

## VERSUCH 204

# Wärmeleitung von Metallen

Annika Bennemann  
annika.bennemann@tu-dortmund.de

Paulin Vehling  
paulin.vehling@tu-dortmund.de

Durchführung: 26.11.2021

Abgabe: 04.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Allgemein . . . . .	3
<b>3 Vorbereitung</b>	<b>4</b>
<b>4 Durchführung</b>	<b>4</b>
4.1 Aufbau . . . . .	4
4.2 Statische Methode . . . . .	5
4.3 Dynamische Methode . . . . .	6
<b>5 Auswertung</b>	<b>6</b>
5.1 Statische Messung . . . . .	7
5.2 Dynamische Messung . . . . .	10
5.2.1 Messung mit Periodendauer 80s . . . . .	10
5.2.2 Messung mit Periodendauer 200s . . . . .	12
<b>6 Diskussion</b>	<b>14</b>
<b>Literatur</b>	<b>15</b>

# 1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es die Wärmeleitung von Aluminium, Messing und Edelstahl zu untersuchen.

## 2 Theorie

### 2.1 Allgemein

Existiert ein Temperaturungleichgewicht, entsteht ein Wärmetransport entlang des Temperaturgefälles. Dies kann entweder durch Konvektion, Wärmeleitung oder Wärmestrahlung passieren. In diesem Versuch wird sich auf die Wärmeleitung beschränkt.

In festen Körpern erfolgt der Wärmetransport über Phononen und frei bewegliche Elektronen, wobei der Gitterbeitrag vernachlässigbar ist [7, S. 1]. Die Wärmemenge lässt sich bestimmen durch:

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

wobei  $\kappa$  die Wärmeleitfähigkeit ist. Mit der Wärmestromdichte

$$j_\omega = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

und der Kontinuitätsgleichung kann eine eindimensionale Wärmeleitungsgleichung gebildet werden.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

Diese gibt den räumlichen- und zeitlichen Verlauf der Temperaturverteilung an.  $\sigma_t = \frac{\kappa}{\rho c}$  ist die Temperaturleitfähigkeit des Materials. Sie gibt die "Geschwindigkeit" der Ausgleichung des Temperaturgefälles an. Die Temperatur kann als Funktion mit zeitlicher Abhängigkeit beschrieben werden. Bei einem periodischen Temperaturwechsel bildet sich eine räumliche und zeitliche Temperaturwelle, welche eine Funktion der Form

$$T(x, t) = T_{max} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \quad (4)$$

annimmt. Aus der Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}} \quad (5)$$

lässt sich mit der Dämpfung die Formel für die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  aufstellen. Die Dämpfung lässt sich aus den Amplitudenverhältnissen  $\frac{dA_{nah}}{dA_{fern}}$  berechnen, wobei diese Amplituden an zwei Thermoelementen mit dem Abstand  $\Delta x$  gemessen werden.

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2\Delta t \ln(A_{nah}/A_{fern})}. \quad (6)$$

$\Delta t$  steht hierbei für die Phasendifferenz zwischen den beiden Thermoelementen. Die Wellenlänge lässt sich berechnen durch

$$\lambda = \sqrt{\frac{4\pi\kappa T}{\rho c}}, \quad (7)$$

wobei  $T = \frac{1}{f}$  die Periodendauer und  $f$  die Frequenz der Welle beschreibt.

### 3 Vorbereitung

Vor der Durchführung des Versuchs sollten die Literaturwerte von Messing, Aluminium und Edelstahl herausgesucht werden. In der folgenden Tabelle werden somit die Literaturwerte von der Dichte  $\rho$ , der spezifischen Wärme  $c$  und der Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  aufgelistet. Außerdem wird die Wellenlänge mit den vorhandenen Literaturwerten nach Gleichung 7 bestimmt.

**Tabelle 1:** Literaturwerte von Messing, Aluminium und Edelstahl.

	$\rho(10^3\text{kg} / \text{m}^3)$	$c(\text{J} / \text{kgK})$	$\kappa(\text{W} / \text{mK})$	$\lambda(\text{m})$
Aluminium	2,7	895	237	0,186
Messing	8,4	380	113	0,320
Edelstahl	7,89	450	20	0,125
Wasser	0,998	4,182	0,6	

[5, S. 378, 381] [6]

