$ , wobei  $C^\infty(\mathbb{R})$  den (Vektor-)Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}$  notiert.

### 3.2.3 Bemerkung & Definition

Ist  $AX = Y \neq 0$  ein inhomogenes LGS, so gilt

$$L_{A,Y} = \emptyset \Leftrightarrow y \notin f_A(K^n)$$

mit der *erweiterten Koeffizientenmatrix*

$$(A \mid Y) \in K^{m \times (n+1)}$$

lässt sich dies formulieren als

$$f_{(A|Y)}(K^{n+1}) \neq f_A(K^n) \Leftrightarrow \operatorname{rg} f_{(A|Y)} \neq \operatorname{rg} f_A \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A | Y) \neq \operatorname{rg} A.$$

Folglich ist

$$L_{A,Y} \neq \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A | Y) = \operatorname{rg} A$$

### 3.2.4 Bemerkung & Definition, Gaußsches Eliminationsverfahren

Eine Idee zur Lösung eines LGS ist, das Gleichungssystem zu „vereinfachen“, ohne dabei den Lösungsraum zu verändern: Man nennt zwei LGS  $AX = Y$  und  $A'X = Y'$  *äquivalent*, wenn sie den gleichen Lösungsraum haben,

$$(AX = Y) \sim (A'X = Y') : \Leftrightarrow L_{A,Y} = L_{A',Y'}$$

*Linksmultiplikation* der erweiterten Koeffizientenmatrix  $(A | Y)$  mit den folgenden Matrizen (mit  $i \neq j$ ) liefert z.B. äquivalente Systeme:

- $D_i = (d_{kl}) \in Gl(m)$

$$d_{kl} := \delta_{kl} + (d - 1)\delta_{ik}\delta_{il} \quad (d \in K^x);$$

- $T_{ij} = (t_{kl}) \in Gl(m)$ ,

$$t_{kl} := \delta_{kl} - (\delta_{ik} - \delta_{jk})(\delta_{il} - \delta_{jl})$$

- $S_{ij} = (s_{kl}) \in Gl(m)$

$$s_{kl} := \delta_{kl} + s\delta_{ik}\delta_{jl} \quad s \in K$$

Die entsprechenden Operationen auf dem LGS werden als *elementare Zeilenoperationen/-umformungen* bezeichnet (elZumf) bezeichnet:

- $(A | Y) \rightarrow D_i(A | Y)$ , Multiplikation der  $i$ -ten Gleichung mit  $d \neq 0$ ;
- $(A | Y) \rightarrow T_{ij}(A | Y)$ , Vertauschung der  $i$ -ten und  $j$ -ten Gleichung;
- $(A | Y) \rightarrow S_{ij}(A | Y)$ , Addition des  $s$ -fachen der  $j$ -ten Gleichung zur  $i$ -ten Gleichung.

Da  $D_i, T_{ij}, S_{ij} \in Gl(m)$ , sind die elementaren Zeilenumformungen reversibel, verändern daher den Lösungsraum nicht: für  $D_i$  und  $T_{ij}$  ist das klar;  $S_{ij} = S_{ij}(s)$  ist invertierbar mit

$$(S_{ij})^{-1} = (S_{ij}(s))^{-1} = S_{ij}(-s).$$

Geometrisch ist  $S_{ij}$  Darstellungsmatrix einer Scherung.

Mit Hilfe der elementaren Zeilenumformungen kann man das LGS auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & y'_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & y'_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & y'_r \\ & & \dots & 0 & y'_{r+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \dots & 0 & y'_m \end{pmatrix}$$

Ein System in Zeilenstufenform kann dann einfach gelöst werden – oder auch nicht, falls eine Gleichung  $0 = y' \neq 0$  auftaucht.

**Beispiel** Wir betrachten das LGS  $AX = Y$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Elementare Zeilenumformungen liefern dann:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & y_1 \\ 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 2 & 5 & 8 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 0 & 3 & 6 & y_1 \\ 2 & 5 & 8 & y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 0 & 3 & 6 & y_1 \\ 0 & -3 & -6 & y_3 - 2y_2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_{32}(a)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 0 & 3 & 6 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_2 + y_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_2(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & y_2 \\ 0 & 1 & 2 & y_1 \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_2 \end{pmatrix}$$

d.h. ein äquivalentes LGS  $A'X = Y'$  ist gefunden mit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \frac{1}{3} \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Das LGS  $AX = Y$  ist also genau dann lösbar, wenn  $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$ ; in diesem Falle ist dann

$$L_{A,Y} = \left\{ X = \begin{pmatrix} y_2 - 7t - 4(-2t + y_1 \frac{1}{3}) \\ -2t + y_1 \frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ X = \begin{pmatrix} t - \frac{4}{3}y_1 + y_2 \\ -2t + y_1 \frac{1}{3} \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

**Historische Bemerkung** Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist schon seit ca. 2000 Jahren bekannt, also schon lange vor Gauß (1777-1855) entwickelt worden.

### Nutzen der Methode

- lässt sich einfach programmieren (leider ggf. numerisch instabil)
- nützlich für mittelgroße Systeme (tausende Gleichungen)
- nicht effizient für große Systeme (Millionen von Gleichungen)

**Bemerkung** Mehrere LGS  $AX = Y_1, AX = Y_2, \dots, AX = Y_k$  mit derselben Koeffizientenmatrix  $A$  können simultan gelöst werden, indem man elementare Zeileinummformungen auf die um alle  $Y$  erweiterte Koeffizientenmatrix  $(A \mid Y_1 \mid Y_2 \mid \dots \mid Y_k)$  anwendet.

