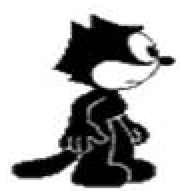
概率论与数理统计

主讲教师　邓小艳



课程介绍

课时：48学时

学分：3

教材：概率论与数理统计（浙大第二版）

成绩构成：40%平时成绩+60%考试成绩

平时成绩的构成（见Excel表格）

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律的一门数学学科，是一门应用性很强、很广泛的学科。

第一章 随机事件及概率

随机事件及概率

§1-1 随机试验、样本空间

§1-2 随机事件

§1-3 随机事件的概率

§1-4 古典概率模型

§1-5 条件概率

§1-6 事件的独立性

随机事件及概率

§1-1 随机试验、样本空间

§1-2 随机事件

§1-3 随机事件的概率

§1-4 古典概率模型

§1-5 条件概率

§1-6 事件的独立性

一、随机试验

试验1：一个盒子中有10个完全相同的白球，搅匀后从中任意提取一个球。

确定性现象

试验2：一个盒子中有10个大小形状相同的球，但5个红球，5个白球，搅匀后从中任意提取一个球。

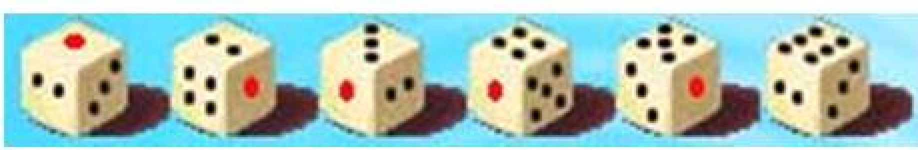
随机现象

随机现象：在基本条件不变的情况下，一系列试验或观察会得到不同的结果，在大量重复试验或观察中又呈现某种固有的规律性(统计规律性)。

例：E1：抛一枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况;

E2：抛两枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况

E3：掷一颗骰子，观察出现的点数。



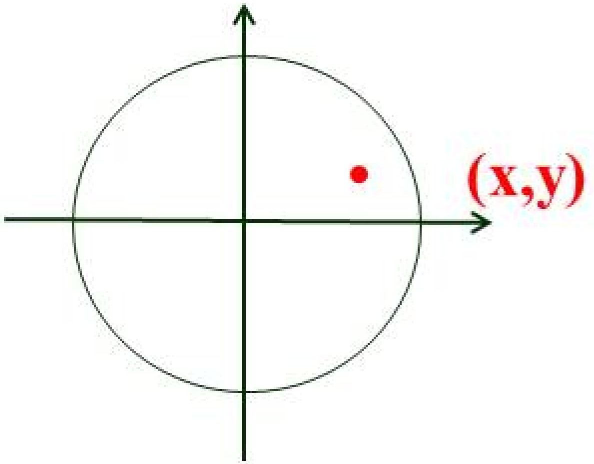
E4：记录某城市电话号码查询台一昼夜接到的呼叫次数。

呼叫次数：{0,1,2,3,……}

E5：在一批灯泡中任意抽取一只，测试其寿命。

灯泡寿命：$t \geq 0$

E6：在单位圆内任取一点，记录它的坐标。



以上试验共有的特点：

1、可以在相同的条件下重复进行；

2、每次试验的可能结果不止一个，并且能事先确定试验的所有可能结果；

3、进行试验之前不能确定哪一个结果会出现。

具有上述特点的试验称为（试验）。

随机试验：具有上述3个特点的试验称为随机试验，简称为试验，用E表示随机试验.

