Skript Lineare Algebra & Geometrie 1, Hertrich-Jeromin

Studierendenmitschrift

27. November 2015

Inhaltsverzeichnis

0 Grundlagen

Einleitung

Es existieren zwei Methoden zur präzisen Formulierung:

- Funktion einer Formulierung wird präzisiert durch:
  - Definition: Begriffsklärung
  - Satz (Lemma, Proposition, Korollar): Aussage über einen (mathematischen) Sachverhalt
  - Beweis: eine (logische) Argumentationskette, die erklärt, warum ein Satz/Lemma wahr ist
  - Bemerkung, Beispiel: zusätzliche Information/Illustration, die oft Eigenarbeit (Beweis) erfordert
- Formeln und (logische) Symbole werden verwendet:
  - $\forall$ – All-Quantor: „für alle“
  - $\exists(!)$ – Existenz-Quantor: „es existiert (genau) ein“
  - $\neg$ – logische Verneinung: $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist
  - $\wedge, \vee$ – logisches „und“ und „oder“
  - $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ – Implikation und Äquivalenz

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Abbildung 0.1: Wahrheitstafel

Beispiele:

- Implikation: Für $x, y \in \mathbb{R} : xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
- Für Aussagen A und B gilt: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$, Beweis durch Wahrheitstafel

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Abbildung 0.2: Beweis durch Wahrheitstafel

Bemerkung $\wedge$, $\vee$, und $\Leftrightarrow$ sind kommutativ (symmetisch), $\Rightarrow$ jedoch nicht, d.h.:

$$
\begin{gathered}
(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A) \\
(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A) \\
(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A) \\
(A \Rightarrow B) \not\Leftrightarrow (B \Rightarrow A)
\end{gathered}
$$

weil beispielsweise formal gilt: $x, y \in \mathbb{R} : x = 0 \Rightarrow xy = 0$, aber nicht $xy = 0 \Rightarrow x = 0$.

Bemerkung (Beweisformen der Implikation) Um eine Implikation $A \Rightarrow B$ zu zeigen, bedient man sich häufig auch folgender Äquivalenzen:

$$
(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \begin{cases} \neg B \Rightarrow \neg A & \text{(Indirekter Schluss)} \\ \neg(A \wedge \neg B) & \text{(Widerspruchsbeweis)} \end{cases}
$$

Beispiel Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$((xy = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)) \Leftrightarrow ((xy = 0 \wedge x \neq 0) \Rightarrow (y = 0))$$

bzw. allgemein:

$$(A \Rightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \Rightarrow C)$$

Bemerkung (Mengenlehre) Die Ähnlichkeit mit der Mengensymbolik ist nicht zufällig, z.B. Mengen X, Y:

$$(x \in X \cap Y) \Leftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y)$$
$$(x \in X \cup Y) \Leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y)$$
$$(X \subset Y) \Leftrightarrow \{\forall x : (x \in X \Rightarrow x \in Y)\}$$

Definition (Abbildung)

Eine Zuordnung $f : X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y heißt eine Abbildung, falls $\forall x \in X : \exists! y \in Y : y = f(x)$.

X heißt der Definitionsbereich der Abbildung und $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$ das Bild.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- injektiv, falls $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- surjektiv, falls $\forall y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)$
- bijektiv, falls $\forall y \in Y : \exists! x \in X : y = f(x)$

Beispiel Mit $X = Y = \mathbb{R}$ definiert

- die Relation $x^2 = y$ eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x) = x^2$
- die Relation $x = y^2$ keine Abbildung $f : X \to Y$, denn
  - für ein x gibt es zwei y-Werte
  - $x < 0$ ist nicht definiert

Beispiel Die Identität $id_X : X \to X, x \mapsto id_X(x) := x$ ist eine bijektive Abbildung.

Bemerkung Eine Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Definition (Komposition)

Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, so ist ihre Komposition/Verkettung die Abbildung $g \circ f : X \to Z, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Beispiel: Seien $X = Y = Z = \mathbb{R}$ und $f : X \to Y, x \mapsto f(x) := x^2$, $g : Y \to Z, y \mapsto g(x) := y^3 + y$, so ist die Verkettung $g \circ f : X \to Z, x \mapsto (g \circ f)(x) = (x^2)^3 + x^2 = x^6 + x^2$.

Lemma

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen. Dann gilt:

i) ist g Linksinverse von f, d.h. $g \circ f = id_X$, so ist f injektiv

ii) ist g Rechtsinverse von f, d.h. $f \circ g = id_Y$, so ist f surjektiv

iii) ist g Links- und Rechtsinverse von f, so heißt $g = f^{-1}$ Inverse von f

Beispiel $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto f(n) := n + 1$ hat Linksinverse

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto g(n) := \begin{cases} 15700, & \text{falls } n = 0 \\ n - 1, & \text{falls } n \neq 0 \end{cases}$$

Tatsächlich ist f injektiv, da

$$\forall n, n' \in \mathbb{N} : n + 1 = f(n) = f(n') = n' + 1 \Rightarrow n = n'$$

jedoch $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, daher kann keine Rechtsinverse existieren.

Beweis Zwei Aussagen sind zu beweisen:

i) Sei g Linksinverse von f. Dann gilt für $x, x' \in X$ mit
$f(x) = f(x') : x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$, also ist f injektiv.

ii) Sei g Rechtsinverse von f und $y \in Y$. Setze $x := g(y) \in X$, dann gilt $f(x) = f(g(y)) = y$.
Damit existiert zu jedem $y \in Y$ (mindestens) ein $x = g(y)$, sodass $y = f(x)$.

1 Lineare Räume und Abbildungen

1.1 Von Geometrie zu Algebra

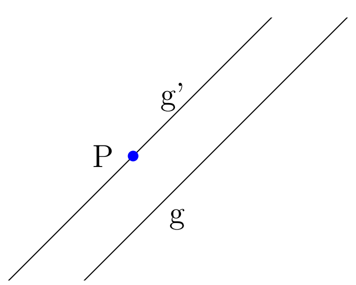
Euklids führte in den „Elementen“ (ca. 300 v. Chr.) das bis heute gültige Schema ein:

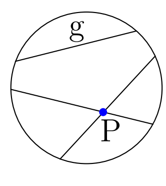
- Definition
- Axiom/Postulat
- Lehrsatz
- Beweis

1.1.1 Parallelenaxiom/-problem (Euklid, Formulierung nach Playfair)

Es existiert genau eine Parallele g' zum Punkt $P \notin g$ zur Geraden g.

Kann das Axiom aus den anderen Axiomen hergeleitet/bewiesen werden? Nein, denn es existieren nichteuklidische, hyperbolische Geometrien (18. Jh.) in denen es mehrere derartige Parallelen gibt. Als Beispiel lässt sich eine Geometrie anführen, die nicht auf einer Ebene sondern auf einem Kreis operiert. Dort lassen sich zu einer Sekante mehrere parallele Sekanten betrachten (also Sekanten, die die ursprüngliche nicht schneiden).





Was ist eine Geometrie? Eine Geometrie ist durch eine Menge X und eine auf X operierende Transformationsgruppe gegeben.

1.1.2 Definition (Gruppe)

Ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $(\circ : G \times G \to G) : (g, h) \mapsto g \circ h$ heißt Gruppe, falls:

(i) $\forall f, g, h \in G : f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (Assoziativität)

(ii) $\exists e \in G \forall g \in G : e \circ g = g$ (Existenz eines neutralen Elements)

(iii) $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g^{-1} \circ g = e$ (Existenz eines inversen Elements)

Die Gruppe heißt kommutativ oder abelsch, falls zusätzlich gilt:

$$\forall g, h \in G : g \circ h = h \circ g \text{ (Kommutativität)}$$

Bemerkung Das ist eine axiomatische Definition, d.h. der Begriff „Gruppe" wird durch (aus vielen (!) Beispielen abstrahierten) „Rechenregeln" definiert.

Beispiel Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden mit der Addition eine Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$. Die rationalen Zahlen ohne 0, $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, bilden mit der Multiplikation eine Gruppe $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$.

1.1.3 Definition (Gruppenoperation)

Sind $(G, \circ)$ eine Gruppe und X eine Menge, so heißt eine Abbildung

$$\cdot : G \times X \to X, (g, x) \mapsto g \cdot x$$

eine Gruppenoperation (von $(G, \circ)$ auf X), falls

(i) $\forall g, h \in G : \forall x \in X : g \cdot (h \cdot x) = (g \circ h) \cdot x$ (entspricht nicht der Assoziativität!)

(ii) $\forall x \in X : e \cdot x = x$ für das neutrale Element e der Gruppe $(G, \circ)$

$(G, \circ)$ heißt dann Transformationsgruppe von X.

Bemerkung Operiert G (kurz für $(G, \circ)$, aus dem Zusammenhang ersichtlich) auf X, so ist für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$g : X \to X, x \mapsto g \cdot x$$

eine bijektive Abbildung von X auf sich. Wegen der Axiome (i) und (ii) aus der Definition erhält man $g^{-1} : X \to X$ als Inverse der Abbildung.

1.1.4 Beispiel und Definition (Permutationsgruppe)

Die bijektiven Abbildungen einer Menge X auf sich,

$$G := \{g : X \to X \mid g \text{ bij}\},$$

bilden (mit der Komposition $\circ$) eine (Transformations-)Gruppe $(G, \circ)$ (die auf X operiert): die Permutationsgruppe oder symmetrische Gruppe S_X von X. Für $X = \{1, 2, ..., n\}$ schreibt man auch S_n statt $S_{\{1,...,n\}}$.

Bemerkung Im Gegensatz zu allgemeinen Abbildungen stimmen in (Permutations-)Gruppen Links- und Rechtsinverse stets überein.

1.1.5 Lemma (Eindeutigkeit des neutralen Elements)

Das neutrale Element einer Gruppe $(G, \circ)$ ist eindeutig und $\forall g \in G : g \circ e = g$. Weiters:

$$\forall g \in G \exists! g^{-1} \in G : g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$$

Beweis Sei $g \in G$ gegeben und (gemäß Gruppenaxiom (iii)):

- $h := g^{-1}$ (Linksinverse von g)
- $k := h^{-1}$ (Linksinverse von h)

Damit berechnen wir (multiplikative Schreibweise: $a \circ b = ab$):

$$hg = e = kh = k((hg)h) = k(h(gh)) = (kh)(gh) = gh$$
$$\text{und } ge = g(hg) = (gh)g = eg$$

Jedes (links-)neutrale Element e ist also auch rechtsneutral: $\forall g \in G : eg = ge = g$

und ist $e' \in G$ auch neutrales Element, dann: $e' = ee' = e'e = e$

Weiters ist jedes (Links-)Inverse auch rechtsinvers: $\forall g \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = e$

und sind $h, h' \in G$ Inverse von $g \in G$, so gilt: $h' = h'(gh) = (h'g)h = h$

d.h. Eindeutigkeit des Inversen.

1.1.6 Definition (Körper)

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen

$$
\begin{aligned}
+ :& K \times K \to K, (x, y) \mapsto x + y \\
\cdot :& K \times K \to K, (x, y) \mapsto xy
\end{aligned}
$$

heißt Körper, falls:

(i) $(K, +)$ ist abelsche Gruppe (mit neutralem Element 0 und inversem Element $-x$ von x)

(ii) $(K^\times, \cdot)$ ist abelsche Gruppe (mit neutralem Element 1 und inversem Element $\frac{1}{x} = x^{-1}$ von $x \in K^\times$)

(iii) die Distributivgesetze gelten:

$$
\forall x, y, z \in K : \begin{cases} x \cdot (y + z) = xy + xz \\ (x + y) \cdot z = xz + yz \end{cases}
$$

Bemerkung In einem Körper gilt stets:

$$
\begin{gathered}
0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \Rightarrow \\
0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \\
\Rightarrow 0 = 0 \cdot x + (-(0 \cdot x)) \Rightarrow 0 = 0 \cdot x.
\end{gathered}
$$

Insbesondere folgt damit: $\forall x, y \in K : xy = yx$ (nicht nur für $K^\times$ (Axiom)).

Beispiel Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden mit den üblichen Verknüpfungen Körper.

Bemerkung und Beispiel Aufgrund der Axiome (i) und (ii) enthält K mindestens 2 Elemente, also $\#K \geq 2$, nämlich:

- 0, das neutrale Elemente bezüglich $+$
- $1(\neq 0)$, das neutrale Elemente (in $K^{\times} = K \setminus \{0\}$) bezüglich $\cdot$

Es gibt auch einen Körper mit genau 2 Elementen $(\{0, 1\}, +, \cdot)$, wobei

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	1

Dieser Körper wird auch $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet.

