

# 微分方程建模

主讲教师：张秋燕

- ◆ **2003 A SARS的传播**
- ◆ **2005 A 长江水质的评价和预测**
- ◆ **2006 B 艾滋病疗法的评价及疗效的预测**
- ◆ **2007 A 中国人口增长预测**
- ◆ **2011 A 城市表层土壤重金属污染分析**
- ◆ **2014 A 嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略**
- ◆ **2018 A 高温作业专用服装设计**

# 概 述

- **第一部分：微分方程的理论知识**
- **第二部分：微分方程模型及案例**

# 第一部分：微分方程理论知识

- ◆ 1.1 微分方程的基本概念
- ◆ 1.2 可分离变量的微分方程
- ◆ 1.3 一阶线性微分方程
- ◆ 1.4 可降阶的高阶微分方程

**例1** 在一次谋杀发生后，尸体的温度从原来的 $37^{\circ}\text{C}$ 按照牛顿冷却定律开始下降，假设两小时后尸体温度变为 $35^{\circ}\text{C}$ ，并且假定当时屋内空间的温度保持 $20^{\circ}\text{C}$ 不变。警察在案发当天下午四点发现尸体，尸体的体温是 $30^{\circ}\text{C}$ ，现判断谋杀是何时发生的？

**加热与冷却定律：**物理学家牛顿（Newton）曾提出，一块热的物体，其温度下降的速度是与它自身温度同外界温度的差值成正比。同样，一块冷的物体，其温度上升的速度是与它自身温度同外界温度的差值成正比。

解：当谋杀事件发生后，尸体的温度从原来的  $37^{\circ}\text{C}$  按照冷却定律开始变凉. 假设在时间  $t$  时，尸体的温度为  $\theta(t)$  温度的变化率  $\frac{d\theta}{dt}$  与  $\theta - 20$  成正比，可得

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - 20) \quad (1)$$

其中  $k$  是比例系数 ( $k > 0$ ) 由于  $\frac{d\theta}{dt}$  是单调减少的，即  $\frac{d\theta}{dt} < 0$ . 初始条件为： $\theta|_{t=0} = 37$ . (2)

(1)式分离变量 
$$\frac{d\theta}{\theta - 20} = -k dt$$

两边积分可得 
$$\ln|\theta - 20| = -kt + c_1$$

即 
$$\theta = 20 + ce^{-kt}$$
. 由初始条件(2)可得  $c = 17$ .

所以  $\theta = 20 + 17e^{-kt}$

又由  $\theta|_{t=2} = 35$  可得  $k = 0.063$

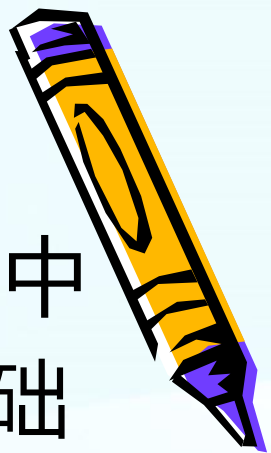
即  $\theta = 20 + 17e^{-0.063t}$

当  $\theta = 30$  , 可解得  $t \approx 8.4$  小时

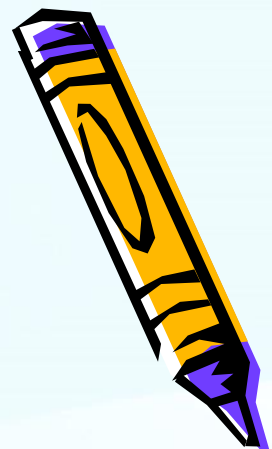
于是, 谋杀案一定发生在发现尸体时的前8.4小时, 即8小时24分钟。所以, 谋杀是在上午7点36分发生的。

原来是这样破案的O(n\_n)O哈哈~

**例2** (饮食与体重模型)某人每天从食物中获取 $10500\text{J}$ 热量，其中 $5040\text{J}$ 用于基础代谢。他每天的活动强度，相当于每千克体重消耗 $67.2\text{J}$ 。此外，余下的热量均以脂肪的形式储存起来，每 $42000\text{J}$ 可转化为 $1\text{kg}$ 脂肪。问：这个人的体重是怎样随时间变化的，会达到平衡吗？