二、样本空间

1、定义：随机试验E的所有可能结果的集合称为样本空间，记作S；称E的每一个可能结果为样本点。

例：E1：抛一枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况;

S_1: $\{H, T\}$

E2：抛两枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况

S_2: $\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

E3：掷一颗骰子，观察出现的点数。

S_3: $\{1,2,3,4,5,6\}$

E4：记录某城市电话号码查询台一昼夜接到的呼叫次数。

S_4: $\{0,1,2,3,\ldots\ldots\}$

E5：在一批灯泡中任意抽取一只，测试其寿命。

S_5: $\{t \mid t \geq 0\}$

E6：在单位圆内任取一点，记录它的坐标。

S_6: $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

<注>样本空间的特点:可为有限，可无限；可离散，可连续.

随机事件及概率

§1-1 随机试验、样本空间

§1-2 随机事件

§1-3 随机事件的概率

§1-4 古典概率模型

§1-5 条件概率

§1-6 事件的独立性

一、随机事件的定义

1、定义：称随机试验E的样本空间S的子集为E的随机事件，简称事件。简言之，事件就是E的结果，常记作：A，B，C……

- 基本事件——E的每一个可能结果
- 必然事件——每次试验中，必然会发生的事件
- 不可能事件——每次试验中，必然不发生的事件

<注>当事件A中的某一个样本点发生，则称事件发生。

二、事件的关系与运算 ——集合的关系与运算

1、包含：$A \subset B$ —— 事件A发生必导致B发生

2、相等：$A = B$

3、和（并）：$A \cup B$ —— 事件A与B中至少有一个发生

<注>：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ——n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件

4、积（交）：$A \cap B$ —— 事件A与B同时发生

<注>：$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ —— n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件

5、差 $A-B$ ——事件A发生**但**B不发生

6、互不相容(互斥)： 若$AB=\Phi$，则称事件A、B互不相容

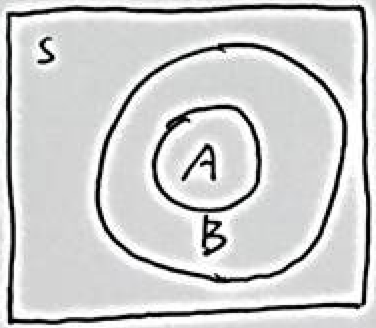
7、相互对立(互逆)

称事件A不发生这一事件为A的对立事件，记作$\overline{A}$

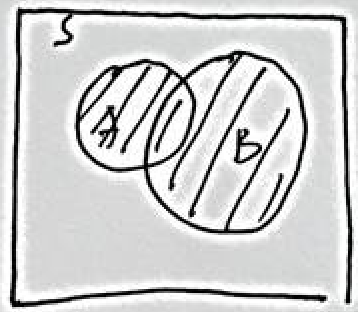
显然 $A\cup\overline{A}=S, A\overline{A}=\Phi$ 且 $\overline{\overline{A}}=A$

注：$A-B=A\overline{B}$

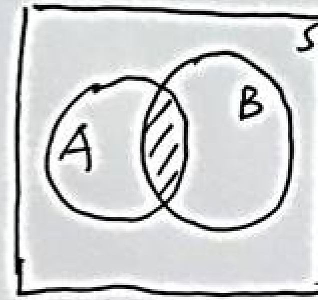
事件之间的关系.