1.1.7 Bemerkung und Definition (Charakteristik)

In $\mathbb{Z}_2 : 1 + 1 = 0$. Allgemeiner definiert man die Charakteristik eines Körpers $(K, +, \cdot)$ (mit neutralen Elementen 0 und 1 von $+$ bzw. $\cdot$) durch

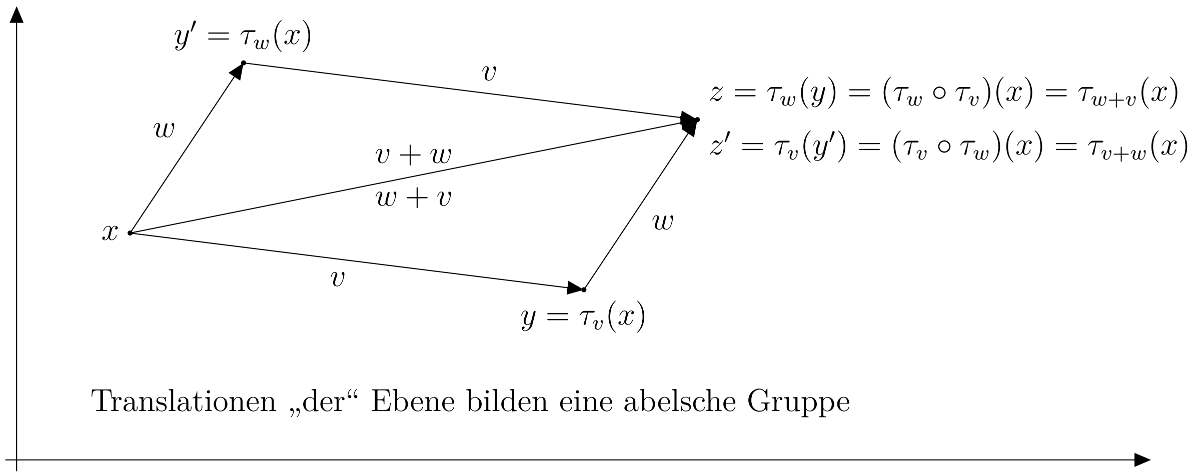
$$\mathrm{Char}(K) := \begin{cases} 0, \text{falls } \forall n \in \mathbb{N}^{\times} : \sum_{j=1}^{n} 1 \neq 0 \\ \min\{n \in \mathbb{N}^{\times} \mid \sum_{j=1}^{n} 1 = 1 + ... + 1 = 0\} \end{cases}$$

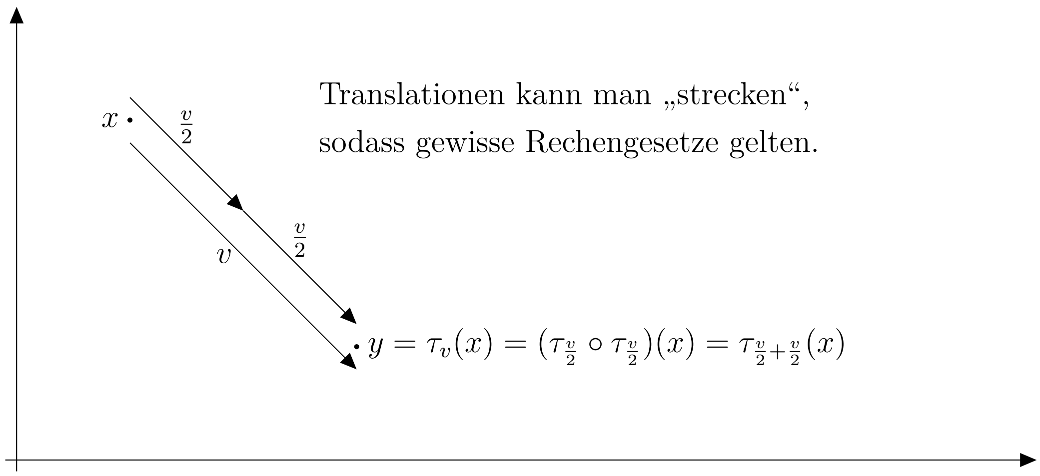
z.B. $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_2) = 2$, da

$$\begin{gathered} \{n \in \mathbb{N}^{\times} \mid 1 + ... + 1 = 0\} = \\ = \{n \in \mathbb{N}^{\times} \mid n = 0 \bmod 2\} = \\ = \{n \in \mathbb{N}^{\times} \mid n \text{ gerade}\} \\ \text{und damit: } \min\{n \in \mathbb{N}^{\times} \mid 1 + ... + 1 = 0\} = 2 \end{gathered}$$

Wir werden mitunter $\mathrm{Char}(K, +, \cdot) \neq 0$ oder (öfter) $\mathrm{Char}(K, +, \cdot) = 2$ ausschließen (müssen).

1.2 Translationen und Vektoren





1.2.1 Definition (Vektorraum)

Sei K ein Körper. Eine Menge V mit zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \to V : (v, u) \mapsto v + w,$$
$$\cdot : K \times V \to V : (x, v) \mapsto vx,$$

heißt Vektorraum über K (K-VR), falls gilt:

(i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(ii) $\forall v \in V : v \cdot 1 = v$ und
$\forall x, y \in K \; \forall v \in V : (vx)y = v(xy)$

(iii) $\forall x, y \in K\ \forall v \in V : v(x + y) = vx + vy$
$\forall x \in K\ \forall v, w \in V : (v + w)x = vx + wx$

Bemerkung Wir notieren die Skalarmultiplikation als Rechtsmultiplikation (Skalar steht rechts):

$$\cdot : K \times V \to V : (x, v) \mapsto vx$$

Beispiel Die Translationen eines affinen Raumes bilden einen Vektorraum (vgl. mit der Skizze oben): Diese Beispiel wird im nächsten Kapitel repräsentiert.

Beispiel Jeder Körper K ist ein K-VR (Vektorraum über sich selbst): das ist ein (trivialer) Spezialfall des folgenden...

1.2.2 Beispiel und Definition (Standardvektorraum)

Ist I eine Menge und K ein Körper, so bilden die K-wertigen Abbildungen

$$v : I \to K : i \mapsto v_i$$

einen Vektorraum mit der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation:

$$I \ni i \mapsto (v + w)_i := v_i + w_i \in K$$
$$i \mapsto (vx)_i := v_i x \in K$$

Dieser Vektorraum wird mit K^I bezeichnet und Standardvektorraum (über I und K) genannt. Im Falle $I = \{1, ..., n\}$ schreibt man auch $K^n := K^{\{1,...,n\}}$

1.2.3 Bemerkung und Definition (Familienschreibweise)

Anstelle der normalen Schreibweise

$$I \ni i \mapsto v(i) \in K$$

für die Auswertung einer Abbildung $v : I \to K$ um einen Punkt $i \in I$ haben wir die Indexschreibweise verwendet.

$$I \ni i \mapsto v_i \in K$$

Wir haben damit eine Abbildung $v : I \to K$ als Familie von $(v_i)_{i \in I}$ über der Indexmenge I aufgefasst – der Begriff Familie ist ein „alternativer" Begriff für Abbildungen.

Beispiel Sei i eine „Zahl" mit $i^2 = -1$ (i entspricht nicht dem Element der Indexmenge aus dem vorherigen Abschnitt). Die komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

bilden mit der Addition und Multiplikation einen Körper:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : ((x+y),(x'+y')) &\mapsto ((x+iy)+(x'+iy')) := (x+x') + i(y+y') \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : ((x+iy),(x'+iy')) &\mapsto (x+iy)\cdot(x'+iy') := (xx'-yy') + i(xy'+x'y) \end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen $\mathbb{R}$-VR mit

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

wie oben und der Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : (x',(x+iy)) \mapsto (x+iy)x' := xx' + iyx'$$

Diese Skalarmultiplikation ist also gerade die Einschränkung der komplexen Multiplikation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ wobei die Identifikation

$$\mathbb{R} \cong \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$$

verwendet wird.

1.2.4 Definition (Untervektorraum)

Eine Teilmenge $U \subset V$ eines K-VR V heißt Unter(vektor)raum (UVR), falls U mit der eingeschränkten Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} + |_{U \times U} &: U \times U \to V, (v,w) \mapsto v + w \\ \cdot |_{K \times U} &: K \times U \to V, (x,v) \mapsto vx \end{aligned}$$

selbst ein Vektorraum ist, d.h. wenn insbesondere

$$\forall v, w \in U : v + w \in U \text{ und}$$
$$\forall x \in K \forall v \in U : vx \in U.$$

Bemerkung Eine nicht-leere Teilmenge $U \subset V, U \neq \emptyset$, ist genau dann ein UVR, wenn die auf U eingeschränkten Operationen wohldefiniert sind, d.h. wenn U bzgl. $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist.

Dies kann zum Unterraumkriterium zusammengefasst werden:

$$U \subset V \text{ ist UVR } \Leftrightarrow \begin{cases} U \neq \emptyset \\ \forall v, w \in U \forall x \in K : vx + w \in U \end{cases}$$

Beispiel Sei $I = \{1, ..., n\}$. Für jedes (feste) $i \in I$ ist

$$U_i := \{v : I \to K \mid v_i = 0\}$$

ein UVR von K^n, denn

1. $v = 0 \in U_i$, also $U_i \neq \emptyset$
2. Seien $v, w \in U_i$, d.h. $v, w \in K^n$ mit $v_i = w_i = 0$, und $x \in K$; dann gilt $(vx + w)_i = v_i x + w_i = 0 \cdot x + 0 = 0$, also: $vx + w \in U_i$ und damit ist U_i UVR nach Unterraumkriterium.

Kein UVR von $K^n, n \geq 2$, ist jedoch die Menge

$$N := \{v : I \to K \mid v_1 \cdot v_2 = 0\},$$

denn

1. N ist zwar nicht-leer, $N \neq \emptyset$, aber
2. $^+ |_{N \times N}$: $N \times N \to N$ nicht wohldefiniert: seien $v, w \in N$, so dass

$$v_1 = 0, v_2 = 1 \text{ } (v_3 ... v_n \text{ irrelevant})$$
$$w_1 = 1, w_2 = 0 \text{ } (w_3 ... w_n \text{ irrelevant})$$

dann gilt:

$$\begin{aligned}(v+w)_1 &= v_1+w_1 = 0+1 = 1\\ (v+w)_2 &= v_2+w_2 = 1+0 = 1\end{aligned}$$

und damit

$$(v+w)_1(v+w)_2 = 1 \Rightarrow v+w \notin N.$$

Bemerkung und Beispiel In analoger Weise definiert man die Begriffe

- einer Untergruppe $H \subset G$ einer Gruppe $(G, \cdot)$, bzw.
- eines Unter- oder Teilkörpers $T \subset K$ eines Körpers $(K, +, \cdot)$

Z.B.: Jeder UVR $U \subset V$ eines K-VR V bildet (mit der Addition) eine Untergruppe der Gruppe $(V, +)$. Und: In gleicher Weise ist eine nicht-leere (!) Teilmenge ein/e Unterkörper/-gruppe, falls die eingeschränkten Operationen wohldefiniert sind.

Z.B.: ist $H \subset G$ eine Untergruppe, falls (Untergruppenkriterium):

1. $H \neq \emptyset$
2. $\forall g, h \in H : g \circ h^{-1} \in H$

Achtung: Inversenbildung muss im Kriterium explizit formuliert werden, sonst würde z.B.: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ als Teilmenge von $(\mathbb{Z}, +)$ als Gruppe ein Gegenbeispiel liefern.

Z.B.:

- die Translationen bilden eine Untergruppe der Bewegungsgruppe
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \cong \{x+iy \mid y=0\} \subset \mathbb{C}$ bilden Teilkörper von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

1.2.5 Lemma (Schnitt von UVR)

Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von UVR $U_i \subset V$ eines K-VR V, so ist ihr Schnitt

$$U := \bigcap_{i\in I} U_i = \{u \in V \mid \forall i \in I : u \in U_i\}$$

ein UVR von V. (Beweis in Aufgabe 17)

1.2.6 Definition (Lineare Hülle)

Die lineare Hülle $[S]$ einer Teilmenge $S \subset V$ eines K-VR V ist der Schnitt aller S enthaltenden UVR $U \subset V$:

$$[S] := \bigcap_{S \subset U \mathrm{UVR}} U$$

Die lineare Hülle einer Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ in einem K-VR V ist:

$$[(v_i)_{i \in I}] := [\{v_i \mid i \in I\}]$$

Bemerkung $[S]$ ist ein UVR (nach Lemma) – der „kleinste“ UVR, der S enthält, d.h. ist $U \subset V$ UVR mit $S \subset U$, so gilt $[S] \subset U$; da aber $[S] = \bigcap_{S \subset \tilde{U} \mathrm{UVR}} \tilde{U} \subset U$, da $S \subset U$, also U am Schnitt beteiligt ist.

Bemerkung $[\emptyset] = \{o\}$ und $[V] = V$.

Beispiel Ist $U \subset V$ UVR, so gilt $[U] = U$.

Beispiel $N = \{v : I \to K \mid v_1 v_2 = 0\} \subset K^n, I = \{1, ..., n\}, n \geq 2$, hat lineare Hülle $[N] = K^n$.

Beispiel Für $I = \{1, ..., n\}$ und $i \in I$ definiere $e_i : I \to K, j \mapsto e_i(j) := \delta_{ij}$, wobei

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

das Kroneckersymbol bezeichnet.

Dann ist die lineare Hülle der Familie $(e_i)_{i \in I}$

$$[(e_i)_{i \in I}] = K^n.$$

Nämlich: Da $[(e_i)_{i\in I}] \subset K^n$ ist, gilt für beliebige $x_1, ..., x_n \in K$

$$e_1x_1 + ... + e_nx_n, \in [(e_i)_{i\in I}]$$

denn nach Unterraumkriterium: $(e_1x_1 + ... + (e_{n-1}x_{n-1} + (e_nx_n + 0))...) \in [(e_i)_{i\in I}]$

da $[(e_i)_{i\in I}] \subset K^n$ UVR ist. Andererseits gilt für beliebiges $v \in K^n$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} e_i v(i) : I \to K,$$

denn

$$\forall j \in I : \left(\sum_{i=1}^{n} e_i v(i)\right)(j) = \sum_{i=1}^{n} e_i(j)v(i) = (\delta_{ij})v(j) = v(j)$$

damit ist gezeigt, dass die beiden Abbildungen übereinstimmen; da $v \in K^n$ beliebig war, folgt $K^n \subset [(e_i)_{i\in I}]$

1.2.7 Definition (Linearkombination)

Seien $(v_i)_{i\in I}$ und $(x_i)_{i\in I}$ Familien in einem K-VR bzw. dem Körper K, wobei

$$\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty \text{ ,also}$$
$$\{i \in I \mid x_i \neq 0\} = \{i_1, ..., i_n\} \text{ für ein geeignetes } n \in \mathbb{N}$$

Dann heißt die endliche Summe $\sum_{i\in I} v_i x_i := \sum_{j=1}^{n} v_{i_j} x_{i_j}$ eine Linearkombination.

Bemerkung Die Bedingung

$$\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty$$

garantiert, dass die Summe wohldefiniert ist $\to$ vgl. Reihen in der Analysis.

1.2.8 Lemma (Lineare Hülle und Linearkombinationen)

Ist $(v_i)_{i\in I}$ $I \neq \emptyset$, Familie in einem K-VR, so gilt:

$$[(v_i)_{i\in I}] = \left\{\sum_{i\in I} v_i x_i | x : I \to K : \#\{i \in I | x_i \neq 0\} < \infty\right\},$$

d.h. die lineare Hülle der Familie ist die Menge aller Linearkombinationen der Familie.

