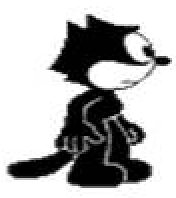
概率统计课件之一

第一章 随机事件及概率

主讲教师 邓小艳



随机事件及概率

§1-1 随机试验、样本空间

§1-2 随机事件

§1-3 随机事件的概率

§1-4 古典概率模型

§1-5 条件概率

§1-6 事件的独立性

一、两个事件的独立性

引例：3白 2黑 → 每次取一只，取后放回

设B表示事件：“第一次取到黑球”

A表示事件：“第二次取到白球”

显然 $P(A|B)=P(A)$

即：事件B是否发生，并不影响事件A发生的概率，

这时称事件A与B独立.

而 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=P(A)\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

两个事件相互独立

定义：设A与B 是两事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

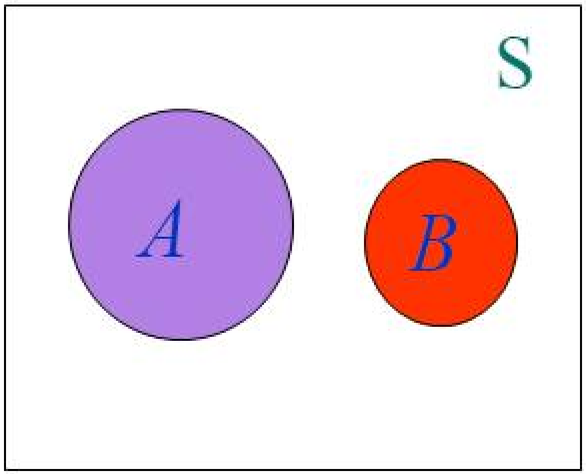
则称A与 B相互独立，简称 A与 B独立.

<注> (1) A与 B相互独立，直观上来说是指A，B发生可能性间没有关系，互不影响。

(2) 显然，Φ、S与任一事件独立。

(3) 注意区分相互独立、相互对立、互不相容

如图：事件A与B是否相互独立？



$\because P(AB)=0$

而$P(A)\neq 0, P(B)\neq 0$

$\therefore P(AB)\neq P(A)P(B)$

故 A与B不独立

若A与B互斥，且$P(A)>0, P(B)>0$,则A与B不独立.
若A与B独立，且$P(A)>0,P(B)>0$,则A与B不互斥

练习:

1.设事件A与B互斥，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，下面四个结论中，正确的是:

(1) $P(B|A)>0$　　(2) $P(A|B)=P(A)$

(3) $P(A|B)=0$　　(4) $P(AB)=P(A)P(B)$

2.设A与B相互独立，且$P(A)>0$，$P(B)>0$,下面四个结论中，正确的是:

(1) $P(B|A)>0$　　(2) $P(A|B)=P(A)$

(3) $P(A|B)=0$　　(4) $P(AB)=P(A)P(B)$

性 质

定理1：设A与B是两事件，且 $P(B) > 0$，则：

A与 B相互独立 $\Leftrightarrow$ $P(A \mid B) = P(A)$

定理2：如果 A与 B 相互独立，则A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$与 $\overline{B}$ 也相互独立。

证明：$\because$ A与B相互独立 $\therefore$ $P(AB)=P(A)P(B)$

$$\because A = A \cap (B \cup \overline{B}) = AB \cup A\overline{B}$$

$$\therefore \ P(A) = P(AB \cup A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

$$= P(A)P(B) + P(A\overline{B})$$

$$\therefore \ P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(\overline{B})$$

$\therefore$ A与 $\overline{B}$ 相互独立

二、多个事件的独立性

定义1：设 A、B、C三个事件，如果满足：

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \end{array}\right\} \text{两两独立} \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{array}\right.$$

则称A、B、C 相互独立.

