概率统计课件之3

第三章 随机变量的数字特征

主讲教师 邓小艳

随机变量的数字特征

一、方差的定义

例：A、B两种手表的日走时误差分别具有如下分布律：

X_A	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

X_B	-1	0	1
P	0.1	0.8	0.1

判断**A**、**B**的优劣？

分析：易知$E(X_A)=E(X_B)$，根据期望无法判断**A**、**B**的优劣，但**B**的日走时较**A**稳定，即**B**的日走时与其日平均误差的偏离程度小，因此**B**优于**A**.

可见,研究随机变量与其均值的偏离程度是十分必要的. 如何度量这个偏离程度呢?

① $x_k - E(X)$ —— x_k 与均值$E(X)$的偏离程度

② $E[X - E(X)]$ —— 不能度量X与均值$E(X)$之间的整体偏离程度

③ $E|X - E(X)|$ —— 能度量X与均值$E(X)$的整体偏离程度，但计算不方便

④ $E[X - E(X)]^2$ —— 可以度量X与均值$E(X)$的偏离程度，计算方便

用$E[X\text{-}E(X)]^2$来度量随机变量X与其均值E(X)的偏离程度.这个数字特征就是我们这一讲要介绍的方差.

1、定义

设R.V. X，若 $E[X-E(X)]^2$ 存在，则称之为X的方差，记作D(X)或 Var(X)，即：

$$D(X)=E\left[X-E(X)\right]^2$$

$$=\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k & \text{（离散型）} \\ \int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx & \text{(连续型)} \end{cases}$$

<注> (1) $D(X) \geqslant 0$；(2) $\sqrt{D(X)}$ 称为X的标准差；

(3) 方差的求法：

① 定义

② $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

证明：$D(X)=E[X-E(X)]^2$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2[E(X)]^2+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

二、方差的计算

例1：求下列R.V.的方差：

(1) $X \sim (0, 1)$ 分布

(2) $X \sim B(n, p)$

(3) $X \sim \pi(\lambda)$

解：(1) $\because X \sim (0,1)$ 分布

$\therefore$ X的分布律为：

X	0	1
P_k	$1-p$	p

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$$

$$\therefore \quad D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\boxed{E(X) = p \quad D(X) = p(1-p)}$$

$$E(X)=np, D(X)=np(1-p)$$

(2) $\because X \sim B(n\ ,p)$

$\therefore$ X的分布律为：$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2\cdots,n$

$\therefore\ E(X)=np$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=\sum_{k=1}^{n} k(\mathrm{k}-1)\mathrm{C}_n^k \mathrm{p}^k q^{n-k}+np$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}p^k q^{n-k}+np$$

$$=np\times(\mathrm{n}-1)\mathrm{p}\sum_{k=1}^{n}C_{n-2}^{k-2}p^{k-2}q^{n-k}+np$$

$$=np\times(n-1)p(p+q)^{n-2}+np=n(\mathrm{n}-1)p^2+np$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=n^2p^2-np^2+np-(np)^2=np(1-p)=npq \quad (q=1-p)$$

(3) $\because X \sim \pi(\lambda)$

$\therefore$ X的分布律为: $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots, \lambda>0$

$\therefore E(X)=\lambda$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= E[X(X-1)+X] \\
&= E[X(X-1)]+E(X) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda
\end{aligned}
$$

$E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$

例2： 求下列R.V.的方差：

(1) $X \sim U(a\ ,b)$ 分布

(2) X服从参数为θ的指数分布；

(3) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(1)解：X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$\therefore E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

另解：$D(X)=\int_a^b\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{b-a}dx=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

$$E(X)=\frac{a+b}{2},D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

(2)解：概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\theta^2$$

另解：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\theta)^2f(x)dx=\theta^2$

$$E(X)=\theta,\ \ D(X)=\theta^2$$

(3) 解：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\underline{\underline{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}}\ \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\,de^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-(t/\sqrt{2})^2}d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sigma^2$$

$$E(X)=\mu,\quad D(X)=\sigma^2$$

〈注〉几个常见随机变量的期望与方差

X	0-1分布	$B(n,p)$	$\pi(\lambda)$	$U(a,b)$	指数分布	$N(\mu,\sigma^2)$
E(X)	p	np	λ	$(a+b)/2$	θ	μ
D(X)	$p(1-p)$	$np(1-p)$	λ	$(b-a)^2/12$	θ^2	σ^2