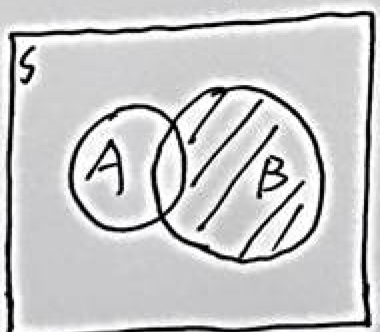
$A \subset B$



$A \cup B$ 和事件

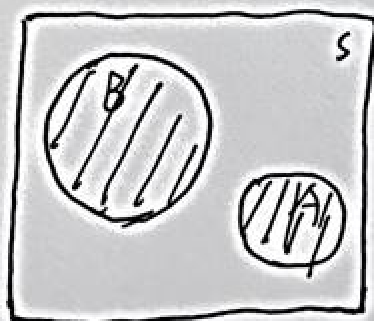


$A \cap B$ 积事件

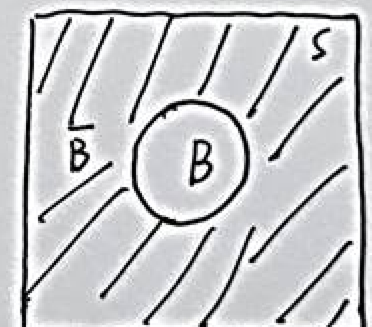


$B-A$ 差事件

$B\bar{A}$



$A \cap B = \phi$ 互不相容
(互斥)



$B \cup \bar{B} = S$, $B \cap \bar{B} = \phi$
对立事件(互逆)

三、事件的运算律 ——集合的运算法则

事件的运算规律:事件的运算满足交换律、分配律、结合律、德摩根(Demorgan)律。(参见教材P4)

例1：从全班80人中任抽1人，试用集合表示下列事件：

（1）抽到四川人或男生；

（2）抽到女生；

（3）抽到男生但非四川人；

（4）抽到四川男生；

例1：解：设A："抽到女生"，B："抽到四川人"，则

(1) $B\cup\bar{A}$　(2) A　(3) $\bar{A}\bar{B}$ / $\bar{A}-B$ / $\overline{A\cup B}$　(4) $\bar{A}B$

例2：向指定目标射击三枪，试用集合表示下列事件：

（1）只击中第一枪；

（2）只击中一枪；

（3）至少击中一枪；

（4）至少击中两枪；

（5）三枪都未中。

例2：解：设 A_k："第K枪命中目标"，$K=1,2,3$.

(1) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

(2) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

(3) $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 \cup A_1A_2\bar{A}_3 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3 \cup A_1A_2A_3$

(4) $A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$ 或 $A_1A_2\bar{A}_3 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3 \cup A_1A_2A_3$

(5) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ 或 $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$

例3：设A、B、C是三个事件，试用三者的运算关系表示下列事件：（1）A发生，B与C不发生；(2)A，B,C都不发生；（3）A，B,C中至少有一个发生；（4）A，B,C中恰有一个发生；（5）A，B,C中不多于一个发生；（6）A，B,C中不多于两个发生；（7）A，B,C中至少有两个发生；

例3解：(1) $A\bar{B}\bar{C}$ (2) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ (3) $A\cup B\cup C$

(4) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

(5) "A.B.C中不多于一个发生" 即$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$中至少有两个发生.

故表示成：$\bar{A}\bar{B}\cup\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}$ 或 $\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(6) "A.B.C中不多于两个发生"，即A.B.C中至少有一个不发生

即$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$中至少有一个发生.

故表示为：$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$

(7) $AB\cup BC\cup AC$

随机事件及概率

§1-1 随机试验、样本空间

§1-2 随机事件

§1-3 随机事件的概率

§1-4 古典概率模型

§1-5 条件概率

§1-6 事件的独立性

一、频率的定义和性质

1、定义： 在相同条件下，重复进行n次试验E，随机事件A在n次试验中出现的次数f_A称为频数，而比值

$$R_n(A)=\frac{f_A}{n}$$

称为事件A的频率。

2、性质

(1) $0\le R_n(A)\le 1$

(2) $R_n(S)=1$

(3) 若$AB=\emptyset$，则 $R_n(A\cup B)=R_n(A)+R_n(B)$

3、频率的稳定性

随机事件A发生的频率，当重复试验的次数n增大时，总稳定于某一个常数P。这种随机现象固有的性质“频率的稳定性”即为我们通常所说的统计规律性。

二、概率的定义与性质

1、概率的统计定义

定义：称频率的稳定值p为事件A发生的概率，即有

$$P(A)=p$$

<注>当n很大时，有 $P(A)\approx R_n(A)$

2、公理化定义：

设E是随机试验，S是E的样本空间。对于E的每一个事件A，赋予一实数$P(A)$。若$P(A)$满足：

(1) $0 \le P(A) \le 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) 有限可加性、可列可加性

