Skript Lineare Algebra & Geometrie 2, Hertrich-Jeromin

Studierendenmitschrift

10. März 2016

Inhaltsverzeichnis

4 Volumenmessung

4.3 Polynome & Polynomfunktionen

Warum? (Vielleicht eher „Algebra“ – allgemein – als „lineare“ Algebra) Wichtig: das charakteristische Polynom eines Endomorphismus – wichtiges Hilfsmittel im Kontext der Struktursätze.

Beispiel Wir definieren Polynomfunktionen $p, q : K \to K$ eines Körpers K in sich durch

$$\begin{aligned} p &: K \to K,\ x \mapsto p(x) := 1 + x + x^2 \\ q &: K \to K,\ x \mapsto q(x) := 1 \end{aligned}$$

Falls $K = \mathbb{Z}_2$ so gilt dann

$$\begin{aligned} &\forall x \in K : x(x+1) = 0 \\ \Rightarrow &\forall x \in K : p(x) = q(x) \end{aligned}$$

d.h., unterschiedliche „Polynome“ liefern die gleiche Polynomfunktion: Koeffizientenvergleich funktioniert nicht.

Wiederholung Auf dem Folgenraum $K^{\mathbb{N}}$ betrachten wir die Familie $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$e_k : \mathbb{N} \to K,\ j \mapsto e_k(j) := \delta_{jk}$$

Wir wissen: $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem:

$$\forall k \in \mathbb{N} : e_k \notin [(e_j)_{j \neq k}] \text{ und } [(e_j)_{j \in \mathbb{N}}] \neq K^{\mathbb{N}}$$

Insbesondere gilt:

$$\forall x \in [(e_j)_{j \in \mathbb{N}}]\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k > n : x_k = 0$$

4.3.1 Idee & Definition

Wir fassen ein Polynom als (endliche) Koeffizientenfolge auf,

$$\sum_{k=0}^{n} t^k a_k \cong \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k a_k \text{ mit } a_k = 0 \text{ für } k > n$$

und führen darauf das *Cauchyprodukt* (vgl. Analysis) als Multiplikation ein:

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \odot (b_k)_{k\in\mathbb{N}} := (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

wobei

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Insbesondere gilt damit

$$\forall j,k \in \mathbb{N} : e_j \odot e_k = e_{j+k} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \begin{cases} e_0 \odot e_k = e_k \\ e_1^k = \underbrace{e_1 \odot \cdots \odot e_1}_{k \text{ mal}} = e_k \end{cases}$$

Mit $1 := e_0,\ t := e_1$ und $t^0 := 1$, wie üblich, liefert dies:

$$\sum_{k=0}^{n} t^k a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k a_k \in [(e_k)_{k\in\mathbb{N}}] \subset K^{\mathbb{N}}$$

4.3.2 Definition

$$K[t] := ([(e_k)_{k\in\mathbb{N}}], \odot),$$

mit dem Cauchyprodukt $\odot$, ist die *Polynomalgebra* über dem Körper K; die Elemente von $K[t]$,

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k a_k,$$

heißen *Polynome in der Variablen* $t := e_1$. Der *Grad* eines Polynoms ist

$$\deg \sum_{k=0}^{n} t^k a_k := \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} \quad (\text{bzw. } \deg 0 := -\infty)$$

Ist (der „höchste" Koeffizient) $a_n = 1$ für $\deg p(t) = n$, so heißt das Polynom $p(t)$ *normiert.*

Notation Mit $t^k = e_k$, also $K[t] = [(e_k)_{k\in\mathbb{N}}]$ wird das Cauchyprodukt auf $K[t]$ eine „normale" Multiplikation, gefolgt von einer Sortierung nach den Potenzen der Variablen t. Wir werden das „$\odot$" daher oft unterdrücken, und z.B. $p(t)q(t)$ schreiben, anstelle von $p(t) \odot q(t)$.

Bemerkung (Koeffizientenvergleich) Mit dieser Definition von „Polynom“ gilt

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = 0 \quad \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : a_k = 0,$$

da $(t^k)_{k\in\mathbb{N}} = (e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist. Koeffizientenvergleich funktioniert!

Bemerkung Die Polynomalgebra $K[t]$ über K ist eine assoziative und kommutative K-Algebra, weiters ist $K[t]$ unitär mit Einselement $1 = e_0$.

