概率统计课件之一

第一章 随机事件及概率

主讲教师 邓小艳

随机事件及概率

§1-1 随机试验、样本空间

§1-2 随机事件

§1-3 随机事件的概率

§1-4 古典概率模型

§1-5 条件概率

§1-6 事件的独立性

例1:设全班60人，其中男生44人，女生16人，姓李的8人（男生6人，女生2人），在班上任抽1人，求下列事件的概率：

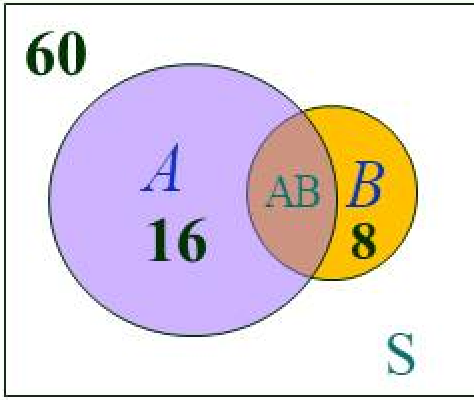
(1)抽到女生；(2)抽到的人姓李；(3)抽到姓李的女生；(4)已知抽到一人姓李，求他是女生的概率。

解：**E:从全班60人中任取1人，则:** $N(S) = C_{60}^{1} = 60$

设**A**表示事件“抽到女生”，**B**表示事件“抽到的人姓李”

(1) $N(A) = C_{16}^{1} = 16 \therefore P(A) = \dfrac{N(A)}{N(S)} = \dfrac{16}{60}$

(2) $N(B) = C_{8}^{1} = 8 \quad \therefore P(B) = \dfrac{N(B)}{N(S)} = \dfrac{8}{60}$



(3) **AB表示事件：“抽到姓李的女生”**

$N(AB) = C_{2}^{1} = 2 \therefore P(AB) = \dfrac{N(AB)}{N(S)} = \dfrac{2}{60}$

(4) **A|B表示事件：“已知抽到一人姓李，他是女生”**

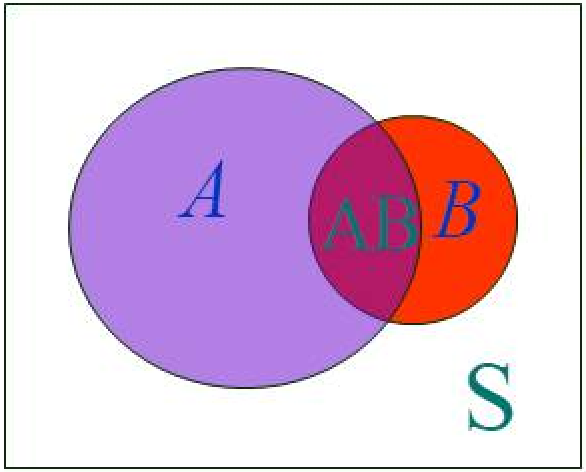
$$P(A \mid B) = \frac{N(AB)}{N(B)} = \frac{2}{8} = \frac{2/60}{8/60} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

一、条件概率

1、定义： 设A、B为两个随机事件，若P(B)>0，则称

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1)$$

称为事件B发生的条件下事件A发生的条件概率。



若已知事件B发生的条件下，要使A也发生，试验结果必是既在A中又在B中的样本点，即该点必属于AB. 因此，若已知B已发生，那么B变成了新的样本空间，于是 有(1).

$$P(A \mid B)=\frac{N(AB)}{N(B)}=\frac{N(AB)/N(S)}{N(B)/N(S)}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

2、性质

P(A|B)满足概率的一切性质

(1) $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$

(2) $P(S \mid B) = 1$

(3) 有限可加性、可列可加性

若 $A_i A_j = \Phi(i \neq j，i, j = 1, 2, \ldots)$ 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B) \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

(4) $P(\bar{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

(5) $P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1 / B) + P(A_2 / B) - P(A_1 A_2 / B)$.