三、方差的性质

性质：(1) $D(c)=0$;

(2) $D(cX)=c^2D(X); D(X+c)=D(X)$

(3) 若X,Y相互独立，则: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;

证明: $D(X+Y)=E[(X+Y)-E(X+Y)]^2$

$=\mathrm{E}\{[X-E(X)]^2+[Y-E(Y)]^2+2[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$=E[X-E(X)]^2+E[Y-E(Y)]^2+2E[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$=D(X)+D(Y)+2[E(XY)-E(X)E(Y)]$

$\overset{X\text{与}Y\text{独立}}{=\!=\!=\!=} D(X)+D(Y)$

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2[E(XY)-E(X)E(Y)]$

(4) $D(X)=0 \Leftrightarrow P\{X=a\}=1$, 其中$a=E(X)$

推广：(1)若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

(2)若X，Y相互独立，则

$$D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$$

例3：设R.V. $X \sim B(n, p)$，求$D(X)$.

解：$\because X \sim B(n, p)$

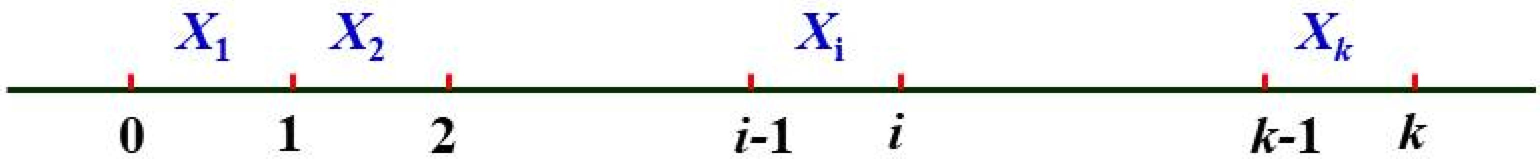
$\therefore$ X可以看作n重伯努利试验中事件A发生的次数，且$P(A)=p$

$$令X_k=\begin{cases}1 & 在第k次试验中A发生\\ 0 & 在第k次试验中A不发生\end{cases}$$

则$X=\sum_{k=1}^{n} X_k$，其中$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且同服从0-1分布. $\therefore E(X_k)=p$，$D(X_k)=p(1-p)$

$$\therefore D(X)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)=np(1-p)=npq$$

例4： 流水作业线上生产出的每个产品的不合格率为p，当出现k个不合格品时，停工检修，求在两次检修期间产品数量的数学期望和方差。



解：设X：“两次检修期间的产品数量”，X_i“：第i-1个次品与第i个次品出现间的产品数量数”.

则 $X=\sum_{i=1}^{k} X_i$，其中 X_1，$X_2,\cdots$，X_k 相互独立且同服从

分布：$P\{X_i=m\}=q^{m-1}p \quad m=1,2,\cdots \quad (q=1-p)$

$$E(X_i)=\frac{1}{p} \quad E(X_i^2)=\frac{q+1}{p^2} \quad D(X_i)=\frac{q}{p^2}$$

$$\therefore E(X)=\sum_{i=1}^{k} E(X_k)=\frac{kq}{p^2} \quad D(X)=\sum_{i=1}^{k} D(X_k)=\frac{k}{p}$$

例8(续)：设一维R.V. X，Y的概率密度分别为：

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases}4e^{-4y} & y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

且X,Y相互独立.

求：(1) D(X)，D(Y)；

(2) $D(X+Y)$，D(2X+3Y);

(3) $E[(X+Y)^2]$

解： 由题 X，Y 分别服从参数为1/2和1/4的指数分布，且 X 与 Y 相互独立.

(1) $D(X)=1/4 \quad D(Y)=1/16$

(2) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)=5/16$

$D(2X+3Y)=4D(X)+9D(Y)=25/16$

(3) $E[(X+Y)^2]=D(X+Y)+[E(X+Y)]^2$

$$=\frac{5}{16}+[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}]^2=\frac{7}{8}$$