Beweis Wir zeigen (wie üblich) zwei Inklusionen:

$\supseteq$: z.z.: jede Linearkombination liegt in der Linearen Hülle. Sei also $(x_i)_{i\in I}$ eine geeignete Familie in K, dann gilt:

$$\sum_{i\in I} v_i x_i = v_{i_1}x_{i_1} + ... + (v_{i_n}x_{i_n} + 0)$$

(i) für $(v_{i_n}x_{i_n} + 0) \in [...]$ nach UR-Kriterium

(ii) für $v_{i_1}x_{i_1} + ... + (v_{i_n}x_{i_n} + 0) \in [...]$ nach UR-Kriterium (nach n-Schritten)

$\subseteq$: Z.z.: Lineare Hülle der Familie ist Teilmenge von U. Setze die Menge der Linearkombinationen einer Familie U $:= \{\sum_{i\in I} v_i x_i | x : I \to K$ mit $\#\{i \in I | x_i \neq 0\} < \infty\}$, offenbar gilt:

$$\forall i \in I : v_i \in U$$

Wir zeigen, dass U ein Untervektorraum ist. Das heißt:

$$\begin{aligned} + \,|_{U\times U}&: U \times U \to U \subset V \\ \cdot \,|_{K\times U}&: K \times U \to U \subset V, \end{aligned}$$

also die Addition und Skalarmultiplikation vererben sich auf U.

Zur Skalarmultiplikation Sind $(x_i)_{i\in I}$ mit $\#\{i \in I | x_i \neq 0\} < \infty$ eine Familie in K und $x \in K$, so gilt für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$

$$\{i \in I | x_i \neq 0\} = \{i_1, ..., i_n\}$$

und damit

$$\{i \in I | x_i x \neq 0\} = \begin{cases} \{i_1, ..., i_n\}, & \text{falls } x \neq 0 \\ \emptyset, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} (\sum_{i\in I} v_i x_i)x &= (\sum_{j=1}^{n} v_{i_j} x_{i_j})x \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} v_{i_j}(x_{i_j}x) &= \sum_{i\in I} v_i(x_i x) \in U_i, \end{aligned}$$

da $\sum_{i \in I} v_i(x_i x)$ Linearkombination (mit der Familie $(x_i x)_{i \in I}$ in K) ist.

Zur Addition Ähnlich (Vereinigung zweier Mengen, ist endlich), siehe Aufgabe.

Bemerkung Um triviale Diskussionen zu vermeiden, setzt man $\sum_{i \in \emptyset} ? := 0$.

1.3 Basis und Dimensionen

1.3.1 Definition (Basis)

Eine Teilmenge $S \subset V$ oder eine Familie $(v_i | i \in I)$ in V heißt:

- Erzeugendensystem von V, falls $[S] = V$ bzw. $[(v_i)_{i \in I}] = V$
- linear unabhängig, falls $\forall v \in S : v \notin [S \setminus \{v\}]$ bzw. $\forall i \in I : v_i \notin [(v_j)_{j \in I \setminus \{i\}}]$

und sonst linear abhängig. Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Bemerkung Man kann jede (Teil-) Menge $S \subset V$ als Familie in V auffassen mit

$$v : S \to V : v \mapsto id_S(v) = v.$$

Andererseits gilt für eine Familie $(v_i)_{i \in I}$:

$$(v_i)_{i \in I} \text{ linear unabhängig } \Rightarrow \{v_i | i \in I\} \text{ linear unabhängig.}$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Eine Familie (in V) enthält mehr Information als eine Teilmenge von V.

1.3.2 Beispiel und Definition (Standardbasis)

Für $V = K^n$ ist $(e_1, ..., e_n)$,

$$e_i : \{1, ..., n\} =: I \to K : j \mapsto e_i(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Basis – die Standardbasis des (Standard-)Vektorraumes K^n.

Beweis Z.z.: $(e_i)_{i \in I}$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Bekannt ist: $[(e_i)_{i \in I}] = K^n$. Andererseits gilt für jedes $i \in I$ und jede Familie $(x_j | j \in I)$ in K

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in I \setminus \{i\}} e_j x_j \right)(i) &= \sum_{j \in I \setminus \{i\}} e_j(i) x_j = 0 \neq 1 = e_i(i) \\ &\Rightarrow \sum_{j \in I \setminus \{i\}} e_j x_j \neq e_i, \end{aligned}$$

also gilt:

$$\forall i \in I : e_i \notin [(e_j)_{j \in I \setminus \{i\}}] = \left\{ \sum_{j = I \setminus \{i\}} e_j x_j \mid (x_j)_{j \in I} \right\} \text{ mit } \#\{j \in I | x_j \neq 0\} < \infty$$

1.3.3 Lemma

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig gdw. für jede Linearkombination

$$0 = \sum_{i \in I} v_i x_i \Rightarrow \forall i \in I : x_i = 0.$$

Beweis Wir zeigen zwei Richtungen der Äquivalenz der Negationen:

$$(v_i)_{i \in I} \text{ linear abhängig } \Leftrightarrow \exists (x_i)_{i \in I} \neq (0)_{i \in I} : \sum_{i \in I} v_i x_i = 0.$$

$\Leftarrow$: Wir nehmen an, es gäbe eine nicht-triviale Linearkombination der Null,

$$0 = \sum_{i \in I} v_i x_i, \text{ wobei } \exists j \in I : x_j \neq 0.$$

Für $(y_i)_{i \in I}, y_i := -\frac{x_i}{x_j}$ ist dann

$$0 = v_j x_j + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} v_i x_i \Rightarrow v_j = -\left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} v_i x_i \right) x_j^{-1} = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} v_i y_i \in [(v_i)_{i \in I \setminus \{j\}}],$$

insbesondere ist also $(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig.

$\Rightarrow$: siehe Aufgabe.

1.3.4 Korollar

Ist $(v_i)_{i \in I}$ Basis von V, so ist jeder Vektor $v \in V$ eindeutig in den v_i darstellbar:

$$\forall v \in V \exists! (x_i)_{i \in I} : v = \sum_{i \in I} v_i x_i$$

Beweis Sei $v \in V$ beliebig, dann gilt:

$$V = [(v_i)_{i \in I}] \Rightarrow \exists (x_i)_{i \in I} : v = \sum_{i \in I} v_i x_i$$

liefern $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$

$$v = \sum_{i \in I} v_i x_i = \sum_{i \in I} v_i y_i \Rightarrow 0 = \sum_{i \in I} v_i (x_i - y_i) \begin{array}{l} \Rightarrow \forall i \in I : x_i = y_i \\ \Rightarrow (x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} \end{array}$$

Damit ist die Basisdarstellung $v = \sum_{i \in I} v_i x_i$ von v auch eindeutig.

1.3.5 Basislemma

Sei $S \subset V$ lin. unabh. und $E \subset V$ ein Erzeugendensystem mit $S \subset E$. Dann existiert eine Basis B von V mit $S \subset B \subset E$.

Beweis Wir gehen für den Beweis davon aus, dass $\#E < \infty$. Betrachte alle Teilmengen $X \subset V$ mit $S \subset X \subset E$ und X lin. unabh. Sei B eine solche Menge, die maximal ist, d.h.

$$\forall X \subset E : ((B \subset X \wedge X \text{ lin. unabh.}) \Rightarrow X = B)$$

Nach Konstruktion ist $B = \{b_1, ..., b_n\}$ lin. unabh. Zu zeigen: $V = [B]$.
Ist $B = E$, so folgt $[B] = [E] = V$.
Ist $B \neq E$, so ist $B \cup \{v\}$ für (jedes) $v \in E \setminus B$ lin. abh., da B maximal (Existenz einer maximalen Menge ist problematisch!) und lin. unabh. ist; also existiert eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors.

$$\exists x, x_1, ..., x_n \in K : o = vx + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

Wäre $x = 0$, so würde folgen $x_1 = ... = x_n = 0$, da B lin. unabh. ist. Also ist $x \neq 0$ und

$$v = -\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{x_i}{x} \in [B].$$

Da dies für beliebiges $v \in E \setminus B$ gilt, folgt

$$E \subset [B] \Rightarrow V = [E] \subset [[B]] = [B],$$

d.h., B ist Erzeugendensystem und damit eine Basis mit $S \subset B \subset E$.

Bemerkung Ist $\#E = \infty$, so kann man einen analogen Beweis führen, falls man an die Existenz einer maximalen Menge glaubt: Dies garantiert das Zornsche Lemma bzw. Auswahlaxiom. Wir werden das Lemma auch im Falle $\#E = \infty$ benutzen!

Beispiel Für $V = K^3 = K^I$ mit $I = \{1, 2, 3\}$ betrachte die Standardbasisvektoren

$$e_i : I \to K, j \mapsto e_i(j) = \delta_{ij}, \text{ und}$$
$$f_i : I \to K, j \mapsto f_i(j) := 1 - \delta_{ij};$$

dann sind $S := \{e_1, f_1\}$ und $E := \{e_i, f_i \mid i \in I\}$ lin. unabh. bzw. Erzeugendensystem von K^3. Ergänzung von S durch einen Vektor e_i oder $f_i, i = 2, 3$ liefert eine Basis B mit $S \subset B \subset E$.

Zum Beispiel: $B = \{e_1, f_1, f_2\}$ eine Basis, da sich jede Funktion $v \in K^3$ aus den Funktionen e_1, f_1 und f_2 linear kombinieren lässt.

$$v = e_1 x_1 + f_1 y_1 + f_2 y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v(2) = y_1 \\ v(3) - v(2) = y_1 + y_2 - y_1 = y_2 \\ v(1) + v(2) - v(3) = x_1 + y_2 - y_2 = x_1 \end{cases}$$

Dass B lin. unabh. folgt dann; Wäre B lin. abh., so würde folgen $f_2 \in [\{e_1, f_1\}] \Rightarrow [B] \subset [\{e_1, f_1\}] \neq K^3$, was nicht der Fall ist.

1.3.6 Basisergänzungssatz

Jede lin. unabh. Menge $S \subset V$ kann zu einer Basis B von V ergänzt werden: Es existiert eine Basis B von V mit $S \subset B$.

Beweis Sei $E \subset V$ ein Erzeugendensystem von V (z.B. $E = V$). Dann ist $S \cup E$ ein Erzeugendensystem von V mit $S \subset S \cup E$, das Basislemma liefert dann die gesuchte Basis.

1.3.7 Bemerkung

Strikt genommen haben wir den Basisergänzungssatz (BES) nur unter der Annahme bewiesen, dass V endlich erzeugt sei, d.h. V ein endliches Erz. Syst. E besitzt, $V = [E]$ und $\#E < \infty$.

Bemerkung Wir haben für den BES die (in diesem Falle einfachere) Mengenschreibweise (anstelle der Familienschreibweise) verwendet.

Bemerkung Ähnlich kann man einen Verkürzungssatz beweisen: Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums V kann zu einer Basis verkürzt werden.

1.3.8 Austauschlemma

Seien $B, B' \subset V$ Basen von V. Dann gilt:

$$\forall b \in B \exists b' \in B' : (B \setminus \{b\}) \cup \{b'\} \text{ ist Basis}$$

Beweis Sei $b \in B$ beliebig gewählt und $S := B \setminus \{b\}$. Da B lin. unabh. ist, gilt $b \notin [S] \Rightarrow \emptyset \neq V \setminus [S] = [B'] \setminus [S] \Rightarrow B' \not\subset [S]$, d.h. es existiert $b' \in B'$ mit $b' \notin [S]$. Wir zeigen, dass $B'' := S \cup \{b'\} = (B \setminus \{b\}) \cup \{b'\}$ Basis ist. B'' ist Erzeugendensystem: Da $b' \in [B]$ existiert $(x_j)_{j \in B}$ mit

$$b' = \sum_{j \in B} j x_j$$

mit $x_b \neq 0$, da $b' \notin [S]$.

Damit ist $b = (b' - \sum_{j \in S} j x_j) \frac{1}{x_b} \in [B''] \Rightarrow V = [B] \subset [B'' \cup \{b\}] \subset [B'']$.

B'' ist linear unabhängig. B'' ist Erz. Syst. und $S \subset B' = S \cup \{b'\}$ lin unabh., kann also (nach Basislemma) ergänzt werden zu einer Basis $\tilde{B}$ mit $S \subset \tilde{B} \subset B''$. Da $[S] \neq V$ gilt $\tilde{B} \neq S$ und damit $\tilde{B} = B''$ Basis, insbesondere linear unabhängig.

Bemerkung Hier haben wir die Familienschreibweise (mit B bzw. S als Indexmenge) verwendet, um Linearkombinationen darzustellen.

1.3.9 Basissatz

Sei V ein endlich erzeugter K-VR, $V = [E]$ mit $\#E < \infty$. Dann gilt:

(i) V besitzt eine endliche Basis B mit $n := \#B \leq \#E$.

(ii) Ist $B' \subset V$ eine Basis von V, so ist $\#B' = \#B = n$.

Beweis

(i) Dies folgt direkt aus dem Basislemma (mit $S = \emptyset$).

(ii) Seien B, B' Basen von V, $B = (b_1, ..., b_n)$.
Annahme: $\#B' < n, B' = (b'_1, ..., b'_k)$ mit $k < n$. Wiederholte Anwendung des Austauschlemmas auf die Basen B und B' liefert nach (spätestens) $k+1 \leq n$ Schritten einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der neuen Basis B'', da Vektoren b'_i doppelt vorkommen müssen.
Annahme: $\#B' > n, B' = (b'_1, ..., b'_n, b'_{n+1})$: Das gleiche Argument mit vertauschten Rollen der Basen führt wieder zum Widerspruch.

1.3.10 Definition (Dimension)

Sei V ein K-VR, die Dimension von V ist dann:

- $\dim V := \#B$, falls V endlich erzeugt und B eine Basis von V ist;
- $\dim V := \infty$, falls V nicht endlich erzeugt ist.

Bemerkung Nach dem Basissatz hängt $\dim V = \#B$ (falls V endlich erz.) nicht von der Basis B ab, d.h. $\dim V$ ist wohldefiniert.

Beispiel $\dim K^n = \#\{e_1, ..., e_n\} = n$ (Standardbasis).

1.3.11 Korollar (Dimension und Teilmengen)

Sei V ein K-VR mit $\dim V =: n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) Ist $S \subset V$ linear unabhängig, so ist $\#S \leq n$ und $\#S = n$ genau dann, wenn S Basis ist.

(ii) Ist $E \subset V$ Erzeugendensystem, so ist $\#E \geq n$, bzw. $\#E = n$ genau dann, wenn E eine Basis ist.

Bemerkung Insbesondere: Ist $U \subset V$ UVR mit $\dim U = \dim V < \infty$, so gilt $U = V$.

Beweis

(i) Ist S linear unabhängig, so existiert (nach BES) eine Basis B von V mit

$$S \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} \#S \leq \#B \\ \#S = \#B \Leftrightarrow S = B \end{cases}$$

(ii) Analog (mit Basislemma), siehe Aufgabe 23.

