概率统计课件之2

第一章　随机事件及概率

主讲教师　邓小艳

随机事件及概率

§1-1 随机试验、样本空间

§1-2 随机事件

§1-3 随机事件的概率

§1-4 古典概率模型

§1-5 条件概率

§1-6 事件的独立性

例1：从0,1,2，3,4,5，6,7,8,9这十个数字中任取一个，求取到奇数的概率。

一、古典概型的定义

定义：如果随机试验具有以下两个特点：

①试验的样本空间只包含有限个样本点.（有限性）

②试验中每个基本事件发生的可能性相同.（等可能性）

则称之为“古典概型”（等可能概型）

例2：向指定目标射击三枪，求下列事件的概率：

（1）只击中一枪；

（2）至少击中一枪；

（3）三枪都未中。

分析：E：向指定目标射击三枪

S={(中，中，中)，(中，中，不中)，(中，不中，中)，(中，中，不中)，(中，不中，不中)，(不中，中，不中)，(不中，不中，中)，(不中，不中，不中)}.

二、古典概型中事件概率的计算

试验的样本空间为：$S=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$

事件*A*：$A=\{w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_k}\}$

则事件*A*的概率为：

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{N(A)}{N(S)}$$

——A中包含的基本事件数

——S中的基本事件总数

复习：(1) 两个原理；(2)排列组合公式

例3：袋中装有10只球，其编号为1,2,3，……，10，从中任取3只球，求：

(1)取出的球中最大号码是5的概率；

(2)取出的球中最小号码是5的概率；

(3)取出的球中最大号码小于5的概率；

解：E：从10只球中任取3只球，基本事件总数为：

$$N(s) = C_{10}^{3}$$

设A表示事件："取出的球中最大号码是5"；B表示事件："取出的球中最小号码是5"；C表示事件："取出的球中最大号码小于5"

（1） $N(A) = C_4^2$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{20}$$

（2） $N(B) = C_5^2$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$$

（3） $N(C) = C_3^2 + C_2^2$

$$P(C) = \frac{N(C)}{N(S)} = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

例4：设一批产品有100件，其中5件次品，现从中任取15件。求：

(1)恰好取到2件次品的概率；$N(A) = C_5^2 C_{95}^{13}$

(2至少取到2件次品的概率。

$$N(B) = C_5^2 C_{95}^{13} + C_5^3 C_{95}^{12} + C_5^4 C_{95}^{11} + C_5^5 C_{95}^{10}$$

解：E:从100件产品中任取15件，基本事件总数为:

$$N(s) = C_{100}^{15}$$

设A表示事件：“恰好取到2件次品”，B表示事件“至少取到2件次品”

（1） $N(A) = C_5^2 C_{95}^{13}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{C_5^2 C_{95}^{13}}{C_{100}^{15}}$$

（2） $N(B) = C_5^2 C_{95}^{13} + C_5^3 C_{95}^{12} + C_5^4 C_{95}^{11} + C_5^5 C_{95}^{10}$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{C_5^2 C_{95}^{13} + C_5^3 C_{95}^{12} + C_5^4 C_{95}^{11} + C_5^5 C_{95}^{10}}{C_{100}^{15}}$$

另解: $\overline{B}$ **表示事件"取到次品数少于2件"**

$$N(\overline{B}) = C_{95}^{15} + C_5^1 C_{95}^{14}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{N(\overline{B})}{N(S)} = 1 - \frac{C_{95}^{15} + C_5^1 C_{95}^{14}}{C_{100}^{15}}$$

推广：设一批产品有N件，其中M件次品，现从中任取n件。令Am：“恰好取到m件次品”（m≤M），则：

$$P(A_m)=\frac{C_M^m\times C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$——超几何概率

例5：袋中有4个白球，2个红球.从中按下列方式任取2个球，(1)每次取一个，取后放回；(2)每次取一个，取后不放回。分别求：

①第一次取到白球，第二次取到红球的概率；

②一次取到红球，一次取到白球的概率；

③取到两球同色的概率

解：设A表示事件："第一次取到白球，第二次取到红球"，B表示事件"一次取到红球，一次取到白球"，C表示事件"取到两球同色"

例5 解：设

(1) 放回抽取

$N(S)=C_6^1\times C_6^1=36$ （有序）

① $N(A)=C_4^1\times C_2^1=8$

$P(A)=\dfrac{N(A)}{N(S)}=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

② $N(B)=C_4^1\times C_2^1+C_2^1\times C_4^1=16$ $\qquad \text{事件}B\left\langle\begin{matrix}\text{白红}\\ \text{红白}\end{matrix}\right.$

$P(B)=\dfrac{N(B)}{N(S)}=\dfrac{16}{36}=\dfrac{4}{9}$

③ $N(C)=C_4^1\times C_4^1+C_2^1\times C_2^1=20$ $\qquad \text{事件}C\left\langle\begin{matrix}\text{白白}\\ \text{红红}\end{matrix}\right.$

