VERSUCH 106

Gekoppelte Pendel

Annika Bennemann
annika.bennemann@tu-dortmund.de

Paulin Vehling
paulin.vehling@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.01.2022 Abgabe: 21.01.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist es, die Schwingungsdauer und Schwebungsdauer bei gekoppelten Pendeln in verschiedenen Schwingungsarten zu bestimmen.

2 Theorie

2.1 Das Fadenpendel

Das Fadenpendel besteht aus einer Masse m und einem Faden der Länge l, wobei dieser idealerweise keine Masse besitzt. Es wirkt die Gewichtskraft $F = m\,\vec{a}$ als rücktreibende Kraft bei der Auslenkung des Pendels aus seiner Ruhelage. Dadurch entsteht ein Drehmoment $M = D_p\,\phi$ auf das Pendel, wobei ϕ der Auslenkwinkel und D_p die Winkelrichtung des Pendels ist. Für kleine Auslenkungen gilt die Kleinwinkelnäherung, sodass die Bewegungsgleichung

$$J\ddot{\phi} + D_p\,\phi = 0$$

lautet, mit J als Trägheitsmoment. Die Lösung der Gleichung beschreibt eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Bei kleinen Auslenkungen ist die Schwingungsdauer somit unabhängig von den Pendelmassen und dem Auslenkungswinkel.

2.2 Kopplung zweier Pendel

Bei der Kopplung zweier identischer Pendel durch eine Feder wirkt ein weiteres Drehmoment auf jedes Pendel. Dadurch, dass die Pendel jetzt über eine Feder gekoppelt sind, schwingen sie nicht mehr unabhängig voneinander und es gilt das Hookesche Gesetz

$$F(x) = -k\,x,$$

wobei k die Federkonstante und x die Auslenkung ist. Die Bewegungsgleichung wird zu einem System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi}_1 + D\phi_1 &= D_F(\phi_2 - \phi_1) \\ J\ddot{\phi}_2 + D\phi_2 &= D_F(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

umgeformt, wobei die linke Seite der Gleichungen die Schwingung des einzelnen Pendels ist und die rechte Seite die Kopplung der Pendel betrachtet. Die Schwingungsgleichungen können bei der richtigen Wahl der Winkel entkoppelt werden und so als eine Überlagerung zweier Eigenschwingungen betrachtet werden. Abhängig von den Anfangsbedingungen $\phi(0)$ und $\dot{\phi}(0)$ gibt es verschiedene Schwingungsarten, die im Folgenden näher beschrieben werden.

2.2.1 Gleichsinnige Schwingungen

Bei einer gleichsinnigen Schwingung werden zwei identische Pendel um den gleichen Winkel $\phi_1 = \phi_2$ ausgelenkt, sodass die Kopplungsfeder keine Kraft auf die Pendel ausübt. Die rücktreibende Kraft wird nur von der Gravitation verursacht. Mit der Schwingungsfrequenz der gleichsinnigen Schwingung

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1}$$

ergibt sich die Schwingungsdauer zu

$$T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2}$$

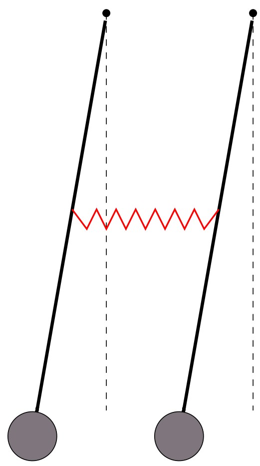


Abbildung 1: Abbild der gleichsinnigen Schwingung. [4]

2.2.2 Gegensinnige Schwingung

Im Gegensatz zur gleichsinnigen Schwingung werden bei der gegensinnigen Schwingung zwei identischen Pendel um den entgegengesetzten Winkel $\phi_1 = -\phi_2$ ausgelenkt. In diesem Fall übt die Kopplungsfeder eine jeweils gleich große, aber entgegengesetzte Kraft auf die einzelnen Pendel aus. Mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \tag{3}$$

der symmetrischen Schwingung ergibt sich die Schwingungsdauer

$$T_- = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + 2K}}, \tag{4}$$

wobei die Kopplungskonstante der Feder durch K dargestellt wird.