3、条件概率P(A|B)的计算

(1) 改变样本空间的方法

(2) 利用定义

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad P(B)>0$$

例2：设m件产品中有n件不合格品，从中任取两件。求：在所取产品中有一件是不合格品的条件下，求另一件也是不合格品的概率.

解：基本事件总数：C_m^2 .设B表示事件：“所取产品中至少有一件不合格品”，A表示事件“另一件也是不合格品”

$$p(B)=\frac{N(B)}{N(S)}=\frac{C_n^2+C_n^1\times C_{m-n}^1}{C_m^2}$$

$$p(AB)=\frac{N(AB)}{N(S)}=\frac{C_n^2}{C_m^2}$$

$$\therefore p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{C_n^2}{C_n^2+C_n^1\times C_{m-n}^1}$$

由条件概率的定义 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

若已知$P(B)$，$P(A|B)$时，可以反求$P(AB)$.

即　**若$P(B)>0$,则: $P(AB)=P(B)P(A|B)$　　(2)**

将A、B的位置对调，有

若P(A)>0,则P(BA)=P(A)P(B|A)

$\because$ $P(AB)=P(BA)$

故　**P(A)>0 , 则 P(AB)=P(A)P(B|A)　　(3)**

(2)和(3)式都称为乘法公式，利用它们可计算两个事件的积事件的的概率

二、乘法公式

定理：设**P(B)>0**，则 $P(AB) = P(B)P(A \mid B)$

设**P(A)>0**，则 $P(AB) = P(A)P(B \mid A)$

可见 $P(AB) = P(B)P(A \mid B) = P(\mathrm{A})P(\mathrm{B} \mid A)$

推广:一般地，乘法公式可以推广到**n**个事件的积事件

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1A_2 \cdots A_{n-1})$$

$$p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1A_2)\cdots p(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$= p(A_1) \times \frac{p(A_1A_2)}{p(A_1)} \times \frac{p(A_1A_2A_3)}{p(A_1A_2)} \times \cdots \times \frac{p(A_1A_2\cdots A_n)}{p(A_1A_2\cdots A_{n-1})}$$

$$= p(A_1A_2\cdots A_n)$$

例3：有10张戏票，其中3张甲票，10个人依次从中任取一票。求第四人才得甲票的概率。

解：基本事件总数：$10!$

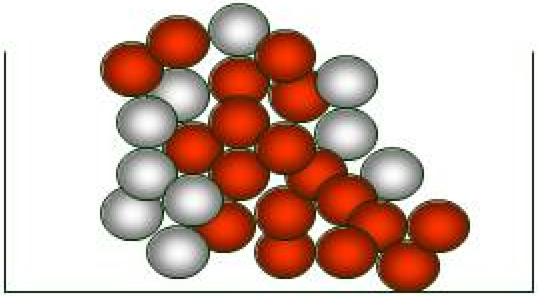
设 A_k **表示事件："第k人取得甲票"，则** $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$ **表示事件："第四人才得甲票"**

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(\overline{A_3} \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})P(A_4 \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{8}$$

例4：（波里亚罐子模型）

设袋中装有r只红球，t只白球，每次从袋中任取一只，观察其颜色后放回，并放入a只与所取出的那只球颜色相同的



*t*个白球, *r*个红球

球，若从袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

解：设 A_k 表示事件“第k次取到红球”，则$A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}$表示事件“第一、二次取到红球且第三、四次取到白球”

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(\overline{A_3} \mid A_1A_2)P(\overline{A_4} \mid A_1A_2\overline{A_3})$$

$$= \frac{r}{t+r} \times \frac{r+a}{t+r+a} \times \frac{t}{t+r+2a} \times \frac{t+a}{t+r+3a}$$

当 $a>0$ 时，由于每次取出球后会增加下一次也取到同色球的概率. 这是一个传染病模型. 每次发现一个传染病患者，都会增加再传染的概率.

例5：1件次品与4件正品混在了一起，需要逐个进行检验将次品找出来.（1）求至少需要检验3次才能找出这件次品的概率;（2）求这件次品在第3次检验时得到的概率.