4.3.3 Definition

Eine K-Algebra ist ein K-VR mit einer *bilinearen Abbildung*,

$$\odot : V \times V \to V, \ (v, w) \mapsto v \odot w,$$

d.h. es gilt

(i) $\forall w \in V : \ V \ni v \mapsto v \odot w \in V$ ist linear;

(ii) $\forall v \in V : V \ni w \mapsto v \odot w \in V$ ist linear.

Eine K-Algebra heißt

- unitär (mit Einselement 1), falls

$$\exists 1 \in V^\times \forall v \in V : 1 \odot v = v \odot 1 = v$$

- assoziativ, falls

$$\forall u, v, w \in V : (u \odot v) \odot w = u \odot (v \odot w)$$

- kommutativ, falls

$$\forall v, w, \in V : v \odot w = w \odot v$$

Beispiel $\mathrm{End}(V)$ ist (mit Komposition) eine unitäre assoziative Algebra.

Bemerkung In jeder Algebra $(V, \odot)$ gilt:

$$\forall v \in V : 0 \odot v = v \odot 0 = 0$$

da z.B. für $v \in V$ gilt

$$v \odot 0 = v \odot (0 + 0) = v \odot 0 + v \odot 0 \ \Rightarrow \ 0 = v \odot 0$$

Ist $(V, \odot)$ unitär, so liefert $[1] \subset V$ wegen $1 \odot 1 = 1$ einen Körper:

$$([1], + |_{[1]\times[1]}, \odot |_{[1]\times[1]}) \cong K$$

vermöge $K \ni x \mapsto 1 \cdot x \in [1]$ (siehe Aufgabe 5).

4.3.4 Definition

Ein *Algebra-Homomorphismus* zwischen K-Algebren $(V, \odot)$ und $(W, *)$ ist eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, für die gilt:

$$\forall v, v' \in V : \psi(v \odot v') = \psi(v) * \psi(v')$$

Bemerkung $\mathrm{Hom}(V, W)$ wird oft auch für den (Vektor-)Raum der Algebra-Homomorphismen verwendet. In dieser LVA bedeutet „$\mathrm{Hom}(V, W)$" immer VR-Homomorphismen, bei allen „anderen" Homomorphismen wird erwähnt, was gemeint ist.

4.3.5 Einsetzungssatz & Definitionen

Seien $(V, \odot)$ eine unitäre assoziative Algebra und $v \in V$. Dann ist

$$\psi_v : K[t] \to V,\ \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = p(t) \mapsto \psi_v(p(t)) := \sum_{k=0}^{n} v^k a_k$$

– wobei $v^0 = 1$ sinnvoll ist, da die Algebra unitär ist – ein Algebra-Homomorphismus; ψ_v heißt *Einsetzungshomomorphismus*.

$$p : V \to V,\ v \mapsto p(v) := \psi_v(p(t))$$

heißt die zu $p(t) \in K[t]$ gehörige *Polynomfunktion* auf V.

Bemerkung Wie üblich: $v^k := \underbrace{v \odot \cdots \odot v}_{k-\mathrm{mal}}$ und $v^0 := 1$.

Beweis

1. ψ_v ist linear:
   - für $p(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k a_k$ und $a \in K$ gilt:

$$\psi_v(p(t)a) = \psi_v\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} t^k a_k a\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v^k a_k a = \psi_v(p(t))a;$$

- für $p(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k a_k$ und $q(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k b_k$ gilt:

$$\psi_v(p(t)+q(t)) = \psi_v\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} t^k(a_k+b_k)\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v^k(a_k+b_k) = \psi_v(p(t)) + \psi_v(q(t))$$

2. ψ_v ist „multiplikativ", d.h. verträglich mit der beteiligten Multiplikation:

   Für die Vektoren der Basis $(t^k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $K[t]$ gilt, da $(V,\odot)$ assoziativ ist,

   $$\psi_v(t^m t^n) = \psi_v(t^{m+n}) = v^{m+n} = v^m \odot v^n = \psi_v(t^m) \odot \psi_v(t^n).$$

   Da aber ψ_v linear und die Multiplikation in $K[t]$ und in $(V,\odot)$ bilinear sind, folgt die Behauptung.

