

VERSUCH 103

Biegung von elastischen Stäben

Annika Bennemann
annika.bennemann@tu-dortmund.de

Paulin Vehling
paulin.vehling@tu-dortmund.de

Durchführung: 19.11.2021

Abgabe: 26.11.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Allgemein	3
1.2	einseitige Einspannung	3
1.3	beidseitige Auflage	3
2	Durchführung	4
2.1	einseitige Einspannung	4
2.2	beidseitige Auflage	5
3	Auswertung	5
3.1	einseitige Einspannung	6
3.2	beidseitige Auflage	9
4	Diskussion	14
	Literatur	14

1 Theorie

Ziel des Versuchs ist es, das Elastizitätsmodul eines Metalls zu bestimmen und die berechneten Daten mit Literaturwerten abzugleichen.

1.1 Allgemein

1.2 einseitige Einspannung

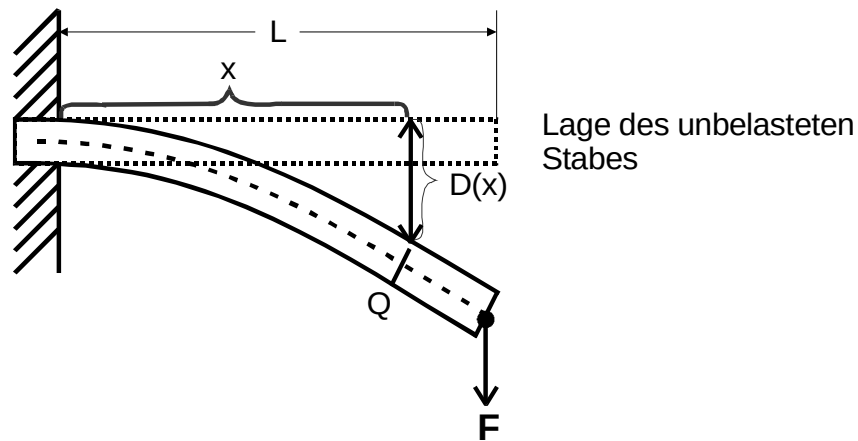


Abbildung 1: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung [4, S. 107]

1.3 beidseitige Auflage

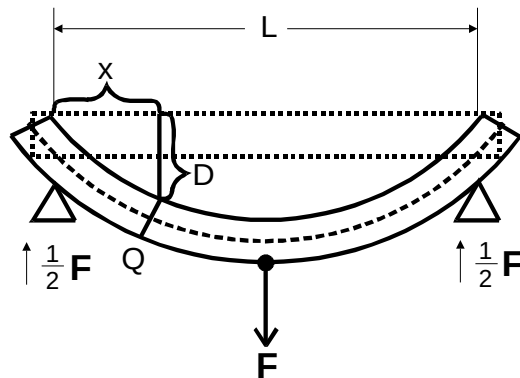


Abbildung 2: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei beidseitiger Auflage[4, S. 110]

[sample]

2 Durchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 schematisch dargestellt. An der Vorrichtung befinden sich auf einer Schiene mit Längenskalierung zwei verschiebbare Messuhren, die die Auslenkung messen. Zunächst werden die Massen und Maße der elastischen Stäbe mithilfe einer elektrischen Waage, eines Maßbandes und eines Messschiebers bestimmt. Bei den Probekörpern handelt es sich um einen rechteckigen und einen runden Stab des gleichen Materials.