若 $A_i A_j = \Phi(i \ne j，\ i, j = 1,2,\ldots)$ ，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则$P(A)$为事件A的概率。

3、性质

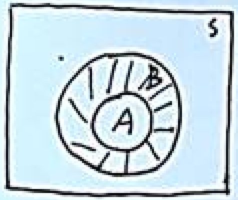
性质1 $P(\overline{A})=1-P(A)$

性质2 $P(\phi)=0$

性质3 设事件**A**、**B**，若 $A\subset B$，

则有：1) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

2) $P(B)\geq P(A)$



(1) $\because A\subset B$

$\therefore B=A\cup B\bar{A}$ 且A与$B\bar{A}$互不相容

$\therefore P(B)=P(A\cup B\bar{A})=P(A)+P(B\bar{A})$

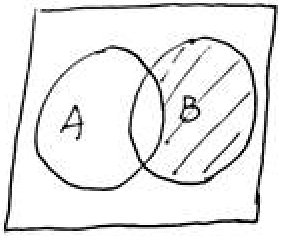
$\therefore P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)-P(A)$

(2) $\because P(B-A)\geq 0$ $\therefore P(B)-P(A)\geq 0$

$\therefore P(B)\geq P(A)$

推广：设任意事件**A**、**B**，有

$$\boldsymbol{P(B-A)=P(B)-P(AB)}$$



由图可知：

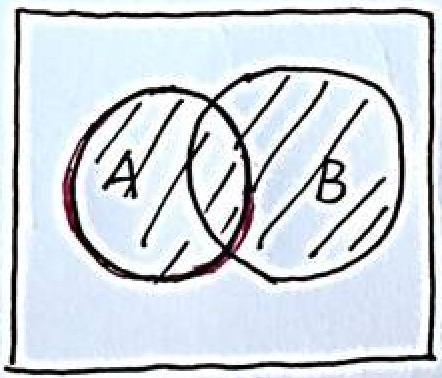
$B=B\bar{A}\cup AB$ 且$B\bar{A}$与AB互不相容

$\therefore P(B)=P(B\bar{A})+P(AB)$

$\therefore P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$

性质4 (加法公式)设任意两事件A、B有：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



$\because A \cup B = A \cup (B\bar{A})$ 且 A 与 $B\bar{A}$ 互不相容

$\therefore P(A \cup B) = P[A \cup (B\bar{A})] = P(A) + P(B\bar{A})$

$= P(A) + P(B) - P(AB)$

性质4 (加法公式)设任意两事件A、B有：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推广：$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

特别，有 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$

$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

注：公式的灵活应用

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

3、性质的应用

例4：已知 $AB=\Phi$ ，且 $P(A)=0.2$, $P(B)=0.5$ ，求：

$$P(\overline{A}), P(\overline{A}B), P(\overline{A\cup B}), P(\overline{A}\cup\overline{B})$$

例4解：$\because AB=\Phi \quad \therefore P(AB)=0$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.7$

(1) $P(\bar{A})=1-P(A)=0.8$

(2) $P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=0.5$

(3) $P(\overline{A\cup B}) \xlongequal{方法1} 1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$

$\xlongequal{另解} P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\cup\bar{B})$

$\xlongequal{另解} P(\bar{A}\bar{B})=\boxed{P(\bar{A})-P(\bar{A}B)}=0.3$

(4) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$

例5: (1)已知$P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(\overline{A}\overline{B})=0.4$,求$P(A\overline{B})$

(2)已知$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$,求$P(S-AB)$

例5: (1) $\because P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-P(A)-P(B)+P(AB)$

$\therefore P(AB) = P(A)+P(B)+P(\overline{A}\overline{B})-1 = 0.4+0.3+0.4-1 = 0.1$

$\therefore P(A\overline{B}) = P(A)-P(AB) = 0.4-0.1 = 0.3$

(2) $\because P(A-B) = P(A)-P(AB) = 0.3$

$\therefore P(AB) = 0.7-0.3 = 0.4$

$\therefore P(S-AB) = 1-P(AB) = 1-0.4 = 0.6$

例6.甲项目和乙项目将按时完成的概率为0.75和0.90，甲、乙项目至少有一个项目将按时完成的概率为0.99.求下列事件的概率:①两项目都按时完成. ②只有一个项目按时完成. ③两项目都没有按时完成.