解：依题意，设在 $t$ 时刻的体重为 $w(t)$

进食增加 $10500/42000=0.25\text{kg}$

基础代谢 $5040/42000=0.12\text{kg}$

活动消耗 $67.2w/42000=0.0016w\text{kg}$

$$\therefore \frac{dw}{dt} = 0.25 - 0.12 - 0.0016w$$

$$\therefore \frac{dw}{dt} + 0.0016w = 0.13$$

$$\text{解得 } w(t) = e^{-\int 0.0016 dt} \left( \int 0.13 e^{\int 0.0016 dt} dt + C \right)$$

$$= e^{-0.0016t} \left( \int 0.13 e^{0.0016t} dt + C \right)$$

$$= e^{-0.0016t} \left( \frac{0.13}{0.0016} e^{0.0016t} + C \right)$$

$$= 81.25 + Ce^{-0.0016t}$$



## 第二部分 微分方程模型及案例

当我们描述实际对象的某些特性随时间（空间）而演变的过程、分析它的变化规律、预测它的未来形态、研究它的控制手段时。通常要建立对象的动态模型。

在许多实际问题中，当直接导出变量之间的函数关系较为困难，但导出包含未知函数的导数或微分的关系式较为容易时，可用建立**微分方程模型**的方法来研究该问题。

## 2.1 微分方程模型

### 一、微分方程建模的对象

**涉及“改变”、“变化”、“增加”、“减少”、“衰变”、“边际”、“速度”、“运动”、“追赶”、“逃跑”……等等词语的确定性连续问题。**

### 二、微分方程建模的基本方法

#### (1) 根据规律列方程

**利用数学、物理、化学等学科中的定理或经过实验检验的规律等来建立微分方程模型。如：质量守恒定律、牛顿运动定律、物质放射性规律、曲线的切线性质等等。**

## 2.1 微分方程模型

### (2) 微元分析法

利用已知的定理与规律寻找微元之间的关系式，与第一种方法不同的是对微元而不是直接对函数及其导数应用规律。

### (3) 模拟近似法

在生物、经济等学科的实际问题中，许多现象的规律性不很清楚，即使有所了解也是极其复杂的，建模时在不同的假设下去模拟实际的现象，建立能近似反映问题的微分方程，然后从数学上求解或分析所建方程及其解的性质，再去同实际情况对比，检验此模型能否刻画、模拟某些实际现象。

## 二、微分方程建模的基本步骤

- 1、**寻找改变量** 一般来说微分方程问题都遵循这样的文字等式

**变化率（微商）=单位增加量--单位减少量**

**等式通常是利用已有的原则或定律来建立。**

- 2、**对问题中的特征进行数学刻画；**
- 3、**按照内在规律或用微元法等建立微分方程；**
- 4、**确定微分方程的定解条件（初边值条件）；**
- 5、**求解或讨论方程（数值解或定性理论）；**
- 6、**模型和结果的讨论与分析。**

## 2.2 微分方程的一些案例

- 人口问题
- 流入—流出问题
- 车间空气的清洁
- 放射性核废料问题

# 人口模型


## 1 问题的提出

人口、工业化的资金、粮食、不可再生资源、环境污染是人类在地球上生存所面临的五大问题，而人口问题是这五大问题之首。

人口在不断的增长，其增长有无规律可循？

目标：预测人口发展趋势；控制人口增长。

资料报告，公元前世界人口已接近3亿（粗略计）。近一千年人口统计比较精细。看下图。



| 年   | 1625 | 1830 | 1930 | 1960 | 1974 | 1987 | 1999 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| 人口亿 | 5    | 10   | 20   | 30   | 40   | 50   | 60   |

