

# 2011高教社杯全国大学生数学建模竞赛

## A题：城市表层土壤重金属污染分析

### 试题分析

# A题 城市表层土壤重金属污染分析

## A题 城市表层土壤重金属污染分析

对城市土壤地质环境异常的查证，以及如何应用查证获得的海量数据资料开展城市环境质量评价，研究人类活动影响下城市地质环境的演变模式。

按照功能划分，城区一般可分为生活区、工业区、山区、主干道路区及公园绿地区等，分别记为1类区、2类区、.....、5类区，不同的区域环境受人类活动影响的程度不同。

## A题 城市表层土壤重金属污染分析

现对某城市城区土壤地质环境进行调查。为此，将所考察的城区划分为间距1公里左右的网格子区域，按照每平方公里1个采样点对表层土（0~10厘米深度）进行取样、编号，并用**GPS**记录采样点的位置。应用专门仪器测试分析，获得了每个样本所含的多种化学元素的浓度数据。

另一方面，按照2公里的间距在那些远离人群及工业活动的自然区取样，将其作为该城区表层土壤中元素的背景值。

# A题 城市表层土壤重金属污染分析

附件1列出了采样点的位置、海拔高度及其所属功能区等信息，附件2列出了8种主要重金属元素在采样点处的浓度，附件3列出了8种主要重金属元素的背景值。

数学建模任务：

- (1)给出8种主要重金属元素在该城区的**空间分布**，并分析该城区内不同区域重金属的**污染程度**。
- (2)通过数据分析，说明重金属污染的**主要原因**。

# A题 城市表层土壤重金属污染分析

**(3)** 分析重金属污染物的传播特征，由此建立模型，确定**污染源的位置**。

**(4)** 分析你所建立模型的优缺点，为更好地研究城市地质环境的演变模式，还应收集什么信息？有了这些信息，如何建立模型解决问题？

# A题 城市表层土壤重金属污染分析

## A题分数分配表

2011 A题	摘要 (10)	第1问 (25)	第2问 (25)	第3问 (25)	第4问 (15)	总分 (100)

目前采用百分制，最早采用A / B / C / D

# A题 城市表层土壤重金属污染分析

一.摘要（7分），关键词（1分），参考文献（2分），共计10分

摘要（7）	完整	基本完整	一般	差
	7-6	5-4	3-2	1-0

（1）给出8种主要重金属元素在该城区的空间分布，并分析该城区内不同区域重金属的污染程度（方法，结论）。（2）通过数据分析，说明重金属污染的主要原因（方法，污染原因结论）。（3）分析重金属污染物的传播特征，由此建立模型，确定污染源的位置（模型，污染源）。（4）分析你所建立模型的优缺点，为更好地研究城市地质环境的演变模式，还应收集什么信息？有了这些信息，如何建立模型解决问题？（新模型）

# A题 城市表层土壤重金属污染分析

关键词（1）	1	0
	规范 基本规范	无 或者差

参考文献（2）	2	1	0
	规范	基本规范	差



# 摘要的写作

数学建模论文的摘要一般包括6要素：问题、方法、模型、算法、结论、特色。它是建模论文的概括，摘要的好坏将决定你的论文是否吸引读者或者评委的目光。

# A题 城市表层土壤重金属污染分析

## 摘要

本文讨论了城市表层土壤的重金属污染问题。通过对重金属的空间分布、污染程度和传播特征的分析，在菲克定律的基础上建立了污染扩散微分方程，并利用该方程的反演寻找城市的污染源，从而为城市的有效防污治污提供了较合理的科学依据。

针对问题一，采用克里金插值法对未采样区域污染物的浓度进行估算，从而给出各重金属元素在该城市的空间分布。对于每一种污染物，本文利用地质累积指数法评估各采样点的污染程度，并根据不同区域的划分，运用内梅罗指数法计算同一区域内所有采样点的综合污染指数。对照综合污染分级标准，得到各区域的受污状况，其中生活区受Zn的污染较强，工业区受Cu、Hg的污染极强，而山区、公园绿地区总体受污程度较小，而交通区的污染最严重，各污染指数均在中度以上，其中Hg的污染极强。

# A题 城市表层土壤重金属污染分析

针对问题二，经 **KMO**检验和**Bartlett**球度检验，对这8种重金属元素**运用主成分旋转法获得5个主成分**，其累计贡献率达到**87.76%**。第一主成分主有**Cr、Cu、Ni**，主要源于工业“三废”排放污染；第二主成分有**Pb、Cd**，主要源于道路交通的排气污染；第三主成分有**Hg**，主要源于废弃物污染；第四主成分有**As**，主要源于农药化肥污染；第五主成分有**Zn**，主要源于工业及生活污水排放污染。

针对问题三，基于污染物传播特征，引入污染浓度衰减因子，**根据菲克定律建立三维非稳态的污染扩散方程**。利用反演思想，将污染扩散方程中的时间取反，即让时间步长为负数，从而再现污染物的传播历史过程，直到还原到大部分地区的污染物浓度降到最大背景值以下，则位置为污染源。考虑反演数值求解的稳定性问题，运用**Tikhonov**迭代正则化方法对方程进行处理，从而求得真解的合理近似值。

# A题 城市表层土壤重金属污染分析

针对问题四，从土壤溶质运移的物理性质考虑，分析城市地质环境的演变问题仍需收集土壤密度，土壤含水率，对流速度等地理信息。根据这些信息求得土壤溶质在运移过程中的源汇项，并据此在三维非稳态污染扩散方程的基础上进行修改，得到了对流—弥散模型。利用该模型可预测污染的扩散趋势，从而给出城市有效防污治污的建议。

关键词：克里金插值法 主成分旋转 菲克定律 非稳态污染扩散方程反演

# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

二、问题1（25分） 各步骤分别评分

方法1：

a.可用**插值拟合**的方法获得各重金属污染物浓度的空间分布。（15分）

b.再参考由背景值确定的阈值，定量分析城区各区域的污染程度。（10分）

由于空间数据是不规则的，较好的方法是用散乱数据插值，例如**Kriging**插值、**Shepard**插值等。也可以用其他方法插值拟合，但应明确所使用的方法，并作出分析，不能只简单套用软件。

各个污染元素浓度的最大值与插值后浓度的最大值距离不会太远。

# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

评阅时，应着重注意数学模型的建立、计算方法（或所选软件的程序语句）及选择该方法的理由。

# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

主要重金属元素的城区空间分布

## (1) Kriging插值法[1]

针对城市各区域重金属污染程度问题，首先给出8种主要重金属污染物在该城区的空间分布。考虑到土壤的监测点位有限，仅利用有限样点的均值来确定区域总体状况容易跟实际情况发生偏差。为了对区域土壤中污染物的浓度进行较准确的估算，考虑采用Kriging插值法对地块的实测数据作线性、无偏、具有最小估计方差的估计。

普通Kriging插值法的基本原理是根据一个待测地块领域内的若干样品的实测数据、样品的相互位置关系所提供的结构信息，对每个样品值分别赋予一定的权重，然后进行加权平均来估计地块各点的污染物含量。

# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

设点  $M(x, y, z)$  处的污染物的浓度为  $C(x, y, z)$  (下面记为  $C(M)$ ，其余类同)，设预测点  $M_0$  处的污染物的浓度的估计值为  $C^*(M_0)$ ，在该点附近有  $n$  个已知采样点  $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ ，对应的污染物浓度的观测值为  $C(M_i)$ 。

根据普通 **Kriging** 插值法的基本原理，待插点  $M_0$  处的污染物浓度  $C^*(M_0)$  是附近  $n$  个污染物浓度  $C(M_i) (i=1, 2, \dots, n)$  的加权和，即：

$$C^*(M_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i C(M_i) \quad , \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中， $\lambda_i$  为待求权系数。



# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

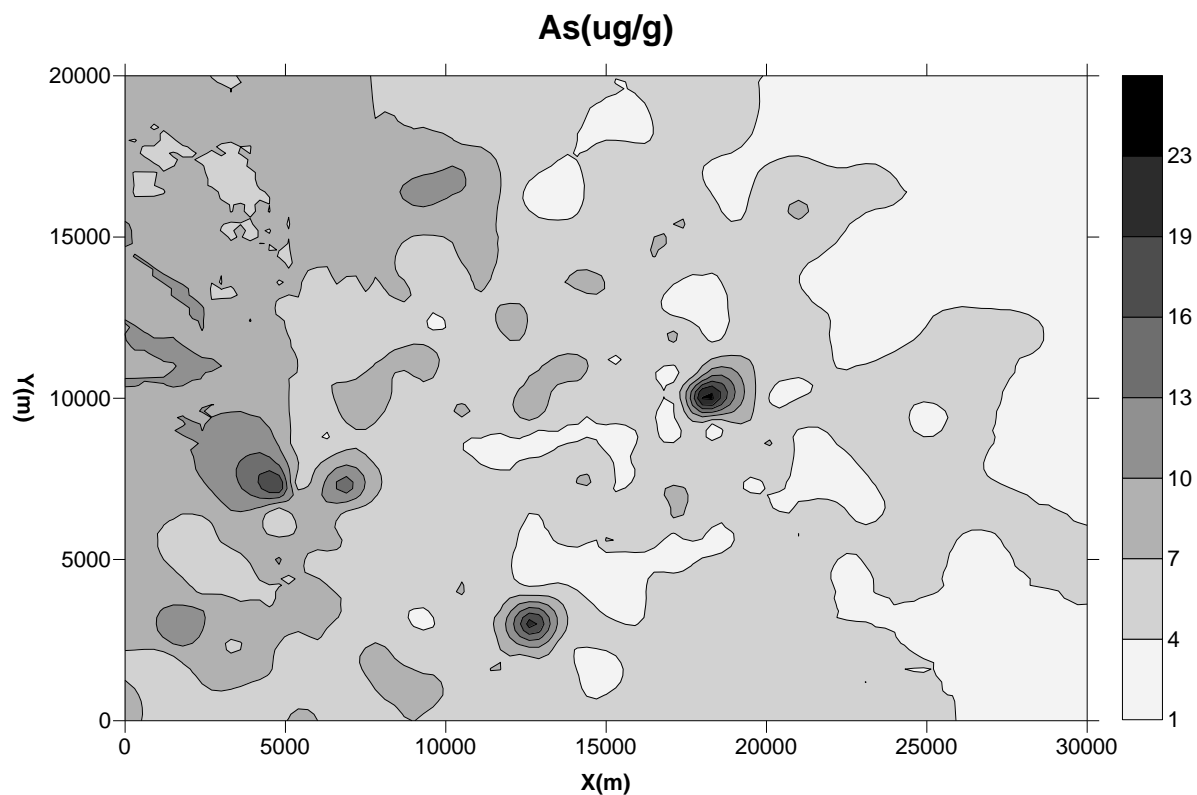
## (2)主要重金属元素的空间分布及分析

运用Kriging法对此次所采的As、Cd、Cr、Cu、Hg、Ni、Pb、Zn 8种重金属浓度值进行网格化处理，按插值网格 $30000 \times 20000\text{m}$ 作Kriging插值，网格间距为100m，共有插值点 $300 \times 200 = 60000$ 个，插值过程中选择线性无偏模型。

根据Kriging插值法，利用Surfer软件作各重金属浓度等高线二维图，得到城区各污染物浓度的分布图如下。

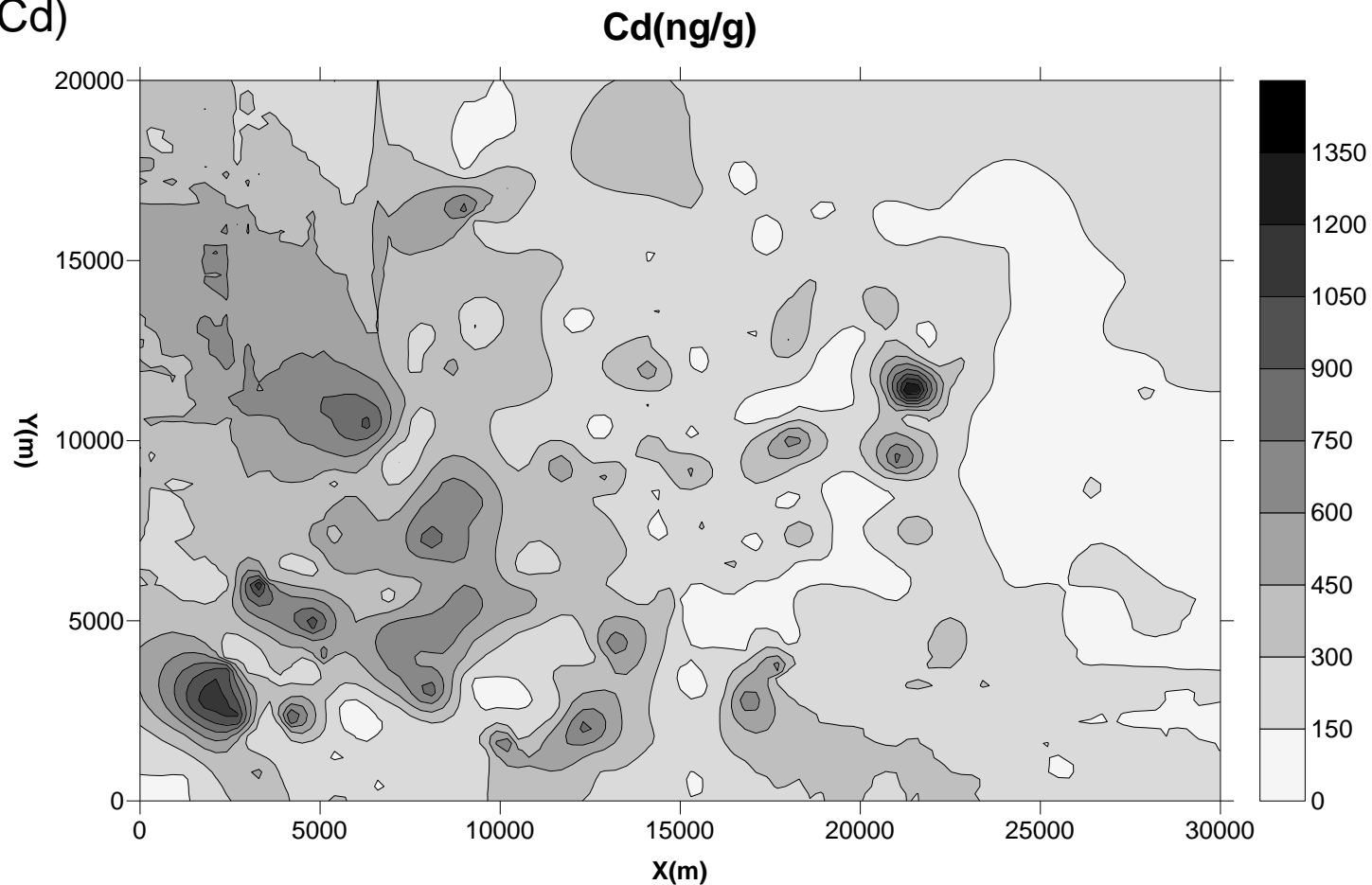
# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

砷(As)



