VERSUCH 103

Biegung von elastischen Stäben

Annika Bennemann
annika.bennemann@tu-dortmund.de

Paulin Vehling
paulin.vehling@tu-dortmund.de

Durchführung: 19.11.2021 Abgabe: 26.11.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ziel des Versuchs ist es, das Elastizitätsmodul eines Metalls zu bestimmen und die berechneten Daten mit Literaturwerten abzugleichen.

1.1 Allgemein

In der Physik können Körper Gestalts- und Volumenänderungen erfahren, wenn Kräfte an der Oberfläche angreifen. Diese Kräfte werden Spannungskräfte genannt, welche sich auf Flächeneinheiten beziehen. Die Spannung kann man komponentenweise aufteilen und die Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, wird Normalspannung σ oder Druck bezeichnet. Tangential oder auch Schubspannung wird die oberflächenparalle Komponente genannt. Die Gestaltsänderung kann beschrieben werden durch $\frac{\Delta L}{L}$. Ist diese hinreichend klein, kann ein linearer Zusammenhang zwischen der Deformation $\frac{\Delta L}{L}$ und der angreifenden Spannung σ gebildet werden [4, S. 106]. Das Hooksche Gesetz:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

E ist das Elastizitätsmodul, was eine materialabhängiger Proportionalitätsfaktor ist. Dieses lässt sich bestimmen durch eine messbare Veränderung an einem Probestab bei nur geringer Krafteinwirkung. Diese Veränderung wird als Biegung bezeichnet, wobei die Durchbiegung $D(x)$ größer als $\frac{\Delta L}{L}$ ist bei gleichen Versuchbedingungen.

1.2 einseitige Einspannung

Wird der Stab einseitig eingespannt und auf der anderen Seite wirkt eine Kraft, entsteht eine Durchbiegung $D(x)$. Entgegen der Kraft F wirkt zusätzlich eine Zugspannung in der

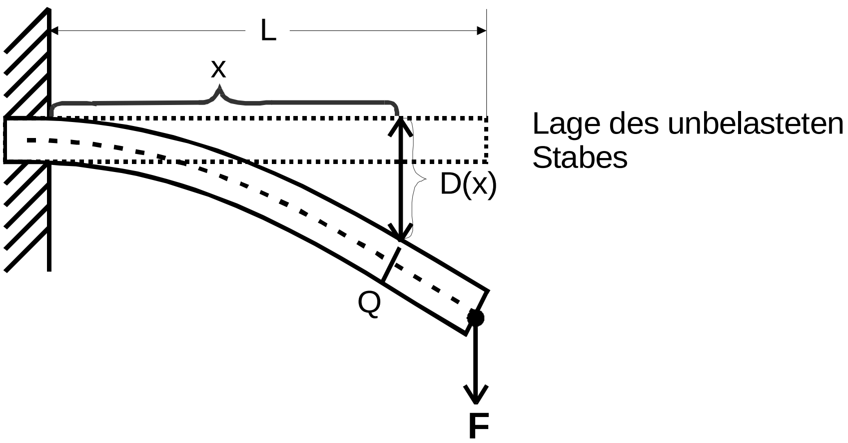


Abbildung 1: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung [4, S. 107]

oberen Stabschicht und in der unteren eine Druckspannung (siehe Abbildung 1) . Daraus lässt sich eine Drehmomentgleichung aufstellen:

$$M_F = M_Q \tag{2}$$

wobei das Drehmoment M_Q sich aus der Integration über den Querschnitt Q berechnet:

$$M_Q = \int_Q y\sigma(y)dq. \tag{3}$$

Das y ist der Abstand zur neutralen Faser. Dies ist der Zustand ohne Spannung, also wenn keine Kräfte auf den Stab wirken. Das Drehmoment M_F ist die äußere Kraft, die auf den Stabquerschnitt an der Biegung $L - x$ angreift. Wobei L die Länge des eingespannten Stabes ist.

