# Skript Lineare Algebra & Geometrie 2, Hertrich-Jeromin

Studierendenmitschrift

5. Juli 2016

# Inhaltsverzeichnis

# 4 Volumenmessung

## 4.3 Polynome & Polynomfunktionen

Warum? (Vielleicht eher „Algebra“ – allgemein – als „lineare“ Algebra) Wichtig: das charakteristische Polynom eines Endomorphismus – wichtiges Hilfsmittel im Kontext der Struktursätze.

**Beispiel** Wir definieren Polynomfunktionen $p, q : K \to K$ eines Körpers $K$ in sich durch

$$p : K \to K,\ x \mapsto p(x) := 1 + x + x^2$$
$$q : K \to K,\ x \mapsto q(x) := 1$$

Falls $K = \mathbb{Z}_2$ so gilt dann

$$\forall x \in K : x(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow \forall x \in K : p(x) = q(x)$$

d.h., unterschiedliche „Polynome“ liefern die gleiche Polynomfunktion: Koeffizientenvergleich funktioniert nicht.

**Wiederholung** Auf dem Folgenraum $K^{\mathbb{N}}$ betrachten wir die Familie $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$e_k : \mathbb{N} \to K,\ j \mapsto e_k(j) := \delta_{jk}$$

Wir wissen: $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem:

$$\forall k \in \mathbb{N} : e_k \notin [(e_j)_{j\neq k}] \text{ und } [(e_j)_{j\in\mathbb{N}}] \neq K^{\mathbb{N}}$$

Insbesondere gilt:

$$\forall x \in [(e_j)_{j\in\mathbb{N}}]\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k > n : x_k = 0$$

### 4.3.1 Idee & Definition

Wir fassen ein Polynom als (endliche) Koeffizientenfolge auf,

$$\sum_{k=0}^{n} t^k a_k \cong \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k a_k \text{ mit } a_k = 0 \text{ für } k > n$$

und führen darauf das *Cauchyprodukt* (vgl. Analysis) als Multiplikation ein:

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \odot (b_k)_{k\in\mathbb{N}} := (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

wobei

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Insbesondere gilt damit

$$\forall j,k \in \mathbb{N} : e_j \odot e_k = e_{j+k} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \begin{cases} e_0 \odot e_k = e_k \\ e_1^k = \underbrace{e_1 \odot \cdots \odot e_1}_{k \text{ mal}} = e_k \end{cases}$$

Mit $1 := e_0,\ t := e_1$ und $t^0 := 1$, wie üblich, liefert dies:

$$\sum_{k=0}^{n} t^k a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k a_k \in [(e_k)_{k\in\mathbb{N}}] \subset K^{\mathbb{N}}$$

### 4.3.2 Definition

$$K[t] := ([(e_k)_{k\in\mathbb{N}}], \odot),$$

mit dem Cauchyprodukt $\odot$, ist die *Polynomalgebra* über dem Körper $K$; die Elemente von $K[t]$,

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k a_k,$$

heißen *Polynome in der Variablen* $t := e_1$. Der *Grad* eines Polynoms ist

$$\deg \sum_{k=0}^{n} t^k a_k := \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} \quad (\text{bzw. } \deg 0 := -\infty)$$

Ist (der „höchste“ Koeffizient) $a_n = 1$ für $\deg p(t) = n$, so heißt das Polynom $p(t)$ *normiert.*

**Notation** Mit $t^k = e_k$, also $K[t] = [(e_k)_{k\in\mathbb{N}}]$ wird das Cauchyprodukt auf $K[t]$ eine „normale“ Multiplikation, gefolgt von einer Sortierung nach den Potenzen der Variablen $t$. Wir werden das „$\odot$“ daher oft unterdrücken, und z.B. $p(t)q(t)$ schreiben, anstelle von $p(t) \odot q(t)$.

**Bemerkung (Koeffizientenvergleich)** Mit dieser Definition von „Polynom“ gilt

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = 0 \quad \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : a_k = 0,$$

da $(t^k)_{k\in\mathbb{N}} = (e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist. Koeffizientenvergleich funktioniert!

**Bemerkung** Die Polynomalgebra $K[t]$ über $K$ ist eine assoziative und kommutative $K$-Algebra, weiters ist $K[t]$ unitär mit Einselement $1 = e_0$.

### 4.3.3 Definition

Eine $K$-Algebra ist ein $K$-VR mit einer *bilinearen Abbildung*,

$$\odot : V \times V \to V,\ (v, w) \mapsto v \odot w,$$

d.h. es gilt

(i) $\forall w \in V :\ V \ni v \mapsto v \odot w \in V$ ist linear;

(ii) $\forall v \in V : V \ni w \mapsto v \odot w \in V$ ist linear.

Eine $K$-Algebra heißt

- *unitär* (mit *Einselement* 1), falls $\exists 1 \in V^\times \forall v \in V : 1 \odot v = v \odot 1 = v$;
- *assoziativ*, falls $\forall u, v, w \in V : (u \odot v) \odot w = u \odot (v \odot w)$;
- *kommutativ*, falls $\forall v, w, \in V : v \odot w = w \odot v$.

**Beispiel** Die additive Gruppe $\mathrm{End}(V)$ ist (mit der Komposition) eine unitäre assoziative Algebra.

**Bemerkung** In jeder Algebra $(V, \odot)$ gilt:

$$\forall v \in V : 0 \odot v = v \odot 0 = 0$$

da z.B. für $v \in V$ gilt

$$v \odot 0 = v \odot (0 + 0) = v \odot 0 + v \odot 0 \ \Rightarrow\ 0 = v \odot 0$$

Ist $(V, \odot)$ unitär, so liefert $[1] \subset V$ wegen $1 \odot 1 = 1$ einen Körper:

$$([1], + |_{[1]\times[1]}, \odot |_{[1]\times[1]}) \cong K$$

vermöge $K \ni x \mapsto 1 \cdot x \in [1]$ (siehe Aufgabe 5).

### 4.3.4 Definition

Ein *Algebra-Homomorphismus* zwischen $K$-Algebren $(V, \odot)$ und $(W, *)$ ist eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, für die gilt:

$$\forall v, v' \in V : \psi(v \odot v') = \psi(v) * \psi(v').$$

**Bemerkung** $\mathrm{Hom}(V, W)$ wird oft auch für den (Vektor-)Raum der Algebra-Homomorphismen verwendet. In dieser LVA bedeutet „$\mathrm{Hom}(V, W)$" immer VR-Homomorphismen, bei allen „anderen" Homomorphismen wird erwähnt, was gemeint ist.

### 4.3.5 Einsetzungssatz & Definitionen

Seien $(V, \odot)$ eine unitäre assoziative Algebra und $v \in V$. Dann ist[1]

$$\psi_v : K[t] \to V,\ \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = p(t) \mapsto \psi_v(p(t)) := \sum_{k=0}^{n} v^k a_k$$

ein Algebra-Homomorphismus; $\psi_v$ heißt *Einsetzungshomomorphismus.*

$$p : V \to V,\ v \mapsto p(v) := \psi_v(p(t))$$

heißt die zu $p(t) \in K[t]$ gehörige *Polynomfunktion* auf $V$.

**Bemerkung** Wie üblich: $v^k := \underbrace{v \odot \cdots \odot v}_{k-\mathrm{mal}}$ und $v^0 := 1$.

**Beweis**

1. $\psi_v$ ist linear:
   - für $p(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k a_k$ und $a \in K$ gilt:

     $$\psi_v(p(t)a) = \psi_v\Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} t^k a_k a\Big) = \sum_{k \in \mathbb{N}} v^k a_k a = \psi_v(p(t))a;$$

   - für $p(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k a_k$ und $q(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k b_k$ gilt:

     $$\psi_v(p(t) + q(t)) = \psi_v\Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} t^k (a_k + b_k)\Big) = \sum_{k \in \mathbb{N}} v^k (a_k + b_k) = \psi_v(p(t)) + \psi_v(q(t))$$

2. $\psi_v$ ist „multiplikativ", d.h. verträglich mit der beteiligten Multiplikation:

[1] $v^0 := 1$ ist sinnvoll, da die Algebra unitär ist.

Für die Vektoren der Basis $(t^k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $K[t]$ gilt, da $(V,\odot)$ assoziativ ist,

$$\psi_v(t^m t^n) = \psi_v(t^{m+n}) = v^{m+n} = v^m \odot v^n = \psi_v(t^m) \odot \psi_v(t^n).$$

Da aber $\psi_v$ linear und die Multiplikation in $K[t]$ und in $(V,\odot)$ bilinear sind, folgt die Behauptung.

**Bemerkung (Fortsetzungssatz für bilineare Abbildungen)** Im Beweis haben wir verwendet: Die Abbildungen

$$K[t]\times K[t] \to V,\ (p(t),q(t)) \mapsto \begin{cases} \psi_v(p(t)q(t)) & \text{(Cauchyprodukt)} \\ \psi_v(p(t)) \odot \psi_v(q(t)) & \text{(Produkt in } (V,\odot)) \end{cases}$$

sind bilinear (da $\psi_v$ linear ist), sind also gleich, sobald sie auf einer Basis übereinstimmen. Dies ist die Eindeutigkeit eines Fortsetzungssatzes für bilineare Abbildungen:

Sind $V, W$ $K$-VR, $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von $V$ und $(\beta_{ij})_{i,j\in I}$ eine Familie in $W$, so gibt es eine eindeutige bilineare Abbildung

$$\beta : V \times V \to W$$

mit

$$\forall i,j \in I : \beta(b_i, b_j) = \beta_{ij}$$

Dieser Fortsetzungssatz folgt direkt aus dem Fortsetzungssatz für lineare Abbildungen, da

$$\{\beta : V\times V \to W \text{ bilinear}\} \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(V,W))$$

vermittels des Isomorphismus

$$\beta \mapsto (v \mapsto \underbrace{\beta(v,.)}_{\in \mathrm{Hom}(V,W)}),$$

d.h. durch Nacheinandereinsetzen der Argumente.

**Bemerkung** Die Abbildung eines Polynoms auf seine Polynomfunktion auf dem Körper,

$$K[t] \ni p(t) \mapsto (x \mapsto p(x)) = \psi_x(p(t)) \in K^K$$

ist für $\mathrm{Char}\, K \neq 0$ nicht injektiv[2]. Das heißt: Koeffizientenvergleich (für Polynomfunktionen) kann nur funktionieren, wenn $\mathrm{Char}\, K = 0$.

[2] sonst wäre $K^K$ unendlich dimensional.

**Beispiel & Bemerkung** Ist $V$ $K$-VR, so ist $\mathrm{End}(V)$ eine $K$-Algebra (mit Komposition $\circ$). Man erhält also für $f \in \mathrm{End}(V)$ einen Einsetzungshomomorphismus

$$\psi_f : K[t] \to \mathrm{End}(V),\ p(t) \mapsto \psi_f(p(t)) = p(f);$$

und für jedes Polynom $p(t) \in K[t]$ eine zugehörige Polynomfunktion

$$p : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V),\ f \mapsto \psi_f(p(t)) = p(f).$$

Dieses Beispiel ist der Schlüssel zum Satz von Cayley-Hamilton (im nächsten Abschnitt).

### 4.3.6 Lemma

Für Polynome $p(t), q(t) \in K[t]$ gilt:

- $\deg p(t) \odot q(t) = \deg p(t) + \deg q(t)$,
- $\deg p(t) + q(t) \leq \max\{\deg p(t), \deg q(t)\}$.

**Beweis** Für $p(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k a_k$ und $q(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k b_k$ ist

$$p(t) \odot q(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k c_k \text{ mit } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Gilt nun $\deg p(t) = n$ und $\deg q(t) = m$, d.h.

$$a_n, b_m \neq 0 \wedge \forall k > n, k' > m : a_k = b_{k'} = 0$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \forall k > m + n : c_k = 0 \\ c_{m+n} = a_n b_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \deg p(t) \odot q(t) = m + n$$

Gilt andererseits $\deg p(t) = -\infty$ oder $\deg q(t) = -\infty$, also $p(t) = 0 \vee q(t) = 0$, so folgt

$$p(t) \odot q(t) = 0 \Rightarrow \deg p(t) \odot q(t) = -\infty.$$

Die zweite Behauptung ist offensichtlich wahr.

**Beispiel** Für $p(t), q(t), d(t) \in K[t]$ mit $d(t) \neq 0$ gilt

$$d(t)p(t) = d(t)q(t) \Rightarrow p(t) = q(t).$$

Nämlich: da $\deg d(t) \geq 0$,

$$\begin{aligned}
-\infty &= \deg d(t)\big(p(t) - q(t)\big) \\
&= \deg d(t) + \deg\big(p(t) - q(t)\big) \\
\Rightarrow \deg\big(p(t) - q(t)\big) &= -\infty \\
\Rightarrow p(t) &= q(t)
\end{aligned}$$

### 4.3.7 Euklidischer Divisionsalgorithmus

Seien $p(t), d(t) \in K[t],\ d(t) \neq 0$. Dann existieren eindeutig $q(t), r(t) \in K[t]$, sodass

$$p(t) = d(t)q(t) + r(t) \text{ und } \deg r(t) < \deg d(t).$$

**Bemerkung** Ist $\deg p(t) \leq \deg d(t)$, so ist die Aussage trivial.

**Beweis** Eindeutigkeit folgt wie im Beispiel; mit

$$\begin{aligned}
p(t) &= \begin{cases} d(t)q(t) + r(t) \\ d(t)\tilde{q}(t) + \tilde{r}(t) \end{cases} \\
\Rightarrow d(t)\big(q(t) - \tilde{q}(t)\big) &= \tilde{r}(t) - r(t)
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\deg d(t) + \deg\big(q(t) - \tilde{q}(t)\big) &= \deg(r(t) - \tilde{r}(t)) \\
&\leq \max\{\deg r(t), \deg \tilde{r}(t)\} < \deg d(t).
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\deg\big(q(t) - \tilde{q}(t)\big) = -\infty \Rightarrow \deg(r(t) - \tilde{r}(t)) = \deg d(t) - \infty = -\infty$$

und damit

$$\tilde{q}(t) = q(t) \text{ und } \tilde{r}(t) = r(t).$$

Existenz: Mit $k := \deg d(t) \geq 0$ und

$$K[t]_m := \{q(t) \in K[t] \mid \deg q(t) \leq m\} \text{ für } m \in \mathbb{N}$$

betrachte man die Abbildung

$$K[t]_m \times K[t]_{k-1} \to K[t]_{k+m},\ \big(q(t), r(t)\big) \mapsto d(t)q(t) + r(t).$$

Diese Abbildung ist linear (klar) und injektiv, denn: ist $q(t) \neq 0$, so folgt wegen

$$\deg r(t) < k = \deg d(t) \leq \deg d(t)q(t)$$

dass

$$\begin{aligned} \deg\big(d(t)q(t) + r(t)\big) = \deg d(t)q(t) \geq k > -\infty \\ \Rightarrow d(t)q(t) + r(t) \neq 0, \end{aligned}$$

also

$$d(t)q(t) + r(t) = 0 \Rightarrow q(t) = 0 \wedge r(t) = 0.$$

Wegen

$$\dim K[t]_m \times K[t]_{k-1} = (m+1) + k = (k+m) + 1 = \dim K[t]_{k+m}$$

liefert diese Abbildung dann für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Isomorphismus

$$K[t]_m \times K[t]_{k-1} \to K[t]_{k+m}$$

### 4.3.8 Korollar & Definition

Sei $p(t) \in K[t]$ mit $\deg p(t) \geq 1$. Ist $x \in K$ eine *Nullstelle* von $p(t)$, d.h.

$$p(x) = \psi_x(p(t)) = 0,$$

so folgt

$$\exists! q(t) \in K[t] : p(t) = (t - x)q(t)$$

**Beweis** Seien $p(t) \in K[t]$ mit $\deg p(t) \geq 1$ und $x \in K$ eine Nullstelle von $p(t)$; dann gibt es eindeutig $q(t), r(t) \in K[t]$ mit

$$p(t) = (t - x)q(t) + r(t) \text{ und } \deg r(t) < \deg(t - x) = 1,$$

also

$$p(t) = (t - x)q(t) + r(t) = (t - x)q(t) + c_0.$$

Einsetzen von $x \in K$ liefert dann

$$0 = p(x) = (x - x)q(x) + c_0 = c_0.$$

**Bemerkung und Beispiel** Dies liefert eine Methode, um Polynome zu *faktorisieren*: Für jede gefundene Nullstelle kann man einen *Linearfaktor* abspalten.

$$p(t) = t^4 - t^3 + t^2 - t = \begin{cases} t(t-1)(t-i)(t+i) \in \mathbb{C}[t] \\ t(t-1)(t^2+1) \in \mathbb{R}[t]. \end{cases}$$

### 4.3.9 Mehr zu Polynomen

Dies ist der Anfang einer der Teilbarkeitstheorie der natürlichen Zahlen ähnlichen Theorie für Polynome.

*Sind $p(t), d(t) \in K[t]$, so heißt $d(t)$* Teiler *von $p(t), d(t) \mid p(t)$, falls*

$$\exists q(t) \in K[t] : p(t) = d(t)q(t).$$

**Primpolynome** Nennt man $p(t) \in K[t]$ mit $\deg p(t) > 0$ ein *Primpolynom* (oder *irreduzibel*), falls für $d(t), q(t) \in K[t]$ gilt:

$$p(t) = d(t)q(t) \Rightarrow \Big(\deg q(t) = 0 \vee \deg d(t) = 0\Big),$$

so gilt der Satz über die *Primfaktorzerlegung*:

*Jedes Polynom $p(t) \in K[t]$ mit $\deg p(t) > 0$ zerfällt eindeutig in Primpolynome,*

$$p(t) = a_n p_1(t) \cdots p_m(t),$$

*wobei $a_n \in K$ und $p_1(t), \dots, p_m(t) \in K[t]$ normierte Primpolynome sind.*

**Beweis** Existenz ist einfach zu zeigen (Induktion über $n$), die weniger leicht zu zeigende Eindeutigkeit benutzt die Existenz des *größten gemeinsamen Teilers* $d(t) = \mathrm{ggT}\,(p(t), q(t))$ zweier Polynome $p(t)$ und $q(t)$:

*Zu $p(t), q(t) \in K[t] \setminus \{0\}$ gibt es genau ein normiertes Polynom $d(t) \in K[t]$ mit*

$$\begin{aligned} &d(t) \mid p(t) \wedge d(t) \mid q(t) \text{ und} \\ &d'(t) \mid p(t) \wedge d'(t) \mid q(t) \Rightarrow d'(t) \mid d(t). \end{aligned}$$

**Lemma von Bézout** Für den ggT gilt auch das Lemma von Bézout:

$$\exists p'(t), q'(t) \in K[t] : d(t) = p(t)p'(t) + q(t)q'(t)$$

**Bemerkung** Aus der Gradformel,

$$\deg d(t)q(t) = \deg d(t) + \deg q(t)$$

folgt direkt:

*Jedes Polynom $p(t) \in K[t]$ mit $\deg p(t) = 1$ ist Primpolynom.*

**Fundamentalsatz der Algebra** Falls $K = \mathbb{C}$, so sind die Polynome mit Grad 1 die einzigen Primpolynome:

*In $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom (mit Grad $\geq 1$) in Linearfaktoren;*

$$\forall p(t) \in \mathbb{C}[t],\ \deg \geq 1 :\ \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$$

*mit*

$$p(t) = a_n \prod_{j=1}^{n} (t - x_j).$$

Ist $K = \mathbb{R}$, so ist dies nicht der Fall; ein Primpolynom vom Grad $\deg p(t) = 2$ ist z.B.

$$p(t) = t^2 + 1 \ \in \mathbb{R}[t],$$

denn

$$t^2 + 1 = (t - x_1)(t - x_2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_1 + x_2 \\ 1 = x_1 \cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow 1 = -x^2$$

Andererseits ist $p(t) \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$, also existieren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ mit

$$a_n \prod_{j=1}^{n} (t - x_j) = p(t) = \overline{p(t)} = \overline{a_n} \prod_{j=1}^{n} (t - \overline{x_j}),$$

d.h. mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, $a_n \in \mathbb{R}$ und die $x_j$ sind entweder reell oder treten in komplex-konjugierten Paaren auf:

$$p(t) = a_n \prod_{j=1}^{m} (t^2 - t(x_j + \overline{x_j}) + x_j \overline{x_j}) \prod_{j=2m+1}^{n} (t - x_j).$$

Ist also $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ Primpolynom, so folgt $\deg p(t) \leq 2$ und

$$\deg p(t) = 2 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : p(t) = (t - x)^2 + y^2 \text{ mit } y \neq 0$$

In $K = \mathbb{Q}$ gibt es noch „mehr“ Primpolynome, wie z.B.:

$$p(t) = t^2 - 2 \text{ oder } p(t) = t^4 + 1$$

## 4.4 Das charakteristische Polynom

### 4.4.1 Definition

Seien $V$ ein $K$-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann heißen

(i) $x \in K$ ein Eigenwert von $f$, falls $\exists v \in V^\times : f(v) = vx;$

(ii) $v \in V^\times$ ein Eigenvektor von $f$, falls $\exists x \in K : f(v) = vx;$

(iii) $\ker(f - \mathrm{id}_V\, x) \subset V$ ein Eigenraum, falls $\ker(f - \mathrm{id}_V\, x) \neq \{0\}.$

**Bemerkung** Der Skalar $x \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von $f \in \mathrm{End}(V)$, wenn $\ker(f - \mathrm{id}_V\, x) \neq \{0\}$, d.h., wenn ein Eigenvektor $v \in V^\times$ zu $x$ existiert.

**Beispiel** Für $\frac{d}{ds} \in \mathrm{End}(C^\infty(\mathbb{R}))$ ist jedes $x \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert, da

$$\Big(\frac{d}{ds} - \mathrm{id}_V\, x\Big)v = 0 \text{ für } v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s \mapsto v(s) := e^{xs},$$

wobei $v \in C^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, d.h. $s \mapsto v(s) = e^{xs}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $x \in \mathbb{R}$.

**Beispiel** Ist $\dim V < \infty$, so kann die Determinante zur Bestimmung von Eigenwerten von Endomorphismen $f \in \mathrm{End}(V)$ benutzt werden, da

$$\ker(f - \mathrm{id}_V\, x) \neq \{0\} \Leftrightarrow (f - \mathrm{id}_V\, x) \text{ nicht injektiv} \Leftrightarrow \det(f - \mathrm{id}_V\, x) = 0,$$

d.h. das Auffinden von Eigenwerten $x \in K$ von $f$ ist reduziert auf die Bestimmung der Nullstellen der Funktion

$$K \ni x \mapsto \det(f - \mathrm{id}_V\, x) \in K.$$

**Beispiel** Ist z.B. $(b_1, b_2)$ Basis von $V$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ durch $f(B) = BX$ gegeben, so liefern die Nullstellen der Polynomfunktion

$$\det(f - \mathrm{id}_V\, x) = \det(X - E_2 x) = \det \begin{pmatrix} x_{11} - x & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} - x \end{pmatrix}$$
$$= (x_{11} - x)(x_{22} - x) - x_{12}x_{21} = x^2 - x(x_{11} + x_{22}) + (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})$$

die Eigenwerte von $f$ – beispielsweise erhalten wir für

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \ \det(f - \mathrm{id}_V\, x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3),$$

also Eigenwerte $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ mit zugehörigen Eigenvektoren als Lösungen von

$$v_i \in \ker(f - \mathrm{id}_V\, x_i),$$

also durch Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 1 & -(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix}$$

sodass

$$v_1 = b_1 - b_2 \text{ und } v_2 = b_1 3 + b_2$$

Eigenvektoren zu den Eigenwerten $x_1, x_2$ liefert.

