第七章 假设检验

主讲教师 邓小艳

成都信息工程大学应用数学学院

假 设 检 验

§ 7-1 假设检验

§ 7-2 正态总体均值的假设检验

§ 7-3 正态总体方差的假设检验

§7-1 假设检验

- 假设检验的定义
- 假设检验的基本思想
- 两种错误与显著性检验
- 假设检验的步骤
- 参数检验的三种形式

在实际应用中，常需对总体参数或分布函数的表达式做出某种假设(称为统计假设)，再利用从总体中获得的样本信息来对所做假设的真伪进行检验，这种利用样本检验假设真伪的过程叫做统计检验(假设检验).

假设检验
- 参数检验 (若$X \sim F(x,\theta)$, θ是未知参数,检验假设:$\theta=\theta_0$)
- 非参数检验 (若$X \sim F(x)$, $F(x)$未知,检验假设:$F(x)=F(x_0)$)

例1：某车间用一台包装机包装葡萄糖，包得的袋装糖重量是一个R.V.，设它服从正态分布，当机器正常时，其均值为0.5公斤，标准差为0.015公斤，某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它包装的糖9袋，称得净重为(公斤)：0.497, 0.506, 0.518, 0.524, 0.498, 0.511, 0.520, 0.515, 0.512，问机器是否正常？(设标准差为0.015公斤)

解：设袋装糖重为总体X, $E(X)=\mu, \sigma=\sqrt{D(X)}$，则

$$X \sim N(\mu, 0.015^2)$$

检验假设：$H_0: \mu=\mu_0=0.5$，$H_1: \mu \neq \mu_0$

§7-1 假设检验

- 假设检验的定义
- 假设检验的基本思想
- 两种错误与显著性检验
- 假设检验的步骤
- 参数检验的三种形式

1、依据

小概率原理(实际推断原理)：小概率事件在一次试验中被认为是不可能发生的，如果发生了，就认为是不合理的。

2、基本思想与方法

为检验某个假设H_0是否成立，先假设H_0成立，若由H_0成立可导出一个小概率事件（发生的概率小于某α)发生，则拒绝H_0，反之接受H_0。

§ 7-1 假设检验

- 假设检验的定义
- 假设检验的基本思想
- 两种错误与显著性检验
- 假设检验的步骤
- 参数检验的三种形式

决策 \ 实际	H_0为真	H_0不真
否定H_0	第一类错误 (弃真)α	正　确
接受H_0	正 确	第二类错误 (取伪)β

$$\alpha = P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\}$$

$$\beta = P\{接受H_0 \mid H_0不真\}$$

进行检验时，应使 α，β都较小，但进一步讨论知，一般地，当样本容量n固定时，α小，β就大，反之，α大，β就小，若要使 α，β均减小，应增加样本容量。故样本容量固定时，采取的原则：控制犯第一类错误的概率，使之小于给定的 α。

1、显著性检验

只对犯第一类错误的概率加以控制，使之小于某给定的α，而不考虑犯第二类错误的概率的假设检验，称为显著性检验.

2、显著性水平

在此，α称为显著性水平，实为小概率事件的小概率值，常取$\alpha=0.01, 0.05, 0.1$等

3.假设检验的基本思想

为检验某个假设H_0是否成立，先假设H_0成立，若由H_0成立可导出第一类错误$\{$拒绝$H_0|H_0$为真$\}$这一个小概率事件在某个区域内发生了，则拒绝H_0，反之接受H_0。

例1: 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots$，X_n为来自总体X的样本，σ^2已知。

(1) 检验假设: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$

(2) 检验假设: $H_0: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$

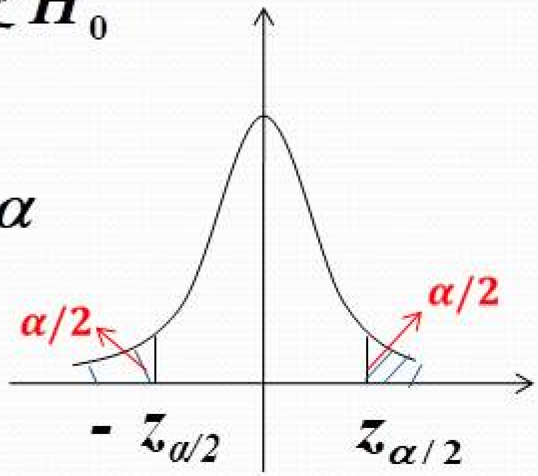
(3) 检验假设: $H_0: \mu \leq \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$

例1: (1) 检验假设: $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$

分析: H_0为真$\Leftrightarrow |\bar{x} - \mu_0|$较小$\Leftrightarrow \dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}}$较小

故取适当的$k > 0$, 当$\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} \geq k$时, 拒绝$H_0$

当$\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} < k$时, 接受$H_0$



$$\therefore P\{拒绝H_0 | H_0为真\} = P_{\mu=\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| \geq k\right\} = \alpha$$

$$\boxed{\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \overset{H_0为真}{\sim} N(0,1)}$$