我国人满为患的情况更令人担忧。据资料记载：

| 年  | 1908 | 1933 | 1953 | 1964 | 1982 | 1990 | 2000  |
|----|------|------|------|------|------|------|-------|
| 人口 | 3.0  | 4.7  | 6.0  | 7.2  | 10.3 | 11.3 | 12.95 |

联合国从1988年起，把7月11日定为**世界人口日**。



认识人口数量的变化规律，建立人口模型，作出较准确的预报，是有效控制人口增长的前提，下面介绍两个最基本的人口模型。

## 2. 模型1 （Malthus模型）

18世纪末，英国人Malthus(马尔萨斯)在分析了百余年的人口出生与死亡情况的资料后发现，人口净增长率基本上是一常数（人口净增长率=出生率-死亡率，也就是单位时间内人口增长量与当时人口数成正比），因而提出了著名的**人口指数增长模型**。

## 2.1 模型假设

- (1) 设时刻 $t$ 的人口为 $N(t)$ ,把 $N(t)$ 当做连续的变量
- (2) 人口净增长率 $r$ 为常数

## 2.2 建立模型

按照Malthus的理论, 在  $t$  到  $t + \Delta t$  内人口的增长量为:  $N(t + \Delta t) - N(t) = N(t)r\Delta t$

令  $\Delta t \rightarrow 0$  , 则得到微分方程

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)r \quad (1)$$

若记初始时刻 ( $t \Rightarrow 0$ )的人口为  $N_0$  , 则有

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = N(t)r \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

(2)

Malthus模型

## 2.3 模型求解

解得

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

## 2.4 模型分析

马尔萨斯模型的一个显著特点：**种群数量翻一番所需的时间是固定的。**

令种群数量翻一番所需的时间为  $T$ ，则有：

$$2N_0 = N_0 e^{rT}$$

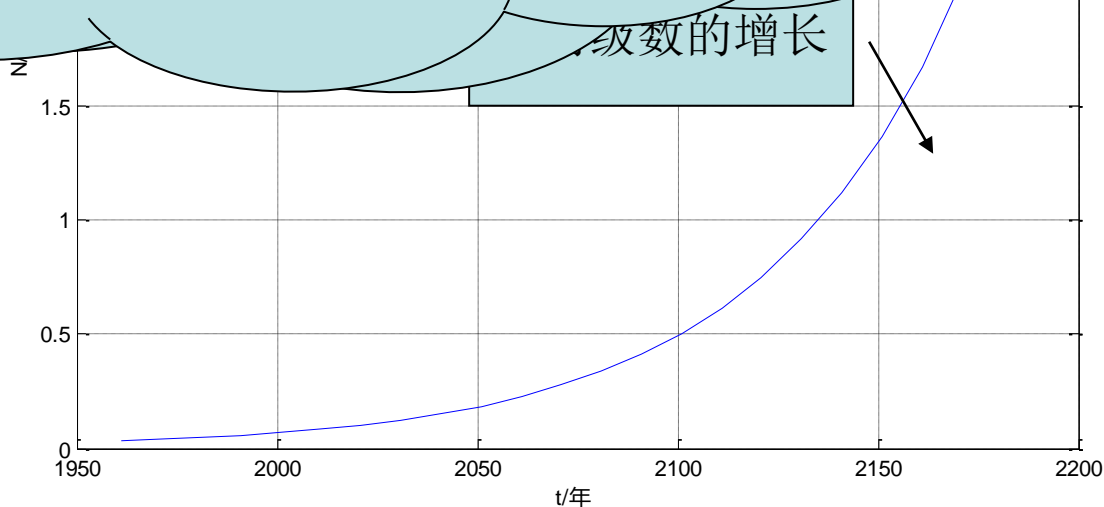
故

$$T = \frac{\ln 2}{r}$$

# 模型检验

比较历年数据与统计资料, 6年观测人口增长的实际情况  
以马尔萨斯模型的预报结果对比, 发现人口增长与模型预测  
按数为10.6模型  
统计  
年鉴部集  
量70年  
排成

