第七章 假设检验

应用数学学院　邓小艳

假 设 检 验

§ 7-1 假设检验

§ 7-2 单个正态总体的假设检验

§ 7-3 两个正态总体的假设检验

§ 7-2 单个正态总体的假设检验

- 关于均值的假设检验
- 关于方差的假设检验

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本

1. σ^2 已知

检验统计量: $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Z检验	检验统计量的观察值 $z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	
H_0	H_1	H_0的拒绝域
$\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\{z \ge z_\alpha\}$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\{z \le -z_\alpha\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$	$\{\lvert z\rvert \ge z_{\alpha/2}\}$

例1： 某厂生产的炭灰砖据资料知其抗压强度

X~N(μ，1.21)； 现任取6块砖抗压强度分别为：

32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03， 问：是否可

以认为这批砖的平均抗压强度为**32.50**（kg/m^2）？

(α =0. 05)

解析： 检验假设 $H_0: \mu = 32.50,\ H_1: \mu \neq 32.50$

(这是方差已知关于均值的双边检验)

解: (1) 检验假设 $H_0: \mu = 32.50,\ H_1: \mu \neq 32.50$ (双边检验)

(2) 检验统计量: $Z = \dfrac{\overline{X} - 32.50}{\sigma / \sqrt{n}}$

(3) 拒绝域

$$|Z| = \left| \frac{\overline{X} - 32.50}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

(4) 代入样本值作结论

由题可得: $\bar{x} = 31.13, \sigma = \sqrt{1.21} = 1.1, n = 6$

$$\therefore |Z| = \left| \frac{\bar{x} - 32.50}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{31.13 - 32.50}{1.1 / \sqrt{6}} \right| = 3 > 1.96 \quad \text{故拒绝} H_0$$

例2：某厂生产的某燃料推进器的燃烧率服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$， $\mu=40\,cm/s$， $\sigma=2cm/s$，现用新方法生产了一批推进器，从中随机取n=25只，测得燃烧率的样本均值为 $\bar{x}=41.25cm/s$，设在新方法下总体均方差仍为2cm/s，问用新方法生产的推进器的燃烧率是否较以往生产的推进器的燃烧率有显著的提高？(取显著性水平 $\alpha=0.05$)

解析：检验假设 $H_0:\mu\le\mu_0=40,\ H_1:\mu>\mu_0=40$

(这是方差已知关于均值的右边检验)

解: (1) 检验假设 $H_0: \mu \le \mu_0 = 40,\ H_1: \mu > \mu_0 = 40$ (右边检验)

(2) 检验统计量: $Z = \dfrac{\bar{X} - 40}{\sigma / \sqrt{n}}$

(3) 拒绝域 $z = \dfrac{\bar{x} - 40}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_{\alpha} = z_{0.05} = 1.645$

(4) 代入样本值作结论

由题可得: $\bar{x} = 41.25, \sigma = 2, n = 25, \mu_0 = 40$

$$z = \frac{41.25 - 40}{2 / \sqrt{25}} = 3.125 > 1.645$$

故拒绝H_0，即认为 α=0.05时，新方法生产的推进器的燃烧率较以往生产的有显著提高。

2. σ^2 未知

检验统计量: $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

t检验	检验统计量的观察值 $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	
H_0	H_1	H_0的拒绝域
$\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\{t \ge t_\alpha(n-1)\}$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\{t \le -t_\alpha(n-1)\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$	$\{\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)\}$

例3：一化学制品制备过程一天生产的化学制品产量(以吨计)近似服从正态分布，当设备运转正常时一天产量的均值为800吨，测得上周5天的产量分别为785, 805, 790, 790, 802.问是否可以认为日产量的均值显著小于800.(取 $\alpha=0.05$)

解析：检验假设$H_0: \mu \geq \mu_0 = 800$, $H_1: \mu < \mu_0 = 800$

这是方差未知，关于均值的左边检验

解：(1) 检验假设 $H_0: \mu \geq \mu_0 = 800,\ H_1: \mu < \mu_0 = 800$

(2) 检验统计量 $\mathrm{t} = \dfrac{\bar{X} - 800}{s/\sqrt{n}}$

(3) 拒绝域 $\left\{ t = \dfrac{\bar{x} - 800}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha}(n-1) = -t_{0.05}(4) = -2.1318 \right\}$

(4) 代入样本值作结论

由题可得：$\bar{x} = 794.4, s = 8.6197$

$$\therefore t = \frac{794.4 - 800}{8.6197/\sqrt{5}} = -1.4527 > -2.1318$$

故接受 H_0，即认为 α=0.05时，日产量均值不是显著小于800。

例4： 某种元件的寿命X(以小时计)服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$， μ， σ^2均未知，现测得16只元件的寿命如下：159, 280, 101, 212, 224, 379, 179, 264, 222, 362, 168, 250, 149, 260, 485, 170，问是否有理由认为元件的平均寿命大于225小时(α=0.05)？

§ 7-2 单个正态总体的假设检验

- 关于均值的假设检验
- 关于方差的假设检验

1、双边检验

检验假设: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

分析：H_0为真,则 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0为真}{\sim} \chi^2(n-1)$

当χ^2的值太大或太小，都说 明$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$，应拒绝H_0

$$\therefore P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = \mathrm{P}_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left\{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right) \cup \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right)\right\} = \alpha$$

即：$\mathrm{P}_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right\} + \mathrm{P}_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right\} = \alpha$

$$k_1 = \chi^2_{1\text{-}\alpha/2}(n-1) \qquad k_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

拒绝域为：$\left\{\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1\text{-}\alpha/2}(n-1) \text{ 或} \chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}$

2、左边检验

检验假设:$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$

分析:H_0为真$\Leftrightarrow\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\mathrm{k}$

