第六章 参数估计

主讲教师 邓小艳

成都信息工程大学应用数学学院

参 数 估 计

§ 6-1 参数的点估计

§ 6-2 估计量的评选标准

§ 6-3 参数的区间估计

§ 6-4 正态总体均值的置信区间

§ 6-5 正态总体方差的置信区间

§6-1 参数的点估计

- 点估计的定义
- 矩估计法
- 最大似然估计法

1.似然函数

设总体X是连续型R.V.，其概率密度$f(x,\theta)$ 的形式已知,它含有一个未知参数θ, $X_1,X_2,\cdots X_n$为来自X的样本，则样本$X_1,X_2,\cdots X_n$ 的联合密度为:

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$$

$$=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)$$

$$=f_X(x_1)f_X(x_2)\cdots f_X(x_n)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$$

当样本$X_1,X_2,\cdots X_n$取到一样本观测值$x_1,x_2,\cdots x_n$时，$L(\theta)$是θ的一个函数，这个函数称为样本的似然函数.

设总体X是离散型R.V.，其分布律$P\{X=x\}=p(x,\theta)$的形式已知,它含有一个未知参数θ，$X_1,X_2,\cdots X_n$为来自X的样本，则样本$X_1,X_2,\cdots X_n$的联合分布律为:

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta) \\
&= P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\} \\
&= P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\} \\
&= P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\{X=x_i\}
\end{aligned}
$$

当样本$X_1,X_2,\cdots X_n$取到一样本观测值$x_1,x_2,\cdots x_n$时，$L(\theta)$是θ的一个函数，这个函数称为样本的似然函数.

样本的似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$$

$$=\begin{cases}P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}\\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\} & \text{（离散型）}\\ \prod_{i=1}^{n}f(x_i,\ \theta) & \text{（连续型）}\end{cases}$$

$L(\theta)$反映了样本$X_1,X_2,\cdots X_n$取到样本值$x_1,x_2,\cdots x_n$或在$(x_1,x_2,\cdots x_n)$的某个邻域内取值的概率.

例1 (1) $X \sim \pi(\lambda)$，求 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)$

解：X的分布律为：

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

$$\therefore L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda}$$

(2) 设X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1,\theta>-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$

解：$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta} & 0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta} & 0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

2. 最大似然原理

概率最大的事件，最可能发生.

如果一个试验有若干个可能的结果A，B，C，…，若进行一次试验，结果A出现，则一般认为A出现的概率最大.

例如：甲乙两人比赛射击，分别射击目标一次，结果甲中而乙不中，则认为甲中的概率大.

在一次抽样中获得一组特殊的样值$x_1, x_2, \cdots x_n$，

则样本 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 取得样本值$x_1, x_2, \cdots x_n$ 的概率最大, 即$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$ 应达到最大, 故以$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$ 达到最大值的 θ 的值作为 θ 的一个估计值是合理的.

3. 最大似然估计

定义：若存在$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots x_n)$使$L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)$，

则称$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots x_n)$为$\boldsymbol{\theta}$的最大似然估计值，而称

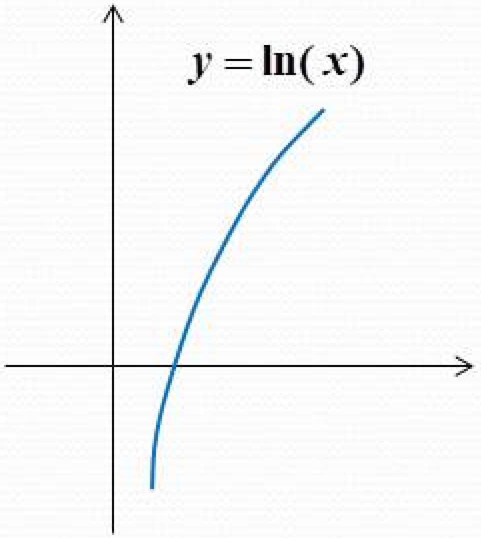
$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots X_n)$为$\theta$的最大似然估计量.

故最大似然估计就是求$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$的最大值点.

4.方法与步骤

求$L(\theta)$的最大值点 $\hat{\theta}$

$\Leftrightarrow$求$\mathrm{Ln}[L(\theta)]$的最大值点 $\hat{\theta}$



计算步骤

(1) 写出似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\} & \text{(离散型)}\\ \prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta) & \text{(连续型)}\end{cases}$ ······(2)

(2) 写出对数似然函数 $Ln\,[L(\theta)]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}Ln\left(P\{X=x_i\}\right)\\ \sum_{i=1}^{n}Ln\left(f(x_i,\theta)\right)\end{cases}$

(3) 写出似然方程 $\dfrac{\partial Ln[L(\theta)]}{\partial\theta_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,l)$ ······(3)

(4) 求解似然方程并写出估计值 $\hat{\theta}=(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_l)$

几点说明

(1) 若(3)式无解，可直接由(2)求$\hat{\theta}$

(2) (3)式的解并非都是$L(\theta)$的最大值点，需验证

$$\left.\frac{\partial^2 Ln[L(\theta)]}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$ 是否成立.