**Rechenbeispiel 1** Für $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\det(f - \mathrm{id}_V\, x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1$$

und Eigenvektoren zum Eigenwert $x = 1$ durch Lösung der LGS

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix}$$

d.h. der Eigenraum zum Eigenwert $x$,

$$\ker(f - \mathrm{id}_V) = [\{b_1 + b_2\}] \quad \text{hat} \quad \dim\ker(f - \mathrm{id}_V) < \dim V.$$

**Rechenbeispiel 2** Ist $K = \mathbb{R}$ und

$$\det(f - \mathrm{id}_V\, x) = x^2 + 1,$$

so hat $f$ keine Eigenwerte: z.B., wenn $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

### 4.4.2 Definition

Sei $V$ ein $K$-VR, für $f \in \mathrm{End}(V)$ ist das *charakteristische Polynom* von $f$:

$$\chi_f(t) := \det(\mathrm{id}_V\, t - f) \in K[t].$$

Analog definiert man für $X \in K^{n\times n}$ das charakteristische Polynom

$$\chi_X(t) := \det(E_n t - X) \in K[t].$$

**Bemerkung** Oft wird auch das andere Vorzeichen in der Determinante verwendet, also $\det(f - \mathrm{id}_V\, t)$ bzw. $\det(X - E_n t)$.

**Bemerkung** *Diese Definition ist erklärungsbedürftig!*
Da $t \notin K$ ist $\mathrm{id}_V\, t - f \notin \mathrm{End}(V)$, sondern $\mathrm{id}_V\, t - f \in \mathrm{End}(V)[t]$. Zwei Lösungsstrategien bieten sich an:

1. Erweiterung der Determinante auf $\mathrm{End}(V)[t]$.

2. Benutzung von Darstellungsmatrizen.

Beide führen schließlich zur Leibniz-Formel:
Ist $B$ eine Basis von $V$ und $\xi_B^B(f) = X = (x_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$, so erhält man

$$\chi_f(t) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\delta_{\sigma(j)j} t - x_{\sigma(j)j}\right)}_{\in K[t]} \in K[t].$$

Die Unabhängigkeit von der Basis $B$ folgt aus der Transformationsformel für Darstellungsmatrizen und dem Determinanten-Multiplikationssatz (wie vorher für $\det f = \det \xi_B^B(f)$).

### 4.4.3 Bemerkung & Definition

Ist $\dim V = n$, so ist $\chi_f(t)$ ein normiertes Polynom vom Grad $\deg\left(\chi_f(t)\right) = n$,

$$\chi_f(t) = t^n - t^{n-1}\,\mathrm{tr}\, f + \cdots + (-1)^n \det f,$$

wobei die *Spur* $\mathrm{tr}\, f$ („tr “$\widehat{=}$ trace) von $f$ durch diese Gleichung (wohl-)defininiert ist. Ist $(x_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} = X = \xi_B^B(f)$ Darstellungsmatrix von $f$, so gilt

$$\mathrm{tr}\, f = \sum_{j=1}^{n} x_{jj} = \sum_{j=1}^{n} b_j^* f(b_j).$$

Oft wird $\det(f - \mathrm{id}_V\, t) = (-1)^n \chi_f(t)$ als charakteristisches Polynom definiert – dieses Polynom ist dann nur für gerade $n$ normiert.

### 4.4.4 Korollar

Ein $x \in K$ ist genau dann Eigenwert von $f$, wenn $\chi_f(x) = 0$.
Also: Die Eigenwerte von $f$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_f(t)$.

**Beweis** Klar – das war die Idee hinter der Definition des charakteristischen Polynoms.

### 4.4.5 Korollar & Definition

Ist $x \in K$ Eigenwert von $f \in \mathrm{End}(V)$, so ist $(t-x)$ Teiler des charakteristischen Polynoms. Insbesondere gilt:

$$\exists! k \in \mathbb{N}^\times : \begin{cases} (t-x)^k \mid \chi_f(t) \\ (t-x)^{k+1} \nmid \chi_f(t) \end{cases}$$

Diese Zahl $k$ heißt die *algebraische Vielfachheit* von $x$;

$$g := \mathrm{def}(\mathrm{id}_V x - f) \leq k$$

ist die *geometrische Vielfachheit* von $x$.

**Beweis** Da $x$ Eigenwert von $f$ ist, ist die Existenz und Eindeutigkeit von $k$ klar. Außerdem gilt analog auch $g \geq 1$. Zu zeigen bleibt: $g \leq k$, d.h. $(t-x)^g \mid \chi_f(t)$:
Für eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von $V$ mit $\ker(\mathrm{id}_v x - f) = [(b_1, \dots, b_g)]$ hat

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} E_g x & Y \\ 0 & X \end{pmatrix} \text{ mit } Y \in K^{g \times (n-g)}, X \in K^{(n-g)\times(n-g)}$$

Blockgestalt, also ist

$$\chi_f(t) = (t-x)^g \cdot \chi_X(t),$$

d.h. $(t-x)^g \mid \chi_f(t)$, da $(t-x)^{k+1} \nmid \chi_f(t)$, gilt also $g \leq k$.

**Beispiel** Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ wie oben durch $f(B) = BX$ gegeben, so haben die Eigenwerte

$$x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 3 \text{ für } X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

algebraische und geometrische Vielfachheiten

$$1 = g_i = k_i, \text{ da } 1 \leq g_i \leq k_i \text{ und } k_1 + k_2 \leq 2;$$

der Eigenwert

$$x = 1 \text{ für } X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat algebraische und geometrische Vielfachheiten $k = 2$ und $g = 1$, da

$$f \neq \mathrm{id}_V x = \mathrm{id}_V$$

und $\chi_f(t) = (t-x)^2 \in \mathbb{R}[t]$, da ein quadratisches Polynom zwei (relle oder komplex konjugierte) Nullstellen hat, oder aber eine doppelte reelle.

### 4.4.6 Definition & Lemma

Das Schlüsselargument im Beweis oben kann man verallgemeinern:
Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $U \subset V$ ein *$f$-invarianter Unterraum*, d.h. $f(U) \subset U$. Ist dann $V = U \oplus U'$ eine direkte Zerlegung und $p, p' \in \operatorname{End}(V)$ die zugehörigen Projektionen, so gilt

$$\chi_f(t) = \chi_{f|_U}(t) \cdot \chi_{f'}(t),$$

wobei

$$f' := p' \circ f|_{U'} \in \operatorname{End}(U').$$

**Bemerkung** Man kann $f|_U$ als Endomorphismus $f|_U \in \operatorname{End}(U)$ auffassen, da $f(U) \subset U$.

**Beweis** Wie oben: Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von $V$, sodass

- $C = (b_1, \dots, b_k)$ Basis von $U$ und
- $C' = (b_{k+1}, \dots, b_n)$ Basis von $U'$ ist.

Die Darstellungsmatrix von $f$ bzgl. $B$ hat dann Blockgestalt,

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & X' \end{pmatrix} \text{ mit } X = \xi_C^C(f|_U), X' = \xi_{C'}^{C'}(f')$$

Damit folgt die Behauptung (wie oben) mit der Leibniz-Formel.

**Bemerkung** Alternativ kann man das Lemma mit der von $f$ induzierten Quotientenabbildung $f' \in \operatorname{End}(V/U)$ formulieren, wobei

$$f' : V/U \to V/U, v + U \mapsto f'(v+U) := f(v) + U.$$

### 4.4.7 Definition

Ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(f)$ heißt *diagonalisierbar* bzw. *trigonalisierbar*, falls es eine Basis $B$ von $V$ gibt, sodass $\xi_B^B(f) = (x_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ eine Diagonalmatrix

$$i \neq j \Rightarrow x_{ij} = 0$$

bzw. obere Dreiecksmatrix ist,

$$i > j \Rightarrow x_{ij} = 0.$$

**Bemerkung** Falls $\dim V < \infty$, so ist $f \in \mathrm{End}(V)$ genau dann diagonalisierbar, wenn $V$ eine Basis aus Eigenvektoren von $f$ besitzt. Damit kann man „Diagonalisierbarkeit" auch im Falle $\dim V = \infty$ definieren.

**Bemerkung** Ist $f$ trigonalisierbar (oder gar diagonalisierbar), so zerfällt $\chi_f(t)$ in Linearfaktoren: für geeignete $x_1, \dots, x_n \in K$ ist

$$\chi_f(t) = \prod_{j=1}^{n} (t - x_j).$$

### 4.4.8 Bemerkung & Definition

Man nennt eine Matrix $X \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar (bzw. trigonalisierbar), falls $f_X \in \mathrm{End}(K^n)$ diagonalisierbar (bzw. trigonalisierbar) ist.

Dies ist genau dann der Fall, falls es $P \in Gl(n)$ gibt, sodass $PXP^{-1}$ Diagonalmatrix (bzw. obere Dreiecksmatrix) ist.

### 4.4.9 Lemma

Frage: Was sind hinreichende Kriterien dafür? Notwendigkeit kennen wir: $\chi_f(t)$ zerfällt in Linearfaktoren.

Eigenvektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $x_1, \dots, x_m$ eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ sind linear unabhängig.

**Bemerkung** Anders gesagt: Die Summe von Eigenräumen zu paarweise verschiedenen Eigenwerten ist direkt.

**Beweis** Zu zeigen: Ist $\sum_{i=1}^m v_i y_i = 0$ für Koeffizienten $y_1, \dots, y_m \in K$, so folgt $y_1 = \dots = y_m = 0$.
Seien $y_1, \dots, y_m \in K$ und $w_i := v_i y_i$ und $w := \sum_{i=1}^m w_i = \sum_{i=1}^m v_i y_i$. Wiederholte Anwendung von $f$ liefert, wegen $f(w_i) = w_i x_i$

$$(f^{m-1}(w), \dots, f^2(w), f(w), w) = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} x_1^{m-1} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^{m-1} & \cdots & x_m^2 & x_m & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Vandermonde-Matrix $X \in Gl(m)$, da

$$\det X = \prod_{i<j} (x_i - x_j) \neq 0$$

weil die Eigenwerte $x_1, \dots, x_m$ paarweise verschieden sind. Damit folgt aus $w = \sum_{i=1}^m v_i y_i = 0$

$$(w_1, \dots, w_m) = (f^{m-1}(w), \dots, f(w), w)X^{-1} = (0, \dots, 0)$$

also

$$\forall i = 1, \dots, m : 0 = w_i = v_i y_i \text{ und } v_i \neq 0 \Rightarrow y_i = 0.$$

### 4.4.10 Satz

Ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\chi_f(t) \in K[t]$ in Linearfaktoren zerfällt und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte übereinstimmen,

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - x_i)^{k_i} \text{ und } \forall i = 1, \dots, m : k_i = g_i.$$

**Beweis** Ist $f$ diagonalisierbar, so existiert eine Basis $B$ aus Eigenvektoren von $f$, also ist dann

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} E_{g_1} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{g_2} x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{g_m} x_m \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - x_i)^{g_i}.$$

Hat andererseits das charakteristische Polynom diese Gestalt, so wähle man in jedem Eigenraum $\ker(\mathrm{id}_V x_i - f)$ eine Basis $C_i, i = 1, \dots, m$. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, und wegen

$$g_1 + \cdots + g_m = k_1 + \cdots + k_m = \dim V$$

liefert $B := \bigcup_{i=1}^m C_i$ eine Basis von $V$.

### 4.4.11 Korollar

Ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $n = \dim V$ paarweise verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

**Beweis** Für die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten jedes Eigenwerts gilt

$$1 \leq g_i \leq k_i \text{ und } \sum_{i=1}^n k_i \leq n.$$

Damit folgt

$$\forall i = 1, \ldots, n : k_i = 1 \text{ und } \sum_{i=1}^{n} k_i = n,$$

d.h. das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und $\forall i = 1, \ldots, n : k_i = g_i$.

### 4.4.12 Satz

Ein Endomorpismus $f \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

**Bemerkung** Da Diagonalisierbarkeit bzw. Trigonalisierbarkeit durch die Existenz einer Darstellungsmatrix in spezieller Gestalt definiert wurde, wird in den Charakterisierungen immer (implizit) $\dim V < \infty$ angenommen.

**Beweis** Wir wissen schon: Ist $f$ trigonalisierbar, so zerfällt $\chi_f(t)$ in Linearfaktoren. Umkehrung: Beweis durch vollständige Induktion über $n = \dim V$.
Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei die Behauptung für $n - 1$ bewiesen. Für $n$ folgt dann:
Da $\chi_f(t)$ in Linearfaktoren zerfällt

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - x_i)$$

für geeignete $x_1, \ldots, x_n$, ist $x_1$ Eigenwert von $f$. Nun seien

- $b_1$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $x_1$ und $U := [\{b_1\}]$,
- $U' \subset V$ ein zu $U$ komplementärer Unterraum, und
- $p, p' \in \mathrm{End}(V)$ die zur direkten Zerlegung $V = U \oplus U'$ gehörenden Projektionen,

$$U = p(V) = \ker p' \text{ und } U' = p'(V) = \ker p,$$

- und $f' := p' \circ f|_{U'} \in \mathrm{End}(U')$.

Da $U(\neq \{0\})$ $f$-invarianter UR von $V$ ist, faktorisiert das charakteristische Polynom

$$\chi_f(t) = \chi_{f|_U}(t) \cdot \chi_{f'}(t) = (t - x_1) \cdot \chi_{f'}(t);$$

also zerfällt $\chi_{f'}(t)$ in Linearfaktoren,

$$\chi_{f'}(t) = \prod_{i=2}^{n} (t - x_i).$$

Nach Induktionsannahme existiert also eine Basis $B' = (b_2, \dots, b_n)$ von $U'$, sodass $\xi_{B'}^{B'}(f)$ obere Dreiecksmatrix ist. Mit $B = (b_1, \dots, b_n)$ als Basis von $V$ gilt dann:

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} x_1 & Y \\ 0 & \xi_{B'}^{B'}(f') \end{pmatrix}$$

ist obere Dreiecksmatrix.

## 4.5 Der Satz von Cayley-Hamilton

### 4.5.1 Satz

Für $f \in \operatorname{End}(V)$ gilt $\chi_f(f) = 0$.

**Unfug-Beweis** Durch direktes Einsetzen erhält man

$$\chi_f(f) = \det(\mathrm{id}_V f - f) = \det 0 = 0.$$

**Zum Verständnis des Satzes** Ist $V$ ein $K$-VR mit $n = \dim V < \infty$ und $f \in \operatorname{End}(V)$, so ist

$$\chi_f(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k a_k \in K[t]$$

ein (abstraktes) Polynom in der Variablen $t$ $(= e_1 \in K^{\mathbb{N}})$ und der Einsetzungshomomorphismus $\psi_f : K[t] \to \operatorname{End}(V)$ (also ein Algebrahomomophismus) liefert

$$\chi_f(f) = \psi_f\left(\chi_f(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} f^k a_k.$$

Der Satz sagt, dass $0 = \chi_f(f) \in \operatorname{End}(V)$, d.h.

$$\forall v \in V : \chi_f(f)(v) = 0.$$

### 4.5.2 Definition & Lemma

Seien $f \in \operatorname{End}(V)$ und $B$ eine *$f$-zyklische Basis* von $V$, d.h. eine Basis der Form

$$B = (b_1, \dots, b_n) = \left(b, f(b), \dots, f^{n-1}(b)\right).$$

Dann existieren $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ mit

$$f^n(b) + \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) a_k = 0,$$

mit diesen Koeffizienten ist

$$\chi_f(t) = t^n + t^{n-1}a_{n-1} + \ldots, + ta_1 + a_0.$$

**Bemerkung** Im Allgemeinen existiert zu $f \in \mathrm{End}(V)$ keine $f$-zyklische Basis von $V$, z.B. für $f = \mathrm{id}_V$ und $\dim V \geq 2$.

**Beweis** Da $B = (b, f(b), \ldots, f^{n-1}(b))$ eine Basis ist, ist $f^n(b) \in [B]$ und damit existieren die $a_k$ mit

$$0 = f^n(b) + \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b)a_k.$$

Damit ist die Darstellungsmatrix von $f$

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} =: X$$

und Entwicklung von $\chi_f(t) = \det(E_n t - \xi_B^B(f))$ nach der ersten Zeile(nach Laplaceschem Entwicklungssatz – dieser Satz war „nur“ eine Methode, die Terme in der Leibniz-Formel zu sortieren) liefert

$$\det(E_n t - X) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \vdots & \vdots & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= t \det \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & t & \vdots & \vdots & a_2 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} a_0 \det(X_{1n})$$

$$\overset{\text{mit Ind.}}{=} t\{t^n n - 1 + tn - 2a_{n-1} + \cdots + a_1\} + a_0 = t^n + t^{n-1}a_{n-1} + \ldots, + ta_1 + a_0,$$

wie behauptet.

**Beispiel** Zur Lösung des reellen *Anfangswertproblems*

$$y'' + 2y' - 3y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

schreiben wir dieses als System erster Ordnung mit dem Ansatz $y_1 = y$ und $y_2 = y'$:

Daraus erhält man mit $Y = (y_1, y_2)$

$$\begin{aligned} Y' &= (y_1', y_2') = (y', y'') = (y', -2y' + 3y) \\ &= (y, y') \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = YX \text{ mit } X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. wir suchen eine $\frac{d}{ds}$-zyklische Basis $(y, \frac{d}{ds}y) = (y, y')$ eines 2-dim UVR $[(y, y')] \subset C^\infty(\mathbb{R})$ bezüglich derer $\frac{d}{ds} \in \mathrm{End}(C^\infty(\mathbb{R}))$ Darstellungsmatrix $X$ hat.

Der Ansatz $y(s) = e^{xs}(v_0, v_1)$ reduziert das AWP auf ein Eigenwertproblem.

$$0 = \left(Y' - YX\right)(s) = \left(\frac{d}{ds}Y - YX\right)(s) = \underbrace{e^{xs}(v_0, v_1)}_{Y}\{E_2 x - X\}$$

bzw. (vgl. Abschnitt 3.1) mit dem zur transponierten Matrix $X^t$ assoziierten Endomorphismus $f_{X^t} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$

$$f_{X^t}(v) = vx \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und } v \in \mathbb{R}^2.$$

Nach obigem Lemma sind die Eigenwerte Lösungen der Gleichung

$$0 = \chi_{X^t}(x) = \chi_X(x) \overset{\text{Lemma}}{=} x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3).$$

Also sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ die Eigenwerte; zugehörige Eigenvektoren erhält man als Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$(0,0) = (v_0, v_1)(E_2 x_i - X) = (v_0, v_1) \begin{pmatrix} x_i & -3 \\ -1 & x_i + 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} (v_0, v_1) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} & \text{für } i = 1 \\ (v_0, v_1) \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{für } i = 2 \end{cases}$$

Damit bekommt man Eigenvektoren $(v_0, v_1) = (1, 1)$ zum Eigenwert $x = 1$ und $(v_0, v_1) = (1, -3)$ zum Eigenwert $x = -3$.

Die allgemeine, durch *Superposition* (Linearkombination) erhaltene Lösung der Differentialgleichung ist also

$$s \mapsto Y(s) = e^{s}(1,1)c_1 + e^{-3s}(1,-3)c_2$$

mit Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Abgleich der „Integrationskonstanten“ $c_1$ und $c_2$ mit den Anfangsbedingungen liefert dann die Lösung

$$s \mapsto y(s) = 3e^s + e^{-3s}.$$

**Bemerkung** Man bemerke: $(y, y')$ ist linear unabhängig für die Lösung, ist also tatsächlich $\frac{d}{ds}$-zyklische Basis eines 2-dim URs $[(y, y')] \subset C^\infty(\mathbb{R})$ – obwohl die den gleichen Raum aufspannenden „Basislösungen“

$$s \mapsto e^s \text{ und } s \mapsto e^{-3s}$$

keine $\frac{d}{ds}$-zyklischen Basen erzeugen, da sie lineare Differentialgleichungen erster Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) lösen.

### 4.5.3 Korollar

Besitzt $V$ eine $f$-zyklische Basis für $f \in \operatorname{End}(V)$, so gilt $\chi_f(f) = 0$.

**Beweis** Sei also $B = (b_1, \dots, b_n) = (b, f(b), \dots, f^{n-1}(b))$ $f$-zyklische Basis von $V$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ so, dass

$$0 = f^n(b) + \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) a_k.$$

Dann gilt

$$\chi_f(f)(b_1) = \chi_f(f)(b) = \left( f^n + \sum_{k=0}^{n-1} f^k a_k \right)(b) = f^n(b) + \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) a_k.$$

Damit folgt für $i = 2, \dots, n$

$$\chi_f(f)(b_i) = \chi_f(f)\left(f^{i-1}(b)\right) \overset{3}{=} f^{i-1}\left(\chi_f(f)(b)\right) = 0.$$

Da also $V = [B] \subset \ker \chi_f(f)$, folgt $\chi_f(f) = 0$.

**Bemerkung** Damit ist der Satz von Cayley-Hamilton bewiesen, sofern $V$ eine $f$-zyklische Basis besitzt.

### 4.5.4 Lemma

Für $f \in \operatorname{End}(V)$ und $v \in V^\times$ sei

$$U := \left[ \left( f^k(v) \right)_{k \in \mathbb{N}} \right].$$

[3] Aufgrund der Linearität der Endomorphismen $\operatorname{End}(V)$ als unitäre Algebra.

Damit ist $U$ ein $f$-invarianter UVR von $V$. Ist $\dim V < \infty$, so besitzt $U$ eine $f$-zyklische Basis $(v, f(v), \ldots, f^{r-1}(v))$.

**Beweis** Offenbar ist $U$ $f$-invarianter UR:

- $U$ ist (als lineare Hülle einer Familie) ein UVR von $V$;
- da gilt
$$\forall k \in \mathbb{N} : f\left(f^k(v)\right) = f^{k+1}(v) \in U$$
folgt, dass $f(U) = f\left(\left[\left(f^k(v)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right]\right) = \left[\left(f^{k+1}(v)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right] \subset U$.

Ist $\dim V < \infty$ und $v \neq 0$, so existiert $r \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left(v, \ldots, f^{r-1}(v)\right) \text{ linear unabhängig und } f^r(v) \in \left[\left(v, \ldots, f^{r-1}(v)\right)\right];$$

damit ist $(v, f(v), \ldots, f^{r-1}(v))$ $f$-zyklische Basis von $U$:

1. $(v, \ldots, f^{r-1}(v))$ ist linear unabhängig.
2. $f^r(v) \in [(v, \ldots, f^{r-1}(v))]$, damit gilt
$$\forall k \in \mathbb{N} : k \geq r \Rightarrow f^k(v) \in \left[\left(v, \ldots, f^{r-1}(v)\right)\right]$$

wie man z.B. mit Induktion sehen kann: ist

$$f^{k-1}(v) = \sum_{j=0}^{r-1} f^j(v)x_j \in \left[\left(v, \ldots, f^{r-1}(v)\right)\right],$$

so folgt

$$f^k(v) = \sum_{j=1}^{r} f^j(v)x_{j-1} = f^r(v)x_{r-1} + \sum_{j=1}^{r-1} f^j(v)x_{j-1} \in \left[\left(v, \ldots, f^{r-1}(v)\right)\right]$$

und damit

$$U = \left[\left(f^k(v)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right] \in \left[\left(v, \ldots, f^{r-1}(v)\right)\right].$$

### 4.5.5 Beweis vom Satz von Cayley-Hamilton

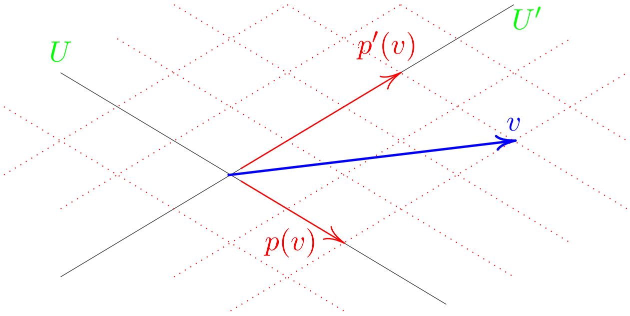
Zu zeigen: für $f \in \mathrm{End}(V)$ gilt $\chi_f(f) = 0$, d.h.

$$\forall v \in V : \chi_f(f)(v) = 0.$$

Seien also $v \in V^\times$ und

$$U := \left[\left(f^k(v)_{k\in\mathbb{N}}\right)\right] \subset V.$$

Mit einem zu $U$ komplementären UVR $U' \subset V$, $V = U \oplus U'$, und den zugehörigen Projektionen




$$p : V \to V, p(V) = U, \ker p = U' \text{ bzw.}$$
$$p' : V \to V, p'(V) = U', \ker p' = U,$$

ist dann $\chi_f(t) = \chi_{f'}(t) \cdot \chi_{f|_U}(t)$ mit $f' := p' \circ f\ |_{U'} \in \mathrm{End}(U')$.
Damit folgt

$$\chi_f(f)(v) = \chi_{f'}(f)\left(\chi_{f|_U}(f)(v)\right) = \chi_{f'}(f)(0) = 0$$

nach Korollar oben, da $U$ eine $f$-zyklische Basis besitzt und $v \in U$.