**Bemerkung** Das Gaußsche Eliminationsverfahren kann zur Bestimmung der Inversen einer Matrix  $A \in Gl(n)$  verwendet werden. Insbesondere ist eine *untere Dreiecksmatrix*  $A \in K^{n \times n}$ , d.h.  $a_{ij} = 0$  für  $i < j$  genau dann invertierbar, wenn  $a_{ii} \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

# 4 Volumenmessung

Grundlegende Idee: Wir definieren ein Spat- oder Parallelotop-Volumen.

Algebraisch: Dieses Volumen kann dann benutzt werden, um zu testen, wann ein Spat/Parallelotop „zusammenklappt“.

## 4.1 Determinantenformen

Idee: Für den Flächeninhalt  $F(v, w)$  eines von zwei Vektoren  $v, w \in V$  aufgespannten Parallelogramms gilt

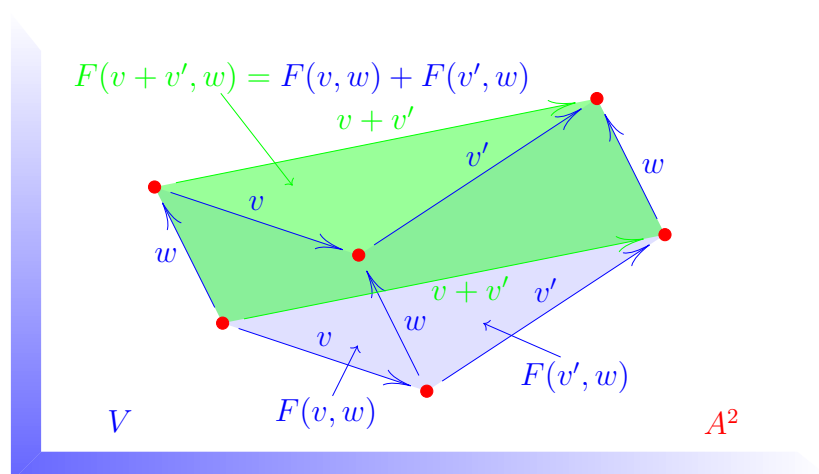
$$F(vx, w) = F(v, w) \cdot x$$

$$F(v + v', w) = F(v, w) + F(v', w)$$

und entsprechend für das zweite Argument; außerdem verschwindet der Flächeninhalt, wenn das Parallelogramm „zusammenklappt“, also insbesondere gilt

$$w = v \Rightarrow F(v, w) = 0$$

Die folgende Definition verallgemeinert diese Eigenschaften:



### 4.1.1 Definition

Sei  $V$  ein  $K$ -VR. Eine Abbildung  $\omega : V^m \rightarrow K$  heißt

- *m-linear*, bzw. eine *m-(Linear-)Form*, falls  $\omega$  in jedem Argument linear ist, d.h.

$$\forall i = 1, \dots, m : V \ni v_i \mapsto \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_m) \in K$$

ist linear;

- *alternierend*, falls  $\omega(v_1, \dots, v_m) = 0$  wann immer zwei Vektoren gleich sind, d.h.

$$v_i = v_j \text{ für } i \neq j \Rightarrow \omega(v_1, \dots, v_m) = 0.$$

Die Menge der alternierenden  $m$ -Formen wird mit  $\Lambda^m V^*$  bezeichnet. Ist  $\dim V = n$ , so heißt ein  $\omega \in \Lambda^n V^*$  auch Determinantenform.

**Beispiel** Jede Linearform  $\omega \in V^*$  ist eine (alternierende) 1-Form,  $\Lambda^1 V^* = V^*$ .

**Bemerkung**  $\Lambda^m V^*$  ist für jedes  $m \in \mathbb{N}$  selbst ein  $K$ -VR.

### 4.1.2 Lemma

Für eine alternierende  $m$ -Form  $\omega \in \Lambda^m V^*$  und  $i \neq j$  gilt:

- (i)  $\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$ ;
- (ii)  $\omega(\dots, v_i, \dots, v_i s + v_j, \dots) = \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots)$  für  $s \in K$ ;
- (iii) und  $\omega(v_1, \dots, v_m) = 0$ , falls  $(v_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  linear abhängig ist.

**Beweis** Seien  $v_1, \dots, v_m \in V$  und  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  mit  $i \neq j$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(\dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) \\ &= \omega(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) \\ &= \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 &= \omega(\dots, v_i, \dots, v_i s, \dots) \\
&= \omega(\dots, v_i, \dots, v_i s + v_j - v_j, \dots) \\
&= \omega(\dots, v_i, \dots, v_i s + v_j, \dots) - \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots)
\end{aligned}$$

Dies beweist (i) und (ii). Ist die Familie  $(v_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  linear abhängig, o.B.d.A

$$v_m = \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_i \in [(v_i)_{i \in \{1, \dots, m-1\}}]$$

so gilt

$$\begin{aligned}
\omega(v_1, \dots, v_m) &= \omega(v_1, \dots, v_{m-1}, \sum_{i=1}^{m-1} v_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \omega(v_1, \dots, v_{m-1}, v_i) x_i (= 0)
\end{aligned}$$

womit (iii) bewiesen ist.