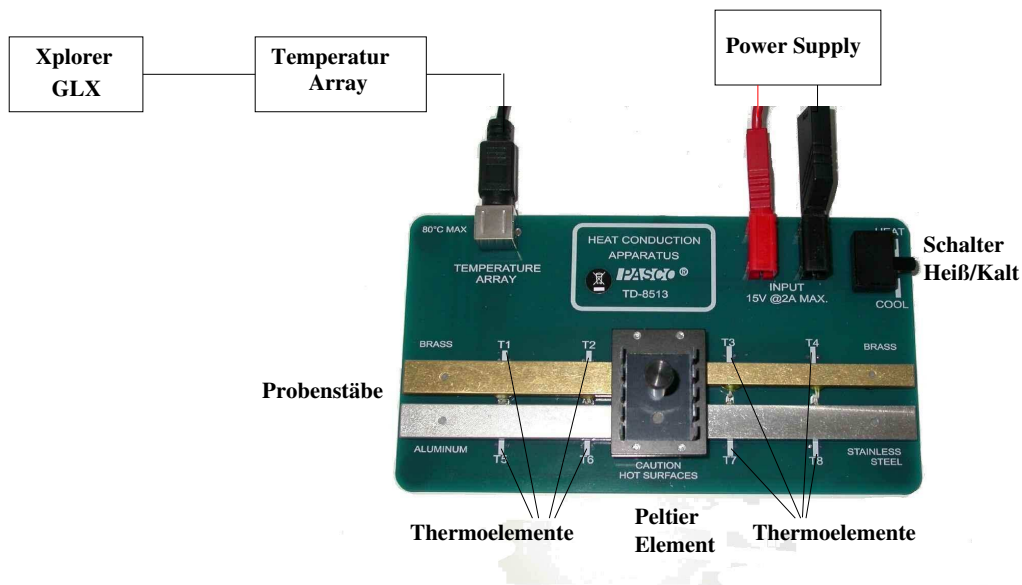
## 4 Durchführung

### 4.1 Aufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einer Grundplatte mit vier rechteckigen Stäben, die an einer Seite von einem Peltier-Element simultan geheizt oder gekühlt werden. Die Stäbe sind aus drei verschiedenen Materialien: Aluminium, Edelstahl und zweimal Messing, mit verschiedenen Breiten. Zusätzlich sind an jedem Stab zwei Thermoelemente, welche die Temperatur an verschiedenen Stellen der Stäbe messen, zu sehen in Abbildung 1. Die Thermoelemente sind verbunden mit einem GLX Datenlogger (Abbildung 2), welcher die Temperaturen aufnimmt und in eine Tabelle überführt. Zuletzt gibt es auch eine Spannungsquelle, welche bei der jeweiligen Methode eine bestimmte Betriebsspannung auf das Heizelement überträgt. Bei beiden Methoden wird ein maximaler Strom angelegt.

Wie in Abbildung 1 zu sehen, sind die Thermoelemente durchnummeriert, wobei gilt:

- $T1$  = Messing dick fern
- $T2$  = Messing dick nah
- $T3$  = Messing dünn nah
- $T4$  = Messing dünn fern
- $T5$  = Aluminium fern
- $T6$  = Aluminium nah
- $T7$  = Edelstahl nah
- $T8$  = Edelstahl fern



**Abbildung 1:** Grundplatte mit Aluminium, Edelstahl und zweimal Messing.[7, S. 3]

Außerdem wird  $\Delta x$  gemessen. Dies ist der Abstand zwischen den benachbarten Thermoelementen.

## 4.2 Statische Methode

An allen acht Thermoelementen wird der Temperaturverlauf in Abhängigkeit der Zeit gemessen. Dafür wird die Abtastrate beim GLX auf  $\Delta t_{GLX} = 5\text{s}$  Sekunden gestellt und eine Betriebsspannung von 5V angelegt. Es wird solange gemessen bis das Thermoelement  $T7$   $45^\circ\text{C}$  anzeigt. Während des Heizvorgangs werden Isolierungen über die Stäbe gelegt, damit der Wärmeaustausch mit der Umgebung verringert wird. Nach der Messung werden die Stäbe gekühlt, bis deren Temperaturen maximal  $30^\circ\text{C}$  betragen.

### 4.3 Dynamische Methode

Ein anderer Name für die folgende Methode ist das Angström-Messverfahren. Dabei werden die Probenstäbe periodisch geheizt. Die Abtastrate wird auf  $\Delta t_{GLX} = 2\text{s}$  geändert und die Betriebsspannung auf 8V.

Während der ersten Messung beträgt die Periodendauer 80s, wobei jeweils 40s geheizt und 40s gekühlt wird. Während gekühlt wird muss das Peltier-Element auf "COOL" gestellt werden und die Wärmeisolatoren werden abgenommen. Diese Messung geht über 10 Perioden.

Die zweite Messung wird analog durchgeführt. Die Periodendauer beträgt nun jedoch 200s und die Messung endet, wenn eines der Thermoelemente 80 °C erreicht.