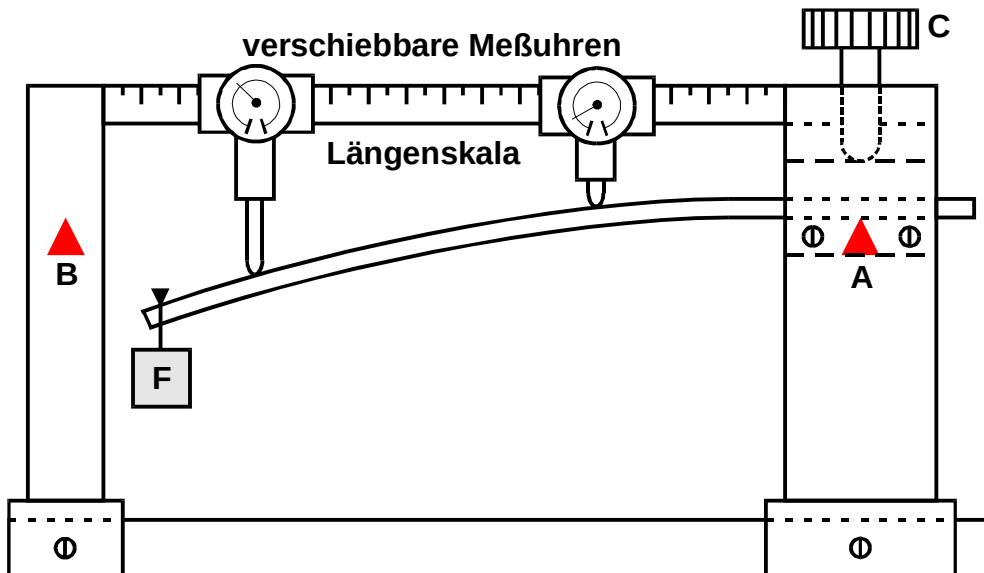


Abbildung 3: Aufbau der Apparatur zur Messung der Durchbiegung der elastischen Stäbe[4, S. 111]

2.1 einseitige Einspannung

Der Probekörper wird einseitig am Punkt C eingespannt. Am Ende des Stabes wird ein Gewicht angehängt, sodass sich der Stab durchbiegt. Hierbei soll eine maximale Auslenkung von 3 bis 7 mm erreicht werden. Es werden mehrere Messungen entlang des Stabes durchgeführt. Man kann nicht davon ausgehen, dass die Stäbe exakt gerade sind, daher werden die Messuhren vor jeder Messung der Auslenkung auf Null gesetzt, bevor das Gewicht angehängt wird. Nun wird die Auslenkung $D(x)$ bestimmt und in Abhängigkeit vom Abstand x zur Einspannung in einer Tabelle notiert, bevor die Messuhr um einen Abstand von 2,5 cm verschoben werden. $D(x)$ wird bestimmt durch die Formel:

$$D(x) = D_m(x) - D_0(x) \quad (1)$$

wobei $D_0(x)$ hier Null ist, wenn die Messuhr vor jeder Messung auf Null gesetzt wird und $D(x)$ somit direkt abgelesen werden kann.

2.2 beidseitige Auflage

Das Verfahren wird analog für die beidseitige Auflage wiederholt. Nun liegt der Probekörper jedoch auf den Punkten A und B auf und das Gewicht wird mittig angehängen anstatt am Ende des Stabes. Außerdem muss nun beachtet werden, dass an beiden Hälften des Stabes mit verschiedenen Messuhren gemessen wird.

3 Auswertung

Tabelle 1: Maße des runden und des eckigen Stabes

	Runder Stab	Eckiger Stab
l / mm	592,0	602,0
l_{Lit} / mm	551,82	591,18
d bzw. h / mm	10,0	10,0
m / g	129,4	167,2
m_{Lit} / g	120,9	164,0

Aus den bestimmten Daten der Stäbe wird die Dichte des Materials nach der Formel:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2)$$

mit V = Volumen des Stabs, zu $\rho_r = 2783,06 \text{ kg/m}^3$, sowie $\rho_e = 2777,41 \text{ kg/m}^3$ bestimmt. Aus dem Vergleich mit Literaturwerten [3] wird klar, dass es sich um Aluminium handelt.

Außerdem wird das Flächenträgheitsmoment I_r der Stäbe bestimmt. Bei einem runden Querschnitt wird dafür die Formel [1]

$$I_r = \frac{\pi(d/2)^4}{4}. \quad (3)$$

verwendet. Das Flächenträgheitsmoment für den runden Stab beträgt also:

$$I_r = 4,91 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4.$$

Das Flächenträgheitsmoment des eckigen Stabes mit quadratischem Querschnitt berechnet sich nach der Formel [1]:

$$I_e = \frac{b^4}{12}. \quad (4)$$

Das Flächenträgheitsmoment für den eckigen Stab beträgt also:

$$I_e = 8,33 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4.$$

3.1 einseitige Einspannung

Tabelle 2: Messung der Biegung des runden Stabs bei einseitiger Einspannung

x / mm	$D(x) / \text{mm}$
100	0,28
125	0,35
150	0,36
175	0,45
200	0,51
225	0,62
250	0,78
275	0,93
300	1,16
325	1,34
350	1,58
370	1,78
400	2,07
425	2,30
450	2,58
475	2,79
500	3,10
525	3,48