例6 解：设A表事件："甲项目按时完成". B表事件："乙项目按时完成". 则

$P(A)=0.75$. $P(B)=0.9$ $P(A\cup B)=0.99$

(1) AB表示事件"甲,乙两个项目都按时完成.

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.75+0.9-0.99=0.66$

(2) 只有一个项目按时完成.

$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=0.33$

(3) $\bar{A}\bar{B}$表示事件"两个项目都没有按时完成".

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.99=0.01$

练习1：1、甲乙丙三人各射一次靶，记A：“甲中靶”B：“乙中靶”C：“丙中靶”，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：(1)甲未中靶；(2)甲中靶而乙未中靶；(3)三人中只有丙未中靶；(4)三人中恰好有一人中靶；(5)三人中至少有一人中靶；(6)三人中至少有一人未中靶；(7)三人中恰有两人中靶；(8)三人中至少两人中靶；(9)三人均未中靶；(10)三人中至多一人中靶；(11)三人中至多两人中靶。

练习2：已知 $B\subset A$，$C\subset A$. $P(A)=0.9$，$P(\bar{B}\cup\bar{C})=0.8$，求 $P(A-BC)$

练习3：已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$

求A，B，C至少有一个发生的概率.

练习4：设 $A\subset B$，$P(A)=0.1$，求 $P(\bar{A}\cup\bar{B})$

练习2：已知 $B\subset A$，$C\subset A$，$P(A)=0.9$，$P(\bar{B}\cup\bar{C})=0.8$，求 $P(A-BC)$

练习2：解：$\because B\subset A$，$C\subset A$ $\therefore BC\subset A$

$\therefore P(A-BC)=P(A)-P(BC)$

又 $\because P(\bar{B}\cup\bar{C})=P(\overline{BC})=1-P(BC)$

$\therefore P(BC)=1-P(\bar{B}\cup\bar{C})=1-0.8=0.2$

$\therefore P(A-BC)=P(A)-P(BC)=0.9-0.2=0.7$

练习2：已知 $B\subset A$，$C\subset A$，$p(A)=0.9$，$p(\bar{B}\cup\bar{C})=0.8$，求 $p(A-BC)$

练习3：已知 $p(A)=p(B)=p(C)=\frac{1}{4}$，$p(AB)=p(BC)=0$，$p(AC)=\frac{1}{8}$

求A、B、C至少有一个发生的概率.

练习3解：$\because ABC\subset AB$　$\therefore 0\leq p(ABC)\leq p(AB)$

又 $\because p(AB)=0$　$\therefore p(ABC)=0$

$\therefore$ A、B、C至少有一个发生的概率为：

$$
\begin{aligned}
p(A\cup B\cup C) &= p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(BC)-p(AC)+p(ABC) \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0+\frac{1}{8}+0 \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

练习4：设$A\subset B$，$P(A)=0.1$，求$P(\bar{A}\cup\bar{B})$

练习4 解：$\because A\subset B$ $\quad\therefore AB=A$

$$\therefore P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A)=1-0.1=0.9$$

小　结

一、主要知识点

1、随机现象与确定性现象；随机现象有哪些性质，随机现象的统计规律

2、样本空间的定义，随机事件的定义

3、事件之间的关系与运算

4、频率的定义与性质

5、概率的定义与性质

二、典型例题与练习