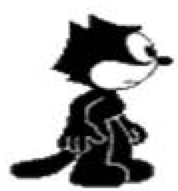
概率统计课件之3

第三章 随机变量的数字特征

主讲教师 邓小艳



随机变量的数字特征

§3-1 数学期望

§3-2 方差

§3-3 协方差与相关系数

§3-4 随机变量的另几个数字特征

§3-5 切比雪夫不等式与大数定理

一、矩和中心矩

设R.V.X，若 $E(X^k)$ $k=1,2,\cdots$ 存在，则称之为X的k阶原点矩(K阶矩)；若 $E\{[X-E(X)]^k\}$ k=1,2,…存在，则称之为X的k阶中心矩。

可见，均值 $E(X)$是X一阶原点矩，方差$D(X)$是X的二阶中心矩.

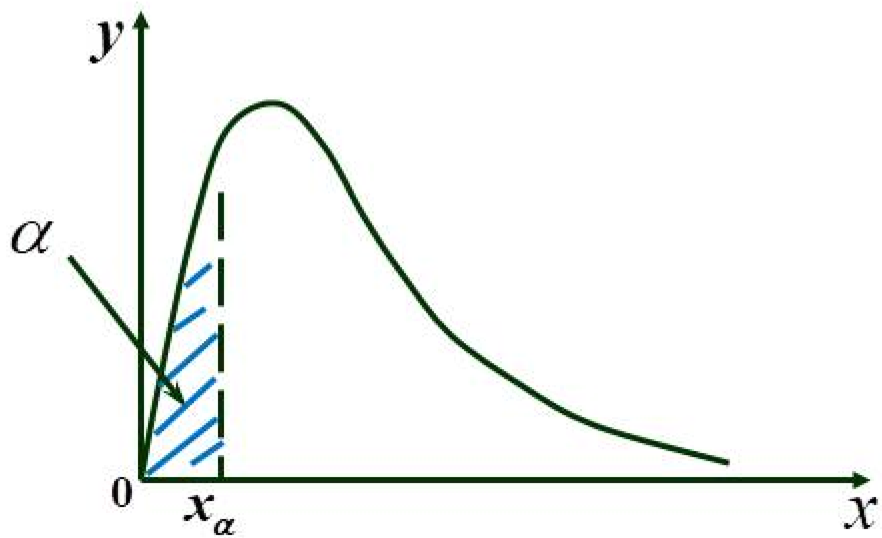
二、分位数

定义1：设连续型R.V. X,分布函数 $F(x)$,概率密度 $f(x)$

(1) 对 $\forall \alpha \ (0<\alpha<1)$ ，若

$$F(x_{\underline{\alpha}}) = \int_{-\infty}^{x_{\underline{\alpha}}} f(x)dx = \alpha$$

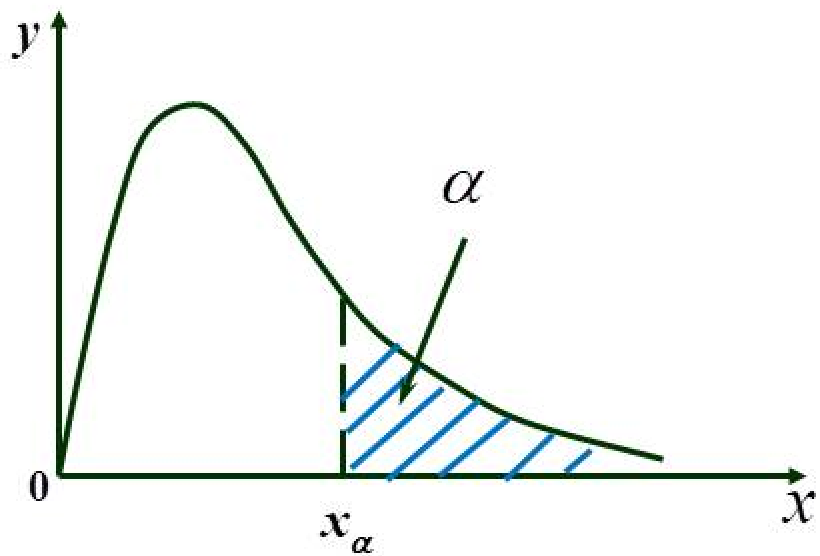
则称 $x_{\underline{\alpha}}$ 为该分布的 α 分位数(或下 α 分位数)。



