第六章 参数估计

主讲教师 邓小艳

成都信息工程大学应用数学学院

参 数 估 计

§ 6-1 参数的点估计

§ 6-2 估计量的评选标准

§ 6-3 参数的区间估计

§ 6-4 正态总体均值的置信区间

§ 6-5 正态总体方差的置信区间

§ 6-5 正态总体方差的置信区间

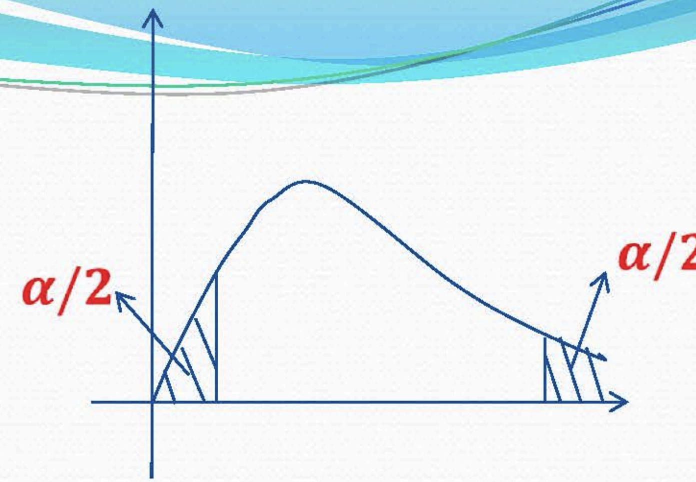
- 单个正态总体方差 σ^2 的置信区间
- 两个正态总体方差比的置信区间

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体**X**的样本.

样本均值：$\overline{X}$　　　样本方差：S^2

给定置信水平为：$1-\alpha$

μ未知，求 σ^2 的置信区间



① 选统计量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

② $P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

③ $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$

σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间：

$$\boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)}$$

σ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间：

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{n-1}\,S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\frac{\sqrt{n-1}\,S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)}$$

例1：有一大批糖果，现从中随机取16袋，称得重量(克)如下：506, 508, 499, 503, 504, 510, 497, 512,

514, 505, 493, 496, 506, 502, 509, 496

设袋装糖果的重量近似服从正态分布，求总体方差的置信水平为95%的置信区间。

解析：这是 μ 未知，求 σ^2 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

解：由题$\overline{x}=503.75, S^2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2=6.2022^2$

由$1-\alpha=0.95$，知$\alpha=0.05$

查表得$\chi^2_{0.025}(15)=27.488$　　$\chi^2_{0.975}(15)=6.262$

σ^2的置信水平为0.95的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=(4.58^2,9.60^2)$$

练习1： 已知某种钉子的长度 X 服从正态分布，现抽了9个样品，长度为：20, 16, 18, 17, 18, 17, 19, 18, 19 (单位：mm)

求: (2)总体方差的置信区间(置信水平为0.95) .

解: 这是 μ 未知，求 σ^2 的置信区间

由题知：$\bar{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=}^{9}x_i=18 \quad S^2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2=\frac{3}{2}$

$\because 1-\alpha=0.9 \Rightarrow \alpha/2=0.025, 1-\alpha/2=0.975$

查表得 $\chi^2_{0.025}(8)=17.534 \qquad \chi^2_{0.975}(8)=2.180$

σ^2的置信水平为0.95的置信区间为:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=\left(\frac{8\times\frac{3}{2}}{\chi^2_{0.025}(8)},\frac{8\times\frac{3}{2}}{\chi^2_{0.975}(8)}\right)$$

$$\approx(0.6844, 5.5046)$$

练习2： 设炮弹的速度服从正态分布，现抽9发炮弹做试验，得样本方差为 $S^2=11(m/s)^2$，分别求炮弹速度的方差σ^2和标准差σ的置信水平为0.90的置信区间.

解： 这是 μ 未知，求 σ^2 的置信区间

由题知：$S^2=11, n=9$

$\because 1-\alpha=0.9 \Rightarrow \alpha/2=0.05$

查表得 $\chi^2_{0.05}(8)=15.507 \quad \chi^2_{0.95}(8)=2.733$

σ^2的置信水平为0.90的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=\left(\frac{8\times 11}{\chi^2_{0.05}(8)},\frac{8\times 11}{\chi^2_{0.95}(8)}\right)\approx(5.675,32.199)$$

σ 的置信水平为0.90的置信区间为：$(2.38,5.67)$

§ 6-5 正态总体方差的置信区间

- 单个正态总体方差 σ^2 的置信区间

- 两个正态总体方差比的置信区间

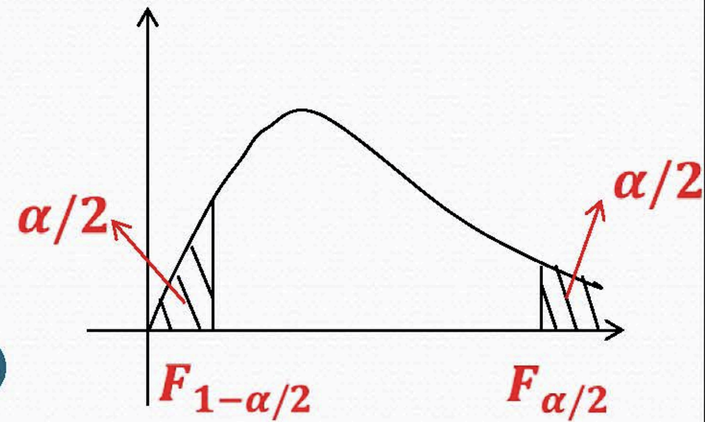
设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为来自总体X的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 为来自总体 Y 的样本。

样本均值：$\overline{X} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $\overline{Y} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$

样本方差： $S_1{}^2$, $S_2{}^2$

置信水平：$1-\alpha$

μ_1, μ_2 未知，求 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间



① 选统计量 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

② $P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$

③ $P\left\{\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right\} = 1-\alpha$

σ_1^2/σ_2^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间：

$$\boxed{\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)}$$

例2： 分别由工人和机器人操作钻孔机在钢部件上钻孔，今测得所钻孔的深度(以cm计)如下：

工人操作	4.02	3.94	4.03	4.02	3.95	4.06	4.00	
机器人操作	4.01	4.03	4.02	4.01	4.00	3.09	4.02	4.00

经R-J检验可认为，涉及的两总体分别为 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ，μ_i,σ_i^2 ,$\mathrm{i}=1,2$ 均未知，两样本相互独立，试求σ_1^2/σ_2^2的置信水平为0.90的置信区间。

解析：这是 μ_1,μ_2未知，求 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

$$\boxed{\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)}$$

解: 在此，$n_1=7$，$n_2=8$，$s_1^2=0.00189, s_2^2=0.00017$

由$1-\alpha=0.90$，知$\alpha=0.1$

查表的：$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(6,7)=3.87$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.95}(6,7)=\frac{1}{F_{0.05}(7,6)}=\frac{1}{4.21}$$

$\therefore \sigma_1^2/\sigma_2^2$ 的置信水平为0.90的置信区间为:

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{0.05}(6,7)},\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{0.95}(6,7)}\right)=(2.87,46.81)$$

该区间的下限大于1，在实际中，我们就认为σ_1^2比σ_2^2大。