概率统计课件之二

第二章 随机变量及分布

主讲教师 邓小艳

随机变量及分布

§ **2-1** 随机变量

§ **2-2** 一维离散型**R.V.**及概率分布

§ **2-3** 一维连续型随机**R.V.**及概率分布

§ **2-5** 二维离散型及**R.V.**及概率分布

§ **2-6** 二维连续型**R.V.**及概率分布

§ **2-8** 相互独立的随机变量

§ **2-9** 随机变量函数的分布

一、二维连续型R.V.

1、定义

设二维**R.V.(X，Y)**，若存在函数 $f(x, y), st.\forall x, y$ 有

(1) $f(x, y) \geq 0$ **(非负性)**

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$ **(归一性)**

(3)对平面上区域**G**，$P\{(X, Y) \in G\} = \iint\limits_{G} f(x, y)dxdy$

则称是**(X，Y)**连续型**R.V.**，称 $f(x, y)$ 为**(X，Y)**的概率密度函数，或**X**与**Y**的联合概率密度。

几点说明：

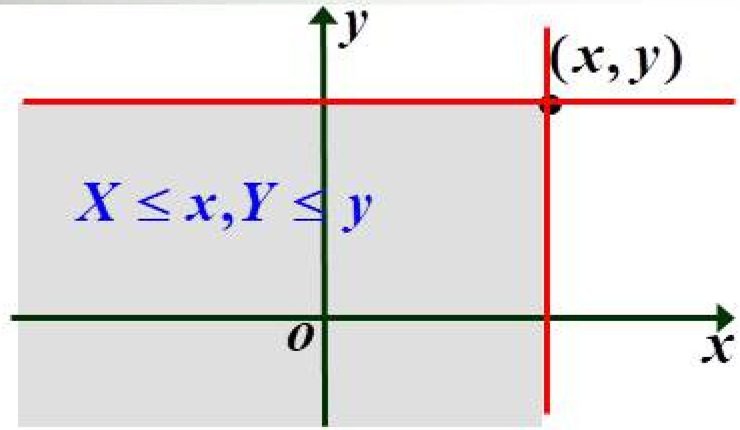
(1) $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面，位于xoy平面的上方.

(2) 曲面$f(x,y)$和 xoy 平面之间的空间区域的体积等于1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1,$$

(3)$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以G为底，以曲面$z=f(x,y)$为顶面的柱体体积.

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$



2、(X，Y)的分布函数

定义：二维连续型 $R.V.\ (X,Y)$, $\forall x, y \in R$，称

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

为(X,Y)的分布函数，或称为X与Y的联合分布函数。

<注>在 $f(x,y)$ 的连续点处： $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

例1：设(X，Y)的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(x+y)} & x > 0, \mathrm{y} > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) 常数A;

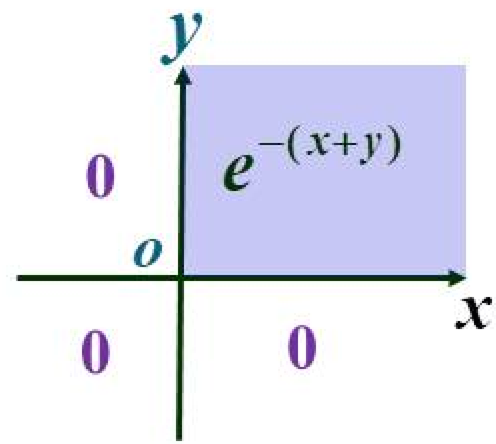
(2) $P\{X + Y \leq 1\}, P\{X \leq Y\}$

(3) 分布函数 $F(x, y)$

解： (1)由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{x>0,y>0} f(x,y)dxdy$