1.4 Homomorphismen

1.4.1 Definition

Sind V und W K-VR, so heißt eine Abbildung $f : V \to W$ (K-)linear oder ein (Vektorraum-)Homomorphismus $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$, falls gilt:

(i) $\forall v, w \in V : f(v + w) = f(v) + f(w)$;

(ii) $\forall v \in V \; \forall x \in K : f(vx) = f(v)x$

das heißt, f ist verträglich mit den Vektorraumoperationen in V und W.

Bemerkung Damit die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation sinnvoll ist, müssen V und W Vektorräume über demselben Körper K sein.

Bemerkung Für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ gilt stets $f(0_V) = f(0_V 0_K) = f(0_V)0_K = 0_W$.

Ebenso erklärt man zum Beispiel Gruppenhomomorphismen und Körperhomomorphismen. Sind etwa $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen, so ist eine Abbildung $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, falls $\forall g, h \in G : f(g \circ h) = f(g) * f(h)$

Beispiel Ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ein Vektorraumhomomorphismus so ist f nach (i) Gruppenhomomorphismus von $(V, +)$ in $(W, +)$.

Beispiel Sei V ein K-VR und $y \in K$ fest, dann ist die Streckung um $y : \eta_y : V \to V : v \mapsto \eta_y(v) := vy$ ein Homomorphismus von V in sich, $\eta_y \in \operatorname{Hom}(V, V)$. Eine Streckung nennt man auch Homothetie.

Beispiel Sei $V = \mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, dann ist die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto x - iy =: \bar{z} \in \mathbb{C}$ kein Homomorphismus von $\mathbb{C}$ in sich, wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-VR auffasst. Hingegen ist sie ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$ in sich, wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR auffasst.

1.4.2 Lemma (Linearkombinationen und Homomorphismen)

$f : V \to W$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn für jede beliebige Linearkombination gilt: $f(\sum_{i\in I} v_i x_i) = \sum_{i\in I} f(v_i) x_i$

Beweis Eine Richtung ist trivial, die andere mit vollständiger Induktion zu zeigen.

1.4.3 Fortsetzungssatz

Seien V und W K-VR, $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(c_i)_{i\in I}$ eine Familie in W. Dann gilt: $\exists! f \in \operatorname{Hom}(V, W), \forall i \in I : f(b_i) = c_i$.

Bemerkung Anders ausgedrückt: ist $B \subset V$ eine Basis von V, so kann jede Abbildung $f : B \to C \subset W$ eindeutig zu einem Homomorphismus $f : V \to W$ fortgesetzt werden.

Beweis Wir beweisen die Existenz und die Eindeutigkeit getrennt.

1. Eindeutigkeit: Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ so, dass $\forall i \in I : f(b_i) = c_i$. Sei $v \in V$ beliebig. Da B Erzeugendensystem ist, lässt sich v als Linearkombination in $(b_i)_{i\in I}$ mit geeigneten Koeffizienten $(x_i)_{i\in I}$ in K darstellen.

$$v = \sum_{i\in I} b_i x_i \Rightarrow f(v) = \sum_{i\in I} f(b_i) x_i = \sum_{i\in I} c_i x_i$$

   Damit ist $f(v)$ eindeutig durch v und die $c_i = f(b_i)x_i$ bestimmt.

2. Existenz: Da $(b_i)_{i\in I}$ auch linear unabhängig ist, ist jedes $v \in V$ eindeutig als Linearkombination in $(b_i)_{i\in I}$ dargestellt, damit ist durch $f : V \to W : v = \sum_{i\in I} b_i x_i \mapsto f(v) := \sum_{i\in I} c_i v_i$ eine Abbildung wohldefiniert.

   Weiters ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ wegen

$$f(v + w) = \sum_{i\in I} c_i(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} c_i x_i + \sum_{i\in I} c_i y_i = f(v) + f(w) \text{ für alle } \begin{cases} v = \sum_{i\in I} b_i x_i \in V \\ w = \sum_{i\in I} b_i y_i \in V \end{cases}$$

und

$$f(vx) = \sum_{i\in I} c_i(x_i x) \Rightarrow \sum_{i\in I}(c_i x_i)x = (\sum_{i\in I} c_i x_i)x = f(v)x \text{ für } x \in K \text{ und } v = \sum_{i\in I} b_i x_i \in V.$$

Damit ist die Linearität von f gezeigt.

1.4.4 Beispiel und Definition (Dualraum)

Der Dualraum $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ eines K-VRs V ist ein K-VR ($\subset K^V$). Ist $\dim V =: n < \infty$ so ist $\dim V^* = n$. Ist $B = (b_i, ..., b_n)$ eine Basis von $V(\dim V < \infty)$, so definieren wir für $i = \{1, ..., n\}$ die Linearform (nach Fortsetzungssatz):

$$b_i^* \in V^* : V \to K, \forall j \in \{1, ..., n\} : b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$$

die zu B duale Basis B^* von V^*.

Beweis V^* ist K-VR. Wir zeigen $V^* \subset K^V$ ist UVR.

- $0 : V \to K$ ist linear, d.h. $0 \in V^* \Rightarrow V^* \neq \emptyset$
- Seien $f, g \in V^*$ und $x \in K$; dann gilt

$$\begin{aligned}\forall v, w \in V : (fx + g)(v + w) &= f(v + w)x + g(v + w)\\ &= (f(v) + f(w))x + (g(v) + g(w))\\ &= (f(v)x + g(v)) + (f(w)x + g(w))\\ &= (fx + g)(v) + (fx + g)(w)\end{aligned}$$

genauso:

$$\begin{aligned}\forall v \in V, y \in K : (fx + g)(vy) &= f(vy)x + g(vy)\\ &= f(v)yx + g(v)y\\ &= (f(v)x + g)y = ((fx + g)y)(v)\end{aligned}$$

Damit gilt: $fx + g \in \mathrm{Hom}(V, K) = V^*$

Da $f, g \in V^*$ und $x \in K$ beliebig waren, zeigt das UR-Kriterium, dass $V^* \subset K^V$ ein UVR ist und damit selbst K-VR ist.

Beweis B^* ist Basis. Wir zeigen B^* ist linear unabhängig und Erzeugendensystem.

- B^* ist linear unabhängig: Seien $x_1, ..., x_n$ so, dass

$$0 = \sum_{i=1}^{n} b_i^* x_i \Rightarrow \forall j = 1, ..., n : 0 = (\sum_{i=1}^{n} b_i^* x_i)(b_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(b_j) x_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} x_i = x_j.$$

  Also $x_1 = ... = x_n = 0$ und damit ist B^* linear unabhängig.

- B^* ist Erzeugendensystem: Sei $f \in V^*$ beliebig, dann gilt:

$$\forall j = 1, ..., n : f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(b_j) f(b_i) = (\sum_{i=1}^{n} b_i^* f(b_i)) b_j \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{n} b_i^* f(b_i) \in [B^*].$$

  Da $f \in V^*$ beliebig war, ist also $V^* = [B^*]$.

Damit ist $B^* = \{b_1^*, ..., b_n^*\}$ eine Basis von V^* – insbesondere also $\dim V^* = n = \dim V = \dim K \cdot \dim V$.

Bemerkung Ist $\dim V = \infty$ und $B = (b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, so liefert $B^* = (b_i^*)_{i \in I}$ mit $\forall j \in I : b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ eine lineare unabhängige Familie. Diese ist jedoch kein Erzeugendensystem von V^* : $f \in \mathrm{Hom}(V, K) = V^*$ mit $\forall j \in I : f(b_j) = 1$ lässt sich nicht in B^* linear kombinieren. Wäre $f = \sum_{i \in I} b_i^* x_i$, so gälte $\forall j \in I : x_j = \sum_{i \in I} b_i^*(b_j) x_j = \sum_{i \in I} \delta_{ij} x_j = f(b_j) = 1$.

Das heißt, $(x_i)_{i \in I}$ wäre eine Familie in K mit $\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} = \infty$.

1.4.5 Satz (Homomorphismen als VR)

$\mathrm{Hom}(V, W)$ ist ein VR. Die Dimension der Homomorphismen $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = m \cdot n$, falls $m := \dim W < \infty, n := \dim V < \infty$.

Beweis Addition und Skalarmultiplikation in $\mathrm{Hom}(V, W)$ werde (wie für K-wertige Abbildungen oder in V^*) punktweise definiert:

- für $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ setzt man $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$ für alle $v \in V$,
- für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $x \in K$ setzt man $(fx)(v) := f(v)x$ für alle $v \in V$.

Die so definierten Abbildungen $f+g, fx : V \to W$ sind linear, $f+g, fx \in \operatorname{Hom}(V,W)$, aufgrund der VR-Eigenschaften von V.

Damit zeigt man: $\operatorname{Hom}(V,W)$ ist K-VR (siehe Aufgabe 27).

Seien nun $\dim V = n < \infty$ und $\dim W = m < \infty$.

Wir wählen (nach BES) Basen $B = (b_1, ..., b_n)$ von V und $C = (c_1, ..., c_m)$ von W und definieren

$$f_{ij} \in \operatorname{Hom}(V,W) mit f_{ij} := c_i \cdot b_j^* \text{ für } \begin{cases} i \in I := \{1,...,m\} \\ j \in J := \{1,...,n\} \end{cases}$$

Behauptung: $F = (f_{ij})_{I,J}$ ist Basis von $\operatorname{Hom}(V,W)$.

Da $(c_i)_{i\in I}$ linear unabhängig in W ist, gilt für jede Famlilie $(x_{ij})_{I,J}$ in K:

$$0 = \sum_{I,J} f_{ij}x_{ij} \Rightarrow \forall k \in J : 0 = \sum (f_{ij}x_{ij})(b_k)$$
$$= \sum c_i b_j^*(b_k)x_{ij} = \sum_{i\in I} c_i x_{ik} \Rightarrow \forall k \in J \forall i \in I : x_{ik} = 0$$

Also ist F linear unabhängig.

Da $(c_i)_{i\in I}$ Erzeugendensystem von W ist, existiert zu jedem (fest gegebenen) $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ eine Familie $(x_{ij})_{IJ}$ in K, sodass

$$\forall k \in J : f(b_k) = \sum_{i\in I} c_i x_{ik} \text{ (da } (c_i)_{i\in I} \text{ Erzeugendensystem)}$$
$$= \sum_{I,J} c_i b_j^*(b_k) x_{ij} = \left(\sum_{IJ} f_{ij}x_{ij}\right)(b_k)$$
$$\text{also (Fortsetzungssatz): } f = \sum_{I,J} f_{ij}x_{ij} \in [F].$$

Da $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ beliebig war, gilt also $\operatorname{Hom}(V,W) = [F]$. Damit ist F Basis von $\operatorname{Hom}(V,W)$ und $\dim \operatorname{Hom}(V,W) = \#F = m \cdot n$.

1.4.6 Lemma und Definition (Bild, Kern, Rang & Defekt)

Sei $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$. Dann sind Bild und Kern von f:

$$f(V) = \{f(v) \in W \mid v \in V\} \subset W \text{ bzw. } \ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$$

UVR von W bzw. V. Ihre Dimensionen heißen Rang und Defekt von f:

$$\operatorname{rg} f := \dim f(V) \text{ bzw. } \operatorname{def} f := \dim \ker f$$

Bemerkung Da $f(0) = 0$ für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ gilt $\{o_V\} \in \ker f$ und $\{o_W\} \in f(V)$.

Beweis Zu zeigen: Das Bild $f(V) \subset W$ und $\ker f \subset V$ sind UVR. Nach Bemerkung gilt $f(V) \neq \emptyset$ und $\ker f \neq \emptyset$ – wir verwenden dann das UR-Kriterium.

Das Bild $f(V)$ ist UVR: $f(V) \neq \emptyset$. Es bleibt zu zeigen:

$$\forall w_1, w_2 \in f(V), \forall x \in K : w_1 x + w_2 \in f(V).$$

Seien also $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2) \in f(V)$ und $x \in K$; dann gilt:

$$w_1 x + w_2 = f(v_1)x + f(v_2) = f(v_1 x + v_2) \in f(V)$$

Der Kern $\ker f$ ist UVR: $\ker f \neq \emptyset$; seien $v_1, v_2 \in \ker f$ und $x \in K$, dann gilt:

$$f(v_1 x + v_2) = f(v_1)x + f(v_2) = 0 \cdot x + 0 = 0 \Rightarrow v_1 x + v_2 \in \ker f$$

Bemerkung Allgemeiner kann man für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ zeigen:

1. Ist $U \subset V$ UVR, so ist $f(U) \subset W$ UVR.
2. Ist $U \subset W$ UVR, so ist $f^{-1}(U) = \{v \in V \mid f(v) \in U\} \subset V$ ein UVR.

Bemerkung Die Funktion $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{o\}$. Nämlich:

- ist f injektiv und $v \in \ker f$, so gilt $f(v) = 0 = f(0) \Rightarrow v = 0$
- ist $\ker f = \{o\}$ und sind $v, w \in V$ mit $f(v) = f(w)$, so folgt
  $0 = f(v) - f(w) = f(v - w) \Rightarrow v - w \in \ker f = \{o\} \Rightarrow v = w$

Bemerkung Eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist genau dann

(i) injektiv, wenn $\forall S \subset V : S$ lin. unabh. $\Rightarrow f(S)$ lin. unabh.

(ii) surjektiv, wenn $\forall E \subset V : E$ Erz. Syst. $\Rightarrow f(E)$ Erz. Syst.

(iii) bijektiv, wenn $\forall B \subset V : B$ Basis $\Rightarrow f(B)$ Basis

Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ bijektiv, so ist $f^{-1} \in \mathrm{Hom}(W, V)$.

1.4.7 Rangsatz

Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ist $\dim V = n < \infty$, so gilt $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{def}\, f = \dim V$. Ist $\dim V = \infty$, so gilt $\mathrm{rg}\, f = \infty$ oder $\mathrm{def}\, f = \infty$.

Beweis Wir nehmen an, dass $\mathrm{def}\, f = k \neq \infty$. Sei $(b_1, ..., b_k)$ eine Basis von $\ker f$; nach BES ergänzen wir zu einer Basis $(b_j)_{j \in J}$ von V (bemerke: $\{1, ..., k\} \subset J$). Wir sehen $I := J \backslash \{1, ..., k\}$ und $\forall i \in I : c_i := f(b_i)$.