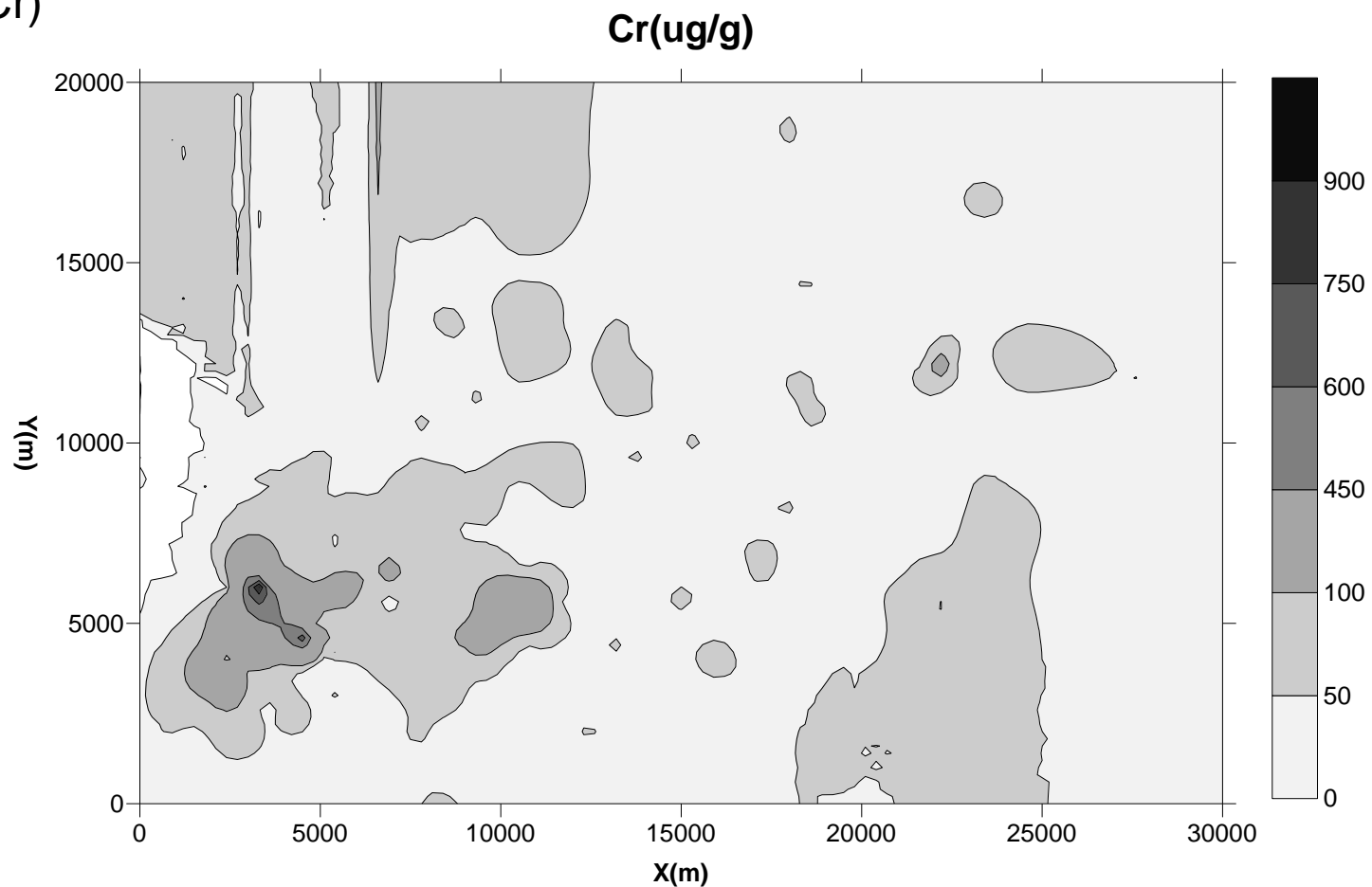
# 问题1 元素的空间分布，污染程度

镉(Cd)



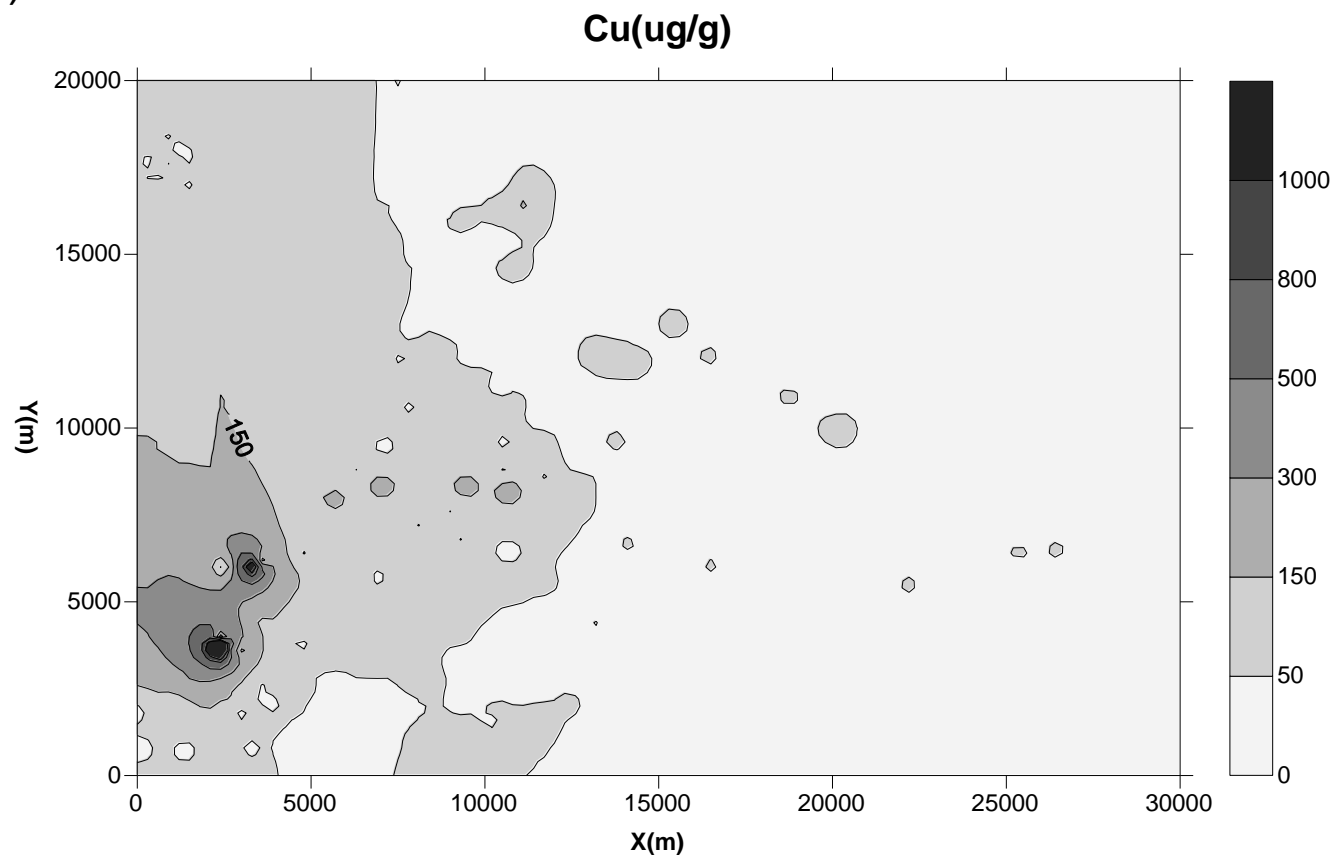
# 问题1 元素的空间分布，污染程度

铬(Cr)



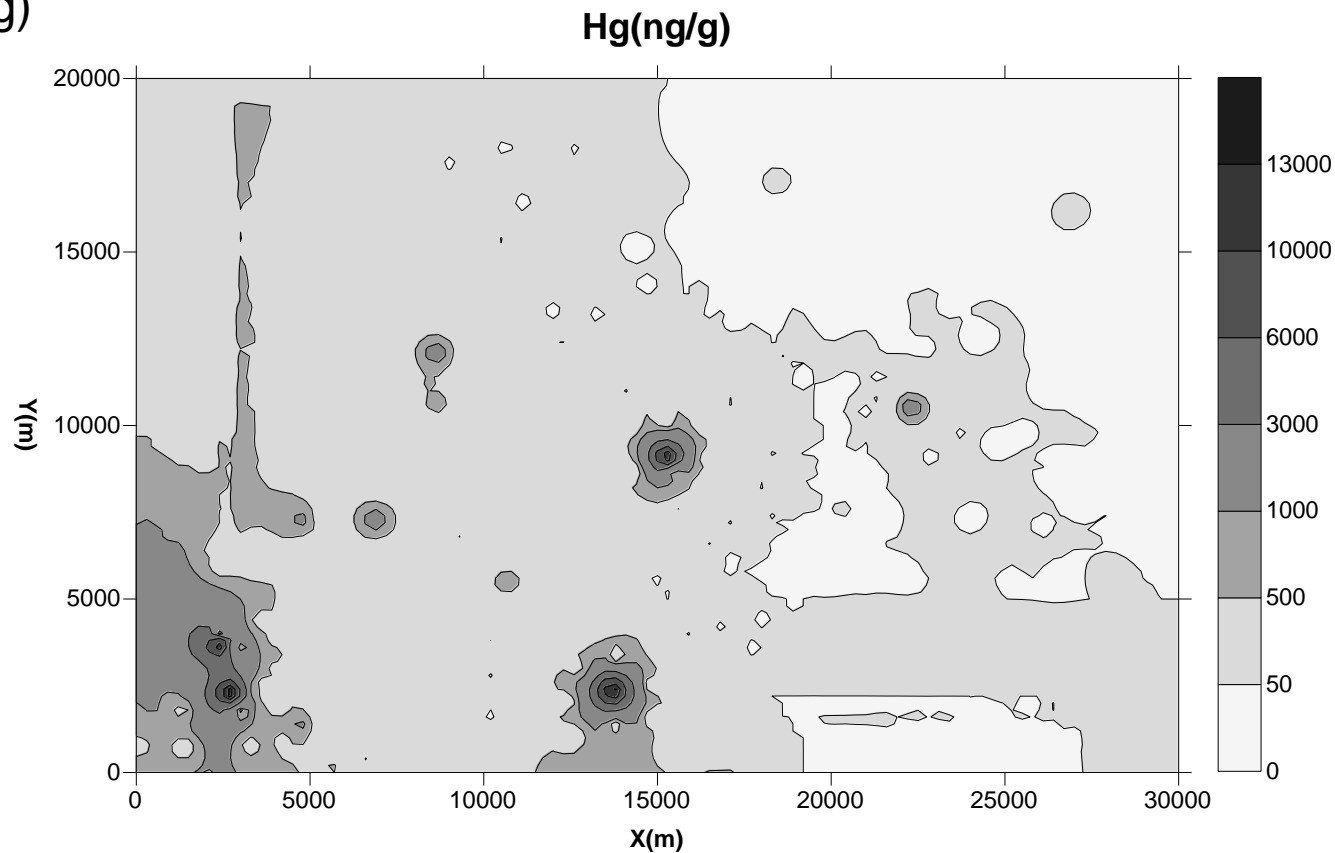
# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