Malthus模型实际上只有在群体总  
所以Malthus模型假设的人口  
净增长率不可能始终保持常数,  
它应当与人口数量有关。



## 2.5 模型修改

分析表明，以上这些现象的主要原因是随着人口的增长，自然资源，环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著。当人口较少时（相对资源而言），人口的净增长率可以视为常数，而当人口增加到一定数量以后，这个增长率就要随着人口的增加而减少。为了使人口预报特别是长期预报更好地符合实际情况，必须修改Malthus 模型中的人口净增长率为常数的假设。

### 3. 模型2 (Logistic模型)

人口净增长率应当与人口数量有关，即： $r=r(N)$

(3)式还有另一解释，由于空间和资源都是有限的，不可能供养无限增长的种群个体，当种群数量过多时，由于人均资源占有率的下降及环境恶化、疾病增多等原因，出生率将降低而死亡率却会提高。

$$r(N) = r - sN (r > 0, s > 0) \quad (3)$$

自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量— $N_m$

(4)式的一个解释为人口净增长率 $r(N)$ 与人口尚未实现部分 $(1-N/N_m)$ 成正比，比例系数为常数 $r$ 。

(3) , 得

$$r(N) = r \left( 1 - \frac{N}{N_m} \right) \quad (4)$$

## 3.1 模型假设

- (1) 设时刻 $t$ 的人口为 $N(t)$ ,把 $N(t)$ 当做连续的变量
- (2) 人口净增长率为  $r(N) = r(1 - N / N_m)$
- (3)  $N_m$ 表示自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量

(5)式中,  $rN$ 体现 人口自身增长趋势, 因子 $(1-N/N_m)$ 则体现了资源和环境对人口增长的阻滞作用, 显然,  $N$ 越大,  $rN$ 越大, 而 $1-N/N_m$ 越小, 人口增长是两个因子共同作用的结果, 这也符合实际情况。

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{N_m})N \quad (5)$$

仍给出与Malthus模型相同的初始条件

$$N|_{t=0} = N_0 \quad (6)$$

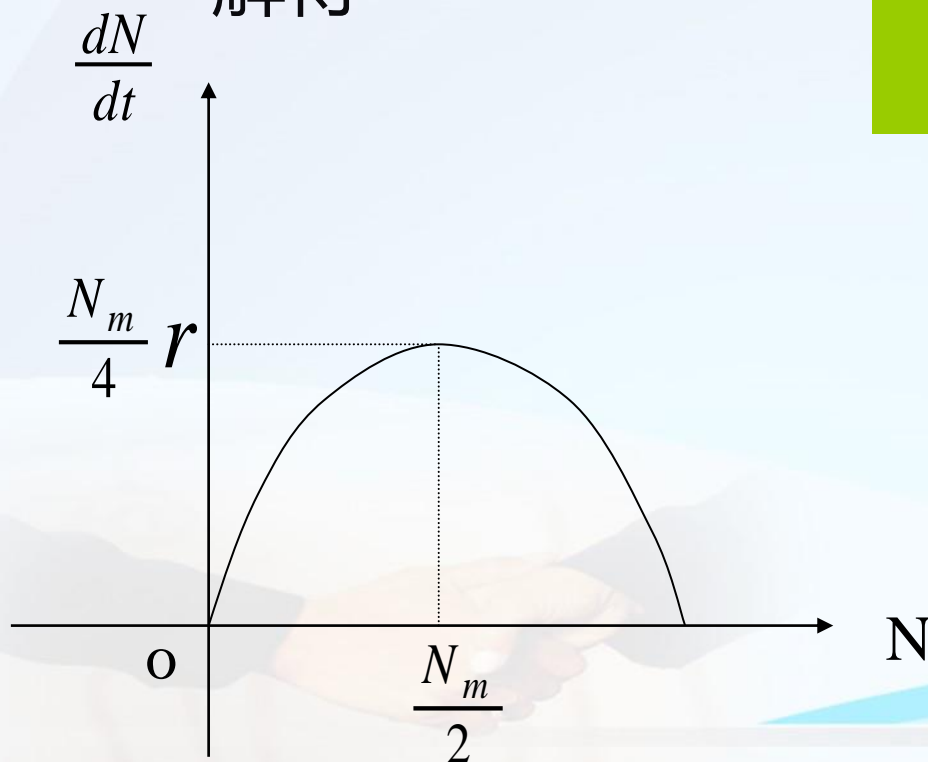
即

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{N_m})N \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

