

# **Skript Lineare Algebra & Geometrie 2, Hertrich-Jeromin**

Studierendenmitschrift

12. April 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>4</b>	<b>Volumenmessung</b>	<b>3</b>
4.3	Polynome & Polynomfunktionen . . . . .	3
4.4	Das charakteristische Polynom . . . . .	13
4.5	Der Satz von Cayley-Hamilton . . . . .	23

## 4 Volumenmessung

### 4.3 Polynome & Polynomfunktionen

Warum? (Vielleicht eher „Algebra“ – allgemein – als „lineare“ Algebra) Wichtig: das charakteristische Polynom eines Endomorphismus – wichtiges Hilfsmittel im Kontext der Struktursätze.

**Beispiel** Wir definieren Polynomfunktionen  $p, q : K \rightarrow K$  eines Körpers  $K$  in sich durch

$$\begin{aligned} p : K &\rightarrow K, \quad x \mapsto p(x) := 1 + x + x^2 \\ q : K &\rightarrow K, \quad x \mapsto q(x) := 1 \end{aligned}$$

Falls  $K = \mathbb{Z}_2$  so gilt dann

$$\begin{aligned} \forall x \in K : x(x+1) &= 0 \\ \Rightarrow \forall x \in K : p(x) &= q(x) \end{aligned}$$

d.h., unterschiedliche „Polynome“ liefern die gleiche Polynomfunktion: Koeffizientenvergleich funktioniert nicht.

**Wiederholung** Auf dem Folgenraum  $K^{\mathbb{N}}$  betrachten wir die Familie  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$e_k : \mathbb{N} \rightarrow K, \quad j \mapsto e_k(j) := \delta_{jk}$$

Wir wissen:  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem:

$$\forall k \in \mathbb{N} : e_k \notin [(e_j)_{j \neq k}] \text{ und } [(e_j)_{j \in \mathbb{N}}] \neq K^{\mathbb{N}}$$

Insbesondere gilt:

$$\forall x \in [(e_j)_{j \in \mathbb{N}}] \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k > n : x_k = 0$$

### 4.3.1 Idee & Definition

Wir fassen ein Polynom als (endliche) Koeffizientenfolge auf,

$$\sum_{k=0}^n t^k a_k \cong \sum_{k \in \mathbb{N}} e_k a_k \text{ mit } a_k = 0 \text{ für } k > n$$

und führen darauf das *Cauchyprodukt* (vgl. Analysis) als Multiplikation ein:

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \odot (b_k)_{k \in \mathbb{N}} := (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

wobei

$$c_k := \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

Insbesondere gilt damit

$$\forall j, k \in \mathbb{N} : e_j \odot e_k = e_{j+k} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \begin{cases} e_0 \odot e_k = e_k \\ e_1^k = \underbrace{e_1 \odot \cdots \odot e_1}_{k \text{ mal}} = e_k \end{cases}$$

Mit  $1 := e_0$ ,  $t := e_1$  und  $t^0 := 1$ , wie üblich, liefert dies:

$$\sum_{k=0}^n t^k a_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} e_k a_k \in [(e_k)_{k \in \mathbb{N}}] \subset K^{\mathbb{N}}$$

### 4.3.2 Definition

$$K[t] := ([ (e_k)_{k \in \mathbb{N}} ], \odot),$$

mit dem Cauchyprodukt  $\odot$ , ist die *Polynomialalgebra* über dem Körper  $K$ ; die Elemente von  $K[t]$ ,

$$p(t) = \sum_{k=0}^n t^k a_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} e_k a_k,$$

heißen *Polynome in der Variablen*  $t := e_1$ . Der *Grad* eines Polynoms ist

$$\deg \sum_{k=0}^n t^k a_k := \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} \quad (\text{bzw. } \deg 0 := -\infty)$$

Ist (der „höchste“ Koeffizient)  $a_n = 1$  für  $\deg p(t) = n$ , so heißt das Polynom  $p(t)$  *normiert*.

**Notation** Mit  $t^k = e_k$ , also  $K[t] = [(e_k)_{k \in \mathbb{N}}]$  wird das Cauchyprodukt auf  $K[t]$  eine „normale“ Multiplikation, gefolgt von einer Sortierung nach den Potenzen der Variablen  $t$ . Wir werden das „ $\odot$ “ daher oft unterdrücken, und z.B.  $p(t)q(t)$  schreiben, anstelle von  $p(t) \odot q(t)$ .

**Bemerkung (Koeffizientenvergleich)** Mit dieser Definition von „Polynom“ gilt

$$p(t) = \sum_{k=0}^n t^k a_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} : a_k = 0,$$

da  $(t^k)_{k \in \mathbb{N}} = (e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  linear unabhängig ist. Koeffizientenvergleich funktioniert!

**Bemerkung** Die Polynomialgebra  $K[t]$  über  $K$  ist eine assoziative und kommutative  $K$ -Algebra, weiters ist  $K[t]$  unitär mit Einselement  $1 = e_0$ .

### 4.3.3 Definition

Eine  $K$ -Algebra ist ein  $K$ -VR mit einer *bilinearen Abbildung*,

$$\odot : V \times V \rightarrow V, \quad (v, w) \mapsto v \odot w,$$

d.h. es gilt

- (i)  $\forall w \in V : V \ni v \mapsto v \odot w \in V$  ist linear;
- (ii)  $\forall v \in V : V \ni w \mapsto v \odot w \in V$  ist linear.

Eine  $K$ -Algebra heißt

- unitär (mit Einselement 1), falls

$$\exists 1 \in V^\times \forall v \in V : 1 \odot v = v \odot 1 = v$$

- assoziativ, falls

$$\forall u, v, w \in V : (u \odot v) \odot w = u \odot (v \odot w)$$

- kommutativ, falls

$$\forall v, w \in V : v \odot w = w \odot v$$

**Beispiel**  $\text{End}(V)$  ist (mit Komposition) eine unitäre assoziative Algebra.

**Bemerkung** In jeder Algebra  $(V, \odot)$  gilt:

$$\forall v \in V : 0 \odot v = v \odot 0 = 0$$

da z.B. für  $v \in V$  gilt

$$v \odot 0 = v \odot (0 + 0) = v \odot 0 + v \odot 0 \Rightarrow 0 = v \odot 0$$

Ist  $(V, \odot)$  unitär, so liefert  $[1] \subset V$  wegen  $1 \odot 1 = 1$  einen Körper:

$$([1], +|_{[1] \times [1]}, \odot|_{[1] \times [1]}) \cong K$$

vermöge  $K \ni x \mapsto 1 \cdot x \in [1]$  (siehe Aufgabe 5).

#### 4.3.4 Definition

Ein *Algebra-Homomorphismus* zwischen  $K$ -Algebren  $(V, \odot)$  und  $(W, *)$  ist eine lineare Abbildung  $\psi \in \text{Hom}(V, W)$ , für die gilt:

$$\forall v, v' \in V : \psi(v \odot v') = \psi(v) * \psi(v')$$

**Bemerkung**  $\text{Hom}(V, W)$  wird oft auch für den (Vektor-)Raum der Algebra-Homomorphismen verwendet. In dieser LVA bedeutet „ $\text{Hom}(V, W)$ “ immer VR-Homomorphismen, bei allen „anderen“ Homomorphismen wird erwähnt, was gemeint ist.