$$M_F = F(L - x) \tag{4}$$

Die beiden Drehmomente eingesetz in die Gleichung Gleichung 2 ergeben:

$$\int_Q y\sigma(y)dq = F(L - x). \tag{5}$$

Durch Umformung der Gleichung und Beziehungen aus der Differentialgeometrie bei geringen Kurvenkrümmungen kann man des Hookschen Gesetzes für $\sigma(y)$ einsetzen:

$$\sigma(y) = Ey\frac{d^2D}{dx^2}. \tag{6}$$

Außerdem kann das Flächenträgheitsmoment I eingefügt werden, aufgrund der formalen Analogie zum Massenträgheitsmoment Θ [4, S. 109].

$$I = \int_Q y^2 dq(y) \tag{7}$$

Dies führt zur finalen Formel von $D(x)$ für die einseitige Einspannung:

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \qquad \text{(für: } 0 \leq x \leq L) \tag{8}$$

1.3 beidseitige Auflage

Eine andere Methode zur Erzeugung einer Durchbiegung ist es dein Stab auf beiden Seiten einzuspannen und ein Gewicht in die Mitte ein Gewicht zu hängen.

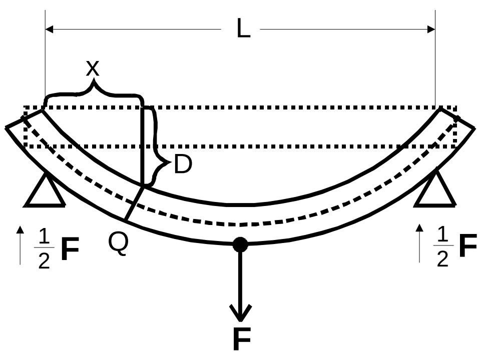


Abbildung 2: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei beidseitiger Auflage[4, S. 110]

Dann greift die Kraft in der Mitte des Stabes an. Am Querschnitt Q mit dem Hebelarm x beträgt die Kraft dann $\frac{F}{2}$ (siehe Abbildung 2). Deswegen muss der Stab in zwei Intervallen aufgeteilt werden, in denen sich das Drehmoment M_F unterscheidet.
Im Bereich $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ gilt:

$$M_F = -\frac{F}{2}x \tag{9}$$

und in dem Bereich $\frac{F}{2} \leq x \leq L$ gilt:

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x). \tag{10}$$

Diese beiden Formeln werden beide in Gleichung Gleichung 2 eingefügt und analog wie im vorherigen Kapitel umgeformt. Sodass sich für $D(x)$ die folgenden Gleichungen ergeben:

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \qquad (\text{für: } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \tag{11}$$

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \qquad (\text{für: } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \tag{12}$$

2 Durchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 schematisch dargestellt. An der Vorrichtung befinden sich auf einer Schiene mit Längenskalierung zwei verschiebbare Messuhren, die die Auslenkung messen. Zunächst werden die Massen und Maße der elastischen Stäbe mithilfe einer elektrischen Waage, eines Maßbandes und eines Messschiebers bestimmt. Bei den Probekörpern handelt es sich um einen rechteckigen und einen runden Stab des gleichen Materials.

