第六章 参数估计

主讲教师 邓小艳

成都信息工程大学应用数学学院

对同一未知参数，采用不同的估计方法求出的点估计量可能不同，那么如何评价其优劣呢？

评选标准

参 数 估 计

§ 6-1 参数的点估计

§ 6-2 估计量的评选标准

§ 6-3 参数的区间估计

§ 6-4 正态总体均值的置信区间

§ 6-5 正态总体方差的置信区间

§ 6-2 估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性(一致性)
- 期望和方差的点估计

无偏性 设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$\theta$的估计量，

若$E(\hat{\theta})=\theta$，则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量。

注：① 无偏性$\Leftrightarrow$平均偏差$E(\hat{\theta}-\theta)=0$

② 无偏估计量不是唯一的

③ 无论总体服从什么分布，样本均值$\overline{X}$是总体均值μ的

无偏估计量；样本方差S^2是总体方差σ^2的无偏估计量.

例1: 设总体X的k阶矩 $\mu_k = E(X^k)(k=1,2,\cdots,n)$ 存在，但未知，又设$X_1,X_2,\cdots X_n$是的一个样本。试证：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是 μ_k的无偏估计量。

证：$\because X_1,X_2,\cdots X_n$与X同分布，故有

$$E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k \quad k=1,2,\cdots,n$$

即有

$$E(A_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \mu_k,\ k=1,2,\cdots,n$$

$\therefore A_k(k=1,2,\cdots)$ 是μ_k的无偏估计量。

无论总体服从什么分布，样本k阶矩A_k是总体k阶矩 μ_k 的无偏估计量。

例2:设总体X，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，又设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自X的样本，试证:

(1) $\hat{\mu}_1=\overline{X}$ 和 $\hat{\mu}_2=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i, k<n$ 都是 μ 的无偏估计量;

证明: $E(\hat{\mu}_1)=E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot nE(X)=E(X)$

$$E(\hat{\mu}_2)=E\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}E(X_i)=\frac{1}{k}\cdot kE(X)=E(X)$$

$\hat{\mu}_1$和 $\hat{\mu}_2$都是 μ 的无偏估计量

§ 6-2 估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性(一致性)
- 期望和方差的点估计

有效性 设$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$都是$\theta$的无偏估计量，若$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效。

例2续:设总体X，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，又设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自X的样本，试证:

(2) $\hat{\mu}_1$较 $\hat{\mu}_2$更有效.

证明: $D(\hat{\mu}_1)=D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot nD(X)=\frac{\sigma^2}{n}$

$$D(\hat{\mu}_2)=D\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}D(X_i)=\frac{1}{k^2}\cdot kD(X)=\frac{\sigma^2}{k}$$

$\because D(\hat{\mu}_1)<D(\hat{\mu}_2)$

$\therefore \hat{\mu}_1$比 $\hat{\mu}_2$更有效。

§ 6-2 估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性(一致性)
- 期望和方差的点估计

相合性：设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为 θ的一个估计量，

若 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$, 则称 $\hat{\theta}_n$为 θ 的相合估计量。

注： 由弱大数定律，$\overline{X^k}$是$E(X^k)$的相合估计量；样本方差S^2是总体方差σ^2的相合估计量.

§ 6-2 估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性(一致性)
- 期望和方差的点估计

1、期望的点估计

选择估计量 $\longrightarrow \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ $\begin{cases}\text{无偏估计量，相合估计量}\\ \text{n越大，估计量越有效}\end{cases}$

2、方差的点估计

选择估计量 $\longrightarrow S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$（无偏估计量，相合估计量）

3、标准差的点估计

选择估计量 $\longrightarrow S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

练习:设总体X服从参数为θ的指数分布，$\theta > 0$且未知，又设

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自X的样本，试证:

(1) $\overline{X}$ 和 $nZ = n[\min(X_1, X_2, \cdots X_n)]$ 都是θ的无偏估计量;

(2) 当n>1时， θ的无偏估计量 $\overline{X}$ 较 nZ 更有效.

解：由题可知，总体X的概率密度和分布函数分别为:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$\because X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自X的样本

$\therefore X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立且与总体X同分布

推广：$X_1\ X_2 \cdots X_n$．分布函数为：$F_{X_1}(x_1)$，$F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$

且 $X_1\ X_2 \cdots X_n$ 相互独立．则

(1) $Z_1 = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数．

$$F_{Z_1}(z) = 1 - [1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

(2) $Z_2 = \max(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 的分布函数．

$$F_{Z_2}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

特别地，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立且有相同的分布函数 $F(x)$ 时，

$$F_{Z_1}(z) = F_{\min}(z) = 1 - [1-F(z)]^n$$

$$F_{Z_2}(z) = F_{\max}(z) = [F(z)]^n$$

$\therefore\ z=\min(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 的分布函数为:

$$F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}1-e^{-\frac{nz}{\theta}} & z>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\therefore\ z=\min(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 的概率密度为:

$$f_{\min}(z)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}\cdot e^{-\frac{nz}{\theta}} & z>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

z服从参数为θ/n的指数分布

(1) $E(\bar{X})=E(X)=\theta$

$$E(\mathrm{n}\,z)=nE(z)=n\cdot\frac{\theta}{n}=\theta$$

$\therefore\ \bar{X}$和 $nZ=n[\min(X_1,X_2,\cdots X_n)]$都是 θ的无偏估计量.

(2) $\because\ D(X)=\theta^2 \quad D(Z)=\left(\dfrac{\theta}{n}\right)^2$

$$\therefore\ D(\bar{X})=D(X)/\mathrm{n}=\theta^2/n$$

$$D(nZ)=n^2D(Z)=n^2\cdot\left(\frac{\theta}{n}\right)^2=\theta^2$$

$\therefore$当**n>1**时，**θ**的无偏估计量$\bar{X}$较nZ更有效.