$P(C)=\dfrac{N(C)}{N(S)}=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$

(2) 不放回抽取

$N(S)=C_6^1\times C_5^1=30$ （有序）

① $N(A)=C_4^1\times C_2^1=8$

$P(A)=\dfrac{N(A)}{N(S)}=\dfrac{8}{30}=\dfrac{4}{15}$

② $N(B)=C_4^1\times C_2^1+C_2^1\times C_4^1=16$ $\qquad \text{事件}B\left\langle\begin{matrix}\text{白红}\\ \text{红白}\end{matrix}\right.$

$P(B)=\dfrac{N(B)}{N(S)}=\dfrac{16}{30}=\dfrac{8}{15}$

③ $N(C)=C_4^1\times C_3^1+C_2^1\times C_1^1=14$ $\qquad \text{事件}C\left\langle\begin{matrix}\text{白白}\\ \text{红红}\end{matrix}\right.$

$P(C)=\dfrac{N(C)}{N(S)}=\dfrac{14}{30}=\dfrac{7}{15}$

②.③另解.

$N(S)=C_6^2=15$ （无序）

② $N(B)=C_4^1\times C_2^1=8$

$P(B)=\dfrac{N(B)}{N(S)}=\dfrac{8}{15}$

③ $N(C)=C_4^2+C_2^2=7$

$P(C)=\dfrac{N(C)}{N(S)}=\dfrac{7}{15}$

例6：有n个人，每人以同样的概率被分到N(n<N)间房的每一间中，求下列事件的概率：

(1)某指定的n间房中各有一人； $N(A)=A_n^n$

(2)恰有n间房，其中各有一人； $N(B)=C_N^n A_n^n=A_N^n$

(3)某指定房中恰有m（m≤n）人； $N(C)=C_n^m(N-1)^{n-m}$

(4)每个房间至多有一人. $N(D)=C_N^n A_n^n=A_N^n$

解：E:将n个人以同样的概率分到N(n<N)间房的每一间，则

$$N(s)=N\cdot N\cdot\cdots\cdot N=N^n$$

设A表示事件："某指定的n间房中各有一人"，B表示事件"恰有n间房，其中各有一人",C表示事件："某指定房中恰有m（m≤n）人"，D表示事件："每个房间至多有一人".

例6. 解：设

$$N(S) = \underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n} = N^n$$

(1) $N(A) = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = A_n^n$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{n!}{N^n}$$

(2) $N(B) = C_N^n \times n! = A_N^n$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{A_N^n}{N^n}$$

(3) $N(C) = C_n^m \times (N-1)^{n-m}$

$$P(C) = \frac{N(C)}{N(S)} = \frac{C_n^m \times (N-1)^{n-m}}{N^n}$$

(4) $N(D) = N(B) = A_N^n$

$$P(D) = \frac{N(D)}{N(S)} = \frac{A_N^n}{N^n}$$

例7： (1) 房间里有500人，求至少有一个人在10月1日生的概率； (2)房间里有4人，求任两人都不在同一月生的概率；

解: (1)E:观察房间里500人生日（将500人等概率的分到365天的每一天），则：$N(s) = 365^{500}$

设A表示事件：“至少有一个人在10月1日生”. $\overline{A}$ 表示“没有一个人在10月1日生”

$$N(\overline{A}) = 364^{500}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{N(\overline{A})}{N(S)} = \frac{364^{500}}{365^{500}}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{364^{500}}{365^{500}}$$

解: (2)E:观察房间里**4**人的出生月份，则：

$$N(s) = 12^4$$

设**B**表示事件：“任两人都不在同一月生”

$$N(B) = A_{12}^4$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{A_{12}^4}{12^4}$$

可见，例6和例7表面上是不同的问题，但实质上属于同一类型。在例6的分房问题中若令N=365，n=500，则演化为例7的生日问题.

例8　袋中有a只白球，b只红球，k个人依次在袋中取一只球. (1) 作放回抽样 (即前一人取一只球观察其颜色后放回袋中，后一人再取一只球)；(2) 作不放回抽样（即前一人取一只球观察其颜色后不放回袋中，后一人再取一只球）求第 i $(i = 1,2,\cdots,k)$人取到白球（记为事件B）的概率(设 $k \le a+b$)

解：设B表示事件“第i人取到白球”

（1）放回抽样

$$P(B) = \frac{C_a^1}{C_{a+b}^1} = \frac{a}{a+b}$$

(放回抽样，故每个人取到白球的概率均相等)

（2）不放回抽样

$$N(S)=A_{a+b}^{k}. \quad N(B)=a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}$$

$$\therefore \quad P(B)=\frac{a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}}$$

$$=\frac{a(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-1-(k-1)+1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}$$

$$=\frac{a}{a+b}$$

注意： $P(B)$与i无关，即k个人取球，尽管取球的先后次序不同，每个人取到白球的概率是一样的，机会相等. 放回抽样与不放回抽样取到白球的概率一样.

所以，在抽游签戏中先抽后抽一个样；有放回无放回一个样！

小结

- 古典概型的定义
- 古典概率的求法
- 古典概率的典型问题