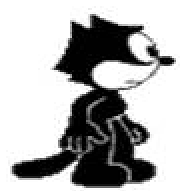
概率统计课件之二

第二章 随机变量及分布

主讲教师 邓小艳



有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述. 所以我们需要引入n维随机变量，在此我们主要讨论二维随机变量。

1、定义：定义在样本空间S上的R.V. X(e)，Y(e)，所构成的一个向量(X，Y)称为二维R.V.或二维随机向量。

2、分类

二维离散型R.V.——取值为有限对或可列对

二维连续型R.V.——在某个区域内取值(稠密性)

随机变量及分布

§2-1 随机变量

§2-2 一维离散型R.V.及概率分布

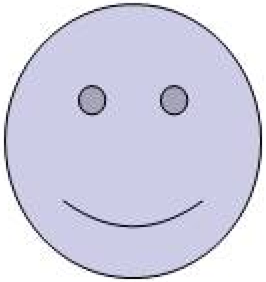
§2-3 一维连续型随机R.V.及概率分布

§2-5 二维离散型R.V.及概率分布

§2-6 二维连续型R.V.及概率分布

§2-8 相互独立的随机变量

§2-9 随机变量函数的分布



一、二维离散型R.V.

1、定义：若二维R.V.(X，Y)所有可能取值为有限对或 可列对，则称(X，Y)为二维离散型R.V.；或若X，Y是S上两个离散型R.V.，则(X，Y)为S上的二维离散型R.V.。

2、联合分布律

定义：设 $(x_i, y_j)(i, j = 1,2,3,\cdots)$ 为随机变量R.V. (*X*，*Y*)的所有可能取值，若 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$ 满足:

(1) $p_{ij} \geq 0, i, j = 1,2,\cdots$;

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

则称 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$ 为随机变量(*X*，*Y*)的概率分布律或称为R.V.X与*Y* 的联合分布律。

可用表格来表示随机变量X和Y的联合分布律.

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	$\boldsymbol{p_{ij}}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$p_{ij}=P\{X=x_i,\ Y=y_j\}$是$\{X=x_i\}$与$\{Y=y_j\}$的积事件的概率

例1：设R.V.X在1,2,3,4中等可能地取值，Y在1~X中等可能地取值。求：

(1)（X,Y）的概率分布律；

(2) $P\{X \le 3, Y \le 2\}$ ；

解: (1) X 的所有可能取值为：1, 2,3,4

Y的 所有可能取值 为：1, 2,3,4

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1 \mid X=1\}=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j|X=i\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}=\frac{1}{4i}\quad (1\le j\le i\le 4)$$

$$P\{X=i,Y=j\}=0\quad (j>i)$$

∴随机变量X和Y的联合分布律为：

X \ Y	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

（2）$P\{X \le 3,\ Y \le 2\}$

$$=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}$$

$$+P\{X=2,Y=2\}+P\{X=3,Y=1\}+P\{X=3,Y=2\}$$

$$=\frac{1}{4}+0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$$

例2：盒中有3个黑球，2个白球，2个红球，在其中任取4个球，以X表示取到黑球的个数，以Y表示取到白球的个数。

(1)（X，Y）的概率分布律；

(2) $P\{X+Y\leq 2\}$；

解: (1) X 的所有可能取值为：0, 1, 2，3

Y的 所有可能取值 为：0, 1, 2.

$$P\{X=0,Y=0\}=0 \quad P\{X=0,Y=1\}=0$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{1}{35}$$

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{C_3^iC_2^jC_2^{4-i-j}}{C_7^4}$$

（$0\le i,j\le 4, 2\le i+j\le 4$）

$$P\{X=i,Y=j\}=0 \quad （i+j<2 \text{或} i+j>4）$$

随机变量X和Y的联合分布律为：

X \ Y	0	1	2
0	0	0	1/35
1	0	6/35	6/35
2	3/35	12/35	3/35
3	2/35	2/35	0

（2）$P\left\{X+Y\le 2\right\}$

$$=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}=\frac{2}{7}$$

3、边缘分布律

设R.V. (X, Y)的分布律为：

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i, j=1,2,\cdots$$

由于 $\{(Y=y_1)\cup\cdots\cup(Y=y_j)\cup\cdots\}$ 是必然事件，故有

$$\{X=x_i\}=\{\{X=x_i\}\cap\{(Y=y_1)\cup\cdots\cup(Y=y_j)\cup\cdots\}\}$$

$$=\{X=x_i, Y=y_1\}\cup\cdots\cup\{X=x_i, Y=y_j\}\cup\cdots$$

上式右端各事件两两互不相容，故得X的分布律为:

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i, Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}, \quad i=1,2,\cdots$$

同理，可得Y的边缘分布律为:

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i, Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}, \quad j=1,2,\cdots$$

定义：设R.V. (X，Y)的分布律为：

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$$

(1) R.V. (X，Y)关于X的边缘分布律

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot},i=1,2,\cdots$$

(2) R.V. (X，Y)关于Y的边缘分布律

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j},j=1,2,\cdots$$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P\{Y = y_j\}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

注：(X，Y)的关于X，Y的边缘分布律就是X，Y各自的分布律.