Tabelle 3: Messung der Biegung des eckigen Stab bei einseitiger Einspannung

x / mm	$D(x) / \text{mm}$
100	0,32
125	0,46
150	0,62
175	0,73
200	0,87
225	1,03
250	1,15
275	1,32
300	1,64
325	1,86
350	2,01
375	2,32
400	2,68
425	2,90
450	3,05
475	3,44
500	3,75
525	4,11

Die Masse des angehängten Gewichts beträgt beim runden Stab $m_{\text{rund}} = 400 \text{ g}$ und beim eckigen Stab $m_{\text{eckig}} = 600 \text{ g}$. Mit den Messwerten aus Tabelle 2 kann das Elastizitätsmodul mithilfe der Hilfsfunktion $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ und der Formel ?? berechnet werden. Hierzu wird mit dem Pythonmodul Matplotlib [2] der Y-Achsenabschnitt und die Steigung der linearen Regression $y = a * x + b$, sowie ihre Fehler berechnet.

$$a_{\text{rund}} = (0.0344 \pm 0.0009)$$

$$b_{\text{rund}} = (-0.0844 \pm 0.0462)$$

$$a_{\text{eckig}} = (0.0396 \pm 0,0005)$$

$$b_{\text{eckig}} = (0.1098 \pm 0.0293)$$

Durch umstellen der Formel ?? nach E erhält man das Elastizitätsmodul nach:

$$a = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \Leftrightarrow E = \frac{m \cdot g}{2 \cdot a \cdot I} \quad (5)$$

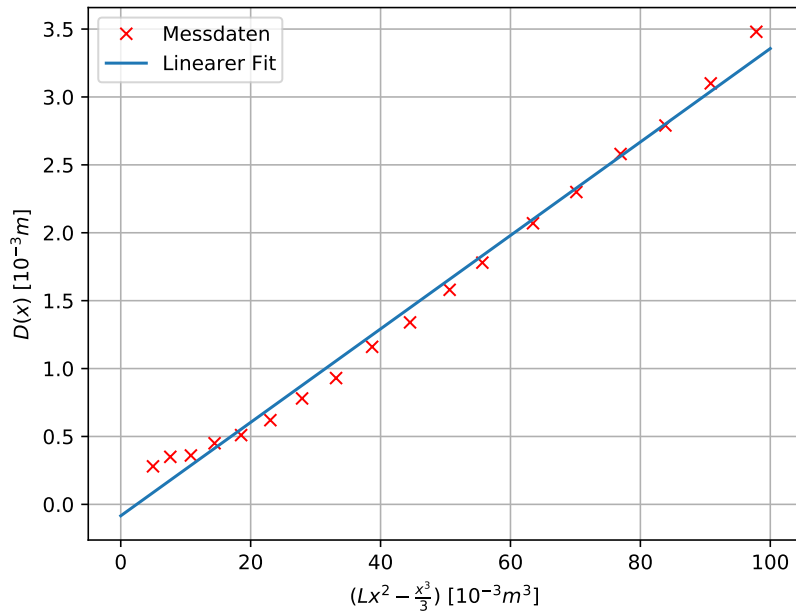


Abbildung 4: Lineare Regression: runder Stab, einseitige Einspannung

Nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet man den Fehler durch:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\ \Leftrightarrow \Delta E &= \frac{m \cdot g}{2 \cdot I \cdot a^2} \cdot \Delta a. \end{aligned} \tag{6}$$

Somit erhält man folgende Werte für das Elastizitätsmodul:

$$\begin{aligned} E_{\text{rund}} &= (11,62 \pm 0,03) \text{ GPa} \\ E_{\text{eckig}} &= (89,22 \pm 1,13) \text{ GPa} \end{aligned}$$