Behauptung: $(c_i)_{c \in I}$ ist eine Basis von $f(V)$.

Lineare Unabhängigkeit gilt für eine Linearkombination in $(c_i)_{i \in I}$:

$$0 = \sum_{i \in I} c_i x_i = \sum_{i \in I} f(b_i) x_i = f(\sum_{i \in I} b_i x_i)$$

so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} b_i x_i &\in \ker f \\ \Rightarrow \exists y_1, ..., y_n \in K : \sum_{i \in I} b_i x_i &= \sum_{j=1}^{k} b_j y_j \\ \Rightarrow 0 &= \sum_{i \in I} b_i x_i - \sum_{j=1}^{k} b_j y_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall j = 1, ..., k : y_j = 0 \\ \forall i \in I : x_i = 0, \end{cases} \quad \text{da } (b_j)_{j \in J} \text{ linear unabhängig ist.}$$

Insbesondere gilt also $\forall i \in I : x_i = 0$ damit folgt die lineare Unabhängigkeit nach Lemma.

Erzeugendensystem Sei $w \in f(V)$, also existiert $v \in V$ mit $w = f(v)$. Da $(b_j)_{j\in J}$ Basis von V ist, existiert eine Familie $(x_j)_{j\in J}$ in K so, dass

$$v = \sum_{j\in J} b_j x_j$$

Dann gilt

$$w = f(v) = f(\sum_{j\in J} b_j x_j) = \sum_{j\in J} f(b_j x_j)$$
$$J = I \cup \{1, ..., k\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} f(b_j)^{=0} x_j + \sum_{i\in I} f(b_i)^{=c_i} x_i = \sum_{i\in I} c_i x_i \in [(c_i)_{i\in I}].$$

Da $(c_i)_{i\in I}$ also Basis von $f(V)$ ist folgt:

1. Fall $(\dim V = n < \infty)$ dann ist $\#J = n$ und $\#I = \#J - k$, also $\operatorname{rg} f = n - k = \dim V - \operatorname{def} f$.

2. Fall $(\dim V = \infty)$, dann ist $\#J = \infty$ und damit auch $\#I = \#(J\{1, ..., k\}) = \infty$, also $\operatorname{rg} f = \infty$.

Bemerkung Die Annahme $\operatorname{def} f = k < \infty$, im Beweis ist keine Einschränkung:

1. ist $\dim V < \infty$, so folgt $\operatorname{def} f < \infty$, da $\ker f \subset V$ Untervektorraum ist;
2. $\dim V = \infty$, so ist man mit dem Beweis fertig, falls $\operatorname{def} f = \infty$.

Korollar (Homomorphismen zwischen gleichdimensionalen VR) Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $\dim W = \dim V = n < \infty$. Dann gilt: Ist f injektiv oder surjektiv, so ist f bijektiv.

Beweis Der Rangsatz liefert:

1. Wenn f injektiv ist, dann ist $\ker f = \{0\}$, also ist $\operatorname{def} f = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} f = \dim V - 0 = \dim V \Rightarrow f(V) = W \Leftrightarrow f$ surjektiv
2. $f(V) = W \Rightarrow \operatorname{rg} f = \dim W = \dim V \Rightarrow \operatorname{def} f = \dim V - \operatorname{rg} f = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}$

Beispiel Der Shiftoperator für Folgen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in K, $s : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}} : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wobei

$$y_i := \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \\ x_{i-1} & \text{für } i \neq 0 \end{cases}$$

ist ein injektiver Homomorphismus, $s \in \mathrm{Hom}(K^{\mathbb{N}}, K^{\mathbb{N}})$ von $K^{\mathbb{N}}$ in sich (damit gilt dim Definitionsbereich $=$ $\dim K^{\mathbb{N}}$ $=$ dim Wertebereich). Aber s ist nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv.

Übrigens Damit folgt $\dim K^{\mathbb{N}} = \infty$ (sonst hätte man einen Widerspruch zum Korollar).

1.4.8 Definition (Spezielle Homomorphismen)

Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ein Homomorphismus, dann heißt f:

- Endomorphismus, $f \in \mathrm{End}(V)$, falls W = V;
- Isomorphismus, $f \in \mathrm{Iso}(V, W)$, falls f bijektiv ist;
- Automorphismus, $f \in \mathrm{Aut}(V)$, falls W=V und f bijektiv ist.

Zwei K-VR V und W heißen isomorph, W ≅ V, falls $\mathrm{Iso}(V, W) \neq \emptyset$.

Bemerkung Ein Isomorphismus $f \in \mathrm{Iso}(V, W)$ bildet jede Basis B von V auf eine Basis $C = f(B)$ von W ab.

Andererseits: Bildet eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, eine Basis B von V auf eine Basis $C = f(B)$ von W ab, so ist f ein Isomorphismus.

Nämlich: Ist B Basis von V und $C = f(B)$ Erzeugendensystem, so ist f surjektiv, da $f(V) = f([B]) = [f(B)] = [C] = W$; ist $C = f(B)$ linear unabhängig, so ist f injektiv, denn für

$$\begin{aligned} v = \sum_{b\in B} bx_b \in \ker f \Rightarrow 0 = f(v) = f(\sum_{b\in B} bx_b) = \sum_{b\in B} f(b)x_b \\ \Rightarrow \forall b \in B : x_b = 0 \Rightarrow v = 0, \text{ d.h., } \ker f = \{0\}. \end{aligned}$$

1.4.9 Isomorphielemma

Seien V und W K-VR mit $\dim V, \dim W < \infty$. Dann gilt: $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Beweis Folgt aus obiger Bemerkung. Ausführlich:

$\Rightarrow$:

Annahme: $V \cong W$; sei $f \in \text{Iso}(V, W)(\neq 0)$. Wähle eine Basis $B = (b_1, ...b_n)$ von V (BES); da f bijektiv, ist dann:

$$C = f(B) = (f(b_i), ..., f(b_n))$$

eine Basis von W, damit ist $\dim W = n = \dim V$.

$\Leftarrow$:

Sei $\dim W = \dim V = n$; wähle Basen $B = (b_1, ..., b_n)$ von V und $C = (c_1, ..., c_n)$ von W (BES und Basissatz) und definiere $f \in \text{Hom}(V, W)$ durch (Fortsetzungssatz):

$$\forall i = 1, ..., n : f(b_i) = c_i$$

Da f eine Basis auf eine Basis abbildet ist $f \in \text{Iso}(V, W)$. Damit folgt also $\text{Iso}(V, W) \neq \emptyset \Rightarrow V \cong W$.

Beispiel: Ist V K-VR mit $\dim V < \infty$, so ist $V^* \cong V$. (Achtung: Es gibt aber viele Isomorphismen, keiner ist besonders d.h., „kanonisch“.)

Bemerkung: Ist $f \in \text{Iso}(V, W)$, so ist $f^{-1} \in \text{Iso}(W, V)$, denn

$$(f \circ f^{-1})(\sum_{i \in I} v_i x_i) = f(\sum_{i \in I} f^{-1}(v_i) x_i) = \sum_{i \in I} (f \circ f^{-1})^{(=id)}(v_i) x_i$$
$$\Rightarrow f^{-1}(\sum_{i \in I} v_i x_i) = \sum_{i \in I} f^{-1}(v_i) x_i.$$

1.5 Summen, Produkte und Quotienten

1.5.1 Definition (Summe von UVR)

Die Summe einer Familie $(U_i)_{i\in I}$ von UVR $U \subset V$ eines K-VR ist die Menge

$$\sum_{i\in I} U_i := \{\sum_{i\in I} u_i \mid \forall i \in I : u_i \in U_i \wedge \#\{i \in I \mid u_i \neq 0\} < \infty\}.$$

Bemerkung Offenbar ist $\sum_{i\in I} U_i \subset V$ UVR mit

$$\bigcup_{i\in I} U_i \subset \sum_{i\in I} U_i \Rightarrow [\bigcup_{i\in I} U_i] \subset \sum_{i\in I} U_i;$$

andererseits gilt:

$$\sum_{i\in I} U_i \subset \{\sum_{j\in J} v_j x_j \mid \forall j \in J v_j \in \bigcup_{i\in I} U_i \wedge \#\{j \in J \mid x_j \neq 0\} < \infty\} \subset [\bigcup_{i\in I} U_i].$$

Damit ist die Summe einer Familie $(U_i)_{i\in I}$ gerade die lineare Hülle ihrer Vereinigung $\bigcup_{i\in I} U_i$,

$$\sum_{i\in I} U_i = [\bigcup_{i\in I} U_i].$$

Beispiel Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum der reellen Folgen. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$U_n := \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N} : j > n \Rightarrow v_j = 0\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}};$$

dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \subset U_{n+1}$, und damit auch

$$\sum_{i\le n} U_i = U_n = \bigcup_{i\le n} U_i, \text{ aber}$$
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} U_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \neq V.$$

Nun setze für $i \in \{0, 1\}$

$$\tilde{U}_i := \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N} : j = i \bmod 2 \Rightarrow v_j = 0\}$$

dann ist

$$\bigcup_{i\in\{0,1\}} \tilde{U}_i \neq \sum_{i\in\{0,1\}} \tilde{U}_i = V.$$

1.5.2 Dimensionssatz

Sind $U_i \subset V$ UVR mit $\dim U_i < \infty$ für $i \in \{1, 2\}$, so ist

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Ist $\dim U_1 = \infty$ oder $\dim U_2 = \infty$, so ist auch $\dim(U_1 + U_2) = \infty$.

Beweis Seien

- $B_0 \subset U_1 \cap U_2$ eine Basis von $U_0 := U_1 \cap U_2$;
- $S_i \subset U_i$ lin. unabh., sodass $B_i = B_0 \cup S_i$ Basen von U_i sind ($i = 1, 2$; BES).

Offenbar gilt dann, da $B_i = B_0 \cup S_i$ lin. unabh. sind,

$$B_0 \cap S_1 = \emptyset \text{ und } B_0 \cap S_2 = \emptyset$$

und

$$S_1 \cap S_2 \subset U_1 \cap U_2 = [B_0] \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

Wir zeigen, dass $B := B_0 \cup S_1 \cup S_2$ Basis von $U_1 + U_2 =: U$ ist.

$B \subset U$ ist Erz. Syst. nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, 2\} : U_i = [B_i] \subset [B] \\ &\Rightarrow U_1 + U_2 = [U_1 \cup U_2] \subset [B] \end{aligned}$$

B ist linear unabhängig: Gegeben sei eine Linearkombination von $0 \in U$,

$$0 = \sum_{b\in B} bx_b = \sum_{b\in B_0} bx_b + \sum_{b\in S_1} bx_b + \sum_{b\in S_2} bx_b =: b_0 + s_1 + s_2$$
$$\text{mit } b_0 \in [B_0] = U_0 \text{ und } s_i \in [S_i] \text{ für } i = 1, 2;$$

dann gilt etwa, $B_1 = B_0 \cup S_1$ lin. unabh.,

$$b_0 + s_1 = -s_2 \in U_1 \cap [S_2] \subset U_0 \Rightarrow s_1 = 0$$

und damit, da $B_2 = B_0 \cup S_2$ lin. unabh. ist,

$$0 = b_0 + s_1 + s_2 \Rightarrow b_0 = s_2 = 0.$$

Mit der linearen Unabhängigkeit von B_0, S_1 und S_2 folgt dann

$$0 = \sum_{b \in B_0} bx_b = \sum_{b \in S_1} bx_b = \sum_{b \in S_2} bx_b \Rightarrow \forall b \in B : x_b = 0.$$

Mit

$$\begin{aligned} \#B + \#B_0 &= (\#B_0 + \#S_1 + \#S_2) + \#B_0 \\ &= (\#B_0 + \#S_1) + (\#B_0 + \#S_2) = \#B_1 + \#B_2 \end{aligned}$$

folgt dann die Behauptung.

Bemerkung Im Beweis haben wir benutzt:

Ist z.B. $B_1 = B_0 \cup S_1$ lin. unabh., und $b_0 \in [B_0]$ und $s_1 \in [S_1]$ mit $b_0 + s_1 = 0$, so folgt $b_0 = s_1 = 0$: sind nämlich $b_0 = \sum_{b \in B_0} bx_b$ und $s_1 = \sum_{b \in S_1} bx_b$, so gilt

$$0 = b_0 + s_1 = \sum_{b \in B_0} bx_b + \sum_{b \in S_1} bx_b = \sum_{b \in B_1} bx_b \Rightarrow \forall b \in B_1 : x_b = 0 \Rightarrow b_0 = s_1 = 0.$$

Bemerkung Ist $U_1 \cap U_2 = \{o\}$ bzw. $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$, so zeigt der Beweis auch:

$$\forall v \in U_1 + U_2 \exists! u_1 \in U_1 \exists! u_2 \in U_2 : v = u_1 + u_2$$

1.5.3 Definition (Komplementäre UVR)

Zwei UVR $U_1, U_2 \subset V$ heißen komplementär in V, falls

$$U_1 + U_2 = V \text{ und } U_1 \cap U_2 = \{o\}.$$

1.5.4 Lemma (Komplementäre UVR)

Zu jedem UVR $U \subset V$ existiert ein (in V) komplementärer UVR.

Beweis Sei $U \subset V$ UVR eines K-VR V. Seien

- $B \subset U$ eine Basis von U;
- $S \subset V$ lin. unahb., sodass $C = B \cup S$ Basis von V ist (BES).

Definiere $U' := [S]$. Dann ist $U' \subset V$ UVR mit

(i) $U + U' \supset [C] = V$, da $C \subset U \cup U'$ Erz. Syst. von V ist;

(ii) $U \cap U' = [B] \cap [S] = \{o\}$, da $C = B \cup S$ linear unabhängig ist.

Bemerkung Zu einem UVR $U \subset V$ gibt es normalerweise viele komplementäre UVR $U' \subset V$. Z.B.: Zu

$$U := \{v \in K^2 \mid v_2 = 0\}$$

ist jeder UVR $U' = [u']$ mit $u'_2 \neq 0$ komplementär in K^2.