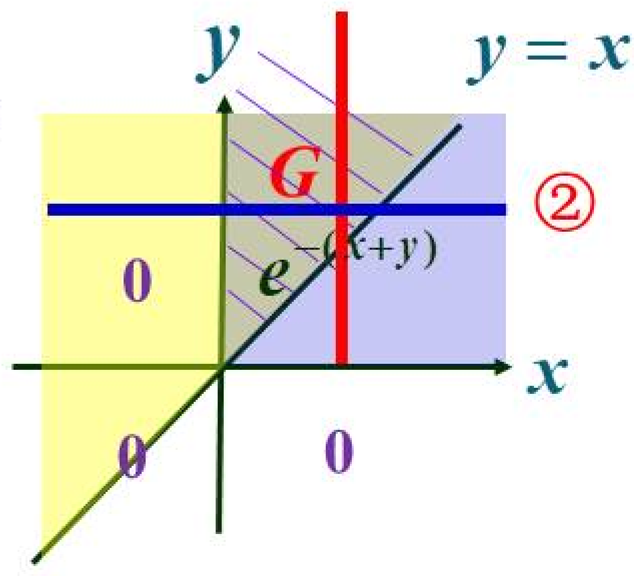
$$=\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty} Ae^{-(x+y)}dy = A$$

$\therefore \quad A=1$



$$\therefore \quad f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

(2) $P\{X\le Y\} \overset{①}{=} \iint\limits_{x\le y} f(x,y)dxdy$



$$=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty} e^{-(x+y)}dy$$

③

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{y} e^{-(x+y)}dx=\frac{1}{2}$$

① 定义

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{G} e^{-(x+y)}dxdy$$

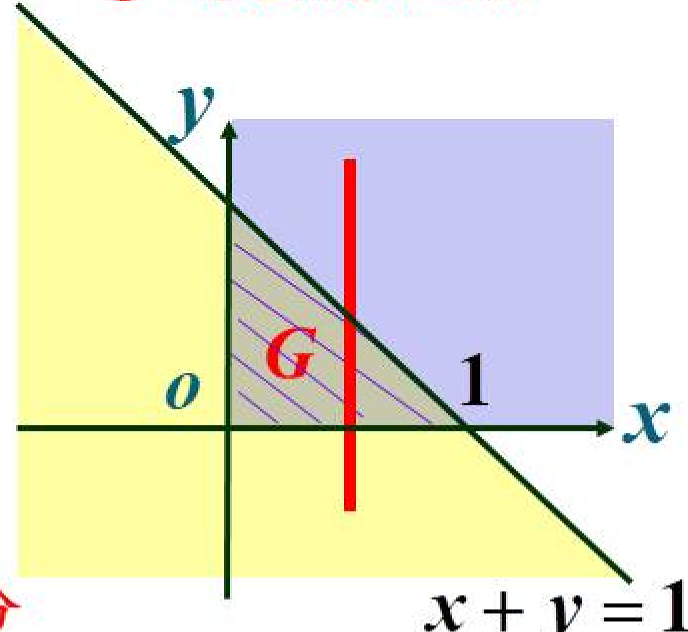
$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} e^{-(x+y)}dy$$