**Bemerkung** (i) liefert eine äquivalente Formulierung von „alternierend“ für  $m$ -Linearformen, wenn  $\text{Char}(K) \neq 2$ . Nämlich: sind  $v_1, \dots, v_m \in V$  mit  $v_i = v_j$  für  $i \neq j$ , so gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) \\
&= 2\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) \Rightarrow 0 = \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots)
\end{aligned}$$

**Buchhaltung** Benutzt man (vgl. Gaußsches Eliminationsverfahren) die Elementarmatrizen

$$\begin{aligned}
D_i &= (d_{kl}) \in Gl(m); d_{kl} = \delta_{kl} + (d - 1)\delta_{ik}\delta_{il} \quad (d \in K^\times); \\
T_{ij} &= (t_{kl}) \in Gl(m); t_{kl} = \delta_{kl} - (\delta_{ik} - \delta_{jk})(\delta_{il} - \delta_{jl}); \\
S_{ij} &= (s_{kl}) \in Gl(m); s_{kl} = \delta_{kl} + s\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (s \in K)
\end{aligned}$$

und beschreibt man eine Familie  $(v_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  von Vektoren  $v_i \in V$  durch ein  $m$ -Tupel  $A = (v_1, \dots, v_m)$  von Werten der Familie, so lassen sich die Homogenität und Eigenschaften (i) und (ii) des Lemmas einfach schreiben als

$$\omega(AD_i) = \omega(A)d, \quad \omega(AT_{ij}) = -\omega(A), \quad \omega(AS_{ij}(s)) = \omega(A)$$

### 4.1.3 Wiederholung & Definition

Die bijektiven Abbildungen (Permutationen)

$$\sigma : I \rightarrow I, i \mapsto \sigma(i), \text{ der Menge } I = \{1, \dots, m\}$$

bilden eine Gruppe (mit der Komposition als Verknüpfung), die Permutationsgruppe  $S_m$  der Menge  $I$ . Eine Transposition  $\tau_{ij} \in S_m, i \neq j$  ist eine Permutation, die zwei Indizes vertauscht,

$$\tau_{ij} : I \rightarrow I, k \mapsto \tau_{ij}(k) := \begin{cases} j, & \text{falls } k = i, \\ i, & \text{falls } k = j, \\ k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jede Permutation ist eine Komposition von Transpositionen, wie man leicht durch Induktion über  $m$  zeigt:

Ist  $\sigma(m) = i < m$ , so ist  $\tau_{im} \circ \sigma$  eine Permutation, die  $m$  fixiert, also

$$\tau_{im} \circ \sigma|_{\{1, \dots, m-1\}} \in S_{m-1}$$

**Bemerkung** Die Eigenschaft (i) des Lemmas,  $\omega(AT_{ij}) = -\omega(A)$ , lässt sich mit  $\tau_{ij}$  dann formulieren als

$$\omega(v_{\tau_{ij}(1)}, \dots, v_{\tau_{ij}(m)}) = -\omega(v_1, \dots, v_m)$$

Da jede Permutation  $\sigma \in S_m$  Komposition von Transpositionen ist, folgt

$$\forall \sigma \in S_m : \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = \pm \omega(v_1, \dots, v_m).$$

Frage: Was ist das Vorzeichen bzw. wie kann man es berechnen?

### 4.1.4 Lemma & Definition

Das Signum einer Permutation  $\sigma \in S_m$  ist die Zahl

$$\text{sgn } \sigma := \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{\pm 1\};$$

ist  $\text{sgn } \sigma = 1$ , so heißt  $\sigma$  gerade, sonst ungerade. Signum liefert einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{sgn} : S_m \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot).$$



**Beispiel** Eine Transposition  $\tau_{ij}$  ist eine ungerade Permutation, da

$$\operatorname{sgn} \tau_{ij} = \prod_{k < l} \frac{\tau_{ij}(k) - \tau_{ij}(l)}{k - l} = \frac{j - i}{i - j} \prod_{k \neq i, j} \frac{i - k}{j - k} \frac{j - k}{i - k} = -1$$

**Beweis** Seien  $\sigma, \tau \in S_m$  beliebig, dann gilt

$$\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \prod_{i < j} \frac{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))}{\sigma(i) - \sigma(j)} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \prod_{i < j} \frac{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))}{\sigma(i) - \sigma(j)} \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

mit  $i' = \sigma(i), j' = \sigma(j)$  folgt

$$\prod_{i' < j'} \frac{\tau(i') - \tau(j')}{i' - j'} \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Da jede Permutation Komposition von Transpositionen ist, folgt daraus

$$\forall \sigma \in S_m : \operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$$

und dass

$$\operatorname{sgn} : S_m \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$$

Gruppenhomomorphismus ist.

