概率统计课件之二

第二章 随机变量及分布

主讲教师 邓小艳

随机变量及分布

§ 2-1 随机变量

§ 2-2 一维离散型R.V.及概率分布

§ 2-3 一维连续型随机R.V.及概率分布

§ 2-5 二维离散型及R.V.及概率分布

§ 2-6 二维连续型R.V.及概率分布

§ 2-9 随机变量函数的分布

一、$Y=g(X)$ 的分布

(一) 一维离散型 *R.V.* 函数的分布

若X是离散型的r.v., 则 $Y=g(X)$ 也是离散型r.v.

因此，只要将 Y 所有可能的取值以及相应的概率

找出来，就能得到 Y 的分布律.

设X是离散型 R.V.，其分布律为:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则Y=g(X)也是离散型随机变量，其分布律为:

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

<注>若$g(x_i) = g(x_j)$，则将其概率合并为$p_i + p_j$，只写一个。

例1：设X ~ B (2,1/2)，求下列 R.V. 的分布律。

求：(1) $Y_1 = X^2$；(2) $Y_2 = X^2 - 2X$

(3) $Y_3 = 3X - X^2$

解：∵ X ~ B (2,1/2)　∴列表得：

X	0	1	2
Y_1	0	1	4
Y_2	0	-1	0
Y_3	0	2	2
p	1/4	1/2	1/4

∴ Y_1，Y_2，Y_3的分布律分别为：

Y_1	0	1	4
p	1/4	1/2	1/4

Y_2	-1	0
p	1/2	1/2

Y_3	0	2
p	1/4	3/4

（二）一维连续型R.V.函数的分布

例2： 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度函数。

解：$\because\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\therefore$ X的密度为：$f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

(1) 求Y=g(X)的分布函数；

①定义　　②代入

$$\therefore F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\}$$

③确定X落入的区间

④用X的分布函数表示X落入某区间的概率

$$= P\{X \le \sigma y + \mu\} = F_X(\sigma y + \mu)$$

(2) 两边对 y 求一阶导得

$$f_Y(y) = F_X'(\sigma y + \mu) = f_X(\sigma y + \mu) \cdot (\sigma y + \mu)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

一般方法——代换法

步骤：

(1) 求Y=g(X)的分布函数

$$F_Y(y) \overset{①}{=} P\{Y \le y\} \overset{②}{=} P\{g(X) \le y\}$$

$$\overset{③}{=} P\{X \in [*,*]\} \overset{④}{=} F_X(\varphi(\mathrm{y}))$$

①定义

②代入

③确定X落入的区间（讨论）

④用X的分布函数表示

X落入某区间的概率

(2) 上式两边对y求一阶导得Y=g(X)的概率密度函数。

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(\varphi(\mathrm{y})) = f_X(\varphi(\mathrm{y})) \cdot \varphi'(\mathrm{y})$$

例3: (1) 设R.V. X 的概率密度为 $f_X(x), -\infty < x < \infty$

求 $Y = X^2$ 的概率密度函数;

(2) 设R.V. X~ N(0，1)，求 $Y = X^2$ 的概率密度函数。

解: (1) 求Y=g(X)的分布函数;

对y分情况讨论

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$$

1° 当 $y<0$ 时，$F_Y(y) = P\{X^2 \le y\} = 0 \quad \therefore f_Y(y) = 0$

2° 当 $y \ge 0$ 时，$F_Y(y) = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

(2) 两边对 y 求一阶导得

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y}) \cdot (-\sqrt{y})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right]$$

$\therefore\ Y = X^2$概率密度为

$$f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{y}}}\left[f_X(\sqrt{\mathrm{y}})+f_X(-\sqrt{\mathrm{y}})\right] & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

(2) $\because\ X\sim N(0,1)$

$\therefore$ **X的密度为：** $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad -\infty<x<\infty$

$$\therefore f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{y}}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\right] & y\geq 0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\mathrm{y}}}e^{-y/2} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

