GIMBERT Vincent
GUERIN Clément
L3 Informatique

Rapport TP2
Probabilité et statistique

Table des matières :

Table des figures :

Table des tableaux :

Objectif du TP

L'objectif de ce TP est de manipuler les différentes lois de probabilités dans le but de les utiliser dans des circonstances concrètes. Il s'agira aussi de montrer la fiabilité de nos choix en calculant l'intervalle de confiance pour nos expériences.

Utilisation des différentes lois dans la vie courante

Dans cette partie nous allons nous pencher sur l'utilisation des différentes lois dans la vie courante :

- **La loi normale** : elle est utilisée pour de nombreuses applications, que ce soit dans les sciences exactes ou dans des sciences sociales. On peut la retrouver en balistique[1], en anatomie[2], ainsi qu'en économie[3].
- **La loi de poisson** : Pendant longtemps, cette loi était utilisée dans le cas où un événement a une faible chance de se réaliser, comme le suicide infantile. Mais il est de plus en plus utilisé, notamment en télécommunication, par exemple compter le nombre de communication dans un intervalle de temps donné. On la retrouve aussi dans le contrôle de qualité statistique, finance, biologie…[4]
- **La loi binomiale** : Cette loi est surtout utilisée en statistique pour faire un test statistique, c'est-à-dire pour vérifier si une hypothèse est nulle ou non. Mais on peut aussi l'utiliser en génétique ou encore en linguistique, par exemple pour étudier la richesse de vocabulaire d'un texte.[5]
- **La loi exponentielle** : Cette loi est majoritairement utilisée dans le domaine de la radioactivité, car chaque atome possède une durée de vie suivant la loi exponentielle. De manière général, on retrouve cette loi principalement dans les domaines de la physique, telle que la physique nucléaire ou encore quantifier la durée de vie d'un appareil électronique.[6]

---

[1] Les tests de normalité de Lhoste (openedition.org)
[2] Mark Ridley, *Evolution*, Blackwell, 2004, 3e éd., 751 p. (ISBN 1-4051-0345-0)
[3] Benoît Mandelbrot, « Nouveaux modèles de la variation des prix (Cycles lents et changements instantanés) », Cahiers du Séminaire d'Économétrie, no 9, 1966, p. 53-66 (JSTOR 20075411).
[4] Loi de Poisson — Wikipédia (wikipedia.org)
[5] Loi binomiale — Wikipédia (wikipedia.org)
[6] Loi exponentielle — Wikipédia (wikipedia.org)

Présentation des résultats

Nous allons dans cette partie présenter les résultats pour les différentes lois :

