

概率统计课件之4

# 第四章 正态分布

主讲教师 邓小艳




# 正态分布

§ 4-1 正态分布

§ 4-2 正态随机变量的线性组合

§ 4-3 中心极限定理





**正态随机变量的重要性质：两个或多个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然是正态随机变量.**

**引理:** 设  $Y_1 \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $Y_2 \sim N(0, 1)$ , 且  $Y_1, Y_2$  相互独立,

则:  $Y_1 + Y_2 \sim N(0, \sigma^2 + 1)$

**证** 分别记  $Y_1, Y_2, Y_1 + Y_2$  的概率密度为  $f_{Y_1}(y), f_{Y_2}(y), f_{Y_1+Y_2}(y)$ , 由卷积公式有

$$\begin{aligned} f_{Y_1+Y_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1}(y) f_{Y_2}(t-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-y)^2/2} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[y^2/\sigma^2 + (t-y)^2]/2} dy. \end{aligned}$$

上式积分号中的方括号内为

$$\begin{aligned} [\cdot] &= \frac{y^2}{\sigma^2} + y^2 - 2ty + t^2 = \left(\frac{1+\sigma^2}{\sigma^2}\right)y^2 - 2ty + t^2 \\ &\quad \text{记 } c = \sigma/\sqrt{1+\sigma^2} \quad \left(\frac{1}{c^2}y^2 - 2ty + c^2t^2\right) + t^2 - c^2t^2 \\ &= \left(\frac{y}{c} - ct\right)^2 + (1-c^2)t^2 = \left(\frac{y-ct}{c}\right)^2 + (1-c^2)t^2. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f_{Y_1+Y_2}(t) &= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-ct}{c}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}(1-c^2)t^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma/c)} e^{-\frac{1}{2}(1-c^2)t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}c} e^{-(y-ct)^2/(2c^2)} dy. \end{aligned}$$

注意到上式右端的积分其被积函数是正态变量  $N(ct, c^2)$  的概率密度, 于是这一积分等于 1. 因而

$$f_{Y_1+Y_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma/c)} e^{-\frac{1}{2}(1-c^2)t^2}.$$

因  $1-c^2 = 1 - \sigma^2/(1+\sigma^2) = 1/(1+\sigma^2)$ ,  $\sigma/c = \sqrt{1+\sigma^2}$ , 故有

$$f_{Y_1+Y_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+\sigma^2}} e^{-t^2/[2(1+\sigma^2)]}.$$

**定理1:** 设  $Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且  $Y_1, Y_2$  相互独立, 则:  $Y_1 + Y_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

证  $Y_1 + Y_2 = \sigma_2 \left( \frac{Y_1 - \mu_1}{\sigma_2} + \frac{Y_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \mu_1 + \mu_2,$

其中  $\frac{Y_1 - \mu_1}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma_2} Y_1 - \frac{\mu_1}{\sigma_2} \sim N\left(0, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right),$

(只要在 4.1 节引理中取  $a = 1/\sigma_2, b = -\mu_1/\sigma_2$  即得)

又

$$\frac{Y_2 - \mu_2}{\sigma_2} \sim N(0, 1),$$

且  $(Y_1 - \mu_1)/\sigma_2$  与  $(Y_2 - \mu_2)/\sigma_2$  相互独立. 故由本节引理知

$$\frac{Y_1 - \mu_1}{\sigma_2} + \frac{Y_2 - \mu_2}{\sigma_2} \sim N\left(0, 1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right).$$

又在 4.1 节引理中取  $a = \sigma_2, b = \mu_1 + \mu_2$ , 知

$$Y_1 + Y_2 \sim N\left(\sigma_2 \times 0 + \mu_1 + \mu_2, \sigma_2^2 \left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)\right),$$

即

$$Y_1 + Y_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$



**定理2:** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  
 $i=1, 2, \dots, n$ , 则对不全为零的常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , 有

$$U = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \\ \sim N(C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2 + \dots + C_n \mu_n, C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2 + \dots + C_n^2 \sigma_n^2)$$

**推论:** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  
 $i=1, 2, \dots, n$ , 则

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{或} \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

例1：设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立且 $X \sim N(1,2)$ ,  $Y \sim N(0,1)$ . 试求 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度.

解：∵  $X \sim N(1,2)$ ,  $Y \sim N(0,1)$ , 且  $X$  与  $Y$  独立

$$\therefore E(X)=1, D(X)=2, E(Y)=0, D(Y)=1$$

由Th2知,  $X$  和  $Y$  的任意线性组合服从正态分布.

$$\therefore Z=2X-Y+3 \sim N(E(Z), D(Z))$$

$$E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=2+3=5$$

$$D(Z)=4D(X)+D(Y)=8+1=9$$

$$\therefore Z=2X-Y+3 \sim N(5,9)$$

故 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度为:  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$

例2：设内燃机气缸的直径(以cm计)  $X \sim N(41.5, 0.4^2)$ ，  
活塞的直径(以cm计)  $Y \sim N(40.5, 0.3^2)$ ，设X与Y相互独立，  
若活塞不能装入气缸，则需返工，求需返工的概率。

分析：

需返工的概率： $P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$

由定理2得

$$X - Y \sim N(E(X - Y), D(X - Y))$$

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 1$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) = 0.5^2$$



例2：设内燃机气缸的直径(以cm计)  $X \sim N(41.5, 0.4^2)$ ，  
活塞的直径(以cm计)  $Y \sim N(40.5, 0.3^2)$ ，设X与Y相互独立，  
若活塞不能装入气缸，则需返工，求需返工的概率。

