Skript Lineare Algebra & Geometrie 2, Hertrich-Jeromin

Studierendenmitschrift

6. März 2016

Inhaltsverzeichnis

4 Volumenmessung

4.3 Polynome & Polynomfunktionen

Warum? (Vielleicht eher „Algebra“ – allgemein – als „lineare“ Algebra) Wichtig: das charakteristische Polynom eines Endomorphismus – wichtiges Hilfsmittel im Kontext der Struktursätze.

Beispiel Wir definieren Polynomfunktionen $p, q : K \to K$ eines Körpers K in sich durch

$$\begin{aligned} p &: K \to K,\ x \mapsto p(x) := 1 + x + x^2 \\ q &: K \to K,\ x \mapsto q(x) := 1 \end{aligned}$$

Falls $K = \mathbb{Z}_2$ so gilt dann

$$\begin{aligned} &\forall x \in K : x(x+1) = 0 \\ \Rightarrow\ &\forall x \in K : p(x) = q(x) \end{aligned}$$

d.h., unterschiedliche „Polynome“ liefern die gleiche Polynomfunktion: Koeffizientenvergleich funktioniert nicht.

Wiederholung Auf dem Folgenraum $K^{\mathbb{N}}$ betrachten wir die Familie $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$e_k : \mathbb{N} \to K,\ j \mapsto e_k(j) := \delta_{jk};$$

wir wissen: $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem:

$$\forall k \in \mathbb{N} : e_k \notin [(e_j)_{j\neq k}] \text{ und } [(e_j)_{j\in\mathbb{N}}] \neq K^{\mathbb{N}}$$

Insbesondere gilt:

$$\forall x \in [(e_j)_{j\in\mathbb{N}}]\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k > n : x_k = 0$$

4.3.1 Idee & Definition

Wir fassen ein Polynom als (endliche) Koeffizientenfolge auf,

$$\sum_{k=0}^{n} t^k a_k \cong \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k a_k \text{ mit } a_k = 0 \text{ für } k > n$$

und führen darauf das *Cauchyprodukt* (vgl. Analysis) als Multiplikation ein:

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \odot (b_k)_{k\in\mathbb{N}} := (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

wobei

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Insbesondere gilt damit

$$\forall j,k \in \mathbb{N} : e_j \odot e_k = e_{j+k} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \begin{cases} e_0 \odot e_k = e_k \\ e_1^k = \underbrace{e_1 \odot \cdots \odot e_1}_{k \text{ mal}} = e_k \end{cases}$$

Mit $1 := e_0,\ t := e_1$ und $t^0 := 1$, wie üblich, liefert dies:

$$\sum_{k=0}^{n} t^k a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k a_k \in [(e_k)_{k\in N}] \subset K^{\mathbb{N}}$$

4.3.2 Definition

$$K[t] := ([(e_k)_{k\in\mathbb{N}}], \odot),$$

mit dem Cauchyprodukt $\odot$, ist die *Polynomalgebra* über dem Körper K; die Elemente von $K[t]$,

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k a_k,$$

heißen *Polynome in der Variablen* $t := e_1$. Der *Grad* eines Polynoms ist

$$\deg \sum_{k=0}^{n} t^k a_k := \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} \quad (\text{bzw. } \deg 0 := -\infty)$$

Ist (der „höchste" Koeffizient) $a_n = 1$ für $\deg p(t) = n$, so heißt das Polynom $p(t)$ *normiert.*

Notation Mit $t^k = e_k$, also $K[t] = [(e_k)_{k\in N}]$ wird das Cauchyprodukt auf $K[t]$ eine „normale“ Multiplikation, gefolgt von einer Sortierung nach den Potenzen der Variablen t. Wir werden das $\odot$ daher oft unterdrücken, und z.B. $p(t)q(t)$ schreiben, anstelle von $p(t) \odot q(t)$.

Bemerkung (Koeffizientenvergleich) Mit dieser Definition von „Polynom“ gilt

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : a_k = 0,$$

da $(t^k)_{k\in\mathbb{N}} = (e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist. Koeffizientenvergleich funktioniert!