解：以G_1, G_2 分别记事件第一次，第二次检验时得到的是正品，以D_3记事件在第3次检验时得到的是次品，则有

（1）$P\{\text{至少需检验3次才能找出次品}\} = P(G_1G_2)$

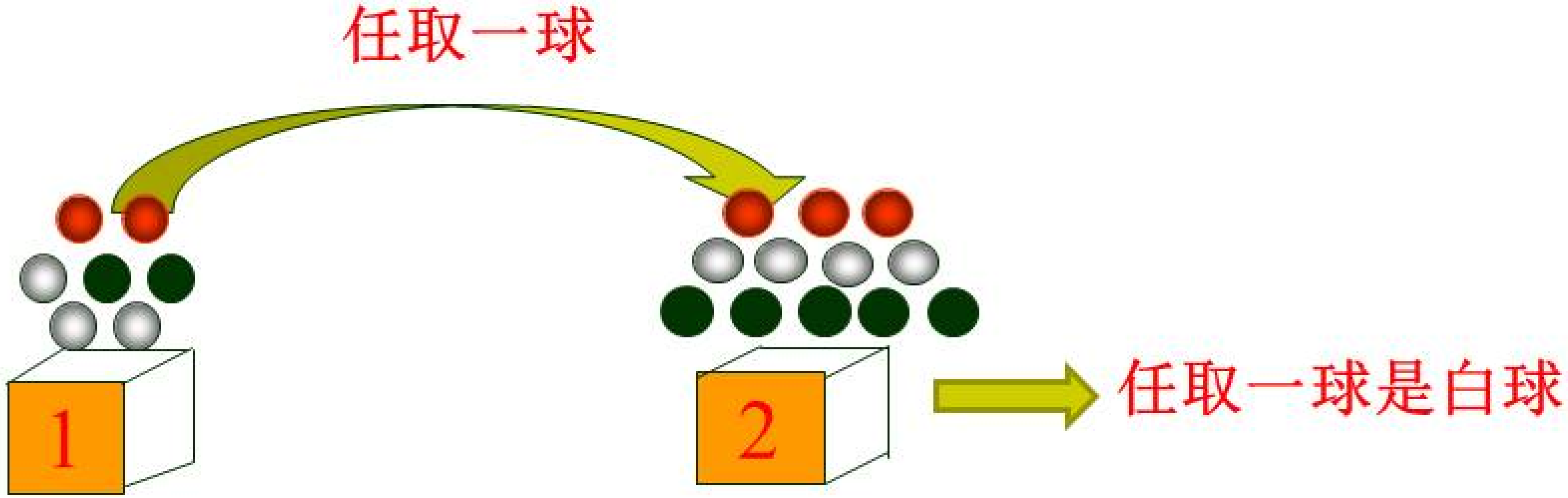
$$= P(G_2/G_1)P(G_1) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = 0.6$$