铜(Cu)



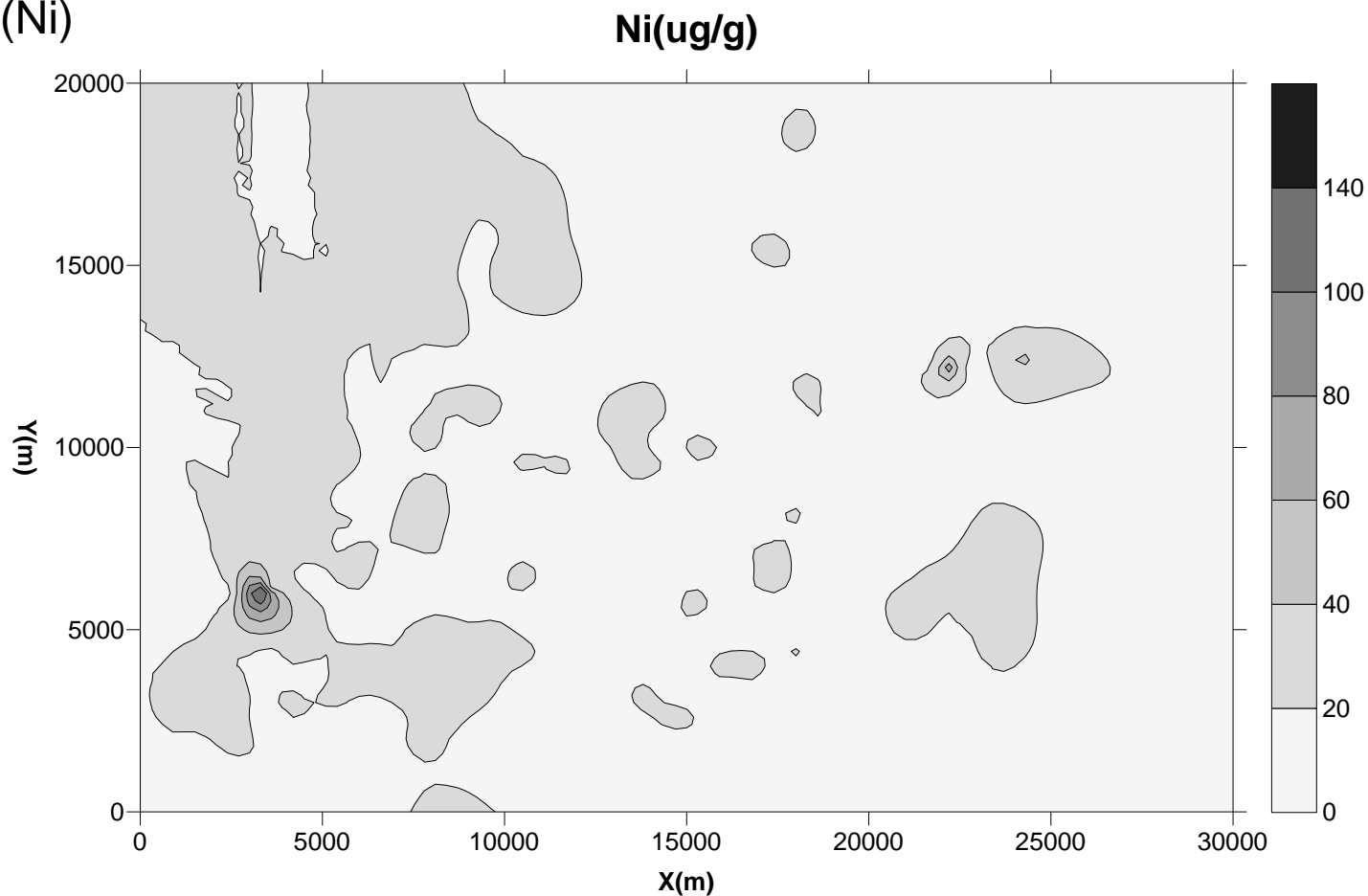
# 问题1 元素的空间分布，污染程度

汞(Hg)