故取适当的k,当$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>k$时，接受$H_0$;

当$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq k$时，拒绝$H_0$;

$$\therefore P\{拒绝H_0\,|\,H_0为真\}=\mathrm{P}_{\sigma^2\geq\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq k\right\}\leq\mathrm{P}_{\sigma^2\geq\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leq k\right\}=\alpha$$

拒绝域为:$\left\{\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}$

3、右边检验

检验假设：$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$，$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

分析：H_0为真 $\Leftrightarrow \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \mathrm{k}$

故取适当的k，当$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < k$时，接受$H_0$；

$$当\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k时，拒绝H_0；$$

$$\therefore P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = \mathrm{P}_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k\right\} \le \mathrm{P}_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge k\right\} = \alpha$$

拒绝域为：$\left\{\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_\alpha^2(n-1)\right\}$

检验统计量: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

χ^2检验	检验统计量的观察值 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	
H_0	H_1	H_0的拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\left\{\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\ \text{或}\ \chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}$
$\sigma^2 \le \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\left\{\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha}(n-1)\right\}$
$\sigma^2 \ge \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\left\{\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}$

例5：以X表示由一信息源发出的二进制编码信息的位数，经R-J检验X服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，参数未知，今测得数据(以位计)：4532, 4606, 3511, 4201, 4392, 4639, 4021, 4722, 3470, 3100, 4212, 4165，取显著水平为α =0. 10.

检验假设：$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 160000$，$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 160000$

解:这是均值未知，关于方差的双边检验

(1) 检验统计量：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

(2) 拒绝域

在此$n = 12, \alpha = 0.10$, 故$\chi^2_{1\text{-}\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.95}(11) = 4.575,$

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.05}(11) = 19.675,$

故拒绝域为：

$$\left\{\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le 4.575 \text{或} \chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge 19.675\right\}$$

(3) 代入样本值作结论

由题可得: $s^2=270080.99, \sigma_0^2=160000$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=18.57$$

未落入拒绝域，故接受H_0，认为σ^2=160000。

例6：一温度计制造商声称，他的温度计读数的标准差不超过0.5℃，检验论文一组16只温度计，得样本标准差为0.7 ℃，设温度计读数总体近似服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均未知，试检验制造商的断言是否正确(α=0.05)？

假 设 检 验

§ 7-1 假设检验

§ 7-2 单个正态总体的假设检验

§ 7-3 两个正态总体的假设检验

§ 7-3 两个正态总体的假设检验

- 关于均值差的假设检验
- 关于方差比的假设检验

检验统计量: $t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ $\quad v=\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{1}{n_1-1}\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2+\dfrac{1}{n_2-1}\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$

t 检验	检验统计量的观察值 $t=\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	
H_0	H_1	H_0的拒绝域
$\mu_1 \le \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\{t \ge t_\alpha(v)\}$
$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\{t \le -t_\alpha(v)\}$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \ne \mu_2$	$\{\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(v)\}$

例7 某医院预购一种新的过滤器用来替换就的过滤器（安装在医院的空气调节器上，以减少空气中的细菌菌落数），分别使用新、旧过滤器，记录一周内各天一升空气中含的细菌菌落数，所得数据如下：

旧过滤器(总体X)	12.8	8.2	11.6	14.1	15.9	9.0	14.5
新过滤器(总体Y)	10.1	11.6	12.1	9.1	10.3	15.3	13.0

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ ，均未知，两样本独立，取显著性水平为α=0.05，检验假设：

$$H_0 : \mu_1 \le \mu_2, H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

解: (1) 检验统计量: $t=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

(2) 拒绝域

由题可得: $\bar{x}=12.3,\bar{y}=11.64,s_1^2=8.25,s_2^2=4.35$

$$v=\frac{(8.25+4.35)^2\times 6}{8.25^2+4.35^2}=10.95,[v]=10$$

故拒绝域为: $\left\{t=\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\geq t_{0.05}(10)=1.8125\right\}$

(3) 代入样本值作结论

$\because t=\dfrac{(12.30-11.64)}{\sqrt{\dfrac{8.25+4.35}{7}}}=0.49<1.8125$ 故接受H_0

§ 7-3 两个正态总体的假设检验

- 关于均值差的假设检验
- 关于方差比的假设检验

检验统计量: $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

F 检验	检验统计量的观察值 $F=s_1^2/s_2^2$	
H_0	H_1	H_0的拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$\{F\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}\cup\{F\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$\{F\ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)\}$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$\{F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)\}$

例10 下面分别给出某地区不同年龄组男子的血压(收缩压)的数据(mmHg计)。A组为45~59岁，B组为21~44岁，经R-J检验两样本依次来自总体$N(\mu_A,\sigma_A^2),N(\mu_B,\sigma_B^2)$，两样本独立，$\mu_A,\mu_B,\sigma_A^2,\sigma_B^2$均未知，取显著性水平为$\alpha$=0.1，试检验假设：$H_0:\sigma_A^2\le\sigma_B^2,H_1:\sigma_A^2>\sigma_B^2$

A组	160	105	120	168	150	130	120	140	110	106	
	140	165	137	107	136	174	108	149	158		
B组	100	130	120	138	110	110	115	134	120	122	110
	120	115	162	130	130	110	147	122	120	131	

解: **(1) 检验统计量:** $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

(2) 拒绝域

由题可得: $n_A=19, n_B=21, s_A^2=526.20, s_B^2=200.85$

故拒绝域为: $\left\{F=\dfrac{S_A^2}{S_B^2}\geq F_{0.1}(18,20)=1.81\right\}$

(3) 代入样本值作结论

$\because F=\dfrac{S_A^2}{S_B^2}=526.50/200.85=2.62>1.81$

故拒绝H_0