③化二重积分为二次积分

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} e^{-(x+y)}dx$$

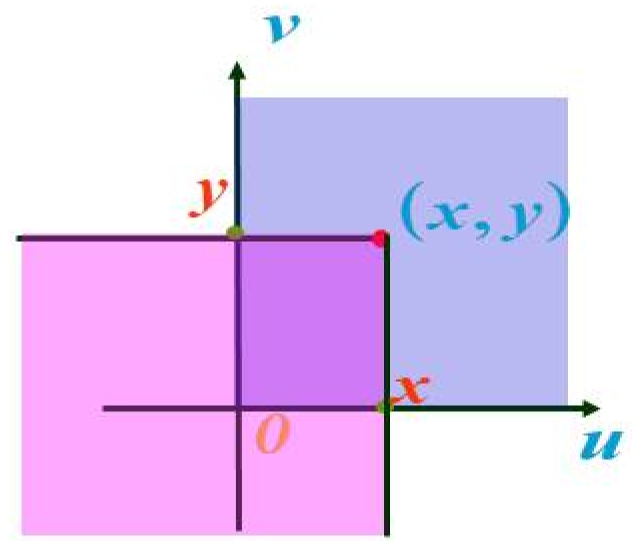
$$=1-2e^{-1}$$

② 确定积分区域G



(3) 分布函数为:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y \mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & x>0, y>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$\therefore\quad F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{y}), & x>0, y>0.\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例2：设(X，Y)的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} kx(x-y) & 0 < x < 1, -x < y < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) 常数k;

(2) $P\{Y < X/2\}$

解：由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy$ 得

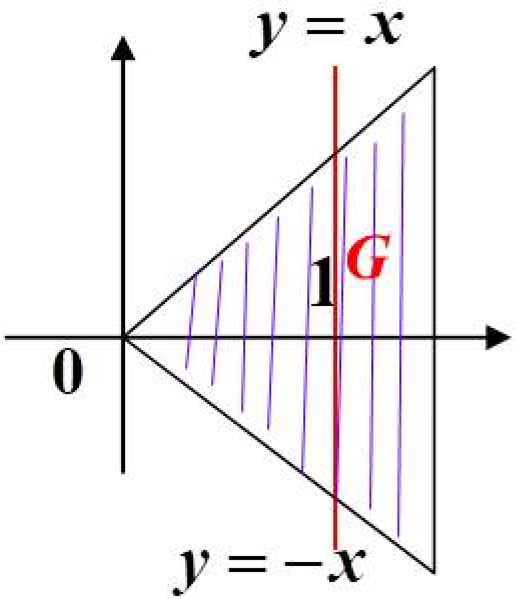
$$\iint_G f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}kx(x-y)dy$$

$$=\int_0^1\left[\int_{-x}^{x}(kx^2-kxy)dy\right]dx$$

$$=2k\int_0^1 dx\int_0^x x^2dy=2k\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{2}k=1,$$

故 $k=2.$



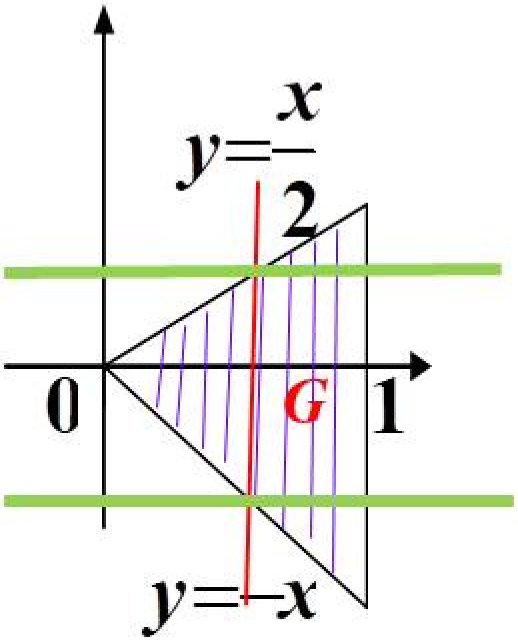
$$P\{Y < X/2\} = \iint_{y<x/2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_G 2x(x-y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-x}^{x/2} 2x(x-y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{15}{4} x^3 dx = \frac{15}{16}.$$

$$= \int_0^{1/2} dy \int_{2y}^1 2x(x-y)\,dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 2x(x-y)\,dx$$



3、常用 的二维连续型R.V.(X，Y)

(1) 设G是平面上的有界区域，其面积为A，若(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1/A & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则称（X,Y）在G上服从均匀分布。