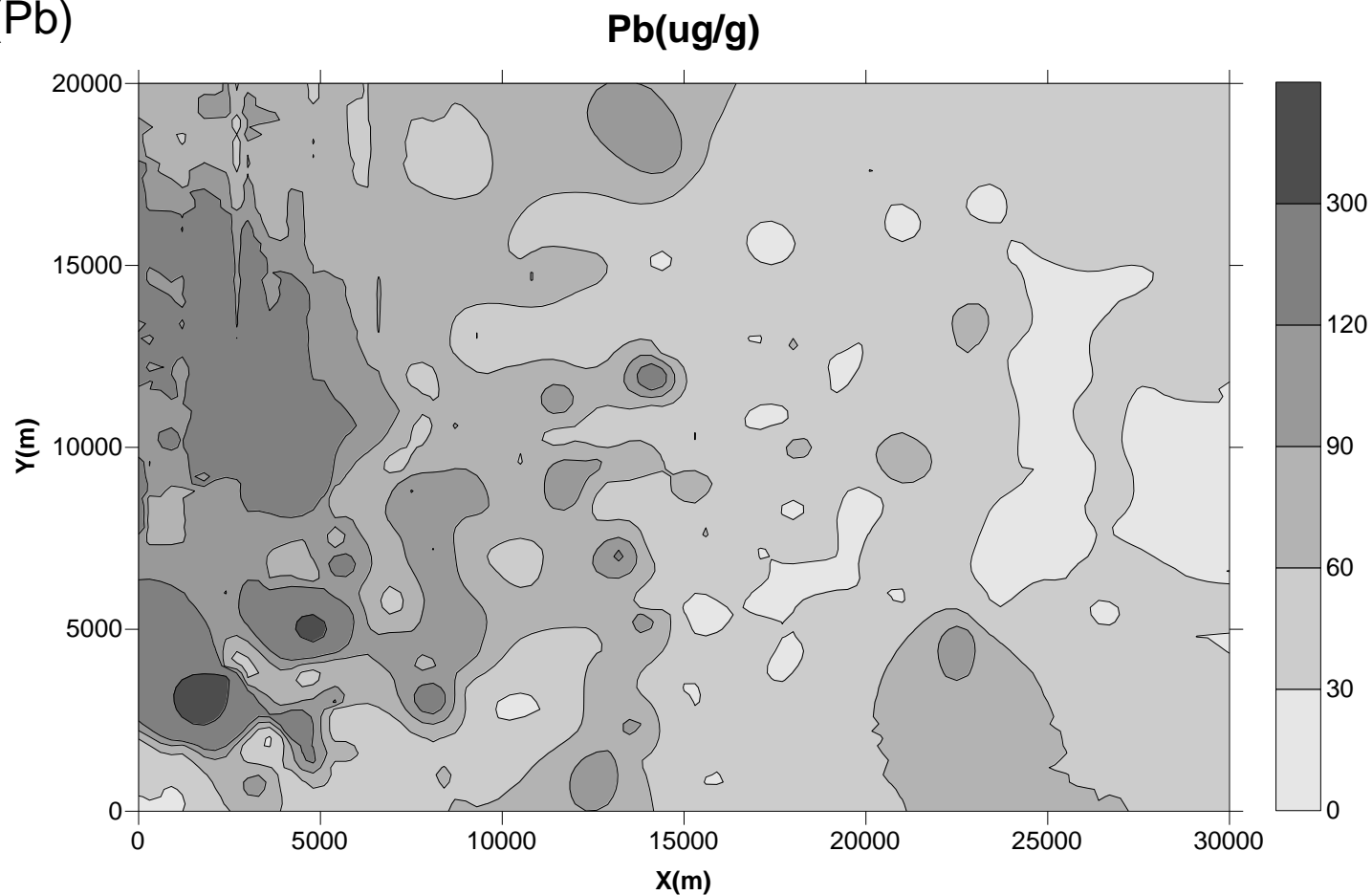
# 问题1 元素的空间分布，污染程度

镍(Ni)



# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

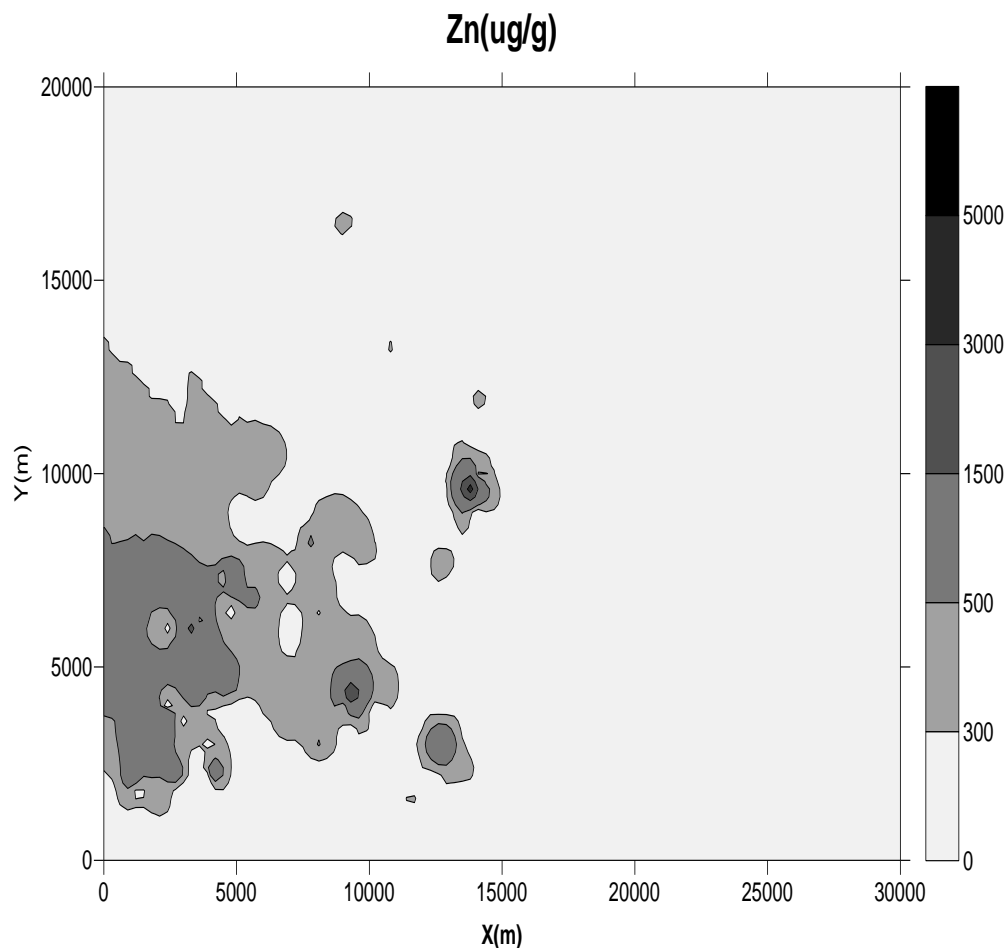
铅(Pb)





# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

锌(Zn)



# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

## ● 表1 各重金属元素浓度分布及污染严重区域

元素	背景平均值	采样平均值	标准值	污染严重区域
As (μg/g)	3.6	5.7	10	—
Cd (ng/g)	130	302	1000	西部交通区
Cr (μg/g)	31	54	250	西部边界的工业区
Cu (μg/g)	13.2	55	100	西部生活区、工业区、交通区
Hg (ng/g)	35	299	1000	西部交通区、工业区及南部生活区
Ni (μg/g)	12.3	17.3	60	—
Pb (μg/g)	31	62	80	—
Zn (μg/g)	69	201	300	西部交通区、工业区及南部生活区

# 问题1 元素的空间分布，污染程度

- 各城区重金属污染程度分析

利用地质累积指数法[2]对每个采样点的污染程度进行定量分析，并通过内梅罗综合指数法[2-3]分别计算各城区的综合污染指数，然后根据综合污染指数分级标准划分各城区某种重金属的污染程度。

# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

- 记  $C_i$  为某污染物第  $i$  个采样点的浓度,  $B$  为该污染物的背景浓度, 则有地质累积指数的计算公式

$$P_i = \log_2 \frac{C_i}{1.5B}$$

利用内梅罗指数法计算各城区该污染物的综合污染指数

$$P = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i \right)^2 + (\max P_i)^2 \right]}$$

$P_i$  为该污染物第  $i$  个采样点的地质累积指数

# 问题1 元素的空间分布，污染程度

## ● 表2 综合污染指数分级

判断依据	意义	判断依据	意义
$0 \leq P < 0.5$	无污染	$3 \leq P < 4$	强污染
$0.5 \leq P < 1$	轻污染	$4 \leq P < 5$	强至极强污染
$1 \leq P < 2$	中污染	$P \geq 5$	极强污染
$2 \leq P < 3$	中至强污染	—	—

# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

● 表3 各城区各污染物综合污染程度

污染物	As	Cd	Cr	Cu	Hg	Ni	Pb	Zn
生活区	轻	中	中至强	中至强	中至强	轻	中至强	强
工业区	中度	中	中	极强	极强	轻	中至强	中至强
山区	轻	轻	中	中	中	中	轻	轻
交通区	中度	中至强	强	强至极强	极强	中至强	中	强
公园绿地区	轻	中	轻	中至强	强	轻	中	中至强

# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

- 方法2： a.通过分析各区域抽样数据的浓度范围、平均值、标准差、和置信度(95.0%)偏移量确定重金属元素的空间分布特征，以各区域浓度值频度图为基础，通过分析确定8种元素分别服从的**概率分布**；（15分）
- b.在内梅罗指数评价法的基础上，分析确定了不同区域的污染程度。（10分）

# 问题1 元素的空间分布， 污染程度

- 方法3： 其他合理有效的方法。

问题1（25）	空间分布	各区域的污染程度
	15	10



## 问题2：分析重金属污染的主要原因

- 问题2（25分）各步骤分别评分  
分析污染产生的**原因**，必须有充分的数据分析以及明确的结论
- a. 充分的**数据分析**（15分）；
- b. **明确的结论**（说明重金属污染的主要原因）（10分）

## 问题2：分析重金属污染的主要原因

- 方法1：例如，可以根据各区域的污染浓度信息进行聚类，考察污染物出现的相关性，发现某些污染物结伴出现（如Cr与Ni，Cd与Pb的相关性较高），这与污染物产生的原因是密切相关的，由此可大致确定出产生这些污染的原因。

## 问题2：分析重金属污染的主要原因

- 方法2：或者采用主成分分析法，利用降维的思想，把多指标转化为少数几个综合指标。主成分分析的基本思想，每个变量都在不同程度上反映了所研究问题的某些信息，并且指标之间彼此有一定的相关性，在定量分析的过程中，涉及的变量较少，得到的信息量较多，利用主成分分析法可大致确定出产生这些污染的原因。