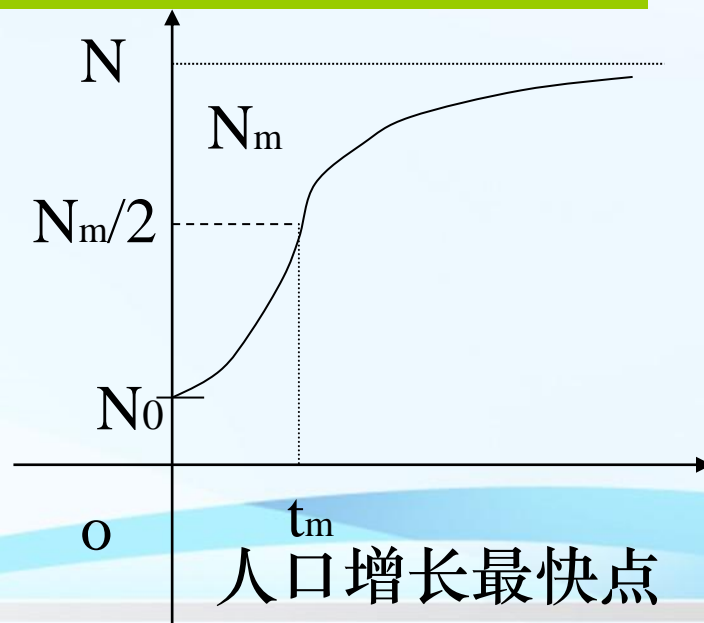
(7) Logistic模型

### 3.3 模型求解

解得



$$N(t) = \frac{N_m}{1 + \left( \frac{N_m}{N_0} - 1 \right) e^{-rt}}$$





## 3.4 模型分析

当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $N(t) \rightarrow N_m$

- 结论： 在人口总数达到极限值 $N_m$ 的一半以前是加速生长期，过了这一点以后，增长率逐渐减小，并且趋于零。

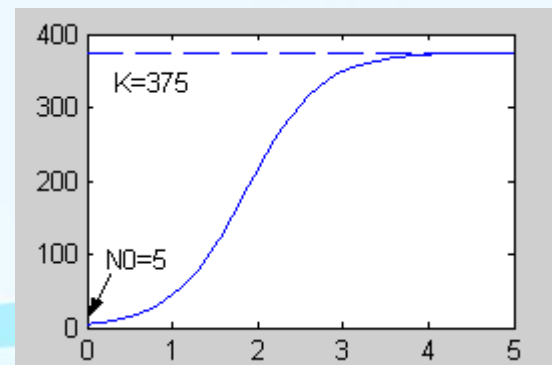
## 模型检验

用Logistic模型来描述种群增长的规律效果如何呢？1945年克朗比克（Crombic）做了一个人工饲养小谷虫的实验，数学生物学家高斯（E·F·Gauss）也做了一个原生物草履虫实验，实验结果都和Logistic曲线十分吻合。

大量实验资料表明用Logistic模型来描述种群的增长，效果还是相当不错的。例如，高斯把5只草履虫放进一个盛有 $0.5\text{cm}^3$ 营养液的小试管，他发现，开始时草履虫以每天230.9%的速率增长，此后增长速度不断减慢，到第五天达到最大量375个，实验数据与 $r=2.309$ ， $a=0.006157$ ， $N(0)=5$ 的Logistic曲线：

$$N(t) = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}}$$

几乎完全吻合，见右图



## Malthus模型和Logistic模型的总结

- Malthus模型和Logistic模型均为对微分方程  $\frac{dN}{dt} = rN$  所作的模拟近似方程。前一模型假设了种群增长率 $r$ 为一常数，（ $r$ 被称为该种群的内禀增长率）。后一模型则假设环境只能供养一定数量的种群，从而引入了一个竞争项。
- 用模拟近似法建立微分方程来研究实际问题时必须对求得的解进行检验，看其是否与实际情况相符或基本相符。相符性越好则模拟得越好，否则就得找出不相符的主要原因，对模型进行修改。