**Bemerkung** Damit folgt für  $\omega \in \Lambda^m V^*$  und  $\sigma \in S_m$

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = \omega(v_1, \dots, v_m) \operatorname{sgn} \sigma.$$

### 4.1.5 Leibniz-Formel

Seien  $\omega \in \Lambda^m V^*$ ,  $(b_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  linear unabhängig und  $(v_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$  eine Familie in  $[(b_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}] \subset V$ ,

$$\forall j = 1, \dots, m : v_j = \sum_{i=1}^m b_i x_{ij}$$

dann gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_m) = \omega(b_1, \dots, b_m) \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(m)m}$$

**Beweis** Ausmultiplizieren ergibt:

$$\omega(v_1, \dots, v_m) = \sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_m=1}^m \omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_m}) x_{i_1 1} \cdots x_{i_m m}$$

wegen  $\omega(\dots) = 0$ , wenn zwei  $b$ 's gleich sind, d.h. wann immer  $\{1, \dots, m\} \ni j \mapsto i_j \in \{1, \dots, m\}$  nicht injektiv ist, also keine Permutation ist.

$$= \sum_{\sigma \in S_m} \omega(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(m)}) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(m)m} = \sum_{\sigma \in S_m} \omega(b_1, \dots, b_m) \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(m)m}$$

**Beispiel** Ist die Koeffizientenmatrix  $x = (x_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$  in der Leibniz-Formel eine obere Dreiecksmatrix, d.h.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & \cdots & x_{1m} \\ 0 & x_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{mm} \end{pmatrix} \text{ und } \forall j = 1, \dots, m : v_j = \sum_{i=1}^j b_i x_{ij}$$

so gilt für jede Permutation  $\sigma \in S_m$  von  $I = \{1, \dots, m\}$

$$x_{\sigma(1)1}, \dots, x_{\sigma(m)m} \neq 0 \Rightarrow \forall j \in I : \sigma(j) \leq j \Rightarrow \sigma = \operatorname{id}_I$$

und damit

$$\omega(v_1, \dots, v_m) = \omega(b_1, \dots, b_m) x_{11} \cdots x_{mm}.$$

## 4.1.6 Buchhaltung

Mit

$$A := (v_1, \dots, v_m) = (b_1, \dots, b_m)X = BX$$

und der Determinante

$$\det X := \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(m)m}$$

der Koeffizientenmatrix  $X \in K^{m \times m}$  lässt sich die Leibniz-Formel auch kürzer schreiben als

$$\omega(A) = \omega(B) \det X.$$

Für  $m = 2$  und  $m = 3$  lässt sich  $\det X$  einfach berechnen:

- für  $m = 2$  ist

$$\det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$$

- für  $m = 3$  mit Hilfe der Regel von Sarrus (zuerst zyklische (gerade) Permutationen, dann mit einem Fixpunkt, also Transpositionen)

$$\det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{matrix} x_{11}x_{22}x_{33} + x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23} \\ -x_{11}x_{23}x_{32} - x_{21}x_{33}x_{12} - x_{31}x_{22}x_{13} \end{matrix}$$

Für  $m > 3$  liefert der Laplacesche Entwicklungssatz eine Methode, die Terme (Permutationen) zu sortieren: Für fest gewähltes  $j \in \{1, \dots, m\}$  gilt

$$\det X = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} x_{ij} \det X_{ij}$$

mit

$$X_{ij} = (x_{kl})_{k \neq i, l \neq j} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1(j-1)} & x_{1j} & x_{1(j+1)} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ x_{(i-1)1} & & & & & & x_{(i-1)m} \\ x_{i1} & & & x_{ij} & & & x_{im} \\ x_{(i+1)1} & & & & & & x_{(i+1)m} \\ \vdots & & & & & & \\ x_{m1} & & & x_{mj} & & & x_{mm} \end{pmatrix}$$

Nämlich: Ist z.B.  $v_m = b_i$  in der Leibniz-Formel, also  $x_{km} = \delta_{ik}$ , so erhält man

$$\det X = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^m x_{\sigma(j)j} = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{j=1}^{m-1} x_{\sigma(j)j} \right) x_{\sigma(m)m}$$

wobei  $x_{\sigma(m)m} = 0$  für  $\sigma(m) \neq i$  und  $= 1$  für  $\sigma(m) = i$ ,

$$= \sum_{\sigma \in S_m, \sigma(m)=i} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{m-1} x_{\sigma(j)j} = \sum_{\sigma \in S_{m-1}} (-1)^{m-i} \operatorname{sgn}(\sigma') \prod_{j=1}^{m-1} x_{\sigma'(j)j} = (-1)^{m-i} \det X_{im}.$$

Im letzten Schritt werden die Transpositionen berücksichtigt die notwendig sind, um die nun „gelöschte“ Zeile ans Ende zu verschieben. Ausmultiplizieren des o.B.d.A  $m$ -ten Eintrags in einer alternierenden  $m$ -Form  $\omega \in \Lambda^m V^*$  liefert also

$$\omega(v_1, \dots, v_m) = \sum_{i=1}^m \omega(v_1, \dots, v_{m-1}, b_i) x_{im} = \omega(b_1, \dots, b_m) \sum_{i=1}^m (-1)^{m-1} x_{im} \det X_{im}$$

und damit die Behauptung, da  $\omega(b_1, \dots, b_m) \neq 0$  angenommen werden kann (siehe unten). Da wegen  $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = (\text{sgn}(\sigma))^{-1} = \text{sgn}(\sigma)$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^m x_{j\sigma(j)} &= \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^m x_{\sigma^{-1}(j)j} = \\ \sum_{\sigma^{-1} \in S_m} \text{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^m x_{\sigma(j)j} &= \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^m x_{\sigma(j)j} \end{aligned}$$

gleich die Determinante einer Matrix  $X$  der ihrer Transponierten:

$$\det X^t = \det X \text{ mit } X^t := (x_{ji})_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$$

Damit gilt der Laplacesche Entwicklungssatz auch für die Entwicklung nach einer Zeile von  $X$ , anstelle nach einer Spalte, wie oben.

