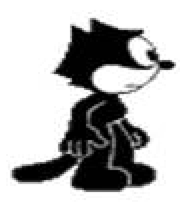
概率统计课件之3

第2章 随机变量的数字特征

主讲教师 邓小艳



随机变量的数字特征

§3-1 数学期望

§3-2 方差

§3-3 协方差与相关系数

§3-4 随机变量的另几个数字特征

§3-5 切比雪夫不等式与大数定理

若X，Y相互独立，则

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=0 \Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$$

若X，Y不相互独立，则

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\neq 0$$

X，Y有一定的关系，

如何表征这种关系？

协方差

一、协方差

1、定义

称 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 为X与Y的协方差，

记作COV(X，Y)即：

$$COV(X,Y)=E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}[x_i-E(X)][y_j-E(Y)]P\{X=x_i,Y=y_j\} & \text{（离）}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)dxdy & \text{(连)}\end{cases}$$

2、性质

(1) $COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

(2) $COV(X,Y)=COV(Y,X)$

(3) $COV(X,X)=D(X);$

(4) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2COV(X,Y)$

(5) $COV(aX,bY)=abCOV(X,Y)$

(6) $COV(X_1+X_2,Y)=COV(X_1,Y)+COV(X_2,Y)$

(7) 若X，Y相互独立 $\Rightarrow COV(X，Y)=0$

注意：独立与协方差为0并不是等价的.

3、协方差的计算

(1) 定义

$$COV(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}[x_i-E(X)][y_j-E(Y)]P\{X=x_i,Y=y_j\} & \text{（离）}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)dxdy & \text{(连)}\end{cases}$$

(2) $COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

例1：设二维R.V. (X,Y) 的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求：(1) COV(X,Y)

$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

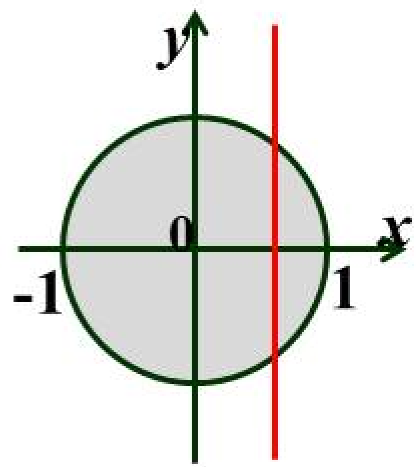
(2) 判X与Y是否相互独立；

$f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$是否成立

解： 由题

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx=0$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\,dy=\int_{-1}^{1} y\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\,dy=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xydx\right]dy=0$$

$$\therefore COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

(2) $\because f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$

$\therefore$ X与Y不相互独立

本题中，COV(X,Y)=0，但X与Y不独立。

二、相关系数

1、定义

若D(X)>0, D(Y)>0，则称 $\rho_{XY}=\dfrac{COV(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

为X与Y的相关系数，若 $\rho_{XY}=0$，则称X与Y不相关。

注意： ρ_{XY} 是X，Y线性关系紧密程度的一个度量，即是线性相关系数.

2、性质

性质1：$|\rho_{XY}| \leq 1$

性质2：$|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow P\{Y = a + bX\} = 1, a, b$是常数

X和Y以概率1线性相关.

性质3：X与Y相互独立 $\Rightarrow$ X与Y不相关

$$
\begin{aligned}
X\text{与}Y\text{不相关} &\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow COV(X,Y) = 0 \\
&\Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \\
&\Leftrightarrow D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)
\end{aligned}
$$

注意：X和Y不相关，但Y与X可能有其它的函数关系，即X和Y不一定独立.

例2： 设θ在(-π， π) 上服从均匀分布，又 $X=\sin\theta$,

$Y=\cos\theta$ ， 求：(1) COV(X,Y)；(2) ρ_{XY}

解：θ的概率密度为：$f(x)==\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & -\pi<x<\pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cdot\frac{1}{2\pi}dx=0$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot\frac{1}{2\pi}dx=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2 x\,f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\cdot\frac{1}{2\pi}dx=\frac{1}{2}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2 x\,f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\cdot\frac{1}{2\pi}dx=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

$$\rho_{XY}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$

本题中，X与Y不相关，但存在关系：$X^2+Y^2=1$，故可知: (1) X与Y不相关指的只是不线性相关；(2) X与Y不独立。