### 4.5.6 Definition

Sei $V$ ein $K$-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann heißt $p \in K[t]$

- *Annulatorpolynom von $f$*, falls $p(f) = 0$;
- *Minimalpolynom von $f$*, falls $p(t)$ normiertes Annulatorpolynom minimalen Grades ist.

**Bemerkung** Jedes (polynomiale) Vielfache

$$p(t) = q(t)\mu_f(t) \in K[t]$$

eines Minimalpolynoms $\mu_f(t)$ von $f$ ist ein Annulatorpolynom, da

$$\forall v \in V : p(f)(v) = (q(f) \circ \mu_f(f))(v) = q(f)(\mu_f(f)(v)) = q(f)(0) = 0$$

**Bemerkung** Nach dem Satz von Cayley-Hamilton hat jeder Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(f)$ ein Annulatorpolynom, also auch ein Minimalpolynom – wenn $\dim V < \infty$.

### 4.5.7 Lemma

Ist $p(t) \in K[t]$ Annulatorpolynom von $f \in \mathrm{End}(V)$, so ist jedes Minimalpolynom $\mu_f(t) \in K[t]$ Teiler von $p(t)$.

**Beweis** Seien $q(t), r(t) \in K[t]$ die (nach dem euklidischen Divisionsalgorithmus) eindeutigen Polynome mit

$$p(t) = q(t)\mu_f(t) + r(t) \text{ und } \deg r(t) < \deg \mu_f(t).$$

Dies liefert

$$r(f) = p(f) - q(f) \circ \mu_f(f) = 0 - q(f)(0) = 0,$$

also $r(t) = 0$, denn andernfalls wäre $\mu_f(t)$ nicht normiertes Annulatorpolynom minimalen Grades.

### 4.5.8 Korollar

Das Minimalpolynom $\mu_f(t) \in K[t]$ eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ ist eindeutig.

**Beweis** Sind $\mu_f(t), \tilde{\mu}_f(t) \in K[t]$ Minimalpolynome von $f \in \mathrm{End}(V)$, so gilt

$$\exists! q(t) \in K[t] : \tilde{\mu}_f(t) = q(t)\mu_f(t)$$

wobei

- $\deg q(t) = 0$, da $\deg \tilde{\mu}_f(t) \leq \deg \mu_f(t)$,
- $q(t) = 1$, da $\tilde{\mu}_f(t)$ und $\mu_f(t)$ normiert sind.

Daher ist

$$\tilde{\mu}_f(t) = 1 \cdot \mu_f(t) = \mu_f(t).$$

**Bemerkung** Wie für Endomorphismen kann man Annulatorpolynome, Minimalpolynome, usw. auch für Matrizen $X \in K^{n \times n}$ definieren:

- mithilfe der assoziierten Endomorphismen $f_X \in \mathrm{End}(K^n)$, oder
- mithilfe des Einsetzungshomomorphismus $\psi_X : K[t] \to K^{n \times n}$.

Beide Methoden liefern das gleiche Ergebnis durch den Algebrahomomorphismus zwischen den Endomorphismen und den quadratischen Matrizen.

**Bemerkung & Beispiel** Zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, so zerfällt auch das Minimalpolynom in dieselben Linearfaktoren:

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - x_i)^{k_i} \Rightarrow \mu_f(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - x_i)^{m_i},$$

wobei für $i = 1, \ldots, m$ gilt $1 \leq m_i \leq k_i$.

Zum Beispiel:

- $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\chi_{f_X} = t(t-1) = \mu_{f_X}(t)$

- $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\chi_{f_X} = (t-1)^2 \Rightarrow \mu_{f_X}(t) = (t-1)$

- $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\chi_{f_X} = (t-1)^2 = \mu_{f_X}(t)$.

**Bemerkung** Die Definition des charakteristischen Polynoms ist etwas problematisch:

$$\chi_f(t) := \det(\mathrm{id}_V t - f)$$

ist „gut“ für Polynomfunktionen, aber „nicht korrekt“ für abstrakte Polynome; die Definition

$$\chi_f(t) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left( \delta_{\sigma(j)j} - x_{\sigma(j)j} \right) \in K[t]$$

mithilfe der Darstellungsmatrix $X = (x_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} = \xi_B^B(f)$ von $f$ bzgl. einer Basis $B$ und der Leibniz-Formel ist nicht sehr übersichtlich. Vergleiche auch [Axler, Kap. 8] zum Thema.

Im Gegensatz dazu: Definitionen von „Annulatorpolynom“ und „Minimalpolynom“ etc. sind einfach (konzeptionell).

Frage: Braucht man das charakteristische Polynom überhaupt? Man kommt auch ohne das charakteristische Polynom „recht weit“:

- Für $\dim V < \infty$ folgt die Existenz eines Annulatorpolynoms, und damit des Minimalpolynoms recht einfach wegen $\dim \operatorname{End}(V) < \infty$.

- Durch Einsetzen: Jeder Eigenwert eines Endomorphismus ist Nullstelle seines Minimalpolynoms.

- Umgekehrt ist auch jede Nullstelle des Minimalpolynoms Eigenwert – ist $\mu_f(x) = 0$, so existiert $q(t) \in K[t]$ mit
  $$\mu_f(t) = q(t)(t-x);$$
  wäre $x$ kein Eigenwert, also $f - \mathrm{id}_V x \in Gl(V)$, so gälte
  $$(f - \mathrm{id}_V x)(V) = V \Rightarrow \{0\} = \mu_f(f)(V) = q(f)(V),$$
  d.h. $\mu_f(t)$ wäre nicht Minimal-Polynom.

- Ein Endomorphismus ist diagonalisierbar, wenn sein Minimal-Polynom in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Nachteil des Minimal-Polynoms: schwierig berechenbar?

# 5 Längen- und Winkelmessung

Plan: Längen und Winkel (in „Punkträumen“ $\cong$ affinen Räumen) verstehen.
Algebraisch: via Produkte (bilineare – oder fast bilineare – Abbildungen).

## 5.1 Bilinearformen & Sesquilinearformen

**Zur Erinnerung** Sind $V$ und $W$ $K$-VR, so nennt man eine Abbildung

$$\beta : V \times V \to W$$

*bilinear* oder ein *Produkt*, wenn sie in jedem Argument linear ist:

(i) $\forall w \in V : V \ni v \mapsto \beta(v, w) \in W$ ist linear;

(ii) $\forall v \in V : V \ni w \mapsto \beta(v, w) \in W$ ist linear.

Zu vorgegebenen Werten $\beta_{ij} \in W$ auf einer Basis $(b_i)_{i \in I}$ von $V$ existiert dann eine eindeutige Bilinearform $\beta$ (Fortsetzungssatz Abschnitt 4.3):

$$\exists! \beta : V \times V \to W \text{ bilinear} : \forall i, j \in I : \beta(b_i, b_j) = \beta_{ij}.$$

**Bemerkung** Man kann auch bilineare Abbildungen $V \times V' \to W$ betrachten und, zum Beispiel, auch einen Fortsetzungssatz beweisen.

Wir benötigen eine Verallgemeinerung in eine andere Richtung:

### 5.1.1 Definition

Seien $V$ ein $K$-VR und $K \ni x \mapsto \overline{x} \in K$ ein (Körper-) Automorphismus, d.h. eine bijektive Abbildung mit

$$\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y} \text{ und } \overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

für alle $x, y \in K$. Eine Abbildung $\sigma : V \times V \to K$ heißt dann *Sesquilinearform* (bzgl. $\bar{.}$), falls

(i) $\forall v \in V : V \ni w \mapsto \sigma(v, w) \in K$ ist linear, d.h. $\sigma(v, .) \in V^*$;

(ii) $\forall w \in V : V \ni v \mapsto \sigma(v, w) \in K$ ist *semilinear*, d.h.

   (a) $\forall v, v' \in V : \sigma(v + v', w) = \sigma(v, w) + \sigma(v', w)$ und

   (b) $\forall v \in V \forall x \in K : \sigma(vx, w) = \overline{x}\sigma(v, w)$.

**Beispiel** Die Identität $K \ni x \mapsto \overline{x} := x \in K$ ist offensichtlich ein Körperautomorphismus für jeden Körper $K$. *Bilinearformen* sind genau die Sesquilinearformen bezüglich $\mathrm{id}_K$.

**Beispiel** Für $K = \mathbb{C}$ liefert *komplexe Konjugation* einen Körperautomorphismus (keinen VR-Automorphismus, vgl. Abschnitt 1.4):

$$\mathbb{C} \ni x + iy \mapsto \overline{x + iy} := x - iy \in \mathbb{C}.$$

Dieses Beispiel ist unser Grund für die Einführung des Begriffs der Sesquilinearform.

**Bemerkung** Ist $\sigma$ Bilinearform und Sesquilinearform bezüglich $\overline{\cdot}$, so ist $\sigma$ oder $\overline{\cdot}$ trivial:

$$\forall x \in K \forall v, w \in V : 0 = \sigma(vx, w) - \sigma(vx, w) = (x - \overline{x})\sigma(v, w)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall v, w \in V : \sigma(v, w) = 0 \text{ oder} \\ \exists v, w \in V : \sigma(v, w) \neq 0 \wedge \forall x \in K : \overline{x} = x. \end{cases}$$

**Bemerkung** In $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gibt es nur *einen* Körperautomorphismus: $\mathrm{id}_K$. Ein Automorphismus $\overline{\cdot}$ von $\mathbb{C}$ mit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ ist trivial, $\overline{\cdot} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ oder die komplexe Konjugation.

### 5.1.2 Fortsetzungssatz für Sesquilinearformen

Sind $V$ ein $K$-VR und $K \ni x \mapsto \overline{x} \in K$ ein Körperautomorphismus, $(b_i)_{i \in I}$ Basis von $V$ und $(s_{ij})_{i,j \in I}$ eine Familie in $K$, so existiert eine eindeutige Sesquilinearform $\sigma$ mit

$$\forall i, j \in I : \sigma(b_i, b_j) = s_{ij}.$$

**Beweis** Wir imitieren den Beweis unseres ersten Fortsetzungssatzes für lineare Abbildungen:

Eindeutigkeit: Sei $\sigma$ eine Sesquilinearform mit der gewünschten Eigenschaft oben; gilt

$$v = \sum_{i \in I} b_i x_i \text{ und } w = \sum_{i \in I} b_i y_i$$

so folgt

$$\sigma(v, w) = \sum_{i,j \in I} \overline{x_i} \sigma(b_i, b_j) y_j = \sum_{i,j \in I} \overline{x_i} s_{ij} y_j$$

d.h. $\sigma$ ist durch die Familie $(s_{ij})_{i,j \in I}$ eindeutig bestimmt.

Existenz: Da jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutige Basisdarstellung $v = \sum_{i \in I} b_i x_i$ hat, wird durch

$$\sigma : V \times V \to K, (v, w) = \left( \sum_{i \in I} b_i x_i, \sum_{j \in I} b_j y_j \right)$$

$$\mapsto \sigma(v,w) := \sum_{i,j\in I} \overline{x_i} s_{ij} y_j$$

eine Abbildung wohldefiniert. Offenbar (nachrechnen) ist $\sigma$ dann sesquilinear.

**Bemerkung** Jede Sesquilinearform $\sigma : V \times V \to K$ liefert eine semi-lineare Abbildung

$$V \ni v \mapsto \sigma(v,.) \in V^*.$$

Mit einem „Fortsetzungssatz für semi-lineare Abbildungen“ (Aufgabe 34) hätte man auch den früher skizzierten Beweis für bilineare Abbildungen imitieren können.

### 5.1.3 Buchhaltung

**Gramsche Matrix** Ist $n = \dim V < \infty$ und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis von $V$, so kann man eine Sesquilinearform $\sigma : V \times V \to K$ durch eine Matrix $S$ beschreiben:

$$\begin{array}{c|ccc}
\sigma & b_1 & \ldots & b_n \\ \hline
b_1 & s_{11} & & s_{1n} \\
\vdots & & \ddots & \\
b_n & s_{n1} & & s_{nn}
\end{array}$$

Diese Matrix

$$\Gamma_B(\sigma) = S = (\sigma(b_i, b_j))_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$$

heißt die Darstellungsmatrix oder *Gramsche Matrix* von $\sigma$ bezüglich $B$. Für Vektoren

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = BX \text{ und } w = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j = BY$$

ist dann

$$\sigma(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x_i} s_{ij} y_j = \overline{X}^t SY$$

$$= (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} s_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} s_{nj} y_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} y_j.$$

**Transformationsformel** Ein Basiswechsel $B' = BP$ mit $P = \xi^B_{B'} \in Gl(n)$ liefert dann

$$v = BX = (B'P^{-1})X = B' \underbrace{(P^{-1}X)}_{X'} \text{ und } w = B' \underbrace{(P^{-1}Y)}_{Y'}$$

und damit für $X, Y \in K^{n\times 1}$

$$\overline{X}^t SY = \overline{X'}^t \underbrace{(\overline{P}^t SP)}_{S'} Y'$$

woraus die *Transformationsformel für Gramsche Matrizen* folgt

$$S' = \overline{P}^t SP,$$

wobei $\overline{P}^t$ die Transponierte der Matrix mit Einträgen $\overline{p_{ij}}$ ist.

**Äquivalenz von Matrizen** Dies liefert einen weiteren Äquivalenzbegriff für quadratische Matrizen $S \in K^{n\times n}$:

$$S' \sim S :\Leftrightarrow \exists P \in Gl(n) : S' = \overline{P}^t SP.$$

Die verschiedenen Begriffe der Äquivalenz von Matrizen (vgl. 3.1 & 4.2) spiegeln die verschiedenen Funktionen/Bedeutungen von Matrizen wider.

**Bemerkung** Die Menge der Sesquilinearformen auf einem $K$-VR ist selbst ein $K$-VR. Ist $n = \dim V < \infty$ und $B$ Basis von $V$, so erhält man (Fortsetzungssatz) einen Isomorphismus

$$K^{V\times V} \supset \{\sigma : V \times V \to K \text{ Sesquilinearform}\} \ni \sigma \mapsto \Gamma_B(\sigma) \in K^{n\times n}.$$

### 5.1.4 Beispiel & Definition

Sei $\bar{.} : K \to K$ Körperautomorphismus; jedes $S \in K^{n\times n}$ liefert dann eine eindeutige Sesquilinearform

$$\sigma_S : K^n \times K^n \to K \text{ mit } (e_i, e_j) \mapsto \sigma_S(e_i, e_j) := s_{ij},$$

die zu $S$ *assoziierte Sesquilinearform.*

Für $S = E_n$ bezeichnet man $\sigma_S$ auch als *kanonische Sesquilinearform.*

### 5.1.5 Definition

Eine Sesquilinearform $\sigma : V \times V \to K$ auf einem $K$-VR bzgl. eines Automorphismus $\bar{.} : K \to K$ nennen wir

(i) *symmetrisch*, falls $\quad \forall v, w \in V : \sigma(w, v) = \overline{\sigma(v, w)};$

(ii) *schiefsymmetrisch*, falls $\quad \forall v, w \in V : \sigma(w, v) = -\overline{\sigma(v, w)};$

(iii) *alternierend*, falls $\quad \forall v \in V : \sigma(v, v) = 0.$

Falls $K = \mathbb{C}$ und $\bar{.}$ komplexe Konjugation sind, so nennt man eine symmetrische Sesquilinearform auch *Hermitesche Sesquilinearform.*

**Bemerkung** Ist $\sigma$ nicht-trivial und (schief-)symmetrisch, so muss $\bar{\cdot}$ eine Involution sein.

Nämlich: Wähle $v, w \in V$ mit $\sigma(v,w) = 1$; dann gilt

$$\forall x \in K : \overline{\overline{x}} = \overline{\sigma(vx,w)} = \pm\sigma(w,vx) = \overline{\overline{x}}\sigma(v,w) = \pm\sigma(w,v)x = \overline{\sigma(v,w)}x = x.$$

Ist $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und $\bar{\cdot}$ Involution, so kann jede Sesquilinearform in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil zerlegt werden:

$$\forall v, w \in V : \sigma(v,w) = \frac{1}{2}\left(\sigma(v,w) + \overline{\sigma(w,v)}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma(v,w) - \overline{\sigma(w,v)}\right).$$

**Bemerkung** Ist $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_K$, so sind „alternierend“ und „schiefsymmetrisch“ äquivalent für eine Sesquilinearform $\sigma$.

Andererseits ist jede alternierende Sesquilinearform bilinear, d.h. $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_K$ oder $\sigma = 0$.

**Buchhaltung** Unter den folgenden Annahmen:

- $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und $\bar{\cdot}$ Involution;
- $n = \dim V < \infty$ und $B$ ist Basis von $V$;

gilt für die Gramsche Matrix $S = \Gamma_B(\sigma)$ einer Sesquilinearform $\sigma$ auf $V$:

- $0 = \overline{S}^t - S \Leftrightarrow \sigma$ symmetrisch;[1]
- $0 = S + \overline{S}^t \Leftrightarrow \sigma$ schiefsymmetrisch.

Nämlich:

$$\overline{S}^t = \begin{pmatrix} \overline{\sigma(b_1,b_1)} & \overline{\sigma(b_1,b_2)} & \cdots & \overline{\sigma(b_1,b_n)} \\ \overline{\sigma(b_2,b_1)} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \overline{\sigma(b_n,b_1)} & & \cdots & \overline{\sigma(b_n,b_n)} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \overline{\sigma(b_1,b_1)} & \overline{\sigma(b_2,b_1)} & \cdots & \overline{\sigma(b_n,b_1)} \\ \overline{\sigma(b_1,b_2)} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \overline{\sigma(b_1,b_n)} & & \cdots & \overline{\sigma(b_n,b_n)} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma(b_1,b_1) & \sigma(b_1,b_2) & \cdots & \sigma(b_1,b_n) \\ \sigma(b_2,b_1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma(b_n,b_1) & & \cdots & \sigma(b_n,b_n) \end{pmatrix}$$

[1] bis auf Faktor 2: Gramsche Matrix des schiefsymmetrischen Anteils von $\sigma$

### 5.1.6 Definition

Sei $\sigma$ symmetrische Sesquilinearform auf einem Vektorraum $V$. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal* (bzgl. $\sigma$),

$$w \perp v, \text{ falls } \sigma(v, w) = 0.$$

Der *Orthogonalraum* einer Menge $\emptyset \neq S \subset V$ ist der UVR

$$S^\perp := \bigcap_{s \in S} \ker \underbrace{\sigma(s, .)}_{\in V^*}.$$

**Bemerkung** Wegen der Symmetrie von $\sigma$ ist die *Orthogonalitätsrelation* symmetrisch,

$$w \perp v \Leftrightarrow v \perp w.$$

**Bemerkung** Da $\forall v \in V : \sigma(v, .) \in V^*$, ist der Orthogonalraum wohldefiniert und (als Schnitt von UVR) ein UVR. Offenbar gilt

$$\tilde{S} \subset S \Rightarrow \tilde{S}^\perp \supset S^\perp.$$

Damit folgt direkt $S^\perp \supset [S]^\perp$, sind andererseits $w \in S^\perp$ und $v \in [S]$, so gilt

$$v = \sum_{s \in S} s x_s \Rightarrow \sigma(v, w) = \sum_{s \in S} \overline{x_s} \sigma(s, w) = 0, \text{ da } \forall s \in S : w \perp s$$

d.h. $w \in S^\perp \Rightarrow w \in [S]^\perp$. Insgesamt ist also

$$\forall S \subset V : [S]^\perp = S^\perp.$$

Ähnlich zeigt man für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von UVR $U_i \subset V$:

$$\left( \sum_{i \in I} U_i \right)^\perp = \bigcap_{i \in I} U_i^\perp.$$

**Bemerkung & Beispiel** Für $S \subset V$ kann man $S^{\perp\perp} = \left(S^\perp\right)^\perp$ betrachten; im Allgemeinen gilt

$$S \subset S^{\perp\perp} \text{ aber } S \neq S^{\perp\perp}.$$

Ist etwa $\sigma = 0$, so ist $S^\perp = V$ für jede Menge $\emptyset \neq S \subsetneq V$; also ist

$$S^{\perp\perp} = V^\perp = V \neq S.$$

### 5.1.7 Definition

$V^\perp$ ist der *Radikal(-raum)* eines VR mit symmetrischer Sesquilinearform $\sigma$; ist $V^\perp = \{0\}$, so heißt $\sigma$ *radikalfrei* oder *nicht-degeneriert*, andernfalls *degeneriert*.

**Beispiel** Betrachte $V = \mathbb{R}^2$ mit Standardbasis $(e_1, e_2)$.

Ist für eine symmetrische Sesquilinearform (Bilinearform) $\sigma$ auf $V$

$$\sigma(e_1, e_1) = 0, \sigma(e_1, e_2) = 1, \sigma(e_2, e_2) = 0$$

so ist $\sigma$ nicht-degeneriert, $V^\perp = \{0\}$, da

$$v = e_1x_1 + e_2x_2 \perp e_1, e_2 \Rightarrow \begin{cases} 0 = \sigma(e_1, v) = x_2 \\ 0 = \sigma(e_2, v) = x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0,$$

also $V^\perp = \{0\}$, d.h. $\sigma$ ist nicht-degeneriert.

Ist aber

$$\sigma(e_1, e_1) = 1, \sigma(e_1, e_2) = 1, \sigma(e_2, e_2) = 1,$$

so ist $V^\perp = [e_1 - e_2]$, d.h. $\sigma$ ist degeneriert.

### 5.1.8 Lemma

Ist $U \subset V$ ein zum Radikal von $(V, \sigma)$ komplementärer UVR, $V = V^\perp \oplus U$, so ist

$$\sigma\big|_{U\times U} : U \times U \to K$$

radikalfrei.

**Beweis** Sei $u \in U$ im Radikal von $(U, \sigma\big|_{U\times U})$, d.h. es gelte $\forall v \in U : \sigma(v, u) = 0$. Weil

$$\forall v \in V^\perp \forall w \in V : v \perp w \Rightarrow \forall v \in V^\perp : v \perp u$$

erhalten wir $u \in U \cap V^\perp = \{0\}$.