（2）$P\{\text{在第3次检验时找出次品}\} = P(G_1G_2D_3)$

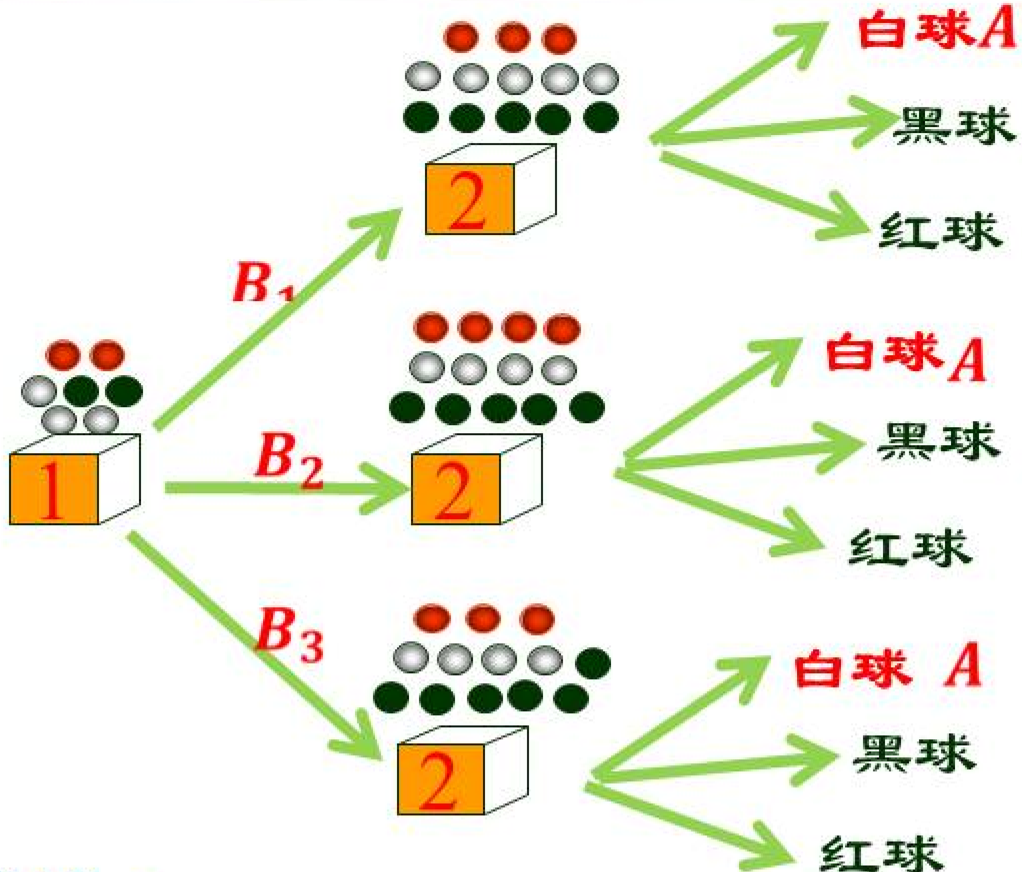
$$= P(D_3/G_1G_2)P(G_2/G_1)P(G_1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = 0.2$$

三、全概率公式

引例：从装有3个白球，2个黑球，2个红球的盒子中任取一球，把它移放到装有4个白球，5个黑球，3个红球的盒子中，求从第二个盒子中任取一球为白球的概率。



分析：设B1：“从第一个盒子任取一球为白球”；B2：“从第一个盒子任取一球为黑球”；B3：“从第一个盒子任取一球为红球”.A：“从第二个盒子任取一球为白球”



可以发现：

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S \text{且} B_iB_j = \Phi$$

$$A = B_1A \cup B_2A \cup B_3A \text{且} B_1\mathrm{A}、B_2A、B_3A \text{互斥}$$

$$P(A) = P(B_1A \cup B_2A \cup B_3A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

上例所用的方法是概率论中常用的一种方法，

为求较复杂事件A的概率，往往可先把它分解成两个（或若干个）互不相容的较简单事件之和，求出这些简单事件的概率，再利用概率的有限可加性，即得到所要求的复杂事件的概率。

将此例中所用的方法推广到一般的情形，就得到在概率计算中常用的全概率公式.

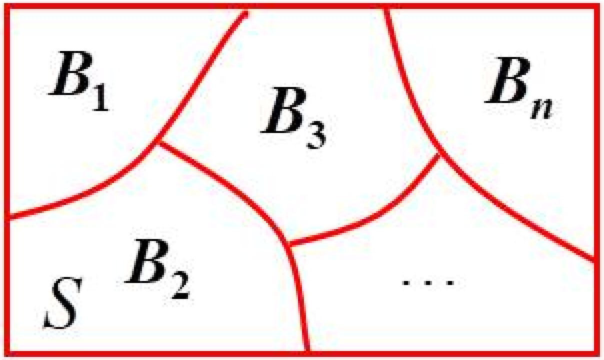
$$P(A)=P(AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n)$$
$$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k)$$

1、样本空间的划分

定义：若E的一组事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 满足：

①互不相容：$B_iB_j = \Phi$

②完备性：$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$



称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间的一个划分(或完备事件组)