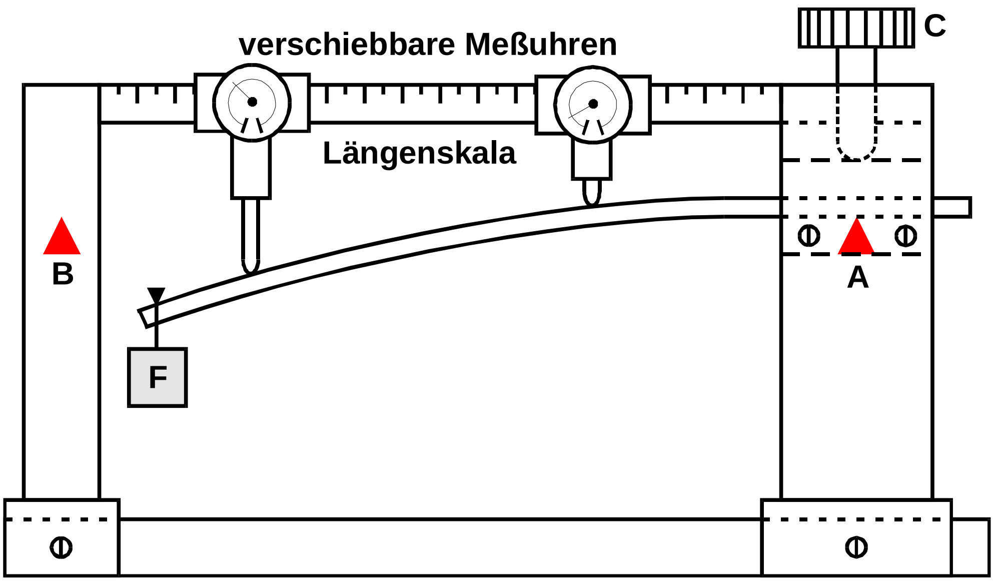


Abbildung 3: Aufbau der Apparatur zur Messung der Durchbiegung der elastischen Stäbe[4, S. 111]

2.1 einseitige Einspannung

Der Probekörper wird einseitig am Punkt C eingespannt. Am Ende des Stabes wird ein Gewicht angehängt, sodass sich der Stab durchbiegt. Hierbei soll eine maximale Auslenkung von 3 bis 7 mm erreicht werden. Es werden mehrere Messungen entlang des Stabes durchgeführt. Man kann nicht davon ausgehen, dass die Stäbe exakt gerade sind, daher werden die Messuhren vor jeder Messung der Auslenkung auf Null gesetzt, bevor das Gewicht angehangen wird. Nun wird die Auslenkung $D(x)$ bestimmt und in Abhängigkeit vom Abstand x zur Einspannung in einer Tabelle notiert, bevor die Messuhr um einen Abstand von 2,5 cm verschoben werden. $D(x)$ wird bestimmt durch die Formel:

$$D(x) = D_m(x) - D_0(x) \tag{13}$$

wobei $D_0(x)$ hier Null ist, wenn die Messuhr vor jeder Messung auf Null gesetzt wird und $D(x)$ somit direkt abgelesen werden kann.

2.2 beidseitige Auflage

Das Verfahren wird analog für die beidseitige Auflage wiederholt. Nun liegt der Probekörper jedoch auf den Punkten A und B auf und das Gewicht wird mittig angehangen anstatt am Ende des Stabes. Außerdem muss nun beachtet werden, dass an beiden Hälften des Stabes mit verschiedenen Messuhren gemessen wird.

3 Auswertung

Tabelle 1: Maße des runden und des eckigen Stabes

	Runder Stab	Eckiger Stab
l / mm	592,0	602,0
l_{Lit} / mm	551,82	591,18
d bzw. h / mm	10,0	10,0
m / g	129,4	167,2
m_{Lit} / g	120,9	164,0

Aus den bestimmten Daten der Stäbe wird die Dichte des Materials nach der Formel:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{14}$$

mit V = Volumen des Stabs, zu $\rho_{\text{r}} = 2783{,}06\,\text{kg/m}^3$, sowie $\rho_{\text{e}} = 2777{,}41\,\text{kg/m}^3$ bestimmt. Aus dem Vergleich mit Literaturwerten [3] wird klar, dass es sich um Aluminium handelt.

Außerdem wird das Flächenträgheitsmoment I_{r} der Stäbe bestimmt. Bei einem runden Querschnitt wird dafür die Formel [1]

$$I_{\text{r}} = \frac{\pi(d/2)^4}{4}. \tag{15}$$

verwendet. Das Flächenträgheitsmoment für den runden Stab beträgt also:

$$I_\mathrm{r} = 4{,}91 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4.$$

Das Flächenträgheitsmoment des eckigen Stabes mit quadratischem Querschnitt berechnet sich nach der Formel [1]:

$$I_\mathrm{e} = \frac{b^4}{12}. \tag{16}$$

Das Flächenträgheitsmoment für den eckigen Stab beträgt also:

$$I_\mathrm{e} = 8{,}33 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4.$$

.