**Beispiel** Die Einschränkung von $\sigma$ mit (wie oben)

$$\forall i, j \in \{1, 2\} : \sigma(e_i, e_j) = 1$$

auf jeden UVR $U = [e_1x_1 + e_2x_2]$ mit $x_1 + x_2 \neq 0$ ist radikalfrei, denn

$$\sigma(e_1x_1 + e_2x_2, e_1x_1 + e_2x_2) = (x_1 + x_2)^2 \neq 0.$$

## 5.2 Der Satz von Sylvester

**Beispiel** Ist $\sigma$ symmetrische Sesquilinearform auf $V = \mathbb{Z}_2^2$ mit

$$\sigma(e_1, e_1) = 0, \sigma(e_1, e_2) = 1, \sigma(e_2, e_2) = 0,$$

so ist $\sigma$ (wie vorher) nicht-degeneriert, $V^\perp = \{0\}$; trotzdem gilt

$$\forall v \in V : \sigma(v, v) = 0.$$

Das folgende Lemma zeigt, dass dies ein degenerierter Fall ist:

### 5.2.1 Lemma & Definition (Polarisation)

Ist $\sigma$ symmetrische Bilinearform auf einem $K$-VR $V$ über einem Körper $K$ mit $\operatorname{Char} K \neq 2$, so gilt

$$\forall v, w \in V : \sigma(v, w) = \frac{1}{2}\left(q(v + w) - q(v) - q(w)\right),$$

wobei

$$q : V \to K, v \mapsto q(v) := \sigma(v, v)$$

die zu $\sigma$ gehörige *quadratische Form* bezeichnet.

**Beweis** Ausrechnen: sind $v, w \in V$, so gilt

$$\begin{aligned} q(v + w) &= \sigma(v + w, v + w) \\ &= \sigma(v, v) + \sigma(v, w) + \sigma(w, v) + \sigma(w, w) \\ &= q(v) + 2\sigma(v, w) + q(w) \end{aligned}$$

diese Gleichung kann (da $\operatorname{Char} K \neq 2$) nach $\sigma(v, w)$ aufgelöst werden.

**Bemerkung** Ist $\operatorname{Char} K = 0$ so kann man statt

$$q(v + w) = q(v) + 2\sigma(v, w) + q(w)$$

auch

$$q(v + w) - q(v - w) = 4\sigma(v, w)$$

für die Polarisation verwenden.

### 5.2.2 Lemma

Ist $\sigma$ symmetrische Sesquilinearform auf einem $K$-VR $V$ über einem Körper $K$ mit $\operatorname{Char} K \neq 2$, so gilt

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \forall v \in V : \sigma(v, v) = 0.$$

**Bemerkung** Im Falle einer Bilinearform folgt dies direkt mit Polarisation.

Im Falle eines nicht-trivialen Körperautomorphismus $\bar{\cdot}$ liefert $v \mapsto \sigma(v, v)$ wegen

$$K \ni x \mapsto \sigma(vx, vx) - x^2\sigma(v, v) = (\overline{x}x - x^2)\sigma(v, v) \neq 0$$

im Allgemeinen *keine* quadratische Form:

$$\exists x \in K : \exists v \in V : \sigma(vx, vx) = \overline{x}\sigma(v, v)x \neq x^2\sigma(v, v).$$

**Beweis** Ist $\sigma = 0$, so folgt trivialerweise

$$\forall v \in V : \sigma(v, v) = 0.$$

Sei nun $\sigma \neq 0$, d.h.

$$\exists v, w \in V : \sigma(v, w) \neq 0.$$

Wie vorher berechnet man für $v, w \in V$

$$\sigma(v + w, v + w) = \sigma(v, v) + \sigma(v, w) + \overline{\sigma(v, w)} + \sigma(w, w).$$

Wähle nun $v, w \in V$ mit $\sigma(v, w) \neq 0$, o.B.d.A. $\sigma(v, w) = 1$. [2] Ist $\sigma(v, v) \neq 0$ oder $\sigma(w, w) \neq 0$, so sind wir fertig.

Gilt jedoch $\sigma(v, v) = \sigma(w, w) = 0$, so liefert

$$\sigma(v + w, v + w) = 0 + 1 + 1 + 0 \neq 0$$

wieder die Behauptung, da $\operatorname{Char} K \neq 2$.

**Vereinbarung** Im Folgenden schließen wir $\operatorname{Char} K = 2$ aus.

[2] Ggf. ersetzt man $w$ durch $\frac{w}{\sigma(v,w)}$.

### 5.2.3 Lemma

Für eine symmetrische Sesquilinearform $\sigma$ auf $V$ und $b \in V$ mit $\sigma(b,b) \neq 0$ gilt

$$V = [b] \oplus \{b\}^{\perp}.$$

**Beweis** Es gilt $V = [b] + \{b\}^{\perp}$, da für $v \in V$

$$v = u + b\frac{\sigma(b,v)}{\sigma(b,b)} \text{ mit } u := v - b\frac{\sigma(b,v)}{\sigma(b,b)} \perp b;$$ [3]

ist $v \in [b] \cap \{b\}^{\perp}$, so gilt

$$v = bx \text{ für ein } x \in K \text{ und}$$

$$0 = \sigma(b,v) = \sigma(b,bx) = \sigma(b,b)x$$

$$\Rightarrow x = 0 \wedge v = 0,$$

d.h. $[b] \cap \{b\}^{\perp} = \{0\}$ und damit folgt die Behauptung.

**Bemerkung** Ist $\sigma(b,b) = 0$ für $b \in V$, so gilt

$$b \in [b] \cap \{b\}^{\perp},$$

d.h. ist $b \neq 0$, so ist $[b] \cap \{b\}^{\perp} \neq \{0\}$. Außerdem ist dann $\sigma|_{U \times U}$ für $U := \{b\}^{\perp}$ degeneriert, da

$$\exists v = b \in U^{\times} \forall u \in U : u \perp b.$$

### 5.2.4 Diagonalisierungslemma

Zu jeder symmetrischen Sesquilinearform $\sigma$ auf einem endlichdimensionalen VR $V$, also $n = \dim V < \infty$, gibt es eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von $V$, die $\sigma$ *diagonalisiert*, d.h. für die gilt

$$\sigma(b_i, b_j) = 0, \text{ falls } i \neq j.$$

**Beweis** Durch Induktion über $n$.

Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial (denn $i \neq j$ existiert nicht).

Sei die Behauptung also für $\dim V = n$ bewiesen. Ist $\sigma$ symmetrische Sesquilinearform auf $V$ mit $\dim V = n + 1$ und o.B.d.A. $\sigma \neq 0$, also

$$\exists b \in V : \sigma(b,b) \neq 0$$

[3] denn $\sigma(b,u) = \sigma(b, v - b\frac{\sigma(b,v)}{\sigma(b,b)}) = \sigma(b,v) - \sigma(b,b)\frac{\sigma(b,v)}{\sigma(b,b)} = 0$

nach obigem Lemma lässt sich also $V$ aufspalten in

$$V = [b] \oplus U \text{ mit } U := \{b\}^\perp$$

und $\dim U = n$. Nach Annahme existiert eine Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von $U$, die $\sigma|_{U \times U}$ diagonalisiert. Da $b \perp b_1, \dots, b_n \in U$ liefert $B := (b, b_1, \dots, b_n)$ eine $\sigma$-diagonalisierende Basis von $V$.

**Bemerkung** Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine $\sigma$-diagonalisierende Basis, also

$$s_{ij} = \sigma(b_i, b_j) = 0 \text{ für } i \neq j$$

so ist

$$\sigma(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} s_{ii} x_i \text{ für } v = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

Sind $a_1, \dots, a_n \in K^\times$ und $b'_i = b_i a_i$, so zeigt

$$s'_{ij} = \sigma(b'_i, b'_j) = \overline{a_i} \sigma(b_i, b_j) a_j = \overline{a_i} s_{ij} a_j,$$

dass $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ eine weitere $\sigma$-diagonalisierende Basis ist. Man kann also die $s_{ii}$ „adjustieren“, sofern man die (unabhängigen) Gleichungen

$$s'_{ii} = \overline{a_i} s_{ii} a_i$$

für gegebene $s'_{ii}$ (nach den $a_i$) lösen kann. Zum Beispiel:

### 5.2.5 Korollar

Ist $\sigma$ symmetrische Bilinearform auf einem $\mathbb{C}$-VR $V$ mit $\dim V < \infty$, so besitzt $V$ eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$, sodass

$$\exists r \in \mathbb{N} : s_{ij} = \sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \leq r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Bemerkung** D.h.

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Beweis** Sei (nach Diagonalisierungslemma) $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ eine $\sigma$-diagonalisierende Basis von $V$; durch Umsortierung der Basisvektoren kann man erreichen, dass

$$s'_{11}, \dots, s'_{rr} \neq 0 \text{ und } s'_{r+1,r+1} = \dots = s'_{nn} = 0$$

für ein $r \in \{0, \ldots, n\}$. Mit einer Wahl der Wurzel bilden die Vektoren

$$b_i := \begin{cases} b'_i \cdot \frac{1}{\sqrt{s'_{ii}}} & \text{für } i = 1, \ldots, r \\ b'_i = 0 & \text{für } i = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

dann eine Basis $B$ mit der gewünschten Eigenschaft:

$$\sigma(b_i, b_i) = \underbrace{\sigma(b'_i, b'_i)}_{s'_{ii}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{s'_{ii}}}\right)^2 = 1 \text{ für } i = 1, \ldots, r$$

$$\sigma(b_i, b_i) = \sigma(b'_i, b'_i) = 0 \text{ für } i = r+1, \ldots, n.$$

### 5.2.6 Korollar

Ist $V$ ein $K$-VR mit $\dim V < \infty$ und $\sigma$ entweder

- symmetrische Bilinearform, wenn $K = \mathbb{R}$, oder
- Hermitesche Sesquilinearform, wenn $K = \mathbb{C}$,

so besitzt $V$ eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$, sodass

$$\exists r \in \mathbb{N} : s_{ij} = \sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \pm 1 & \text{für } i = j \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis** Wie oben – aber: In diesen beiden Fällen gilt für eine diagonalisierende Basis $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ und $b_i = b'_i \cdot \frac{1}{a_i}$ mit $a_i \in K$ für $i = 1, \ldots, n$:

$$s'_{ii} = \sigma(b'_i, b'_i) \in \mathbb{R} \text{ und } \begin{cases} a_i^2 \geq 0 & \text{falls } K = \mathbb{R}, \\ \overline{a_i} a_i \geq 0 & \text{falls } K = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Also kann man die $s'_{ii}$ (nur) positiv reskalieren und so $s_{ii} = 0$ oder $s_{ii} = \pm 1$ erreichen.

**Notation** Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Motivation** Für die obige Basis $B$ von $V$ mit den Eigenschaften des Korollars gilt offenbar:

$$v \perp b_1, \ldots, b_r \Rightarrow v \in [\{b_{r+1}, \ldots, b_n\}]$$

und

$$b_{r+1}, \ldots, b_n \perp V,$$

also ist $(b_{r+1}, \dots, b_n)$ Basis des Radikalraums $V^\perp$ von $(V, \sigma)$,

$$V^\perp = [\{b_{r+1}, \dots, b_n\}] \Rightarrow r = \dim V - \dim V^\perp.$$

Insbesondere ist $\dim V^\perp$ und damit $r$ unabhängig von der Basis $B$.

### 5.2.7 Satz von Sylvester

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-VR, $\dim V < \infty$, und $\sigma$

- symmetrische Bilinearform, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, oder
- Hermitesche Sesquilinearform, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dann gibt es eine direkte Zerlegung von $V$ mit UVR $V_\pm \subset V$,

$$V = V_+ \oplus_\perp V_- \oplus_\perp V^\perp,$$

wobei

$$V_+ \perp V_- \text{ und } \forall v \in V_\pm^\times : \pm\sigma(v, v) > 0.$$

Die *Signatur* $\operatorname{sgn}(\sigma) := (\dim V_+, \dim V_-, \dim V^\perp)$ von $\sigma$ ist unabhängig von der direkten Zerlegung von $V$.

**Bemerkung & Definition** Ist $\sigma$ nicht-degeneriert, $V^\perp = \{0\}$, so bezeichnet man auch[4]

- das Paar $\operatorname{sgn}(\sigma) = (\dim V_+, \dim V_-)$ als Signatur von $\sigma$, und
- die Differenz $\dim V_+ - \dim V_-$ als *Trägheitsindex* von $\sigma$.

Die Dimension $\dim V_\pm$ ist auch der *Positivitäts-* bzw. *Negativitätsindex* von $\sigma$. Der Satz von Sylvester wird auch „Trägheitssatz von Sylvester“ genannt.

**Beweis** Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von $V$ und $p, r \in \mathbb{N}$, sodass (siehe Korollar oben)

$$\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} +1 & \text{für } 0 < i = j \leq p \\ -1 & \text{für } p < i = j \leq r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit

$$V_+ := [\{b_1, \dots, b_p\}] \text{ und } V_- := [\{b_{p+1}, \dots, b_r\}]$$

[4] Die Reihenfolge kann bei verschiedenen Autoren auch jeweils $-$ vor $+$ sein.

erhält man die gewünschte direkte orthogonale Zerlegung von $V$,

$$V = V_+ \oplus_\perp V_- \oplus_\perp V^\perp.$$

Zur Eindeutigkeit der Signatur $\operatorname{sgn}(\sigma) = (p, r-p, n-r)$:

Seien

$$V = V_+ \oplus_\perp V_- \oplus_\perp V^\perp = \tilde{V}_+ \oplus_\perp \tilde{V}_- \oplus_\perp \tilde{V}^\perp$$

direkte orthogonale Zerlegungen von $V$ mit

$$\pm\sigma(v,v) > 0 \text{ für } \begin{cases} v \in V_\pm^\times \\ v \in \tilde{V}_\pm^\times. \end{cases}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} &\forall v \in V_-^\times : \sigma(v,v) < 0 \\ &\Rightarrow \forall v \in V_- \oplus V^\perp : \sigma(v,v) \leq 0 \end{aligned}$$

und damit, da $\sigma(v,v) > 0$ für $v \in \tilde{V}_+^\times$,

$$v \in (V_- \oplus V^\perp) \cap \tilde{V}_+ \Rightarrow v = 0.$$

Es folgt, mit dem Dimensionssatz, $\tilde{p} \leq p$, da

$$\tilde{p} + (n-p) = \dim \tilde{V}_+ + \dim(V_- \oplus V^\perp) \leq \dim V = n.$$

Vertauscht man die Rollen der Zerlegungen, so erhält man die Ungleichung $p \leq \tilde{p}$ und damit also

$$p = \tilde{p}.$$

**Bemerkung** Diese Zerlegung $V = V_+ \oplus_\perp V_- \oplus_\perp V^\perp$ ist im Allgemeinen *nicht* eindeutig!

**Beispiel** Betrachte eine durch ihre Werte auf der Standardbasis $E = (e_1, e_2)$ gegebene symmetrische Bilinearform $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1. $S = (\sigma(e_i, e_j))_{i,j \in \{1,2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mit $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in Gl(2)$ liefert ein Basiswechsel $B = EP$

$$(\sigma(b_i, b_j))_{i,j \in \{1,2\}} = P^t S P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

die Signatur $\operatorname{sgn}(\sigma) = (1,1,0) \cong (1,1)$. Jeder weitere Basiswechsel

$$\tilde{B} = BQ \text{ mit } Q = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) \\ \sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R},$$

liefert eine andere Zerlegung, ohne die Gramsche Matrix zu ändern.

2. $S = (\sigma(e_i, e_j))_{i,j\in\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Der Basiswechsel $B = EP$ wie oben liefert hier

$$(\sigma(b_i, b_j))_{i,j\in\{1,2\}} = P^t SP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also die Signatur $\operatorname{sgn}(\sigma) = (1,0,1)$ von $\sigma$. Hier ist $V^\perp = [\{b_2\}]$ durch $\sigma$ festgelegt, aber jeder Basiswechsel

$$\tilde{B} = BQ \text{ mit } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

ändert die der Basis zugeordnete Zerlegung – wieder ohne Änderung der Gramschen Matrix.

### 5.2.8 Bemerkung & Definition

Zur geometrischen Analyse der Lösungsmengen von quadratischen Gleichungen (Quadriken), ist es hilfreich, eine *Äquivalenz* für symmetrische Bilinearformen/Sesquilinearformen $\sigma$ und $\sigma'$ auf einem $\mathbb{K}$-VR $V$ einzuführen:

$$\sigma' \sim \sigma :\Leftrightarrow \exists f \in Gl(V) \forall v, w \in V : \sigma'(v,w) = \sigma(f(v), f(w)).$$

Ist $\dim V < \infty$, so liefert der Satz von Sylvester im Falle

- symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}$-VR, oder
- Hermitesche Sesquilinearform auf $\mathbb{C}$-VR:

**Satz:** Zwei symmetrische Sesquilinearformen sind genau dann äquivalent, wenn ihre Signaturen übereinstimmen,

$$\sigma' \sim \sigma \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma') = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

### 5.2.9 Definition

Ein *Skalarprodukt* auf einem $K$-VR $V$ ist eine nicht-degenerierte symmetrische Sesquilinearform

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to K, (v,w) \mapsto \langle v, w \rangle.$$

Eine Familie $(e_i)_{i\in I}$ in einem VR $(V, \langle .,. \rangle)$ mit Skalarprodukt heißt *Orthonormalsystem (ONS)*, falls

$$\forall i, j \in I : \langle e_i, e_j \rangle = \pm\delta_{ij};$$

*Orthonormalbasis (ONB)*, falls $(e_i)_{i\in I}$ zusätzlich Basis ist.

**Bemerkung** Ein ONS ist linear unabhängig:
Für $v = \sum_{i\in I} e_i x_i$ gilt

$$0 = v \Rightarrow \forall i \in I : 0 = \langle e_i, v \rangle = \sum_{j\in I} \langle e_i, e_j \rangle x_j = \pm x_i$$

Ist $\dim V < \infty$, so hat $(V, \langle .,. \rangle)$ jedenfalls eine ONB, wenn

- symmetrische Bilinearform auf einem $\mathbb{K}$-VR ist, oder
- Hermitesche Sesquilinearform auf einem $\mathbb{C}$-VR ist.

Ist $K \neq \mathbb{K}$, so kann die „Normierung“ problematisch sein.

**Beispiel** Auf dem $\mathbb{R}$-VR der beschränkten Zahlenfolgen:

$$V = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| < c\},$$

führen wir ein Skalarprodukt, durch Angabe seiner quadratischen Form (Polarisation!) ein:

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{x_n}{2^n}\right)^2.$$

Man erhält ein ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus skalierten Standardvektoren

$$e_m : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto e_m(n) := 2^n \delta_{mn}.$$

Dieses ONS kann zu einer Basis ergänzt werden (nach BES), nicht jedoch zu einer ONB (in unserem Sinne):

$$\langle e_m, v \rangle = \frac{x_m}{2^m} \text{ für } v = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

also gilt

$$\forall m \in \mathbb{N} : v \perp e_m \Rightarrow v = 0.$$

**Bemerkung** Später wird der Begriff „Basis“ modifiziert, z.B. in der Funktionalanalysis würde man $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus dem Beispiel als „Orthonormalbasis“ bezeichnen.

## 5.3 Euklidische & unitäre Vektorräume

**Bemerkung** Die folgende Definition ist nur für Skalarprodukte $\langle .,. \rangle$ sinnvoll, für die

$$v \mapsto \langle v, v \rangle \in T$$

mit einem angeordneten Teilkörper $T \subset K$ des Körpers $K$ (vgl. Abschnitt 1.2). Ein nicht-triviales Beispiel, mit $T = \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = K$, ist ein Hermitesches Skalarprodukt:

$$\forall v \in V : \langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle} \Rightarrow \forall v \in V : \langle v, v \rangle \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

**Vereinbarung** Im Folgenden beschränken wir uns bis auf Weiteres auf $\mathbb{K}$-VR mit $\langle .,. \rangle$ Hermitsche Sesquilinearform, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (vgl. Satz von Sylvester).

### 5.3.1 Definition

Ein Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ auf einem $\mathbb{K}$-VR $V$ heißt *positiv definit*, falls

$$\forall v \in V^\times : \langle v, v \rangle > 0;$$

die *induzierte Norm* eines positiv-definiten Skalarprodukts $\langle .,. \rangle$ ist die Abbildung

$$\|.\| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0.$$

Ein $\mathbb{K}$-VR $(V, \langle .,. \rangle)$ mit positiv-definitem Skalarprodukt ist

- ein *Euklidischer Vektorraum*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und
- ein *unitärer Vektorraum*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\langle .,. \rangle$ Hermitesche Sesquilinearform ist.

### 5.3.2 Bemerkung & Definition

Ebenso definiert man ein Skalarprodukt als *negativ definit*, falls

$$\forall v \in V^\times : \langle v, v \rangle < 0;$$

$\langle .,. \rangle$ heißt *indefinit*, falls es weder positiv, noch negativ definit ist. Die Definition der induzierten Norm ist nur im positiv definiten Fall sinnvoll.

**Beispiel** Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C} \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ ist

$$|z| = \sqrt{\overline{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die vom Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ induzierte Norm. Insbesondere gilt

$$\forall z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq |z|$$

### 5.3.3 Bemerkung zum Zusammenhang von reellen und komplexen VR

Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ein Teilkörper ist, kann jeder $\mathbb{C}$-VR $V$ auch als $\mathbb{R}$-VR aufgefasst werden (Einschränkung der Skalarmultiplikation).

Ist nun $S \subset V$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ (in $V$ als $\mathbb{C}$-VR), so ist

$$S' := S \cup Si = S \cup \{si \mid s \in S\}$$

linear unabhängig über $\mathbb{R}$, denn

$$0 = \sum_{s \in S} s x_s + \sum_{s \in S} s i y_s = \sum_{s \in S} s(x_s + i y_s)$$

$$\Rightarrow \forall s \in S : x_s + i y_s = 0 \Rightarrow \forall s \in S : x_s = y_s = 0,$$

d.h. $S' = S \cup S_i$ ist linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Insbesondere folgt

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V.$$

Weiters definiert für ein Hermitesches Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ auf $V$ (als $\mathbb{C}$-VR)

$$\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}} := \operatorname{Re}\langle v, w \rangle$$

ein reelles Skalarprodukt auf $V$ (als $\mathbb{R}$-VR), das genau dann positiv definit ist, wenn $\langle ., . \rangle$ positiv definit ist:

$$\forall v \in V : \langle v, v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v, v \rangle.$$

Damit kann man jeden unitären Vektorraum als Euklidischen Vektorraum auffassen:

- mit verschiedenen Skalarprodukten $\langle ., . \rangle$ bzw. $\langle ., . \rangle_{\mathbb{R}}$, aber
- mit gleichen induzierten Normen.

**Komplexifizierung** Fasst man einen $\mathbb{C}$-VR $V$ als $\mathbb{R}$-VR auf, so liefert Multiplikation mit $i \in \mathbb{C}$ einen Endomorphismus

$$J : V \to V, v \mapsto J(v) := vi$$

mit

$$J^2 = -\operatorname{id}_V .$$

Insbesondere besitzt $J$ keine reellen Eigenwerte; ist $\dim V < \infty$, so folgt damit

$$\dim V = \deg_{\chi_J}(t) = 0 \mod 2.$$

Umgekehrt: Ist $V$ ein $\mathbb{R}$-VR und $J \in \mathrm{End}(V)$ mit $J^2 = -\,\mathrm{id}_V$ gegeben, so erhält man eine komplexe Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{C} \times V \to V, (z, v) \mapsto vz := vx + J(v)y,$$

für $z = x + iy$. Ist weiter $\langle .,. \rangle$ ein (reelles) Skalarprodukt auf $V$, das von $J$ erhalten wird,

$$\forall v, w \in V : \langle Jv, Jw \rangle = \langle v, w \rangle,$$

so definiert

$$\langle v, w \rangle_{\mathbb{C}} := \langle v, w \rangle - i\langle v, Jw \rangle$$

ein Hermitesches Skalarprodukt auf dem so konstruierten $\mathbb{C}$-VR.