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung von  $\det X$  liefert das Gaußsche Eliminationsverfahren (hier mit elementaren Spaltenumformungen; es wird von rechts multipliziert), da (vgl. oben)

$$\begin{aligned} \det XD_i &= d \cdot \det X, (\Leftrightarrow \det D_i X^t = d \cdot \det X^t) \\ \det XT_{ij} &= -\det X, (\Leftrightarrow \dots) \\ \det XS_{ij} &= \det X. \end{aligned}$$

**Bemerkung** Diese „Rechenmethoden“ sind von historischer Bedeutung, manchmal sind sie theoretisch praktisch, aber von beschränkter praktischer Bedeutung (seit man Computer hat).

### 4.1.7 Beispiel & Definition (Blockmatrix)

Für eine Blockmatrix

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$X_{11} \in K^{m \times m}, \quad X_{12} \in K^{m \times n}, \quad X_{22} \in K^{n \times n}$$

gilt

$$\det X = \det X_{11} \cdot \det X_{22}$$

Beweis in Übung.

### 4.1.8 Beispiel & Definition (Vandermonde-Determinante)

Für  $x_1, \dots, x_k \in K$  hat die Vandermonde-Matrix

$$X = (x_i^{k-j})_{i,j \in \{1, \dots, k\}} = \begin{pmatrix} x_1^{k-1} & x_1^{k-2} & \cdots & x_1^0 \\ x_2^{k-1} & x_2^{k-2} & \cdots & x_2^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^{k-1} & x_k^{k-2} & \cdots & x_k^0 \end{pmatrix} \in K^{k \times k}$$

(Vandermonde-)Determinante:

$$\det X = \det(x_i^{k-j})_{i,j=1,\dots,k} = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

Denn: Für  $k = 2$  gilt

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$$

also ist die Induktionsvoraussetzung wahr. Für  $k > 2$  gilt

$$\begin{aligned} XS_{21}(-x_k) \cdots S_{k(k-1)}(-x_k) &= \begin{pmatrix} x_1^{k-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_k^{k-1} & \cdots & x_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ -x_k & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & & -x_k & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1^{k-1} - x_1^{k-2}x_k & x_1^{k-2} - x_1^{k-3}x_k & \cdots & x_1 - x_k & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{k-1}^{k-1} - x_{k-1}^{k-2}x_k & x_{k-1}^{k-2} - x_{k-1}^{k-3}x_k & \cdots & x_{k-1} - x_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 - x_k)x_1^{k-2} & (x_1 - x_k)x_1^{k-3} & \cdots & x_1 - x_k & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_{k-1} - x_k)x_{k-1}^{k-2} & (x_{k-1} - x_k)x_{k-1}^{k-3} & \cdots & x_{k-1} - x_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also ist (Laplacescher Entwicklungssatz nach letzter Zeile):

$$\det X = 0 + (-1)^{k+k} \det \begin{pmatrix} (x_1 - x_k)x_1^{k-2} & (x_1 - x_k)x_1^{k-3} & \cdots & x_1 - x_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_{k-1} - x_k)x_{k-1}^{k-2} & (x_{k-1} - x_k)x_{k-1}^{k-3} & \cdots & x_{k-1} - x_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot (x_1 - x_k) \cdots (x_{k-1} - x_k) \det \begin{pmatrix} x_1^{k-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k-1}^{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \\
&(x_1 - x_k) \cdots (x_{k-1} - x_k) \prod_{i < j, i, j \in \{1, \dots, k-1\}} (x_i - x_j) = \prod_{i < j, i, j \in \{1, \dots, k\}} (x_i - x_j)
\end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung mit Induktion.

#### 4.1.9 Fortsetzungssatz für Determinantenformen

Ist  $(b_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  eine Basis von  $V$  (also  $\dim V = n$ ) und  $d \in K$ , so gilt:

$$\exists! \omega \in \Lambda^n V^* : \omega(b_1, \dots, b_n) = d$$

**Beweis** Eindeutigkeit folgt aus der Leibniz-Formel und der Tatsache, dass  $V = [(b_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}]$ .

Existenz: Gegeben sind eine Basis  $(b_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $V$  und  $d \in K$ . Wir definieren  $\omega$  durch die Leibniz-Formel:

$$\omega : V \times \dots \times V \rightarrow K, \omega(v_1, \dots, v_n) := d \cdot \det X$$

wobei  $X \in K^{n \times n}$  die Koeffizientenmatrix für die Basisdarstellung der  $(v_i)$  ist,

$$(v_1, \dots, v_n) = (b_1, \dots, b_n) \cdot X.$$

Dann gilt:

- $\omega$  ist wohldefiniert, da  $(b_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  linear unabhängig ist, womit die Koeffizienten  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$  für jedes  $j = 1, \dots, n$  eindeutig sind.
- $\omega$  ist  $n$ -Form, d.h.

$$\forall j = 1, \dots, n : v_j \mapsto d \cdot \det X$$

ist linear; offensichtlich!

- $\omega$  ist alternierend, d.h.