<注>若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间S的一个划分，那么在每次试验中，事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中必有一个且仅有一个发生。

2、全概率公式

定理：若$B_1, B_2, \cdots, B_n$为样本空间S的一个划分，且$P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，则任一事件A有：

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A|B_k)$$

$$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$

证明 因为 $A = AS = A(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)$

$$= AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_n$$

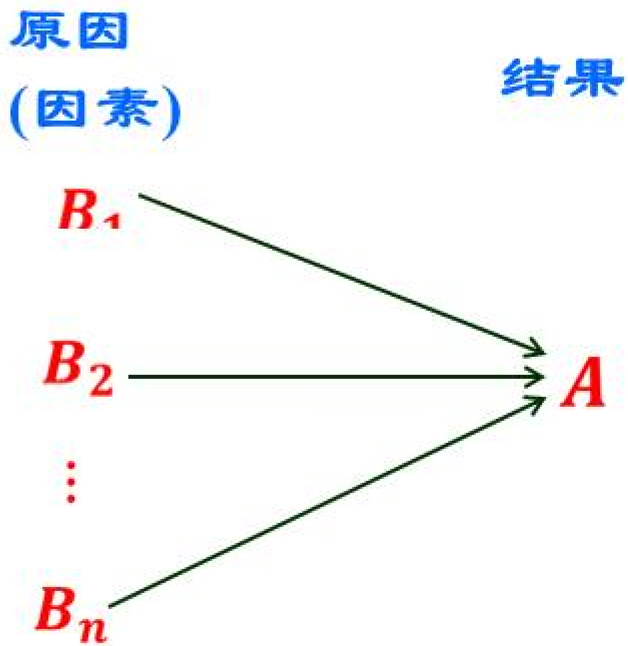
并且 $AB_i \cap AB_j = \Phi, (i \neq j)$,所以

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n)$$

$$= P(B_1)P(A \mid B_1) + \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

全概率公式的应用

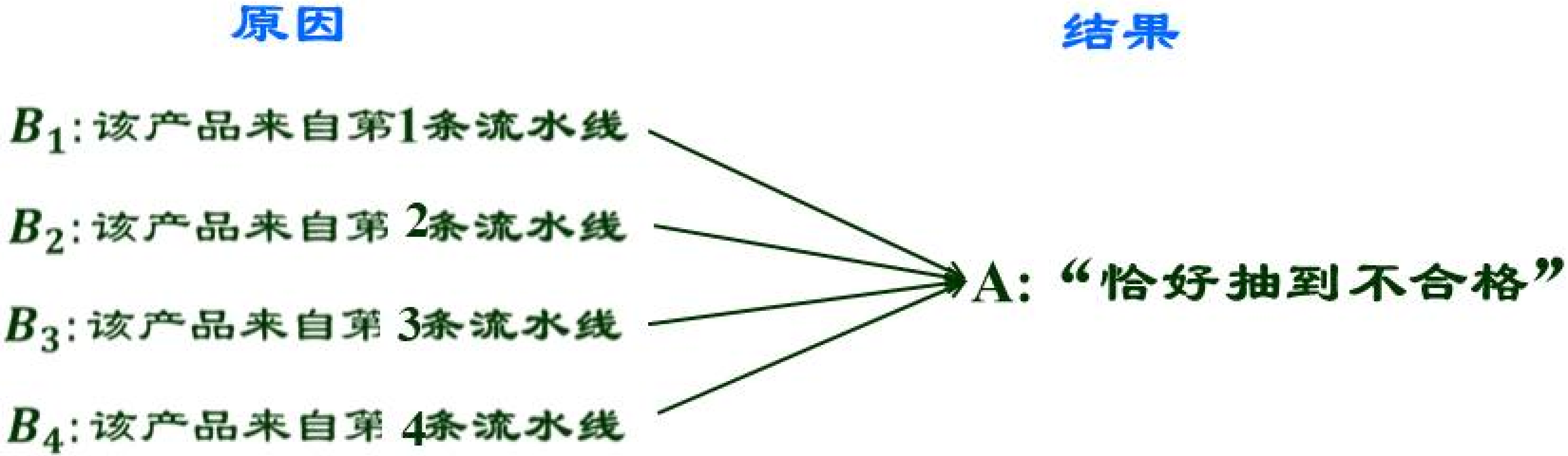


且 $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S, B_iB_j = \Phi, i, j = 1,2,\cdots n$