例1续：设R.V.X在1,2,3,4中等可能地取值，Y在1~X中等可能地取值。求：

(1)（X,Y）的概率分布律；

(2) $P\{X \le 3, Y \le 2\}$；

(3) 求(X，Y)的关于X，Y的边缘分布律；

(3) ∵随机变量X和Y的联合分布律为:

X \ Y	1	2	3	4	$P\{X=x_i\}$
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
$P\{Y=y_i\}$	25/48	13/48	7/48	1/16	1

∴ (X,Y)关于X和Y的边缘分布律分别为:

X	1	2	3	4
$P\{X=x_i\}$	1/4	1/4	1/4	1/4

Y	1	2	3	4
$P\{Y=y_i\}$	25/48	13/48	7/48	1/16

例2续：盒中有3个黑球，2个白球，2个红球，在其中任取4个球，以X表示取到黑球的个数，以Y表示取到白球的个数。

(1)（X，Y）的概率分布律；

(2) $P\{X+Y\leq 2\}$；

(3) 求(X，Y)关于X和Y的边缘分布

∵随机变量X和Y的联合分布律为：

X \ Y	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	0	0	1/35	1/35
1	0	6/35	6/35	12/35
2	3/35	12/35	3/35	18/35
3	2/35	2/35	0	4/35
$P\{Y=y_i\}$	1/7	4/7	2/7	1

(3) (X,Y)关于X和Y的边缘分布律分别为:

X	0	1	2	3
$P\{X=x_i\}$	1/35	12/35	18/35	4/35

Y	0	1	2
$P\{Y=y_i\}$	1/7	4/7	2/7

4、二维R.V.的独立性

事件 A, B 独立 $\Leftrightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$

定义：设R.V. X与Y，对 $\forall a, b, c, d \in R$

R.V. X与Y相互独立

$$\Leftrightarrow P\{a < X \le b, c < Y \le d\} = P\{a < X \le b\}P\{c < Y \le d\}$$

一般地，X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$

二维离散型R. V. 的独立性

离散型**R.V.** ***X***与 ***Y***相互独立

$$\Leftrightarrow P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

对一切（x_i, y_j）成立

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P\{Y = y_j\}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例1续：设R.V.X在1,2,3,4中等可能地取值，Y在1~X中等可能地取值。求：

(1)（X,Y）的概率分布律；

(2) $P\{X \le 3, Y \le 2\}$；

(3) 求(X，Y)关于X和Y的边缘分布律；

(4) 判定X与Y是否相互独立。

(X,Y)的分布律及边缘分布律为：

X \ Y	1	2	3	4	$P\{X=x_i\}$
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
$P\{Y=y_i\}$	25/48	13/48	7/48	1/16	1

（4）$\because P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{4},\ P\{X=1\}P\{Y=1\}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{25}{48}$

$\therefore P\{X=1,Y=1\}\neq P\{X=1\}P\{Y=1\}$

$\therefore X$与Y不相互独立

例2续：盒中有3个黑球，2个白球，2个红球，在其中任取4个球，以X表示取到黑球的个数，以Y表示取到白球的个数。

(1)（X，Y）的概率分布律；

(2) $P\{X + Y \leq 2\}$；

(3) 求(X，Y)关于X和Y的边缘分布律。

(4) 判定X与Y是否相互独立。

(X,Y)的分布律及边缘分布律为：

X \ Y	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	0	0	1/35	1/35
1	0	6/35	6/35	12/35
2	3/35	12/35	3/35	18/35
3	2/35	2/35	0	4/35
$P\{Y=y_i\}$	1/7	4/7	2/7	1

（4）$\because P\{X=0,Y=2\}=\dfrac{1}{35},P\{X=0\}P\{Y=2\}=\dfrac{1}{35}\times\dfrac{2}{7}$

$\therefore P\{X=0,Y=2\}\neq P\{X=0\}P\{Y=2\}$ $\quad\therefore$ X与Y不相互独立

例3：设一口袋中有12件产品，其中2件次品，每次取一件，取后放回，任取2件。令X：“第一次取到的次品数”，Y：“第二次取到的次品数”，求：

(1)（X，Y）的概率分布律；

(2) 求(X，Y)关于X和Y的边缘分布。

(3) 判定X与Y是否相互独立。

解: (1) X 的所有可能取值为： 0, 1

Y的 所有可能取值 为：0, 1

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\}$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{10}{12}\times\frac{10}{12}=\frac{25}{36}$$

$$P\{X=0,Y=1\}==P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{10}{12}\times\frac{2}{12}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1,Y=0\}==P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{2}{12}\times\frac{10}{12}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1,Y=1\}==P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{2}{12}\times\frac{2}{12}=\frac{1}{36}$$

$\therefore$随机变量X和Y的联合分布律为:

X \ Y	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	25/36	5/36	5/6
1	5/36	1/36	1/6
$P\{Y=y_i\}$	5/6	1/6	1

(2) (X,Y)关于X和Y的边缘分布律分别为:

X	0	1
$P\{X=x_i\}$	5/6	1/6

Y	0	1
$P\{Y=y_i\}$	5/6	1/6

(3) $\because P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\} \quad i,j=0,1$

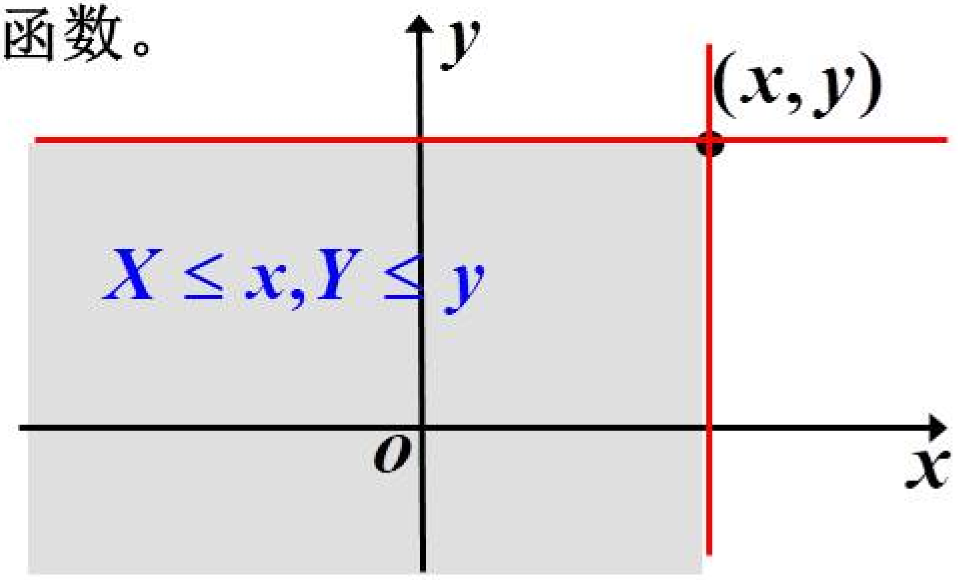
$\therefore X$与Y相互独立

二、二维离散型R.V.的分布函数

1、定义： 设二维R. V. (X, Y)，$\forall x, y \in R$ ，称

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

为 X 与 Y 的联合分布函数。



$F(x, y)$表示随机点（X, Y）落入如图区域内的概率

2、性质

(1) $0 \le F(x, y) \le 1, \forall x, y \in R$

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(\infty, \infty) = 1$$

(2) $F(x, y)$是关于x，**y**的不减函数；

(3) $F(x, y)$是关于x或y的右连续函数；

(4) 若 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2, x_1 < x_2, y_1 < y_2$

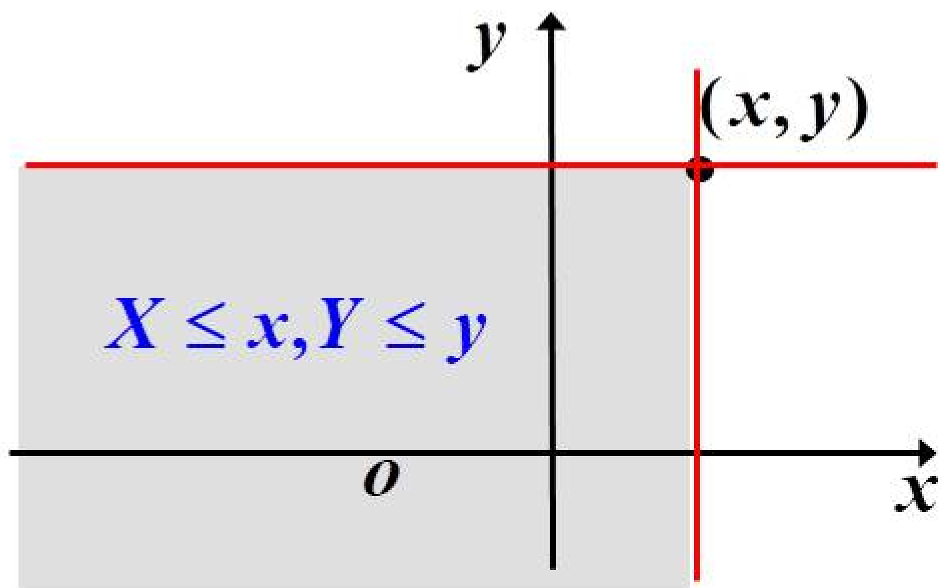
$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

二维离散型R.V.的分布函数

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x,\, y_j\le y} P\{X=x_i, Y=y_j\}$$

其中和式是对一切满足$x_i \le x, y_j \le y$的i, j求和.



小　结

二维离散型R.V.

① 定义

② 联合分布律

③ 联合分布函数

④ 边缘分布律

⑤ X与Y的独立性