例2：设总体$X \sim B(1,p)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自X的样本，求参数p 的最大似然估计量。

解：X的分布律为：$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1$

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是对应于样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的一样本值

故似然函数为：

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} P(X=x_i)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

而 $Ln[L(p)]=(\sum_{i=1}^{n} x_i)Lnp+(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)Ln(1-p)$

令 $$\frac{d[Ln(L(p))]}{dp}=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\frac{1}{p}+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\frac{1}{1-p}=0$$

解得: $$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

对任意 p , $0<\sum_{i=1}^{n}x_i\leq n$

$$\therefore \frac{d^2[Ln(L(p))]}{dp^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p^2}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-p)^2}<0$$

p的最大似然估计值为：

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

p的最大似然估计量为：

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$$

与p的矩估计值相同

例3：设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1,\theta>-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中θ是未知参数，求θ的最大似然估计量。

解: 似然函数为:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}$$

对数似然函数为:

$$Ln[L(\theta)]=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}Lnx_i$$

令 $\dfrac{d}{d\theta}Ln[L(\theta)]=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}Lnx_i=0$

解得：$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}Lnx_i}$

$\because \dfrac{d^2}{d\theta^2}Ln[L(\theta)]=-\dfrac{n}{(\theta+1)^2}<0$

θ的最大似然估计值为：$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}Lnx_i}$

θ的最大似然估计量为：$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}LnX_i}$

与θ的矩估计值不同

例4：设总体X在[0，θ]上服从均匀分布,θ (θ>0) 未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本，求θ的最大似然估计量。

解:X的概率密度为：$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x\leq\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

似然函数为：$L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & 0<x_1,x_2,\cdots,x_n\leq\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

当 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n\leq\theta$ 时

对数似然函数为：$Ln[L(\theta)]=-nLn\,\theta$

无解

令 $\frac{d}{d\theta}Ln[L(\theta)] = -\frac{n}{\theta} = 0$

直接求当 θ取何值时，$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n}$取到最大值

解:X的概率密度为: $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x\le\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

似然函数为: $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

记$x_{(n)}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 由于$x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta$,

相当于$x_{(n)}\le\theta$, 因而上式相当于

$$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & \theta\ge x_{(n)}\\ 0 & \theta<x_{(n)}\end{cases}$$

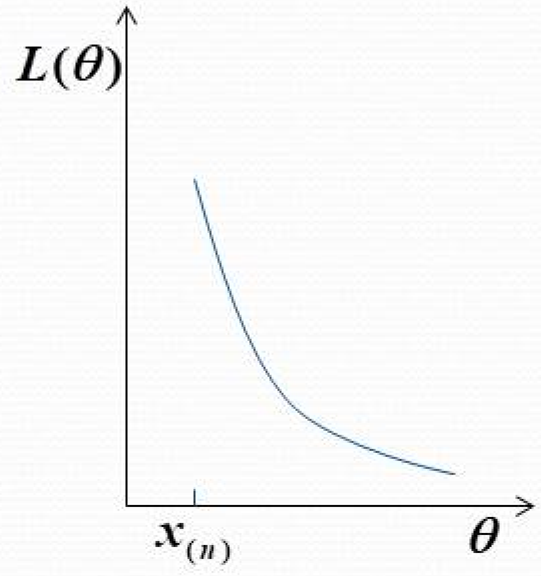
即当 $\theta < x_{(n)}$时 $L(\theta) = 0$;而当 $\theta \ge x_{(n)}$时, $L(\theta)$随 θ 的增加而减少，故 $L(\theta)$在 $x_{(n)}$取到最大值。

即θ的最大似然估计值为:

$$\hat{\theta} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

θ的最大似然估计量为:

$$\hat{\theta} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$



例5: (1)设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自X的样本，求μ, σ^2的最大似然估计量。

(2) 设某种零件的长度(cm)$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，随机的取5只测得其长度为1.43,1.55,1.57,1.47,1.51，求零件长度的均值与方差的最大似然估计值.

解:X的概率密度为：$f(x;\mu,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

似然函数为：$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$=(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

对数似然函数为：

$$Ln[L(\mu,\sigma^2)]=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$
令\begin{cases}\dfrac{\partial[Ln(L(\mu,\sigma^2))]}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu)=0\\[2ex]\dfrac{\partial[Ln(L(\mu,\sigma^2))]}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\end{cases}
$$

$$
解得:\begin{cases}\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}\\[2ex]\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\end{cases}
$$

μ,σ^2的最大似然估计量为：

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{n}S^2$$

与 μ,σ^2 的矩估计量同

代入样本值得 μ,σ^2 的最大似然估计值为：

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=1.506(cm)$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=0.0026(cm^2)$$

练习1：设总体 $X \sim B(m, p)$, 参数 $p(0 < p < 1)$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自X的样本，求 p 的最大似然估计量。

解：设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是对应于样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的一样本值

$\because \ X \sim B(m, p)$

$\therefore X$ 的分布律为：

$$P\{X = x\} = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots m$$

$\therefore$ 似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} \left[C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i} \right]$$

$$= C_m^{x_1} p^{x_1} (1-p)^{m-x_1} \times C_m^{x_2} p^{x_2} (1-p)^{m-x_2} \times \cdots \times C_m^{x_n} p^{x_n} (1-p)^{m-x_n}$$

即 $$L(p)=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}\times p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\times(1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

对数似然函数为:

$$Ln[L(p)]=(\ln p)\sum_{i=1}^{n}x_i+\left(mn-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)+\sum_{i=1}^{n}\ln C_m^{x_i}$$

令 $$\frac{d}{dp}Ln[L(p)]=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}+\frac{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0\Rightarrow p=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{\bar{x}}{m}$$

又 $$\because\left.\frac{d^2[Ln(L(p))]}{dp^2}\right|_{p=\frac{\bar{x}}{m}}<0$$

$\therefore$ p的最大似然估计值为: $\hat{p}=\dfrac{\bar{x}}{m}$

p的最大似然估计量为: $\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{m}$

练习2：设总体X服从参数为 θ的指数分布，求θ的最大似然估计量。

练习3：设总体X在[a，b]上服从均匀分布，a，b未知，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自X的样本，求a，b的最大似然估计量。