Malthus模型与Logistic模型虽然都是为了研究种群数量的增长情况而建立的，但它们也可用来研究其他实际问题，只要这些实际问题的数学模型有相同的微分方程即可。

# 人口模型的推广

## 放射性元素的衰变规律

(检验名画的真伪, 考古年代的判断)

## 经济领域

(通货膨胀, 利率, 新产品的销售, 广告宣传等)

## 动植物生长规律

(96年的全国大学生数学建模竞赛题)

## 浓度的扩散

(人体内药物的吸收, 传染病的传播与流行, 谣言的传播等)

# 流入--流出问题

## 1 问题

一截面积为常数 $A$ ，高为 $H$ 的水池内盛满了水，由池底一横截面积为 $B$ 的小孔放水。设水从小孔流出的速度为  $v = \sqrt{2gh}$ ，求在任一时刻的水面高度和将水放空所需的时间。

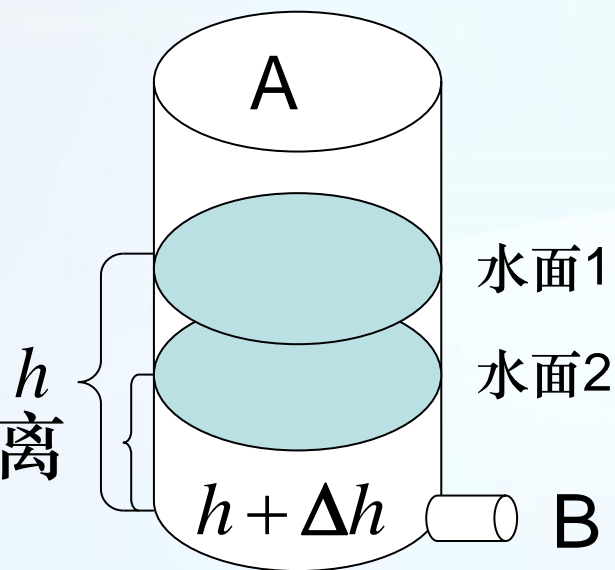


## 2 假设

(1) 设时刻  $t$  的水面高度为  $h$

$t + \Delta t$  时的水面高度为  $h + \Delta h$

(2)  $\Delta s$  是水在  $\Delta t$  时间内从小孔流出保持水平前进时所经过的距离



## 3 建模

等量关系：

$\Delta t$  时间由水面1 降到水面2所失去的水量等于从小孔流出的水量。

$$-A\Delta h = B\Delta s$$

$$-A\Delta h = B\Delta s$$

$$-A \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = B \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$-A \frac{dh}{dt} = B \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{B}{A} \sqrt{2gh} \quad \text{初始条件 } h(0) = H$$