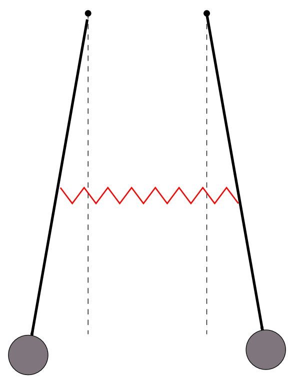


Abbildung 2: Abbild der gegensinnigen Schwingung. [4]

2.2.3 Gekoppelte Schwingungen

Im Fall der gekoppelten Schwingung bleibt eines der Pendel in Ruhelage $\phi_1 = 0$ und das andere identische Pendel wird um den Winkel $\phi_2 \neq 0$ ausgelenkt. Beim Schwingen überträgt das erste Pendel seine Energie auf das Zweite, sodass das Zweite langsam anfängt zu schwingen und das Erste langsamer wird, bis es stillsteht. Das zweite Pendel überträgt nun seine Energie wieder auf das Erste, welches anfängt zu schwingen. Die Amplituden sind wie eine Glockenkurve. Ihr Maximum erreichen sie jeweils dann, wenn das andere Pendel zur Ruhe kommt. Diese vollständige Energieübertragung wiederholt sich immer wieder und die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels wird Schwebungsdauer

$$T_S = \frac{T_+ + T_-}{T_+ - T_-} \tag{5}$$

genannt. Diese und die Schwebungsfrequenz

$$\omega_S = \omega_+ - \omega_- \tag{6}$$

werden durch die Schwingungsdauer der gleichsinnigen Schwingung T_+ und der gegensinnigen Schwingung T_- bestimmt.

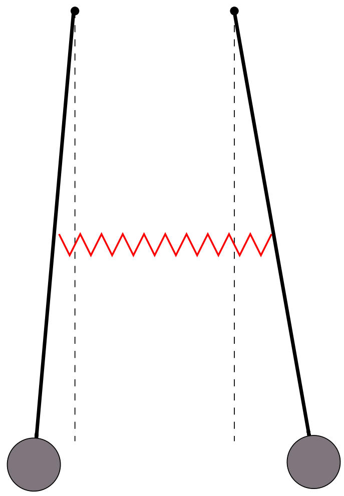


Abbildung 3: Abbild der gekoppelten Schwingung. [4]

Die Kopplungskonstante

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \tag{7}$$

der Feder wird als Maß für die Kopplung angesehen.

3 Fehlerrechnung

Der Mittelwert wird durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

berechnet.
Die Standardabweichung ergibt sich durch

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}_i)^2},$$

somit lautet der Fehler des Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sigma_x}{n} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}_i)^2}}{\sqrt{n}}.$$

Wird mit fehlerbehafteten Größen weiter gerechnet, muss der Fehler des Ergebnisses mit der Fehlerfortpflanzung nach Gauß

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Delta x_j\right)^2}$$

bestimmt werden.
Abweichungen von den Theoriewerten werden mit der Formel

$$a = \frac{|a_{\text{gemessen}} - a_{\text{theorie}}|}{a_{\text{theorie}}}$$

berechnet.
Die Berechnungen der Mittelwerte, Standardabweichungen, sowie der weiteren Fehler wird im folgenden mit Hilfe von Python und den Pythonmodulen Scipy [1], Uncertainties [2] und Numpy [3] durchgeführt.

4 Durchführung und Aufbau

4.1 Versuchsaufbau

Es werden zwei Stabpendel verwendet, welche eine reibungsarme Spitzenlagerung besitzen. An den Stabpendeln sind zwei Pendelkörper mit gleicher Masse befestigt. Diese Pendelkörper können am Stabpendel verschoben werden, sodass mehrere Pendellängen eingestellt werden können. Zusätzlich können die Pendel mit einer Feder in der Nähe der Massen verbunden werden.

