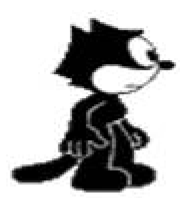
概率统计课件之二

第二章 随机变量及分布

主讲教师 邓小艳



随机变量及分布

§ 2-1 随机变量

§ 2-2 一维离散型R.V.及概率分布

§ 2-3 一维连续型随机R.V.及概率分布

§ 2-5 二维离散型及R.V.及概率分布

§ 2-6 二维连续型R.V.及概率分布

§ 2-9 随机变量函数的分布

一、$Y=g(X)$ 的分布

(一) 一维离散型 *R.V.* 函数的分布

若X是离散型的r.v., 则 $Y=g(X)$ 也是离散型r.v.

因此，只要将 Y 所有可能的取值以及相应的概率

找出来，就能得到 Y 的分布律.

设X是离散型 R.V.，其分布律为：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则Y=g(X)也是离散型随机变量，其分布律为：

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

<注> 若$g(x_i)=g(x_j)$，则将其概率合并为$p_i + p_j$，只写一个。

例1：设X ~ B (2,1/2)，求下列 R.V. 的分布律。

求:(1) $Y_1 = X^2$；(2) $Y_2 = X^2 - 2X$

(3) $Y_3 = 3X - X^2$

解：∵ X ~ B (2,1/2)　∴列表得：

X	0	1	2
Y_1	0	1	4
Y_2	0	-1	0
Y_3	0	2	2
p	1/4	1/2	1/4

∴ Y_1，Y_2，Y_3的分布律分别为：

Y_1	0	1	4
p	1/4	1/2	1/4

Y_2	-1	0
p	1/2	1/2

Y_3	0	2
p	1/4	3/4

（二）一维连续型R.V.函数的分布

例2： 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度函数。

解：$\because\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\therefore$ X的密度为：$f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

(1) 求Y=g(X)的分布函数；

①定义　　②代入

$$\therefore F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\}$$

③确定X落入的区间

④用X的分布函数表示X落入某区间的概率

$$= P\{X \le \sigma y + \mu\} = F_X(\sigma y + \mu)$$

(2) 两边对 y 求一阶导得

$$f_Y(y) = F_X'(\sigma y + \mu) = f_X(\sigma y + \mu) \cdot (\sigma y + \mu)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

一般方法——代换法

步骤：

(1) 求Y=g(X)的分布函数

$$F_Y(y) \overset{①}{=} P\{Y \le y\} \overset{②}{=} P\{g(X) \le y\}$$

$$\overset{③}{=} P\{X \in [*,*]\} \overset{④}{=} F_X(\varphi(\mathrm{y}))$$

①定义

②代入

③确定X落入的区间（讨论）

④用**X**的分布函数表示

X落入某区间的概率

(2) 上式两边对y求一阶导得Y=g(X)的概率密度函数。

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(\varphi(\mathrm{y})) = f_X(\varphi(\mathrm{y}))\cdot\varphi'(\mathrm{y})$$

例3: (1) 设R.V. X 的概率密度为 $f_X(x), -\infty < x < \infty$

求 $Y = X^2$ 的概率密度函数;

(2) 设R.V. X~ N(0，1)，求 $Y = X^2$ 的概率密度函数。

解：(1) 求Y=g(X)的分布函数;

对y分情况讨论

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$$

1° 当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = P\{X^2 \le y\} = 0 \quad \therefore f_Y(y) = 0$

2° 当 $y \ge 0$ 时，$F_Y(y) = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

(2) 两边对 y 求一阶导得

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y}) \cdot (-\sqrt{y})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right]$$

$\therefore\ Y = X^2$概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right] & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

(2) $\because\quad X\sim N(0,1)$

$\therefore$ **X的密度为：** $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad -\infty<x<\infty$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\right] & y\ge 0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi y}}e^{-y/2} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

例4：设R.V. X 在区间[0,1]上服从均匀分布，(1) 求 $Y=e^X$ 的概率密度函数；(2) 求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度函数。

解：由题，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$

1° 当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0 \quad \therefore f_Y(y)=0$

2° 当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{e^X\le y\}=P\{X\le \ln y\}$

$$=F_X(\ln y)$$

两边对 y 求一阶导得:

$$F_Y'(y)=F_X'(\ln y)$$

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot(\ln y)'=f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 0<\ln y<1\\ 0 & \ln y\le 0 \text{或} \ln y\ge 1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & 0<y\le 1 \text{或} y\ge e\end{cases}$$

综上，$Y=e^X$ 的概率密度为:

$$f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(2) $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{-2\ln X \le y\}$

1° 当 $y \le 0$ 时，$F_Y(y) = P\{-2\ln X \le y\} = 0 \quad \therefore f_Y(y) = 0$

2° 当 $y>0$ 时，$F_Y(y) = P\{-2\ln X \le y\} = P\{X \ge e^{-y/2}\}$

$$= 1 - F_X(e^{-y/2})$$

两边对 y 求一阶导得：

$$f_Y(y) = -f_X(e^{-y/2}) \cdot (e^{-y/2})' = \frac{1}{2} e^{-y/2}$$

综上，$Y = e^X$ 的概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-y/2} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

练习：设X～N(0，1)，求：(1) Y= |X| 的密度函数；

(2) $Y = 2X^2 + 1$ 的概率密度函数。