3.1 einseitige Einspannung

Tabelle 2: Messung der Biegung des runden Stabs bei einseitiger Einspannung

x / mm	$D(x)$ / mm
100	0,28
125	0,35
150	0,36
175	0,45
200	0,51
225	0,62
250	0,78
275	0,93
300	1,16
325	1,34
350	1,58
370	1,78
400	2,07
425	2,30
450	2,58
475	2,79
500	3,10
525	3,48

Tabelle 3: Messung der Biegung des eckigen Stab bei einseitiger Einspannung

x / mm	$D(x)$ / mm
100	0,32
125	0,46
150	0,62
175	0,73
200	0,87
225	1,03
250	1,15
275	1,32
300	1,64
325	1,86
350	2,01
375	2,32
400	2,68
425	2,90
450	3,05
475	3,44
500	3,75
525	4,11

Die Masse des angehängten Gewichts beträgt beim runden Stab $m_{\text{rund}} = 400\,\text{g}$ und beim eckigen Stab $m_{\text{eckig}} = 600\,\text{g}$. Mit den Messwerten aus Tabelle 2 kann das Elastizitätsmodul mithilfe der Hilfsfunktion $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ und der Formel Gleichung 8 berechnet werden. Hierzu wird mit dem Pythonmodul Matplotlib [2] der Y-Achsenabschnitt und die Steigung der linearen Regression $y = a * x + b$, sowie ihre Fehler berechnet.

$$a_{\text{rund}} = (0.0344 \pm 0.0009) \qquad b_{\text{rund}} = (-0.0844 \pm 0.0462)$$
$$a_{\text{eckig}} = (0.0396 \pm 0,0005) \qquad b_{\text{eckig}} = (0.1098 \pm 0.0293)$$

Durch umstellen der Formel Gleichung 8 nach E erhält man das Elastizitätsmodul nach:

$$a = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \iff E = \frac{m \cdot g}{2 \cdot a \cdot I} \tag{17}$$

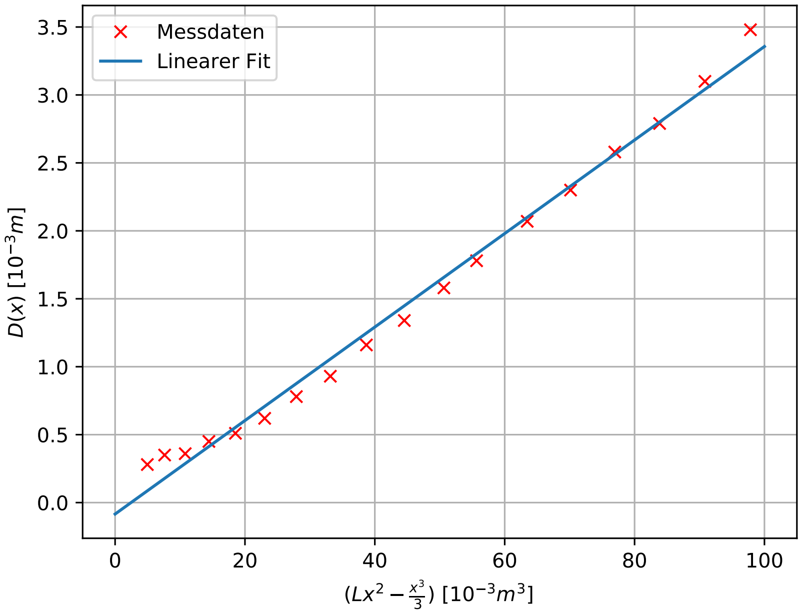


Abbildung 4: Lineare Regression: runder Stab, einseitige Einspannung

Nach der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnet man den Fehler durch:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\ \iff \Delta E &= \frac{m \cdot g}{2 \cdot I \cdot a^2} \cdot \Delta a. \end{aligned} \tag{18}$$

Somit erhält man folgende Werte für das Elastizitätsmodul:

$$\begin{aligned} E_{\text{rund}} =& (11,62 \pm 0,03)\text{GPa} \\ E_{\text{eckig}} =& (89,22 \pm 1,13)\text{GPa} \end{aligned}$$