1.5.5 Lemma & Definition (direkte Summe)

Sei $U = \sum_{i \in I} U_i \subset V$ Summe einer Familie von UVR $U_i \in V$; dann besitzt jeder Vektor $u \in U$ eine eindeutige Zerlegung als Summe von u_i, genau dann, wenn

$$\forall i \in I : U_i \cap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} U_j = \{o\}.$$

In diesem Falle heißt die Summe „direkt“ und man schreibt

$$U = \bigoplus_{i \in I} U_i.$$

Bemerkung Eine Summe $V = \sum_{i \in I} U_i$ ist genau dann direkt, wenn

$$\forall i \in I : U_i, \sum_{j \in I \setminus \{i\}} U_j \subset V$$

komplementäre UVR in V sind.

Beweis Zu zeigen ist die Eindeutigkeitsaussage. Sei also $u \in \bigoplus_{i \in I} U_i$,

$$u = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u'_i \text{ mit } \forall i \in I : u_i, u'_i \in U_i;$$

dann gilt für jedes $i \in I$:

$$u_i - u'_i = \sum_{j \neq i} u_j - \sum_{j \neq i} u'_j = \sum_{j \neq i} u_j - u'_j \in U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{o\},$$

da die Summe als direkt angenommen wurde; damit folgt $\forall i \in I : u_i = u'_i$, d.h. die Zerlegung ist eindeutig.

Die Umkehrung ist trivial:

$$\exists i \in I : U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j \neq \{o\} \Rightarrow \exists i \in I \exists u_i \in U_i \setminus \{o\} \exists (u_j)_{j \in I \setminus \{i\}} :$$
$$(\forall j \in I \setminus \{i\} : u_j \in U_j) \wedge u_i = \sum_{j \neq i} u_j,$$

d.h., die Zerlegung von $u_i \in \sum_{i \in I} U_i$ ist nicht eindeutig.

Bemerkung Sind $\dim V < \infty$ und $\#I < \infty$ so gilt

$$\forall i \in I : \dim U_i < \infty$$

und es gilt die Dimensionsformel für direkte Summen (Beweis in Aufgabe 35):

$$\dim \bigoplus_{i \in I} U_i = \sum_{i \in I} \dim U_i.$$

Ist insbesondere $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V, so gilt

$$\dim V = \dim \bigoplus_{i=1}^{n} [b_i] = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Bemerkung Seien $U, U' \subset V$ komplementäre UVR, also $V = U \oplus U'$, dann werden durch

$$v = u + u' \mapsto \begin{cases} p(v) := u \\ p' := u' \end{cases}$$

Endomorphismen $p, p' \in \mathrm{End}(V)$ (wohl-)definiert, da u, u' durch v eindeutig bestimmt sind (Linearität von p, p' ist klar). Offenbar ist

$$p(V) = U \text{ und } \ker p = U'$$

und es gilt

$$p^2 := p \circ p = p$$

und analog für p'; außerdem gilt ($\circ$ ausgelassen)

$$p + p' = id_V \text{ und } p'p = 0 = pp'.$$

1.5.6 Definition (Projektion)

$p \in \mathrm{End}(V)$ heißt Projektion, falls $p^2 = p$ (d.h. falls p idempotent ist).

1.5.7 Satz (Projektionen)

Sei $p \in \mathrm{End}(V)$ Projektion, dann ist $p' = \mathrm{id}_V - p$ Projektion mit $pp' = p'p = 0$. Gilt andererseits $p + p' = id_V$ und $pp' = 0$ für $p, p' \in \mathrm{End}(V)$, so sind p, p' Projektionen mit

$$V = p(V) \oplus p'(V) = \ker p' \oplus \ker p.$$

Beweis Seien $p \in \mathrm{End}(V)$ Projektion und $p' := id_V - p$; dann gilt:

$$p \circ p' = p(id_V - p) = p - p^2 = 0; (p^2 = p \circ p)$$
$$p' \circ p = (\mathrm{id}_V - p) \circ p = p - p^2 = 0$$

und

$$p' \circ p' = p'^2 = p' \circ (\mathrm{id}_V - p) = p' - p' \circ p = p',$$

d.h., $p' \in \operatorname{End}(V)$ ist Projektion.

Anderseits: Seien $p + p' = \mathrm{id}_V$ und $pp' = 0$.

Dann gilt:

$$p - p^2 = p(id_V - p) = pp' = 0$$

d.h., $p \in \operatorname{End}(V)$ ist Projektion, damit ist auch p' Projektion (erster Teil) und $p'p = 0$. Weiters liefert

$$\forall v \in V : v = id_v(v) = p(v) + p'(v) \Rightarrow V = p(V) + p'(V),$$

und ist $w = p(v) = p'(v')$ für geeignete $v, v' \in V$ (d.h., $w \in p(V) \cap p'(V)$), so gilt

$$w = p(v) = p^2(v) = p(p(v)) = p(w) = p(p'(v')) = pp'(v') = 0,$$

also $p(V) \cap p'(V) = 0$ und damit $V = p(V) \oplus p'(V)$. Weiters gilt

$$0 = p \circ p' \to p'(V) \subset \ker p$$

und ist $v \in \ker p$, so folgt

$$v = p(v) + p'(v) = 0 + p'(v) \in p'(V) \Rightarrow \ker p \subset p'(V).$$

Für p' gilt das Gleiche und wir haben $\ker p = p'(V)$ und $\ker p' = p(V)$. Damit folgt die letzte Behauptung

$$V = \ker p \oplus \ker p'.$$

Bemerkung Im Beweis haben wir etwas mehr bewiesen als behauptet - nämlich:

$$\ker p = p'(V) \text{ und } \ker p' = p(V)$$

1.5.8 Beispiel und Definition (Involution)

Sei $s \in \operatorname{End}(V)$ eine Involution d.h.,

$$s^2 = \mathrm{id}_V \text{ und } p_\pm := \frac{1}{2}(\mathrm{id}_v \pm s).$$

Offenbar gilt dann

$$p_+ + p_- = \mathrm{id}_V \text{ und } p_+p_- = \frac{1}{4}(\mathrm{id}_V + s)(\mathrm{id}_V - s) = \frac{1}{4}(\mathrm{id}_v^2 - s^2) = 0$$

also (Satz) sind $p_\pm \in \mathrm{End}(V)$ Projektionen mit komplementären Bildern bzw. Kernen.

1.5.9 Lemma und Definition (Produkt von VR)

Ist $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von K-VR V_i, so wird das (mengenthoretische) Produkt:

$$V := \prod_{i\in I} V_i = \{(v_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I : v_i \in V_i\}$$

mit den komponentenweise definierten VR-Operationen zu einem K-VR. Dies ist der Produktraum der Familie $(V_i)_{i\in I}$.

Beweis Aufgabe!

Bemerkung Ist $V = \prod_{i\in I} V_i$ ein Produktraum, so erhält man kanonische UVR

$$U_i := \{v = (v_i)_{i\in I} \in V \mid \forall j \neq i : v_j = 0\} \subset V,$$

die isomorph zu den V_i sind vermittels der Faktorprojektionen

$$\pi_i : V \to V_i : (v_j)_{j\in I} \mapsto v_i,$$

bzw. Faktor-Injektionen

$$\iota_i : V_i \to V : v_i \mapsto (v_j)_{j\in I}, \text{ wobei } v_j := \begin{cases} v_i & \text{falls } j = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist dann $\#I < \infty$, so erhält man

$$\prod_{i\in I} V_i \cong \bigoplus_{i\in I} U_i (=: \bigoplus_{i\in I} V_i);$$

ist $\#I = \infty$, so ist diese Identifikation im Allgemeinen falsch!

Beispiel Für einen Körper K liefert das n-fache Produkt den Standardraum

$$\prod_{i=1}^{n} K = \{(x_i)_{i=1,\dots,n} \mid \forall i \in \{1,\dots,n\} : x_i \in K\} = K^n \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \{(x_i)_{i\in 1,\dots,n} \mid \forall j \neq i : x_j = 0\};$$

für den Raum der K-wertigen Folgen ist jedoch

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} K = K^{\mathbb{N}} \neq \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \forall j \neq i : x_j = 0\}.$$

1.5.10 Lemma und Definition (Nebenklassen)

Sei $U \subset V$ UVR. Die Menge der Nebenklassen

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\},$$

wobei

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}$$

die Nebenklasse zu $v \in V$ bezeichnet, wird mit den durch

$$(v + U) + (w + U) := (v + w) + U \text{ und } (v + U)x := vx + U$$

bzw.

$$\begin{aligned} + &: V/U \times V/U \to ((v + U), (w + U)) \mapsto (v + w) + U, \\ \cdot &: K \times V/U \to V/U, (x, (v + U)) \mapsto (vx) + U, \end{aligned}$$

definierten Operationen ein Vektorraum: der Quotientenraum V/U.

Beweis Zu zeigen: Wohldefiniertheit der Operationen und VR-Axiome (werden übergangen).

Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation:

Ist $x \in K$ und sind $(v + U), (v' + U) \in V/U$ gleich, also $v + U = v' + U$, so gilt

$$\begin{aligned} v + U = v' + U &\Leftrightarrow v - v' \in U \\ \Rightarrow (v - v')x \in U &\Rightarrow vx + U = v'x + U \end{aligned}$$

Das Resultat der Skalarmultiplikation bringt also nicht von dem Repräsentanten v einer Nebenklasse $v + U$ ab, sondern nur von der Nebenklasse.

Die Wohldefiniertheit der Addition ist analog zu beweisen.

1.5.11 Bemerkung & Definition (Äquivalenzrelation)

Der Definition von V/U liegt ein allgemeineres Prinzip zugrunde:

$$v \sim w :\Leftrightarrow (v+U) = (w+U) \Leftrightarrow w - v \in U$$

definiert für jeden UVR $U \subset V$ eines K-VR V eine Äquivalenzrelation auf V, d.h.:

(i) $\forall v \in V : v \sim v$ (Reflexivität;)

(ii) $\forall v, w \in V : v \sim w \Leftrightarrow w \sim v$ (Symmetrie);

(iii) $\forall u, v, w \in V : u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$ (Transitivität).

Beweis ($v \sim w :\Leftrightarrow w - v \in U$ definiert Äquivalenzrelation)

- Reflexivität: Sei $v \in V$ beliebig, dann gilt $v - v = 0 \in U$, da U UVR.
- Symmetrie: Seien $v, w \in V$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} v \sim w &\Leftrightarrow w - v \in U \\ &\Leftrightarrow v - w \in U \Leftrightarrow w \sim v. \end{aligned}$$

- Transivitität: Seien $u, v, w \in V$ beliebig; gilt nun

$$u \sim v, \text{ d.h. } v - u \in U, \text{ und: } v \sim w, \text{ d.h. } w - v \in U,$$
$$\text{so gilt auch: } (w - v) + (v - u) = w - u \in U \Leftrightarrow u \sim w.$$

Ist dann $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X, so zerfällt X in Äquivalenzklassen

$$X_a = \{y \in X \mid y \sim a\}$$

d.h., X ist disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen:

$$X = \dot{\bigcup}_{a \in X} X_a \text{ und } X_a \cap X_b \neq \emptyset \Rightarrow X_a = X_b.$$

Insbesondere zerfällt also ein VR V in Äquivalenzklassen („Nebenklassen“)

$$v + U (= V_v) \subset V,$$

wenn U ein UVR von V ist – nach Lemma wird die Menge der Neben- bzw. Äquivalenzklassen wird dann wieder ein VR. Ähnlich wie den Quotientenvektorraum definiert man (z.B.) die Faktorgruppe [Havlicek 1.11.11].

Bemerkung Allgemeiner definiert man eine (binäre) Relation (X, Y, Γ) zwischen Mengen X, Y durch den Graph den Relation, eine Teilmenge

$$\Gamma \subset X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Zum Beispiel ist eine Abbildung $f : X \to Y$ eine Relation (X, Y, Γ_f), sodass

$$\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in \Gamma_f.$$

Ein anderes Beispiel ist die Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$, definiert durch

$$x \leq y :\Leftrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y - x \in \mathbb{N}\},$$

eine Ordnungsrelation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch (also $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$). Die Teilmengenrelation

$$Y \subset \tilde{Y} \text{ für } Y, \tilde{Y} \in \mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subset X\}$$

liefert auch eine Ordnungsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X, jedoch nur eine Halbordnung – im Gegensatz zur Totalordnung auf $\mathbb{Z}$, wo je zwei Elemente vergleichbar sind, d.h.,

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \leq y \vee y \leq x.$$

Auf $\mathcal{P}(X)$ gilt dies im Allgemeinen nicht, denn z.B. in $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ sind $\{0\}, \{1\}$ nicht vergleichbar, denn

$$\{0\} \not\subset \{1\} \wedge \{1\} \not\subset \{0\}.$$

1.5.12 Lemma (Dimensionen von komplementären UVR)

Ist $U \subset V$ UVR und U' komplementärer UVR zu U in V, so gilt

$$U' \cong V/U$$

vermöge

$$U' \ni u' \overset{\phi}{\mapsto} u' + U \in V/U.$$

Ist $\dim V < \infty$, so gilt $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

Beweis Zu zeigen: ϕ ist Isomorphismus. Dass ϕ Homomorphismus ist, folgt aus der Definition der VR-Operationen auf V/U.

Injektivität: Sei $u' \in \ker \phi$, d.h.

$$\phi(u') = u' + U = 0 + U \in V/U$$
$$\Rightarrow u' \in U' \cap U = \{0\} \Rightarrow u' = 0$$

Surjektivität: Sei $v + U \in V/U$ mit $v \in V = U \oplus U'$; mit der Projektion

$$p' : V \to V, v = u + u' \mapsto p'(v) := u'$$
$$\text{ist } v + U = u' + u + U = u' + U = \phi(p'(v)),$$
$$\text{also } V/U = \phi(U').$$

Die Dimensionsformel folgt dann aus der für direkte Summen:

$$\dim U' = \dim V/U \Rightarrow \dim V/U = \dim V - \dim U$$

Beispiel Ist $p \in \mathrm{End}(V)$ eine Projektion, so auch $p' := \mathrm{id}_V - p$ und es gilt

$$V = \ker p \oplus \ker p' = \ker p \oplus p(V),$$

also gilt

$$p(V) \cong V/\ker p.$$

1.5.13 Homomorphiesatz für lineare Abbildungen:

Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist $f(V) \cong V/\ker f$ vermöge

$$V/\ker f \ni v + \ker f \overset{\phi}{\mapsto} f(v) \in f(V)$$

Beweis Wohldefiniertheit von ϕ:

Sind $v + \ker f, v' + \ker f \in V/\ker f$ und $v + \ker f = v' + \ker f$, so gilt

$$\begin{aligned} v' - v \in \ker f \Rightarrow f(v') - f(v) = f(v' - v) = 0 \\ \Rightarrow f(v') = f(v) \end{aligned}$$

d.h. ϕ ist wohldefiniert.

