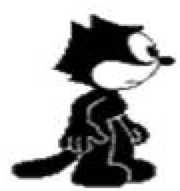
概率统计课件之3

第三章 随机变量的数字特征

主讲教师 邓小艳



在一些实际应用中，人们并不需要知道随机变量的所有概率性质，只要知道它的某些数字特征即可.因此，在对随机变量的研究中，确定其数字特征是非常重要的。本章主要介绍随机变量的数学期望、方差、协方差和相关系数等数字特征。

随机变量的数字特征

§3-1 数学期望

§3-2 方差

§3-3 协方差与相关系数

§3-4 随机变量的另几个不等式

§3-5 切比雪夫不等式与大数定理

随机变量的数字特征

§3-1 数学期望

§3-2 方差

§3-3 协方差与相关系数

§3-4 随机变量的另几个不等式

§3-5 切比雪夫不等式与大数定理

一、数学期望

例：每天抽查n个零件，连查N天得

废品数X：　$0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad n$

出现天数：　$\mu_0 \quad \mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_n$

则N天中，X的算术平均值：　$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k\mu_k}{N} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{\mu_k}{N}$$

X的算术平均值：　$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k\mu_k}{N} \xrightarrow{\text{稳定于}} \sum_{k=0}^{n} kp_k \text{（常数）}$$

——数学期望

定义1 设 X 是离散型随机变量，它的分布律是：

$$P\{X=x_k\}=p_k\ ,\ k=1,2,\ldots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

为随机变量 X 的数学期望，记作$E(X)$,即：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

离散型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的级数的和.数学期望简称期望，又称为均值。

定义2 设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$,

如果积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛,则称此积分值为X的

数学期望,即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

注意：连续型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的积分.

数学期望的定义

R.V. X的数学期望为：

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k & (\text{离散型})\\ \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx & (\text{连续型})\end{cases}$$

<注>(1) E(X)直观上描述X的平均值；(2) 若不绝对收敛，称E(X)不存在.

期望的记忆口诀：所有可能取值与对应概率的乘积之和。

例：X 的分布律为：$P\{X=\frac{2^k}{k}\}=\frac{1}{2^k}$

$\because \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散 $\quad\therefore$ X 的期望 不存在

例：设随机变量X服从柯西分布，概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty$$

$$\because \int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}=+\infty$$

$\therefore$ X的数学期望不存在

期望的计算

例1：求下列R.V.的数学期望：

(1) $X \sim 0\text{-}1$ 分布； (2) $X \sim B(n, p)$; (3) $X \sim \pi(\lambda)$

解：$\because X \sim 0\text{-}1$ 分布

X的分布律为：

X	0	1
P	$1-p$	p

X的数学期望：

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

(2) X 的分布律为：

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

$\therefore$ X 的数学期望：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} k\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np[p+(1-\mathrm{p})]^{n-1}=np$$

$$k\cdot C_n^k=k\frac{n!}{k!(\mathrm{n}-\mathrm{k})!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)![(\mathrm{n}-1)-(\mathrm{k}-1)]!}=nC_{n-1}^{k-1}$$

(3) X 的分布律为:

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$\therefore$ X 的数学期望:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

例2：某种电子元件的寿命X服从参数θ=1000的指数分布，规定：

(1) $X < 500$小时,产值为0元;

(2)500小时$\le X <$1000小时，元件是次品，产值为10元；

(3)1000小时$\leqslant X <$1500小时，元件是二等品，产值为30元；

(4)X $\geqslant$1 500小时，元件是一等品，产值为40元 。

求这种产品 的平均产值。

分析：Y表示“该种产品的产值”，则所求的是E(Y)

解：由题X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1000}e^{-x/1000}, & x>0\\ 0\ , & x\le 0\end{cases}$$

连续型随机变量的函数也可能是离散型随机变量.

设Y表示“该种产品的产值”，Y是X的函数，Y是一个R.V.

Y的所有可能取值为：0，10，30，40

$$P\{\mathrm{Y}=0\}=\mathrm{P}\{\mathrm{X}<500\}=\int_{-\infty}^{500}f(x)dx=\int_{0}^{500}\frac{1}{1000}e^{-x/1000}dx$$

$$=F(500)=1-e^{-0.5}$$

$$P\{\mathrm{Y}=0\}=P\{500\le X<1000\}=e^{-0.5}-e^{-1}$$

$$P\{Y=30\}=P\{1000\le X<1500\}=e^{-1}-e^{-1.5}$$

$$P\{Y=40\}=P\{X\ge 1500\}=e^{-1.5}$$

$\therefore Y$的分布律为：

Y	0	10	30	40
P	$1-e^{-0.5}$	$e^{-0.5}-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-1.5}$	$e^{-1.5}$