Loi binomiale

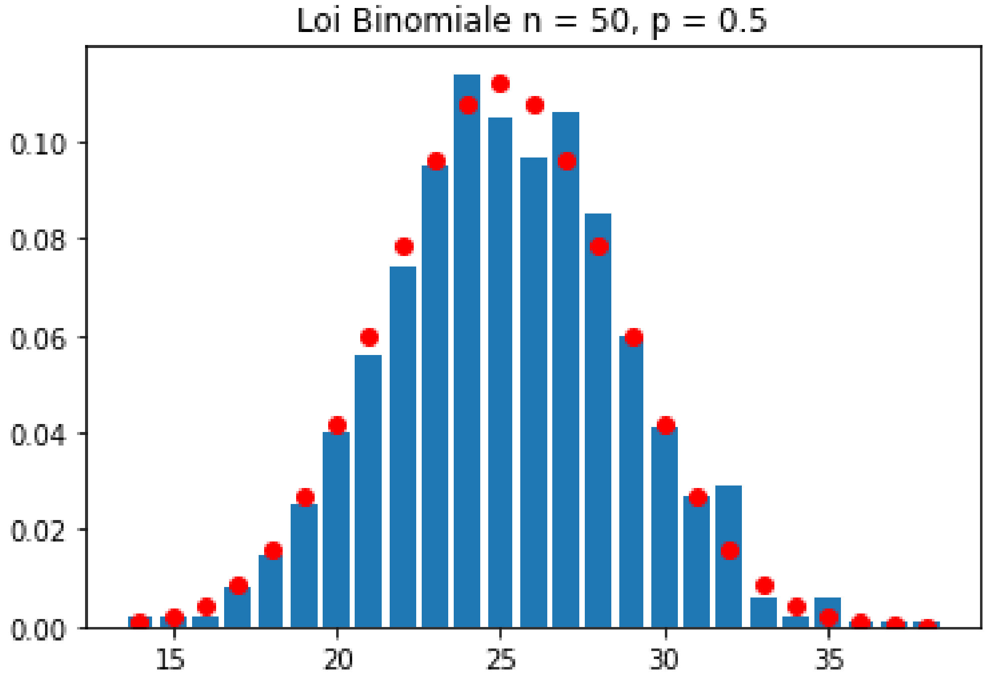

Figure 1 : Loi binomiale de paramètre n = 50 et p = 0.5 avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées

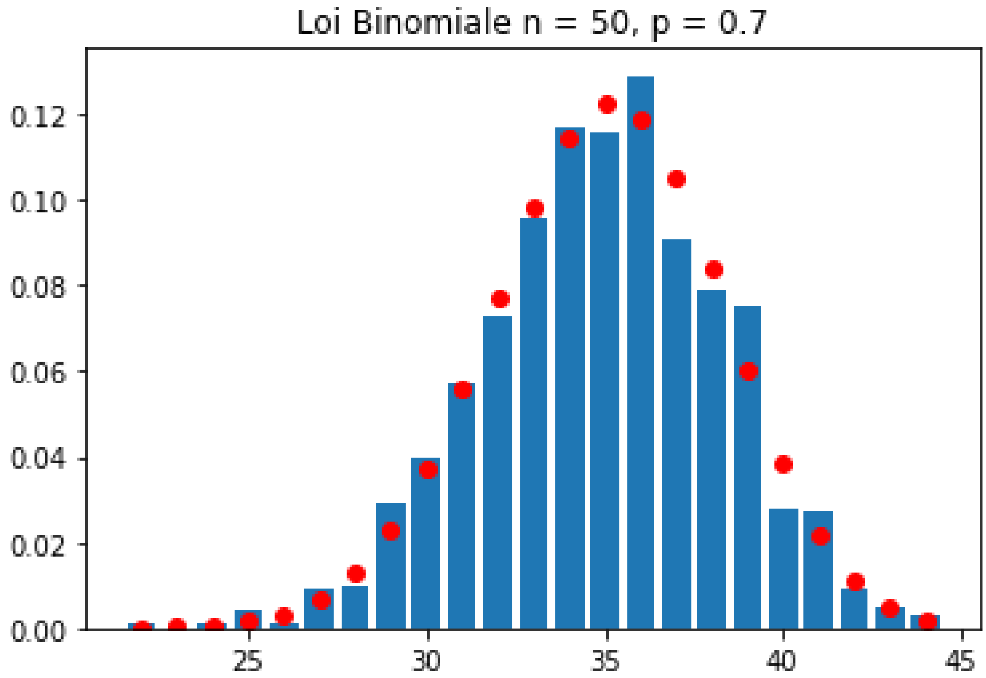

Figure 2 : Loi binomiale de paramètre n = 50 et p = 0.7 avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées

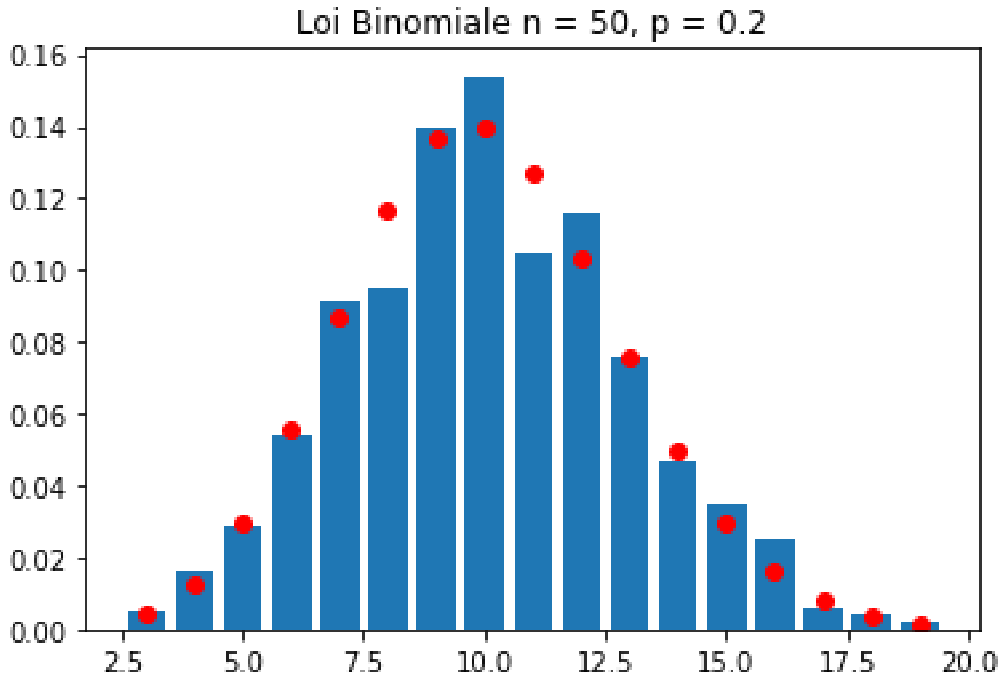

Figure 3 : Loi binomiale de paramètre n = 50 et p = 0.2 avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées

Nous pouvons remarquer que la variation de p influe sur la cloche formée par la loi. Plus p est petit, et plus le point culminant de la cloche se rapproche de 0.

Loi de poisson

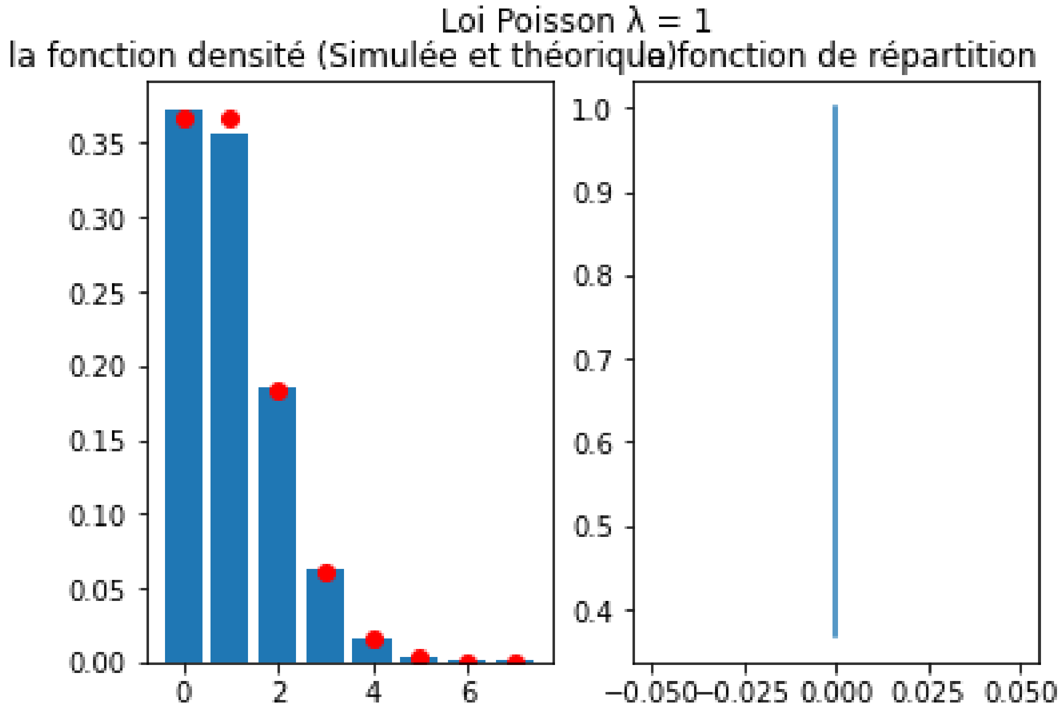

Figure 4 : À gauche, la fonction densité de la Loi Poisson de paramètre λ = 1 avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées. À droite, la fonction de répartition de notre expérience.