#### 4.3.5 Einsetzungssatz & Definitionen

Seien  $(V, \odot)$  eine unitäre assoziative Algebra und  $v \in V$ . Dann ist

$$\psi_v : K[t] \rightarrow V, \sum_{k=0}^n t^k a_k = p(t) \mapsto \psi_v(p(t)) := \sum_{k=0}^n v^k a_k$$

– wobei  $v^0 = 1$  sinnvoll ist, da die Algebra unitär ist – ein Algebra-Homomorphismus;  $\psi_v$  heißt *Einsetzungshomomorphismus*.

$$p : V \rightarrow V, v \mapsto p(v) := \psi_v(p(t))$$

heißt die zu  $p(t) \in K[t]$  gehörige *Polynomfunktion* auf  $V$ .

**Bemerkung** Wie üblich:  $v^k := \underbrace{v \odot \cdots \odot v}_{k\text{-mal}}$  und  $v^0 := 1$ .

### Beweis

1.  $\psi_v$  ist linear:

- für  $p(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k a_k$  und  $a \in K$  gilt:

$$\psi_v(p(t)a) = \psi_v\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} t^k a_k a\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} v^k a_k a = \psi_v(p(t))a;$$

- für  $p(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k a_k$  und  $q(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k b_k$  gilt:

$$\psi_v(p(t) + q(t)) = \psi_v\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} t^k (a_k + b_k)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} v^k (a_k + b_k) = \psi_v(p(t)) + \psi_v(q(t))$$

2.  $\psi_v$  ist „multiplikativ“, d.h. verträglich mit der beteiligten Multiplikation:

Für die Vektoren der Basis  $(t^k)_{k \in \mathbb{N}}$  von  $K[t]$  gilt, da  $(V, \odot)$  assoziativ ist,

$$\psi_v(t^m t^n) = \psi_v(t^{m+n}) = v^{m+n} = v^m \odot v^n = \psi_v(t^m) \odot \psi_v(t^n).$$

Da aber  $\psi_v$  linear und die Multiplikation in  $K[t]$  und in  $(V, \odot)$  bilinear sind, folgt die Behauptung.

**Bemerkung (Fortsetzungssatz für bilineare Abbildungen)** Im Beweis haben wir verwendet: Die Abbildungen

$$K[t] \times K[t] \rightarrow V, (p(t), q(t)) \mapsto \begin{cases} \psi_v(p(t)q(t)) & \text{(Cauchyprodukt)} \\ \psi_v(p(t)) \odot \psi_v(q(t)) & \text{(Produkt in } (V, \odot)) \end{cases}$$

sind bilinear (da  $\psi_v$  linear ist), sind also gleich, sobald sie auf einer Basis übereinstimmen. Dies ist die Eindeutigkeit eines Fortsetzungssatzes für bilineare Abbildungen:

Sind  $V, W$   $K$ -VR,  $(b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$  und  $(\beta_{ij})_{i,j \in I}$  eine Familie in  $W$ , so gibt es eine eindeutige bilineare Abbildung

$$\beta : V \times V \rightarrow W$$

mit

$$\forall i, j \in I : \beta(b_i, b_j) = \beta_{ij}$$

Dieser Fortsetzungssatz folgt direkt aus dem Fortsetzungssatz für lineare Abbildungen, da

$$\{\beta : V \times V \rightarrow W \text{ bilinear}\} \cong \text{Hom}(V, \text{Hom}(V, W))$$

vermittels des Isomorphismus

$$\beta \mapsto (v \mapsto \underbrace{\beta(v, \cdot)}_{\in \text{Hom}(V, W)}),$$

d.h. durch Nacheinandereinsetzen der Argumente.

**Bemerkung** Die Abbildung eines Polynoms auf seine Polynomfunktion auf dem Körper,

$$K[t] \ni p(t) \mapsto (x \mapsto p(x)) = \psi_x(p(t)) \in K^K$$

ist für  $\text{Char } K \neq 0$  nicht injektiv<sup>1</sup>. Das heißt: Koeffizientenvergleich (für Polynomfunktionen) kann nur funktionieren, wenn  $\text{Char } K = 0$ .

**Beispiel & Bemerkung** Ist  $V$   $K$ -VR, so ist  $\text{End}(V)$  eine  $K$ -Algebra (mit Komposition  $\circ$ ). Man erhält also für  $f \in \text{End}(V)$  einen Einsetzungshomomorphismus

$$\psi_f : K[t] \rightarrow \text{End}(V), \quad p(t) \mapsto \psi_f(p(t)) = p(f);$$

und für jedes Polynom  $p(t) \in K[t]$  eine zugehörige Polynomfunktion

$$p : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V), \quad f \mapsto \psi_f(p(t)) = p(f).$$

Dieses Beispiel ist der Schlüssel zum Satz von Cayley-Hamilton (im nächsten Abschnitt).

#### 4.3.6 Lemma

Für Polynome  $p(t), q(t) \in K[t]$  gilt:

- $\deg p(t) \odot q(t) = \deg p(t) + \deg q(t)$ ,
- $\deg p(t) + q(t) \leq \max\{\deg p(t), \deg q(t)\}$ .

---

<sup>1</sup>sonst wäre  $K^K$  unendlich dimensional.



**Beweis** Für  $p(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k a_k$  und  $q(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k b_k$  ist

$$p(t) \odot q(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k c_k \text{ mit } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

Gilt nun  $\deg p(t) = n$  und  $\deg q(t) = m$ , d.h.

$$a_n, b_m \neq 0 \wedge \forall k > n, k' > m : a_k = b_{k'} = 0$$

so folgt

$$\left. \begin{array}{l} \forall k > m+n : c_k = 0 \\ c_{m+n} = a_n b_m \end{array} \right\} \Rightarrow \deg p(t) \odot q(t) = m+n$$

Gilt andererseits  $\deg p(t) = -\infty$  oder  $\deg q(t) = -\infty$ , also  $p(t) = 0 \vee q(t) = 0$ , so folgt

$$p(t) \odot q(t) = 0 \Rightarrow \deg p(t) \odot q(t) = -\infty.$$

Die zweite Behauptung ist offensichtlich wahr.

**Beispiel** Für  $p(t), q(t), d(t) \in K[t]$  mit  $d(t) \neq 0$  gilt

$$d(t)p(t) = d(t)q(t) \Rightarrow p(t) = q(t).$$

Nämlich: da  $\deg d(t) \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} -\infty &= \deg d(t)(p(t) - q(t)) \\ &= \deg d(t) + \deg(p(t) - q(t)) \\ \Rightarrow \deg(p(t) - q(t)) &= -\infty \\ \Rightarrow p(t) &= q(t) \end{aligned}$$

#### 4.3.7 Euklidischer Divisionsalgorithmus

Seien  $p(t), d(t) \in K[t]$ ,  $d(t) \neq 0$ . Dann existieren eindeutig  $q(t), r(t) \in K[t]$ , sodass

$$p(t) = d(t)q(t) + r(t) \text{ und } \deg r(t) < \deg d(t).$$

**Bemerkung** Ist  $\deg p(t) \leq \deg d(t)$ , so ist die Aussage trivial.

**Beweis** Eindeutigkeit folgt wie im Beispiel; mit

$$p(t) = \begin{cases} d(t)q(t) + r(t) \\ d(t)\tilde{q}(t) + \tilde{r}(t) \end{cases} \\ \Rightarrow d(t)(q(t) - \tilde{q}(t)) = \tilde{r}(t) - r(t)$$

erhält man

$$\deg d(t) + \deg (q(t) - \tilde{q}(t)) = \deg(r(t) - \tilde{r}(t)) \\ \leq \max\{\deg r(t), \deg \tilde{r}(t)\} < \deg d(t).$$