$\therefore$该产品的平均产值为：

$$E(Y)=0\times(1-e^{-0.5})+10\times(e^{-0.5}-e^{-1})$$
$$+30\times(e^{-1}-e^{-1.5})+40\times e^{-1.5}$$
$$=10\times e^{-0.5}+20e^{-1}+10\times e^{-1.5}$$
$$\approx 15.65(\text{元})$$

例3：求下列R.V.的数学期望：

(1) $X \sim U(a, b)$ 分布；

(2) X 服从参数为θ的指数分布

(3) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

解：(1) X 的概率密度为：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

∴ X 的数学期望为：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

(2) X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$\therefore$ X 的数学期望为：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x\left(e^{-x/\theta}\right)'dx=-xe^{-x/\theta}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x/\theta}dx=\theta$$

另解：$E(X)\overset{令t=\frac{x}{\theta}}{=\!=\!=}\theta\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=\theta\,\Gamma(2)=\theta\,\Gamma(1)=\theta$

<注>Γ函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\alpha>0$

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha),\Gamma(1)=1,\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=\mathrm{n!}$

$<$注$>$Γ函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \alpha>0$

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha), \Gamma(1)=1, \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}, \Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=\mathbf{n!}$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}dx$$

$$\overset{x=u^2}{=\!=\!=}\int_0^{+\infty} u^{-1}e^{-u^2}du^2=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) X的概率密度为:$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$

∴ X的数学期望为:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{令z=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma z+\mu)e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$=\frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\overset{t=\frac{z}{\sqrt{2}}}{=\!=\!=}\frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}}\times\sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\mu$$

〈注〉几个常见随机变量的数学期望

X	0-1分布	$B(n,p)$	$\pi(\lambda)$	$U(a,b)$	指数分布	$N(\mu,\sigma^2)$
E(X)	p	np	λ	$(a+b)/2$	θ	μ

例4：设R.V. X的分布律为：

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.2	0.3	0.3

求 $Y=X^2$ 的数学期望

解：由题列表得：

X	-1	0	1	2
Y	1	0	1	4
P	0.2	0.2	0.3	0.3

Y的分布律为：

Y	0	1	4
P	0.2	0.5	0.3

∴ Y的数学期望为：

$$\sum_k g(x_k)P\{X=x_k\}$$

$$E(Y)=0\times 0.2+\boxed{1\times 0.5}+4\times 0.3=1.7$$

$$E(Y)=0^2\times 0.2+\boxed{(-1)^2\times 0.2+1^2\times 0.3}+2^2\times 0.3=1.7$$

二、R.V. 函数的数学期望

方法一

步骤：1.先求函数的概率分布；2、利用期望的定义求。

方法二

定理：设*R.V. X*，$Y=g(X)$，且$E[g(X)]$存在，则：

$$E(Y)=E[g(X)]=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k & \text{（离散型）}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & \text{(连续型)}\end{cases}$$

记忆口诀：所有可能取值与对应概率的乘积之和。

记忆口诀：所有可能取值与对应概率的乘积之和。

推广：设二维R.V. (X,Y)，$V=g(X,Y)$，则：

$$E(V)=E[g(X,Y)]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij} & \text{(离散型)}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy & \text{(连续型)}\end{cases}$$

特别地：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

以上公式的重要性：当我们求$E[g(X)]$，$E[g(X,\ Y)]$时，不必知道$g(X)$，$g(X,\ Y)$的概率分布，只需知道X的分布即可.

例5：设R.V. X 服从参数为θ的指数分布，求 $Y = X^2$ 的数学期望。

解：X的概率密度为： $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0\ , & x \le 0 \end{cases}$

∴ Y的数学期望

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-x/\theta} dx = -\int_0^{+\infty} x^2 \left(e^{-x/\theta}\right)' dx$$

$$= -\left[x^2 e^{-x/\theta} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x e^{-x/\theta} dx \right]$$

$$\int_0^{+\infty} x \cdot \left(\frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}\right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} 2x e^{-x/\theta} dx = 2\theta \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-x/\theta} dx} = 2\theta^2$$

$E(X)$

例6：一餐馆有三种不同价格的快餐出售，价格分别为：7元，9元，10元，随机地选取一对前来进餐的夫妇，X:“丈夫所选快餐的价格”，Y:“妻子所选快餐的价格”，X和Y的联合分布为：