## 问题2：分析重金属污染的主要原因

- 方法3：其他合理有效的方法。

问题2（25分）	充分的数据分析	重金属污染的主要原因
	15分	10 分

## 问题2：分析重金属污染的主要原因

### ● 方法1 聚类分析法

聚类分析法是理想的多变量统计技术，主要有分层聚类法和迭代聚类法。聚类分析也称群分析、点群分析，是研究分类的一种多元统计方法。本问题首先对原始数据进行标准化处理得到各区重金属元素含量分析结果

## 问题2：分析重金属污染的主要原因

生活区重金属元素含量分析结果

生活区	采样点 (个)	背景值	最大值	最小值	平均值	中值	变异系数 (%)
As	44	3.6	11.45	2.34	6.27	5.94	34.3
Cd	44	0.013	1.044	0.086	0.29	0.25	63
Cr	44	31	744.46	18.46	69.02	46.96	156.3
Cu	44	13.2	248.85	9.73	49.40	29.20	95.5
Hg	44	0.035	550	0.012	0.09	0.06	110.6
Ni	44	12.3	32.8	8.89	18.34	18.47	30.9
Pb	44	31	472.48	24.43	69.11	48.54	104.7
Zn	44	69	2893.47	43.37	237.01	120.92	187.2

## 问题2：分析重金属污染的主要原因

表 13 相关性矩阵表

	As( $\mu\text{g/g}$ )	Cd( $\text{ng/g}$ )	Cr( $\mu\text{g/g}$ )	Cu( $\mu\text{g/g}$ )	Hg( $\text{ng/g}$ )	Ni( $\mu\text{g/g}$ )	Pb( $\mu\text{g/g}$ )	Zn( $\mu\text{g/g}$ )
As	1.000	0.381	0.238	0.531	0.293	0.605	0.450	-0.017
Cd		1.000	0.349	0.499	0.397	0.283	0.802	0.346
Cr			1.000	0.376	0.150	0.527	0.416	0.412
Cu				1.000	0.198	0.434	0.502	0.238
Hg					1.000	0.211	0.340	0.242
Ni						1.000	0.300	0.334
Pb							1.000	0.328
Zn								1.000

上表给出了 8 种元素两两之间的相关系数，系数越靠近 1，表示两种之间相关性越强。

## 问题2：分析重金属污染的主要原因

依上表数据并进行相应计算，可以得到主成分中 8 种元素所占的百分比。依照百分比可得到下式：

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.3518 \times f(As) + 0.4123 \times f(Cd) + 0.3381 \times f(Cr) + 0.3834 \times f(Cu) \\&\quad + 0.2587 \times f(Hg) + 0.3608 \times f(Ni) + 0.4223 \times f(Pb) + 0.2635 \times f(Zn) \\x_2 &= (-0.6069) \times f(As) + 0.1607 \times f(Cd) + 0.2198 \times f(Cr) + (-0.2311) \times f(Cu) \\&\quad + 0.1221 \times f(Hg) + (-0.2377) \times f(Ni) + 0.1052 \times f(Pb) + 0.6492 \times f(Zn) \\x_3 &= (-0.0096) \times f(As) + (-0.4022) \times f(Cd) + 0.4755 \times f(Cr) + 0.0231 \times f(Cu) \\&\quad + (-0.4215) \times f(Hg) + 0.5044 \times f(Ni) + (-0.3356) \times f(Pb) + 0.2575 \times f(Zn)\end{aligned}$$

通过百分比分析，主要成分 1 占了主导性地位，因此主成分 1 中所占比例较大的元素也主要影响了生活区的重金属污染问题。 $x_1$  中占主导地位的是 Pb 元素，所占比例为 42.23%，而其次是 Cd 元素，所占比例为 41.23%。其余元素分配较为平均，没有较突出的差别； $x_2$  中占主导地位的元素分别是 Zn 和 Cr； $x_3$  中占主导地位的元素分别是 Ni 和 Zn。



## 问题2：分析重金属污染的主要原因

与此分析相同，可以得出在每种区域中，不同的前三项主成分受到影响更大的元素：

表 17 每种区域中影响主成分的元素表

	生活区	工业区	山区	交通区	公园绿地区
$x_1$	Pb、Cd	Cr、Cu	Cr、Zn	Cu、Ni	Cd、Cr
$x_2$	Zn、Cr	As、Ni	As、Ni	Hg、Pb	Cu、Pb
$x_3$	Ni、Zn		Cu、Hg		As、Hg

生活区第一主成分的组合为 Pb、Cd，Pb 主要来自汽车废气、废旧电池、废弃家电等生活垃圾。Cd 主要来自农药、化肥带来的污染及工业废水。我们认为生物富集效应使 Cd 污染向食物链高层的人集中，导致生活区 Cd 污染严重。

## 问题2：分析重金属污染的主要原因

工业区第一主成分的组合为 Cr、Cu。Cr 污染来源可能与工业区存在电镀、制革等高 Cr 排放产业有关。Cu 的来源与汽车尾气与轮胎磨损是产生的粉尘有关，工业区内出现 Cu 污染极有可能是来自于原料或产品的运输，在运输过程中在空气中排放或残留 Cu 粉尘。

山区第一主成分的组合为 Cr、Zn。Cr 和 Zn 的来源有可能是来自于某些山区中的生产工业，也有可能来源于含 Cr 元素的废物的不安全处置。

交通区第一主成分的组合为 Cu、Ni。Cu 的来源已经分析过，是因为汽车尾气与轮胎粉尘导致污染。由于 Ni 的主要来源为矿石开采、冶金和合金冶炼，因此我们推断，Ni 在交通区造成污染的原因是 Ni 元素的运输导致含 Ni 粉尘对土壤产生一定量污染。

公园绿地区第一主成分的组合为 Cd、Cr。在此，Cd 的主要来源应为农药化肥的使用以及生活垃圾的排放。Cr 含量高可能是因为公园绿地电镀设施的使用。

在确定了各区域主要影响成分和形成影响原因后，需要进一步进行污染源的定位，从而有效地治理污染状况

## 问题2：分析重金属污染的主要原因

- 要点：相关性分析
- 主成分分析
- 找出主要污染的原因

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

问题3 (20分)	建立合理的数学模型	确定出污染源的位置
	(15分)	(10分)

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

- **方法1**：例如，由于雨水的作用是重金属在土壤表层中传播的主要原因之一，可以假设传播以对流形式为主，由此建立对流方程，并以给出的重金属污染物浓度数据作为初始值（实际上是终值），从而得到偏微分方程的定解问题。
- a. 建立**对流扩散方程**，及初值条件（15分）；
- b. 得到偏微分方程的解，确定出污染源的位置（10分）。

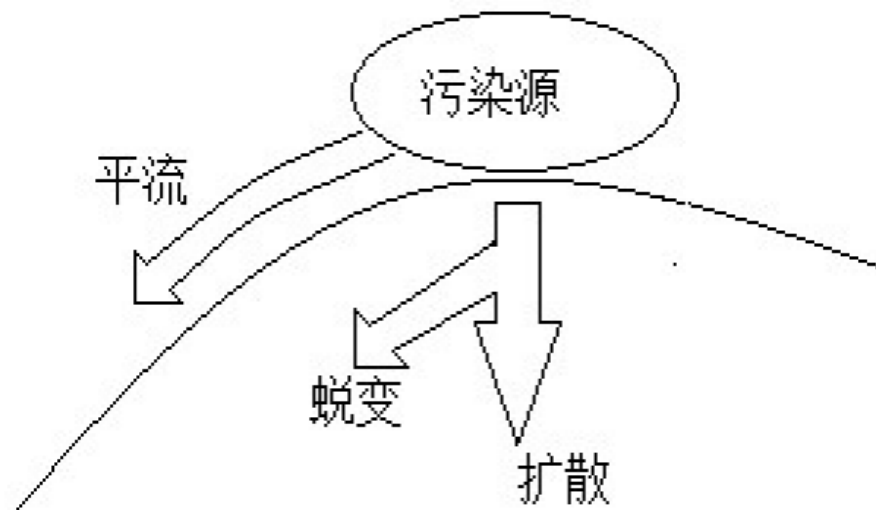
### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