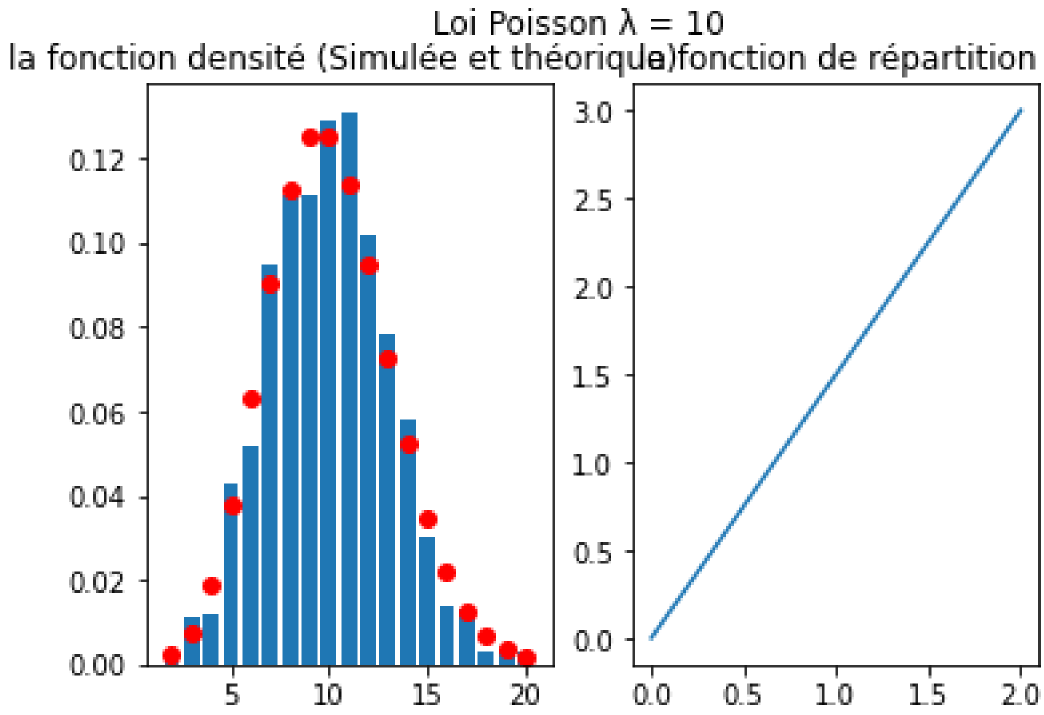

Figure 5 : À gauche, la fonction densité de la Loi Poisson de paramètre λ = 10 avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées. À droite, la fonction de répartition de notre expérience.