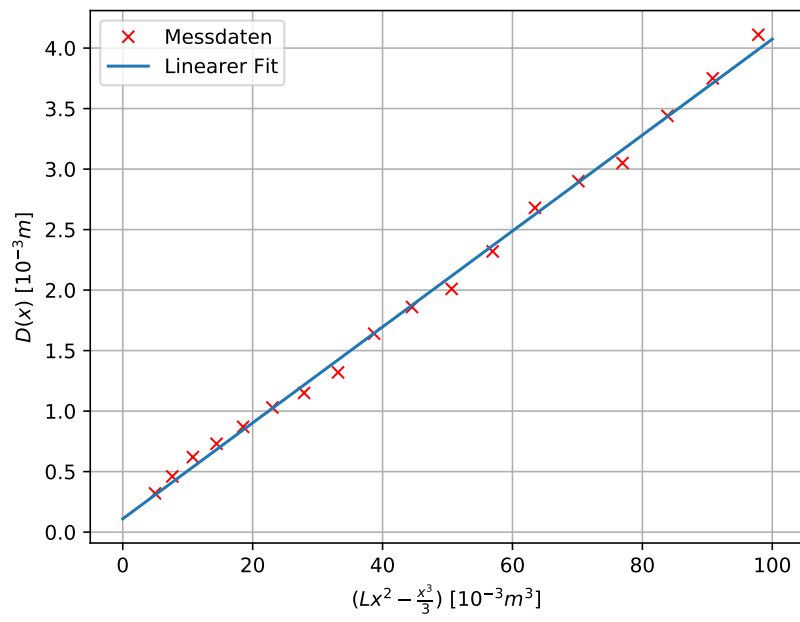
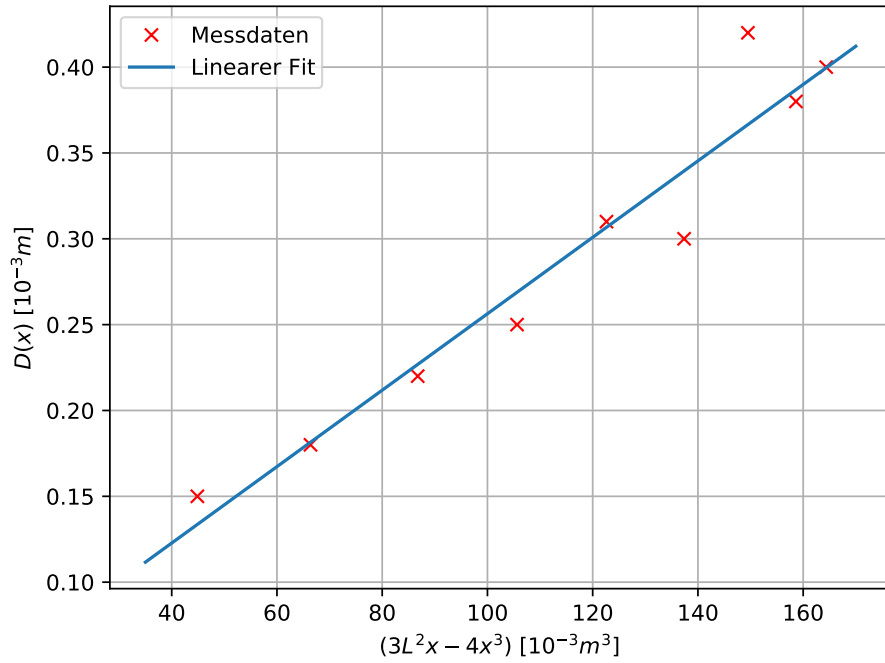