**Beispiel** Ist $\langle .,. \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, mit der Standardbasis $(e_1, e_2)$ als ONB, so definiert (Fortsetzungssatz)

$$J(e_1) = e_2 \text{ und } J(e_2) = -e_1,$$

einen Endomorphismus $J \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$J^2 = -\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \text{ und } \langle Je_i, Je_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Vermöge

$$e_1 i := J(e_1) = e_2 \text{ und } e_2 i := J(e_2) = J^2(e_1) = -e_1 = e_1 i^2$$

wird $\mathbb{R}^2$ zu einem eindimensionalen $\mathbb{C}$-VR, $\mathbb{R}^2 = [\{e_1\}]_{\mathbb{C}}$, da

$$e_1 x + e_2 y = e_1 x + J(e_1) y = e_1(x + iy);$$

und

$$\langle e_1 x + e_2 y, e_1 x' + e_2 y' \rangle = \langle e_1(x + iy), e_1(x' + iy') \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{(x - iy)}(x' + iy')$$

liefert das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$, mit dem kanonischen Euklidischen Skalarprodukt von $\mathbb{R}^2$ als Realteil.

### 5.3.4 Komplexifizierungslemma

Ist $(V, \langle ., . \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, so liefert

$$(v, w)(x + iy) := (vx - wy, wx + vy)$$

eine komplexe Skalarmultiplikation auf $V_{\mathbb{C}} := V \times V$, und

$$\langle\!\langle((v, w)), (v', w')\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}} := (\langle v, v'\rangle + \langle w, w'\rangle) + i\,(\langle v, w'\rangle - \langle w, v'\rangle)$$

ein Hermitesches Skalarprodukt, das $(V_{\mathbb{C}}, \langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle_{\mathbb{C}})$ zu einem unitären VR macht.

**Beweis** Auf dem Euklidischen VR $(V^2, \langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle)$, wobei

$$\langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle : V^2 \times V^2 \to \mathbb{R}, \big((v, w), (v', w')\big) \mapsto \langle\!\langle (v, w), (v', w')\rangle\!\rangle := \langle v, v'\rangle + \langle w, w'\rangle,$$

definiere $J \in \mathrm{End}(V^2)$ durch

$$J : V^2 \to V^2, (v, w) \mapsto J\,((v, w)) := (-w, v).$$

Offenbar gilt $J^2 = -\,\mathrm{id}_{V^2}$ und

$$\langle\!\langle J(v, w), J(v', w')\rangle\!\rangle = \langle w, w'\rangle + \langle v, v'\rangle = \langle\!\langle (v, w), (v', w')\rangle\!\rangle,$$

sodass

$$(v, w)(x + iy) = (v, w)x + J(v, w)y = (vx - wy, wx + vy)$$

und

$$\begin{aligned}\langle\!\langle (v, w), (v', w')\rangle\!\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle\!\langle (v, w), (v', w')\rangle\!\rangle - i\langle\!\langle (v, w), J(v', w')\rangle\!\rangle \\ &= (\langle v, v'\rangle + \langle w, w'\rangle) - i\,(-\langle v, w'\rangle + \langle w, v'\rangle)\end{aligned}$$

$(V^2, \langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle)$ zu einem unitären VR machen, wie vorher.

**Bemerkung** Mit dem „Komplexifizierungslemma“ kann man jeden Euklidischen VR in einen unitären VR gleicher (komplexer) Dimension einbetten:

$$\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V^2 = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Wichtig für den Zusammenhang zwischen unitären und Euklidischen VR: Die induzierte Norm des Hermitschen Skalarprodukts kann als die eines Euklidischen Skalarprodukts aufgefasst werden.

### 5.3.5 Definition

Eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{K}$-VR $V$ heißt *Norm*, falls

(i) $\forall v \in V^\times : \|v\| > 0$, d.h. $\|.\|$ ist *positiv definit*;

(ii) $\forall v \in V \forall x \in \mathbb{K} : \|vx\| = \|v\| \cdot |x|$, d.h. $\|.\|$ *positiv homogen*;

(iii) $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, d.h. $\|.\|$ erfüllt die *Dreiecksungleichung.*

Ein Vektorraum mit Norm, $(V, \|.\|)$ heißt *normierter Vektorraum.*

**Bemerkung** Die von einem positiv definiten Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ induzierte Norm $\|.\|$ erfüllt offenbar (i) und (ii); die Dreiecksungleichung zeigen wir unten.

**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** Ist $(V, \langle ., . \rangle)$ Euklidisch oder unitär, so gilt[5]

$$\forall v, w \in V : |\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$$

**Beweis** Seien $v, w \in V$, o.B.d.A $v \neq 0$. Wir bestimmen das Minimum der Funktion im Euklidischen Fall (unitärer Fall in der Übung)

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto g(s) := \langle vs - w, vs - w \rangle.$$

Einsetzen des kritischen Punktes,

$$0 = g'(s) = 2\langle v, v \rangle s - (\langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle) = 2(\langle v, v \rangle s - \mathrm{Re}\langle v, w \rangle)$$

$$\Rightarrow s = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

liefert

$$0 \leq g(s) = \langle v, v \rangle \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle v, v \rangle^2} - 2\langle v, w \rangle \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} + \langle w, w \rangle$$

$$= \frac{1}{\langle v, v \rangle} \Big( -\langle v, w \rangle^2 + \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \Big) \Leftrightarrow 0 \leq -\langle v, w \rangle^2 + \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

### 5.3.6 Korollar

Die induzierte Norm in $(V, \langle ., . \rangle)$ erfüllt die Dreiecksungleichung.

[5] Im Euklidischen Fall ist der Betrag offenbar überflüssig.

**Beweis** Ist $(V, \langle ., . \rangle)$ Euklidischer VR, so gilt für $v, w \in V$:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle &= \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\ &\overset{C.S.}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.\end{aligned}$$

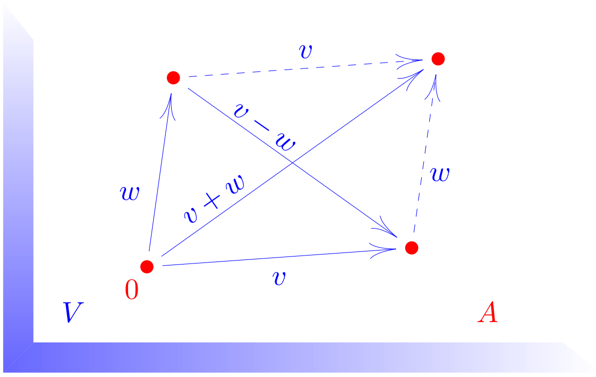
**Bemerkung** Das Skalarprodukt eines Euklidischen VR $(V, \langle ., . \rangle)$ kann (Polarisation) aus seiner induzierten Norm rekonstruiert werden.

Nicht jede Norm ist jedoch von einem Skalarprodukt induziert (vgl. Aufgabe 56). Hinreichende (Satz von Jordan-von Neumann) und notwendige Bedingung ist die Parallelogrammgleichung:

### 5.3.7 Parallelogrammgleichung

Für die induzierte Norm $\|.\|$ von $(V, \langle ., . \rangle)$ gilt:

$$\forall v, w \in V : \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$




**Beweis** Rechnung, wie bei Polarisation.

**Beispiel** Für die induzierte Norm des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ gilt die Parallelogrammgleichung:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Für die durch

$$\|(x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

auf $\mathbb{R}^n$ definierte Norm $\|.\|_1$ gilt sie nicht; diese Norm ist also nicht induzierte Norm eines Euklidischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$.

**Beispiel** Auf dem Raum $C^0([0,1])$ der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ definiert

$$\|.\|_\infty : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

die *Maximumsnorm* (vlg. gleichmäßige Konvergenz).

Für $f, g \in C^0([0,1])$,

$$f(x) := 1 - x \text{ und } g(x) = x$$

ist dann

$$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|f+g\|_\infty = \|f-g\|_\infty = 1$$

womit die Parallelogrammgleichung offenbar nicht erfüllt, und die Norm keine induzierte Norm eines Skalarprodukts ist.

## 5.4 Euklidische Geometrie

### 5.4.1 Definition

Ein *Euklidischer Raum* ist eine affiner Raum $(A, V, \tau)$ über einem Euklidischen Vektorraum $(V, \langle .,. \rangle)$ mit induzierter Norm $\|.\|$.

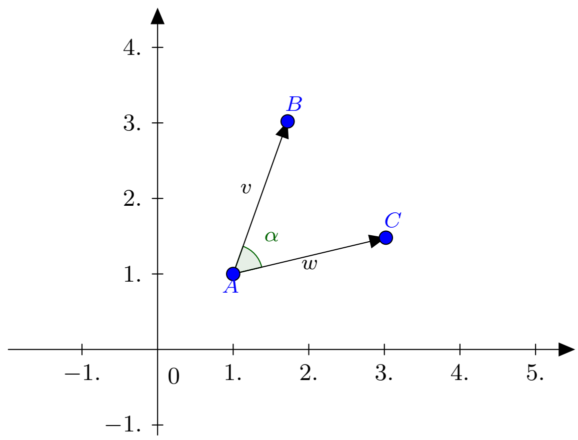
- Die *Länge* eines Vektors $v \in V$ ist seine Norm, der *Abstand* zweier Punkte $a, b \in A$ ist die Länge ihres Verbindungsvektors,

$$d(a,b) := \|b-a\| = \sqrt{\langle b-a, b-a\rangle}.$$

- Der *Winkel* $\alpha \in [0,\pi]$ zweier Vektoren $v, w \in V^\times$ ist durch die Gleichung

$$\langle v, w\rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\alpha$$

  definiert; der *Winkel* (am Punkt $a$) in einem nicht-degenerierten Dreieck $\{a,b,c\} \subset A$ ist der Winkel der beiden Seitenvektoren $v = b-a$ und $w = c-a$.




**Bemerkung** Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist für $v, w \in V^{\times}$

$$\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \in [-1, 1];$$

andererseits ist

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \text{ bijektiv}$$

Damit ist der Winkel von Vektoren bzw. im Dreieck wohldefiniert.

### 5.4.2 Definition

Eine affine Transformation eines Euklidischen Raumes heißt

- *Kongruenzabbildung* oder *Isometrie*, falls sie Abstandstreu ist,
- *Ähnlichkeitstransformation*, falls sie winkeltreu ist.

**Bemerkung** Jede Kongruenzabbildung ist Ähnlichkeitstransformation (Polarisation).

**Bemerkung** Offenbar bilden die Kongruenz- bzw. Ähnlichkeitsabbildungen eines Euklidischen Raumes $A$ auf $A$ operierende (Transformations-)Gruppen.

### 5.4.3 Definition (Geometrie)

Die auf einem Euklidischen Raum operierende Gruppe der Kongruenzabbildungen bestimmt eine Euklidische Geometrie.

Die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen eines Euklidischen Raumes $A$ bestimmt eine Ähnlichkeitsgeometrie.

**Beispiel** Jede Translation $\tau_v : A \to A$ ist eine Isometrie: Für $a, b \in A$ gilt

$$\exists! w \in V : b = \tau_w(a)$$

d.h. $w = b - a$; also

$$\tau_v(b) = \tau_v(\tau_w(a)) = \tau_{v+w}(a) = \tau_w(\tau_v(a))$$

d.h. $w = \tau_v(b) - \tau_v(a)$. Damit folgt:

$$\|\tau_v(b) - \tau_v(a)\| = \|w\| = \|b - a\|$$

d.h. $\tau_v$ ist abstandstreu, da $a, b \in A$ beliebig waren.

**Beispiel** Die Streckung mit Zentrum $o \in A$ um den Faktor $s \in \mathbb{R}^\times$,

$$o + v = a \overset{\delta_s}{\mapsto} \delta_s(a) = \delta_s(o + v) := o + vs$$

ist winkeltreu, denn für $a = o + v, b = o + w$ gilt

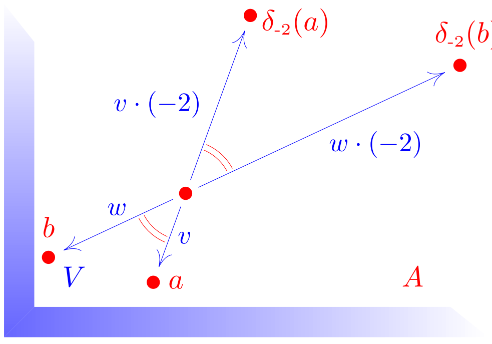
$$\delta_s(b) - \delta_s(a) = (o + ws) - (o + vs) = \cdots = (w - v)s$$

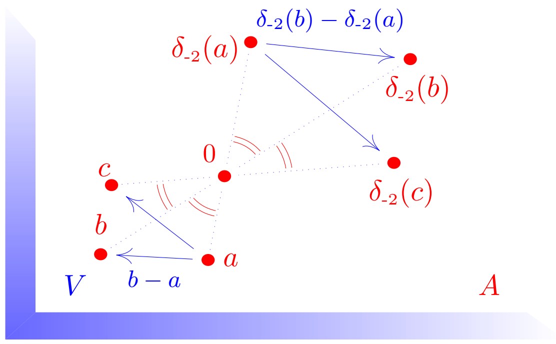
und damit für drei paarweise verschiedene Punkte $a, b, c \in A$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \delta_s(b) - \delta_s(a), \delta_s(c) - \delta_s(a)\rangle}{\|\delta_s(b) - \delta_s(a)\|\|\delta_s(c) - \delta_s(a)\|} = \frac{\langle (b-a)s, (c-a)s\rangle}{\|(b-a)s\|\|(c-a)s\|} = \frac{s^2}{|s^2|} \cdot \frac{\langle b - a, c - a\rangle}{\|b - a\|\|c - a\|}$$

d.h. $\delta_s$ ist winkeltreu; andererseits ist $\delta_s$ für $s \neq \pm 1$ nicht abstandstreu. Ist $a \neq b$, so gilt dann

$$\|\delta_s(b) - \delta_s(a)\| = \|b - a\| \cdot |s| \neq \|b - a\|.$$



**Zur Erinnerung** Jede affine Abbildung $\alpha : A \to A'$ besitzt einen (eindeutigen) *linearen Anteil* $\lambda : V \to V'$, sodass

$$\forall a \in A \forall v \in V : \alpha(a+v) = \alpha(a) + \lambda(v);$$

ist $\alpha$ eine affine Transformation, so ist $\lambda \in Gl(V)$.

**Bemerkung** Jede Ähnlichkeitstransformation ist Komposition einer Streckung und einer Kongruenzabbildung.

Nämlich: Ist $\alpha$ Ähnlichkeitstransformation mit linearem Anteil $\lambda \in Gl(V)$, so erhält $\lambda$ Winkel von Vektoren, insbesondere also Orthogonalität. Nun wähle $w \in V^{\times}$ und setze

$$s := \frac{\|w\|}{\|\lambda w\|}.$$

Ist dann $v \in V$ mit $\|v\| = \|w\|$, so folgt

$$v + w \perp v - w \Rightarrow \lambda(v+w) \perp \lambda(v-w) \Rightarrow \|\lambda(v)\| = \|\lambda(w)\|,$$

also

$$\forall v \in V^{\times} : \frac{\|\lambda(v)\|}{\|v\|} = \|\lambda(v\frac{\|w\|}{\|v\|})\|\frac{1}{\|w\|} = \frac{\|\lambda(w)\|}{\|w\|} = \frac{1}{s}.$$

Mit einem beliebigen Streckungszentrum $o \in A$ erhält man also eine Isometrie durch

$$\delta_s \circ \alpha : A \to A.$$

**Beispiel** Eine *nicht-triviale* Scherung ist *keine* Ähnlichkeitstransformation. Beweis in der Übung.

### 5.4.4 Lemma & Definition

Eine affine Transformation $\alpha : A \to A$ eines Euklidischen Raumes $A$ ist genau dann eine Kongruenzabbildung, wenn ihr linearer Anteil $\lambda$ *orthogonal* ist:

$$\lambda \in O(V) := \{f \in Gl(V) \mid \forall v, w \in V : \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle\}.$$

$O(V)$ heißt die *orthonogale Gruppe* von $(V, \langle ., . \rangle)$.

**Bemerkung** $O(V) \subset Gl(V)$ ist eine Gruppe. Beweis in der Übung.

**Bemerkung** Ist $f \in \mathrm{End}(V)$, so folgt die Injektivität von $f$ aus

$$\forall v, w \in V : \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Aus $f(v) = 0$ folgt nämlich

$$0 = \|f(v)\| = 0 = \|v\| \Rightarrow v = 0, \text{ da } \langle .,. \rangle \text{ pos. definit.}$$

Ist $\dim V < \infty$, so folgt mit dem Rangsatz, $\dim V = \operatorname{rg} f + \operatorname{def} f = \operatorname{rg}$, dass $f \in Gl(V)$.
Im Fall $\dim V = \infty$ ist $f$ nicht notwendigerweise surjektiv, wie der *Shiftoperator*

$$f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \forall n \in \mathbb{N} : f(e_n) = e_{n+1}$$

zeigt.

**Beweis (Lemma)** Sei $(A, V, \tau)$ Euklidischer Raum über einem Euklidischen VR $(V, \langle .,. \rangle)$ und $\alpha : A \to A$ Affinität mit linearem Anteil $\lambda \in Gl(V)$. Dann ist $\alpha$ genau dann Isometrie, wenn

$$\forall a, b \in A : \|\lambda(b - a)\| = \|\alpha(b) - \alpha(a)\| = \|b - a\|,$$

also (Polarisation), wenn $\lambda \in O(V)$.

### 5.4.5 Definition

Ist $(V, \langle .,. \rangle)$ unitärer VR, so heißt $f \in Gl(V)$ mit

$$\forall v, w \in V : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

*unitär*; die *unitäre Gruppe* von $(V, \langle .,. \rangle)$ ist die Gruppe

$$U(V) := \{f \in Gl(V) \mid \forall v, w \in V : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle\}.$$

### 5.4.6 Schulgeometrie

Betrachte eine Euklidische Ebene $A^2$ über Euklidischem VR $(\mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle)$ mit kanonischem Skalarprodukt $\forall i, j \in \{1, 2\} : \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.
Weiter (vgl. Abschnitt 5.3.3) bezeichne $J \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ den durch

$$J(e_1) = e_2 \text{ und } J(e_2) = -e_1$$

definierten Endomorphismus, also eine „90°-Drehung“, bzw. die $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizierende komplexe Multiplikation mit $i$,

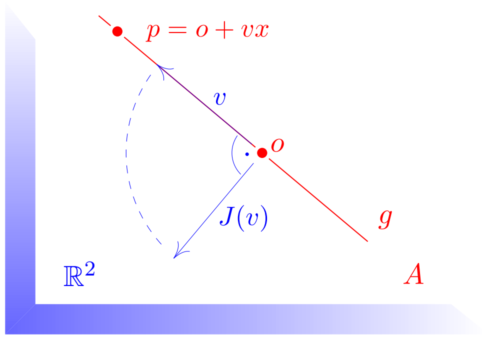
$$v(x + iy) = vx + J(v)y \text{ für } \begin{cases} v \in \mathbb{R}^2 \\ (x + iy) \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Man bemerke: Für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist $\{Jv\}^\perp = [v]$ und damit

$$\forall w \in \mathbb{R}^2 : w \perp Jv \Leftrightarrow w \parallel v.$$

So ermöglicht $J$ einen einfachen Wechsel zwischen *parametrischer* und *impliziter Darstellung* (e.g. *Hessesche Normalform*) einer Geraden

$$g = \{p = o + vx \mid x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$$
$$g = \{p \in A^2 \mid \langle p - o, Jv \rangle = 0\}$$




### 5.4.7 Definition

Ein *Kreis* mit *Mittelpunkt* $z \in A^2$ und *Radius* $r \geq 0$ ist die Menge

$$k = \{p \in A^2 \mid \|p - z\| = r\}.$$

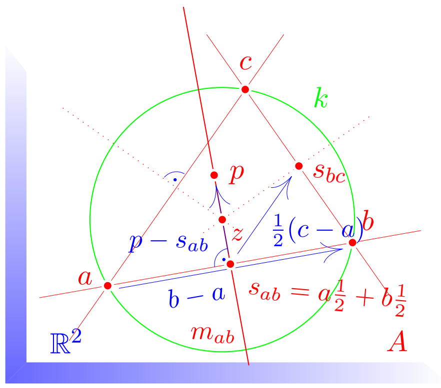
**Bemerkung** Es ist mitunter sinnvoll, Punkte als Kreise mit Radius $r = 0$ zu betrachten.

### 5.4.8 Umkreissatz

Sei $\{a, b, c\} \subset A^2$ ein nicht-degeneriertes Dreieck. Dann gibt es genau einen Kreis $k \subset A^2$, den *Umkreis* des Dreiecks, der die Eckpunkte $a, b$ und $c$ des Dreiecks enthält. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der drei *Streckensymmetralen/Mittelsenkrechten* $m_{ab}, m_{bc}$ und $m_{ca}$ des Dreiecks, wobei

$$m_{ab} = \{p \in A^2 \mid \langle p - s_{ab}, b - a \rangle = 0\}$$

$$\text{mit } s_{ab} = a\frac{1}{2} + b\frac{1}{2} \text{ etc.}$$



**Beweis** Definiere

$$g_{ab} : A^2 \to \mathbb{R}, p \mapsto g_{ab}(p) := 2\langle p - s_{ab}, b - a\rangle$$

und analog $g_{bc}$ und $g_{ca}$ (zyklische Vertauschung). Für $p \in A^2$ gilt dann mit

$$g_{ab}(p) \overset{!}{=} \langle (p-a) + (p-b), (p-a) - (p-b)\rangle = \|p-a\|^2 - \|p-b\|^2 \tag{$*$}$$

damit folgt

$$\forall p \in A^2 : (g_{ab} + g_{bc} + g_{ca})(p) = 0,$$

also

$$p \in m_{ab} \cap m_{bc} \Rightarrow p \in m_{ca}.$$

Nun ist

$$m_{ab} = \{p(x) = s_{ab} + J(b-a)x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

mit $J(b-a) \not\perp b-c$, da das Dreieck $\{a,b,c\}$ nicht-degeneriert ist. Dies liefert einen eindeutigen Schnittpunkt $z \in p(x) \in m_{ab} \cap m_{bc}$ als Lösung der linearen Gleichung

$$0 = g_{bc}(p(x)) = 2\langle s_{ab} + J(b-a)x - s_{bc}, c-b\rangle$$

$$= 2\langle J(b-a), c-b\rangle x + \langle a-c, c-b\rangle.$$

Wegen $(*)$ gilt nun für diesen Schnittpunkt $z$

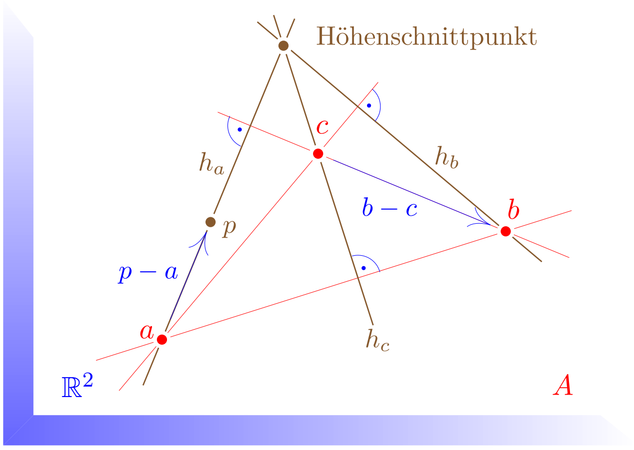
$$\|z-a\| = \|z-b\| = \|z-c\| \tag{$**$}$$

d.h. $a, b$ und $c$ liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt $z$. Andererseits: Wegen $(*)$ impliziert $(**)$, dass $z \in m_{ab} \cap m_{bc}$, womit die Eindeutigkeit von $z$ und damit des Umkreises folgt.

