第六章 参数估计

主讲教师 邓小艳

成都信息工程大学应用数学学院

参 数 估 计

§ **6-1** 参数的点估计

§ **6-2** 估计量的评选标准

§ **6-3** 参数的区间估计

§ **6-4** 单个正态总体均值与方差的置信区间

§ **6-5** 两个正态总体均值与方差的置信区间

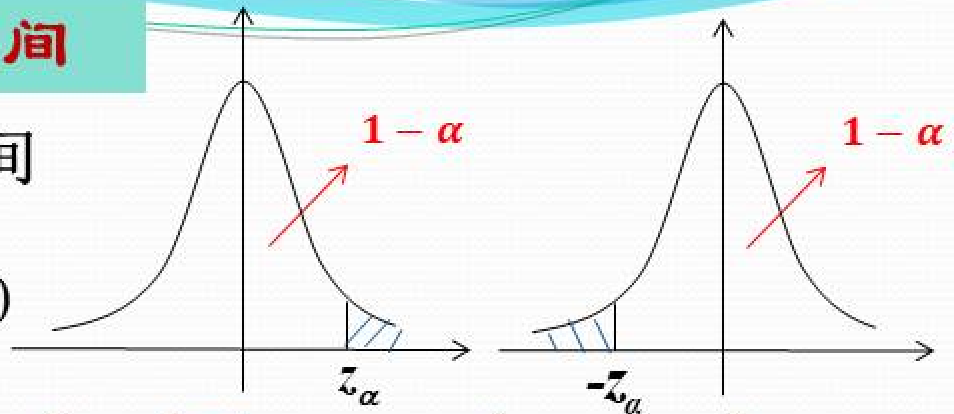
§ **6-6** 单侧置信限

一、定义

定义：给定α（$0<\alpha<1$），构造统计量 $\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 使$P\{\theta>\underline{\theta}\}\geq 1-\alpha$ ，称$(\underline{\theta},+\infty)$为参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间. 称$\underline{\theta}$ 为参数θ 的置信水平为$1-\alpha$ 的**单侧置信下限.**

定义：给定 α（$0<\alpha<1$），构造统计量 $\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 使 $P\{\theta<\bar{\theta}\}\geq 1-\alpha$，称 (-∞，$\bar{\theta}$)为参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间. 称 $\bar{\theta}$为参数 θ的置信水平为 $1-\alpha$的**单侧置信上限.**

二、均值 μ 的单侧置信区间



1. σ^2已知，求 μ 的单侧置信区间

① 选统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

② $P\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_\alpha\right\} = 1-\alpha$ $\left(P\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > -Z_\alpha\right\} = 1-\alpha\right)$

③ $P\left\{\mu > \bar{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha\right\} = 1-\alpha$ $\left(P\left\{\mu < \bar{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha\right\} = 1-\alpha\right)$

μ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间：

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha, +\infty\right) \qquad \left(-\infty, \bar{X} + \frac{\alpha}{\sqrt{n}} Z_\alpha\right)$$

μ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限和上限：

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha \qquad \overline{\mu} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha$$

2. σ^2未知，求 μ 的单侧置信区间

① 选统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

② $P\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$ $\left(P\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} > -t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha \right)$

③ $P\left\{\mu > \bar{X} - \dfrac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$ $\left(P\left\{\mu < \bar{X} + \dfrac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha \right)$

μ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间：

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), +\infty\right) \quad \left(-\infty, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right)$$

μ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限：$\underline{\mu} = \bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$

置信上限：$\bar{\mu} = \bar{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$

二、方差 σ^2 的单侧置信区间

μ 未知，求 σ^2 的单侧置信区间

①选统计量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

② $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha$ $\left(P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha\right)$

③ $P\left\{\sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$ $\left(P\left\{\sigma^2 > \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha\right)$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间：

$\left(0, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$ $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, +\infty\right)$

σ^2的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限：$\overline{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

单侧置信上限：$\underline{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$

两个正态总体的单侧置信限详见P166表6.1

表 6.1 正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限(置信水平为 $1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\overline{\mu}=\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$ $\underline{\mu}=\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$
	μ	σ^2 未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\overline{\mu}=\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$ $\underline{\mu}=\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\underline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}+z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}-z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 均未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\underset{\sim}{\text{近似}}\,t([\nu])$ $\nu=\dfrac{(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2)^2}{\dfrac{1}{n_1-1}\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2+\dfrac{1}{n_2-1}\left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}([\nu])\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}+t_{\alpha}([\nu])\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}-t_{\alpha}([\nu])\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\underline{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$

例9(例1续):从某鱼塘捕获的鱼，其含汞量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中$\sigma = 0.32$, μ 未知，现随机的取了**10**条鱼，测得含汞量如下：**0.8, 1.6, 0.9, 0.8, 1.2, 0.4，0.7, 1.0, 1.2，1.1**，求均值 μ 的单侧置信上限和单侧置信下限(置信水平为**0.95**).

例10(例2续): 已知某种钉子的长度**X**服从正态分布，现抽了**9**个样品，长度为：**20, 16, 18, 17, 18, 17, 19, 18, 19.**

求:(3) 零件平均长度的单侧置信上限和置信下限;

(4)总体方差的单侧置信上限和置信下限.

(置信水平为**0.9**)