例4: 设R.V. X 在区间[0,1]上服从均匀分布，(1) 求 $Y=e^X$ 的概率密度函数；(2) 求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度函数。

解：由题，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$

1° 当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0\quad \therefore f_Y(y)=0$

2° 当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{e^X\le y\}=P\{X\le \ln y\}$

$$=F_X(\ln y)$$

两边对 y 求一阶导得：

$$F_Y'(y) = F_X'(\ln y)$$

$$f_Y(y) = f_X(\ln y)\cdot(\ln y)' = f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{y} & 0<\ln y<1 \\ 0 & \ln y\le 0\text{或}\ln y\ge 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & 1<y<e \\ 0 & 0<y\le 1\text{或}y\ge e \end{cases}$$

综上， $Y=e^X$ 的概率密度为：

$$f_Y(\mathrm{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & 1<y<e \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-2\ln X\le y\}$

1° 当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P\{-2\ln X\le y\}=0 \quad \therefore f_Y(y)=0$

2° 当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{-2\ln X\le y\}=P\{X\ge e^{-y/2}\}$

$$=1-F_X(e^{-y/2})$$

两边对 y 求一阶导得：

$$f_Y(y)=-f_X(e^{-y/2})\cdot(e^{-y/2})'=\frac{1}{2}e^{-y/2}$$

综上，$Y=e^X$ 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

练习：设X～N(0，1)，求：(1) Y= |X| 的密度函数；

(2) $Y=2X^2+1$ 的概率密度函数。

练习1：$\because X \sim N(0,1)$ $\therefore X$ 的概率密度为：$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $-\infty < x < +\infty$

(1) $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\}$

1° 当 $y \le 0$ 时，$F_Y(y) = 0$ $\therefore f_Y(y) = 0$

2° 当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{-y \le X \le y\} = \Phi_X(y) - \Phi_X(-y)$

两边对 y 求一阶导得：

$$f_Y(y) = \Phi_X'(y) - \Phi_X'(-y) = \varphi_X(y) + \varphi_X(-y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$\therefore Y = |X|$ 的概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

(2) 由题，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X^2+1 \le y\}$

1° 当 $y \le 1$ 时，$F_Y(y) = 0$ $\therefore f_Y(y) = 0$

2° 当 $y > 1$ 时，$F_Y(y) = P\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \le X \le \sqrt{\frac{y-1}{2}}\} = \Phi_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}}) - \Phi_X(-\sqrt{\frac{y-1}{2}})$

两边对 y 求一阶导得：

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \Phi_X'\left(\sqrt{\tfrac{y-1}{2}}\right) - \Phi_X'\left(-\sqrt{\tfrac{y-1}{2}}\right) \\ &= \varphi_X\left(\sqrt{\tfrac{y-1}{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{\tfrac{y-1}{2}}\right)' - \varphi_X\left(-\sqrt{\tfrac{y-1}{2}}\right) \cdot \left(-\sqrt{\tfrac{y-1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}} \end{aligned}$$

$\therefore Y = 2X^2+1$ 的概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}} & y > 1 \\ 0 & y \le 1 \end{cases}$$

二、二维随机变量函数Z=g(X,Y) 的分布

（一）二维离散型R.V.函数 的分布

例5：设 (X，Y)的分布律为：

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	$5/20$	$2/20$	$6/20$
2	$3/20$	$3/20$	$1/20$

求：(1) $Z_1=X+Y$的分布律；

(2) $Z_2=\max(X,Y)$的分布律；

(3) $Z_3=\min(X,Y)$的分布律。

解：由题列表得：

(X,Y)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,2)	(2,-1)	(2,1)	(2,2)
$Z_1=X+Y$	-2	0	1	1	3	4
$Z_2=\max(X,Y)$	-1	1	2	2	2	2
$Z_3=\min(X,Y)$	-1	-1	-1	-1	1	2
P_{ij}	5/20	2/20	6/20	3/20	3/20	1/20