- **方法2：** 例如采用插值拟合的方法，可以得到地形高度函数。
- 利用特征线法，可以得到各区域在各个时间点上的重金属污染物浓度数据，从而可以得到各时间的污染范围，由此确定出污染源的位置。
- a. 采用插值拟合的方法，可以得到地形高度函数，（15分）；
- b. 确定出污染源的位置（10分）。
- **方法3：** 其他合理有效的方法。

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

污染物离子在土壤中的主要传播形式<sup>[6]</sup>有：

- (1) 平流：离子随着水的流动被输送；
- (2) 扩散：离子从高浓度向低浓度迁移；
- (3) 蜕变：离子在扩散过程中被吸附、参与化学反应等过程。



### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

通过对以上传播特征的分析，我们发现在污染源附近，重金属污染物的运移形式与动水环境中的污染物扩散现象<sup>[7]</sup>非常相似，由此本文借用对流扩散函数建立重金属污染物的传播模型。对流扩散模型的二维控制方程：

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + u_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + u_y \frac{\partial C_i}{\partial y} = D_i \left( \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} \right) + r_i \quad (8)$$

$C_i$  为金属浓度， $(x, y)$  为观察点的水平面坐标， $u_x$ 、 $u_y$  为流速在  $x$ 、 $y$  的分量， $D_i$  为元素  $i$  在土壤中的扩散系数， $r_i$  为在扩散过程中由于化学反应所增加的量。上式中包含污染物离子运移的三种主要形式， $u$  体现离子的平移过程， $D$  体现扩散过程， $r$  代表蜕变过程。

金属元素在土壤中的流动以水为载体，而土壤中，地下水的流速非常缓慢<sup>[8]</sup>，在无水头差的情况下，忽略化学反应对扩散产生的影响，则可将上式简化为：

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + u_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + u_y \frac{\partial C_i}{\partial y} = D_i \left( \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

联系实际，城市污染源大致可分为三类：单点污染源（ss）、多点污染源（ds）、带状污染源（rs）。



### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

单点污染源：与其他的污染源距离很远，相互之间的影响作用很小，适用于位于城区边缘地带的工厂等污染源。

多点污染源：多个污染源集中，相互影响作用大，适用于工业生产聚集地带。

带状污染源：污染源呈带状分布，适用于交通、河流等区域的污染。

本文中，由于城市的交通、河流的分布信息未知。因此，在确定污染源位时，我们主要讨论单点污染源与多点污染源的情况。

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

#### （一）单点污染源

可假设污染源的坐标为 $(x_0, y_0)$ ，则可得到如下解析解<sup>[9]</sup>：

$$C_i(x, y, t) = \frac{Q}{(4\pi D_i t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4D_i t}} \quad (10)$$

式中 $Q$ 为污染源的平均排污量。本文讨论在稳定状态下的污染物空间分布，即 $D_i t$ 应为一常数，设为 $DT$ 。又考虑到污染物离子在 $x$ 和 $y$ 方向的扩散系数不一样，可建立如下模型：

$$C_i(x, y) = \frac{Q}{(4\pi DT)^{3/2}} e^{-\frac{d_x \times (x-x_0)^2 + d_y \times (y-y_0)^2}{4DT}} \quad (11)$$

令 $k_1 = -\frac{d_x}{4DT}$ ， $k_2 = -\frac{d_y}{4DT}$ ， $k_3 = \ln \frac{Q}{(4\pi DT)^{3/2}}$ 。再考虑到模型带来的误差（ $\varepsilon$ ）：

$$C_i(x, y) = e^{k_1 \times (x-x_0)^2 + k_2 \times (y-y_0)^2 + k_3} + \varepsilon \quad (12)$$

取对数，得到下式：

$$\ln(C_i(x, y)) = k_1 \times (x-x_0)^2 + k_2 \times (y-y_0)^2 + k_3 \quad (13)$$

通过对特定区域内的浓度分布数据进行拟合，可以得到各系数参数： $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$ ，以及污染源的位置 $(x_0, y_0)$ 。

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

#### (1) 污染源的确定（以D区中的砷为例）

以下以As在D区的分布为例，求解模型。

选定区间， $15 \leq x \leq 24$ ， $8 \leq y \leq 12$ ，用MATLAB进行多元非线性回归，得到如下结果和图形：

表6 参数结果

参数	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$x_0$	$y_0$
结果	-0.0129	-0.0091	1.7413	19.2090	12.6902

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

由此可以得出结论，在  $x=19209m$ ， $y=12690.2m$  处存在一个 As 污染源。

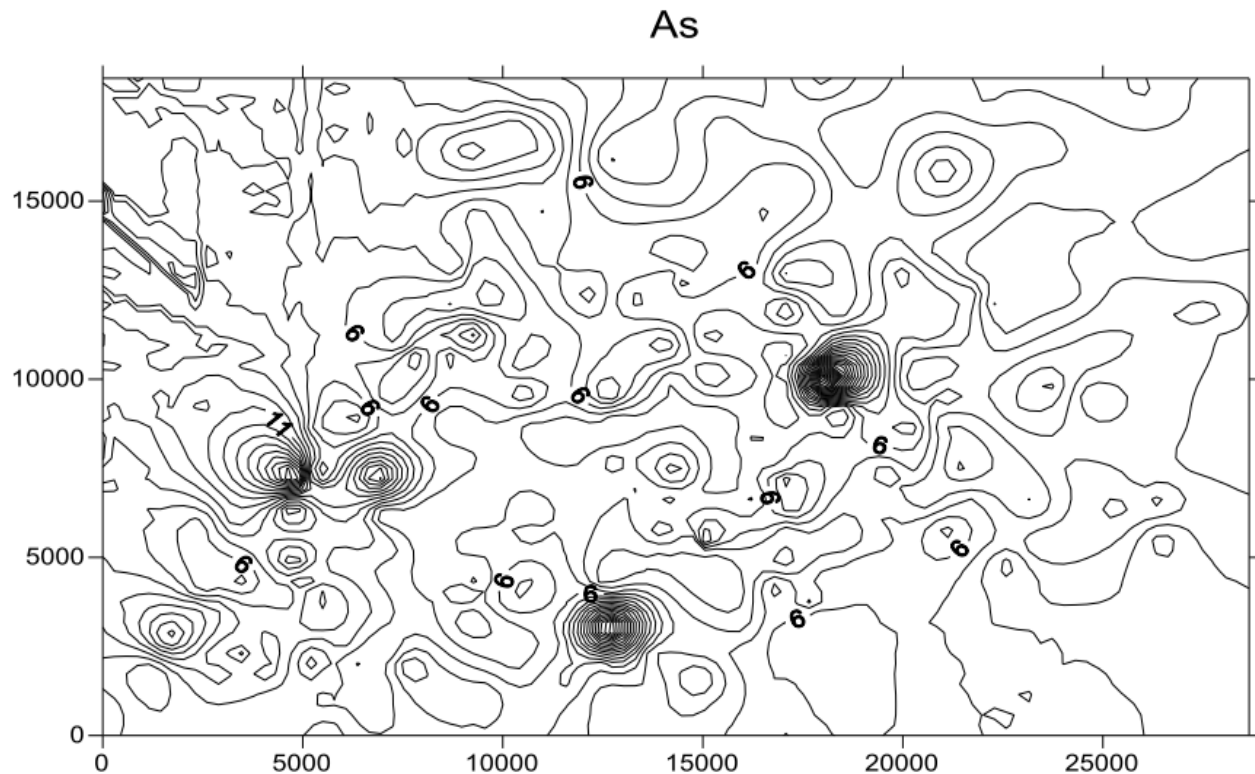


图 12 As 浓度在全城分布的等值图

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

#### （二）多污染源点

假设在某一区域内分布有  $n$  个污染源，且这  $n$  个污染源相互之间的距离足够近。则在此区域及其周边地带，重金属离子浓度的分布是所有污染源的共同作用的结果。结合考虑单点污染源模型，该区域内的重金属元素浓度的解析式中包含单点作用的累积和：

$$C = \sum_{i=1}^n e^{a_i * (x-x_i)^2 + b_i * (y-y_i)^2 + c_i}$$

式中  $a_i$ 、 $b_i$ 、 $c_i$  均为常数， $(x_i, y_i)$  为污染源  $i$  的空间位置。上式仅考虑各污染源的叠加作用，而并没有考虑污染源之间的相互影响。因此，增加污染源之间的交叉项：

$$C = \sum_{i=1}^n e^{a_i * (x-x_i)^2 + b_i * (y-y_i)^2 + c_i} + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n k_i * e^{a_i * (x-x_i)^2 + b_i * (y-y_i)^2 + c_i} * e^{a_j * (x-x_j)^2 + b_j * (y-y_j)^2 + c_j} \quad (14)$$