Also folgt

$$\deg (q(t) - \tilde{q}(t)) = -\infty \Rightarrow \deg(r(t) - \tilde{r}(t)) = \deg d(t) - \infty = -\infty$$

und damit

$$\tilde{q}(t) = q(t) \text{ und } \tilde{r}(t) = r(t).$$

Existenz: Mit  $k := \deg d(t) \geq 0$  und

$$K[t]_m := \{q(t) \in K[t] \mid \deg q(t) \leq m\} \text{ für } m \in \mathbb{N}$$

betrachte man die Abbildung

$$K[t]_m \times K[t]_{k-1} \rightarrow K[t]_{k+m}, (q(t), r(t)) \mapsto d(t)q(t) + r(t).$$

Diese Abbildung ist linear (klar) und injektiv, denn: ist  $q(t) \neq 0$ , so folgt wegen

$$\deg r(t) < k = \deg d(t) \leq \deg d(t)q(t)$$

dass

$$\deg (d(t)q(t) + r(t)) = \deg d(t)q(t) \geq k > -\infty \\ \Rightarrow d(t)q(t) + r(t) \neq 0,$$

also

$$d(t)q(t) + r(t) = 0 \Rightarrow q(t) = 0 \wedge r(t) = 0.$$

Wegen

$$\dim K[t]_m \times K[t]_{k-1} = (m+1) + k = (k+m) + 1 = \dim K[t]_{k+m}$$

liefert diese Abbildung dann für jedes  $m \in \mathbb{N}$  einen Isomorphismus

$$K[t]_m \times K[t]_{k-1} \rightarrow K[t]_{k+m}$$

#### 4.3.8 Korollar & Definition

Sei  $p(t) \in K[t]$  mit  $\deg p(t) \geq 1$ . Ist  $x \in K$  eine *Nullstelle* von  $p(t)$ , d.h.

$$p(x) = \psi_x(p(t)) = 0,$$

so folgt

$$\exists! q(t) \in K[t] : p(t) = (t - x)q(t)$$

**Beweis** Seien  $p(t) \in K[t]$  mit  $\deg p(t) \geq 1$  und  $x \in K$  eine Nullstelle von  $p(t)$ ; dann gibt es eindeutig  $q(t), r(t) \in K[t]$  mit

$$p(t) = (t - x)q(t) + r(t) \text{ und } \deg r(t) < \deg(t - x) = 1,$$

also

$$p(t) = (t - x)q(t) + r(t) = (t - x)q(t) + c_0.$$

Einsetzen von  $x \in K$  liefert dann

$$0 = p(x) = (x - x)q(x) + c_0 = c_0$$

**Bemerkung und Beispiel** Dies liefert eine Methode, um Polynome zu *faktorisieren*: Für jede gefundene Nullstelle kann man einen *Linearfaktor* abspalten.

$$p(t) = t^4 - t^3 + t^2 - t = \begin{cases} t(t-1)(t-i)(t+i) \in \mathbb{C}[t] \\ t(t-1)(t^2+1) \in \mathbb{R}[t] \end{cases}$$

#### 4.3.9 Mehr zu Polynomen

Dies ist der Anfang einer der Teilbarkeitstheorie der natürlichen Zahlen ähnlichen Theorie für Polynome.

*Sind  $p(t), d(t) \in K[t]$ , so heißt  $d(t)$  Teiler von  $p(t)$ ,  $d(t) \mid p(t)$ , falls*

$$\exists q(t) \in K[t] : p(t) = d(t)q(t).$$

**Primpolynome** Nennt man  $p(t) \in K[t]$  mit  $\deg p(t) > 0$  ein *Primpolynom* (oder *irreduzibel*), falls für  $d(t), q(t) \in K[t]$  gilt:

$$p(t) = d(t)q(t) \Rightarrow (\deg q(t) = 0 \vee \deg d(t) = 0),$$

so gilt der Satz über die *Primfaktorzerlegung*:

*Jedes Polynom  $p(t) \in K[t]$  mit  $\deg p(t) > 0$  zerfällt eindeutig in Primpolynome,*

$$p(t) = a_n p_1(t) \cdots p_m(t),$$

*wobei  $a_n \in K$  und  $p_1(t), \dots, p_m(t) \in K[t]$  normierte Primpolynome sind.*

**Beweis** Existenz ist einfach zu zeigen (Induktion über  $n$ ), die weniger leicht zu zeigende Eindeutigkeit benutzt die Existenz des *größten gemeinsamen Teilers*  $d(t) = \text{ggT}(p(t), q(t))$  zweier Polynome  $p(t)$  und  $q(t)$ :

*Zu  $p(t), q(t) \in K[t] \setminus \{0\}$  gibt es genau ein normiertes Polynom  $d(t) \in K[t]$  mit*

$$\begin{aligned} d(t) \mid p(t) \wedge d(t) \mid q(t) \text{ und} \\ d'(t) \mid p(t) \wedge d'(t) \mid q(t) \Rightarrow d'(t) \mid d(t). \end{aligned}$$

**Lemma von Bézout** Für den ggT gilt auch das Lemma von Bézout:

$$\exists p'(t), q'(t) \in K[t] : d(t) = p(t)p'(t) + q(t)q'(t)$$

**Bemerkung** Aus der Gradformel,

$$\deg d(t)q(t) = \deg d(t) + \deg q(t)$$

folgt direkt:

*Jedes Polynom  $p(t) \in K[t]$  mit  $\deg p(t) = 1$  ist Primpolynom.*

**Fundamentalsatz der Algebra** Falls  $K = \mathbb{C}$ , so sind die Polynome mit Grad 1 die einzigen Primpolynome:

*In  $\mathbb{C}$  zerfällt jedes Polynom (mit Grad  $\geq 1$ ) in Linearfaktoren;*

$$\forall p(t) \in \mathbb{C}[t], \deg \geq 1 : \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$$

mit

$$p(t) = a_n \prod_{j=1}^n (t - x_j)$$

Ist  $K = \mathbb{R}$ , so ist dies nicht der Fall; ein Primpolynom vom Grad  $\deg p(t) = 2$  ist z.B.

$$p(t) = t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t],$$

denn

$$t^2 + 1 = (t - x_1)(t - x_2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_1 + x_2 \\ 1 = x_1 \cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow 1 = -x^2$$

Andererseits ist  $p(t) \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$ , also existieren  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  mit

$$a_n \prod_{j=1}^n (t - x_j) = p(t) = \overline{p(t)} = \overline{a_n} \prod_{j=1}^n (t - \overline{x_j}),$$

d.h. mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung,  $a_n \in \mathbb{R}$  und die  $x_j$  sind entweder reell oder treten in komplex-konjugierten Paaren auf:

$$p(t) = a_n \prod_{j=1}^m (t^2 - t(x_j + \overline{x_j}) + x_j \overline{x_j}) \prod_{j=2m+1}^n (t - x_j).$$

Ist also  $p(t) \in \mathbb{R}[t]$  Primpolynom, so folgt  $\deg p(t) \leq 2$  und

$$\deg p(t) = 2 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : p(t) = (t - x)^2 + y^2 \text{ mit } y \neq 0$$

In  $K = \mathbb{Q}$  gibt es noch „mehr“ Primpolynome, wie z.B.:

$$p(t) = t^2 - 2 \text{ oder } p(t) = t^4 + 1$$

## 4.4 Das charakteristische Polynom

### 4.4.1 Definition

Seien  $V$  ein  $K$ -VR und  $f \in \text{End}(V)$ . Dann heißen

(i)  $x \in K$  ein Eigenwert von  $f$ , falls

$$\exists v \in V^\times : f(v) = vx;$$

(ii)  $v \in V^\times$  ein Eigenvektor von  $f$ , falls

$$\exists x \in K : f(v) = vx;$$

(iii)  $\ker(f - \text{id}_V x) \subset V$  ein Eigenraum, falls

$$\ker(f - \text{id}_V x) \neq \{0\}.$$

**Bemerkung** Der Skalar  $x \in K$  ist genau dann ein Eigenwert von  $f \in \text{End}(V)$ , wenn  $\ker(f - \text{id}_V x) \neq \{0\}$ , d.h., wenn ein Eigenvektor  $v \in V^\times$  zu  $x$  existiert.