Abbildung 5: Lineare Regression: eckiger Stab, einseitige Einspannung

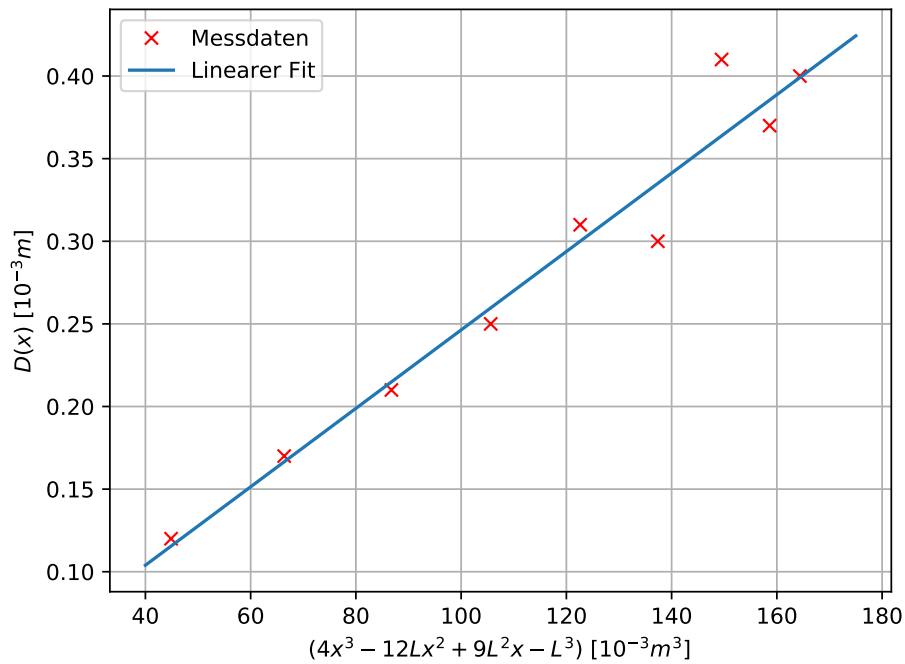
3.2 beidseitige Auflage

Tabelle 4: Messung der Biegung des runden Stabs bei beidseitiger Auflage

x / mm	$D(x) / \text{mm}$
50	0,15
75	0,18
100	0,22
125	0,25
150	0,31
175	0,30
200	0,42
225	0,38
250	0,40
275	
300	0,40
325	0,37
350	0,41
375	0,30
400	0,31
425	0,25
450	0,21
475	0,17
500	0,12



(a) Lineare Regression: runder Stab, beidseitige Auflage, $0 < x < L/2$

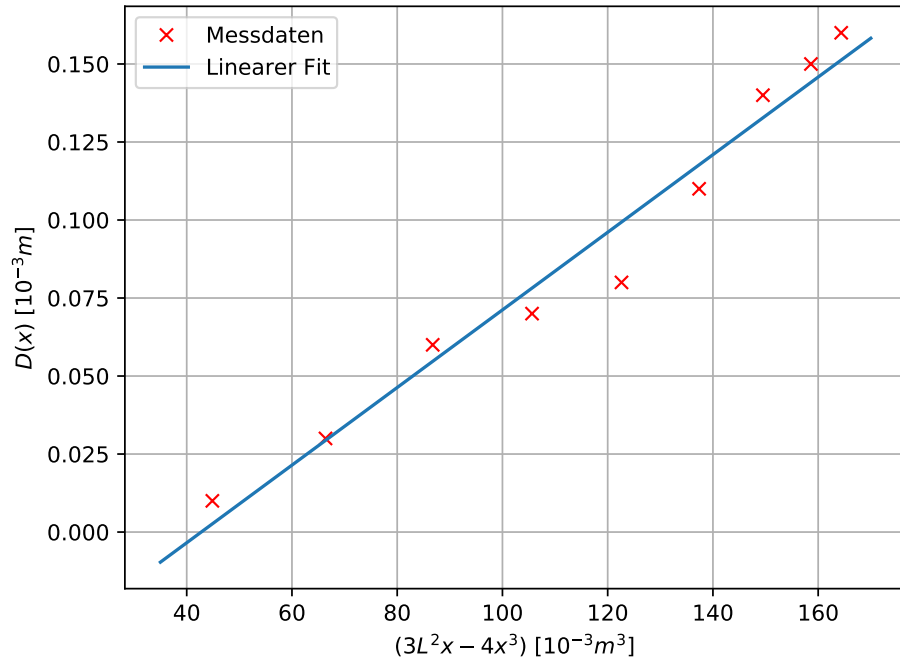


(b) Lineare Regression: runder Stab, beidseitige Auflage, $x > L/2$

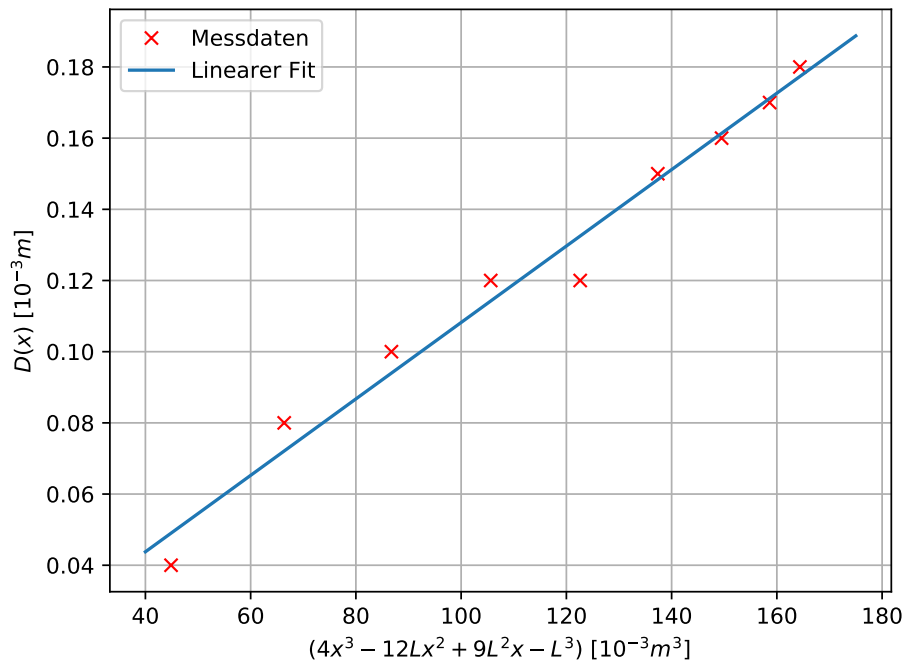
Abbildung 6: Lineare Regression: runder Stab, beidseitige Auflage