(2) 二维正态分布

二、二维连续型R.V.的边缘概率密度

设二维连续型$R.V.\ (X,Y)$的概率密度为 $f(x,y)$,

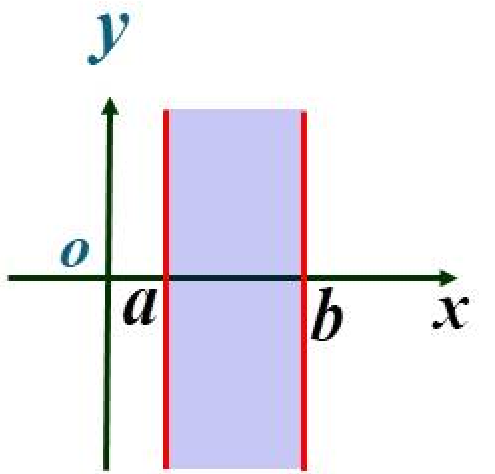
X与Y均为连续型R.V.，它们的概率密度分别为：

$f_X(x)$，$f_Y(y)$ ，对于任意区间$[a,b]$, 有

$$P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f_X(x)dx$$

又$\because$ $P\{a \le X \le b\} = P\{a \le X \le b, -\infty \le Y \le +\infty\}$

$$= \iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b [\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy]dx$$



可见 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

同理可得 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

二维连续型R.V.的边缘概率密度函数

(1) 二维$r.v.(X,Y)$关于X的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy$$

(2) 二维$r.v.(X,Y)$关于Y 的边缘密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx$$

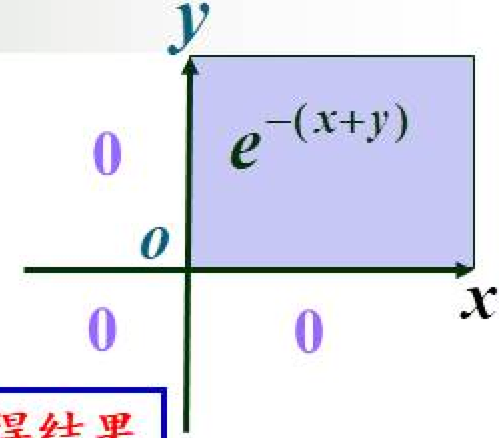
例1续：设(X，Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求: (4) (X,Y)关于X，Y的边缘概率密度函数；

(5) 判X与Y是否独立。

解 (4) 由题可得



①定义式

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

②根据被积函数的取值分区间

③利用穿线法确定积分上下限

④计算积分得结果

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dx & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

三、连续型R.V.的独立性

1、定义

连续型R.V. X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

例1续：设(X，Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

求: (4) (X,Y)关于X，Y的边缘概率密度函数;

(5) 判X与Y是否独立。

解: (5) $\because f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$

$$\therefore f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$\therefore f(x，y)=f_X(x)f_Y(y)$ $\therefore$ X与Y相互独立

例1：设(X，Y)的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) 常数A;

(2) $P\{X + Y \le 1\}, P\{X \le Y\}$

(3) 分布函数 $F(x, y)$

(4) (X,Y)关于X，Y的边缘概率密度函数;

(5) 判X与Y是否独立。

例3： 设(X，Y)在 $X^2+Y^2 \le R^2$ 上服从均匀分布

求: (1) (X,Y)关于X，Y的边缘概率密度函数；

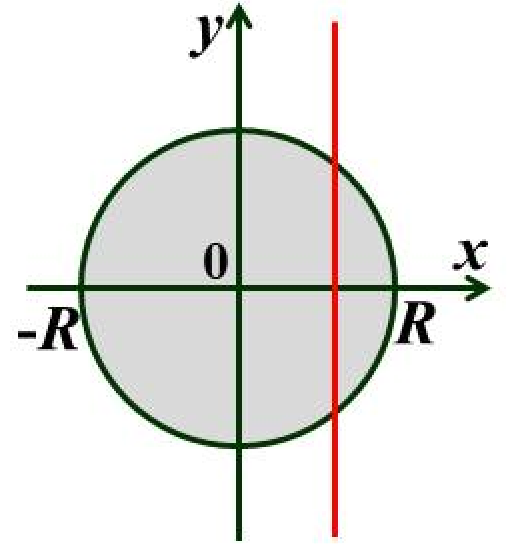
(2) 判X与Y是否独立。

解：(X，Y)的概率密度为: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2} & x^2+y^2 \le R^2 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