**Beispiel** Für  $\frac{d}{ds} \in \text{End}(C^\infty(\mathbb{R}))$  ist jedes  $x \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert, da

$$\left(\frac{d}{ds} - \text{id}_V x\right)v = 0 \text{ für } v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto v(s) := e^{xs},$$

wobei  $v \in C^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , d.h.  $s \mapsto v(s) = e^{xs}$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert  $x \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel** Ist  $\dim V < \infty$ , so kann die Determinante zur Bestimmung von Eigenwerten von Endomorphismen  $f \in \text{End}(V)$  benutzt werden, da

$$\ker(f - \text{id}_V x) \neq \{0\} \Leftrightarrow (f - \text{id}_V x) \text{ nicht injektiv} \Leftrightarrow \det(f - \text{id}_V x) = 0,$$

d.h. das Auffinden von Eigenwerten  $x \in K$  von  $f$  ist reduziert auf die Bestimmung der Nullstellen der Funktion

$$K \ni x \mapsto \det(f - \text{id}_V x) \in K.$$

**Beispiel** Ist z.B.  $(b_1, b_2)$  Basis von  $V$  und  $f \in \text{End}(V)$  durch  $f(B) = BX$  gegeben, so liefern die Nullstellen der Polynomfunktion

$$\begin{aligned} \det(f - \text{id}_V x) &= \det(X - E_2 x) = \det \begin{pmatrix} x_{11} - x & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} - x \end{pmatrix} \\ &= (x_{11} - x)(x_{22} - x) - x_{12}x_{21} = x^2 - x(x_{11} + x_{22}) + (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) \end{aligned}$$

die Eigenwerte von  $f$  – beispielsweise erhalten wir für

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \det(f - \text{id}_V x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3),$$

also Eigenwerte  $x_1 = -1$  und  $x_2 = 3$  mit zugehörigen Eigenvektoren als Lösungen von

$$v_i \in \ker(f - \text{id}_V x_i),$$

also durch Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 2 - (-1) & 3 \\ 1 & -(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} 2 - 3 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix}$$

sodass

$$v_1 = b_1 - b_2 \text{ und } v_2 = b_1 3 + b_2$$

Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $x_1, x_2$  liefert.

**Rechenbeispiel 1** Für  $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  erhält man

$$\det(f - \text{id}_V x) = \det \begin{pmatrix} 2 - x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1$$

und Eigenvektoren zum Eigenwert  $x = 1$  durch Lösung der LGS

$$\begin{pmatrix} 2 - 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix}$$

d.h. der Eigenraum zum Eigenwert  $x$ ,

$$\ker(f - \text{id}_V) = [\{b_1 + b_2\}]$$

hat

$$\dim \ker(f - \text{id}_V) < \dim V.$$

**Rechenbeispiel 2** Ist  $K = \mathbb{R}$  und

$$\det(f - \text{id}_V x) = x^2 + 1,$$

so hat  $f$  keine Eigenwerte: z.B., wenn  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

#### 4.4.2 Definition

Sei  $V$  ein  $K$ -VR, für  $f \in \text{End}(V)$  ist das *charakteristische Polynom* von  $f$ :

$$\chi_f(t) := \det(\text{id}_V t - f) \in K[t].$$

Analog definiert man für  $X \in K^{n \times n}$  das charakteristische Polynom

$$\chi_f(t) := \det(E_n t - X) \in K[t].$$

**Bemerkung** Oft wird auch das andere Vorzeichen in der Determinante verwendet, also  $\det(f - \text{id}_V t)$  bzw.  $\det(X - E_n t)$ .

**Bemerkung** Diese Definition ist erklärungsbedürftig!

Da  $t \notin K$  ist  $\text{id}_V t - f \notin \text{End}(V)$ , sondern  $\text{id}_V t - f \in \text{End}(V)[t]$ . Zwei Lösungsstrategien bieten sich an:

1. Erweiterung der Determinante auf  $\text{End}(V)[t]$ .
2. Benutzung von Darstellungsmatrizen.

Beide führen schließlich zur Leibniz-Formel:

Ist  $B$  eine Basis von  $V$  und  $\xi_B^B(f) = X = (x_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ , so erhält man

$$\chi_f(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n \underbrace{(\delta_{\sigma(j)j} t - x_{\sigma(j)j})}_{\in K[t]} \in K[t].$$

Die Unabhängigkeit von der Basis  $B$  folgt aus der Transformationsformel für Darstellungsmatrizen und dem Determinanten-Multiplikationssatz (wie vorher für  $\det f = \det \xi_B^B(f)$ ).

#### 4.4.3 Bemerkung & Definition

Ist  $\dim V = n$ , so ist  $\chi_f(t)$  ein normiertes Polynom vom Grad  $\deg(\chi_f(t)) = n$ ,

$$\chi_f(t) = t^n - t^{n-1} \text{tr } f + \dots + (-1)^n \det f,$$

wobei die *Spur*  $\text{tr } f$  („tr“  $\hat{=}$  trace) von  $f$  durch diese Gleichung (wohl-)definiert ist.



Ist  $(x_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} = X = \xi_B^B(f)$  Darstellungsmatrix von  $f$ , so gilt

$$\operatorname{tr} f = \sum_{j=1}^n x_{jj} = \sum_{j=1}^n b_j^* f(b_j).$$

Oft wird  $\det(f - \operatorname{id}_V t) = (-1)^n \chi_f(t)$  als charakteristisches Polynom definiert – dieses Polynom ist dann nur für gerade  $n$  normiert.

#### 4.4.4 Korollar

Ein  $x \in K$  ist genau dann Eigenwert von  $f$ , wenn  $\chi_f(x) = 0$ .

Also: Die Eigenwerte von  $f$  sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_f(t)$ .

**Beweis** Klar – das war die Idee hinter der Definition des charakteristischen Polynoms.

#### 4.4.5 Korollar & Definition

Ist  $x \in K$  Eigenwert von  $f \in \operatorname{End}(V)$ , so ist  $(t - x)$  Teiler des charakteristischen Polynoms. Insbesondere gilt:

$$\exists! k \in \mathbb{N}^\times : \begin{cases} (t - x)^k \mid \chi_f(t) \\ (t - x)^{k+1} \nmid \chi_f(t) \end{cases}$$

Diese Zahl  $k$  heißt die *algebraische Vielfachheit* von  $x$ ;

$$g := \operatorname{def}(\operatorname{id}_V x - f) \leq k$$

ist die *geometrische Vielfachheit* von  $x$ .