$\therefore$ Z_1，Z_2，Z_3 的分布律分别为：

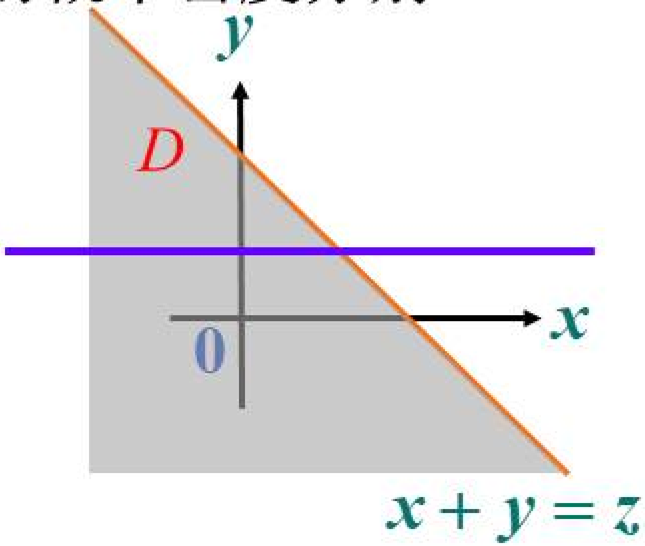
Z_1	-2	0	1	3	4
p	5/20	2/20	9/20	3/20	1/20

Z_2	-1	1	2
p	5/20	2/20	13/20

Z_3	-1	1	2
p	16/20	3/20	1/20

（二）二维连续型R.V.函数的分布

设 (X，Y)的密度函数为 $f(x,y)$，X,Y的概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$. 且X与Y相互独立.



1. Z = X + Y的分布

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

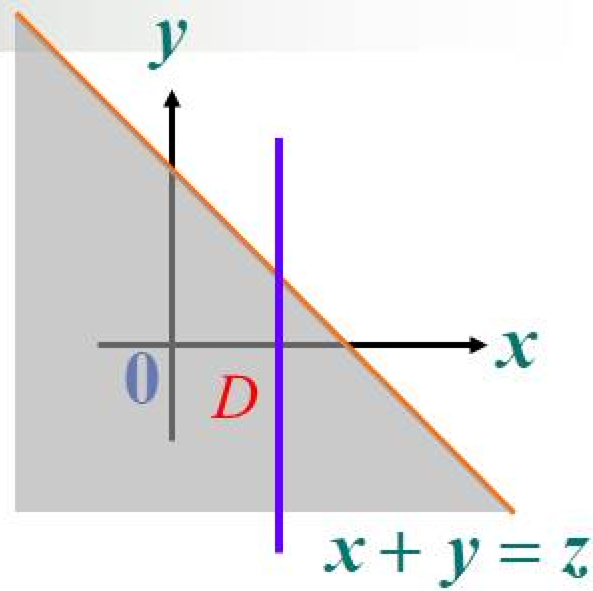
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) f_Y(y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\left[\boxed{\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)\,dx}\right] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,\boxed{F_X(z-y)}\,dy$$

将上式两边关于z求导，得

$$F_Z'(z) = f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy$$

同理可得



$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_{x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f_X(x)f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,dx\int_{-\infty}^{z-x}f_Y(y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\left[\boxed{\int_{-\infty}^{z-x}f_Y(y)\,dy}\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(\mathrm{x})\,\boxed{F_Y(z-x)}\,dx$$

将上式两边关于z求导，得

$$F_Z'(z)=f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

1. Z = X + Y的分布

若X与Y相互独立，则Z=X+Y 的密度函数为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

—— 卷积公式

例6：设R.V. X，Y相互独立，

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

求 Z= X+Y 的概率密度函数。

①

解：∵ X与Y相互独立 ∴ 由卷积公式得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

②确定被积函数的非 0 区域

∵仅当 $\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ x<z\end{cases}$ 时，被积函数不为零