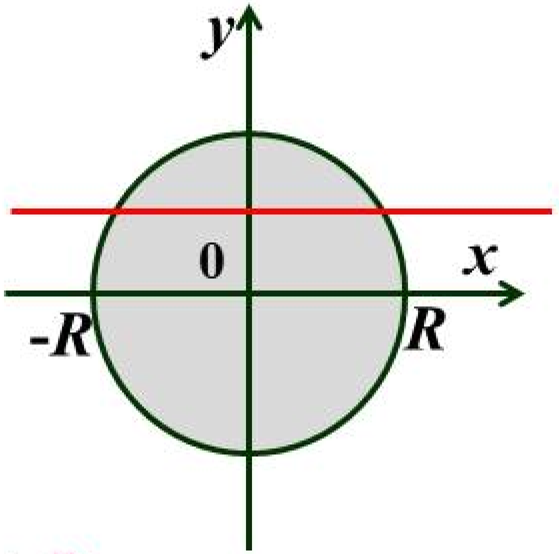
(1) (X,Y)关于X，Y的边缘概率密度分别为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}dy & -R \le x \le R \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2} & -R\le x\le R\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{1}{\pi R^2}dx & -R\le y\le R\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2} & -R\le y\le R\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

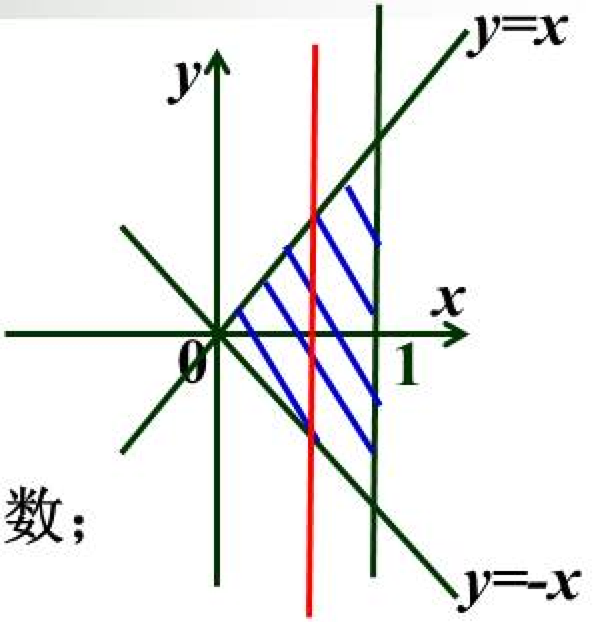
（2） $\because f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi^2R^4}\sqrt{(R^2-x^2)(R^2-y^2)} & -R\le x\le R,-R\le y\le R\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$\therefore \quad f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$