### 5.4.9 Höhensatz

Die *Höhen* $h_a, h_b$ und $h_c$ eines nicht-degenerierten Dreiecks $\{a,b,c\} \subset A^2$ schneiden sich in einem Punkt, dem *Höhenschnittpunkt*, wobei

$$h_a = \{p \in A^2 \mid \langle p-a, b-c\rangle = 0\}, \text{ etc.}$$




Beweis in der Übung, analog zum Umkreissatz.

### 5.4.10 Euler-Gerade

Seien $s, h$ und $z$ Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt eines nicht-degenerierten Dreiecks $a, b, c \subset A^2$. Dann gilt

$$s = z\frac{2}{3} + h\frac{1}{3}.$$

Ist $s \neq z$, so liegen die drei Punkte also auf einer eindeutig bestimmten Geraden, *Euler-Geraden*, mit einem Teilverhältnis $(zs : hs) = -\frac{1}{2}$. Beweis in der Übung.

### 5.4.11 Satz von Pythagoras

In einem Dreieck $\{a, b, c\} \subset A^2$ mit einem rechten Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bei $a$ gilt stets

$$\|c - a\|^2 + \|a - b\|^2 = \|c - b\|^2.$$

**Beweis** Offenbar gilt $c - b = (c - a) + (a - b)$, daher

$$\|c - b\|^2 = \|c - a\|^2 + 2\langle c - a, a - b\rangle + \|a - b\|^2 = \|c - a\|^2 + \|a - b\|^2.$$

**Bemerkung** Für allgemeine Dreiecke liefert die gleiche Rechnung den Cosinussatz:

$$\|b - c\|^2 = \|c - a\|^2 + \|a - b\|^2 - 2\|c - a\|\|a - b\| \cos \alpha.$$

**Bemerkung** Ist $(o; e_1, e_2)$ ein affines Bezugssystem in $A^2$ mit

$$e_1 \perp e_2 \text{ und } \|e_1\| = \|e_2\| = 1,$$

so ist jeder Punkt $a \in A^2$ Eckpunkt eines *rechtwinkligen* Dreiecks

$$\{o, o + e_1x_1, o + e_1x_1 + e_2x_2\} \text{ für } a = o + e_1x_1 + e_2x_2;$$

der Abstand vom Ursprung ist also (Pythagoras)

$$\|a - o\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Wegen seiner Translationsinvarianz kann der Abstand zwischen beliebigen Punkten genau so berechnet werden.

### 5.4.12 Definition

Ein *kartesisches Bezugssystem* $(o, E)$ eines Euklidischen Raumes $(A, V, \tau)$ über einem Euklidischen VR $(V, \langle ., . \rangle)$ besteht aus einem Ursprung $o \in A$ und einer ONB $E$ von $(V, \langle ., . \rangle)$.

**Bemerkung** In jedem endlichdimensionalen Euklidischen Raum gibt es ein kartesisches Bezugssystem, im Allgemeinen ist dies nicht so (vgl. Übung).

### 5.4.13 Lemma

Ist $(o; E)$ mit $E = (e_i)_{i \in I}$ kartesisches Bezugssystem eines Euklidischen Raumes $(A, V, \tau)$ über $(V, \langle ., . \rangle)$, so ist

$$\forall a \in A : a = o + \sum_{i \in I} e_i \langle e_i, a - o \rangle$$

**Beweis** Da $E$ Basis ist, existiert zu $a \in A$ eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ in $\mathbb{R}$ mit

$$a = o + \sum_{i \in I} e_i x_i,$$

wobei

$$\forall i \in I : \langle e_i, a - o \rangle = \langle e_i, \sum_{j \in I} e_j x_j \rangle = \sum_{j \in I} \delta_{ij} x_j = x_i.$$

## 5.5 Orthogonalprojektion

### 5.5.1 Definition

Sei $(A, V, \tau)$ ein Euklidischer Raum über einem Euklidischen VR $(V, \langle ., . \rangle)$. Dann heißt

- $p \in \operatorname{End}(V)$ *Orthogonalprojektion*, falls $p$ Projektion ist, $p^2 = p$, mit

$$\ker p \perp p(V)$$

- $\pi : A \to A$ *Orthogonalprojektion*, falls $\pi$ Parallelprojektion ist, mit einer Orthogonalprojektion $p \in End(V)$ als linearem Anteil.

**Bemerkung** Ist $p \in \mathrm{End}(V)$ Orthogonalprojektion, so ist auch die komplementäre Projektion $p' = \mathrm{id}_V - p$ Orthogonalprojektion, denn

$$\ker p' = p(V) \perp \ker p = p'(V.)$$

**Bemerkung** Ist $(o; E)$ mit $E = (e_i)_{i \in I}$ kartesisches Bezugssystem eines Euklidischen Raumes $A$ und $J \subset I$, so liefert

$$\pi : A \to A, a = o + v \mapsto o + p(v) := o + \sum_{i \in J} e_i \langle e_i, v \rangle$$

eine Orthogonalprojektion von $A$ auf

$$\pi(A) = o + p(V) = o + [(e_i)_{i \in J}].$$

### 5.5.2 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein Euklidischer VR und $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig in $V$; dann existiert ein ONS $(e_1, \dots, e_n)$ mit

$$[(v_1, \dots, v_k)] = [(e_1, \dots, e_k)] \text{ und } \langle e_k, v_k \rangle > 0 \text{ für } k = 1, \dots, n \qquad (*)$$

**Beweis** Induktion über $n$. Ist $n = 1$, so liefert $e_1 := v_1 \cdot \frac{1}{\|v_1\|}$ das gewünschte Orthonormalsystem.

Ist $(v_1, \dots, v_{n+1})$ linear unabhängig und (nach Induktions-Annahme) $(e_1, \dots, e_n)$ ONS mit

$$V_n := [(v_1, \dots, v_k)] = [(e_1, \dots, e_k)] \text{ und } \langle e_k, v_k \rangle > 0 \text{ für } k = 1, \dots, n,$$

so setzen wir

$$p : V \to V, v \mapsto p(v) := v - \sum_{i=1}^{n} e_i \langle e_i, v \rangle \in \{e_1, \dots, e_n\}^{\perp};$$

da $v_{n+1} \notin V_n$ ist

$$p(v_{n+1}) \neq 0, \text{ und } e_{n+1} := p(v_{n+1}) \frac{1}{\|p(v_{n+1})\|}$$

ergänzt dann $(e_1, \dots, e_n)$ zum gesuchten Orthonormalsystem.

**Bemerkung** Das ONS $(e_1, \dots, e_n)$ im Gram-Schmidtschen Verfahren ist durch die Bedingungen $(*)$ eindeutig festgelegt.

**Bemerkung** Der Beweis lässt sich wörtlich auf unitäre VR übertragen.

### 5.5.3 Korollar & Definition

Ist $U \subset V$ UVR eines Euklidischen VR (oder unitären VR) $(V, \langle ., . \rangle)$ mit $\dim V < \infty$, so gilt

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Der UVR $U^\perp$ heißt dann das *orthogonale Komplement* von $U$ (in $(V, \langle ., . \rangle)$).

**Beweis** Für $v \in U \cap U^\perp$ ist $\langle v, v \rangle = 0$, also $v = 0$, da das Skalarprodukt positiv definit ist. Sei $(e_1, \dots, e_k)$ ONB von $U$ (Gram-Schmidt) und

$$p : V \to V, v \mapsto p(v) := \sum_{i=1}^{k} e_i \langle e_i, v \rangle \in U.$$

Wegen

$$\langle e_j, v - p(v) \rangle = \langle e_j, v \rangle - \sum_{i=1}^{k} \delta_{ij} \langle e_i, v \rangle = 0$$

für $j = 1, \dots, k$ ist dann

$$\forall v \in V : v = p(v) + (v - p(v)) \in U + U^\perp,$$

also $V = U + U^\perp$

**Bemerkung** Die Einschränkung $\dim V < \infty$ wurde nur benutzt, um die Orthogonalprojektion $p \in \mathrm{End}(V)$ zu definieren/konstruieren. Insbesondere reicht es, $\dim U < \infty$ anzunehmen.

**Bemerkung** Ist $\dim V < \infty$, so ist $U^{\perp\perp} = U$.

### 5.5.4 Beispiel & Definition

Ist $p \in \mathrm{End}(V)$ eine Projektion und $p' = \mathrm{id}_V - p$, so erhält man eine Involution

$$s := p - p' \in \mathrm{End}(V)$$

Im Falle einer Orthogonalprojektion $p$ nennt man die zugehörige Transformation

$$\sigma : A \to A, o + v \mapsto \sigma(o + v) := o + s(v)$$

eines Euklidischen Raumes eine *Spiegelung*: $\sigma$ ist eine Isometrie, da

$$\forall v \in V : \|p(v) \pm p'(v)\|^2 = \begin{cases} \|v\|^2 & \text{für } + \\ \|s(v)\|^2 & \text{für } - \end{cases} = \|p(v)\|^2 + \|p'(v)\|^2 \pm \underbrace{2\,\langle p(v), p'(v)\rangle}_{=0,\text{ da } p(V)\perp p'(V)}$$

**Bemerkung** Jede Kongruenzabbildung eines endlichdimensionalen Euklidischen Raumes ist Komposition von Spiegelungen.

### 5.5.5 Beispiel & Definition

Ist $A^2$ Euklidische Ebene mit kartesischem Bezugssystem $(o; e_1, e_2)$ und $J \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ wie oben, $J(e_1) = e_2$ und $J(e_2) = -e_1$ so liefert

$$\rho_\theta : A^2 \to A^2, o + v \mapsto \rho_\vartheta(o + v) := o + v\cos\vartheta + J(v)\sin\vartheta$$

eine *Drehung* mit *Zentrum* $o \in A^2$ und *Drehwinkel* $\vartheta \in \mathbb{R}$. Die affine Abbildung $\rho_\vartheta$ ist dann Komposition zweier Spiegelungen,

$$\rho_\vartheta = \sigma' \circ \sigma,$$

die durch ihre Fixpunktgeraden festgelegt sind:

$$g = o + [e_1] \text{ und } g' = o + [e_1'] \text{ mit } e_1' = e_1 \cos\frac{\vartheta}{2} + e_s \sin\frac{\vartheta}{2}.$$

### 5.5.6 Lemma

Eine Projektion $p \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann Orthogonalprojektion, wenn

$$\forall v, w \in V : \langle p(v), w\rangle = \langle v, p(w)\rangle$$

**Beweis** Sei $p \in \mathrm{End}(V)$ Projektion und $p' = \mathrm{id}_V - p$ die komplementäre Projektion mit

$$\ker p = p'(V) \text{ und } p(V) = \ker p'.$$

Ist $p$ Orthogonalprojektion, $p(V) \perp \ker p = p'(V)$, so ist für $v, w \in V$

$$\langle p(v), w\rangle - \langle v, p(w)\rangle = \langle p(v), p(w)\rangle + \underbrace{\langle p(v), p'(w)\rangle}_{\perp} - \langle p(v), p(w)\rangle - \underbrace{\langle p'(v), p(w)\rangle}_{\perp} = 0.$$

Gilt andererseits für $v, w \in V$, also insbesondere für $v \in p(V), w \in \ker p$, stets

$$0 = \langle p(v), w\rangle - \langle v, p(w)\rangle = \langle v, w\rangle,$$

so ist $p(V) \perp \ker p$, also $p$ Orthogonalprojektion.

# 6 Struktursätze für Endomorphismen

## 6.1 Adjungierte & duale Abbildungen

Zunächst: Ziel dieses Kapitels ist besseres, strukturelles Verständnis der Bedingungen für orthogonale Transformationen bzw. Orthogonalprojektionen:

$$\forall v, w \in V : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \text{ bzw. } \langle p(v), w \rangle = \langle v, p(w) \rangle.$$

**Motivation** Jede Sesquilinearform $\sigma : V \times V \to K$ liefert eine (semi-)lineare Abbildung

$$V \ni v \mapsto \sigma(v, .) \in V^*.$$

Ist die Sesquilinearform $\sigma$ symmetrisch und nicht-degeneriert, d.h. ein Skalarprodukt auf $V$, so ist die Abbildung injektiv:

$$\sigma(v, .) = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow v \in V^\perp = \{0\}.$$

Ist die Abbildung auch surjektiv, so kann man sie benutzen, um $V^*$ und $V$ zu identifizieren,

$$V^* \simeq V.$$

### 6.1.1 Rieszsches Darstellungslemma

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein $K$-VR mit Skalarprodukt. Die *kanonische Injektion*

$$\phi : V \to V^*, v \mapsto \phi(v) := \langle v, . \rangle.$$

ist semi-linear und injektiv. Ist $\dim V < \infty$, so ist $\phi$ auch surjektiv; wir nennen dann

- $\nabla w := \phi^{-1}(w)$ den *Gradienten* von $w \in V^*$, und
- $\phi : V \to V^*$ die *kanonische Identifikation* von $(V, \langle ., . \rangle)$ mit $V^*$.

**Beweis** Semi-Linearität und Injektivität folgen sofort aus den Eigenschaften des Skalarprodukts.[1]

[1] Semi-Linearität in der linken Komponente; Nicht-Degeneriertheit impliziert Injektvität.

Ist $\dim V < \infty$, so ist $\phi : V \to V^*$ wegen $\dim V^* = \dim V$ und der Injektivität auch surjektiv.

**Bemerkung** Dies ist eine „kleine“ Version des Rieszschen Darstellungssatzes

$$\forall \omega \in V^* \exists! w \in V : \omega = \langle w, . \rangle.$$

Der „richtige“ Satz schränkt die Dimension nicht ein, und ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Funktional-Analysis.

**Bemerkung** Ist $E = (e_1, \dots, e_n)$ ONB von $(V, \langle ., . \rangle)$, so gilt für die Vektoren der dualen Basis $E^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$

$$\nabla e_i^* = e_i \frac{1}{\langle e_i, e_i \rangle} = \pm e_i,$$

da für $j = 1, \dots, n$ gilt:

$$\langle e_i \frac{1}{\langle e_i, e_i \rangle}, e_j \rangle = \delta_{ij} = e_i^*(e_j),$$

also

$$\phi(e_i \frac{1}{\langle e_i, e_i \rangle}) = e_i^*.$$

Insbesondere gilt im Falle eines Euklidischen VR

$$\forall i = 1, \dots, n : \nabla e_i^* = e_i \Leftrightarrow \phi(e_i) = e_i^*,$$

d.h. $\phi$ realisiert den früher diskutierten (vgl. Abschnitt 1.4) durch duale Basen gegebenen Isomorphismus – im Falle von ONB.

### 6.1.2 Korollar & Definition

Sind $(W, \langle\langle ., . \rangle\rangle)$ und $(V, \langle ., . \rangle)$ Vektorräume mit Skalarprodukten, $\dim W < \infty$ und $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$, so hat $f$ eine eindeutige *Adjungierte* $f^* \in \mathrm{Hom}(V, W)$; dabei ist $f^*$ *adjungiert zu* $f$, falls

$$\forall v \in V \forall w \in W : \langle\langle f^*(v), w \rangle\rangle = \langle v, f(w) \rangle.$$

**Achtung:** $V$ und $W$ sind VR über dem gleichen Körper $K$; die Skalarprodukte sind sesquilinear bzgl. des gleichen Körperautomorphismus!

**Beweis** Für jedes $v \in V$ definiert

$$\omega_v : W \to K, w \mapsto \omega_v(w) := \langle v, f(w) \rangle$$

eine Linearform $\omega_v \in W^*$; nach Rieszschem Darstellungslemma erhält man daher eine eindeutige Abbildung

$$f^* : V \to W, v \mapsto f^*(v) := \nabla\omega_v.$$

Die Linearität von $f^*$ folgt aus der dualen Abbildung, siehe unten.

**Bemerkung** Offenbar (Symmetrie) ist $f^{**} = f$, wenn $f^{**} := (f^*)^*$ existiert.

### 6.1.3 Definition & Lemma

Ist $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$, so heißt $f^t \in \mathrm{Hom}(V^*, W^*)$,

$$f^t : V^* \to W^*, \nu \mapsto f^t(\nu) := \nu \circ f$$

zu $f$ *transponiert* oder *dual*. Sind $\langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle$ und $\langle ., . \rangle$ Skalarprodukte auf $W$ bzw. $V$ und

$$\psi : W \to W^* \text{ und } \phi : V \to V^*$$

die zugehörigen kanonischen Injektionen, und ist $f^* \in \mathrm{Hom}(V, W)$ adjungiert zu $f$, so gilt

$$\psi \circ f^* = f^t \circ \phi.$$

**Beweis** Für $v \in V$ und $w \in W$ gilt:

$$((\psi \circ f^*)(v))\,(w) = \langle\!\langle f^*(v), w \rangle\!\rangle$$

$$\Big((f^t \circ \phi)(v)\Big)\,(w) = (\phi(v) \circ f)(w) = \langle v, f(w) \rangle$$

und nach Definition der Adjungierten folgt die Gleichheit.

**Bemerkung** Ist $\dim W < \infty$, so ist $\psi$ bijektiv und das Resultat des Lemmas kann als Definition dienen:

$$f^* := \psi^{-1} \circ f^t \circ \phi.$$

Wegen $f^t \in \mathrm{Hom}(V^*, W^*)$ folgt damit auch $f^* \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

**Bemerkung** $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$ hat *immer* eine Transponierte, eine Adjungierte aber nur unter bestimmten Voraussetzungen, z.B. wenn $\dim W < \infty$.

**Bemerkung** Oft wird die Transponierte/Duale $f^t$ auch mit $f^*$ bezeichnet.

**Buchhaltung** Sind $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ Basen von $V$ bzw. $W$ und $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$, so gilt:

$$\xi_{B^*}^{C^*}(f^t) = \left(\xi_C^B(f)\right)^t.$$

Sind $(V, \langle ., . \rangle)$ und $(W, \langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle)$ unitär (oder Euklidisch) und $B, C$ ONB, so gilt

$$\xi_B^C(f^*) = \left(\xi_C^B(f)\right)^*,$$

wobei

$$X^* := \overline{X}^t \text{ für } X \in K^{n \times m}.$$

In diesem Falle gilt nämlich $b_j^* = \phi(b_j)$ und $c_i^* = \psi(c_i)$ und damit

$$x_{ij}^* = c_i^*(f^*(b_j)) = \langle\!\langle c_i, f^*(b_j) \rangle\!\rangle = \overline{\langle b_j, f(c_i) \rangle} = \overline{x_{ji}}.$$

**Bemerkung** Sind $f, g \in \mathrm{Hom}(W, V)$ und $x \in K$, so gilt

$$(f + gx)^t = f^t + g^t x \text{ und } (f + gx)^* = f^* + g^* \overline{x}.$$

### 6.1.4 Lemma

Sind $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}(V, U)$, so gilt

$$(g \circ f)^t = f^t \circ g^t \text{ und } (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

**Beweis** Nachrechnen/-lesen oder über ein kommutatives Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend left=50, "g \circ f"] \arrow[d, "\psi"] & V \arrow[l, bend left, "f^*"] \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "\phi"] & U \arrow[l, bend left, "g^*"] \arrow[d, "\mu"] \arrow[ll, bend left=90, "(g \circ f)^* = f^* \circ g^*"] \\
W^* & V^* \arrow[l, "f^t"'] & U^* \arrow[l, "g^t"'] \arrow[ll, bend left, "(g \circ f)^t = f^t \circ g^t"]
\end{tikzcd}$$

### 6.1.5 Lemma

Sind $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$ und $f^* \in \mathrm{Hom}(V, W)$ adjungiert, so gilt

$$\ker f^* = f(W)^\perp$$

und $f^*$ ist injektiv, wenn $f$ surjektiv ist.

**Beweis** Da die Skalarprodukte $\langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle$ und $\langle ., . \rangle$ auf $W$ bzw. $V$ nicht-degeneriert sind, gilt

$$v \in \ker f^* \Leftrightarrow \forall w \in W : \langle\!\langle f^*(v), w \rangle\!\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall w \in W : \langle v, f(w) \rangle = 0 \Leftrightarrow f(W)^\perp,$$

also die erste Behauptung; ist $f(W) = V$, so folgt damit $\ker f^* = f(W)^\perp = V^\perp = \{0\}$.

### 6.1.6 Korollar

Sind $(W, \langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle)$ und $(V, \langle ., . \rangle)$ Euklidisch oder unitär mit $\dim V, \dim W < \infty$ und $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$ und $f^* \in \mathrm{Hom}(V, W)$ adjungiert, so gilt

$$\mathrm{rg}\, f^* = \mathrm{rg}\, f.$$

**Beweis** In der Situation hier (endlich-dimensional, positiv definite Skalarprodukte) sind $f(W)$ und $f(W)^\perp$ komplementäre UR und damit

$$V = f(W) \oplus f(W)^\perp = f(W) \oplus \ker f^*,$$

also

$$\mathrm{rg}\, f = \dim V - \mathrm{def}\, f^* = \mathrm{rg}\, f^*$$

nach Rangsatz für $f^*$.

**Bemerkung** Ist $\dim V, \dim W < \infty$, so folgt dann mit der Gleichheit der Abbildungen über die kanonischen Injektionen auch

$$\mathrm{rg}\, f^t = \mathrm{rg}\, f \text{ für } f \in \mathrm{Hom}(V, W).$$

Daher gilt $\mathrm{rg}\, f^* = \mathrm{rg}\, f$ dann auch für allgemeine Skalarprodukte auf $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-VR $V$ und $W$.

### 6.1.7 Buchhaltung

Mit den zu $X \in K^{n\times m}$ und $Y \in K^{k\times n}$ assoziierten Homomorphismen $f_X \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$ und $f_Y \in \mathrm{Hom}(K^n, K^k)$ zeigt man also

$$(YX)^t = X^tY^t \text{ und } (YX)^* = X^*Y^*.$$

Weiters folgt wegen $\mathrm{rg}\, f_X^* = \mathrm{rg}\, f_X^t = \mathrm{rg}\, f_X$

$$\mathrm{rg}\, X^t = \mathrm{rg}\, X^* = \mathrm{rg}\, X;$$

anders ausgedrückt: der Zeilenrang einer Matrix $X \in K^{n\times m}$ stimmt mit ihrem (Spalten-)Rang überein.

Insbesondere gilt:

$$X \in Gl(n) \Rightarrow X^t \in Gl(n).$$

### 6.1.8 Lemma

Sei $(V, \langle.,.\rangle)$ Euklidisch (unitär); $f \in Gl(V)$ ist genau dann orthogonal (unitär), wenn $f$ und $f^{-1}$ adjungiert sind, $f^{-1} = f^*$.

**Beweis** Ist $f^{-1} = f^*$ zu $f$ adjungiert, so ist $f \in O(V)$ (bzw. $f \in U(V)$), da

$$\forall v, w \in V : \langle f(v), f(w)\rangle = \langle (f^* \circ f)(v), w\rangle = \langle v, w\rangle;$$

ist umgekehrt $f \in O(V)$ (bzw. $U(V)$), so ist

$$\forall v, w \in V : \langle v, f(w)\rangle = \langle f(f^{-1}(v)), f(w)\rangle = \langle f^{-1}(v), w\rangle,$$

d.h. $f^{-1}$ ist zu $f$ adjungiert.