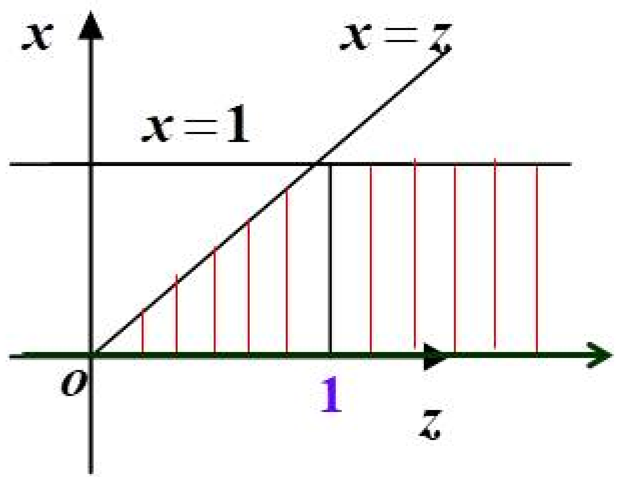
③ 根据非零区域对z分区间

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx =\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx, & 0\le z<1\\ \int_0^1 f_X(x)f_Y(z-x)dx, & z\ge 1\end{cases}$$

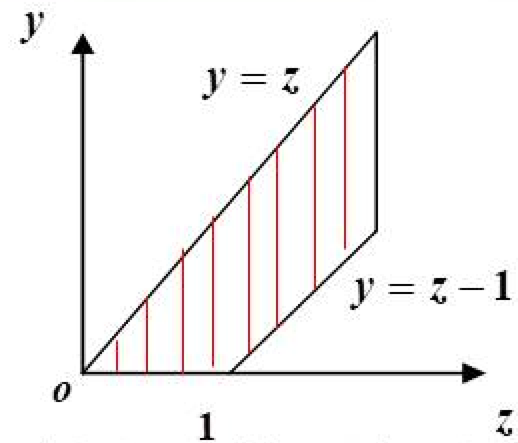
④确定不同区间内$f_z(z)$的表达式

$$=\begin{cases}0, & z<1\\ \int_0^z 1\cdot e^{-(z-x)}dx, & 0\le z<1\\ \int_0^1 1\cdot e^{-(z-x)}dx, & z\ge 1\end{cases}$$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ 1-e^{-z} & 0\le z<1\\ (e-1)e^{-z} & z\ge 1\end{cases}$$



方法二：① $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$



② 确定被积函数的非 0 区域

$\because$ 仅当 $\begin{cases} 0 \le z - y \le 1 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-1 < y < z \\ y > 0 \end{cases}$ 时，被积函数不为零

③

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0 & z<0 \\ \int_0^z f_X(z-y)f_Y(y)dy \overset{④}{=} \int_0^z 1\cdot e^{-y}dy & 0\le z<1 \\ \int_{z-1}^z f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{z-1}^z 1\cdot e^{-y}dy & z\ge 1 \end{cases}$$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases} 0 & z<0 \\ 1-e^{-z} & 0\le z<1 \\ (e-1)e^{-z} & z\ge 1 \end{cases}$$

例7：设R.V. X，Y相互独立，且都在[-a , a]上服从均匀分布，求 Z= X+Y 的密度函数。

解：由题，X，Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & -a\le x\le a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & -a\le y\le a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