Bemerkung (Fortsetzungssatz für bilineare Abbildungen) Im Beweis haben wir verwendet: Die Abbildungen

$$K[t]\times K[t] \to V,\ (p(t),q(t)) \mapsto \begin{cases} \psi_v(p(t)q(t)) & \text{(Cauchyprodukt)} \\ \psi_v(p(t)) \odot \psi_v(q(t)) & \text{(Produkt in } (V,\odot)) \end{cases}$$

sind bilinear (da ψ_v linear ist), sind also gleich, sobald sie auf einer Basis übereinstimmen. Dies ist die Eindeutigkeit eines Fortsetzungssatzes für bilineare Abbildungen:

Sind V, W K-VR, $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(\beta_{ij})_{i,j\in I}$ eine Familie in W, so gibt es eine eindeutige bilineare Abbildung

$$\beta : V\times V \to W$$

mit

$$\forall i,j\in I : \beta(b_i,b_j) = \beta_{ij}$$

Dieser Fortsetzungssatz folgt direkt aus dem Fortsetzungssatz für lineare Abbildungen, da

$$\{\beta : V\times V\to W \text{ bilinear}\} \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(V,W))$$

vermittels des Isomorphismus

$$\beta \mapsto (v \mapsto \underbrace{\beta(v,.)}_{\in \mathrm{Hom}(V,W)}),$$

d.h. durch Nacheinandereinsetzen der Argumente.

Bemerkung Die Abbildung eines Polynoms auf seine Polynomfunktion auf dem Körper,

$$K[t] \ni p(t) \mapsto (x\mapsto p(x)) = \psi_x(p(t)) \in K^K$$

ist für Char $K \neq 0$ nicht injektiv[1]. Das heißt: Koeffizientenvergleich (für Polynomfunktionen) kann nur funktionieren, wenn Char $K = 0$.

Beispiel & Bemerkung Ist V K-VR, so ist $\mathrm{End}(V)$ eine K-Algebra (mit Komposition $\circ$). Man erhält also für $f \in \mathrm{End}(V)$ einen Einsetzungshomomorphismus

$$\psi_f : K[t] \to \mathrm{End}(V),\ p(t) \mapsto \psi_f(p(t)) = p(f);$$

und für jedes Polynom $p(t) \in K[t]$ eine zugehörige Polynomfunktion

$$p : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V),\ f \mapsto \psi_f(p(t)) = p(f).$$

Dieses Beispiel ist der Schlüssel zum Satz von Cayley-Hamilton (im nächsten Abschnitt).

4.3.6 Lemma

Für Polynome $p(t), q(t) \in K[t]$ gilt:

- $\deg p(t) \odot q(t) = \deg p(t) + \deg q(t)$,
- $\deg p(t) + q(t) \leq \max\{\deg p(t), \deg q(t)\}$.

Beweis Für $p(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k a_k$ und $q(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k b_k$ ist

$$p(t) \odot q(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k c_k \text{ mit } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Gilt nun $\deg p(t) = n$ und $\deg q(t) = m$, d.h.

$$a_n, b_m \neq 0 \wedge \forall k > n, k' > m : a_k = b_{k'} = 0$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \forall k > m+n : c_k = 0 \\ c_{m+n} = a_n b_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \deg p(t) \odot q(t) = m + n$$

Gilt andererseits $\deg p(t) = -\infty$ oder $\deg q(t) = -\infty$, also $p(t) = 0 \vee q(t) = 0$, so folgt

$$p(t) \odot q(t) = 0 \Rightarrow \deg p(t) \odot q(t) = -\infty.$$

Die zweite Behauptung ist offensichtlich wahr.

[1] sonst wäre K^K unendlich dimensional.

Beispiel Für $p(t), q(t), d(t) \in K[t]$ mit $d(t) \neq 0$ gilt

$$d(t)p(t) = d(t)q(t) \Rightarrow p(t) = q(t).$$

Nämlich: da $\deg d(t) \geq 0$,

$$\begin{aligned} -\infty &= \deg d(t)\big(p(t) - q(t)\big) \\ &= \deg d(t) + \deg\big(p(t) - q(t)\big) \\ \Rightarrow \deg\big(p(t) - q(t)\big) &= -\infty \\ \Rightarrow p(t) &= q(t) \end{aligned}$$

4.3.7 Euklidischer Divisionsalgorithmus

Seien $p(t), d(t) \in K[t],\ d(t) \neq 0$. Dann existieren eindeutig $q(t), r(t) \in K[t]$, sodass

$$p(t) = d(t)q(t) + r(t) \text{ und } \deg r(t) < \deg d(t).$$

Bemerkung Ist $\deg p(t) \leq \deg d(t)$, so ist die Aussage trivial.