**Beweis** Da  $x$  Eigenwert von  $f$  ist, ist die Existenz und Eindeutigkeit von  $k$  klar. Außerdem gilt analog auch  $g \geq 1$ .

Zu zeigen bleibt:  $g \leq k$ , d.h.  $(t - x)^g \mid \chi_f(t)$ :

Für eine Basis  $B = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  mit  $\ker(\operatorname{id}_V x - f) = [(b_1, \dots, b_g)]$  hat

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} E_g x & Y \\ 0 & X \end{pmatrix} \text{ mit } Y \in K^{g \times (n-g)}, X \in K^{(n-g) \times (n-g)}$$

Blockgestalt, also ist

$$\chi_f(t) = (t - x)^g \cdot \chi_X(t),$$

d.h.  $(t - x)^g \mid \chi_f(t)$ , da  $(t - x)^{k+1} \nmid \chi_f(t)$ , gilt also  $g \leq k$ .

**Beispiel** Ist  $f \in \text{End}(V)$  wie oben durch  $f(B) = BX$  gegeben, so haben die Eigenwerte

$$x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 3 \text{ für } X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

algebraische und geometrische Vielfachheiten

$$1 = g_i = k_i, \text{ da } 1 \leq g_i \leq k_i \text{ und } k_1 + k_2 \leq 2;$$

der Eigenwert

$$x = 1 \text{ für } X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat algebraische und geometrische Vielfachheiten

$$k = 2 \text{ und } g = 1$$

da

$$f \neq \text{id}_V \text{ und } x = \text{id}_V$$

und  $\chi_f(t) = (t - x)^2 \in \mathbb{R}[t]$ , da ein quadratisches Polynom zwei (reelle oder komplex konjugierte) Nullstellen hat, oder aber eine doppelte reelle.

#### 4.4.6 Definition & Lemma

Das Schlüsselargument im Beweis oben kann man verallgemeinern:

Sei  $f \in \text{End}(V)$  und  $U \subset V$  ein  $f$ -invarianter Unterraum, d.h.  $f(U) \subset U$ .

Ist dann  $V = U \oplus U'$  eine direkte Zerlegung und  $p, p' \in \text{End}(V)$  die zugehörigen Projektionen, so gilt

$$\chi_f(t) = \chi_{f|_U}(t) \cdot \chi_{f'}(t),$$

wobei

$$f' := p' \circ f|_{U'} \in \text{End}(U').$$

**Bemerkung** Man kann  $f|_U$  als Endomorphismus  $f|_U \in \text{End}(U)$  auffassen, da  $f(U) \subset U$ .

**Beweis** Wie oben: Sei  $B = (b_1, \dots, b_n)$  Basis von  $V$ , sodass

- $C = (b_1, \dots, b_k)$  Basis von  $U$  und
- $C' = (b_{k+1}, \dots, b_n)$  Basis von  $U'$  ist.

Die Darstellungsmatrix von  $f$  bzgl.  $B$  hat dann Blockgestalt,

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & X' \end{pmatrix} \text{ mit } X = \xi_C^C(f|_U), X' = \xi_{C'}^{C'}(f')$$

Damit folgt die Behauptung (wie oben) mit der Leibniz-Formel.

**Bemerkung** Alternativ kann man das Lemma mit der von  $f$  induzierten Quotientenabbildung  $f' \in \text{End}(V/U)$  formulieren, wobei

$$f' : V/U \rightarrow V/U, v + U \mapsto f'(v + U) := f(v) + U.$$

#### 4.4.7 Definition

Ein Endomorphismus  $f \in \text{End}(f)$  heißt *diagonalisierbar* bzw. *trigonalisierbar*, falls es eine Basis  $B$  von  $V$  gibt, sodass  $\xi_B^B(f) = (x_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$  eine Diagonalmatrix

$$i \neq j \Rightarrow x_{ij} = 0$$

bzw. obere Dreiecksmatrix ist,

$$i > j \Rightarrow x_{ij} = 0.$$

**Bemerkung** Falls  $\dim V < \infty$ , so ist  $f \in \text{End}(V)$  genau dann diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $f$  besitzt. Damit kann man „Diagonalisierbarkeit“ auch im Falle  $\dim V = \infty$  definieren.

**Bemerkung** Ist  $f$  trigonalisierbar (oder gar diagonalisierbar), so zerfällt  $\chi_f(t)$  in Linearfaktoren: für geeignete  $x_1, \dots, x_n \in K$  ist

$$\chi_f(t) = \prod_{j=1}^n (t - x_j).$$

#### 4.4.8 Bemerkung & Definition

Man nennt eine Matrix  $X \in K^{n \times n}$  diagonalisierbar (bzw. trigonalisierbar), falls  $f_X \in \text{End}(K^n)$  diagonalisierbar (bzw. trigonalisierbar) ist.

Dies ist genau dann der Fall, falls es  $P \in \text{Gl}(n)$  gibt, sodass  $PXP^{-1}$  Diagonalmatrix (bzw. obere Dreiecksmatrix) ist.

#### 4.4.9 Lemma

Frage: Was sind hinreichende Kriterien dafür? Notwendigkeit kennen wir:  $\chi_f(t)$  zerfällt in Linearfaktoren.

Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_m \in V$  zu paarweise verschiedenen Eigenwerten  $x_1, \dots, x_m$  eines Endomorphismus  $f \in \text{End}(V)$  sind linear unabhängig.

**Bemerkung** Anders gesagt: Die Summe von Eigenräumen zu paarweise verschiedenen Eigenwerten ist direkt.

**Beweis** Zu zeigen: Ist  $\sum_{i=1}^m v_i y_i = 0$  für Koeffizienten  $y_1, \dots, y_m \in K$ , so folgt  $y_1 = \dots = y_m = 0$ .

Seien  $y_1, \dots, y_m \in K$  und  $w_i := v_i y_i$  und  $w := \sum_{i=1}^m w_i = \sum_{i=1}^m v_i y_i$ . Wiederholte Anwendung von  $f$  liefert, wegen  $f(w_i) = w_i x_i$

$$(f^{m-1}(w), \dots, f^2(w), f(w), w) = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} x_1^{m-1} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^{m-1} & \cdots & x_m^2 & x_m & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Vandermonde-Matrix  $X \in \text{Gl}(m)$ , da

$$\det X = \prod_{i < j} (x_i - x_j) \neq 0$$

weil die Eigenwerte  $x_1, \dots, x_m$  paarweise verschieden sind. Damit folgt aus  $w = \sum_{i=1}^m v_i y_i = 0$

$$(w_1, \dots, w_m) = (f^{m-1}(w), \dots, f(w), w) X^{-1} = (0, \dots, 0)$$

also

$$\forall i = 1, \dots, m : 0 = w_i = v_i y_i \text{ und } v_i \neq 0 \Rightarrow y_i = 0.$$

#### 4.4.10 Satz

Ein Endomorphismus  $f \in \text{End}(V)$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn  $\chi_f(t) \in K[t]$  in Linearfaktoren zerfällt und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte übereinstimmen,

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - x_i)^{k_i} \text{ und } \forall i = 1, \dots, m : k_i = g_i.$$

**Beweis** Ist  $f$  diagonalisierbar, so existiert eine Basis  $B$  aus Eigenvektoren von  $f$ , also ist dann

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} E_{g_1} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{g_2} x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{g_m} x_m \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - x_i)^{g_i}.$$

Hat andererseits das charakteristische Polynom diese Gestalt, so wähle man in jedem Eigenraum  $\ker(\text{id}_V x_i - f)$  eine Basis  $C_i, i = 1, \dots, m$ . Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, und wegen

$$g_1 + \cdots + g_m = k_1 + \cdots + k_m = \dim V$$

liefert  $B := \bigcup_{i=1}^m C_i$  eine Basis von  $V$ .