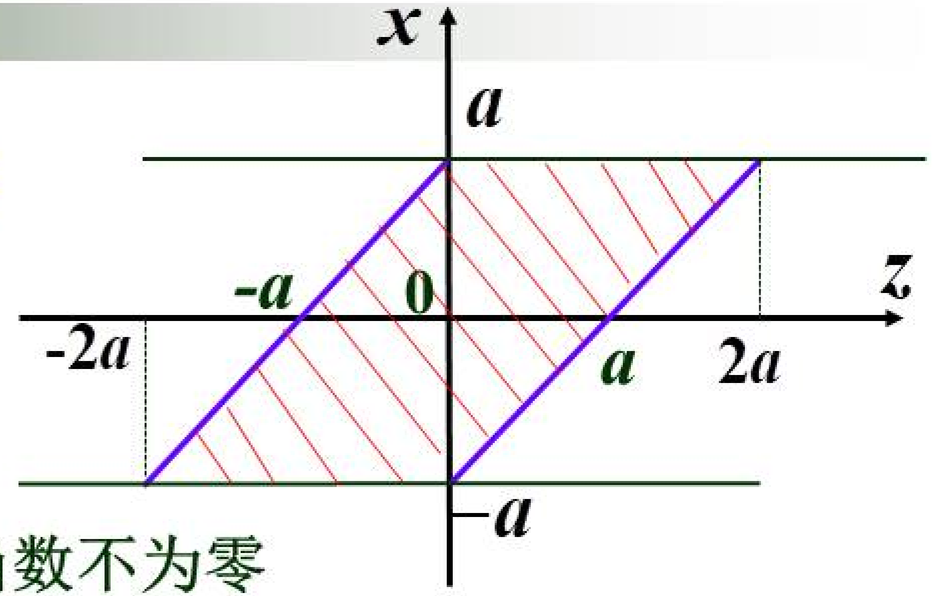
∵ X与Y相互独立 ∴由卷积公式得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

确定被积函数的非 0 区域

$\because$ 仅当 $\begin{cases} -a \le x \le a \\ -a \le z - x \le a \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -a \le x \le a \\ x - a \le z \le x + a \end{cases}$ 时，被积函数不为零



$$\therefore f_Z(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \ dx & z \le -2a \\ \int_{-a}^{z+a} \frac{1}{2a} \times \frac{1}{2a} \ dx & -2a < z \le 0 \\ \int_{z-a}^{a} \frac{1}{2a} \times \frac{1}{2a} \ dx & 0 < z \le 2a \\ \int_{-\infty}^{\infty} 0 \ dx & z > 2a \end{cases} = \begin{cases} \frac{2a+z}{4a^2} & -2a < z \le 0 \\ \frac{2a-z}{4a^2} & 0 < z \le 2a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

练习1：设R.V. X，Y相互独立，X~N(0,1)，Y~N(0,1)，求Z= X+Y 的密度函数。

$\because$ X与Y相互独立 $\therefore$ 由卷积公式得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

2. Z =max(X， Y)，Z=min(X，Y)的分布

已知：X，Y独立，且 $F_X(x), F_Y(y)$

求Z =max(X， Y)，Z=min(X，Y)的分布函数

(1) Z =max(X，Y)

$$F_{\max}(z) = P\{Z \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\}$$

$$= P\{X \le z\} P\{Y \le z\}$$

$$= F_X(z) F_Y(z)$$

$$f_{\max}(z) = F'_{\max}(z)$$

(2) Z = min(X, Y)

$$F_{\min}(z) = P\{Z \le z\} = 1 - P\{Z > z\}$$

$$= 1 - P\{X > z, Y > z\}$$

$$= 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\}$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

$$f_{\min}(z) = F'_{\min}(z)$$

推广：X_1 X_2 $\cdots$ X_n，分布函数为：$F_{X_1}(x_1)$，$F_{X_2}(x_2)$ $\cdots$ $F_{X_n}(x_n)$