(2) 对 $\forall\alpha\ (0<\alpha<1)$ ，若

$$P\{X>x_\alpha\}=1-F(x_\alpha)=\int_{x_\alpha}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$$

则称 x_α 为该分布的上α分位数(点)。



特别地，当 $\alpha=1/2$时，x_α称为 X的中位数

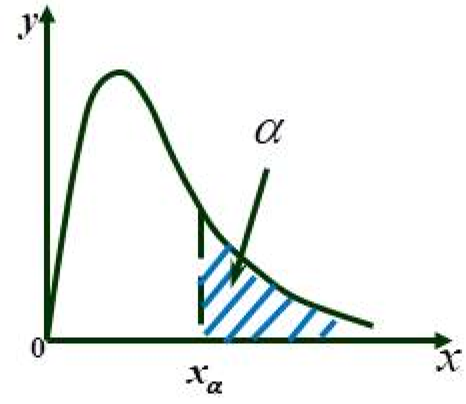
定义2：设离散型R.V. X，对 $\forall\alpha\ (0<\alpha<1)$ ，若

$$P\{X<x_{\underline{\alpha}}\}\le\alpha \text{ 且 } P\{X\le x_{\underline{\alpha}}\}\ge\alpha$$

则称 $x_{\underline{\alpha}}$ 为该分布的 α 分位数(或下 α 分位数)。

例1：设R.V. X服从指数分布，其分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$



求：$x_{0.5}$ ，$x_{0.25}$

解：(1) $F(x_{0.5})=1-e^{-x_{0.5}}=0.5 \Rightarrow e^{-x_{0.5}}=0.5$

$$\Rightarrow x_{0.5}=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$

(2) $F(x_{0.25})=1-e^{-x_{0.25}}=0.75 \Rightarrow e^{-x_{0.25}}=0.25$

$$\Rightarrow x_{0.25}=-\ln 0.25=2\ln 2$$

三、变异系数

1、定义

设R.V. X，若$\dfrac{\sqrt{D(X)}}{E(X)}$存在，则称 它为X的变异系数，记 $(CV)_X$，即：$(CV)_X=\dfrac{\sqrt{D(X)}}{E(X)}$

随机变量的数字特征

§3-1 数学期望

§3-2 方差

§3-3 协方差与相关系数

§3-4 随机变量的另几个数字特征

§3-5 切比雪夫不等式与大数定理

一、两个重要的不等式

1、马尔可夫(Markov)不等式

设R.V. X，X只取非负值，E(X)，则对$\forall \varepsilon > 0$，有

$$P\{X \ge \varepsilon\} \le \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

分析：

$$P\{X \ge \varepsilon\} \le \frac{E(X)}{\varepsilon} \Leftrightarrow \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \le \frac{\int_0^{+\infty} xf(x)dx}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \le \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\varepsilon} xf(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\boxed{\int_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon f(x)dx \le \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \le \int_0^{+\infty} xf(x)dx}$$

证明： 仅证明连续型随机变量的情况。设X的概率密度为 $f(x)$，因为X只取非负值，当 $x<0$ 时，有 $f(x)=0$，故

$$E(X)=\int_0^{\infty} xf(x)dx$$

$$=\int_0^{\varepsilon} xf(x)dx+\int_{\varepsilon}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} xf(x)dx$$

$\because [\varepsilon,\infty)$ 内总有 $x \geq \varepsilon$ 且$\int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)dx = P\{X \geq \varepsilon\}$

$$\therefore E(X) \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} xf(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon f(x)dx$$

$$=\varepsilon\int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)dx = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}$$

$$\therefore P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

2、切比雪夫不等式

设R.V. X，E(X)，D(X)，则对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$P\{|X-E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow P\{[X-E(X)]^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

或 $P\{|X-E(X)| < \varepsilon\} \geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$

$$P\{Y \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(Y)}{\varepsilon}$$

证明: 令 $Y=[X-E(X)]^2$，又 ε^2为正数，故由马尔可夫不等式得:

$$P\{Y \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{E(Y)}{\varepsilon^2}$$

$$P\{[X-E(X)]^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{E\{[X-E(X)]^2\}}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$ 即证

〈注〉这两个不等式常用于估计概率值的界限

例1：设一工厂某产品的产量Y是一R.V.，设

E(Y)=500，D(Y)=100，求:(1) $P\{Y > 1000\}$；

(2) $P\{400 < Y < 600\}$；(3) $P\{|Y - E(Y)| < 3\sqrt{D(Y)}\}$

解：(1) 由马尔可夫不等式

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\{Y > 1000\} \leq \frac{E(Y)}{1000} = \frac{1}{2}$$

