第六章 参数估计

主讲教师 邓小艳

成都信息工程大学应用数学学院

参 数 估 计

§ 6-1 参数的点估计

§ 6-2 估计量的评选标准

§ 6-3 参数的区间估计

§ 6-4 正态总体均值的置信区间

§ 6-5 正态总体方差的置信区间

参 数 估 计

§ 6-1 参数的点估计

§ 6-2 估计量的评选标准

§ 6-3 参数的区间估计

§ 6-4 正态总体均值的置信区间

§ 6-5 正态总体方差的置信区间

$$
\text{区间估计}\begin{cases} ① \ \theta \in (? \quad , \quad ?) \\ \\ ② \ P\{\theta \in (? \quad , \quad ?)\} \geq \text{给定的值} \end{cases}
$$

§6-3 参数的区间估计

- 区间估计的定义
- 求置信区间的一般方法

§6-3 参数的区间估计

- 区间估计的定义
- 求置信区间的一般方法

定义：给定α（$0<\alpha<1$），构造两个统计量$\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$使$P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})\geq 1-\alpha$，称为对参数$\theta$的区间估计.

定义：给定α（$0<\alpha<1$），构造两个统计量$\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$使$P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})\geq 1-\alpha$，称为对参数$\theta$的区间估计.

其中$(\underline{\theta},\overline{\theta})$称为参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

$\underline{\theta}$：置信下限，$\overline{\theta}$置信上限，$1-\alpha$：置信水平

例1： 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，求 μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

分析： $\mu \in (? \quad , \quad ?)$

$$P\{\mu \in (? \quad , \quad ?)\} \geq 1-\alpha$$

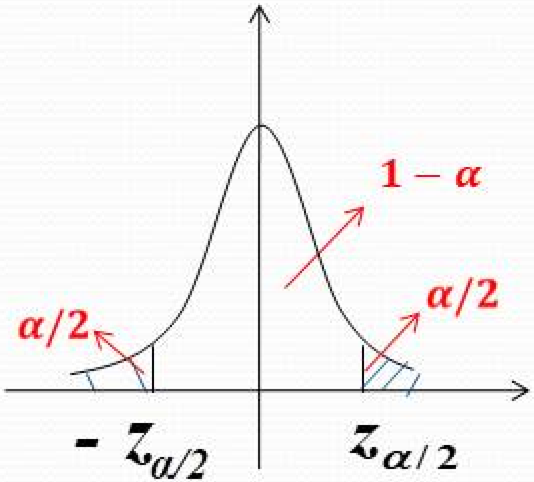
$$\Uparrow$$

$$P\{g(\mu) \in (g_1, g_2)\} \geq 1-\alpha$$

$g(\mu)$的分布已知

例1：若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

解：设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本



$\because X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\therefore \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

给定$1-\alpha$，可取分位点$z_{\alpha/2}$

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2} < \mu < \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

σ^2已知，μ的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间：

$$\left(\bar{X}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(\bar{X}\pm Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

§ 6-2 估计量的评选标准

- 区间估计的定义
- 求置信区间的一般方法

求置信区间的一般步骤：

1、选择合适的统计量$g(X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta)$

一般地，先找与$\boldsymbol{\theta}$有关的统计量$\boldsymbol{U}$，一般$\boldsymbol{U}$是$\boldsymbol{\theta}$的点估计量，构造$\boldsymbol{U}$与$\boldsymbol{\theta}$的函数$\boldsymbol{g(U,\theta)}$，其分布为已知且$\boldsymbol{\theta}$与无关，称$\boldsymbol{g(U,\theta)}$为枢轴量.

2、对给定的置信水平$1-\alpha$，确定分位点(g_1,g_2)，使

$$P\{g_1<g(\theta)<g_2\}\geq 1-\alpha$$

3、利用2中式子变形，解得$P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})\geq 1-\alpha$，则$(\underline{\theta},\overline{\theta})$即是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

注：

(1) 一般地，置信区间取成对称区间或概率对称区间；

(2) 评价一个置信区间的好坏：

① 精度

精度可以用区间长度L来刻画，长度越小精度越高.

② 置信水平

置信水平即可信程度。例如：σ^2已知，μ的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间：$(\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

这指的是："区间$(\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 包含μ的真值的可信程度.

例2：某车间生产的滚珠直径X服从正态分布，$D(X)=0.05$，今任抽6个测得直径如下(mm)：14.6, 15.4, 14.9, 14.8, 15.2, 15.1，求均值 μ 的置信水平为0.99的置信区间.

解析：这是正态总体中，σ^2 已知，求μ的置信区间

$$\left(\overline{X}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(\overline{X}\pm Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

解：$\because \bar{x}=15, n=6$

由$1-\alpha=0.99$，知$\alpha=0.01$

又$\because \Phi$（$z_{\alpha/2}$）$=1-\alpha/2=0.995$ $\quad \therefore z_{\alpha/2}=2.58$

μ的置信水平为0.99的置信区间为：

$$\left(\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(15 \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.05}{6}}\right)=(14.77,15.23)$$