Tabelle 5: Messung der Biegung des eckigen Stabs bei beidseitiger Auflage

x / mm	$D(x)$ / mm
50	0,01
75	0,03
100	0,06
125	0,07
150	0,08
175	0,11
200	0,14
225	0,15
250	0,16
275	
300	0,18
325	0,17
350	0,16
375	0,15
400	0,12
425	0,12
450	0,10
475	0,08
500	0,04



(a) Lineare Regression: eckiger Stab, beidseitige Auflage, $0 < x < L/2$



(b) Lineare Regression: eckiger Stab, beidseitige Auflage, $x > L/2$

Abbildung 7: Lineare Regression: eckiger Stab, beidseitige Auflage

Bei den beidseitig eingespannten Stäben werden dieselben Massen m_{rund} und m_{eckig} angehängen. Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls werden diesmal die Hilfsfunktion $3L^2x - 4x^3$ für den Bereich 1 ($0 < x < L/2$) und $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ für den Bereich 2 ($x > L/2$), sowie die Formel ?? verwendet. Analog zu Unterabschnitt 3.1 wird auch hier Matplotlib zur Berechnung der linearen Regression genutzt.

$$\begin{array}{ll} a_{\text{rund-1}} = (0.0022 \pm 0.0002) & b_{\text{rund-1}} = (0.0337 \pm 0.0277) \\ a_{\text{rund-2}} = (0.0024 \pm 0.0002) & b_{\text{rund-2}} = (0.0090 \pm 0.0239) \\ a_{\text{eckig-1}} = (0.0012 \pm 0.0001) & b_{\text{eckig-1}} = (-0.0532 \pm 0.0105) \\ a_{\text{eckig-2}} = (0.0011 \pm 0.0001) & b_{\text{eckig-2}} = (0.0008 \pm 0.0075) \end{array}$$

Durch Umstellen der Formeln ?? nach E erhält man nun das Elastizitätsmodul:

$$E = \frac{m \cdot g}{48 \cdot I \cdot a}.$$

Der Fehler berechnet sich nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung durch:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\ \Leftrightarrow \Delta E &= \frac{m \cdot g}{48 \cdot I \cdot a^2} \cdot \Delta a. \end{aligned}$$

Somit beträgt das Elastizitätsmodul nun:

$$\begin{aligned} E_{\text{rund-1}} &= (75,68 \pm 6,88) \text{ GPa} \\ E_{\text{rund-2}} &= (69,38 \pm 5,78) \text{ GPa} \\ E_{\text{eckig-1}} &= (122,67 \pm 10,22) \text{ GPa} \\ E_{\text{eckig-2}} &= (133,83 \pm 12,17) \text{ GPa} \end{aligned}$$

gemittelt zu:

$$E_{\text{rund-3}} = (72,53 \pm 2,23) \text{ GPa}$$

und

$$E_{\text{eckig-3}} = (128,25 \pm 3,96) \text{ GPa}$$

4 Diskussion

Literatur

- [1] *Flächenträgheitsmomente einiger Querschnitte*. Universität Siegen. URL: https://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm2/arbeitsblaetter/arbeitsblatt_08_flaechentraegheitsmomente_bsp.pdf (besucht am 21.11.2021).
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] *Metallglossar*. ESG Edelmetall-Service GmbH und Co. KG. URL: <https://www.scheideanstalt.de/metallglossar/metallglossar/> (besucht am 21.11.2021).
- [4] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 103 Biegung elastischer Stäbe*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.