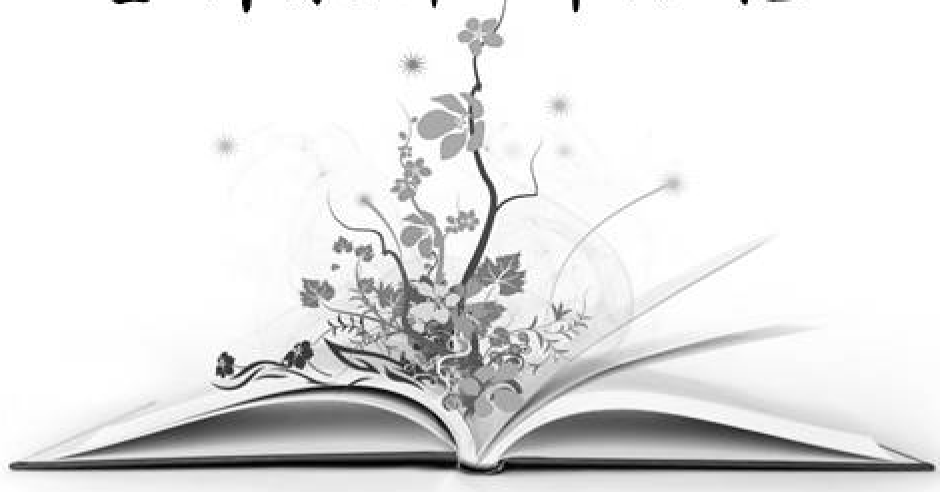
第六章 参数估计

主讲教师 邓小艳



成都信息工程大学应用数学学院

数理统计的主要任务之一是依据样本推断总体，推断的基本内容包括两个方面：

1. 依据样本对总体未知参数的近似值和近似范围进行估计(估计)；

2. 依据样本对总体未知参数的某种假设作出真伪判断(假设检验)。

- 数理统计
  - 估计
    - 参数估计(第六章)
      - 点估计
        - 矩估计法
        - 最大似然估计法
        - 最小二乘法
      - 区间估计
    - 非参数估计
  - 假设检验(第七章)

参 数 估 计

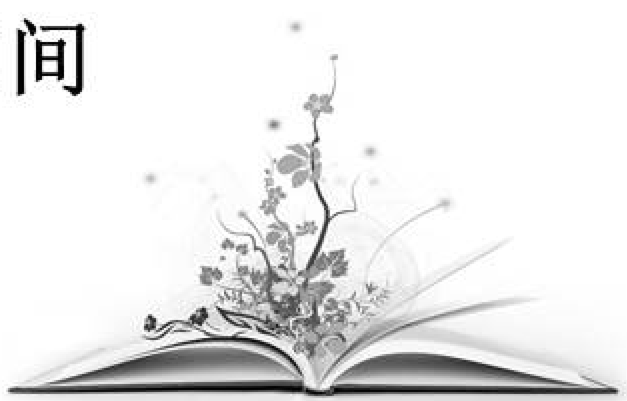
§ 6-1 参数的点估计

§ 6-2 估计量的评选标准

§ 6-3 参数的区间估计

§ 6-4 正态总体均值的置信区间

§ 6-5 正态总体方差的置信区间



§ 6-1 参数的点估计

- 点估计的定义
- 矩估计法
- 最大似然估计法
- 小结

例1：在某炸药厂，一天中发生着火现象的次数X是一个 $R.V.$，设X服从参数为$\lambda>0$的泊松分布，λ未知，以下列样本值，估计参数λ。

着火次数k	0	1	2	3	4	5	6
发生k次着火的天数n_k	75	90	54	22	6	2	1

解：$X\sim\pi(\lambda)$，$E(X)=\lambda$，估计参数λ，即估计总体X的均值$E(X)$。

据大数定理，当n充分大时，$\overline{X}-E(\overline{X})\xrightarrow{p}0$

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X)=E(X)$$

故可以$\overline{X}$来估计$E(X)$，即用$\overline{X}$来估计参数λ

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$ （估计量）

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{250}(0 \times 75 + 1 \times 90 + 2 \times 54$$

$$+3 \times 22 + 4 \times 6 + 5 \times 2 + 6 \times 1)$$

=1.22 （估计值）

一般地，设总体X，分布函数$F(x,\theta)$，估计参数θ

点估计 即构造一个样本的函数(统计量)$Y=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots X_n)$

使得只要得到一组样本观测值$x_1,x_2,\cdots x_n$ 代入Y即得θ的

一个确定值$Y=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

其中称$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots X_n)$为$\theta$的估计量，$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为