4.2 Versuchdurchführung

Zuerst wird die Pendellänge mit einem Maßband gemessen und notiert. Beide Pendel werden auf die gleiche Pendellänge eingestellt. Nun wird die Schwingungsdauer für die gleichphasige Schwingung (Unterunterabschnitt 2.2.1) gemessen. Dazu werden beide Pendel in dieselbe Richtung um möglichst den selben Auslenkungswinkel ϕ ausgelenkt sodass die Kleinwinkelnäherung noch gilt. Die Pendel werden gleichzeitig losgelassen und eine Stoppuhr gestartet. Nach fünf Perioden wird die Stoppuhr gestoppt und der Wert für die Schwingungsdauer notiert. Die Messung wird über fünf Periodenlängen durchgeführt und zehnmal wiederholt, damit Fehler verringert werden. Danach wird die Messung der Schwingungsdauer bei gegenphasiger Schwingung (Unterunterabschnitt 2.2.2) gemessen. Dies wird analog durchgeführt, jedoch werden die Pendel nun in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt. Zuletzt wird die gekoppelte Schwingung (Unterunterabschnitt 2.2.3)

erzeugt. Hierbei wird nur ein Pendel ausgelenkt, während sich das andere in Ruhelage befindet. Die Schwebungsdauer wird gemessen, indem die Zeit gestoppt wird, bis das Pendel welches im Anfangszustand in Ruhelage war zum fünften Mal wieder still steht. Auch diese Messung wird somit für fünf Schwebungsperioden durchgeführt und die Messung fünf Mal wiederholt, damit Fehler verringert werden.
Die drei verschiedenen Messreihen werden analog für eine weitere Pendellänge durchgeführt.

5 Auswertung

Die Messungen werden nach Abschnitt 4 durchgeführt und die Ergebnisse im Folgenden dargestellt und ausgewertet. Die Länge der Pendel beträgt beim ersten Durchgang $l = 0{,}63\,\mathrm{m}$ und wird, nachdem alle drei Messreihen durchgeführt wurden, auf $l = 0{,}36\,\mathrm{m}$ verkürzt. Die Masse der Pendelkörper beträgt $m = 1\,\mathrm{kg}$. Die Auswertung erfolgt parallel für beide Pendellängen. Als Konstante für den Ortsfaktor der Erdbeschleunigung wird in den Berechnungen $g = 9{,}806\,65\,\mathrm{m/s^2}$ verwendet.

5.1 Gleichsinnige Schwingung

Tabelle 1: Messwerte der Schwingungsdauer bei gleichsinniger Schwingung.

	T_+ / s bei $l = 0{,}63\,\mathrm{m}$	T_+ / s bei $l = 0{,}36\,\mathrm{m}$
	1,50	1,26
	1,53	1,23
	1,55	1,26
	1,56	1,24
	1,50	1,24
	1,53	1,24
	1,56	1,24
	1,51	1,22
	1,50	1,24
	1,53	1,24
Mittelwert $\overline{T_+}$	1,53	1,24
Fehler $\Delta\overline{T_+}$	0,01	0,00

In Tabelle 1 sind die Messwerte der Schwingungsdauer bei gleichsinniger Schwingung dargestellt. Zusätzlich wird der Mittelwert und der zugehörige Fehler mithilfe von Python nach den Formeln in Abschnitt 3 bestimmt. Aus den Messwerten lässt sich mithilfe von Gleichung 1 w_+ berechnen zu

$$\omega_{+(0,63)} = (4,11 \pm 0,02)\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad \text{und} \qquad \omega_{+(0,36)} = (5,06 \pm 0,02)\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

5.2 Gegensinnige Schwingung

Tabelle 2: Messwerte der Schwingungsdauer bei gegensinniger Schwingung.

	T_- / s bei $l = 0{,}63\,\mathrm{m}$	T_- / s bei $l = 0{,}36\,\mathrm{m}$
	1,39	1,24
	1,41	1,22
	1,39	1,21
	1,40	1,21
	1,36	1,19
	1,32	1,20
	1,41	1,18
	1,38	1,22
	1,37	1,19
	1,44	1,18
Mittelwert $\overline{T_-}$	1,39	1,20
Fehler $\Delta\overline{T_-}$	0,01	0,01

Die Messwerte der Messung der Schwingungsdauer bei gegensinniger Schwingung, sowie der Mittelwert und der zugehörige Fehler sind analog zu Unterabschnitt 5.1 in Tabelle 2 aufgetragen. Aus diesen Werten lässt sich mithilfe von Gleichung 3 w_- berechnen zu

$$\omega_{-(0,63)} = (4,53 \pm 0,03)\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad \text{und} \qquad \omega_{-(0,36)} = (5,22 \pm 0,02)\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

K kann nun mit Gleichung 7 und den oben bestimmten Werten für T_+ und T_- berechnet werden zu

$$K_{(0,63)} = (0,10 \pm 0,01) \qquad \text{und} \qquad K_{(0,36)} = (0,03 \pm 0,01).$$

5.3 Gekoppelte Schwingung

Tabelle 3: Messwerte der Schwingungsdauer bei gekoppelter Schwingung.