Beweis Eindeutigkeit folgt wie im Beispiel; mit

$$p(t) = \begin{cases} d(t)q(t) + r(t) \\ d(t)\tilde{q}(t) + \tilde{r}(t) \end{cases}$$
$$\Rightarrow d(t)\big(q(t) - \tilde{q}(t)\big) = \tilde{r}(t) - r(t)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \deg d(t) + \deg\big(q(t) - \tilde{q}(t)\big) &= \deg(r(t) - \tilde{r}(t)) \\ &\leq \max\{\deg r(t), \deg \tilde{r}(t)\} < \deg d(t). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\deg\big(q(t) - \tilde{q}(t)\big) = -\infty \Rightarrow \deg(r(t) - \tilde{r}(t)) = \deg d(t) - \infty = -\infty$$

und damit

$$\tilde{q}(t) = q(t) \text{ und } \tilde{r}(t) = r(t).$$

Existenz: Mit $k := \deg d(t) \geq 0$ und

$$K[t]_m := \{q(t) \in K[t] \mid \deg q(t) \leq m\} \text{ für } m \in \mathbb{N}$$

betrachte man die Abbildung

$$K[t]_m \times K[t]_{k-1} \to K[t]_{k+m},\ \ (q(t), r(t)) \mapsto d(t)q(t) + r(t).$$

Diese Abbildung ist linear (klar) und injektiv, denn: ist $q(t) \neq 0$, so folgt wegen

$$\deg r(t) < k = \deg d(t) \leq \deg d(t)q(t)$$

dass

$$\begin{aligned} &\deg\big(d(t)q(t) + r(t)\big) = \deg d(t)q(t) \geq k > -\infty \\ &\Rightarrow d(t)q(t) + r(t) \neq 0, \end{aligned}$$

also

$$d(t)q(t) + r(t) = 0 \Rightarrow q(t) = 0 \wedge r(t) = 0.$$

Wegen

$$\dim K[t]_m \times K[t]_[k-1] = (m+1) + k = (k+m) + 1 = \dim K[t]_{k+m}$$

liefert diese Abbildung dann für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Isomorphismus

$$K[t]_m \times K[t]_{k-1} \to K[t]_{k+m}$$

4.3.8 Korollar & Definition

Sei $p(t) \in K[t]$ mit $\deg p(t) \geq 1$. Ist $x \in K$ eine *Nullstelle* von $p(t)$, d.h.

$$p(x) = \psi_x(p(t)) = 0,$$

so folgt

$$\exists! q(t) \in K[t] : p(t) = (t-x)q(t)$$

Beweis Seien $p(t) \in K[t]$ mit $\deg p(t) \geq 1$ und $x \in K$ eine Nullstelle von $p(t)$; dann gibt es eindeutig $q(t), r(t) \in K[t]$ mit

$$p(t) = (t-x)q(t) + r(t) \text{ und } \deg r(t) < \deg(t-x) = 1,$$

also

$$p(t) = (t-x)q(t) + r(t) = (t-x)q(t) + c_0.$$

Einsetzen von $x \in K$ liefert dann

$$0 = p(x) = (x-x)q(x) + c_0 = c_0$$

Bemerkung und Beispiel Dies liefert eine Methode, um Polynome zu *faktorisieren*: Für jede gefundene Nullstelle kann man einen *Linearfaktor* abspalten.

$$p(t) = t^4 - t^3 + t^2 - t = \begin{cases} t(t-1)(t-i)(t+i) \in \mathbb{C}[t] \\ t(t-1)(t^2+1) \in \mathbb{R}[t] \end{cases}$$

4.3.9 Mehr zu Polynomen

Dies ist der Anfang einer der Teilbarkeitstheorie der natürlichen Zahlen ähnlichen Theorie für Polynome.

> *Sind* $p(t), d(t) \in K[t]$*, so heißt* $d(t)$ Teiler *von* $p(t), d(t) \mid p(t)$*, falls*
>
> $$\exists q(t) \in K[t] : p(t) = d(t)q(t).$$

Primpolynome Nennt man $p(t) \in K[t]$ mit $\deg p(t) > 0$ ein *Primpolynom* (oder *irreduzibel*), falls für $d(t), q(t) \in K[t]$ gilt:

$$p(t) = d(t)q(t) \Rightarrow \Big(\deg q(t) = 0 \vee \deg d(t) = 0\Big),$$

so gilt der Satz über die *Primfaktorzerlegung*:

> *Jedes Polynom* $p(t) \in K[t]$ *mit* $\deg p(t) > 0$ *zerfällt eindeutig in Primpolynome,*
>
> $$p(t) = a_n p_1(t) \cdots p_m(t),$$
>
> *wobei* $a_n \in K$ *und* $p_1(t), \ldots, p_m(t) \in K[t]$ *normierte Primpolynome sind.*

Beweis Existenz ist einfach zu zeigen (Induktion über n), die weniger leicht zu zeigende Eindeutigkeit benutzt die Existenz des *größten gemeinsamen Teilers* $d(t) = \operatorname{ggT}\big(p(t), q(t)\big)$ zweier Polynome $p(t)$ und $q(t)$:

> *Zu* $p(t), q(t) \in K[t] \setminus \{0\}$ *gibt es genau ein normiertes Polynom* $d(t) \in K[t]$ *mit*
>
> $$\begin{gathered} d(t) \mid p(t) \wedge d(t) \mid q(t) \text{ und} \\ d'(t) \mid p(t) \wedge d'(t) \mid q(t) \Rightarrow d'(t) \mid d(t). \end{gathered}$$

Lemma von Bézout Für den ggT gilt auch das Lemma von Bézout:

$$\exists p'(t), q'(t) \in K[t] : d(t) = p(t)p'(t) + q(t)q'(t)$$

Bemerkung Aus der Gradformel,

$$\deg d(t)q(t) = \deg d(t) + \deg q(t)$$

folgt direkt:

Jedes Polynom $p(t) \in K[t]$ mit $\deg p(t) = 1$ ist Primpolynom.

Fundamentalsatz der Algebra Falls $K = \mathbb{C}$, so sind die Polynome mit Grad 1 die einzigen Primpolynome:

In $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom (mit Grad ≥ 1) in Linearfaktoren;

$$\forall p(t) \in \mathbb{C}[t],\ \deg \geq 1 :\ \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$$

mit

$$p(t) = a_n \prod_{j=1}^{n} (t - x_j)$$

Ist $K = \mathbb{R}$, so ist dies nicht der Fall; ein Primpolynom vom Grad $\deg p(t) = 2$ ist z.B.

$$p(t) = t^2 + 1 \ \in \mathbb{R}[t],$$

denn

$$t^2 + 1 = (t - x_1)(t - x_2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_1 + x_2 \\ 1 = x_1 \cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow 1 = -x^2$$

Andererseits ist $p(t) \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$, also existieren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ mit

$$a_n \prod_{j=1}^{n} (t - x_j) = p(t) = \overline{p(t)} = \overline{a_n} \prod_{j=1}^{n} (t - \overline{x_j}),$$

d.h. mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, $a_n \in \mathbb{R}$ und die x_j sind entweder reell oder treten in komplex-konjugierten Paaren auf:

$$p(t) = a_n \prod_{j=1}^{m} (t^2 - t(x_j + \overline{x_j}) + x_j \overline{x_j}) \prod_{j=2m+1}^{n} (t - x_j).$$

Ist also $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ Primpolynom, so folgt $\deg p(t) \leq 2$ und

$$\deg p(t) = 2 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : p(t) = (t - x)^2 + y^2 \text{ mit } y \neq 0$$

In $K = \mathbb{Q}$ gibt es noch „mehr“ Primpolynome, wie z.B.:

$$p(t) = t^2 - 2 \text{ oder } p(t) = t^4 + 1$$

4.4 Das charakteristische Polynom

4.4.1 Definition

Seien V ein K-VR und $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann heißen

(i) $x \in K$ ein Eigenwert von f, falls

$$\exists v \in V^\times : f(v) = vx;$$

(ii) $v \in V^\times$ ein Eigenvektor von f, falls

$$\exists x \in K : f(v) = vx;$$

(iii) $\ker(f - \mathrm{id}_V\, x) \subset V$ ein Eigenraum, falls

$$\ker(f - \mathrm{id}_V\, x) \neq \{0\}.$$

Bemerkung Der Skalar $x \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von $f \in \operatorname{End}(V)$, wenn $\ker(f - \mathrm{id}_V\, x) \neq \{0\}$, d.h., wenn ein Eigenvektor $v \in V^\times$ zu x existiert.