$\therefore$若z的观测值满足: $|z| = \left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| \geq k = z_{\alpha/2}$,则拒绝$H_0$

例1: (2) 检验假设: $H_0: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$

分析: H_0为真$\Leftrightarrow \bar{x} > k$

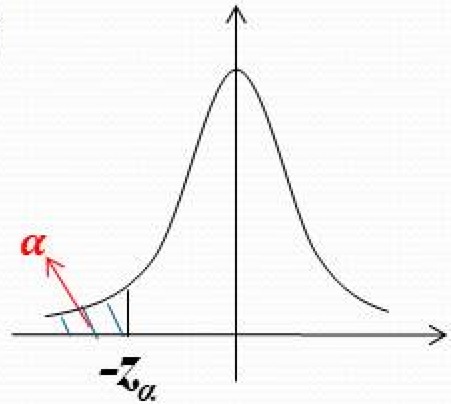
故取适当的k ,当$\bar{x} > k$时，接受H_0；当$\bar{x} \leq k$时，拒绝H_0

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \Leftrightarrow \bar{x} \leq k$$

$$\therefore P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = \mathrm{P}_{\mu\geq\mu_0}\{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$\boxed{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$$

$$\leq \mathrm{P}_{\mu\geq\mu_0}\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\} = \alpha$$



$$\therefore \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -z_\alpha \Rightarrow k = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$$

若$\bar{x} \leq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$，则拒绝$H_0$, 即$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$，则拒绝$H_0$

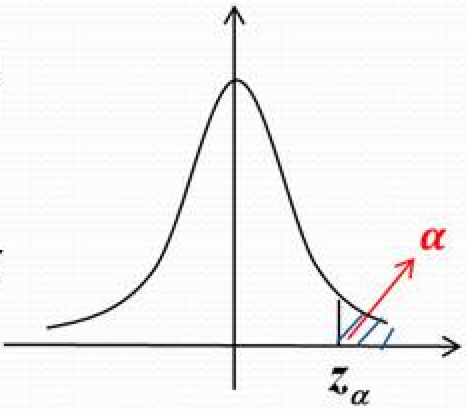
例1: (3) 检验假设: $H_0: \mu \le \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$

分析: H_0为真$\Leftrightarrow \bar{x} < k$

故取适当的k ,当$\bar{x} < k$时，接受H_0; 当$\bar{x} \ge k$时，拒绝H_0

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Leftrightarrow \bar{x} \ge k$$

$$\therefore P\{拒绝H_0|H_0为真\} = \mathrm{P}_{\mu\le\mu_0}\{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$



$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\le \mathrm{P}_{\mu\le\mu_0}\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\} = \alpha$$

$$\therefore \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \Rightarrow k = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$$

若$\bar{x} \ge \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$，则拒绝$H_0$, 即 $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_\alpha$ ，则拒绝H_0

4、检验统计量

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

5、拒绝域（否定域）

当检验统计量取到某区域C内的值时，拒绝原假设H_0，则称C为拒绝域，称拒绝域的边界点为临界点。

§ 7-1 假设检验

- 假设检验的定义
- 假设检验的基本思想
- 两种错误与显著性检验
- 假设检验的步骤
- 参数检验的三种形式

假设检验的步骤:

1. 建立原假设H_0和备择假设H_1

2. 选择一合适的统计量U(简单、不含其它未知参数)，并找出假设成立的条件下，该统计量服从的概率分布。

3. 给定显著性水平，在原假设为真的条件下求出使

$$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} \leq \alpha$$

成立的U，从而求出拒绝域C.

4. 由样本观测值算出U，若落入拒绝域C，则拒绝H_0，反之，接受H_0.

§7-1 假设检验

- 假设检验的定义
- 假设检验的基本思想
- 两种错误与显著性检验
- 假设检验的步骤
- 参数检验的三种形式

参数检验的三种形式

检验目的	H_0：原假设	H_1：备择假设	
$\boldsymbol{\theta}$是否等于$\boldsymbol{\theta_0}$	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	双边检验
$\boldsymbol{\theta}$是否大于$\boldsymbol{\theta_0}$	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$ (右边)	单边检验
$\boldsymbol{\theta}$是否小于$\boldsymbol{\theta_0}$	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$ (左边)	单边检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体**X**的样本，

$\boldsymbol{\sigma}^2$已知

检验统计量: $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

Z检验	检验统计量的观察值 $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	
H_0	H_1	H_0的拒绝域
$\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\{z \ge z_\alpha\}$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\{z \le -z_\alpha\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$	$\{\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}\}$

引例解：设袋装糖重为X, $E(X)=\mu, \sigma=\sqrt{D(X)}$，则$X \sim N(\mu, 0.015^2)$

检验假设: $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$

在此，令 α=0. 05，则$k = z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

又由题知: $n = 9, \sigma = 0.015, \bar{x} = 0.511$，则

$$|z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = 2.2 > 1.96$$ （拒绝域）

∴ 拒绝原假设H_0，即认为包装机工作不正常.