#### 4.4.11 Korollar

Ein Endomorphismus  $f \in \text{End}(V)$  mit  $n = \dim V$  paarweise verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

**Beweis** Für die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten jedes Eigenwerts gilt

$$1 \leq g_i \leq k_i \text{ und } \sum_{i=1}^n k_i \leq n.$$

Damit folgt

$$\forall i = 1, \dots, n : k_i = 1 \text{ und } \sum_{i=1}^n k_i = n,$$

d.h. das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und  $\forall i = 1, \dots, n : k_i = g_i$ .

#### 4.4.12 Satz

Ein Endomorphismus  $f \in \text{End}(V)$  ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

**Bemerkung** Da Diagonalisierbarkeit bzw. Trigonalisierbarkeit durch die Existenz einer Darstellungsmatrix in spezieller Gestalt definiert wurde, wird in den Charakterisierungen immer (implizit)  $\dim V < \infty$  angenommen.

**Beweis** Wir wissen schon: Ist  $f$  trigonalisierbar, so zerfällt  $\chi_f(t)$  in Linearfaktoren. Umkehrung: Beweis durch vollständige Induktion über  $n = \dim V$ .

Für  $n = 1$  ist nichts zu zeigen. Sei die Behauptung für  $n - 1$  bewiesen. Für  $n$  folgt dann:

Da  $\chi_f(t)$  in Linearfaktoren zerfällt

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - x_i)$$

für geeignete  $x_1, \dots, x_n$ , ist  $x_1$  Eigenwert von  $f$ . Nun seien

- $b_1$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $x_1$  und  $U := [\{b_1\}]$ ,
- $U' \subset V$  ein zu  $U$  komplementärer Unterraum, und
- $p, p' \in \text{End}(V)$  die zur direkten Zerlegung  $V = U \oplus U'$  gehörenden Projektionen,

$$U = p(V) = \ker p' \text{ und } U' = p'(V) = \ker p,$$

- und  $f' := p' \circ f|_{U'} \in \text{End}(U')$ .

Da  $U (\neq \{0\})$   $f$ -invarianter UR von  $V$  ist, faktorisiert das charakteristische Polynom

$$\chi_f(t) = \chi_{f|_U}(t) \cdot \chi_{f'}(t) = (t - x_1) \cdot \chi_{f'}(t);$$

also zerfällt  $\chi_{f'}(t)$  in Linearfaktoren,

$$\chi_{f'}(t) = \prod_{i=2}^n (t - x_i).$$

Nach Induktionsannahme existiert also eine Basis  $B' = (b_2, \dots, b_n)$  von  $U'$ , sodass  $\xi_{B'}^{B'}(f)$  obere Dreiecksmatrix ist. Mit  $B = (b_1, \dots, b_n)$  als Basis von  $V$  gilt dann:

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} x_1 & Y \\ 0 & \xi_{B'}^{B'}(f') \end{pmatrix}$$

ist obere Dreiecksmatrix.

## 4.5 Der Satz von Cayley-Hamilton

### 4.5.1 Satz

Für  $f \in \text{End}(V)$  gilt  $\chi_f(f) = 0$ .

**Unfug-Beweis** Durch direktes Einsetzen erhält man

$$\chi_f(f) = \det(\text{id}_V f - f) = \det 0 = 0.$$

**Zum Verständnis des Satzes** Ist  $V$  ein  $K$ -VR mit  $n = \dim V < \infty$  und  $f \in \text{End}(V)$ , so ist

$$\chi_f(t) = \sum_{k=0}^n t^k a_k \in K[t]$$

ein (abstraktes) Polynom in der Variablen  $t$  ( $= e_1 \in K^{\mathbb{N}}$ ) und der Einsetzungshomomorphismus  $\psi_f : K[t] \rightarrow \text{End}(V)$  (also ein Algebramorphismus) liefert

$$\chi_f(f) = \psi_f(\chi_f(t)) = \sum_{k=0}^n f^k a_k.$$

Der Satz sagt, dass  $0 = \chi_f(f) \in \text{End}(V)$ , d.h.

$$\forall v \in V : \chi_f(f)(v) = 0.$$

### 4.5.2 Definition & Lemma

Seien  $f \in \text{End}(V)$  und  $B$  eine  $f$ -zyklische Basis von  $V$ , d.h. eine Basis der Form

$$B = (b_1, \dots, b_n) = (b, f(b), \dots, f^{n-1}(b)).$$

Dann existieren  $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$  mit

$$f^n(b) + \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b)a_k = 0,$$

mit diesen Koeffizienten ist

$$\chi_f(t) = t^n + t^{n-1}a_{n-1} + \dots + ta_1 + a_0.$$

**Bemerkung** Im Allgemeinen existiert zu  $f \in \text{End}(V)$  keine  $f$ -zyklische Basis von  $V$ , z.B. für  $f = \text{id}_V$  und  $\dim V \geq 2$ .

**Beweis** Da  $B = (b, f(b), \dots, f^{n-1}(b))$  eine Basis ist, ist  $f^n(b) \in [B]$  und damit existieren die  $a_k$  mit

$$0 = f^n(b) + \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b)a_k.$$

Damit ist die Darstellungsmatrix von  $f$

$$\xi_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} =: X$$

und Entwicklung von  $\chi_f(t) = \det(E_n t - \xi_B^B(f))$  nach der ersten Zeile (nach Laplaceschem Entwicklungssatz – dieser Satz war „nur“ eine Methode, die Terme in der Leibniz-Formel zu sortieren) liefert

$$\det(E_n t - X) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \vdots & \vdots & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$



$$= t \det \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & t & \vdots & \vdots & a_2 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} a_0 \det(X_{1n})$$

$$\stackrel{\text{mit Ind.}}{=} t\{t^n n - 1 + tn - 2a_{n-1} + \cdots + a_1\} + a_0 = t^n + t^{n-1}a_{n-1} + \dots, +ta_1 + a_0,$$

wie behauptet.

**Beispiel** Zur Lösung des reellen *Anfangswertproblems*

$$y'' + 2y' - 3y = 0, \begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

schreiben wir dieses als System erster Ordnung mit dem Ansatz  $y_1 = y$  und  $y_2 = y'$ :

Daraus erhält man mit  $Y = (y_1, y_2)$

$$\begin{aligned} Y' &= (y'_1, y'_2) = (y', y'') = (y', -2y' + 3y) \\ &= (y, y') \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = YX \end{aligned}$$

mit  $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , d.h. wir suchen eine  $\frac{d}{ds}$ -zyklische Basis  $(y, \frac{d}{ds}y) = (y, y')$  eines 2-dim UVR  $[(y, y')] \subset C^\infty(\mathbb{R})$  bezüglich derer  $\frac{d}{ds} \in \text{End}(C^\infty(\mathbb{R}))$  Darstellungsmatrix  $X$  hat.