$\therefore$ **X与Y不相互独立**

例4：设(X，Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



求: (1) (X,Y)关于X，Y的边缘概率密度函数；

(2) 判X与Y是否独立。

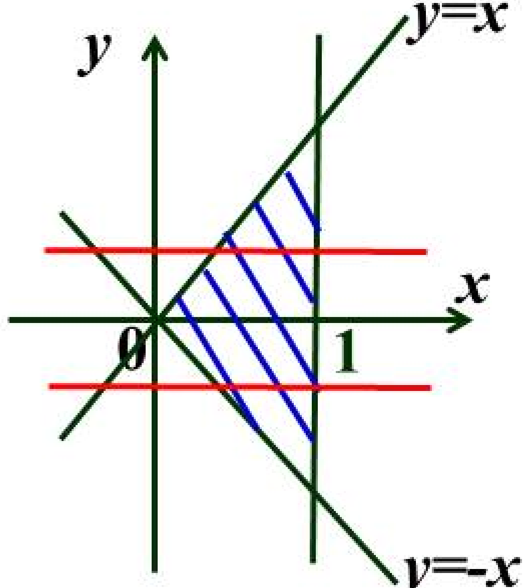
解: (1) (X,Y)关于X，Y的边缘概率密度分别为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_{-y}^{1} 1dx & -1<y<0\\ \int_{y}^{1} 1dx & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases} =\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



(2) $\because\ f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$

$\therefore$ X与Y不相互独立

练习1：设(X，Y)的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6 & x^2 \le y \le x \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

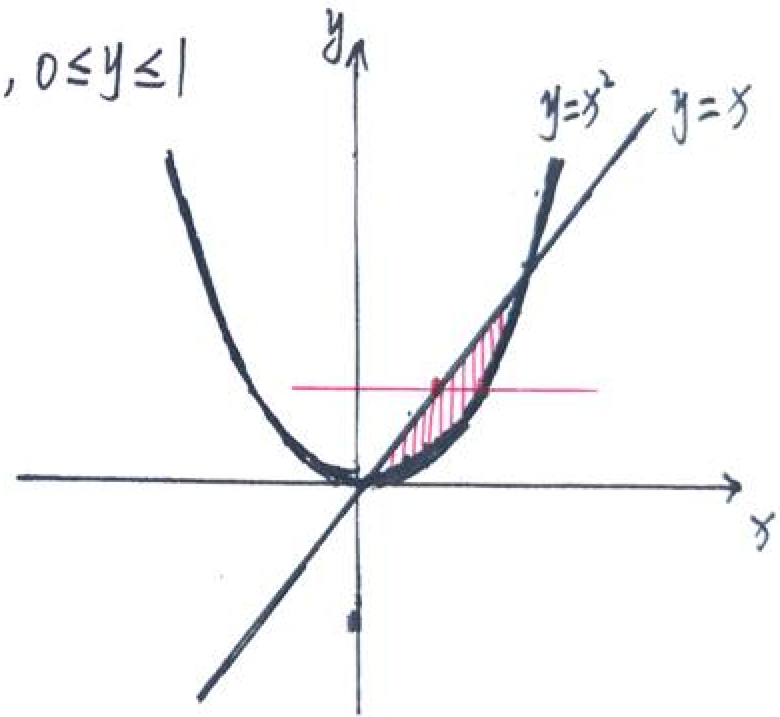
求: (1) (X,Y)关于X，Y的边缘概率密度函数；

(2) 判X与Y是否独立。

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6\,dy & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}6(x-x^2) & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6\,dx & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y) & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

(2) $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}36(x-x^2)(\sqrt{y}-y) & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$



$\therefore f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$

$\therefore X$ 与 Y 不相互独立.

例6：一负责人到达办公室的时间均匀的分布在8~12时，他的秘书到达办公室的时间均匀的分布在7~9时，设二人到达时间相互独立，求二人到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率。

解: 设X：“负责人到达办公室的时间”Y：“秘书到达办公室的时间”，则

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 8\le x\le 12\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 7\le x\le 9\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\because$ X与Y相互独立