(1) 求 $P(A)=?$ （全概率公式）

当事件A的发生受到n个因素的影响（或由n个原因引起），且这n个因素是S的一个划分，那么已知原因求结果用全概率公式

例5：设某工厂有四条流水线生产同一件产品，该条流水线的产品分别占总产品的15%，20%，30%，35%，又这四条流水线的不合格品率依次为0.05，0.04，0.03，0.02，现从出厂产品中任取一件，问恰好抽到不合格品的概率。



例5：设某工厂有四条流水线生产同一件产品，该条流水线的产品分别占总产品的15%，20%，30%，35%，又这四条流水线的不合格品率依次为0.05，0.04，0.03，0.02，现从出厂产品中任取一件，问恰好抽到不合格品的概率。

例5：解：设B_k："该产品来自第k条流水线"，A："从出厂产品中任取一件恰好抽到不合格品"，则由题知：

$P(B_1)=15\%$　$P(B_2)=20\%$　$P(B_3)=30\%$　$P(B_4)=35\%$.

$P(A|B_1)=0.05$，$P(A|B_2)=0.04$，$P(A|B_3)=0.03$，$P(A|B_4)=0.02$.

由全概率公式得：

$$P(A)=\sum_{k=1}^{4}P(B_k)P(A|B_k)=0.15\times0.05+0.2\times0.04+0.3\times0.03+0.35\times0.02$$

$$=0.0315$$

例6：有一台用来检验产品质量的仪器，已知一件次品经检验被认为是次品的概率为0.99，而一件正品经检验被认为是次品的概率为0.005，已知产品的次品率为4%，求：(1)一产品经检验被认为是次品的概率；

原因　　　　　　　　　　　　结果

B ：该产品确实是次品

$\bar{B}$ ：该产品确实是正品

A:“该产品经检验认为是次品”

例6：有一台用来检验产品质量的仪器，已知一件次品经检验被认为是次品的概率为0.99，而一件正品经检验被认为是次品的概率为0.005，已知产品的次品率为4%，求：(1)一产品经检验被认为是次品的概率；

解：设B："产品确实为次品"，A："该产品经检验被认为是次品".则

$P(B)=4\%$，$P(\bar{B})=96\%$，$P(A|B)=0.99$，$P(A|\bar{B})=0.005$

(1)由全概率公式得：

$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.04\times0.99+0.96\times0.005=0.0444$

例6：有一台用来检验产品质量的仪器，已知一件次品经检验被认为是次品的概率为0.99，而一件正品经检验被认为是次品的概率为0.0005，已知产品的次品率为4%，求：(1)一产品经检验被认为是次品的概率；(2)若一产品经检验被认为是次品，求它确实是次品的概率。

原因　　　　　　　　结果

B ：该产品确实是次品

$\overline{B}$ ：该产品确实是正品

A：“该产品经检验认为是次品”

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

四、贝叶斯公式

定理：若A任一事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为样本空间S的一个划分，则：

$$P(B_k|A)=\frac{P(AB_k)}{P(A)}=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