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = 0 \text{ falls } v_i = v_j \text{ für } i \neq j;$$

ist aber  $v_i = v_j$  für ein Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ , so gilt:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} + \operatorname{sgn}(\tau_{ij} \circ \sigma) x_{(\tau_{ij} \circ \sigma)(1)1} \cdots x_{(\tau_{ij} \circ \sigma)(n)n} = 0,$$

denn

$$\operatorname{sgn}(\tau_{ij} \circ \sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma), \text{ und } x_{(\tau_{ij} \circ \sigma)(1)1} \cdots x_{(\tau_{ij} \circ \sigma)(n)n} = x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}$$

da  $v_i = v_j$

Damit folgt:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} = 0,$$

da mit  $\sigma \in S_n$  auch  $\tau \circ \sigma \in S_n$  in der Summe vorkommt.

#### 4.1.10 Korollar

Ist  $\dim V = n$ , so ist  $\dim \Lambda^n V^* = 1$ . Beweis in der Übung.

#### 4.1.11 Korollar

Ist  $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$  für eine Determinantenform  $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ , so ist die Familie  $(v_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  linear abhängig.

**Beweis** Ist  $\omega \neq 0$ , so existiert eine Basis  $(b_i)_{i=1, \dots, n}$  von  $V$  mit  $\omega(b_1, \dots, b_n) = d \neq 0$ . Mit

$$(v_1, \dots, v_n) = (b_1, \dots, b_n) \cdot X$$

folgt nun (Leibniz-Formel)

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(b_1, \dots, b_n) \det X = d \cdot \det X$$

Annahme:  $(v_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  ist linear unabhängig, d.h.  $(v_i)$  ist Basis und damit existiert  $Y \in K^{n \times n}$  mit

$$(b_1, \dots, b_n) = (v_1, \dots, v_n) Y,$$

nach Leibniz-Formel ist damit

$$0 \neq d = \omega(b_1, \dots, b_n) = \omega(v_1, \dots, v_n) \cdot \det Y.$$

Damit folgt

$$\omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \text{ (und } \det Y \neq 0)$$

**Verkürzung des Beweises** Der Beweis ist zu verkürzen, indem man für die linear unabhängige Familie gleich die Basis  $(b_i)$  verwendet.

**Bemerkung** Ist also  $\dim V = n$  und sind  $\omega \in \Lambda^n V^*$  und  $(b_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  eine Familie in  $V$ , so folgt aus zwei der folgenden Aussagen die dritte:

- (i)  $\omega \neq 0$
- (ii)  $\omega(b_1, \dots, b_n) \neq 0$
- (iii)  $(b_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  ist Basis von  $V$ .

**Bemerkung** Weiter folgt damit: Sind  $f \in \text{End}(V)$ ,  $(b_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  Basis von  $V$  und  $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ , so gilt:

$$f \in \text{Gl}(V) \Leftrightarrow \omega(f(b_1), \dots, f(b_n)) \neq 0$$

bzw.

$$\text{Gl}(V) = \{f \in \text{End}(V) \mid \omega(f(b_1), \dots, f(b_n)) \neq 0\}$$

## 4.2 Äquiaffine Geometrie

### 4.2.1 Definition

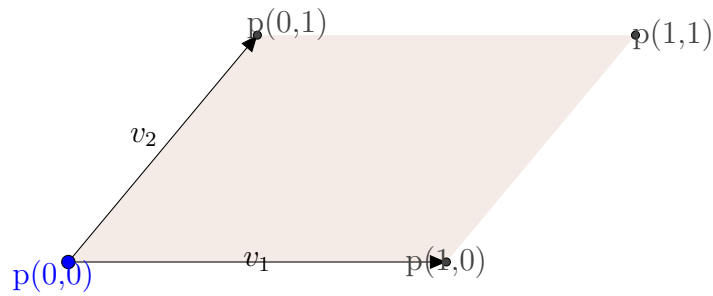
Seien  $(A, V, \tau)$  ein  $n$ -dimensionaler affiner Raum und  $p_0 \in A$ ; das von einer Familie  $(v_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  in  $V$  aufgespannte *Parallelotop* oder *Spat* ist die (über dem abstrakten Würfel  $\mathbb{Z}_2^n$  indizierte) Familie

$$p : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow A, \epsilon \mapsto p_\epsilon := p_0 + \sum_{j=1}^n v_j \epsilon_j.$$

Ist  $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ , so ist das zugehörige (*Spat*-) *Volumen* von  $(p_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Z}_2^n}$

$$\text{vol}(p) := \omega(v_1, \dots, v_n).$$





### 4.2.2 Bemerkung & Definition

Im Falle  $n = 2$  heißt ein Parallelotop  $p$  auch *Parallelogramm*, sein Spatvolumen auch sein *Flächeninhalt*. Der Flächeninhalt ist orientiert: Mit

$$\epsilon = (\epsilon_j)_{j \in \{1,2\}} \cong (\epsilon_1, \epsilon_2)$$

und

$$v_1 = p_{(1,0)} - p_{(0,0)} \text{ und } v_2 = p_{(0,1)} - p_{(0,0)}$$

ändert der Flächeninhalt das Vorzeichen, wenn man die Kantenvektoren vertauscht:

$$\text{vol}(p) = \omega(v_1, v_2) = -\omega(v_2, v_1) = \text{vol}(p')$$

mit  $p'_\epsilon = p_\epsilon \circ \tau_{12}$ .