$X \setminus Y$	7	9	10
7	0.05	0.05	0.1
9	0.05	0.1	0.35
10	0	0.2	0.1

求：(1) max(X,Y)的数学期望；

(2)X+Y的数学期望。

解：(1) max(X,Y)的数学期望；

$$E[\max(X,Y)]=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\max(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$=7\times0.05+9\times0.05+10\times0.1+9\times0.05+9\times0.1$$

$$+10\times0.35+10\times0+10\times0.2+10\times0.1=9.65$$

(2)X+Y的数学期望。

$$E[\max(X,Y)]=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_i+y_j)p_{ij}$$

$$=14\times0.05+16\times0.05+17\times0.1+16\times0.05+18\times0.1$$

$$+19\times0.35+17\times0+19\times0.2+20\times0.1=18.25$$

例8：设一维R.V. X，Y的概率密度分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y} & y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

且X,Y相互独立

求：(1) E(X)，E(Y)；

(2) $E(X+Y)$；$E(2X-3Y^2)$

(3) $E(XY)$

解：由题，X与Y的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}8e^{-2x-4y} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}8e^{-2x-4y} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx=\int_0^{+\infty} x\cdot 2e^{-2x}dx=\frac{1}{2}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty} y\cdot 4e^{-4y}dy=\frac{1}{4}$$

另解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty} x\cdot 8e^{-2x-4y}dy=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty} y\cdot 8e^{-2x-4y}dy=\frac{1}{4}$$

(2) $E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}(x+y)\cdot 8e^{-2x-4y}dy=\frac{3}{4}$$

$$E(2X-3Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(2x-3y^2)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}(2x-3y^2)\cdot 8e^{-2x-4y}dy=\frac{5}{8}$$

(3) $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}xy\cdot 8e^{-2x-4y}dy=\frac{1}{8}$$

三、数学期望的性质

性质：

(1) $E(c)=c$;

(2) $E(cX)=cE(X)$;

(3)设X，Y是两个随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$\boxed{E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c}$$

(4) 若X,Y相互独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$;

性质可推广到n个变量的情形

(1) $$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E\left(X_i\right)$$

(2) 若X_1，X_2，…，X_n相互独立，则

$$E\left(X_1 X_2 \cdots X_n\right) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

例9：设R.V. $X \sim B(n\ ,p)$，求 $E(X)$.

解：$\because\ X \sim B(n\ ,p)$

$\therefore$ X可以看作n重伯努利试验中事件 A 发生的次数，且$P(A)=p$

$$令X_k=\begin{cases}1 & 在第k次试验中A发生\\ 0 & 在第k次试验中A不发生\end{cases}$$

则 $X=\sum_{k=1}^{n} X_k$，其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且同服从0-1分布．$\therefore E(X_k)=p$

$$\therefore E(X)=E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} E(X_k)=np$$

例10：设在盒子中有25张形式各异的礼券，有人在盒子中取10次，每次取一张，作放回抽样，设抽出的10张礼券中包含X种不同式样，求$E(X)$。

解：令$X_k = \begin{cases} 1 & \text{第}k\text{种式样的礼券至少被抽到一次} \\ 0 & \text{第}k\text{种式样的礼券从未被抽到} \end{cases}$

则$X = \sum_{k=1}^{25} X_k$，且X_i的分布律为：

X_k	0	1
P	$\left(\frac{24}{25}\right)^{10}$	$1-\left(\frac{24}{25}\right)^{10}$

$$\therefore E(X) = E\left(\sum_{k=1}^{25} X_k\right) = \sum_{k=1}^{25} E(X_k) = 25 \times \left(1 - \left(\frac{24}{25}\right)^{10}\right) \approx 8.38$$

以上例题用到一直常用的方法：将X分解成几个随机变量之和，然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望的和来求数学期望。

例8：设二维R.V. X，Y的概率密度分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\0 & 其它\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y} & y>0\\0 & 其它\end{cases}$$

且X,Y相互独立.求：(1) E(X)，E(Y)；

(2) $E(X+Y)$ ，$E(2X-3Y^2)$；(3) $E(XY)$

另解：由题X，Y分别服从参数为1/2和1/4的指数分布

(1) E(X)=1/2　E(Y)=1/4　$E(Y^2)$ =2×（1/4）^{2} =1/8

(2) E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3/4

$E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=5/8$

(3) E(XY)=E(X) E(Y)=1/8

练习1：设二维R.V. (X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2 & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求：(1) E(X)，E(Y)；(2) $E(X^2+Y^2)$；(3) $E(XY)$

练习2：一民航送客车载有20位旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车.以X表示停车的次数，求E(X). (设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立)

小　　结

期望
- 期望的定义
- 几个常见R.V.的期望
- 随机变量函数的期望
- 期望的性质