解：  $\because X \sim N(41.5, 0.4^2)$ ,  $Y \sim N(40.5, 0.3^2)$  且X与Y相互独立

$$\therefore X - Y \sim N(1, 0.25)$$

故需返工的概率为：

$$\begin{aligned} P\{X < Y\} &= P\{X - Y < 0\} = F(0) \\ &= \Phi\left(\frac{0-1}{0.5}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

例3：一电路由3只独立工作的电阻器串联而成，各只额定电阻值均为6欧。

(1)已知电阻器的电阻(以欧计)  $Y \sim N(6, 0.3^2)$ ，求电路的总电阻W超过19的概率；

(2)设电阻器的电阻  $Y \sim N(6, \sigma^2)$ ，若要求电路的总电阻W超过19的概率小于0.005，问要控制 $\sigma$ 至多为多少？

**分析：**

记3只独立工作的电阻器的电阻为： $Y_1, Y_2, Y_3$ ,

$Y_1, Y_2, Y_3$ 独立同分布

(1)  $W = Y_1 + Y_2 + Y_3 \sim N(18, 3 \times 0.3^2)$  求： $P\{W > 19\} = ?$

(2)  $W = Y_1 + Y_2 + Y_3 \sim N(18, 3 \times \sigma^2)$

$P\{W > 19\} < 0.005$  ,求： $\sigma$

解：记3只独立工作的电阻器的电阻为： $Y_1, Y_2, Y_3$ ，则

$Y_1, Y_2, Y_3$ 相互独立

(1) 由题  $W = Y_1 + Y_2 + Y_3 \sim N(18, 3 \times 0.3^2)$

$\therefore$  总电阻 $W$ 超过19的概率

$$\begin{aligned} P\{W > 19\} &= 1 - F(19) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{19 - 18}{\sqrt{0.27}}\right) = 1 - \Phi(1.92) = 1 - 0.9726 = 0.0274 \end{aligned}$$

(2) 由题知  $W = Y_1 + Y_2 + Y_3 \sim N(18, 3\sigma^2)$

$$\therefore P\{W > 19\} = 1 - F(19) = 1 - \Phi\left(\frac{19 - 18}{\sqrt{3}\sigma}\right)$$

$$\therefore 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}\sigma}\right) < 0.005 \Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}\sigma}\right) > 0.995 = \Phi(2.576)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}\sigma} > 2.576 \Rightarrow \sigma < 0.2241 \quad \therefore \text{要控制 } \sigma \text{ 至多为 } 0.2241$$

例4: 设  $X_1, X_2, \dots, X_9$  相互独立且都服从正态分布  $N(2,4)$ ,  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  相互独立且都服从正态分布  $N(1,1)$ , 又设  $\bar{X}, \bar{Y}$  相互独立, 求  $P\{\bar{X} \geq \bar{Y}\}$

解: 由题得:  $\bar{X} \sim N(2, 4/9), \bar{Y} \sim N(1, 1/4)$

又  $\because \bar{X}$  与  $\bar{Y}$  独立

$$\therefore \bar{X} - \bar{Y} \sim N(1, 25/36)$$

$$\begin{aligned} \therefore P\{\bar{X} \geq \bar{Y}\} &= P\{\bar{X} - \bar{Y} \geq 0\} = 1 - P\{\bar{X} - \bar{Y} < 0\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0-1}{5/6}\right) = \Phi(1.2) = 0.8849 \end{aligned}$$



例5：一工厂要求装两台寿命为12年的变压器，而实际上装的变压器的寿命(以年计)服从均值为11.9年，标准差为0.2年的正态分布，求：

- (1) 两台变压器的寿命都在11.7年和12.3年之间的概率；
- (2) 至少有一台变压器的寿命大于12.4年的概率。

**分析：**

两台变压器的寿命分别记为 $X$ 、 $Y$ ，则

- (1) 求 $P\{11.7 \leq X \leq 12.3, 11.7 \leq Y \leq 12.3\} = ?$  (积事件的概率)
- (2) 求 $P\{\{X > 12.4\} \cup \{Y > 12.4\}\} = ?$  (和事件的概率)



解：两台变压器的寿命分别记为 $X$ 、 $Y$ ，则

$X \sim N(11.9, 0.04), Y \sim N(11.9, 0.04)$ 且 $X$ 与 $Y$ 相互独立

(1) 两台变压器的寿命值都在11.7年和12.3年之间的概率为：

$$\begin{aligned} & P\{11.7 \leq X \leq 12.3, 11.7 \leq Y \leq 12.3\} \\ &= P\{11.7 \leq X \leq 12.3\}P\{11.7 \leq Y \leq 12.3\} \\ &= \left[ \Phi\left(\frac{12.3-11.9}{0.2}\right) - \Phi\left(\frac{11.7-11.9}{0.2}\right) \right]^2 \\ &= [\Phi(2) - \Phi(-1)]^2 = 0.8185^2 = 0.6699 \end{aligned}$$

(2) 至少有一台变压器的寿命大于12.4年的概率为：

$$\begin{aligned} & 1 - P\{X \leq 12.4, Y \leq 12.4\} = 1 - P\{X \leq 12.4\}P\{Y \leq 12.4\} \\ &= 1 - \left[ \Phi\left(\frac{12.4-11.9}{0.2}\right) \right]^2 = 1 - 0.9938^2 \approx 0.0124 \end{aligned}$$