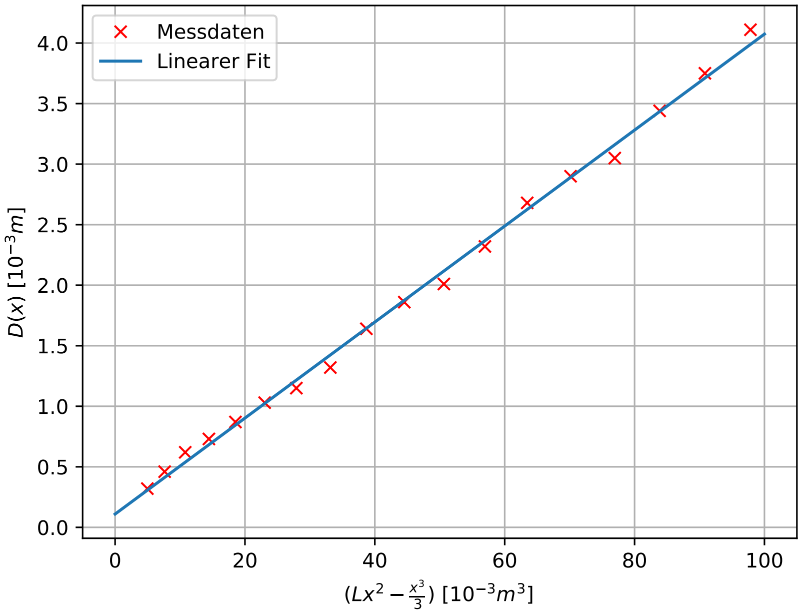
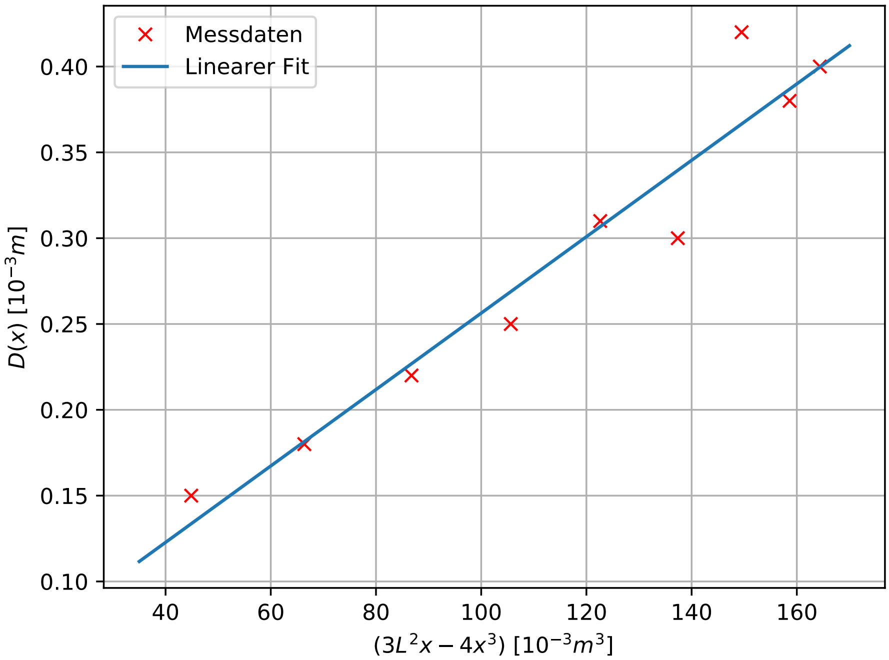