定义2： 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$ 满足

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) & \longleftarrow \text{两两独立} \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ \quad\vdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \end{cases}$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

注意：n 个事件两两独立与相互独立的区别与联系

$$\text{相互独立} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{两两独立}$$

多个事件相互独立的性质

(1) 若n个事件独立，则其中任意k个也独立；

(2) 若n个事件独立，则其中任意多个换成对立事件后，所得的n个事件也独立；

三、独立事件的概率的计算

1、独立事件积事件的概率

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

例1: 10个零件中有3个次品，每次从中任取一个，取出后放回，求第三次才取得合格品的概率。

解：设 A_k 表示事件“第k次取得次品”(k=1,2,3)，则

$A_1A_2\overline{A_3}$表示“第三次才取得合格品”

$$P(A_1A_2\overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) = \frac{63}{1000}$$

例2： 观察表明，一家医院的挂号处，新到者是一个急诊病人的概率为1/6,求第r个到达的病人为首例急诊病人的概率。设各到达的病人是否为急诊病人相互独立。

解：设 D_i 表示事件“第i个到达的病人是急诊病人”(i=1,2,...)，A表示“第r个到达的病人是首例急诊病人”，则

$$A = \overline{D}_1\overline{D}_2 \cdots \overline{D}_{r-1}D_r$$

$\because$ $D_1, D_2, \cdots, D_r$ 相互独立.

$\therefore$ $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \cdots, \overline{D}_{r-1}, D_r$ 相互独立.

$$P(A) = P(\overline{D}_1)P(\overline{D}_2) \cdots P(\overline{D}_{r-1})P(D_r)$$

$$= (1 - \frac{1}{6})^{r-1} \frac{1}{6}$$

2、独立事件和事件的概率 (“化和为积”)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

例3：用高射炮射击飞机，击中的概率为0.6，求：

(1)用3门高射炮同时各发一弹而击中的概率；

(2)要保证以99%的概率击中飞机，至少需要多少门高射炮同时各发一弹？

解：设 A_k 表示事件“第k门高射炮击中飞机”(k=1,2,3…,n)

B表示事件“飞机被击中”，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，

且 $P(A_k) = 0.6$.

(1) 3门高射炮同时各发一弹而击中的概率为：

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$$

$$= 1 - 0.4^3 = 0.936$$

(2) 设至少需要n门高射炮同时各发一弹，则

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

而 $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \cdots \cdot \overline{A_n}$ 相互独立，所以

$$P(B) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_n)$$

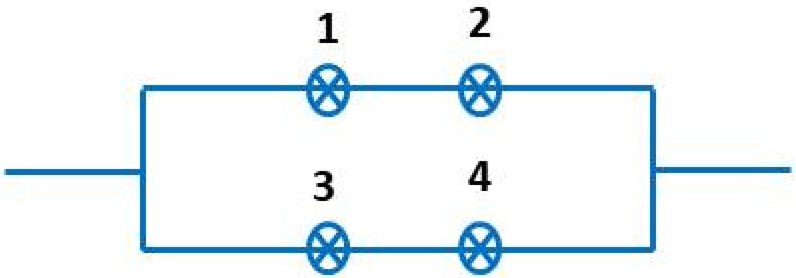
$$= 1 - 0.4^n \geqslant 0.99$$

$$\therefore \ 0.4^n \leqslant 0.01$$

解得：$n \geq \dfrac{\lg 0.01}{\lg 0.4} \approx 5.0259$

∴至少需要6门高射炮同时各发一弹才能保证以99%的概率击中飞机.

例4：一元件(或系统)能正常工作的概率称为元件的可靠性，设有4个独立工作的元件1,2,3,4按先串联再并联的方式联接(称为串并联系统)，设第i个元件的可靠性为p_i，试求系统的可靠性。



解：设 A_i 表示事件"第i个元件正常工作" (i=1,2,…)，A表示"系统正常工作"

则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，且 $P(A_i) = p_i$.