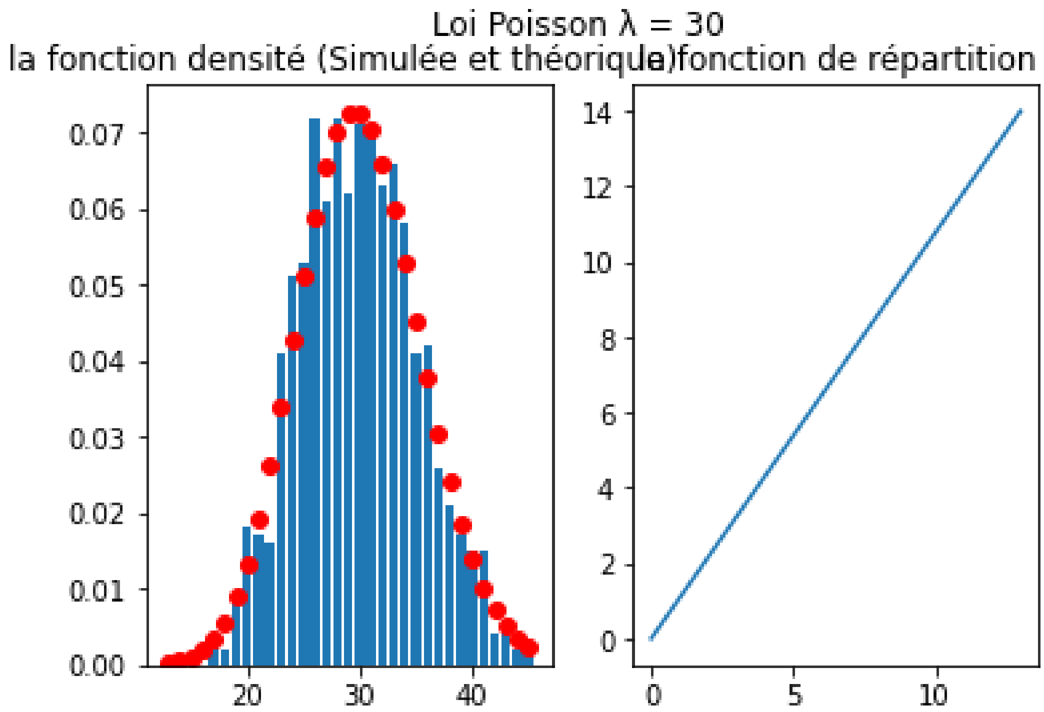

Figure 6 : À gauche, la fonction densité de la Loi Poisson de paramètre λ = 30 avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées. À droite, la fonction de répartition de notre expérience.

Nous pouvons remarquer que plus il y a d'essais, plus une cloche se forme autour de la valeur de λ.

Loi normale

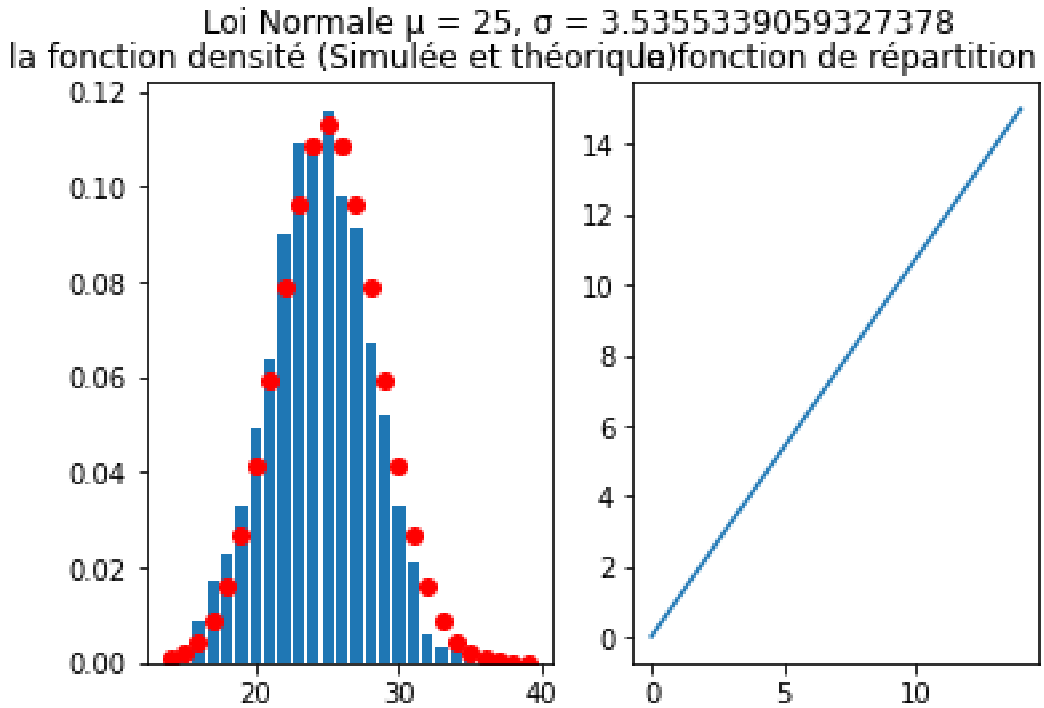

Figure 7 : À gauche, la fonction densité de la Loi Normale de paramètre $\mu = 25$ et $\sigma = \sqrt{50 * 0.25}$ avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées. À droite, la fonction de répartition de notre expérience.

Nous pouvons remarquer que, comme les lois vues précédemment, la loi normale forme une cloche, ici centrée sur la valeur de µ.