**Bemerkung** Für ein Dreieck  $\{a, b, c\}$  wählt man eine Orientierung, e.g.  $(a, b, c)$ , und setzt den Flächeninhalt

$$F(a, b, c) := \omega(b - a, c - a) \cdot \frac{1}{2}$$

d.h. als halben Flächeninhalt des Parallelogramms

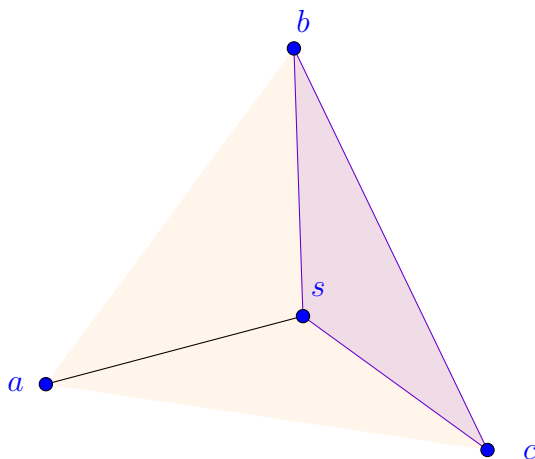
$$p(0,0) = 0, p(1,0) = b, p(0,1) = c \text{ und } p(1,1) = a(-1) + b \cdot 1 + c \cdot 1.$$

Dieser Flächeninhalt ist wohldefiniert, d.h. er hängt nur vom Dreieck und der gewählten Orientierung ab – insbesondere ist für Permutationen  $\sigma$  von  $\{a, b, c\}$  mit  $\text{sgn}(\sigma) = +1$  der Flächeninhalt gleich dem ursprünglichen. (Siehe Aufgabe)

**Bemerkung** Ist  $A$  eine affine Ebene mit Flächenmessung  $\text{vol}$  und  $\{a, b, c\}$  ein nicht-degeneriertes Dreieck, also ein baryzentrisches Bezugssystem, so gilt (Cramersche Regel)

$$\forall s \in A : s = a \cdot \frac{F(s, b, c)}{F(a, b, c)} + b \cdot \frac{F(a, s, c)}{F(a, b, c)} + c \cdot \frac{F(a, b, s)}{F(a, b, c)}$$

Diese Flächenformel für die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes  $s$  ist unabhängig von der (gewählten) Flächenmessung, das sich verschiedene Flächenmessungen nur um einen Faktor unterscheiden (der unabhängig vom Dreieck ist):  $\dim \Lambda^2 V^* = 1$



### 4.2.3 Definition

Eine affine Abbildung  $\alpha : A \rightarrow A'$  zwischen AR  $A$  und  $A'$  mit Volumenmessungen  $\text{vol}$  und  $\text{vol}'$  heißt *volumentreu*, falls für alle Parallelotope  $p$  in  $A$  gilt

$$\text{vol}'(\alpha \circ p) = \text{vol}(p)$$

Eine *äquiaffine Transformation* ist eine volumentreue Affinität.

**Bemerkung** Ist  $\alpha : A \rightarrow A'$  affin mit linearem Anteil  $\lambda : V \rightarrow V'$  und  $p$  ein von einer Familie  $(v_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  von Vektoren aufgespanntes Parallelotop in  $A$ , so ist

$$\begin{aligned} p' := \alpha \circ p : \mathbb{Z}_2^n &\rightarrow A', \epsilon \mapsto p'_\epsilon = \alpha(p_0) + \lambda\left(\sum_{j=1}^n v_j \epsilon_j\right) \\ &= \alpha(p_0) + \sum_{j=1}^n \lambda(v_j) \epsilon_j \end{aligned}$$

ein von der Familie  $(\lambda(v))_{j \in \{1, \dots, n\}}$  von Vektoren in  $V'$  aufgespanntes Parallelotop in  $A'$ . Damit ist  $\text{vol}'(\alpha \circ p)$  ein sinnvoller Ausdruck, also der Begriff „volumentreu“ sinnvoll für affine Abbildungen.

**Bemerkung** Offenbar bilden die volumentreuen Affinitäten eine Gruppe: eine Untergruppe der affinen Gruppe (nach Untergruppenkriterium).

#### 4.2.4 Äquiaffine Geometrie

Ist  $(A, V, \tau, \text{vol})$  ein mit einem Spatvolumen versehener Affiner Raum, so bestimmt die auf  $A$  operierende Gruppe der volumentreuen Affinitäten (der äquiaffinen Transformationen) eine *äquiaffine Geometrie*.

#### 4.2.5 Bemerkung & Definition

Ist  $\alpha : A \rightarrow A$  Affinität eines AR  $A$  mit Volumenmessung  $\text{vol}$ , so gibt es genau eine Zahl  $\delta(\alpha) \in K^x$ , sodass für jedes Parallelotop  $p$  in  $A$  gilt

$$\text{vol}(\alpha \circ p) = \delta(\alpha) \text{vol}(p),$$

wobei  $\delta(\alpha)$  die *Volumenverzerrung* genannt wird.