Der Ansatz  $y(s) = e^{xs}(v_0, v_1)$  reduziert das AWP auf ein Eigenwertproblem.

$$0 = (Y' - YX)(s) = \left(\frac{d}{ds}Y - YX\right)(s) = \underbrace{e^{xs}(v_0, v_1)}_Y \{E_2 x - X\}$$

bzw. (vgl. Abschnitt 3.1) mit dem zur transponierten Matrix  $X^t$  assoziierten Endomorphismus  $f_{X^t} \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$

$$f_{X^t}(v) = vx \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und } v \in \mathbb{R}^2.$$

Nach obigem Lemma sind die Eigenwerte Lösungen der Gleichung

$$0 = \chi_{X^t}(x) = \chi_X(x) \stackrel{\text{Lemma}}{=} x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3).$$

Also sind  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -3$  die Eigenwerte; zugehörige Eigenvektoren erhält man als

## Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$(0, 0) = (v_0, v_1)(E_2 x_i - X) = (v_0, v_1) \begin{pmatrix} x_i & -3 \\ -1 & x_i + 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} (v_0, v_1) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} & \text{für } i = 1 \\ (v_0, v_1) \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{für } i = 2 \end{cases}$$

Damit bekommt man Eigenvektoren  $(v_0, v_1) = (1, 1)$  zum Eigenwert  $x = 1$  und  $(v_0, v_1) = (1, -3)$  zum Eigenwert  $x = -3$ .

Die allgemeine, durch *Superposition* (Linearkombination) erhaltene Lösung der Differentialgleichung ist also

$$s \mapsto Y(s) = e^s(1, 1)c_1 + e^{-3s}(1, -3)c_2$$

mit Koeffizienten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Abgleich der „Integrationskonstanten“  $c_1$  und  $c_2$  mit den Anfangsbedingungen liefert dann die Lösung

$$s \mapsto y(s) = 3e^s + e^{-3s}.$$

**Bemerkung** Man bemerke:  $(y, y')$  ist linear unabhängig für die Lösung, ist also tatsächlich  $\frac{d}{ds}$ -zyklische Basis eines 2-dim URs  $[(y, y')] \subset C^\infty(\mathbb{R})$  – obwohl die den gleichen Raum aufspannenden „Basislösungen“

$$s \mapsto e^s \text{ und } s \mapsto e^{-3s}$$

keine  $\frac{d}{ds}$ -zyklischen Basen erzeugen, da sie lineare Differentialgleichungen erster Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) lösen.

### 4.5.3 Korollar

Besitzt  $V$  eine  $f$ -zyklische Basis für  $f \in \text{End}(V)$ , so gilt  $\chi_f(f) = 0$ .

**Beweis** Sei also  $B = (b_1, \dots, b_n) = (b, f(b), \dots, f^{n-1}(b))$   $f$ -zyklische Basis von  $V$  und  $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$  so, dass

$$0 = f^n(b) + \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b)a_k.$$

Dann gilt

$$\chi_f(f)(b_1) = \chi_f(f)(b) = \left( f^n + \sum_{k=0}^{n-1} f^k a_k \right) (b) = f^n(b) + \sum_{k=0}^{n-1} f^k(b)a_k.$$

Damit folgt für  $i = 2, \dots, n$

$$\chi_f(f)(b_i) = \chi_f(f) \left( f^{i-1}(b) \right) \stackrel{2}{=} f^{i-1}(\chi_f(f)(b)) = 0.$$

Da also  $V = [B] \subset \ker \chi_f(f)$ , folgt  $\chi_f(f) = 0$ .

**Bemerkung** Damit ist der Satz von Cayley-Hamilton bewiesen, sofern  $V$  eine  $f$ -zyklische Basis besitzt.

#### 4.5.4 Lemma

Für  $f \in \text{End}(V)$  und  $v \in V^\times$  sei

$$U := \left[ \left( f^k(v) \right)_{k \in \mathbb{N}} \right].$$

Damit ist  $U$  ein  $f$ -invarianter UVR von  $V$ . Ist  $\dim V < \infty$ , so besitzt  $U$  eine  $f$ -zyklische Basis  $(v, f(v), \dots, f^{r-1}(v))$ .

**Beweis** Offenbar ist  $U$   $f$ -invarianter UR:

- $U$  ist (als lineare Hülle einer Familie) ein UVR von  $V$ ;
- da gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : f \left( f^k(v) \right) = f^{k+1}(v) \in U$$

$$\text{folgt, dass } f(U) = f \left( \left[ \left( f^k(v) \right)_{k \in \mathbb{N}} \right] \right) = \left[ \left( f^{k+1}(v) \right)_{k \in \mathbb{N}} \right] \subset U.$$

Ist  $\dim V < \infty$  und  $v \neq 0$ , so existiert  $r \in \mathbb{N}$ , sodass

$$(v, \dots, f^{r-1}(v)) \text{ linear unabhängig und } f^r(v) \in [v, \dots, f^{r-1}(v)];$$

damit ist  $(v, f(v), \dots, f^{r-1}(v))$   $f$ -zyklische Basis von  $U$ :

1.  $(v, \dots, f^{r-1}(v))$  ist linear unabhängig.
2.  $f^r(v) \in [(v, \dots, f^{r-1}(v))]$ , damit gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : k \geq r \Rightarrow f^k(v) \in [v, \dots, f^{r-1}(v)]$$

---

<sup>2</sup>Aufgrund der Linearität der Endomorphismen  $\text{End}(V)$  als unitäre Algebra.

wie man z.B. mit Induktion sehen kann: ist

$$f^{k-1}(v) = \sum_{j=0}^{r-1} f^j(v)x_j \in \left[ \left( v, \dots, f^{r-1}(v) \right) \right],$$

so folgt

$$f^k(v) = \sum_{j=1}^r f^j(v)x_{j-1} = f^r(v)x_{r-1} + \sum_{j=1}^{r-1} f^j(v)x_{j-1} \in \left[ \left( v, \dots, f^{r-1}(v) \right) \right]$$

und damit

$$U = \left[ \left( f^k(v) \right)_{k \in \mathbb{N}} \right] \in \left[ \left( v, \dots, f^{r-1}(v) \right) \right].$$

#### 4.5.5 Beweis vom Satz von Cayley-Hamilton

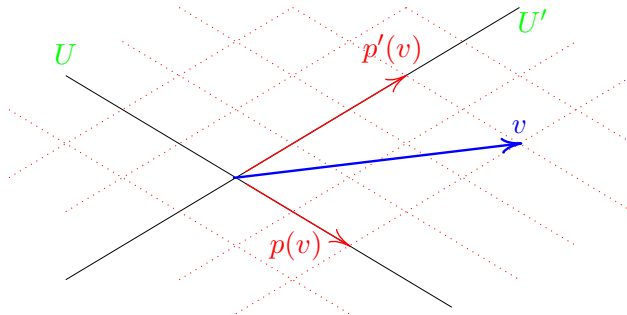
Zu zeigen: für  $f \in \text{End}(V)$  gilt  $\chi_f(f) = 0$ :

$$\forall v \in V : \chi_f(f)(v) = 0.$$

Sei also  $v \in V^\times$  und

$$U := \left[ \left( f^k(v)_{k \in \mathbb{N}} \right) \right] \subset V.$$

Mit einem zu  $U$  komplementären UVR  $U' \subset V$ ,  $V = U \oplus U'$ , und den zugehörigen Projektionen



$$p : V \rightarrow V, p(V) = U, \ker p = U' \text{ bzw. } p' : V \rightarrow V, p'(V) = U', \ker p' = U,$$

ist dann

$$\chi_f(t) = \chi_{f'}(t) \cdot \chi_{f|_U}(t) \text{ mit } f' := p' \circ f|_{U'} \in \text{End}(U').$$

Damit folgt

$$\chi_f(f)(v) = \chi_{f'}(f) \left( \chi_{f|_U}(f)(v) \right) = \chi_{f'}(f)(0) = 0$$

nach Korollar oben, da  $U$  eine  $f$ -zyklische Basis besitzt und  $v \in U$ .