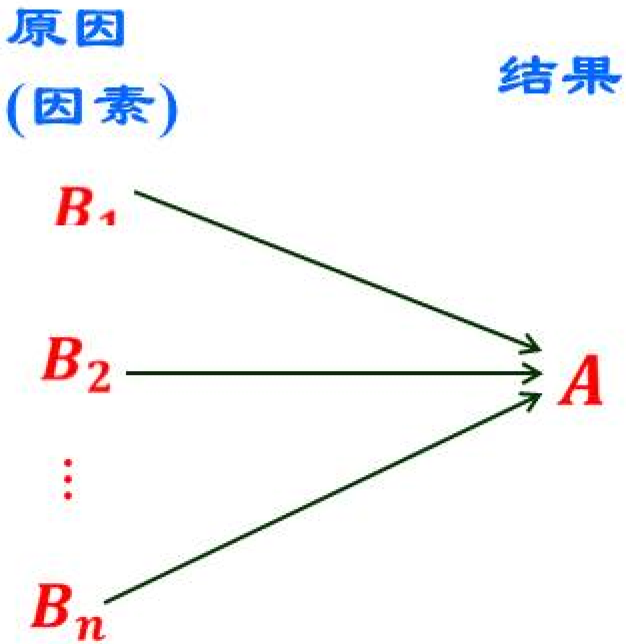
该公式于1763年由贝叶斯 (Bayes) 给出. 它是在观察到事件A已发生的条件下，寻找导致A发生的每个原因的概率.

贝叶斯公式在实际中的应用

- 可以帮助确定引起某结果事件A发生的最可能原因.
- 可以对事件B_i发生的概率加以修正.

在贝叶斯公式中，$P(B_i)$和$P(B_i \mid A)$分别称为原因事件B_i的先验概率和后验概率，$P(B_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$是在没有进一步信息（不知道事件A是否发生）的情况下，人们对事件B_i发生可能性大小的认识.当有了新的信息（事件A发生了），人们对事件B_i发生可能性大小有了新的认识，即得到新的概率$P(B_i \mid A)$，所以$P(B_i \mid A)$也称为修正概率.

全概率与贝叶斯公式的应用



$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S,$$
$$B_i B_j = \Phi,\ i,\ j = 1,2,\cdots n$$

(1) 求$P(A)=?$ （全概率公式）

(2) 求$P(B_k | A)=?$ （贝叶斯公式）

当事件A的发生受到n个因素的影响（或由n个原因引起），且这n个因素是S的一个划分，那么已知原因求结果用全概率公式，已知结果求由哪一个原因引起，用贝叶斯公式。

例6：有一台用来检验产品质量的仪器，已知一件次品经检验被认为是次品的概率为0.99，而一件正品经检验被认为是次品的概率为0.0005，已知产品的次品率为4%，求：(1)一产品经检验被认为是次品的概率；(2)若一产品经检验被认为是次品，求它确实是次品的概率。