Abbildung 5: Lineare Regression: eckiger Stab, einseitige Einspannung

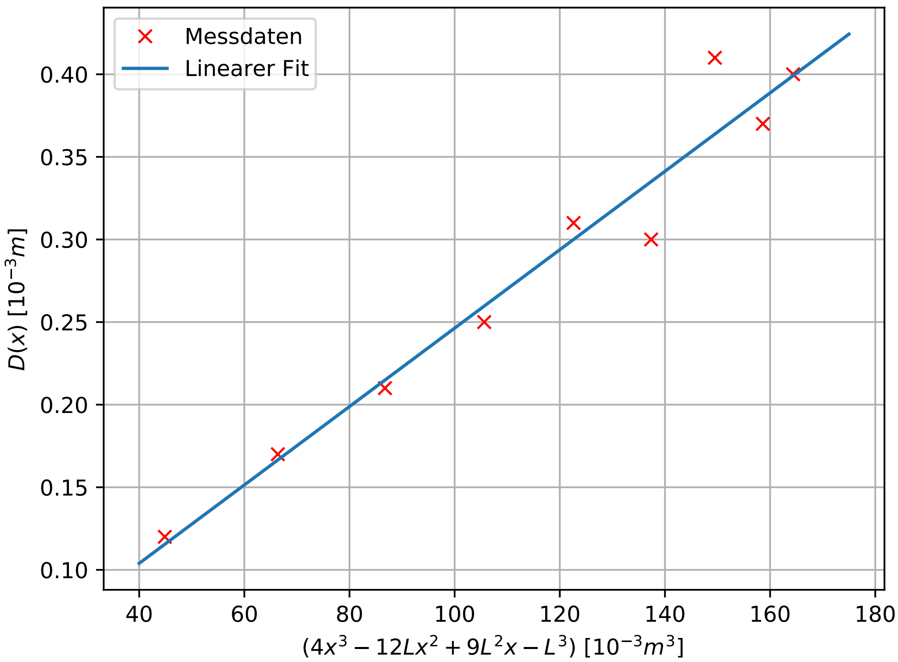
3.2 beidseitige Auflage

Tabelle 4: Messung der Biegung des runden Stabs bei beidseitiger Auflage

x / mm	$D(x)$ / mm
50	0,15
75	0,18
100	0,22
125	0,25
150	0,31
175	0,30
200	0,42
225	0,38
250	0,40
275	
300	0,40
325	0,37
350	0,41
375	0,30
400	0,31
425	0,25
450	0,21
475	0,17
500	0,12