#### 4.5.6 Definition

Sei  $V$  ein  $K$ -VR und  $f \in \text{End}(V)$ . Dann heißt  $p \in K[t]$

- *Annulatorpolynom* von  $f$ , falls  $p(f) = 0$ ;
- *Minimalpolynom* von  $f$ , falls  $p(t)$  normiertes Annulatorpolynom minimalen Grades ist.

**Bemerkung** Jedes (polynomiale) Vielfache

$$p(t) = q(t)\mu_f(t) \in K[t]$$

eines Minimalpolynoms  $\mu_f(t)$  von  $f$  ist ein Annulatorpolynom, da

$$\forall v \in V : p(f)(v) = (q(f) \circ \mu_f(f))(v) = q(f)(\mu_f(f)(v)) = q(f)(0) = 0$$

**Bemerkung** Nach dem Satz von Cayley-Hamilton hat jeder Endomorphismus  $f \in \text{End}(f)$  ein Annulatorpolynom, also auch ein Minimalpolynom – wenn  $\dim V < \infty$ .

#### 4.5.7 Lemma

Ist  $p(t) \in K[t]$  Annulatorpolynom von  $f \in \text{End}(V)$ , so ist jedes Minimalpolynom  $\mu_f(t) \in K[t]$  Teiler von  $p(t)$ .

**Beweis** Seien  $q(t), r(t) \in K[t]$  die (nach dem euklidischen Divisionsalgorithmus) eindeutigen Polynome mit

$$p(t) = q(t)\mu_f(t) + r(t) \text{ und } \deg r(t) < \deg \mu_f(t).$$

Dies liefert

$$r(f) = p(f) - q(f) \circ \mu_f(f) = 0 - q(f)(0) = 0,$$

also  $r(t) = 0$ , denn andernfalls wäre  $\mu_f(t)$  nicht normiertes Annulatorpolynom minimalen Grades.

#### 4.5.8 Korollar

Das Minimalpolynom  $\mu_f(t) \in K[t]$  eines Endomorphismus  $f \in \text{End}(V)$  ist eindeutig.

**Beweis** Sind  $\mu_f(t), \tilde{\mu}_f(t) \in K[t]$  Minimalpolynome von  $f \in \text{End}(V)$ , so gilt

$$\exists! q(t) \in K[t] : \tilde{\mu}_f(t) = q(t)\mu_f(t)$$

wobei

- $\deg q(t) = 0$ , da  $\deg \tilde{\mu}_f(t) \leq \deg \mu_f(t)$ ,
- $q(t) = 1$ , da  $\tilde{\mu}_f(t)$  und  $\mu_f(t)$  normiert sind.

Daher ist

$$\tilde{\mu}_f(t) = 1 \cdot \mu_f(t) = \mu_f(t).$$

**Bemerkung** Wie für Endomorphismen kann Annulatorpolynome, Minimalpolynome, usw. auch für Matrizen  $X \in K^{n \times n}$  definieren:

- mithilfe der assoziierten Endomorphismen  $f_X \in \text{End}(K^n)$ , oder
- mithilfe des Einsetzungshomomorphismus  $\psi_X : K[t] \rightarrow K^{n \times n}$ .

Beide Methoden liefern das gleiche Ergebnis durch den Algebramorphismus zwischen den Endomorphismen und den quadratischen Matrizen.

**Bemerkung & Beispiel** Zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, so zerfällt auch das Minimalpolynom in dieselben Linearfaktoren:

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - x_i)^{k_i} \Rightarrow \mu_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - x_i)^{m_i},$$

wobei für  $i = 1, \dots, m$  gilt  $1 \leq m_i \leq k_i$ .

Zum Beispiel:

- $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :  $\chi_{f_X} = t(t - 1) = \mu_{f_X}(t)$
- $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :  $\chi_{f_X} = (t - 1)^2 \Rightarrow \mu_{f_X}(t) = (t - 1)$
- $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :  $\chi_{f_X} = (t - 1)^2 = \mu_{f_X}(t)$ .

**Bemerkung** Die Definition des charakteristischen Polynoms ist etwas problematisch:

$$\chi_f(t) := \det(\text{id}_V t - f)$$

ist „gut“ für Polynomfunktionen, aber „nicht korrekt“ für abstrakte Polynome; die Definition

$$\chi_f(t) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{\sigma(j)j} - x_{\sigma(j)j}) \in K[t]$$

mithilfe der Darstellungsmatrix

$$X = (x_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} = \xi_B^B(f)$$

von  $f$  bzgl. einer Basis  $B$  und der Leibniz-Formel ist nicht sehr übersichtlich. Vergleiche auch [Axler, Kap. 8] zum Thema.

Im Gegensatz dazu: Definitionen von „Annulatorpolynom“ und „Minimalpolynom“ etc. sind einfach (konzeptionell).

Frage: Braucht man das charakteristische Polynom überhaupt?

Man kommt auch ohne das charakteristische Polynom „recht weit“:

- Für  $\dim V < \infty$  folgt die Existenz eines Annulatorpolynoms, und damit des Minimalpolynoms recht einfach wegen  $\dim \text{End}(V) < \infty$ .
- Durch Einsetzen: Jeder Eigenwert eines Endomorphismus ist Nullstelle seines Minimalpolynoms.
- Umgekehrt ist auch jede Nullstelle des Minimalpolynoms Eigenwert – ist  $\mu_f(x) = 0$ , so existiert  $q(t) \in K[t]$  mit

$$\mu_f(t) = q(t)(t - x);$$

wäre  $x$  kein Eigenwert, also  $f - \text{id}_V x \in \text{Gl}(V)$ , so gälte

$$(f - \text{id}_V x)(V) = V \Rightarrow \{0\} = \mu_f(f)(V) = q(f)(V),$$

d.h.  $\mu_f(t)$  wäre nicht Minimal-Polynom.

- Ein Endomorphismus ist diagonalisierbar, wenn sein Minimal-Polynom in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Nachteil des Minimal-Polynoms: schwierig berechenbar?

# Index

$f$ -invarianter Unterraum, 18

$f$ -zyklische Basis, 23

Algebra, 5

-Homomorphismus, 6

Algebraische/geometrische Vielfachheit, 17

Annulatorpolynom, 29

Cauchyprodukt, 4

Charakteristisches Polynom, 16

Diagonalisierbarkeit, 19

Eigenwert,-vektor,-raum, 13

Einsetzungshomomorphismus, 6, 8

Fortsetzungssatz für bilineare Abbildungen,

7

Linearfaktorisierung, 11

Minimalpolynom, 29

Nullstelle, 11

Polynom, 4

-algebra, 4

-division, 9

-funktion, 6

Grad, 4

normiertes, 4

Primpolynome, 12

Spur, 16

Triagonalisierbarkeit, 19