θ的估计值。

$$\text{点估计}\begin{cases}\text{矩估计法}\\ \\ \text{最大似然估计法}\end{cases}$$

§ 6-1 参数的点估计

- 点估计的定义
- 矩估计法
- 最大似然估计法
- 小结

矩估计法——用样本的k阶矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 去估计总体X的k阶矩 $\mu_k=E(X^k)$，从而求得未知参数θ的估计量的方法。

1.依据 $A_k \xrightarrow{p} E(X^k)=\mu_k$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且与总体X同分布

$\Rightarrow X_1^k,X_2^k,\cdots,X_n^k$ 相互独立且与X^k 同分布

由 辛钦大数定理: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k-E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\right)\xrightarrow{p}0$

即：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{p}E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)=E(X^k)$

2.步骤：设总体X的分布函数为 $F(x,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_L)$

若要估计L个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_L$ ，则

(1) 先求出总体的各阶矩$E(X),E(X^2),\cdots,E(X^L)$得

$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_L) \\ \mu_2 = E(X^2) = \mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_L) \\ \quad \vdots \\ \mu_L = E(X^L) = \mu_L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_L) \end{cases}$$

(2) 解上方程组得

$$\begin{cases}\theta_1=\theta_1(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_L)\\ \theta_2=\theta_2(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_L)\\ \quad\vdots\\ \theta_L=\theta_L(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_L)\end{cases}$$

(3) 用 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 替换(2)中的 μ_k 得 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_L$ 矩估计量 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_L$

例2：设总体$X \sim 0-1$分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自X的样本，求事件A发生的概率p的矩估计量。

解：X的分布律为：

X	0	1
p_k	$1-p$	p

$$\therefore \mu_1 = E(X) = p$$

用$A_1 = \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 替换上式中的μ_1得p的矩估计量为：

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

例3：设总体X在[a，b]上服从均匀分布，a，b未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自X的样本，求a，b的矩估计量。

解：$\because X \sim U(a,b)$，则

$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \dfrac{a+b}{2} \\ \mu_2 = E(X^2) = \dfrac{(b-a)^2}{12} + \dfrac{(a+b)^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 2\mu_1 \\ a-b = \sqrt{12(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \mu_1 - \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \\ b = \mu_1 + \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases}$$

用$A_1=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ，$A_2=\overline{X^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 替换上式中的

μ_1,μ_2得a,b的矩估计量为：

$$\begin{cases}\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{3[(\overline{X^2}-(\bar{X})^2)]}=\bar{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i-1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\\ \hat{b}=\bar{X}+\sqrt{3[(\overline{X^2}-(\bar{X})^2)]}=\bar{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i-1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\end{cases}$$

例4：设总体$X,E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本，若μ,σ^2未知，求μ,σ^2的矩估计量。

解：由题可知：

$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \mu \\ \mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = \mu_1 \\ \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \end{cases}$$

用 $A_1=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ，$A_2=\overline{X^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 替换上式中的μ_1,μ_2得μ,σ^2的矩估计量为：

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\bar{X}\\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{n}S^2\end{cases}$$

无论总体服从什么分布，μ,σ^2的矩估计量分别为：

$$\hat{\mu}=\bar{X},\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

练习1：设总体X服从参数为 θ的指数分布，求θ的矩估计量.

解:$\because$X服从参数为θ的指数分布

$$\therefore \ \mu_1 = E(X) = \theta$$

用$A_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$替换上式中的$\mu_1$得$\theta$的矩估计量为:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

练习2：设总体 $X \sim B(m,p)$，参数 $m,p(0<p<1)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自X的样本，求 m,p 的矩估计量（对于具体样本值，若求得的 $\hat{m}$ 不是整数，则取与 $\hat{m}$ 最接近的整数作为m的估计值).

解：$\because \ X \sim B(m,p)$

$\therefore X$ 的分布律为：

$$P\{X=x\}=C_m^x p^x (1-p)^{m-x}, \quad x=0,1,2,\cdots m$$

$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = mp \\ \mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = mp(mp-p+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{\mu_1^2}{\mu_1 + \mu_1^2 - \mu_2} \\ p = \mu_1 - \dfrac{\mu_2}{\mu_1} + 1 \end{cases}$$

用 $A_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ，$A_2 = \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 替换上式中

的 μ_1, μ_2 得 m, p 的矩估计量为：

$$\begin{cases} \hat{m} = \dfrac{(\bar{X})^2}{\bar{X} + (\bar{X})^2 - \overline{X^2}} \\ \hat{p} = \bar{X} - \dfrac{\overline{X^2}}{\bar{X}} + 1 \end{cases}$$