(a) Lineare Regression: runder Stab, beidseitige Auflage, $0 < x < L/2$

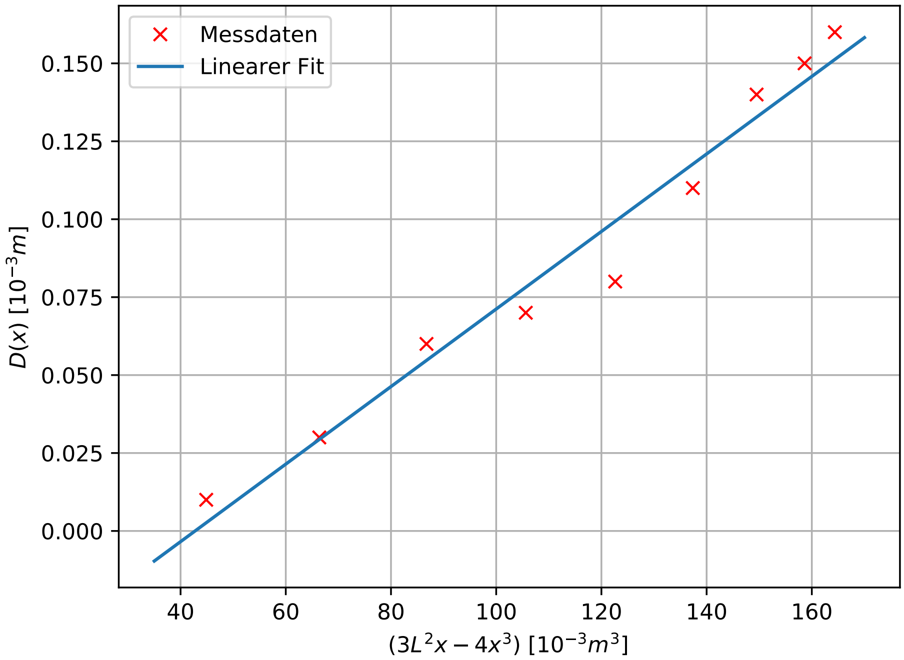


(b) Lineare Regression: runder Stab, beidseitige Auflage, $x > L/2$

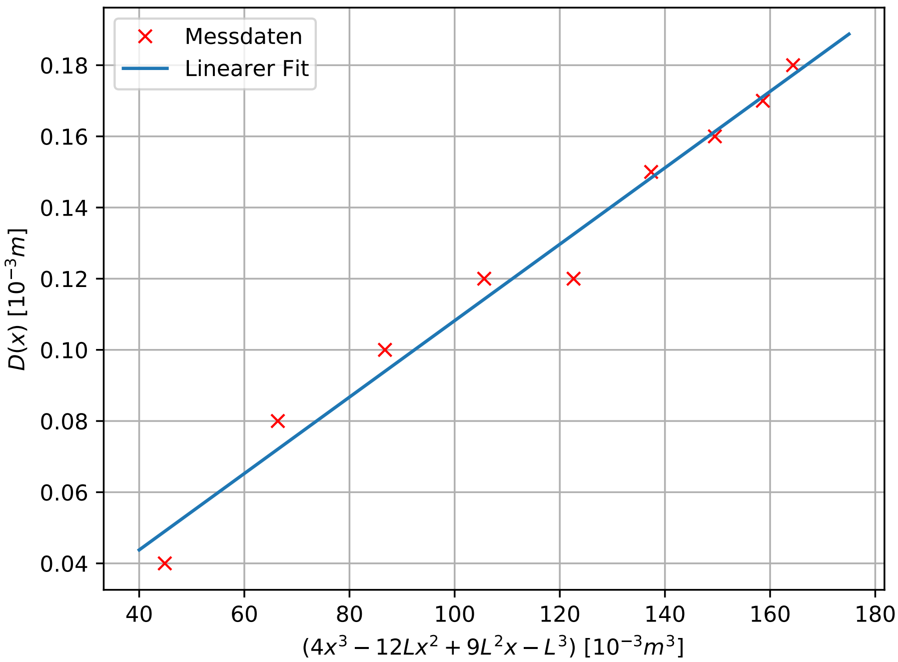
Abbildung 6: Lineare Regression: runder Stab, beidseitige Auflage

Tabelle 5: Messung der Biegung des eckigen Stabs bei beidseitiger Auflage

x / mm	$D(x)$ / mm
50	0,01
75	0,03
100	0,06
125	0,07
150	0,08
175	0,11
200	0,14
225	0,15
250	0,16
275	
300	0,18
325	0,17
350	0,16
375	0,15
400	0,12
425	0,12
450	0,10
475	0,08
500	0,04



(a) Lineare Regression: eckiger Stab, beidseitige Auflage, $0 < x < L/2$



(b) Lineare Regression: eckiger Stab, beidseitige Auflage, $x > L/2$

Abbildung 7: Lineare Regression: eckiger Stab, beidseitige Auflage

Bei den beidseitig eingespannten Stäben werden dieselben Massen m_{rund} und m_{eckig} angehangen. Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls werden diesmal die Hilfsfunktion $3L^2x - 4x^3$ für den Bereich 1 ($0 < x < L/2$) und $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ für den Bereich 2 ($x > L/2$), sowie die Formel **??** verwendet. Analog zu Unterabschnitt 3.1 wird auch hier Matplotlib zur Berechnung der linearen Regression genutzt.

$$
\begin{aligned}
a_{\text{rund-1}} &= (0.0022 \pm 0.0002) & b_{\text{rund-1}} &= (0.0337 \pm 0.0277) \\
a_{\text{rund-2}} &= (0.0024 \pm 0.0002) & b_{\text{rund-2}} &= (0.0090 \pm 0.0239) \\
a_{\text{eckig-1}} &= (0.0012 \pm 0.0001) & b_{\text{eckig-1}} &= (-0.0532 \pm 0.0105) \\
a_{\text{eckig-2}} &= (0.0011 \pm 0.0001) & b_{\text{eckig-2}} &= (0.0008 \pm 0.0075)
\end{aligned}
$$

Durch Umstellen der Formeln **??** nach E erhält man nun das Elastizitätsmodul:

$$E = \frac{m \cdot g}{48 \cdot I \cdot a}.$$

Der Fehler berechnet sich nach der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung durch:

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2} \\
\iff \Delta E &= \frac{m \cdot g}{48 \cdot I \cdot a^2} \cdot \Delta a.
\end{aligned}
$$