**Bemerkung** $f \in Gl(V)$ ist also genau dann orthogonal/unitär, wenn

$$f^* \circ f = f \circ f^* = \mathrm{id}_V .$$

**Bemerkung** Das Lemma lässt sich auf Isomorphismen $f \in \mathrm{Iso}(W, V)$ verallgemeinern: $f$ ist genau dann *isometrisch* (längentreu), wenn $f^{-1} = f^*$.

### 6.1.9 Buchhaltung

Ist $(V, \langle .,. \rangle)$ Euklidischer VR, $\dim V < \infty$, und $X = \xi_B^B(f)$ Darstellungsmatrix von $f \in \mathrm{End}(V)$ bzgl. einer ONB $B$, so ist

$$f \in O(V) \Leftrightarrow X^* X = E_n,$$

und analog für einen unitären VR $V$. Daher definiert man die *orthogonale (unitäre) Gruppe in $n$ Variablen*:

$$O(n) := \left\{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^* X = X^t X = E_n \right\},$$

$$U(n) := \left\{ X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* X = \overline{X}^t X = E_n \right\}.$$

$X$ ist also orthogonal/unitär, wenn die Spalten von $X$ eine ONB von $\mathbb{K}^{n \times 1}$ mit dem kanonischen Skalarprodukt bilden.

### 6.1.10 Definition

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ Euklidisch oder unitär; $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt dann

- *selbstadjungiert* oder *symmetrisch*, falls

$$\forall v, w \in V : \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle;$$

- *schiefadjungiert* oder *schiefsymmetrisch*, falls

$$\forall v, w \in V : \langle f(v), w \rangle + \langle v, f(w) \rangle = 0.$$

**Bemerkung** $f \in \mathrm{End}(V)$ ist also genau dann (schief-)symmetrisch, wenn $f$ eine Adjungierte $f^* \in \mathrm{End}(V)$ besitzt und $f^* = \pm f$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$(v, w) \mapsto \langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle := \langle v, f(w) \rangle$$

eine (schief-)symmetrische Sesquilinearform definiert.

### 6.1.11 Korollar

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ Euklidischer VR; eine Projektion $p \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann Orthogonalprojektion, wenn sie selbstadjungiert ist, $p^* = p$.

**Beweis** Lemma Abschnitt 5.5.

## 6.2 Normale Endomorphismen

**Motivation** Für orthogonale/unitäre selbst- und schiefadjungierte Endomorphismen $f \in \mathrm{End}(V)$ gilt stets

$$f^* \circ f = f \circ f^*.$$

Dies ist eine „gute“ Eigenschaft: sie liefert viele/wichtige strukturelle Aussagen über Endomorphismen.

**Generalvoraussetzung** In diesem Abschnitt ist $(V, \langle .,. \rangle)$ Euklidisch oder unitär.

### 6.2.1 Definition

$f \in \mathrm{End}(V)$ heißt *normal*, wenn $f$ eine Adjungierte $f^* \in \mathrm{End}(V)$ besitzt und

$$f^* \circ f = f \circ f^*.$$

### 6.2.2 Buchhaltung

Ist $\dim V < \infty$ und $X = \xi_B^B(f)$ Darstellungsmatrix von $f \in \mathrm{End}(V)$ bzgl. einer ONB $B$ von $(V, \langle .,. \rangle)$, so gilt

$$f \text{ normal} \Leftrightarrow X^*X = XX^*,$$

d.h. wenn $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *normal* ist.

### 6.2.3 Lemma

Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ normal, so gilt:

(i) $\ker f = \ker f^* = f(V)^\perp$;

(ii) $\forall v, w \in V : \langle f^*(v), f^*(w) \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{K} \forall v \in V : f(v) = vx \Rightarrow f^*(v) = v\overline{x}$.

(iv) Sind $v, w \in V$ Eigenvektoren zu EW $x, y \in \mathbb{K}$ von $f$, so gilt

$$x = y \text{ oder } v \perp w.$$

**Beweis** Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ normal.

(ii) Wegen $f^{**} = f$ gilt für $v, w \in V$:

$$\langle f^*(v), f^*(w) \rangle - \langle f(v), f(w) \rangle = \langle (f^{**} \circ f^*)(v), w \rangle - \langle (f^* \circ f)(v), w \rangle = \langle (f \circ f^* - f^* \circ f)(v), w \rangle = 0$$

(i) Wegen (ii) gilt für $v \in V$

$$f^*(v) = 0 \Rightarrow 0 = \|f^*(v)\|^2 = \|f(v)\|^2 \Rightarrow f(v) = 0$$

und umgekehrt, und damit

$$\ker f^* = \ker f.$$

Nach früherem Lemma ist

$$\ker f^* = f(V)^\perp$$

(iii) Nach (i) ist für $x \in \mathbb{K}$

$$\ker(f - \mathrm{id}_V\, x) = \ker(f - \mathrm{id}_V\, x)^* = \ker(f^* - \mathrm{id}_v\, \overline{x}),$$

da $f - \mathrm{id}_V\, x$ mit $f$ normal ist.

(iv) Mit (iii) folgt für $v, w \in V$ mit $f(v) = vx$ und $f(w) = wy$

$$(x - y)\langle v, w\rangle = \langle v\overline{x}, w\rangle - \langle v, wy\rangle = \langle f^*(v), w\rangle - \langle v, f(w)\rangle = 0.$$

### 6.2.4 Lemma

Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ normal und $U \subset V$ UVR, so gilt

(i) Ist $U$ $f$-invariant, so ist $U^\perp$ $f^*$-invariant;

(ii) Ist $U$ $f$- und $f^*$-invariant, so liefert Einschränkng normale Endomorphismen

$$f\big|_U \in \mathrm{End}(U) \text{ und } f\big|_{U^\perp} \in \mathrm{End}(U^\perp).$$

**Beweis** Für (i) wird nur die Existenz der Adjungierten benutzt.

(i) Sei $v \in U^\perp$, dann gilt:

$$\forall u \in U : \langle f^*(v), u\rangle = \langle v, f(u)\rangle = 0$$

(ii) Da $U$ $f$- und $f^*$-invariant ist, ist (nach(i)) $U^\perp$ $f^*$- und $f^{**} = f$-invariant. Damit ist es sinnvoll

$$f\big|_U \in \mathrm{End}(U), f\big|_{U^\perp} \in \mathrm{End}(U^\perp)$$

$$f^*\big|_U \in \mathrm{End}(U), f^*\big|_{U^\perp} \in \mathrm{End}(U^\perp)$$

zu betrachten. Nun gilt:

$$\forall u, v \in U : \langle f\big|_U^*(u), v\rangle = \langle u, f\big|_U(v)\rangle = \langle u, f(v)\rangle = \langle f^*(u), v\rangle = \langle f^*\big|_U(u), v\rangle$$

und analog für $v, w \in U^\perp$. Damit folgt: $f\big|_U^* = f^*\big|_U$ und $f\big|_{U^\perp}^* = f^*\big|_{U^\perp}$ und also

$$f\big|_U^* \circ f\big|_U = f^* \circ f\big|_U = f \circ f^*\big|_U = f\big|_U \circ f\big|_U^*.$$

**Bemerkung & Beispiel** Eine Orthogonalprojektion ist selbstadjungiert, $p \in \mathrm{End}(V)$ mit $p^2 = p, p^* = p$ und damit normal. Ist $p \neq \mathrm{id}_V, 0$, so ist

$$V = U \oplus_\perp U^\perp \text{ mit } \begin{cases} U := p(V), \\ U^\perp = \ker p. \end{cases}$$

Wir definieren:

$$\pi : V \to U, v \mapsto \pi(v) := p(v) \text{ und } \iota : U \to V, u \mapsto \iota(u) := u;$$

man nennt die isometrische Abbildung $\iota$ auch die *Inklusion* von $U$ in $V$. Dann sind $\pi$ und $\iota$ adjungiert:

$$\forall u \in U \forall v \in V : \langle \iota(u), v \rangle = \langle u, \pi(v) \rangle\big|_U$$

Insbesondere ist die „Projektionsabbildung“ $\pi$ *nicht* selbstadjungiert.

**Achtung:** Die Adjungierte hängt von Definitions- und Wertebereich ab!

### 6.2.5 Spektralsatz (unitärer Fall)

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ unitär, $\dim V < \infty$, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann besitzt $V$ eine ONB aus Eigenvektoren von $f$.

**Bemerkung** Es gilt auch die Umkehrung: Ist $(e_1, \ldots, e_n)$ ONB mit

$$f(e_i) = e_i x_i, \text{ also } f^*(e_i) = e_i \overline{x_i}, \; i = 1, \ldots, n,$$

so gilt

$$(f^* \circ f)(e_i) = e_i \overline{x_i} x_i = e_i x_i \overline{x_i} = (f \circ f^*)(e_i), \; i = 1, \ldots, n,$$

d.h. $f$ ist normal.

**Beweis** Induktion über $n = \dim V$.

Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Sei die Aussage für $n \in \mathbb{N}$ wahr. Für $n + 1$ gilt dann:

$f$ hat einen Eigenwert $x \in \mathbb{C}$, da das charakteristische Polynom $\chi_f(t) \in \mathbb{C}[t]$ nach Fundamentalsatz der Algebra in Linearfaktoren zerfällt.

Sei $e \in V^\times$ ein zugehöriger Eigenvektor,

$$f(e) = ex, \text{ o.B.d.A. } \|e\| = 1.$$

Wegen $f^*(e) = e\overline{x}$ ist $[e]$ dann $f$- und $f^*$- invariant und damit

$$V = [e] \oplus_\perp [e]^\perp,$$

wobei $f\big|_{[e]} \in \mathrm{End}([e])$ und $f\big|_{[e]^\perp} \in \mathrm{End}([e]^\perp)$ normal sind (Lemma).

Da $\dim[e]^\perp = n$ liefert die Induktions-Annahme eine ONB $(e_1, \ldots, e_n)$ von $[e]^\perp$ aus Eigenvektoren von $f\big|_{[e]^\perp}$. Damit ist $(e, e_1, \ldots, e_n)$ eine ONB aus Eigenvektoren von $f$.

### 6.2.6 Buchhaltung

Ein normaler Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ eines unitären VR $(V, \langle .,. \rangle)$ mit $\dim V < \infty$ ist also *orthogonal diagonalisierbar*, d.h. es existiert eine ONB aus Eigenvektoren von $f$.

Also, bezüglich einer solchen ONB $B$ ist

$$\xi_B^B(f) = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n).$$

Da $\xi_B^B(f^*) = (\xi_B^B(f))^*$ gilt:

- ist $f$ selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte reell, $x_i = \overline{x_i}$;
- ist $f$ schiefadjungiert, so sind alle Eigenwerte imaginär, $x_i = -\overline{x_i}$
- ist $f$ unitär, so sind alle Eigenwerte *unitär*, d.h. für $j = 1, \ldots, n$ ist

$$x_j \in S^1 := \{x \in \mathbb{C} : \overline{x}x = 1\} = \{e^{iy} \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

### 6.2.7 Korollar & Definition

Ist $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, $X^*X = XX^*$, so gilt

$$\exists P \in U(n) : P^{-1}XP = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n).$$

Dabei gilt:

- ist $X$ *selbstadjungiert*, $X^* = X$, so sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;
- ist $X$ *schiefadjungiert*, $X^* = -X$, so sind $x_1, \ldots, x_n \in i\mathbb{R}$;
- ist $X$ *unitär*, $X \in U(n) = \{Y \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid Y^*Y = E_n\}$, so gilt $|x_1|, \ldots, |x_n| = 1$.

**Beweis** Sei $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, betrachte $\mathbb{C}^n$ als unitären VR mit Standardbasis $E$ als ONB.

$$\Gamma_E(\langle .,.\rangle) = E_n,$$

und den assoziierten Endomorphismus $f_X \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$. Orthonormale Basiswechsel $B = EP$ sind dann durch unitäre Matrizen $P \in U(n)$ gegeben:

$$E_n = \Gamma_B(\langle .,.\rangle) = P^*\Gamma_E(\langle .,.\rangle)P = P^*P \Leftrightarrow P \in U(n).$$

Anwendung des Spektralsatzes liefert also die Behauptung.

**Beispiel** Für $X = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $s \in \mathbb{R}$ ist $X^* = X^t = X^{-1}$, d.h. $X$ ist unitär, also normal, und damit

$$\exists P \in Gl(2) : P^{-1}\begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

wobei $x_i$ die Eigenwerte von $f_X$ sind, d.h. Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_X(t) = (t - \cos s)^2 + \sin^2 s = t^2 - 2t\cos s + 1 = (t - e^{is})(t - e^{-is}).$$

Bemerke: $|e^{\pm is}| = 1$, d.h. $x_{1,2}$ sind unitär. Eigenvektoren bzw. P:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 6.2.8 Spektralzerlegung (unitärer Fall)

Sei $(V, \langle .,.\rangle)$ unitär, $\dim V < \infty$, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ normal; dann zerfällt $V$ als orthogonale direkte Summe der Eigenräume von $f$,

$$V = \bigoplus_{x \in \chi_f^{-1}(\{0\})} \ker(\mathrm{id}_V\, x - f).$$

**Beweis** Folgt direkt aus dem Spektralsatz.

**Bemerkung** Mit gewissen Voraussetzungen gilt der Satz auch für $\dim V = \infty$.

### 6.2.9 Definition & Lemma

Seien $(V, \langle .,. \rangle)$ Euklidischer VR und $f \in \mathrm{End}(V)$ normal. Die *komplexe Erweiterung*

$$f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, (v, w) \mapsto f_{\mathbb{C}}(v, w) := (f(v), f(w))$$

von $f$ ist dann ein normaler Endomorphismus von $(V_{\mathbb{C}}, \langle\langle .,. \rangle\rangle_{\mathbb{C}})$.

**Bemerkung** Die komplexe Erweiterung für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ definiert man analog.

**Bemerkung** Auf $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ ist die (komplexe) Skalarmultiplikation

$$(v, w)(x + iy) = (v, w)x + J(v, w)y$$

wobei $J(v, w) = (-w, v)$; damit ist $f_{\mathbb{C}}$ komplex linear, da

$$f_{\mathbb{C}} \circ J = J \circ f_{\mathbb{C}}.$$

**Beweis** Nach Komplexifizierungslemma ist $(V_{\mathbb{C}}, \langle\langle .,. \rangle\rangle)$ unitär, wobei

$$\langle\langle (v, w), (v', w') \rangle\rangle = (\langle v, v' \rangle + \langle w, w' \rangle) + i\, (\langle v, w' \rangle - \langle w, v' \rangle)\,;$$

offenbar gilt für $v, w, v', w' \in V_{\mathbb{C}}$

$$\langle\langle (f^*(v), f^*(w))\,, (v', w') \rangle\rangle_{\mathbb{C}} = \langle\langle (v, w), (f(v'), f(w')) \rangle\rangle = \langle\langle (v, w), f_{\mathbb{C}}(v', w') \rangle\rangle$$

also $(f_{\mathbb{C}})^* = (f^*)_{\mathbb{C}}$ und damit

$$f^*_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}} = (f^* \circ f)_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}} \circ f^*_{\mathbb{C}})\,,$$

d.h. $f_{\mathbb{C}}$ ist normal.

**Bemerkung** Ist $(v, w) \in V_{\mathbb{C}}^{\times}$ Eigenvektor zum Eigenwert $(x - iy) \in \mathbb{C}$ von $f_{\mathbb{C}}$,

$$f_{\mathbb{C}}(v, w) = (f(v), f(w)) = (v, w)(x - iy) = (vx + wy, -vy + wx) = (v, w) \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

so können zwei Fälle eintreten:

1. $y = 0$ und $[\{v, w\}] \subset \ker(\mathrm{id}_V\, x - f)$, oder
2. $y \neq 0$ und $\dim[\{v, w\}] = 2$ und[2] $f|_{[\{v,w\}]}$ ist *Drehstreckung*.

[2] $[\{v, w\}]$ ist $f$-invarianter UVR, also $f|_{[\{v,w\}]} \in \mathrm{End}([\{v, w\}])$

Im zweiten Fall ($y \neq 0$) ist $(v, -w)$ ebenfalls Eigenvektor zum Eigenwert $(x + iy)$ von $f_{\mathbb{C}}$, d.h. komplexe Eigenwerte/-vektoren treten in „komplex konjugierten Paaren“ auf.

### 6.2.10 Spektralzerlegung (Euklidischer Fall)

Seien $(V, \langle .,. \rangle)$ Euklidischer VR mit $\dim V < \infty$ und $f \in \operatorname{End}(V)$ normal; dann zerfällt $V$ als orthogonale direkte Summe $f$- und $f^*$-invarianter UVR $V_i$

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i \text{ mit } V_i \perp V_j \text{ für } i \neq j$$

und

$$\begin{cases} \dim V_i = 1 & \text{und } f|_{V_i} \text{ Streckung für } i \leq k \leq m \\ \dim V_i = 2 & \text{und } f|_{V_i} \text{Drehstreckung für } k < i \leq m, \end{cases}$$

für geeignetes $k \in \{0, \dots, m\}$. Beweis nach Lemma.

### 6.2.11 Buchhaltung

Zu einem normalen $f \in \operatorname{End}(V)$ eines Euklidischen VR $(V, \langle .,. \rangle)$ mit $\dim V < \infty$ gibt es also eine ONB $E$ von $(V, \langle .,. \rangle)$, sodass

$$\xi_E^E(f) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 & \\ \vdots & \ddots & x_k & & & \\ & & & X_{n+1} & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \cdots & 0 & X_m \end{pmatrix} \text{ mit } X_i = \begin{pmatrix} x_i & -y_i \\ y_i & x_i \end{pmatrix} \text{ für } i = k+1, \dots, m$$

und $x_1, \dots, x_m, y_{k+1}, \dots, y_m \in \mathbb{R}$. Da $\xi_E^E(f^*) = (\xi_E^E(f))^* = (\xi_E^E(f))^*$ gilt

- ist $f$ selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte reell, $k = m$;
- ist $f$ schiefadjungiert, so sind alle Eigenwerte imaginär, $k = 0$ und $x_1 = \cdots = x_m = 0$;
- ist $f$ orthogonal, so sind alle Eigenwerte unitär, $x_i^2 + y_i^2 = 1$ (insbesondere $x_1^2 = \cdots = x_k^2 = 1$).

Entsprechendes gilt für normale Matrizen. Insbesondere erhält man den Satz über die

### 6.2.12 Hauptachsentransformation

Ist $(V, \langle .,. \rangle)$ Euklidischer VR mit $\dim V < \infty$ und $f \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert, so ist $f$ orthogonal diagonalisierbar.

**Bemerkung** Die Hauptachsentransformation kann zur Bestimmung der Signatur einer symmetrischen Bilinearform $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{R}$-VR $V$ mit $\dim V < \infty$ dienen:

- Wähle (beliebig) ein Euklidisches (Referenz-) Skalarprodukt $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$;
- Definiere $b \in \mathrm{End}(V)$ (Rieszsches Darstellungslemma) durch

$$\forall v, w \in V : \sigma(v,w) = \langle v, b(w) \rangle;$$

  da $\sigma$ symmetrisch ist, ist $b$ selbstadjungiert.
- Bestimme Eigenwerte $x_i \in \mathbb{R}$ von $b$ mit Vielfachheiten[3] $k_i \in \mathbb{N}$ (Hauptachsentransformation).
- Dann ist

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \left( \sum_{x_i>0} k_i, \sum_{x_i<0} k_i, \mathrm{def}\, b \right).$$

Ist $E$ ONB aus Eigenvektoren von $b$, so gilt[4]

$$\Gamma_E(\sigma) = \xi_E^E(b).$$

### 6.2.13 Quadratwurzelsatz

Ist $(V, \langle .,. \rangle)$ Euklidischer VR und $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, so heißt

(i) $f$ *positiv semi-definit* ($f \geq 0$), falls

$$\forall v \in V : \langle v, f(v) \rangle \geq 0;$$

(ii) *positiv definit* ($f > 0$), falls

$$\forall v \in V^\times : \langle v, f(v) \rangle > 0.$$

Ist $\dim V < \infty$ und $f$ positiv semi-definit, so gilt

$$\exists! g \in \mathrm{End}(V) : \begin{cases} g \geq 0 \\ f = g \circ g = g^2. \end{cases}$$

**Beweis** Mit Hauptachsentransformation: Ist $E = (e_1, \ldots, e_n)$ ONB aus Eigenvektoren von $f$,

$$f(e_i) = e_i x_i \text{ mit } x_i = \langle e_i, f(e_i) \rangle \geq 0$$

[3] Geometrische und algebraische Vielfachheiten sind gleich, da $b$ diagonalisierbar ist.
[4] Gleichheit der Einträge; sonst sinnlos!

für $i = 1, \dots, n$, dann liefert

$$g \in \mathrm{End}(V) \text{ mit } \forall i \in \{1, \dots, n\} : g(e_i) = e_i\sqrt{x_i}$$

eindeutig die gesuchte „Quadratwurzel" von $f$.

### 6.2.14 Polarzerlegung

Ist $(V, \langle ., . \rangle)$ Euklidischer VR mit $\dim V < \infty$, so gilt

$$\forall f \in Gl(V) \exists! h > 0 \exists! k \in O(V) : f = h \circ k.$$

**Beweis**

- *Eindeutigkeit:* Ist $f = h \circ k$ mit $k \in O(V), h > 0$, so gilt

  $$H := f \circ f^* = h \circ \underbrace{k \circ k^*}_{=\mathrm{id}_V} \circ h^* = h^2$$

  nach Quadratwurzelsatz ist also $h$, und damit $k$ eindeutig bestimmt.

- *Existenz:* Wegen $\ker f^* = f(V)^\perp = V^\perp = \{0\}$ gilt für $H := f \circ f^*$

  $$\forall v \in V^\times : \langle v, H(v) \rangle = \langle v, (f \circ f^*)(v) \rangle = \langle f^*(v), f^*(v) \rangle > 0$$

  also $H > 0$. Definiere (Quadratwurzelsatz)

  $$h := \sqrt{H} > 0 \text{ und } k := h^{-1} \circ f;$$

  dann ist

  $$\forall v \in V : \langle k(v), k(v) \rangle = \langle (h^{-1} \circ f)(v), (h^{-1} \circ f)(v) \rangle = \langle (H^{-1} \circ f)(v), f(v) \rangle$$
  $$= \langle \left( (f^*)^{-1} \circ f^{-1} \circ f \right)(v), f(v) \rangle = \langle v, \left( f^{-1} \circ f \right)(v) \rangle = \langle v, v \rangle,$$

  also ist $k \in O(V)$.

**Bemerkung** Quadratwurzelsatz und Polarzerlegung gelten auch in unitären VR – „positiv (semi-)definit" ist auch im unitären Fall sinnvoll:

$$\forall v \in V : \overline{\langle v, f(v) \rangle} = \langle f(v), v \rangle = \langle v, f(v) \rangle$$

für selbstadjungierte $f$, also $\forall v \in V : \langle v, f(v) \rangle \in \mathbb{R}$.