Die Volumenverzerrung  $\delta(\alpha)$  hängt nur vom linearen Anteil  $\lambda \in \text{End}(V)$  ab: für ein von einer Basis  $(v_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  von  $V$  aufgespanntes Parallelotop ist

$$\delta(\alpha) = \frac{\omega(\lambda(v_1), \dots, \lambda(v_n))}{\omega(v_1, \dots, v_n)}$$

#### 4.2.6 Definition

Seien  $f \in \text{End}(V)$ , wobei  $\dim V = n$ , und  $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ . Dann heißt

$$\det f := \frac{f^* \omega}{\omega}$$

die Determinante von  $f$ , wobei

$$f^* \omega : V^n \rightarrow K, (v_1, \dots, v_n) \mapsto \omega(f(v_1), \dots, f(v_n)).$$

**Bemerkung** Offenbar ist  $f^*\omega \in \Lambda^n V^* = [\omega]$  wegen  $\dim \Lambda^n V^* = 1$ , d.h.

$$\exists! x \in K : f^*\omega = \omega \cdot x \quad (\omega \text{ ist Basis von } \Lambda^n V^*)$$

dieses  $x$  ist die Determinante von  $f$ , also  $\det f = x$ .

Alternativ: Die Abbildung

$$B \mapsto \frac{f^*\omega(B)}{\omega(B)} \in K$$

ist konstant  $\equiv x$ , unabhängig von der Basis  $B$ .

**Bemerkung** Da  $f^*(\omega x) = (f^*\omega)x$  für  $x \in K$ , liefert jedes  $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$  die gleiche Determinante  $\det f$ : die Determinante bzw. Volumenverzerrung ist unabhängig von der gewählten Volumenform  $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ , d.h. der „Referenzvolumenmessung“.

## 4.2.7 Determinantenmultiplikationssatz

Für  $f, g \in \text{End}(V)$  gilt

$$\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g.$$

**Beweis** Mit  $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$  berechnet man

$$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega) = g^*(\omega \cdot \det f) = (g^*\omega) \det f = \omega \det g \cdot \det f$$

# Index

- Äquiaffine Geometrie, 99
- Äquiaffine Transformation, 98
- Äquivalente LGS, 82
- Äquivalente Matrizen, 79
- Äquivalenzrelation, 44
  
- Abbildung, 5
- Affine Abbildung/Affinität, 59
- Affine Geometrie, 63
- Affine Hülle, 54
- Affine Hülle und Affinkombination, 56
- Affine und lineare (Un-)Abhängigkeit, 57
- Affiner Raum, 50
- Affiner Standardraum, 51
- Affiner Unterraum, 52
- Affines/baryzentrisches Bezugssystem, 58
- Affinkombination/Baryzentrum, 54
- Allgemeine Lage, 56
- Allgemeine lineare Gruppe, 64
- Austauschlemma, 24
  
- Basis, 19
- Basisergänzungssatz, 23
- Basislemma, 22
- Basissatz, 24
- Bild, Kern, Rang & Defekt, 31
- Blockmatrix, 92
  
- Charakteristik, 11
  
- Darstellungsmatrix einer Komposition, 74
- Definition, 42
  
- Determinante, 90
- Determinante eines Endomorphismus, 99
- Determinantenmultiplikationssatz, 100
- Dilatationsgruppe, 69
- Dimension, 25
- Dimension der Determinantenform, 95
- Dimension und Teilmengen, 25
- Dimensionen von komplementären UVR, 46
- Dimensionssatz, 37
- Direkte Summe, 39
- Dualraum, 28
  
- Eindeutigkeit der Punktdarstellung, 57
- Eindeutigkeit des neutralen Elements, 9
- Einheitsmatrix, 77
- Erweiterte Koeffizientenmatrix, 81
  
- Fortsetzungssatz, 27
- Fortsetzungssatz für affine Abbildungen, 66
- Fortsetzungssatz für Determinantenformen, 94
  
- Geometrie, 49
- Gruppe, 8
- Gruppenoperation, 8
  
- Homomorphiesatz für lineare Abbildungen, 47
- Homomorphismen als VR, 29
- Homomorphismen zwischen gleichdimensionalen VR, 34
- Homomorphismus, 26

Inverse, 6  
 Invertierbare Matrix, 78  
 Isomorphielemma, 35  
  
 Körper, 10  
 Komplementäre UVR, 38, 39  
 Komposition, 5  
 Kurzform der def. Gleichung einer Darst.-  
     Matrix, 76  
  
 Lösungsraum, 81  
 Leibniz-Formel, 89  
 Lineare Hülle und Linearkombinationen, 18  
 Lineares Gleichungssystem, 80  
 Linearform/Determinantenform, 86  
 Linearkombinationen und Homomorphismen,  
     27  
  
 Matrix, 73  
 Matrizen als VR, 74  
 Mittelpunkt, 67  
  
 Nebenklassen, 44  
  
 Parallele Geraden, 64  
 Parallelogramm/Flächeninhalt, 97  
 Parallelotop im affinen Raum, 96  
 Parallelprojektion, 65  
 Permutationsgruppe, 9  
 Produkt von VR, 43  
 Projektion, 41  
 Projektionen, 41  
  
 Rang einer Matrix, 79  
 Rangsatz, 32  
  
 Satz von Ceva, 70  
 Satz von Menelaos, 69  
 Scherung, 66  
 Schnitt von UVR, 16  
 Schwerpunktsatz, 67  
  
 Signum einer Permutation, 88  
 Spezielle Homomorphismen, 34  
 Standardbasis, 20  
 Standardvektorraum, 13  
 Streckung, 65  
 Summe von UVR, 36  
  
 Teilverhältnis, 59  
 Transponierte Matrix, 92  
 Transposition, 88  
  
 Untervektorraum, 14  
 Ursprung, 51  
  
 Vandermonde-Determinante, 93  
 Vektorraum, 12  
 Volumenverzerrung, 99  
  
 Zeilenstufenform, 83