Beispiel Für $\frac{d}{ds} \in \operatorname{End}(C^\infty(\mathbb{R}))$ ist jedes $x \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert, da

$$\Big(\frac{d}{ds} - \mathrm{id}_V\, x\Big)v = 0 \text{ für } v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s \mapsto v(s) := e^{xs},$$

wobei $v \in C^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, d.h. $s \mapsto v(s) = e^{xs}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel Ist $\dim V < \infty$, so kann die Determinante zur Bestimmung von Eigenwerten von Endomorphismen $f \in \operatorname{End}(V)$ benutzt werden, da

$$\ker(f - \mathrm{id}_V\, x) \neq \{0\} \Leftrightarrow (f - \mathrm{id}_V\, x) \text{ nicht injektiv} \Leftrightarrow \det(f - \mathrm{id}_V\, x) = 0,$$

d.h. das Auffinden von Eigenwerten $x \in K$ von f ist reduziert auf die Bestimmung der Nullstellen der Funktion

$$K \ni x \mapsto \det(f - \mathrm{id}_V\, x) \in K.$$

Beispiel Ist z.B. (b_1, b_2) Basis von V und $f \in \mathrm{End}(V)$ durch $f(B) = BX$ gegeben, so liefern die Nullstellen der Polynomfunktion

$$\det(f - \mathrm{id}_V\, x) = \det(X - E_2 x) = \det \begin{pmatrix} x_{11} - x & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} - x \end{pmatrix}$$
$$= (x_{11} - x)(x_{22} - x) - x_{12}x_{21} = x^2 - x(x_{11} + x_{22}) + (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})$$

die Eigenwerte von f – beispielsweise erhalten wir für

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \ \det(f - \mathrm{id}_V\, x) = x^2 - 2x - 4 = (x+1)(x-3),$$

also Eigenwerte $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ mit zugehörigen Eigenvektoren als Lösungen von

$$v_i \in \ker(f - \mathrm{id}_V\, x_i),$$

also durch Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 2 - (-1) & 3 \\ 1 & -(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} 2 - 3 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix}$$

sodass

$$v_1 = b_1 - b_2 \text{ und } v_2 = b_1 3 + b_2$$

Eigenvektoren zu den Eigenwerten x_1, x_2 liefert.

Rechenbeispiel 1 Für $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\det(f - \mathrm{id}_V\, x) = \det \begin{pmatrix} 2 - x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1$$

und Eigenvektoren zum Eigenwert $x = 1$ durch Lösung der LGS

$$\begin{pmatrix} 2 - 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix}$$

d.h. der Eigenraum zum Eigenwert x,

$$\ker(f - \mathrm{id}_V) = [\{b_1 + b_2\}]$$

hat

$$\dim\ker(f - \mathrm{id}_V) < \dim V.$$

Rechenbeispiel 2 Ist $K = \mathbb{R}$ und

$$\det(f - \mathrm{id}_V\, x) = x^2 + 1,$$

so hat f keine Eigenwerte: z.B., wenn $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.4.2 Definition

Sei V ein K-VR, für $f \in \mathrm{End}(V)$ ist das *charakteristische Polynom* von f:

$$\chi_f(t) := \det(\mathrm{id}_V\, t - f) \in K[t].$$

Analog definiert man für $X \in K^{n\times n}$ das charakteristische Polynom

$$\chi_f(t) := \det(E_n t - X) \in K[t].$$

Bemerkung Oft wird auch das andere Vorzeichen in der Determinante verwendet, also $\det(f - \mathrm{id}_V\, t)$ bzw. $\det(X - E_n t)$.

Bemerkung *Diese Definition ist erklärungsbedürtig!*

Da $t \notin K$ ist $\mathrm{id}_V\, t - f \notin \mathrm{End}(V)$, sondern $\mathrm{id}_V\, t - f \in \mathrm{End}(V)[t]$. Zwei Lösungsstrategien bieten sich an:

1. Erweiterung der Determinante auf $\mathrm{End}(V)[t]$.
2. Benutzung von Darstellungsmatrizen.

Beide führen schließlich zur Leibniz-Formel:

Ist B eine Basis von V und $\xi^B_B(f) = X = (x_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$, so erhält man

$$\chi_f(t) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\delta_{\sigma(j)j} - x_{\sigma(j)j}\right)}_{\in K[t]} \in K[t].$$

Die Unabhängigkeit von der Basis B folgt aus der Transformationsformel für Darstellungsmatrizen und dem Determinanten-Multiplikationssatz (wie vorher für $\det f = \det \xi^B_B(f)$).

Index