Loi exponentielle

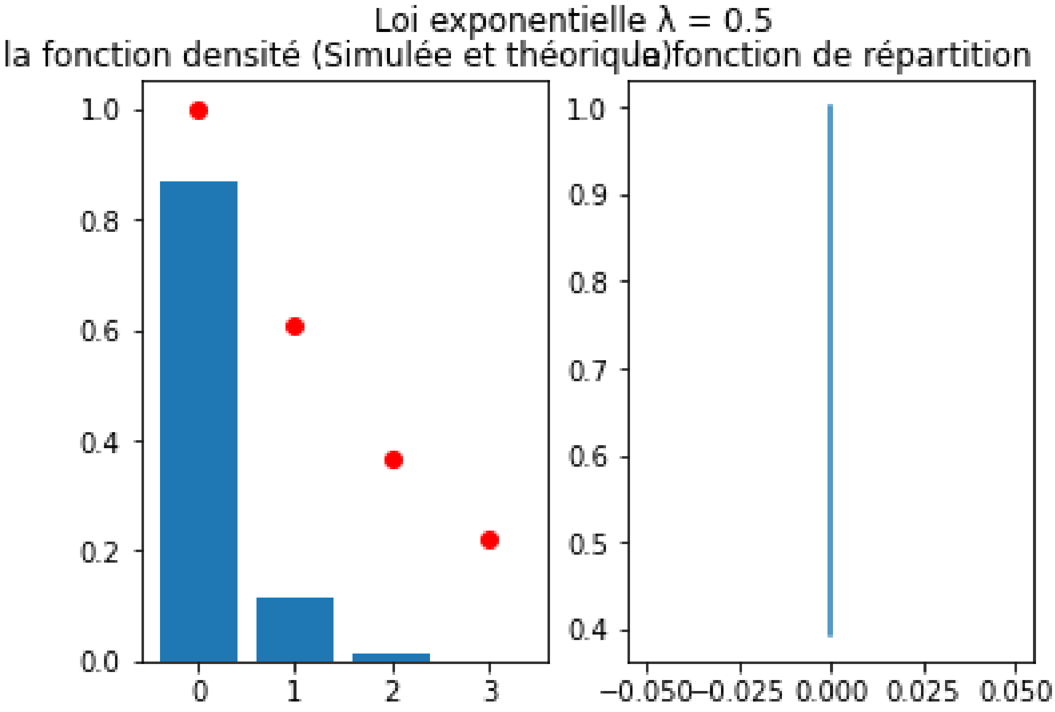

Figure 8 : À gauche, la fonction densité de la Loi Exponentielle de paramètre λ = 0.5 avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées. À droite, la fonction de répartition de notre expérience.

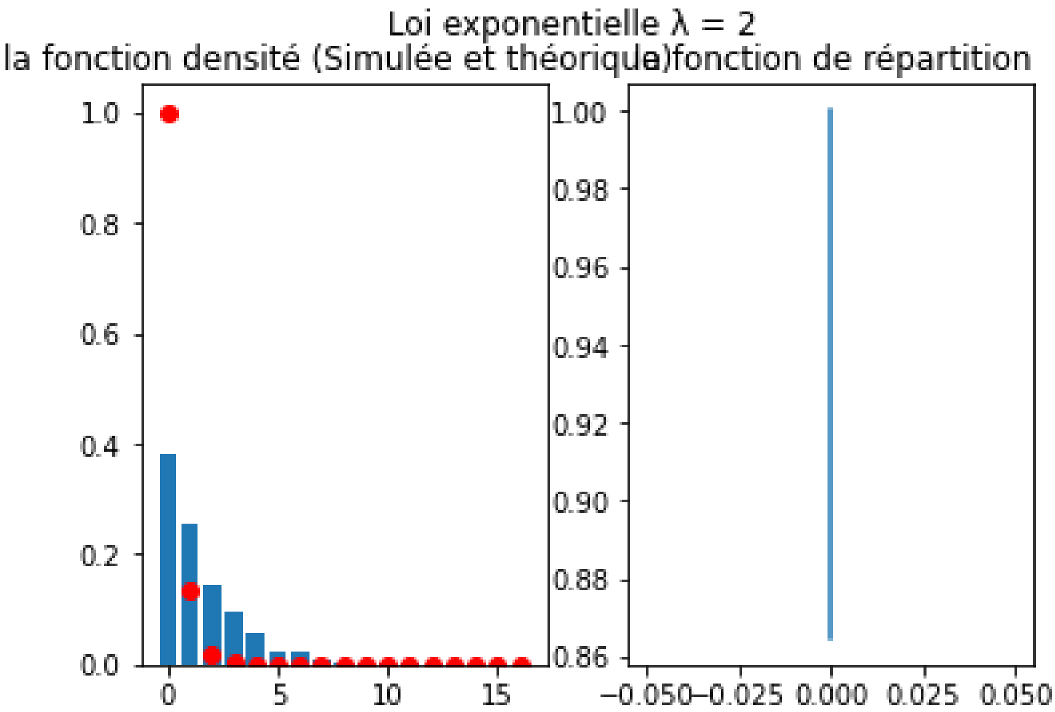

Figure 9 : À gauche, la fonction densité de la Loi Exponentielle de paramètre λ = 2 avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées. À droite, la fonction de répartition de notre expérience.