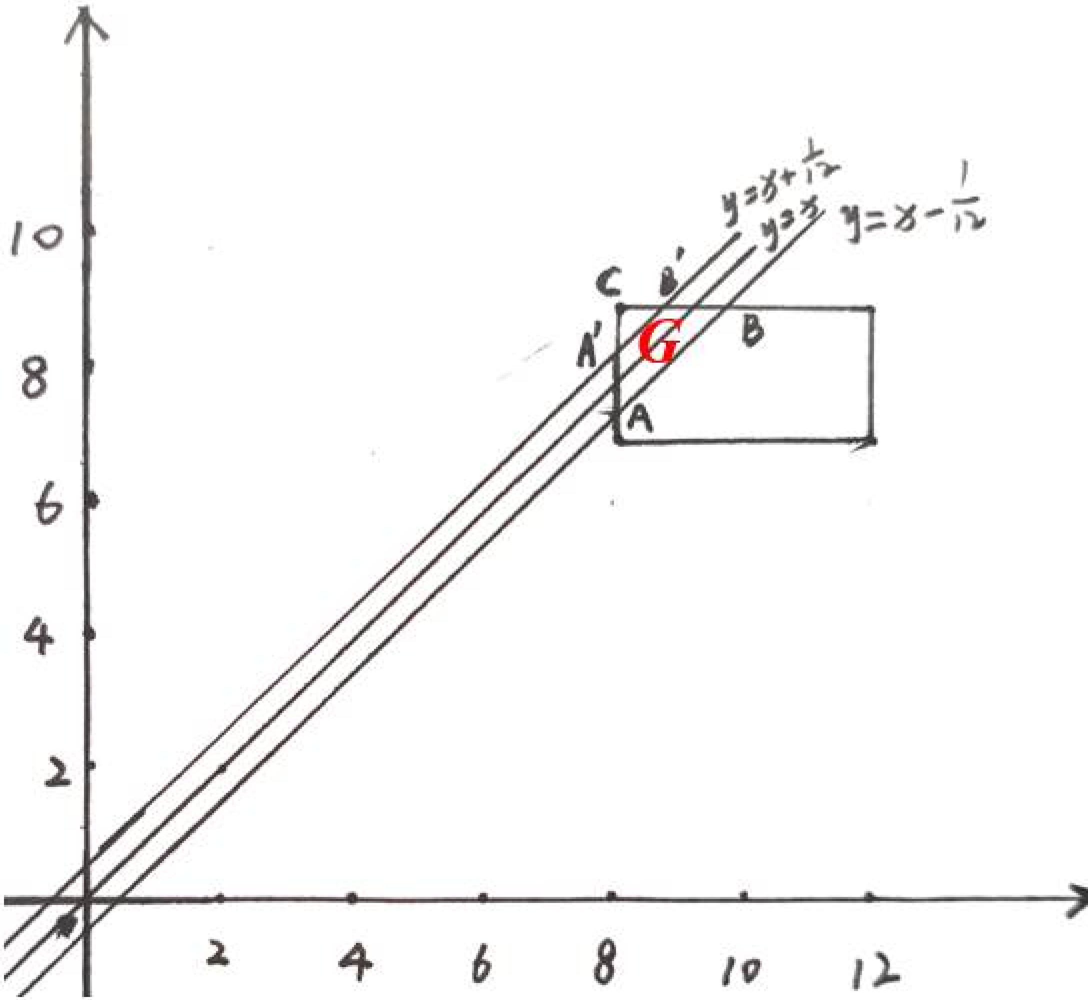
$$\therefore f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8} & 8\le x\le 12, 7\le y\le 9\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\therefore P\left\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\right\}=\iint\limits_{|x-y|\le\frac{1}{12}} f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{8}\iint\limits_{G} dxdy=\frac{1}{8}S_G$$

$$=\frac{1}{8}[S_{\Delta ABC}-S_{\Delta A'B'C}]$$

$$=\frac{1}{48}$$



练习2：设(X，Y)的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}kx^2y & x^2 \le y \le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求: (1) 常数k;

(2) $P\{X \le Y\}$

(3) $f_X(x)$ ，$f_Y(y)$

(4) 判X与Y是否相互独立?

小　　结

二维连续型R.V.

- ① 定义
- ② 联合概率密度函数
- ③ 联合分布函数$F(x,y)$
- ④ 边缘概率密度
- ⑤ X与Y的独立性