解：设B："产品确实为次品"，A："该产品经检验被认为是次品"，则

$p(B)=4\%$，$p(\bar{B})=96\%$，$p(A|B)=0.99$，$p(A|\bar{B})=0.005$

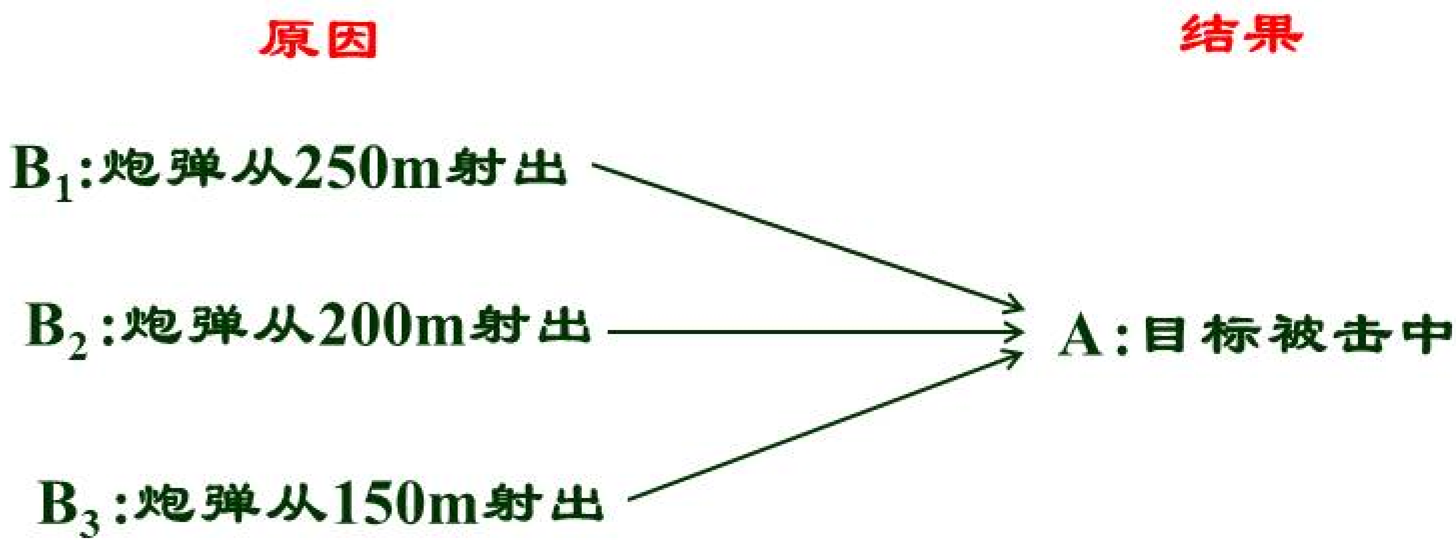
(1) 由全概率公式得：

$$p(A)=p(B)p(A|B)+p(\bar{B})p(A|\bar{B})=0.04\times0.99+0.96\times0.005=0.0444$$

(2) 由贝叶斯公式得：

$$p(B|A)=\frac{p(B)p(A|B)}{p(B)p(A|B)+p(\bar{B})p(A|\bar{B})}=\frac{0.04\times0.99}{0.0444}\approx0.892$$

例7：在炮战中，在距离目标250m，200m，150m处射击的概率分别为：0.1，0.7,0.2，而在各处射击时命中目标的概率分别为0.05,0.1，0.2，现在已知目标被击中，求炮弹从250m处射来的概率。



例7：在炮战中，在距离目标250m，200m，150m处设计的概率分别为：0.1，0.7,0.2，而在各处射击时命中目标的概率分别为0.05,0.1，0.2，现在已知目标被击中，求炮弹从250m处射来的概率。

解：设B_1:“炮弹从250m射出”，B_2:“炮弹从200m射出”，B_3:“炮弹从150m射出”，A：“目标被命中”，则：

$$P(B_1)=0.1 \quad P(B_2)=0.7 \quad P(B_3)=0.2$$

$$P(A|B_1)=0.05 \quad P(A|B_2)=0.1 \quad P(A|B_3)=0.2$$

由贝叶斯公式得：

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}\approx 0.0435$$

已知目标被击中，炮弹从250m处射来的概率为0.0435

例8：袋中装有m枚正品硬币，n枚次品硬币（次品的两面都刻有币值），在袋中任取一枚，将它投掷r次。求：

(1)每次都出现币值的概率；

(2)已知每次都出现币值，求这枚硬币是正品的概率。

原因

结果

B:抽到正品硬币

A:将硬币投掷r次，每次都出现币值

$\overline{B}$:抽到次品硬币

例8：袋中装有m枚正品硬币，n枚次品硬币（次品的两面都刻有币值），在袋中任取一枚，将它投掷r次。求：（1）每次都出现币值的概率；（2）已知每次都出现币值，求这枚硬币是正品的概率。

解：设B:"从袋中任取一枚硬币为正品硬币"，A："将硬币投掷r次，每次都出现币值"，则：

$$P(B)=\frac{m}{m+n} \qquad P(\overline{B})=\frac{n}{m+n}$$

$$P(A|B)=(1/2)^r \qquad P(A|\overline{B})=1$$

(1) 由全概率公式得：

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{m+2^r}{(m+n)2^r}$$

例8：袋中装有m枚正品硬币，n枚次品硬币（次品的两面都刻有币值），在袋中任取一枚，将它投掷r次。求：(1)每次都出现币值的概率；(2)已知每次都出现币值，求这枚硬币是正品的概率。

解：(2) 由贝叶斯公式得：

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\frac{m}{m+2^r n}$$

小结

- 条件概率的定义与性质
- 乘法公式
- 全概率公式、贝叶斯公式