故系统能正常工作的概率为：

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\
&= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\
&= p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4
\end{aligned}
$$

四、n重伯努利试验

引例: (1)抛掷一枚硬币　　S ={正，反}

(2) 投篮　　S ={投中，投不中}

(3) 观察种子发芽　　S ={发芽，不发芽}

特点:

1. 每次试验有且只有两种可能结果

2. 可重复(每次试验 p 保存不变);

3.独立性(一次试验的结果与另一次试验的结果独立)

定义1：若随机试验 E 只有两个可能结果: A 及 $\overline{A}$，

$P(A)=p$，$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1-\boldsymbol{p}\ (0 < \boldsymbol{p} < 1)$，则称 E 为

伯努利试验.

定义2：将伯努利试验 $\boldsymbol{E}$ 独立地、重复地进行 $\boldsymbol{n}$ 次，

则称这一串重复的独立的试验为 $\boldsymbol{n}$ 重伯努利试验。

例5：对同一目标做三次独立的射击，设每次命中的概率为p，求三次中恰好命中一次（两次）的概率。

分析：设一次射击为一次试验，则各次试验独立，且只有两种可能结果，故这是3重伯努利试验

解：设 A_i 表示事件“第i次命中目标”(k=1,2,3)，B表示事件“三次恰好中一次”，C表示事件“三次中恰好中两次”，则 A_1, A_2, A_3 相互独立，且 $P(A_i) = p, i. = 1,2,3$

(1) 三次中恰好命中一次的概率为:

$$P(B) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$= P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$= P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)$$

$$= 3p(1-p)^2 = C_3^1 p(1-p)^2$$

(2) 三次中恰好命中两次的概率为:

$$P(B) = P(A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3)$$

$$= P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3)$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$= 3p^2(1-p) = C_3^2 p^2(1-p)$$

推广：对同一目标做n次独立的射击，设每次命中的概率为p，求n次中恰好命中k次的概率为：

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

n重伯努利概型中概率的计算

定理：设一次试验中A发生的概率为p（$0<p<1$），则事件A在n重伯努利试验中恰好发生k次的概率为：

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,2,\cdots,n, q = 1-p$$

例6：设一批产品中有20%的次品，现从中任取5件，求：(1)恰好取到3件次品；(2)至少取到3件次品；(3)最多取到3件次品的概率。

分析：设每抽一件产品为一次试验，则可认为各次试验独立，且每次只有两种可能结果：A“抽到次品”，$\overline{A}$“抽到正品”，这是$n=5$，$p=0.2$的伯努利试验。

例6：设一批产品中有20%的次品，现从中任取5件，求：(1)恰好取到3件次品；(2)至少取到3件次品；(3)最多取到3件次品的概率。

解：将每抽一件产品看成一次试验，它是伯努利试验，可近似的认为各次试验独立。因此，从中任取5件，是n=5，p=0.2的伯努利试验。令 A "抽到次品"，$\overline{A}$ "抽到正品 "，

(1)恰好取到3件次品的概率：$P_5(3) = C_5^3 \times 0.2^3 \times 0.8^2$

(2)至少取到3件次品的概率：

$$P_5(k \geqslant 3) = \sum_{k=3}^{5} C_5^k \times 0.2^k \times 0.8^{5-k}$$

(3)最多取到3件次品的概率：

$$P_5(k \leqslant 3) = \sum_{k=0}^{3} C_5^k \times 0.2^k \times 0.8^{5-k}$$

练习: (1)设每次射击的命中率为0.001，如果射击5000次，求至少命中两次的概率；(2)设命中率为0.2，问至少进行多少次独立射击，才能使至少中一次的概率为0.9。

解：(1)至少命中两次的概率

$$P_{5000}(k \geqslant 2) = \sum_{k=2}^{5000} C_{5000}^{k} \times 0.001^{k} \times 0.999^{5000-k}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{1} C_{5000}^{k} \times 0.001^{k} \times 0.999^{5000-k}$$

(2)设至少进行n次独立射击

$$P_{n}(k \geqslant 1) = \sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k} \times 0.2^{k} \times 0.8^{n-k} = 0.9$$