	T_s / s bei $l = 0{,}63\,\mathrm{m}$	T_s / s bei $l = 0{,}36\,\mathrm{m}$
	15,35	25,29
	15,29	25,27
	15,19	24,95
	15,39	25,69
	15,24	25,24
Mittelwert $\overline{T_-}$	15,29	25,29
Fehler $\Delta\overline{T_-}$	0,03	0,11

Aus den Messwerten der Schwebungsdauer bei der gekoppelten Schwingung (siehe Tabelle 3) lässt sich mithilfe von Gleichung 6 w_s berechnen zu

$$\omega_{s(0,63)} = (0,42 \pm 0,04)\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad \text{und} \qquad \omega_{s(0,36)} = (0,15 \pm 0,03)\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

6 Diskussion

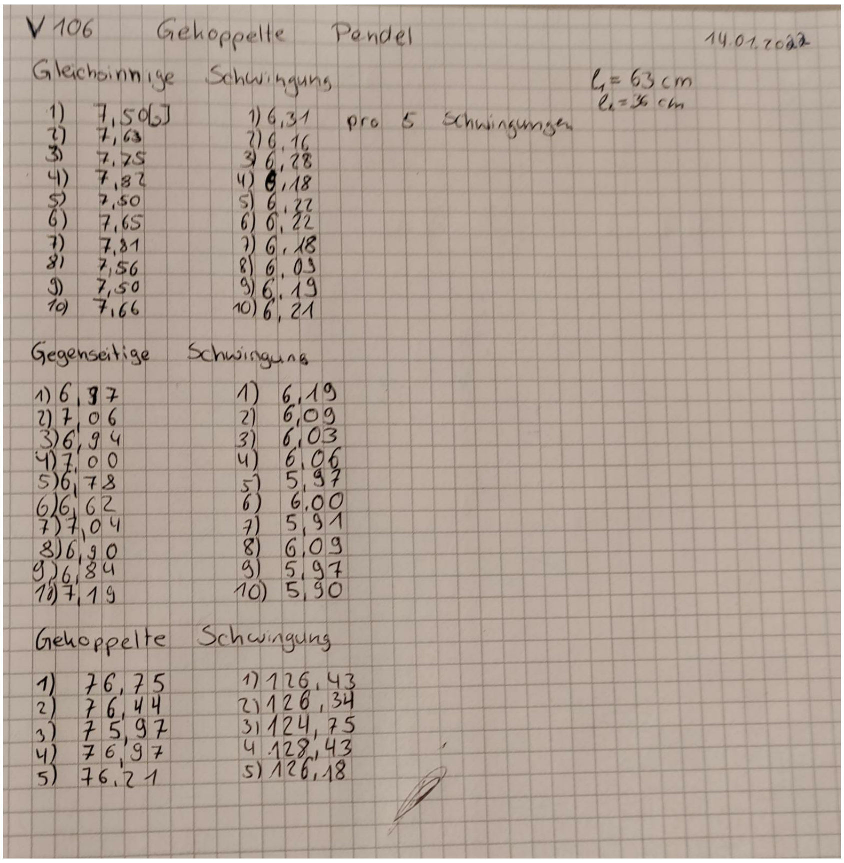
Tabelle 4: Vergleich der gemessenen Werte mit den Theoriewerten.