(2) 由切比雪夫不等式

$$P\{400 < Y < 600\} = P\{-100 < Y - 500 < 100\}$$

$$= P\{|Y - 500| < 100\} \geq 1 - \frac{100}{100^2} = 0.99$$

(3) $P\{|Y - \mathbf{E(Y)}| < 3\sqrt{D(Y)}\} \geq 1 - \dfrac{D(Y)}{(3\sqrt{D(Y)})^2} = \dfrac{8}{9}$

二、依概率收敛

定义：对 $\forall\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$，

则称 $\{X_n\}$ 依概率收敛于X，记为：

$$\lim_{n\to\infty}X_n\overset{P}{=}X \text{ 或 } X_n\xrightarrow{P}X$$

注： $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0}$

三、大数定理

1、**定义**：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为相互独立的R.V.序列，若 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k - E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k\right) \xrightarrow{P} 0$，即

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k}_{\bar{X}} - \underbrace{E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k\right)}_{E(\bar{X})}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

则称 $\{X_n\}$ 服从大数定理。

直观来说，大数定理表明当 n 充分大时，$\bar{X}$ 与 $E(\bar{X})$ 发生偏差的可能性将充分小.

2、切比雪夫大数定理

TH1 设 $X_1, X_2, \cdots,$ 为相互独立且同分布的R.V.

①

序列，且具有相同的期望、方差， $E(X_k) = \mu$

②

若 $D(X_k) = \sigma^2, k = 1, 2, \cdots$ ，则 $\{X_n\}$ 服从

大数定理。即对 $\forall \varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k - E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k\right)\right| < \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

或 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

证明： 由于

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

由切比雪夫不等式

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2}$$

上式中令 $n\to\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$$

切比雪夫大数定理

若R.V.序列 $X_1, X_2, \cdots,$ 满足：

① 独立同分布；② 期望方差存在且相等

则R.V.序列 $\{X_n\}$ 服从大数定理。

特别地

若R.V.序列 $X_1, X_2, \cdots,$ 满足：

① 独立同分服从0–1分布；

② $E(X_k) = p$，$D(X_k) = p(1-p)$

则若R.V.序列 $\{X_n\}$ 服从大数定理。

伯努利大数定理

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k - E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k\right)\right| < \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

或 $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$

3、伯努利大数定理

TH1 设 n_A 是n重伯努利试验中A发生的次数，

$P(A)=p$，则对$\forall\varepsilon>0$有

频率　概率

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

注： 伯努利大数定理表明，事件A发生的频率 $\frac{n_A}{n}$ 依概率收敛于事件A的概率p，它以严格的数学形式表述了频率的稳定性，即当重复试验次数n充分大时，事件A发生的频率 $\frac{n_A}{n}$ 与事件A的概率p有较大偏差的概率很小.

4、辛钦大数定理

TH3 设 $X_1, X_2, \cdots$, 为相互独立且同分布的**R.V.**

①

序列， 且具有相同的期望, $E(X_k) = \mu, k = 1, 2, \cdots$

②

则对 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

注： (1) 辛钦大数定律为寻找随机变量的期望值提供了一条切实可行的途径;(2)切比雪夫大数定理是辛钦大数定理的特殊情况，而伯努利大数定理是切比雪夫大数定理的特殊情况.

第3章小结

一、数字特征

1、期望的定义、性质；**R.V.**函数的期望；

几个常见**R.V.**的期望；

2、方差的定义、性质；

3、协方差、相关系数的定义、性质；

二、大数定理

课堂练习题

1. 已知 $X \sim N(-2, 0.4^2)$，则 $E(X+3)^2 =$ ____

2. 设 R.V. X_1, X_2, X_3 相互独立，其中 $X_1 \sim U(0,6)$，$X_2 \sim N(0, 2^2)$，X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布，记 $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$。则 $E(Y) =$ ____，$D(Y) =$ ____

3. 设 $D(X)=25$，$D(Y)=36$，$\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X+Y) =$ ____.

4. 设 $X \sim N(10, 0.6)$，$Y \sim N(1, 2)$ 且 X 与 Y 相互独立，则 $D(3X-Y) =$ ____

5. 若 R.V. X 和 Y 满足 $E(XY) = E(X)E(Y)$，则 $D(X+Y) - D(X-Y) =$ ____.