Bemerkung Die Polynomalgebra $K[t]$ über K ist eine assoziative und kommutative K-Algebra, weiters ist $K[t]$ unitär mit Einselement $1 = e_0$.

4.3.3 Definition

Eine K-Algebra ist ein K-VR mit einer *bilinearen Abbildung*,

$$\odot : V \times V \to V,\ (v, w) \mapsto v \odot w,$$

d.h. es gilt

(i) $\forall w \in V:\ V \ni v \mapsto v \odot w \in V$ ist linear;

(ii) $\forall v \in V : V \ni w \mapsto v \odot w \in V$ ist linear.

Eine K-Algebra heißt

- unitär (mit Einselement 1), falls $\exists 1 \in V \forall v \in V : 1 \odot v = v \odot 1 = v;$
- assoziativ, falls $\forall u, v, w \in V : (u \odot v) \odot w = u \odot (v \odot w);$
- kommutativ, falls $\forall v, w, \in V : v \odot w = w \odot v$

Beispiel $\mathrm{End}(V)$ ist (mit Komposition) eine unitäre assoziative Algebra.

Bemerkung In jeder Algebra $(V, \odot)$ gilt:

$$\forall v \in V : 0 \odot v = v \odot 0 = 0$$

da z.B. für $v \in V$ gilt

$$v \odot 0 = v \odot (0 + 0) = v \odot 0 + v \odot 0 \;\Rightarrow\; 0 = v \odot 0$$

Ist $(V, \odot)$ unitär, so folgt $[1] \subset V$ wegen $1 \odot 1 = 1$

$$([1], + |_{[1]\times[1]}, \odot |_{[1]\times[1]}) \cong K$$

vermöge $K \ni x \mapsto 1 \cdot x \in [1]$ (siehe Aufgabe 5).

4.3.4 Definition

Ein *Algebra-Homomorphismus* zwischen K-Algebren $(V, \odot)$ und $(W, *)$ ist eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, für die gilt:

$$\forall v, v' \in V : \psi(v \odot v') = \psi(v) * \psi(v')$$

Bemerkung $\mathrm{Hom}(V, W)$ wird oft auch für den (Vektor-)Raum der Algebra-Homomorphismen verwendet. In dieser LVA bedeutet $\mathrm{Hom}(V, W)$ immer VR-Homomorphismen, bei allen „anderen" Homomorphismen wird extra erwähnt, was gemeint ist.

4.3.5 Einsetzungssatz & Definitionen

Seien $(V, \odot)$ eine unitäre assoziative Algebra und $v \in V$. Dann ist

$$\psi_v : K[t] \to V,\; \sum_{k=0}^{n} t^k a_k = p(t) \mapsto \psi_v(p(t)) := \sum_{k=0}^{n} v^k a_k$$

– wobei $v^0 = 1$ sinnvoll ist, da die Algebra unitär ist – ein Algebra-Homomorphismus; ψ_v heißt *Einsetzungshomomorphismus*.

$$p : V \to V,\; v \mapsto p(v) := \psi_v(p(t))$$

heißt die zu $p(t) \in K[t]$ gehörige *Polynomfunktion* auf V.

Bemerkung Wie üblich: $v^k := \underbrace{v \odot \cdots \odot v}_{k-\text{mal}}$ und $v^0 := 1$.

Beweis

1. ψ_v ist linear:

   - für $p(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k a_k$ und $a \in K$ gilt:

   $$\psi_v(p(t)a) = \psi_v(\sum_{k\in\mathbb{N}} t^k a_k a) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v^k a_k a = \psi_v(p(t))a;$$

   - für $p(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k a_k$ und $q(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k b_k$ gilt:

   $$\psi_v(p(t)+q(t)) = \psi_v(\sum_{k\in\mathbb{N}} t^k(a_k+b_k)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v^k(a_k+b_k) = \psi_v(p(t)) + \psi_v(q(t))$$

2. ψ_v ist verträglich mit der Multiplikation:

   Für die Vektoren der Basis $(t^k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $K[t]$ gilt, da $(V,\odot)$ assoziativ ist,

   $$\psi_v(t^m t^n) = \psi_v(t^{m+n}) = v^{m+n} = v^m \odot v^n = \psi_v(t^m) \odot \psi_v(t^n).$$

   Da aber ψ_v linear und die Multiplikation in $K[t]$ und in $(V,\odot)$ bilinear sind, folgt die Behauptung.