Linearität:

- Für $x \in K$ und $v+\ker f \in V/\ker f$ ist $\phi((v+\ker f)x) = f(vx) = f(v)x = \phi(v+\ker f) \cdot x$
- Für $v + \ker f, w + \ker f \in V/\ker f$ ist

$$\begin{gathered} \phi((v + \ker f) + (w + \ker f)) = \phi((v + w) + \ker f) = \\ f(v + w) = f(v) + f(w) = \phi(v + \ker f) + \phi(w + \ker f) \end{gathered}$$

Injektivität: Sei $v + \ker f \in \ker \phi$, also

$$\phi(v + \ker f) = f(v) = 0;$$

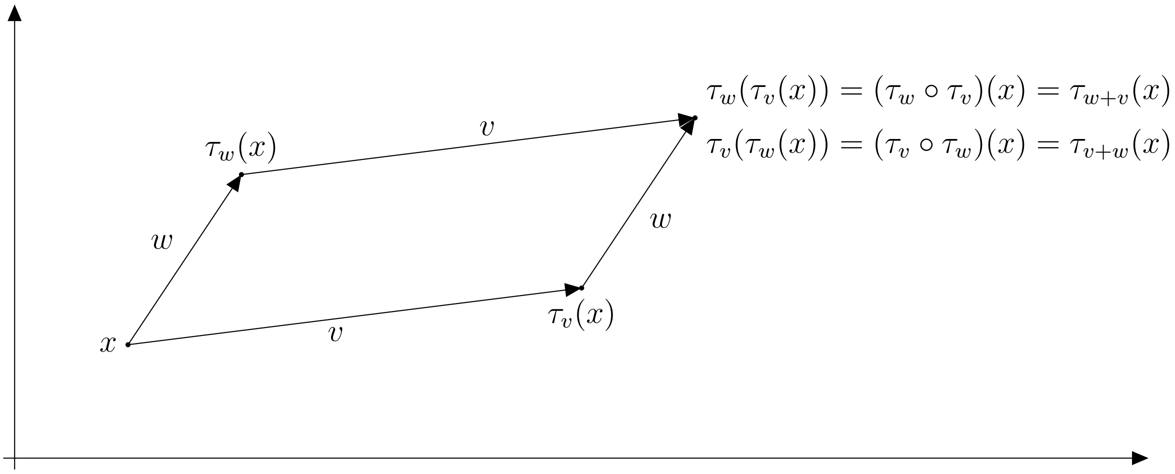
dann folgt

$$v \in \ker f \Rightarrow v + \ker f = \ker f = 0 \in V/\ker f.$$

Surjektivität: folgt direkt aus der Definition.

2 Affine Geometrie

2.1 Affine Räume



2.1.1 Definition (Geometrie nach Klein)

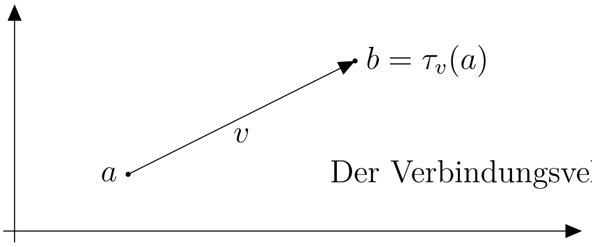
Eine Geometrie besteht aus einer Menge A (z.B. Punktmenge) und einer darauf operierenden Gruppe $(G, *)$, d.h., es gibt eine Gruppenoperation

$$\rho : G \times A \to A, (g, a) \mapsto \rho_g(a)$$

wobei gilt

(i) $\forall a \in A \forall g, h, \in G : (\rho_g \circ \rho_h)(a) = \rho_{g*h}(a)$

(ii) $\forall a \in A : \rho_e(a) = a$ für das neutrale Element $e \in G$



Der Verbindungsvektor ist eindeutig.

2.1.2 Definition (Affiner Raum)

Sei K ein Körper. Ein affiner Raum (AR) (A, V, τ) über K besteht aus einer Menge A, einem K-Vektorraum V und einer Gruppenoperation

$$\tau : V \times A \to A, (v, a) \mapsto \tau_v(a)$$

von V (als additive Gruppe $(V, +)$) auf A, die einfach transitiv ist, d.h.

$$\forall a, b \in A \exists! v \in V : b = \tau_v(a)$$

Weiters nennen wir

- Elemente von A Punkte,
- V den Richtungsvektorraum oder Tangentialraum von A,
- v mit $\tau_v(a) = b$ den Verbindungsvektor von a nach b,
- $\tau_v : A \to A, a \mapsto \tau_v(a)$ die Translation von v
- und $\dim V$ die Dimension des affinen Raums A

Bemerkung Die Translationen eines AR A bilden eine abelsche Gruppe.

Alternative Notation:

$$a + v := \tau_v(a) \text{ und } b - a := v, \text{ falls } b = \tau_v(a)$$

Mit dieser alternativen Schreibweise für die Operation von $(V, +)$ auf A, erscheinen die Bedingungen, dass $V = (V, +)$ einfach transitiv auf A operiert, „offensichtlich“.

Gruppenoperation:

(i) $\forall a \in A \forall v, w, \in V : (a+v)+w = a+(v+w)$ ist kurz für $\tau_w(\tau_v(a)) = \tau_{v+w}(a)$, entspricht also nicht der Assoziativität.

(ii) $\forall a \in A : a + 0 = a$ entspricht $\tau_0(a) = a$

Transitivität:

$$\forall a, b \in A \exists v \in V : b = a + v$$

Nämlich: sind $a, b \in A$ gegeben, so liefert $v := b - a$ (weil V einfach transitiv operiert) eindeutig den gesuchten Vektor.

2.1.3 Beispiel & Definition (affiner Standardraum)

Jeder K-VR liefert einen affinen Raum (V, V, τ) mit der Operation

$$\tau : V \times V \to V, (v, a) \mapsto \tau_v(a) := a + v$$

von V auf sich selbst – die Unterscheidung zwischen Punkten und Vektoren wird dann etwas undurchsichtig.

Der affine Standardraum (K^n, K^n, τ) wird mit A^n bezeichnet.

2.1.4 Beispiel & Definition (Ursprung)

Sei (A, V, τ) AR, für jede Wahl eines Ursprungs $o \in A$ ist

$$\tau(o) : V \to A, v \mapsto \tau_v(o)$$

eine Bijektion – ein VR ist also ein „AR mit Ursprung“.

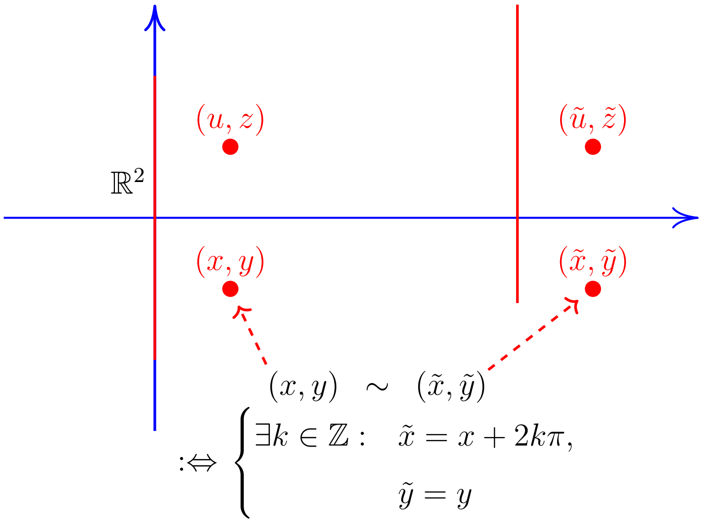
Beispiel Auf einem Zylinder

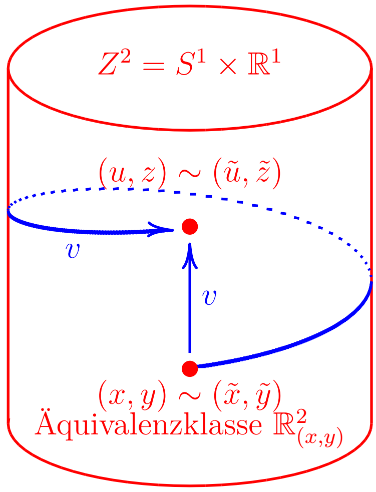
$$Z^2 := S^1 \times \mathbb{R} := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$$

liefert die Operation

$$\tau : \mathbb{R}^2 \times Z^2 \to Z^2, (v, a) \mapsto a + v$$

keinen affinen Raum, da diese Operation nicht einfach transitiv ist: zu je zwei Punkten gibt es unendlich viele „Verbindungsvektoren“.





2.1.5 Beispiel & Definition (affiner Unterraum)

Ist $U \subset V$ UVR eines K-VR V, so liefert jedes $v \in V$ die Nebenklasse

$$A = v + U$$

einen affinen Raum (A, U, τ) mit

$$\tau : U \times A \to A, (u, a) \mapsto \tau_u(a) := a + u;$$

offensichtlich ist die Operation wohldefiniert (operiert auf der Nebenklasse) und einfach transitiv.

Eine Nebenklasse $A = v + U \subset V$ nennt man daher auch einen affinen Unterraum des VR V.

$A' \subset A$ ist affiner Unterraum (AUR) des affinen Raumes (A, V, τ), falls

$$\exists a \in A \exists U \subset V \text{UVR} : A' = a + U = \{\tau_u(a) \mid u \in U\}.$$

Ist $\dim A' = 1$ oder $\dim A' = 2$, so heißt A' (affine) Gerade bzw. Ebene; ist $\dim A' < \infty$ und $\dim A' = \dim A - 1$, so heißt A' (affine) Hyperebene.

Bemerkung Jeder AUR ist selbst AR mit der „geerbten“ (eingeschränkten) Operation.

Beispiel Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $w \in f(V)$, so erhält man einen affinen Raum

$$(f^{-1}(\{w\}), \ker f, \tau) \text{ mit } \tau_u(a) := a + u.$$

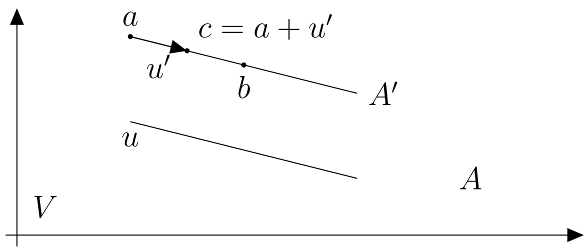
Ist $f \in V^* \setminus \{o\}$ (und $\dim V < \infty$), so wird $f^{-1}(\{x\}) \subset V$ für jedes $x \in K (= f(V))$ eine affine Hyperebene in (V, V, τ) – nach Rangsatz.

Bemerkung Ist $A' = a + U \subset A$ AUR des AR (A, V, τ), so gilt

$$\forall b \in A' \exists u \in U : b = \tau_n(a)$$

und damit

$$\begin{aligned} b + U &= \{\tau_{u'}(b) \mid u' \in U\} \\ &= \{(\tau_{u'} \circ \tau_u)(a) = \tau_{u'+u}(a) \mid u' \in U\} \\ &= \{\tau_{u''}(a) \mid u'' \in U\} = a + U = A' \end{aligned}$$



Damit zeigt man: Ist $(A_i')_{i \in I}$ eine Familie AUR $A_i' \subset A$ eines AR A, so ist der Schnitt leer oder ein affiner Unterraum. Ist nämlich der Schnitt nicht leer, d.h.,

$$\exists a \in A \forall i \in I : a \in A_i',$$

so erhält man

$$\begin{aligned} &\forall i \in I : A_i' = a + U_i \text{ mit einem geeigneten UVR } U_i \subset V \\ &\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i' = a + \bigcap_{i \in I} U_i \text{ und } U := \bigcap_{i \in I} U_i \subset V \text{ ist UVR.} \end{aligned}$$

2.1.6 Definition (affine Hülle)

Die affine Hülle $[S]$ einer Teilmenge eines affinen Raumes A ist der Schnitt aller S enthaltenden AUR $A' \subset A$,

$$[S] = \bigcap_{S \subset A' \text{AUR}} A'.$$

Bemerkung Die affine Hülle einer Teilmenge $S \subset A$ ist also der kleinste S enthaltende affine Unterraum von A.

Achtung: In einem K-VR V (den kann man auch als AR auffassen, siehe Beispiel vorher) sind die lineare Hülle und die affine Hülle (in V aufgefasst als AR) im Allgemeinen verschieden:

$$[S]_{\text{lin}} = \bigcap_{S \subset U \text{ UVR}} U \neq \bigcap_{S \subset A \text{ AUR}} A = [S]_{\text{aff}}$$

Beispiel Für $S = \{a\} \subset V$ mit $a \neq 0$ gilt

$$[S]_{\text{lin}} = \{ax \in A = V \mid x \in K\} \neq \{a\} = [S]_{\text{aff}}$$

allgemein gilt:

$$[S]_{\text{aff}} \subset [S \cup \{0\}]_{\text{aff}} = [S]_{\text{lin}}$$

Beweis in Aufgabe 45.

2.1.7 Lemma & Definition (baryzentrischer Kalkül)

Seien $(a_i)_{i \in I}$ und $(x_i)_{i \in I}$ Familien in einem AR A über K bzw. in K, wobei

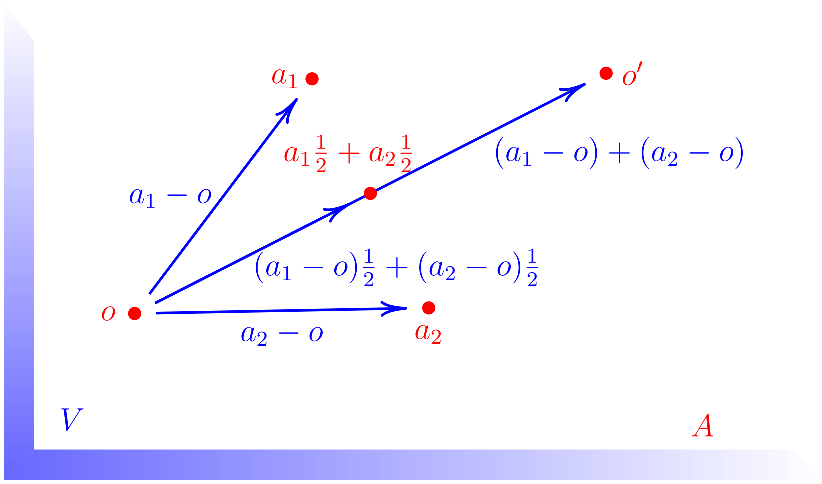
$$\#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty \text{ und } \sum_{i \in I} x_i = 1;$$

dann ist die mit einem beliebigen Ursprung $o \in A$ definierte Affinkombination

$$\sum_{i \in I} a_i x_i := o + \sum_{i \in I} (a_i - o) x_i$$

wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Ursprungs $o \in A$. Dann heißt

$$s := \sum_{i \in I} a_i x_i$$



Schwerpunkt oder Baryzentrum der Punkte a_i mit Gewichten x_i.

