第六章 参数估计

主讲教师 邓小艳

成都信息工程大学应用数学学院

参 数 估 计

§ 6-1 参数的点估计

§ 6-2 估计量的评选标准

§ 6-3 参数的区间估计

§ 6-4 正态总体均值的置信区间

§ 6-5 正态总体方差的置信区间

§ 6-4　正态总体均值的置信区间

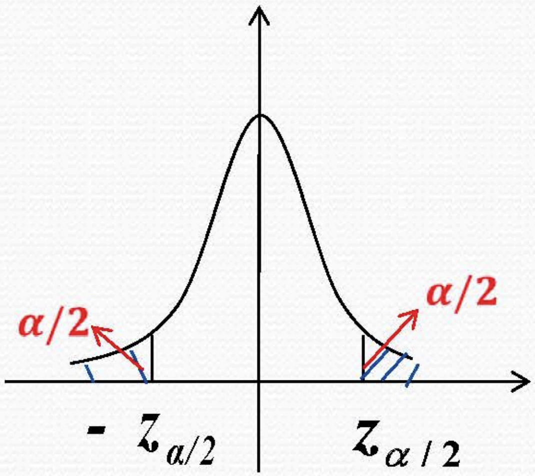
- 单个正态总体均值 μ 的置信区间
- 两个正态总体均值差$\boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2}$的置信区间

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体X的样本.

样本均值：$\bar{X}$　　　样本方差：S^2

给定置信水平为：$1-\alpha$

1、σ^2 已知，求μ的置信区间



① 选统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

② $P\left\{-z_{\alpha/2}<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

③ $P\left\{\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间：

$$\boxed{\left(\overline{X}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(\overline{X}\pm Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

例1： 从某鱼塘捕获的鱼，其含汞量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\sigma = 0.32$，μ 未知，现随机的取了10条鱼，测得含汞量如下：0.8, 1.6, 0.9, 0.8, 1.2, 0.4，0.7, 1.0, 1.2，1.1，求均值 μ 的置信区间(置信水平为0.95)

解析： 这是正态总体中 σ^2 已知，求 μ 的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$$

解： 由题知 $\overline{X}=0.97,\ \sigma=0.32$

由 $1-\alpha=0.95$，知 $\alpha=0.05$

又 $Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}=1.96$

μ 的置信水平为0.95的置信区间为：

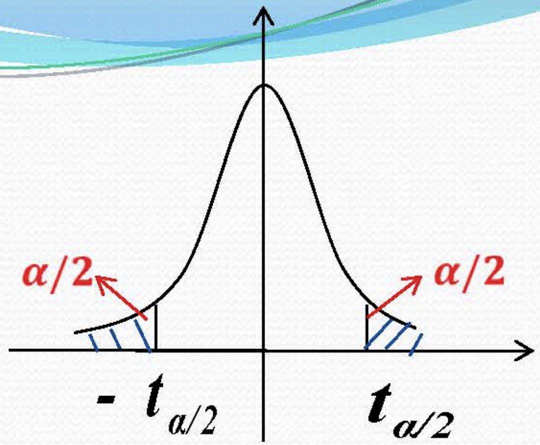
$$\left(\overline{X}\pm Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(0.772,1.168)$$

σ^2已知 $\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$

$\boxed{S}$

σ^2未知 $\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(\mathrm{n}-1)}$

2、σ^2未知，求μ的置信区间



① 选统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

② $P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$

③ $P\left\{\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$

μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间：

$$\boxed{\left(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=\left(\overline{X}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)}$$

例2： 某仪器间接测量温度，重复测5次：1250℃, 1265 ℃, 1245 ℃, 1260 ℃, 1275 ℃，设测量值 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求温度真值的置信区间，使可信程度为95%。

解析： 这是σ^2未知，求μ的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

解：$\because \bar{x}=1259, S^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=\frac{570}{4}$

由$1-\alpha=0.95$，知$\alpha=0.05$

又$\because t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(4)=2.776$

μ的置信水平为0.95的置信区间为：

$$\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=\left(1259\pm\sqrt{\frac{570}{5\times 4}}\cdot 2.776\right)$$

$$=(1244.2，1273.8)$$

练习1： 已知某种钉子的长度X服从正态分布，现抽了9个样品，长度为：20, 16, 18, 17, 18, 17, 19, 18, 19

求: (1)钉子平均长度的置信区间(置信水平为0.95).

解： 这是σ^2未知，求μ的置信区间

由题知：$\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=}^{9} x_i = 18$ $\quad S^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{3}{2}$

$$\because 1\text{-}\alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

查表得：$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$

$\therefore$ μ 的置信水平为0.95的置信区间为:

$$\left(\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(18 \pm 2.306 \times \sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{9}}\right) \approx (17.0587, 18.9413)$$

练习2： 设总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$，X_1， X_2，…，X_9为来自总体X的样本，样本均值为5，求μ的置信水平为95%的置信区间.

解： 这是σ^2已知，求μ的置信区间

由题知：$\bar{x}=5$，$\sigma^2=0.9^2$，$n=9$

$$\because 1-\alpha=0.9 \Rightarrow \alpha=0.05$$

$$\text{而}\Phi(z_{\alpha/2})=\Phi(z_{0.025})=0.975 \qquad \therefore z_{0.025}=1.96$$

$\therefore$ μ 的置信水平为0.95的置信区间为：

$$\left(\bar{X} \pm z_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(5\pm 1.96\times\frac{0.9}{\sqrt{9}}\right)=(4.412, 5.588)$$