4 求解

$$h = \left( \sqrt{H} - \frac{B}{2A} \sqrt{2gt} \right)^2$$

## 水面高度与时间的函数关系

$$h = \left( \sqrt{H} - \frac{B}{2A} \sqrt{2gt} \right)^2$$

水流空所需时间为（令  $h=0$ ）

$$t^* = \frac{A}{B} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

通过解决此问题想到什么？



## 某大楼人员的安全疏散问题

- 1 大楼所容纳的人数全部走出所用的时间？
- 2 两大因素：人走出的速度？ 出口的设置？

## 奥运会馆场的人员疏散问题

- 1 鸟巢内的观众全部走出所用的时间？
- 2 两大因素：人走出的速度？ 出口的设置？

# 车间空气的清洁

**问题：**已知一个车间体积为 $V$ 立方米，其中有一台机器每分钟能产生 $r$ 立方米的二氧化碳（ $\text{CO}_2$ ），为清洁车间里的空气，降低空气中的 $\text{CO}_2$ 含量，用一台风量为 $K$ 立方米/分钟的鼓风机通入含 $\text{CO}_2$ 为 $m\%$ 的新鲜空气来降低车间里的空气的 $\text{CO}_2$ 含量。假定通入的新鲜空气能与原空气迅速地均匀混合，并以相同的风量排出车间。又设鼓风机开始工作时车间空气中含 $x_0\%$ 的 $\text{CO}_2$ 。问经过 $t$ 时刻后，车间空气中含百分之几的 $\text{CO}_2$ ？最多能把车间空气中 $\text{CO}_2$ 的百分比降到多少？

## 分析和建模

设 $t$ 时刻（单位为分钟）车间每立方米空气含 $\text{CO}_2$ 的百分比为 $x(t)\%$ ,考虑时间区间  $[t, t + \Delta t]$

并利用质量守恒定律:

$[t, t + \Delta t]$  内车间空气含 $\text{CO}_2$ 量的“增加”等于  
 $[t, t + \Delta t]$  时间内进入的新鲜空气中含 $\text{CO}_2$ 的量  
加上机器产生的 $\text{CO}_2$ 的量减去排出空气中 $\text{CO}_2$ 的量。

用数学公式表示出来就是

$$\begin{cases} V[x(t + \Delta t) - x(t)] = (Km + r)\Delta t - \int_t^{t+\Delta t} Kx(s)ds \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

于是, 令  $\Delta t \rightarrow 0$  得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - bx, & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

其中,  $a = \frac{Km + r}{V}, b = \frac{K}{V}$  解为

$$x(t) = \frac{a}{b} + \left(x_0 - \frac{a}{b}\right)e^{-bt}$$

$$= \frac{Km + r}{K} + \left(x_0 - \frac{Km + r}{K}\right)e^{-\frac{K}{V}t}$$

这就是t时刻空气中含CO<sub>2</sub>的百分比。 通常

$\frac{Km + r}{K} < x_0$  否则含CO<sub>2</sub>的量只会增加。

令  $t \rightarrow \infty$  得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{Km + r}{K} \%$$

这表明车间空气中含有 $\text{CO}_2$ 的量最多只能降到

$$\frac{Km + r}{K} \%$$

## 放射性核废料处理问题

1 问题（这是一场笔墨官司）：

以前，美国原子能委员会把浓缩的放射性废料装入密封的圆桶里，然后扔到水深为300英尺的海里。

生态学家和科学家提出：圆桶是否会在运输过程中破裂而造成放射性污染？

美国原子能委员会：不会破裂（用实验证明）。

又有几位工程师提出：圆桶扔到海洋中时是否会因与海底碰撞而破裂？

美国原子能委员会：决不会。



这几位工程师通过大量的**实验证明**:

若圆桶与海底碰撞时的速度超过40英尺/秒时,  
就会因碰撞而破裂。

**圆桶与海底的碰撞时的速度会不会超过40英尺/秒?**

通过建立数学模型来解决这一问题。

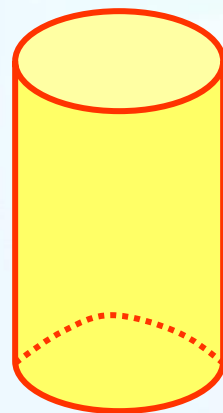
一些参数及假设：

$$G = 527.436 \text{ 磅},$$

$$g = 32.2 \text{ 英尺} / \text{秒}^2,$$

$$V = 7.35 \text{ 英尺}^3,$$

$$\rho_{\text{海水}} = 63.99 \text{ 磅} / \text{英尺}^3,$$



假设圆筒下沉时，所受海水的阻力与其速度成正比，即

$$f = cv, c = 0.08$$



## 2 建模与求解

受力分析:

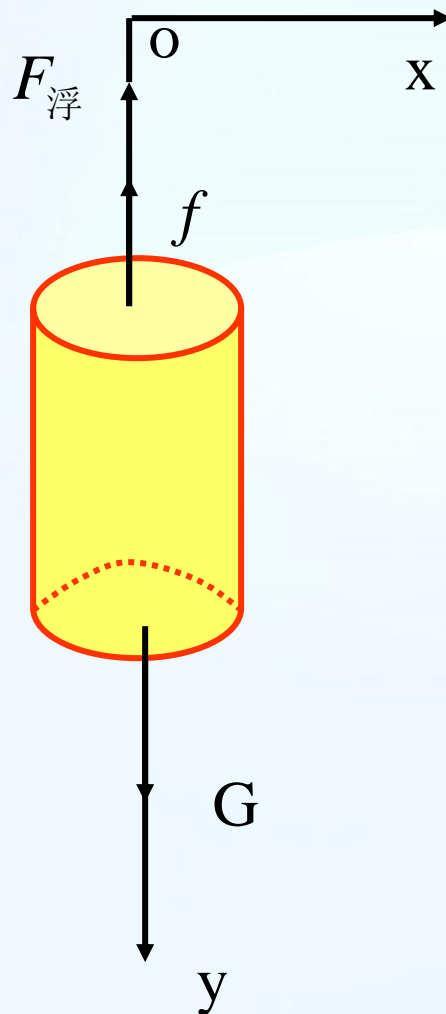
$$\sum F = G - F_{\text{浮}} - f \quad G = 527.436 \text{磅},$$

$$F_{\text{浮}} = 63.99 \times 7.35 = 470.327 \text{磅},$$

$$f = cv, c = 0.08$$

$$V = 7.35 \text{英尺}^3,$$

$$\rho_{\text{海水}} = 63.99 \text{磅} / \text{英尺}^3,$$



根据牛顿第二定理

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - \frac{F_{\text{浮}}}{m} - \frac{cv}{m} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

可解得：

$$v(t) = \frac{G - F_{\text{浮}}}{c} [1 - e^{-ct/m}]$$

极限速度为：

$$v_{\infty} = \frac{G - F_{\text{浮}}}{c} = 713.86 \text{英尺/秒}$$

将速度  $v$  看成位置  $y$  的函数  $v(y)$ ，由于

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$$

代入：

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - \frac{F_{\text{浮}}}{m} - \frac{cv}{m} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v \frac{dv}{dy} = g - \frac{F_{\text{浮}}}{m} - \frac{cv}{m} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$v \frac{dv}{dy} = g - \frac{F_{\text{浮}}}{m} - \frac{cv}{m}$$

其解为：

$$\frac{G - F_{\text{浮}}}{c^2} \ln\left(1 - \frac{cv}{G - F_{\text{浮}}}\right) + \frac{v}{c} + \frac{y}{m} = 0$$

仍未解出  $v$  是  $y$  的显函数。

$$\because v(300) < v(\infty),$$

$$\therefore \frac{cv(300)}{G - F_{\text{浮}}} = \frac{v(300)}{v(\infty)} < 1$$

由近似公式

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{G - F_{\text{浮}}}{c^2} \ln\left(1 - \frac{cv}{G - F_{\text{浮}}}\right) + \frac{v}{c} + \frac{y}{m} = 0$$

$$-\frac{v^2(300)}{2(G - F_{\text{浮}})} + \frac{300}{m} = 0$$

$$v(300) \approx \sqrt{\frac{2g(G - F_{\text{浮}})}{G}} \cdot 300 \approx 45.7 \text{ 英尺 / 秒}$$

### 3 结论：

若圆桶与海底的碰撞速度超过40英尺/秒，  
会因碰撞而破裂。

这一模型科学的论证了美国原子能委员会过去处理核废料的方法是错误的。现在美国原子能委员会条例明确禁止把低浓度的放射性废物抛到海里，改为在废弃的煤矿中修建放置核废料的深井。

我国政府决定在甘肃、广西等地修建深井放置核废料，防止放射性污染。