Nous pouvons remarquer que la fonction de répartition est exactement la même quel que soit le λ utilisé. On remarque aussi cependant que lorsque λ est grand, la courbe des valeurs théorique passent en dessous de la courbe des valeurs simulées de manière générale. Cela ne semble pas être le cas lorsque λ est petit, où la courbe des valeurs théorique passent au-dessus de la courbe des valeurs simulées.

Réponse aux questions

Vérifie-t-on une relation entre la loi de poisson et la loi binomiale ?

Nous remarquons, par les Figures 1, 2, et 3 données plus haut, que la loi binomiale forme une courbe en cloche similaire à la loi de poisson.

Pour la loi poisson, le point culminant de cette cloche se situe à la valeur de son paramètre.
Pour la loi binomiale, le point culminant va dépendre de son paramètre multiplié par son nombre d'essais.

Ainsi, nous pouvons conclure que plus le paramètre de la loi binomiale est grand, plus cette loi converge vers la loi de poisson.

Vérifie-t-on le théorème central limite avec la loi normale donnée en figure 7 ?

Le théorème central limite montre que toute somme de variable aléatoire indépendantes identiquement distribué converge vers une variable aléatoire suivant une loi normal. Comme pour la taille, ou pile ou face.

Testons le théorème central limite.

Faisons 12 lancer d'une pièce non pipée pour obtenir pile ou face donc on a une ½ pour avoir face. Si on obtient face on ajoute 1. Puis on fait la somme des résultats obtenus et on le fait n fois.
On obtient ensuite l'histogramme ci-dessous en calculant la fréquence des sommes obtenus.
Les points rouges représentent une loi normale avec μ = 12* ½ et sigma et égal à ½. Le graphique qu'on obtient fait bien une courbe en cloche caractéristique de la loi normale. Donc on vérifie bien le théorème central limite.

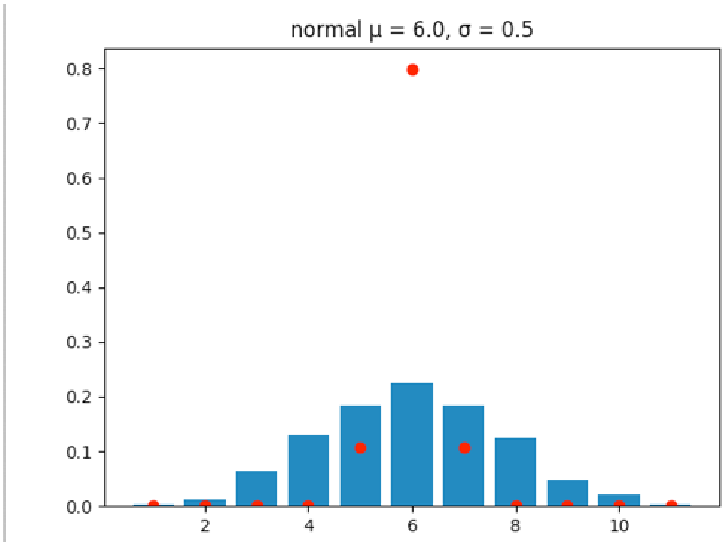

Figure 10 : la fonction densité de la Loi Normale de paramètre μ = 6 et σ = 0.5 avec en rouge les valeurs théoriques et en bleu les valeurs simulées.