## 6.3 Nilpotente Endomorphismen und Jordansche Normalform

**Generalvoraussetzung** In diesem Abschnitt werden nur endlichdimensionale Vektorräume behandelt.

### 6.3.1 Lemma

Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $p_1(t), p_2(t) \in K[t]$ normiert und teilerfremd. Ist

$$p(f) = 0, \text{ wobei } p(t) = p_1(t)p_2(t),$$

so gilt für $V_i := \ker p_i(f)$ $(i = 1, 2)$

$$V = V_1 \oplus V_2 \text{ und } f(V_i) \subset V_i$$

**Beweis** Für jedes Polynom $q(t) \in K[t]$ ist $\ker q(f) \subset V$ ein $f$-invarianter UVR, da

$$\forall v \in \ker q(f) : q(f)(f(v)) = (q(f) \circ f)(v)$$

$$= (f \circ q(f))(v) = f(q(f)(v)) = 0$$

Wegen $p(f) = 0$ gilt

$$\{0\} = p(f)(V) = \begin{cases} \Big(p_1(f) \circ p_2(f)\Big)(V) \Rightarrow p_2(f)(V) \subset \ker p_1(f) \\ \Big(p_2(f) \circ p_1(f)\Big)(V) \Rightarrow p_1(f)(V) \subset \ker p_2(f). \end{cases}$$

Da $p_1(t), p_2(t)$ teilerfremd sind, gilt nach Lemma von Bézont (vgl. Abschnitt 4.3.9)

$$\exists q_1(t), q_2(t) \in K[t] : 1 = q_1(t)p_1(t) + q_2(t)p_2(t),$$

und damit

$$V = \Big(p_1(f) \circ q_1(f) + p_2(f) \circ q_2(f)\Big)(V) \subset p_1(f)(V) + p_2(f)(V) \subset V_2 + V_1;$$

andererseits gilt für $v \in V_1 \cap V_2$

$$v = \Big(q_1(f) \circ p_1(f) + q_2(f) \circ p_2(f)\Big)(v)$$

$$= q_1(f)\Big(\underbrace{p_1(f)(v)}_{0}\Big) + q_2(f)\Big(\underbrace{p_2(f)(v)}_{0}\Big) = 0$$

Also ist $V = V_1 \oplus V_2$.

### 6.3.2 Hauptraumzerlegung

Ist das Minimalpolynom $\mu_f(t) \in K[t]$ eines Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ Produkt von Linearfaktoren,

$$\mu_f(t) = (t - x_1)^{r_1} \cdots (t - x_m)^{r_m},\, x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j$$

so ist $V$ direkte Summe der *Haupträume* zu den Eigenwerten $x_i$ von $f$:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i \text{ mit } V_i := \ker(\mathrm{id}_V\, x_i - f)^{r_i}.$$

**Beweis** Folgt direkt mit dem Lemma (Induktion).

**Bemerkung** Der Wert $k_i = \dim V_i$ ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $x_i$. Formuliert man die Hauptraumzerlegung mit dem charakteristischen Polynom,

$$\chi_f(t) = (t - x_1)^{k_1} \cdots (t - x_m)^{k_m},\, x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j,$$

so folgt dies leicht, da wegen $f(V_i) \subset V_i$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$

$$\chi_{f|_{V_i}}(t) = (t - x_i)^{k_i} \Rightarrow \dim V_i = \deg \chi_{f|_{V_i}} = k_i.$$

### 6.3.3 Buchhaltung

Ist also

$$\mu_f(t) = (t - x_1)^{r_1} \cdots (t - x_m)^{r_m},\, x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j,$$

so hat $f$ eine Darstellungsmatrix in *Block-Diagonalgestalt*,

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_m \end{pmatrix} \text{ mit } X_i \in K^{k_i \times k_i},$$

wobei $k_i \geq r_i$ die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte $x_i$ sind.

Dies liefert die „Makrostruktur“ eines Endomorphismus mit zerfallendem Minimal- oder charakteristischem Polynom – eine weitere Strukturanalyse der $f|_{V_i} \in \operatorname{End}(V_i)$ liefert dann die „Mikrostruktur“ (mögliche Form der $X_i$’s).

**Bemerkung** Für $V_i = \ker(\mathrm{id}_V\, x_i - f)^{r_i}$ und $g_i := (f - \mathrm{id}_V\, x_i)|_{V_i} \in \operatorname{End}(V_i)$ gilt offenbar $g_i^{r_i} = 0$; andererseits ist $g_i^{r_i - 1} \neq 0$, denn sonst wäre

$$p(t) = (t - x_1)^{r_1} \cdots (t - x_{i-1})^{r_{i-1}} (t - x_i)^{r_i - 1} (t - x_{i+1})^{r_{i+1}} \cdots (t - x_m)^{r_m}$$

normiertes Annulatorpolynom mit

$$\deg p(t) = \deg \mu_f(t) - 1 < \deg \mu_f(t).$$

Also wäre $\mu_f(t)$ nicht Minimalpolynom.

### 6.3.4 Definition

Eine Abbildung $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt *nilpotent*, falls $f^r = 0$ für ein $r \in \mathbb{N}$.

**Bemerkung** Die weitere Strukturanalyse eines Endomorphismus mit in Linearfaktoren zerfallendem Minimalpolynom reduziert sich also auf die nilpotenter Endomorphismen

$$g_i = (f - \mathrm{id}_V\, x_i)|_{V_i} \in \mathrm{End}(V_i).$$

Dies liefert dann die „Mikrostruktur".

**Zur Erinnerung** Ist $U \subset V$ ein $f$-invarianter UVR $f(U) \subset U$, so ist $f|_U \in \mathrm{End}(V)$; eine $f$-zyklische Basis von $U$ ist dann eine Basis der Form (vgl. 4.5.2)

$$\left(v, f(v), \ldots, f^{r-1}(v)\right).$$

Insbesondere besitzt für jedes $v \in V^\times$ der von $f$ erzeugte *$f$-zyklische Unterraum*

$$\mathcal{Z}_v := \left[\left(f^k(v)\right)_{k \in \mathbb{N}}\right]$$

eine $f$-zyklische Basis; ist für $v \in V$ und $r \in \mathbb{N}$

$$f^r(v) = 0 \text{ und } f^{r-1}(v) \neq 0,$$

so ist $(v, \ldots, f^{r-1}(v))$ eine $f$-zyklische Basis von $\mathcal{Z}_v$.

### 6.3.5 Lemma

Seien $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent, $f^r = 0$, und $v \in V$ so, dass $f^{r-1}(v) \neq 0$. Damit existiert ein UVR $U \subset V$ mit

$$f(U) \subset U \text{ und } V = \mathcal{Z}_v \oplus U.$$

Die Einschränkung $f|_U \in \mathrm{End}(U)$ ist dann nilpotent,

$$f|_U{}^q = 0 \text{ mit } q \leq r.$$

**Beweis** Sei $U \subset V$ ein UVR mit

$$f(U) \subset U \quad \text{und} \quad \{0\} = \mathcal{Z}_v \cap U$$

Es gibt solche Unterräume, e.g. $U = \{0\}$. Zu zeigen: Es gibt solch einen Unterraum $U$ mit

$$V = \mathcal{Z}_v + U$$

Strategie: Wir zeigen, dass $U$ vergrößert werden kann, wenn $V \neq \mathcal{Z}_v + U$, sei das also der Fall. Da $f^r(V) = \{0\} \subset \mathcal{Z}_v + U$ existiert $s \in \{1, \dots, r\}$ mit

$$f^s(V) \subset \mathcal{Z}_v + U \quad \text{und} \quad W := f^{s-1}(V) \not\subset \mathcal{Z}_v + U.$$

Wegen $\mathcal{Z}_v \cap U = \{0\}$ hat $f(w)$ für $w \in W$ eine eindeutige Zerlegung

$$f(w) = \sum_{k=0}^{r-1} f^k(v) x_k + u \in \mathcal{Z}_v \oplus U$$

wobei

$$0 = f^r(w) = f^{r-1}(v) x_0 + f^{r-1}(u) \quad \Rightarrow x_0 = 0$$

und damit

$$f(u') = u \in U \quad \text{für} \quad u' := w - \sum_{k=1}^{r-1} f^{k-1}(v) x_k.$$

Folglich ist $U' := [u'] + U$ ein $f$-invarianter Unterraum, $f(U') \subset U \subset U'$. Weiters ist $u' - w \in \mathcal{Z}_v$. Wählt man also $w \in W \setminus (\mathcal{Z}_v + U)$, so erhält man $u' \notin \mathcal{Z}_v + U$ und damit

$$U' \neq U \quad \text{und} \quad \mathcal{Z}_v \cap U' = \{0\}.$$

Da $f^r = 0$ gilt dies offenbar auch für jede Einschränkung von $f$.

### 6.3.6 Struktursatz für nilpotente Endomorphismen

Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent, so ist $V$ direkte Summe $f$-zyklischer UVR $\mathcal{Z}_{v_j}$,

$$V = \bigoplus_{j=1}^{d} \mathcal{Z}_{v_j} = \bigoplus_{j=1}^{d} \left[ \left( f^k(v_j) \right)_{k \in \mathbb{N}} \right].$$

Die Familie der Dimensionen $(r_1, \dots, r_d)$ der Dimensionen $r_j = \dim \mathcal{Z}_{v_j}$ ist bis auf Permutationen eindeutig[5].

[5] Beispielsweise folgt die Eindeutigkeit, wenn man aufsteigende Dimensionen fordert.

**Bemerkung** Die Zerlegung in $f$-zyklische UVR ist *nicht* eindeutig!

**Bemerkung** Da $\ker f \cap \mathcal{Z}_{v_j} = [f^{r_j-1}(v_j)]$ für $j = 1\dots,d$, ist $d = \operatorname{def} f$.

### 6.3.7 Buchhaltung

Ist also $f$ nilpotent, so hat $f$ eine Darstellungsmatrix in Block-Diagonalgestalt,

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_d \end{pmatrix} \text{ mit } J_j = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Beweis** Die Existenz der Zerlegung folgt induktiv aus dem Lemma.

Zur Eindeutigkeit der Dimensionsfamilie: Es bezeichne

$$n_k := \#\{r_j = k \mid j = 1, \dots, d\}$$

die Anzahl der $f$-zyklischen UR $\mathcal{Z}_{v_j}$ mit $\dim \mathcal{Z}_{v_j} = k$ für $k = 1, \dots, n = \dim V$. Dann gilt

$$\operatorname{rg} f^0 = \sum_{k=1}^{n} k n_k$$

$$\operatorname{rg} f^1 = \sum_{k=2}^{n} (k-1) n_k$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{rg} f^s = \sum_{k=s+1}^{n} (k-s) n_k$$

für $s = 0, \dots, n-1$. Also erfüllen die $n_k$'s ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & 1 & \cdots & n-1 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{rg} f^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \operatorname{rg} f^{n-1} \end{pmatrix}$$

### 6.3.8 Jordansche Normalform

Ist das Minimalpolynom $\mu_f(t) \in K[t]$ eines Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ Produkt von Linearfaktoren,

$$\mu_f(t) = (t - x_1)^{r_1} \cdots (t - x_m)^{r_m},\ x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j$$

so besitzt $f$ eine Darstellungsmatrix in *Jordanscher Normalform*, d.h.

- *Makrostruktur*: $\xi_B^B = \operatorname{diag}(X_1, \dots, X_m)$, wobei $X_i \in K^{k_i \times k_i}$ mit $k_i \geq r_i$ die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte $x_i$ sind, und
- *Mikrostruktur:* jedes $X_i = \operatorname{diag}(J_{i1}(x_i), \dots, J_{id}(x_i))$, mit *Jordanblöcken*

$$J_{ij}(x) = \begin{pmatrix} x & & & \\ 1 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\xi_B^B(f)$ eindeutig, bis auf Anordnung der Blöcke.

**Bemerkung** Die Basis $B$ ist *nicht* eindeutig!

**Beweis** Folgt direkt aus den vorigen beiden Sätzen.

## 6.4 Quadriken

**Generalvoraussetzung** In diesem Abschnitt ist $(A, V, \tau)$ ein *reeller* affiner Raum über einem $\mathbb{R}$-VR $V$; $\langle .,. \rangle$ ist ein Euklidisches Skalarprodukt.

### 6.4.1 Definition

Eine *Quadrik* $Q \subset A$ ist die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

$$Q = \{q = o + v \mid \beta(v,v) + 2\lambda(v) + \rho = 0\}$$

wobei $o \in A$ ein Ursprung ist und

- $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, $\beta \neq 0$;
- $\lambda : V \to \mathbb{R}$ eine Linearform; und
- $\rho \in \mathbb{R}$ sind.

Diese Definition hängt nicht vom Ursprung $o \in A$ ab:

### 6.4.2 Lemma

Ist $Q = \{o + v \in A \mid \beta(v,v) + 2\lambda(v) + \rho = 0\}$ eine Quadrik und $o' = o + w \in A$ ein anderer Ursprung, so ist

$$Q = \{o' + v \in A \mid \beta'(v,v) + 2\lambda'(v) + \rho' = 0\}$$

mit $\beta' = \beta$, $\lambda' = \lambda + \beta(w, .)$, $\rho' = \rho + 2\lambda(w) + \beta(w, w)$.

**Beweis** Mit $q = o' + v = o + (w, v)$ nachrechnen, vgl. Aufgabe 91.

**Bemerkung** Insbesondere ist $\beta' = \beta$ unabhängig vom gewählten Ursprung, der lineare Term ändert sich mit $\beta(w, .)$ – unter „guten Umständen“ kann man also $\lambda$ durch geeignete Wahl von $o'$ verschwinden lassen (quadratische Ergänzung).

**Beispiel** Für $\lambda \in V^* \setminus \{0\}$ liefert

$$\beta : V \times V \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \beta(v, w) := \lambda(v)\lambda(w)$$

eine symmetrische Bilinearform $\beta \neq 0$ und daher

$$Q = \{o + v \in A \mid \lambda^2(v) = \beta(v, v) = 0\}$$

eine Quadrik; andererseits ist

$$Q = o + \ker \lambda$$

eine Hyperebene (AUR mit $\dim = \dim A - 1$).

### 6.4.3 Bemerkung & Definition

Im Folgenden betrachten wir nur *echte Quadriken*, d.h. Quadriken $Q \subset A$, die nicht in einer affinen Hyperebene enthalten sind. Insbesondere schließen wir $Q = \emptyset$ aus.

Nach Wahl des Ursprungs $o \in A$ bestimmt eine echte Quadrik die zugehörige Gleichung bis auf Vielfache: $(\beta, \lambda, \rho)$ ist bis auf (gemeinsame) Skalarmultiplikation mit $x \in \mathbb{R}^\times$ eindeutig bestimmt.

### 6.4.4 Definition

Ein Punkt $z \in A$ heißt *Mittelpunkt* einer Quadrik $Q \subset A$, falls

$$\forall q = z + v \in A : q \in Q \Rightarrow z - v \in Q,$$

ein Mittelpunkt $z$ einer Quadrik $Q$ heißt *Spitze*, falls $z \in Q$.

Eine Quadrik $Q$ heißt

- *Mittelpunktsquadrik*, falls sie einen Mittelpunkt $z \in A$ hat,
- *Kegel*, falls sie eine Spitze hat;
- *Paraboloid* (oder Parabel für $\dim A = 2$), falls sie keinen Mittelpunkt hat.

**Bemerkung & Beispiel** Eine Quadrik $Q$ kann mehr als einen Mittelpunkt oder eine Spitze haben. Beispielsweise liefert für $\lambda \in V^* \setminus \{0\}$

$$Q = \{q = o + v \in A \mid \beta(v,v) = \lambda^2(v) = 1\}$$

ein Paar paralleler Hyperebenen, eine Quadrik, für die jeder Punkt $z = o + w \in o + \ker\lambda$ ein Mittelpunkt ist, da für $o + v = (o + w) + (v - w) = z + (v - w) \in Q$ gilt

$$\lambda\left((z - (v - w)) - o\right) = \lambda(2w - v) = -\lambda(v) \implies o + v \in Q \Rightarrow z - (v - w) \in Q.$$

### 6.4.5 Lemma

Seien $Q \subset A$ eine echte Quadrik und $z \in A$. Dann ist

- $z \in A$ Mittelpunkt von $Q$, falls
$$\exists c \in \mathbb{R} : Q = \{q \in A \mid \beta(q - z, q - z) = c\};$$
- $z \in A$ Spitze von $Q$, falls
$$Q = \{q \in A \mid \beta(q - z, q - z) = 0\}.$$

**Beweis** Da eine Spitze ein Mittelpunkt auf $Q$ ist, folgt die zweite Aussage direkt aus der ersten. Sei $z \in A$ Mittelpunkt von $Q$; mit $z$ als Ursprung und geeigneten $(\beta, \lambda, \rho)$ ist dann

$$Q = \{q = z + v \mid \beta(v,v) + 2\lambda(v) + \rho = 0\}.$$

Da $z$ Mittelpunkt von $Q$ ist, gilt

$$\forall q = z + v \in Q : \begin{cases} 0 = \beta(v,v) + 2\lambda(v) + \rho \\ 0 = \beta(v,v) - 2\lambda(v) + \rho \end{cases}$$

mithin

$$\forall q = z + v \in Q : \lambda(v) = 0,$$

also

$$Q \subset z + \ker\lambda.$$

Da $Q$ echte Quadrik ist, folgt also $\ker\lambda = V$ bzw. $\lambda = 0$. Die Behauptung folgt dann mit $c = -\rho$. Umgekehrt: Ist für ein $c \in \mathbb{R}$

$$Q = \{q = z + v \in A \mid \beta(v,v) = c\},$$

so ist $z$ offenbar Mittelpunkt von $Q$.

### 6.4.6 Bemerkung & Definition

Ist $Q \subset A$ ein Kegel mit Spitze $z \in Q$, so ist für $q \in Q \setminus \{z\}$ und $v := q - z$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \beta(vx, vx) = \beta(v, v)x^2 = 0,$$

also ist mit $q$ auch die gesamte Gerade $[\{z, q\}] = \{z + vx \mid x \in \mathbb{R}\} \subset Q$. Diese in $Q$ enthaltenen Geraden heißen auch *Erzeugende* des Kegels.

### 6.4.7 Affine Klassifikation der Mittelpunktsquadriken

Ist $Q \subset A$ echte Mittelpunktsquadrik eines affinen Raumes $A$, so existieren

- affines Bezugssystem $(o, e_1, \ldots, e_n)$ von $A$ und
- $c \in \{0, 1\}$ und $p, r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq p \leq r \leq n$,

sodass

$$Q = \left\{ q = o + \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \mid \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 = c \right\}$$

und $p$ ist der Positivitätsindex von $\beta$, $r - p$ der Negativitätsindex ($n - r$ Radikaldimension).

**Beweis** Folgt direkt aus dem Satz von Sylvester.

### 6.4.8 Bemerkung & Definition

Zwei echte Mittelpunktsquadriken $Q, Q'$ sind also genau dann *affin äquivalent*, d.h. $Q' = \alpha(Q)$ für eine Affinität $\alpha : A \to A$, wenn $\operatorname{sgn}(\beta') = \operatorname{sgn}(\beta)$, bzw. $\operatorname{sgn}(\beta') = \operatorname{sgn}(\pm\beta)$ im Fall eines Kegels.

### 6.4.9 Euklidische Klassifikation der Mittelpunktsquadriken

Ist $Q \subset A$ eine echte Mittelpunktsquadrik eines Euklidischen Raumes, $\dim A < \infty$, so existierten

- ein kartesisches Bezugssystem $(o; e_1, \ldots, e_n)$ von $A$,
- $c \in \{0, 1\}$ und $p, r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq p \leq r \leq n$ und
- $a_i \in (0, \infty)$ für $i = 1, \ldots, r$

sodass

$$Q = \left\{ o + \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \in A \mid \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{r} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = c \right\}.$$

**Beweis** Folgt mit der Hauptachsentransformation (daher ihr Name). Sei $b \in \mathrm{End}(V)$ so, dass

$$\forall v, w \in V : \beta(v, w) = \langle v, b(w) \rangle,$$

nach Riesz existiert ein eindeutiges solches $b$.

Da $\beta$ symmetrisch ist, gilt $b^* = b$. Da $Q$ Mittelpunktsquadrik ist, kann sie mithilfe des Mittelpunkts $z \in A$ geschrieben werden als

$$Q = \{z + v \in A \mid \langle v, b(v) \rangle = c\}$$

mit o.B.d.A. (Multiplikation der Gleichung mit $c^{-1}$ im Fall $c \neq 0$) $c \in \{0, 1\}$. Nach Hauptachsentransformation existiert eine ONB $(e_1, \ldots, e_n)$ aus Eigenvektoren von $b$, wobei o.B.d.A die Eigenwerte zu $e_1, \ldots, e_p$ positiv, $e_{p+1}, \ldots, e_r$ negativ und zu $e_{r+1}, \ldots, e_n$ gleich 0 sind, für $0 \leq p \leq r \leq n$.

Also existieren $a_1, \ldots, a_r \in (0, \infty)$, sodass

$$b(e_i) = \begin{cases} e_i \frac{1}{a_i^2} & \text{für } i = 1, \ldots, p \\ -e_i \frac{1}{a_i^2} & \text{für } i = p + 1, \ldots, r \\ 0 & \text{für } i = r + 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Damit gilt mit dem kartesischen Bezugssystem $(z; e_1, \ldots, e_n)$

$$\begin{aligned} Q = \Bigg\{ z + \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \in A \mid c &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i x_i, b\left(\sum_{j=1}^{n} e_j x_j\right) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \langle e_i, b(e_j) \rangle x_j = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{r} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 \Bigg\}. \end{aligned}$$

Da $\#Q \leq 1$ für $p = 0$, muss $p \geq 1$ sein, denn $Q$ war als echt vorausgesetzt.

**Bemerkung** Diese beiden Sätze liefern „Klassifikationen“ in den jeweiligen Geometrien, d.h. eine Einteilung der Menge der Quadriken in Äquivalenzklassen, wobei zwei Quadriken $Q, Q' \subset A$ äquivalent sind, wenn $Q$ durch eine Transformation der jeweiligen Geometrie auf $Q'$ abgebildet werden kann, d.h. $\alpha$ ist affine Transformation oder Kongruenzabbildung:

$$Q \sim Q' :\Leftrightarrow \exists \alpha : A \to A \; Q' = \alpha(Q).$$

Also: Haben (nach Klassifikationssätzen) zwei Quadriken $Q, Q'$ die gleiche Gleichung (bzgl. affiner/kartesischer Bezugssysteme $(z; e_1, \ldots, e_n)$ bzw. $(z', e'_1, \ldots, e'_n)$), so existiert eine affine

Transformation $\alpha : A \to A$, definiert durch

$$\alpha(z) = z' \text{ und } \alpha(z + e_i) = z + e_i' \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

mit $\alpha(Q) = Q'$. Die Umkehrung folgt ähnlich (Vorsicht bei Kegeln!).

### 6.4.10 Beispiel & Definition

In einer Euklidischen Ebene $E^2$ ergeben sich als echte Mittelpunktsquadriken

- $p = r = 2 : c = 1$ ($c = 0$ liefert nur einen Punkt) und

  $$Q = \left\{ z + e_1x_1 + e_2x_2 \in E^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1 \right\}$$

  liefert eine *Ellipse* mit *Halbachsenlängen* $a_1, a_2 > 0$.

- $p = 1$ und $r = 2$
  - mit $c = 1$ liefert

    $$Q = \left\{ z + e_1x_1 + e_2x_2 \in E^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1 \right\}$$

    eine *Hyperbel* durch die Scheitel $z = \pm e_1a_1$ und sich in $z$ schneidenden Asymptoten.
  - mit $c = 0$ liefert

    $$Q = \left\{ z + e_1x_1 + e_2x_2 \in E^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 \right\}$$

    den *Asymptotenkegel* der obigen Hyperbel.

- $p = r = 1 : c = 1$ ($c = 0$ liefert eine Gerade, also keine echte Mittelpunktsquadrik) liefert

  $$Q = \left\{ z + e_1x_1 + e_2x_2 \in E^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 = 1 \right\}$$

  zwei parallele Geraden im Abstand $2a_1 > 0$.

# Index