Somit beträgt das Elastizitätsmodul nun:

$$
\begin{aligned}
E_{\text{rund-1}} &= (75,68 \pm 6,88)\text{GPa} \\
E_{\text{rund-2}} &= (69,38 \pm 5,78)\text{GPa} \\
E_{\text{eckig-1}} &= (122,67 \pm 10,22)\text{GPa} \\
E_{\text{eckig-2}} &= (133,83 \pm 12,17)\text{GPa}
\end{aligned}
$$

gemittelt zu:

$$E_{\text{rund-3}} = (72,53 \pm 2,23)\text{GPa}$$

und

$$E_{\text{eckig-3}} = (128,25 \pm 3,96)\text{GPa}$$

4 Diskussion

In diesem Versuch wurden zwei Aluminiumstäbe mit verschiedenen Formen ausgewählt. Die Form ist einmal eckig und einmal rund. Beide Stäbe wurden wie in der Durchführung beschrieben untersucht. Die experimentell bestimmten Werte für das Elastizitätsmodul sind bei einseitiger Einspannung:

$$\begin{aligned} E_{\text{rund}} =& (116,16 \pm 3,04)\text{GPa} \\ E_{\text{eckig}} =& (89,22 \pm 1,13)\text{GPa} \end{aligned}$$

und bei beidseitiger Einspannung:

$$\begin{aligned} E_{\text{rund-3}} =& (72,53 \pm 2,23)\text{GPa} \\ E_{\text{eckig-3}} =& (128,25 \pm 3,96)\text{GPa}. \end{aligned}$$

Die Literaturwerte für das Elastizitätsmodul [**Elastizität**] liegen ungefähr bei 70 GPa. Es fällt auf, dass die experimentell bestimmten Werte, bis auf das Elastizitätmodul beim beidseitig eingespannten runden Stab, stark vom Literaturwert abweichen. Die größte prozentuale Abweichung gab es bei der Messung $E_{\text{eckig-3}}$ mit $83,21\%$ und die niedrigste Abweichung gab es bei der $E_{\text{rund-3}}$ mit $3,61\%$. Die geringen Fehlerwerte, lassen darauf schließen, dass es sich um statistische Messunsicherheiten handelt, da diese sich bei vielen Messungen "herausmitteln". Der Wert mit der geringsten Messungenauigkeit ist E_{eckig}. Somit liefert die Methode des einseitigen Einspannens eines eckigen Stabes die genauesten Werte für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls eines Materials. Trotzdem gibt es in der Durchführung einige Umstände, die zu Messungenauigkeit führen können. So sind beispielsweise die Messuhren sehr stoßempfindlich und verstellen sich häufig auch ohne äußere Einwirkung. Digitale Messuhren würden daher die Messung vereinfachen und die Fehler minimieren. Außerdem ist die Auflagefläche für die Messuhren beim runden Stab nicht ganz eben, weswegen die Uhren teilweise seitlich vom Stab rutschen können und somit die Messwerte verfälscht werden. Ungenaues Ablesen kann eine weitere Fehlerquelle darstellen. Diese Methode kann durch das Phänomen der elastischen Nachwirkung verfälscht werden. Es kann angenommen, dass die Stäbe auch vor anhängen eines Gewichtes Verformungen aufgewiesen haben. Durch das nullen der Messuhren vor jeder Messung wurde dies jedoch versucht auszugleichen. Zuletzt könnte eine weitere Fehlerquelle sein, dass bei der beidseitigen Messung das Gewicht nicht so ausgewählt wurde, dass die maximale Auslenkung zwischen 3mm und 7mm liegt.

Literatur

[1] *Flächenträgheitsmomente einiger Querschnitte*. Universität Siegen. URL: `https://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm2/arbeitsblaetter/arbeitsblatt_08_flaechentraegheitsmomente_bsp.pdf` (besucht am 21. 11. 2021).

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[3] *Metallglossar*. ESG Edelmetall-Service GmbH und Co. KG. URL: https://www.scheideanstalt.de/metallglossar/metallglossar/ (besucht am 21. 11. 2021).

[4] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 103 Biegung elastischer Stäbe*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.