Beispiel Sind etwa $K = \mathbb{R}$ und $I = \{1, ..., n\}$, so erhält man mit $x_i = \frac{1}{n}$ für $i \in I$ den üblichen geometrischen Schwerpunkt der (endlichen) Punktmenge,

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{n}.$$

Achtung: Die Ausdrücke

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \text{ oder } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

sind sinnlos, da nicht definiert.

Beweis Zu zeigen: Sind $o, o' \in A$, so gilt

$$o' + \sum_{i \in I} v_i' x_i = o + \sum_{i \in I} v_i x_i, \text{ wobei } \begin{cases} v_i := a_i - o \\ v_i' := a_i - o' \end{cases}$$

Zunächst bemerken wir, dass mit $w := o' - o$ für $i \in I$ gilt: $v_i' + w = v_i$, denn:

$$\begin{aligned} \tau_{v_i'+w}(o) &= \tau_{v_i'}(\tau_w(o)) = \tau_{v_i'}(o') \\ &= a_i = \tau_{v_i}(o), \end{aligned}$$

also

$$o + \sum_{i\in I} v_i x_i = o + \sum_{i\in I} (w + v_i')_{x_i} = o + \sum_{i\in I} w x_i + \sum_{i\in I} v_i' x_i$$
$$= o + w \cdot \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} v_i' x_i = o + w + \sum_{i\in I} v_i' x_i = o' + \sum_{i\in I} v_i' x_i$$

2.1.8 Lemma (Affine Hülle und Affinkombination)

Ist $S \subset A$ Teilmenge eines AR A, so ist ihre affine Hülle

$$[S] = \{\sum_{a\in S} a x_a \mid \#\{a \in S \mid x_a \neq 0\} < \infty \wedge \sum_{a\in S} x_a = 1\}.$$

Beweis Wir setzen $S \neq \emptyset$ voraus und wählen $o \in S$, dann ist

$$[S] = o + [\{a - o \mid a \in S\}]$$

und die Behauptung folgt aus der entsprechenden für die lineare Hülle.

Beispiel Die affine Hülle zweier Punkte $a, b \in A, a \neq b$ ist die (affine) Gerade

$$[ab] := [\{a, b\}] = \{a(1-t) + bt \mid t \in K\}.$$

Die affine Hülle von drei verschiedenen Punkten $a, b, c \in A$ ist eine Gerade oder Ebene, je nachdem, ob $\dim[\{a, b, c\}]$ gleich 1 oder 2 ist. Im zweiten Fall sagen wir: das Dreieck $\{a, b, c\}$ sei nicht-degeneriert.

2.1.9 Definition (allgemeine Lage)

Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ von Punkten $a_i \in A$ eines AR A ist affin unabhängig, bzw. in allgemeiner Lage, falls

$$\forall i \in I : a_i \notin [\{a_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}],$$

und sonst affin abhängig; Punkte heißen kollinear bzw. koplanar, falls sie in einer Geraden oder einer Ebene liegen.

2.1.10 Lemma (Affine und lineare (Un-)Abhängigkeit)

Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann affin unabhängig, wenn für jedes $i \in I$ die Familie $(a_j - a_i)_{j\in I\setminus\{i\}}$ linear unabhängig ist.

Beweis Die Familie $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann affin abhängig, wenn

$$\exists i \in I : a_i \in [\{a_j \mid j \in I \setminus \{i\}\}] \Leftrightarrow \exists i \in I \exists (x_j)_{j\in I\setminus\{i\}} : a_i = \sum_{j\neq i} a_j x_j \wedge 1 = \sum_{j\neq i} x_j$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I \exists (x_j)_(j \in I \setminus \{i\}) : 0 = \sum_{j\neq i}(a_j - a_i)x_j \wedge 1 = \sum_{j\neq i} x_j,$$

d.h., wenn die Familie $(a_j - a_i)_{j\in I\setminus\{i\}}$ eine nicht-triviale Linearkombination von 0 erlaubt, also linear abhängig ist.

2.1.11 Lemma (Eindeutigkeit der Punktdarstellung)

Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann affin unabhängig, wenn jeder Punkt ihrer affinen Hülle eine eindeutige Affinkombination hat:

$$\forall a \in [\{a_i \mid i \in I\}] \exists! (x_i)_{i\in I} : \begin{cases} 1 = \sum_{i\in I} x_i \\ a = \sum_{i\in I} a_i x_i \end{cases}$$

Beweis Hat jeder Punkt $a \in [\{a_i \mid i \in I\}]$ eine eindeutige Affinkombination, so gilt insbesondere

$$\forall i \in I : a_i = a_i \cdot 1 \notin [\{a_j \mid j \neq i\}].$$

Hat andererseits der Punkt a zwei Affindarstellungen,

$$a = \sum_{i\in I} a_i x_i = \sum_{i\in I} a_i y_i,$$

so folgt mit einem Ursprung $o \in A$ und $v_i = a_i - o$

$$a = o + \sum_{i\in I} v_i x_i = o + \sum_{i\in I} v_i y_i \Rightarrow 0 = \sum_{i\in I} v_i(y_i - x_i).$$

Ist $(a_i)_{i\in I}$ affin unabhängig, so ist $(v_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ linear unabhängig für ein beliebiges $i \in I$ und $o := a_i$. Es folgt:

$$\forall j \in I \setminus \{i\} : x_j = y_j \Rightarrow x_i = 1 - \sum_{j\neq i} x_j = 1 - \sum_{j\neq i} y_j = y_i$$
$$\text{also } (x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}$$

2.1.12 Definition (Affines/baryzentrisches Bezugssystem)

Ein affines Bezugssystem $(o; B)$ eines affinen Raumes (A, V, τ) besteht aus einem Ursprung $o \in A$ und einer Basis B von V; ein baryzentrisches Bezugssystem $(a_i)_{i\in I}$ ist eine affin unabhängige Familie von Punkten, sodass
$$[\{a_i \mid i \in I\}] = A.$$

Bemerkung Ist $n = \dim A$, so enthält

- ein affines Bezugssystem $(o; b_1, ..., b_n)$ einen Punkt und n Vektoren;
- ein baryzentrisches Bezugssystem $(a_0, ..., a_n)$ $n + 1$ Punkte (und keinen Vektor).

Beispiel Drei Punkte $a_0, a_1, a_2 \in A$ sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sie die Ecken eines nicht degenerierten Dreiecks sind. Sie bilden dann ein baryzentrisches Bezugssystem der Ebene des Dreiecks. Andernfalls sind sie kollinear.

2.1.13 Definition (Teilverhältnis)

Sind $a, b, c \in A$ kollinear, $c \neq b$, so ist ihr Teilverhältnis

$$(ac : bc) = t :\Leftrightarrow a = bt + c(1 - t).$$

Bemerkung Sind $a, b \in A, a \neq b$ gegeben, so bestimmt das Teilverhältnis t die Lage eines Punktes c auf der Verbindungsgeraden $[\{a, b\}]$ eindeutig:

$$\begin{aligned}(ac : bc) = t \Leftrightarrow a = bt + c(1-t) = c + (b-c)t + (c-c)(1-t) \text{ (nach Affinkomb. mit } o = c) \\ \Leftrightarrow a = \tau_{(b-c)t}(c) \Leftrightarrow a - c = (b-c)t \\ \Leftrightarrow a - b \overset{*}{=} (a-c) + (c-b) = (b-c)t + (c-b) \overset{*}{=} (c-b)(1-t) \\ \Leftrightarrow (a-b)\frac{1}{1-t} = c - b \Leftrightarrow \tau_{(a-b)\frac{1}{1-t}}(b) = c \\ \Leftrightarrow c = b + (a-b)\frac{1}{1-t} + (b-b)(1 - \frac{1}{1-t}) = a\frac{1}{1-t} + b(1 - \frac{1}{1-t}) = a\frac{1}{1-t} + b\frac{-t}{1-t}\end{aligned}$$

Dabei erhält man $c = a$ mit $t = 0$, wegen $a \neq b$ muss $t = 1$ ausgeschlossen werden und $c = b$ wird durch kein Teilverhältnis realisiert. (* vgl. Beweis baryzentrischer Kalkül)

Ist $K = \mathbb{R}$, so ist $t < 0$ genau dann, wenn der Punkt c „zwischen“ a und b liegt, d.h. wenn

$$c \in \{a(1-s) + bs \mid s \in (0,1)\}.$$

Man sagt daher auch: „c teilt die Strecke $\overline{ab}$ im Verhältnis $(ac : bc)$.“

Bei nicht geordneten Körpern ist diese Aussage sinnlos!

Bemerkung Das Teilungsverhältnis $t = (ac : bc) = -\frac{s}{1-s}$ für $c = a(1-s) + bs$.

2.2 Affine Abbildungen & Transformationen

2.2.1 Definition

Eine Abbildung $\alpha : A \to A'$ zwischen affinen Räumen A und A' (über dem gleichen Körper K) heißt affin, falls sie

(i) *geradentreu* ist, d.h. die Bilder kollinearer Punkte sind kollinear;

(ii) *teilverhältnistreu* ist, d.h. das Teilverhältnis kollinearer Punkte wird erhalten (solange die Punkte nicht alle zusammenfallen).

Eine bijektive affine Abbildung $\alpha : A \to A$ heißt Affinität oder affine Transformation.

Bemerkung Sei $\alpha : A \to A'$ und $a, b \in A$ sodass $\alpha(a) \neq \alpha(b)$; insbesondere ist dann auch $a \neq b$. Ist α geradentreu, so gilt für jeden Punkt

$$c_s = a(1-s) + bs;\ \ s = (ca : ba),$$

dass $c_s \in [\{a, b\}]$, d.h.

$$\forall s \in K \exists t \in K : \alpha(c_s) = \alpha(a(1-s) + bs) = \alpha(a)(1-t) + \alpha(b)t \in [\{\alpha(a), \alpha(b)\}]$$

Ist α dann auch teilverhältnistreu, so folgt

$$\frac{-t}{1-t} = (\alpha(a)\alpha(c_s) : \alpha(b)\alpha(c_s)) = (ac_s : bc_s) = \frac{-s}{1-s} \Rightarrow t = s.$$

Insbesondere bildet α die Gerade $[ab]$ dann bijektiv auf die Gerade $[\alpha(a), \alpha(b)]$ durch die Bildpunkte von a und b ab, und

$$\forall s \in K : \alpha(a(1-s) + bs) = \alpha(a)(1-s) + \alpha(b)s.$$

Enthält die Gerade durch a und b, $a \neq b$ keine Punkte, deren Bilder verschieden sind, so wird die Gerade auf einen einzigen Punkt abgebildet – und die vorherige Gleichung gilt ebenfalls.

Beispiel Die Translationen eines affinen Raumes sind Affinitäten, denn für

$$c_s = a(1-s) + bs = a + ws,\ \text{mit } w := b - a$$

gilt, mit Translationsvektor $v \in V$,

$$\tau_v(c_s) = \tau_v(a + ws) = \tau_v(\tau_{ws}(a)) = \tau_{v+ws}(a) = \tau_{ws+v}(a) = \tau_{ws}(\tau_v(a)) = \tau_v(a) + ws,$$

insbesondere gilt also

$$\tau_v(b) = \tau_v(a) + w$$

und damit

$$\tau_v(c_s) = \tau_v(a) + ws = \tau_v(a) + (\tau_v(b) - \tau_v(a))s = \tau_v(a)(1-s) + \tau_v(b)s.$$

Also sind $\tau_v(a), \tau_v(b)$ und $\tau_v(c_s)$ kollinear und erhalten das Teilverhältnis

$$(\tau_v(a)\tau_v(c_s) : \tau_v(b)\tau_v(c_s)) = (ac_s : bc_s).$$

2.2.2 Lemma

$\alpha : A \to A'$ ist genau dann affin, wenn für jede Affinkombination in A gilt:

$$\alpha(\sum_{i\in I} a_i x_i) = \sum_{i\in I} \alpha(a_i)x_i.$$

Beweis Wir haben schon gesehen: $\alpha : A \to A'$ ist affin genau dann, wenn

$$\forall a, b, \in A \forall x \in K : \alpha(a(1-s)+bs) = \alpha(a)(1-s)+\alpha(b)s$$

Offenbar ist die vorherige Bemerkung ein Spezialfall des Lemmas. Es bleibt die andere Richtung zu zeigen. Wir benutzen vollständige Induktion über $k = \#\{i \in I \mid x_i \neq 0\} < \infty$.

Induktionsanfang Für $k = 1$ trivial.

Induktionsannahme Für $a_1, ..., a_k \in A$ und $x_1, ..., x_k \in K^\times$ mit $\sum_{i=1}^k = 1$ gelte

$$\alpha(\sum_{i=1}^k a_i x_i) = \sum_{i=1}^k \alpha(a_i)x_i.$$

Induktionsschluss Seien $a_1, ..., a_{k+1} \in A$ und $x_1, ..., x_{k+1} \in K^\times$ Gewichte, sodass $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1$, o.B.d.A. $x_{k+1} \neq 1$; dann gilt

$$\alpha(\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i) = \alpha((\sum_{i=1}^k a_i \frac{x_i}{1-x_{k+1}})(1-x_{k+1}) + a_{k+1}x_{k+1})$$

$$= \alpha(\sum_{i=1}^k a_i \frac{x_i}{1-x_{k+1}})(1-x_{k+1}) + \alpha(a_k+1)x_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha(a_i)\frac{x_i}{1-x_{k+1}}(1-x_{k+1}) + \alpha(a_{k+1})x_{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha(a_i)x_i.$$

Damit ist die Behauptung für affine Abbildungen α bewiesen.