Bemerkung (Fortsetzungssatz für bilineare Abbildungen) Im Beweis haben wir verwendet: Die Abbildungen

$$K[t]\times K[t] \to V,\ (p(t),q(t)) \mapsto \begin{cases} \psi_v(p(t)q(t)) & \text{(Cauchyprodukt)} \\ \psi_v(p(t)) \odot \psi_v(q(t)) & \text{(Produkt in } (V,\odot)\text{)} \end{cases}$$

sind bilinear (da ψ_v linear ist), sind also gleich, sobald sie auf einer Basis übereinstimmen. Dies ist die Eindeutigkeit eines Fortsetzungssatzes für bilineare Abbildungen:

Sind V, W K-VR, $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(\beta_{ij})_{i,j\in I}$ eine Familie in W, so gibt es eine eindeutige bilineare Abbildung

$$\beta : V \times V \to W$$

mit

$$\forall i,j \in I : \beta(b_i, b_j) = \beta_{ij}$$

Dieser Fortsetzungssatz folgt direkt aus dem Fortsetzungssatz für lineare Abbildungen, da

$$\{\beta : V \times V \to W \text{ bilinear}\} \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(V, W))$$

vermittels des Isomorphismus

$$\beta \mapsto \Big(v \mapsto \underbrace{\beta(v, .)}_{\in \mathrm{Hom}(V,W)}\Big),$$

d.h. durch Nacheinandereinsetzen der Argumente.

Bemerkung Die Abbildung eines Polynoms auf seine Polynomfunktion auf dem Körper,

$$K[t] \ni p(t) \mapsto (x \mapsto p(x)) = \psi_x(p(t)) \in K^K$$

ist für $\mathrm{Char}\, K \neq 0$ nicht injektiv, das heißt: Koeffizientenvergleich kann nur funktionieren, wenn $\mathrm{Char}\, K = 0$

Beispiel & Bemerkung Ist V K-VR, so ist $\mathrm{End}(V)$ eine K-Algebra (mit Komposition $\circ$). Man erhält also für $f \in \mathrm{End}(V)$ einen Einsetzungshomomorphismus

$$\psi_f : K[t] \to \mathrm{End}(V),\ p(t) \mapsto \psi_f(p(t)) = p(f);$$

und für jedes Polynom $p(t) \in K[t]$ eine zugehörige Polynomfunktion

$$p : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V),\ f \mapsto \psi_f(p(t)) = p(f).$$

Dieses Beispiel ist der Schlüssel zum Satz von Cayley-Hamilton (im nächsten Abschnitt).

4.3.6 Lemma

Für Polynome $p(t), q(t) \in K[t]$ gilt:

- $\deg p(t) \odot q(t) = \deg p(t) + \deg q(t)$,
- $\deg p(t) + q(t) \leq \max\{\deg p(t), \deg q(t)\}$.

Beweis Für $p(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k a_k$ und $q(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k b_k$ ist

$$p(t) \odot q(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k c_k \text{ mit } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Gilt nun $\deg p(t) = n$ und $\deg q(t) = m$, d.h.

$$a_n, b_m \neq 0 \wedge \forall k > n, k' > m : a_k = b_{k'} = 0$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \forall k > m+n : c_k = 0 \\ c_{m+n} = a_n b_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \deg p(t) \odot q(t) = m + n$$

Gilt andererseits $\deg p(t) = -\infty$ oder $\deg q(t) = -\infty$, also $p(t) = 0 \vee q(t) = 0$, so folgt

$$p(t) \odot q(t) = 0 \Rightarrow \deg p(t) \odot q(t) = -\infty.$$

Die zweite Behauptung ist offensichtlich wahr.

Index