最后，同样需要考虑模型会带来的误差：

$$C' = C + \varepsilon$$

综合考虑上述多污染源点模型，既能体现单污染源点的累加，也能体现它们之间的相互抑制或促进作用。同样，参照等值图，利用重金属浓度数据进行拟合，可以确定各污染源的位置。在第二问中，我们发现 A 区 Cu 元素的分布具有双源性。下边以在  $0 < x < 5000$ 、 $1500 < y < 7000$  区域内的 Cu 元素浓度为例，求得该区域内的 Cu 污染源：

污染源 1：  $x_1 = 5404m$ ，  $y_1 = 7238m$ ；

污染源 2：  $x_2 = 2231m$ ，  $y_2 = 5576m$ 。

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

#### (三) 模型结果

表 7 污染源分布

污染源	1	2	3	4	5	6
X (m)	12396	14073	21202	5404	19165	2231
Y (m)	2654	8707	12567	7238	11396	5576

与（一）、（二）相似的，我们基于问题二中得出的其他污染源范围内的样本点分别建立对流扩散模型，在把位置相近的污染源合并之后得到了如表 7 所示的某市 8 种主要重金属污染源分布表。

**问题4：** 分析你所建立模型的优缺点，为更好地研究城市地质环境的演变模式，还应收集什么信息？有了这些信息，如何建立模型解决问题？

(4) 本问题只给出一个时间点上的数据，信息量明显不足，需要补充更多的信息。

如果学生考虑到多个时间点上的采样信息，给出更好的演化模式，应予以鼓励。

- a. 收集新信息，建立了合理的数学模型（10分）；
- b. 给出了模型的解（5分）

问题4（15分）	合理的数学模型	给出了模型的解
	10分	5分



**问题4：** 分析你所建立模型的优缺点，为更好地研究城市地质环境的演变模式，还应收集什么信息？有了这些信息，如何建立模型解决问题？

### （一）数据信息补充

加入时间因素后，我们需要收集如下信息来完善公式（11）

- （1） 由于污染源处的排污总量是随时间不断变化的，因此我们需要收集不同污染源处的每日排污量  $Q'_i$ ；
- （2） 根据相关资料，植物、微生物以及一些低等动物都有降低重金属浓度的能力，因此，我们需要收集不同区域每日吸收的重金属量  $R(x, y)$ 。

### （二）模型建立

通过加入上述信息后，我们可以得到改进后的重金属污染物传播模型：

$$C_i(x, y, t) = \frac{Q + Q'_i - R(x, y)}{(4\pi D_i t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4D_i t}} \quad (15)$$

其中， $x, y, t$  分别为水平位置与时间， $Q$  为  $t=0$  时的污染源的排污量总量， $D_i$  为元素  $i$  在土壤中的扩散系数。



**问题4：** 分析你所建立模型的优缺点，为更好地研究城市地质环境的演变模式，还应收集什么信息？有了这些信息，如何建立模型解决问题？

### （三）模型求解

改进后的模型综合考虑了时间、每日排污量、每日吸收量等动态因素，但也增大了模型求解的难度。在本节，我们提出一种最优值算法求解模型。

因为各采样点的8种重金属浓度已经给出，所以本文的思路是通过使污染物浓度的理论解与测量值偏差最小，来求解改进后重金属污染物模型的各个参数。

假设污染物  $i$  的浓度的理论值是  $C_t$ ，测量值是  $C_f$ ，则：

$$\begin{cases} \min \sum (C_t - C_f)^2 \\ C_t = \frac{Q + Q'_i - R(x, y)}{(4\pi D_i t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4D_i t}} \end{cases}$$

**问题4：** 分析你所建立模型的优缺点，为更好地研究城市地质环境的演变模式，还应收集什么信息？有了这些信息，如何建立模型解决问题？

### (1) 对流方程

对流是指溶质随着土壤水分的运移过程而进行的运动过程。在单位时间内通过单位土壤横截面积的溶质质量称为溶质通量。溶质在土壤中的溶质通量与土壤水分通量和溶质的浓度有关，它们之间的关系可用数学表达式表示为：

$$J_c = CJ_w$$

其中， $J_c$ 为土壤溶质对流通量， $J_w$ 为土壤水分通量， $c$ 为土壤溶质的浓度。将土壤平均孔隙流速  $v = \frac{J_w}{\theta}$  代入上式，可得：

$$J_c = v\theta C$$

其中 $v$ 为土壤的平均孔隙流速， $\theta$ 是土壤的体积含水率。

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

#### (2) 水动力弥散方程

水动力弥散是扩散作用和机械弥散作用的联合形式，它所引起的溶质通量可以用数学表达为：

$$J_{dh} = -\theta D \frac{\partial C}{\partial z}$$

其中 $D$ 为有效水动力弥散系数，且在一维情况下， $D = D_s + D_h = D_0 \tau + \lambda |v|^n$ ，式中 $D_0$ 为溶质子在自由水中的扩散系数， $\tau$ 为弯曲系数， $\lambda$ 为弥散度， $v$ 为孔隙的平均流速，而 $n$ 则是经验数，一般近似等于1。

### 问题3：重金属污染物的传播特征模型，确定污染源位置

#### (3) 对流—弥散模型<sup>[4]</sup>的建立

综上所述，溶质在土壤中的运移总通量是对流通量和水动力弥散通量的总和，即：

$$J = J_c + J_{dh} = J_w C - \theta D \frac{\partial C}{\partial z}$$

根据质量守恒原理，在所研究的土壤体积内，溶质的变化率应该等于流入和流出的溶质通量之差，根据菲克第二定律，以推导出一维土壤溶质运移的连续方程为：

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta D \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial(\theta v C)}{\partial z} \quad (10)$$

当土壤溶质流动是稳态流时， $D$ 为常量，所以上式(10)变为：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - v \frac{\partial C}{\partial z}$$

考虑到土壤溶质在运移过程中的源汇项，包括溶质受到土壤的吸附、生物吸收以及溶质的化学衰变等。如果仅考虑溶质运移过程中仅受到土壤的吸附，当我们选取 Henry 吸附模型时，土壤溶质运移方程考虑源汇项的土壤溶质运移方程可以写成：

$$R_d \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - v \frac{\partial C}{\partial z}$$

其中  $R_d = 1 + \frac{\rho_b K_d}{\theta}$ ， $\rho_b$  为土壤密度， $K_d$  为分配系数， $\theta$  为土壤含水率。

在上式的基础上同时考虑土壤溶质会发生反应衰减，假设其衰减反应式一阶反应，则上式可改写为：

$$R_d \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - v \frac{\partial C}{\partial z} - \lambda C$$

推广到三维的对流—水动力弥散方程为：

$$R_d \frac{\partial C}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - v_1 \frac{\partial C}{\partial x} - v_2 \frac{\partial C}{\partial y} - v_3 \frac{\partial C}{\partial z} - \lambda C$$

## A题 解题要点

(1) 给出8种主要重金属元素在该城区的空间分布，并分析该城区内不同区域重金属的污染程度。

要点：Kriging插值、Shepard插值等 确定重金属元素在该城区的空间分布，**内梅罗综合指数法**分别计算各城区的综合污染指数分析该城区内不同区域重金属的污染程度。

(2) 通过数据分析，说明重金属污染的主要原因。

要点：对各区域的污染浓度信息进行聚类，考察污染物出现的相关性，用主成分分析法，找出各区的主要污染物，分析给出重金属污染的主要原因

(3) 分析重金属污染物的传播特征，由此建立模型，确定污染源的位置。

要点：建立单点和多点污染传播方程，根据理论解，和实际数据，利用回归确定求污染源

(4) 分析你所建立模型的优缺点，为更好地研究城市地质环境的演变模式，还应收集什么信息？有了这些信息，如何建立模型解决问题？

要点：考虑到多个时间点上的采样信息，给出更好的演化模式

# 如何写好数学建模竞赛答卷

谢谢大家!