		gemessener Wert	Theoriewert	Abweichung /%
$l = 0,63\mathrm{m}$	T_+ / s	1,53 ± 0,01	1,59	4,1
	T_- / s	1,39 ± 0,01	1,58	12,1
	T_s / s	15,29 ± 0,03	163,00 ± 14,00	90,6
	ω_+ / 1/s	4,11 ± 0,02	3,95	4,3
	ω_- / 1/s	4,53 ± 0,03	3,98	13,7
	ω_s / 1/s	0,42 ± 0,04	0,04	982,0
$l = 0,36\mathrm{m}$	T_+ / s	1,24 ± 0,00	1,20	3,0
	T_- / s	1,20 ± 0,01	1,20	0,3
	T_s / s	25,29 ± 0,11	400,00 ± 70,00	93,6
	ω_+ / 1/s	5,06 ± 0,02	5,22	3,0
	ω_- / 1/s	5,22 ± 0,02	5,24	0,3
	ω_s / 1/s	0,15 ± 0,03	0,02	867,6

In Tabelle 4 sind die Messwerte aus Abschnitt 5 dargestellt. Außerdem werden die Theoriewerte, sowie die Abweichung von den Theoriewerten berechnet und auch in der Tabelle aufgetragen. Die Abweichungen der Messwerte der gleichsinnigen Schwingung liegen alle unter 5 %, sodass diese Messung als Erfolg verbucht werden kann. Größere Abweichungen bis zu 982 % finden sich jedoch bei den Schwingungsdauern und Schwebungsfrequenzen der gekoppelten Schwingung. Hier muss jedoch hinzugefügt werden, dass der Wert für K nach Gleichung 7 mit den experimentell bestimmten Werten berechnet wird. Somit sind die Theoriewerte für die gegensinnige und die gekoppelte Schwingung indirekt von den experimentellen Werten abhängig und können nicht direkt verglichen werden. Die Kopplungsfeder kann auch nicht wie in der Theorie angenommen an den Pendelkörpern befestigt werden, sondern befindet sich in geringem Abstand darüber.
Die Messunsicherheiten haben verschiedene Gründe. Die Pendellänge wird mit einem Maßband bestimmt und ist somit nicht sehr genau. Somit kann es auch kleine Unterschiede in der Pendellänge der beiden Pendel geben. Zudem werden die Pendel manuell ausgelenkt. Es kann aufgrund fehlender Skala nur abgeschätzt werden, wie groß der Auslenkungswinkel maximal sein darf um im Bereich der Kleinwinkelnäherung ($\alpha < 10°$) zu bleiben. Die Kleinwinkelnäherung ist, wie der Name schon sagt, auch nur eine Näherung, durch die kleinere Abweichungen entstehen können. Die Pendel bewegen sich außerdem nicht nur zweidimensional sondern auch dreidimensional zur Wand hin und weg,

wodurch etwas Pendelenergie verloren geht und das Pendel kein perfekter harmonischer Oszillator mehr ist. Auch Reibung wird in der Auswertung nicht berücksichtigt, was zu weiteren Unsicherheiten führen kann. Um den Fehler der Stoppuhr und der menschlichen Reaktionszeit auszugleichen werden die Messungen mehrfach und über mehrere Perioden durchgeführt. Eine genauere Messung wäre zum Beispiel durch eine automatische Zeitmessung über Lichtschranken oder ähnliches möglich.

7 Anhang



V 106 Gekoppelte Pendel 14.01.2022

$l_1 = 63$ cm
$l_2 = 36$ cm

Gleichsinnige Schwingung

pro 5 Schwingungen

1)	7,50 [s]	1)	6,31
2)	7,63	2)	6,16
3)	7,75	3)	6,28
4)	7,82	4)	6,18
5)	7,50	5)	6,22
6)	7,65	6)	6,22
7)	7,81	7)	6,18
8)	7,56	8)	6,09
9)	7,50	9)	6,19
10)	7,66	10)	6,21

Gegenseitige Schwingung

1)	6,87	1)	6,19
2)	7,06	2)	6,09
3)	6,94	3)	6,03
4)	7,00	4)	6,06
5)	6,78	5)	5,97
6)	6,62	6)	6,00
7)	7,04	7)	5,91
8)	6,90	8)	6,09
9)	6,84	9)	5,97
10)	7,19	10)	5,90

Gekoppelte Schwingung

1)	76,75	1)	126,43
2)	76,44	2)	126,34
3)	75,97	3)	124,75
4)	76,97	4	128,43
5)	76,21	5)	126,18

Literatur

[1] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python.* Version 0.16.0. URL: `http://www.scipy.org/`.

[2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[3] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[4] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 106 Gekoppelte Pendel.* TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.