且 X_1 X_2 $\cdots$ X_n 相互独立，则

(1) $Z_1 = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数。

$$F_{Z_1}(z) = 1 - [1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

(2) $Z_2 = \max(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 的分布函数。

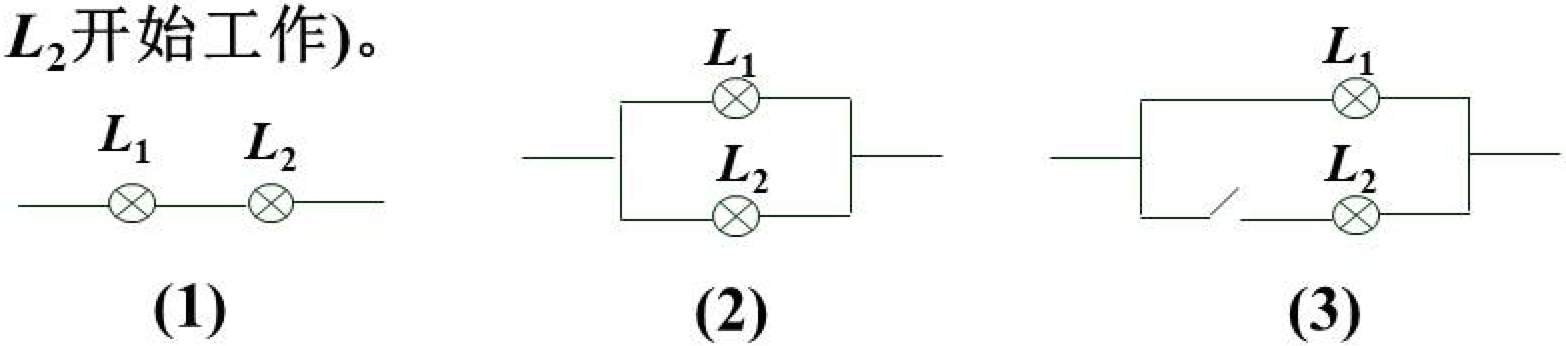
$$F_{Z_2}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

特别地，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立且有相同的分布函数 $F(x)$ 时，

$$F_{Z_1}(z) = F_{\min}(z) = 1 - [1-F(z)]^n$$

$$F_{Z_2}(z) = F_{\max}(z) = [F(z)]^n$$

例8：设系统L由两个相互独立的子系统L_1和L_2联接而成，联接的方式分别为：(1)串联；(2)并联；(3)备用(当L_1损坏时，L_2开始工作)。



$Z_1=\min(X, Y)$　　$Z_2=\max(X, Y)$　　$Z_3=X+Y$

设L_1、L_2的寿命分别为X，Y，已知它们的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

其中，$\alpha>0,\beta>0$且$\alpha\neq\beta$分别就以上三种联接方式求L的寿命Z的概率密度。

解： 由题X，Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x \alpha e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^y \beta e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

(1) 串联情况 $Z_1=\min(X,Y)$

$Z_1=\min(X,Y)$的分布函数为：

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$\therefore\ f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

(2) 并联情况 $Z_2=\max(X, Y)$

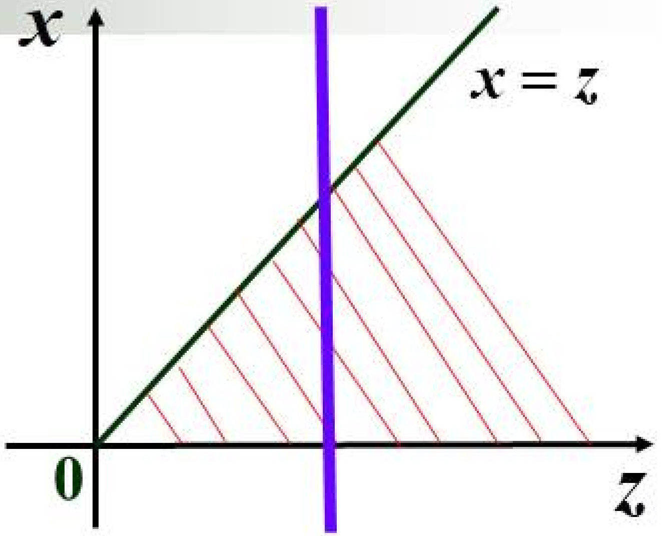
$Z_2=\max(X, Y)$的分布函数为：

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}\left(1-e^{-\alpha z}\right)\left(1-e^{-\beta z}\right) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$\therefore$ $Z_2=\max(X, Y)$的概率密度为：

$$f_{\max}(z)=F'_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

(3) 备用情况 $Z_3 = X+Y$



$\because$ X与Y相互独立 $\therefore$ 由卷积公式得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

$\because$ 仅当 $\begin{cases} x>0 \\ z-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<z \end{cases}$ 时，被积函数不为零

$\therefore$ $Z_3 = X+Y$ 的概率密度为:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta(z-x)}\,dx & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}] & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$$