Temps de réaction

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à une table de mesure du temps de réaction de 20 conducteurs. Nous avons tracé l'histogramme de la loi normale ci-dessous avec $\sigma^2 = 0.2$:

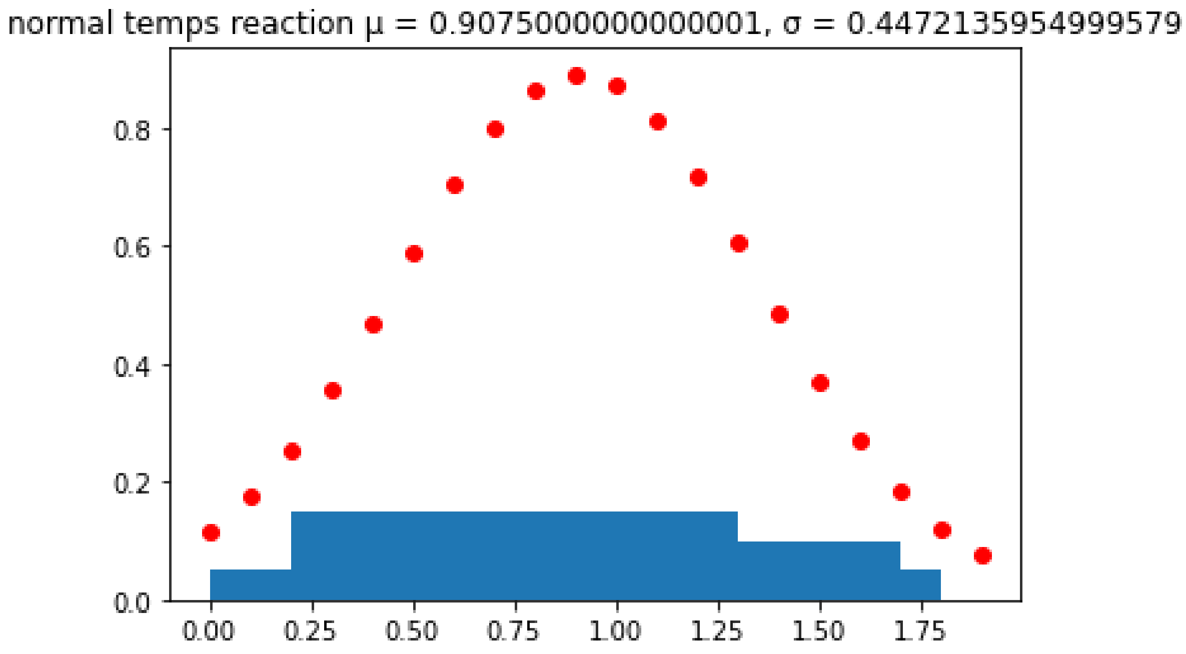

Figure 11 : Histogramme utilisant la loi normale pour le temps de réaction

Nous remarquons que les valeurs simulées ne suivent pas du tout les valeurs théoriques, mais cela nous semble normal car l'échantillon était très faible, seulement 20 conducteurs.

Et nous obtenons aussi le tableau suivant :

	En supposant que la variance empirique soit σ² = 0.2	**En utilisant la variance empirique Sn**
Moyenne Empirique	0.9075000000000001	0.9075000000000001
Intervalle de confiance à 95%	[0.5955702442372535, 1.2194297557627467]	[0.7852519014473027, 1.0297480985526974]
Intervalle de confiance à 99%	[0.4820284112791262, 1.332971588720874]	[0.7407538279904173, 1.0742461720095828]

Tableau 1 : Tableau comparatif entre la variance égale à 0.2 et la variance empirique

Nous pouvons ainsi remarquer qu'avec la variance empirique Sn, l'intervalle de confiance est plus resserré qu'avec $\sigma^2 = 0.2$, ce qui signifie qu'avec la variance empirique Sn, notre résultat est plus précis.

Intervalle de confiance

Si 637 personnes sur 1000 à l'UCA suivent un cours d'algorithmie, cela nous donne le tableau suivant :

Pourcentage moyen	**0.637**
Intervalle de confiance	[0.6207557794277473, 0.6532442205722527]

Tableau 2 : Tableau de résultat pour la dernière question du TP

Conclusion

Il est nécessaire de bien comprendre le problème auquel nous avons à faire afin d'utiliser la loi de probabilité qui convienne le mieux. Par exemple, il est préférable d'utiliser la loi de Poisson à la loi Binomiale pour des probabilités très faibles. Le calcul de l'intervalle de confiance permet ainsi de mesurer la fiabilité de nos choix, car plus ses bornes sont dispersées, plus il y a risque d'erreur.