Abbildung 2: Xplore GLX.[7, S. 5]

## 5 Auswertung

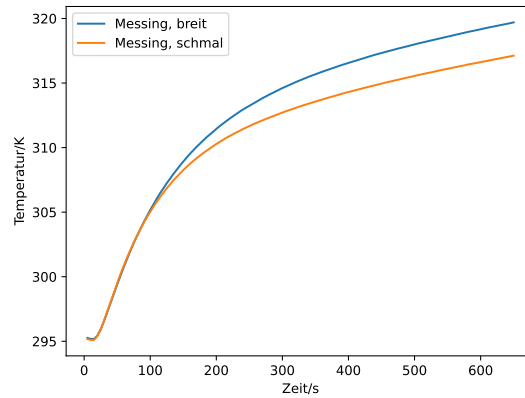
In der folgenden Tabelle 2 werden die Materialeigenschaften der Grundplatte aufgelistet.

**Tabelle 2:** Materialeigenschaften der Grundplatte. [7]

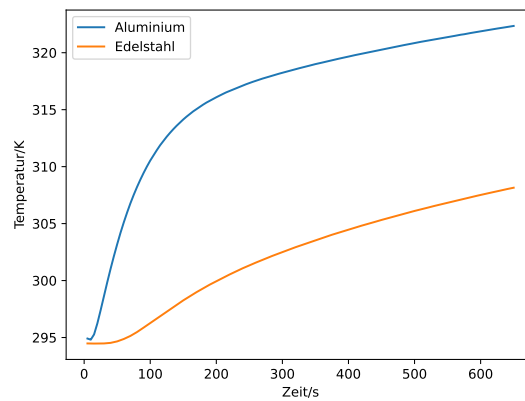
Material	$l[\text{cm}]$	$b[\text{cm}]$	$h[\text{cm}]$	$\rho[\text{kg/m}^3]$	$c[\text{J}/(\text{kg K})]$
Messing	9	1,2	0,4	8520	385
Messing	9	0,7	0,4	8520	385
Aluminium	9	1,2	0,4	2800	830
Edelstahl	9	1,2	0,4	8000	400

## 5.1 Statische Messung

Wie in Unterabschnitt 4.2 beschrieben, wird eine statische Messung der Temperaturverläufe an den Stäben durchgeführt. Die Daten werden in folgenden Diagrammen dargestellt und ausgewertet.



(a) Temperaturverlauf der Messingstäbe.(fern)



(b) Temperaturverlauf des Aluminium- und Edelstahlstabs.(fern)

**Abbildung 3:** Temperaturverläufe der Stäbe an den fernen Thermoelementen.

Zunächst wurden die Temperaturen an den fernen Thermoelementen über einen Zeitraum von 650s aufgenommen. Die Temperaturverläufe aller 4 untersuchten Stäbe weisen Gemeinsamkeiten auf. So zeigt der Graph in Abbildung 3, dass bei allen Metallen die Temperatur initial stark steigt und sich mit zunehmender Zeit einem Sättigungswert annähert. Der Temperaturanstieg ist bei Edelstahl allerdings deutlich langsamer als bei den übrigen Metallen und auch der Sättigungswert ist hier deutlich niedriger. Bei den beiden Messingstäben sind sehr ähnliche Temperaturverläufe zu beobachten, wobei die Kurve des breiten Stabs zu einem späteren Zeitpunkt abflacht als die des schmalen Stabs.

**Tabelle 3:** Temperaturen der Stäbe nach 650s.

Material	Temperatur [K]
Messing, breit	319,70
Messing, schmal	317,12
Aluminium	322,35
Edelstahl	308,15

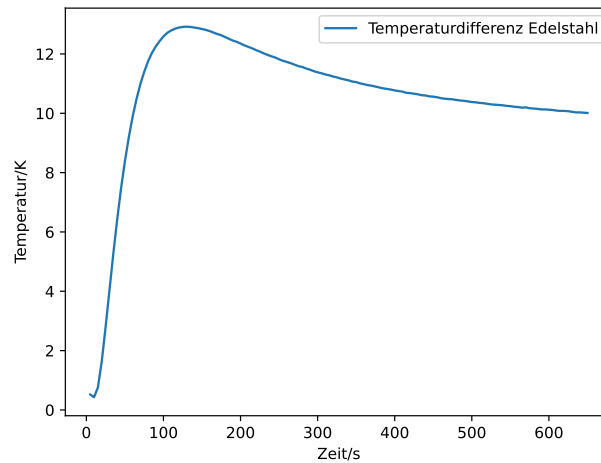
Zur Bewertung der Wärmeleitung der Stäbe wurde die Temperatur am Ende der statischen Messung erhoben und in einer Tabelle dargestellt. Aus den Werten in Tabelle 3 lässt sich erkennen, dass Aluminium von den untersuchten Metallen die beste Wärmeleitfähigkeit besitzt und Edelstahl die Wärme am schlechtesten leitet.

**Tabelle 4:** Wärmeströme zu verschiedenen Messzeiten.

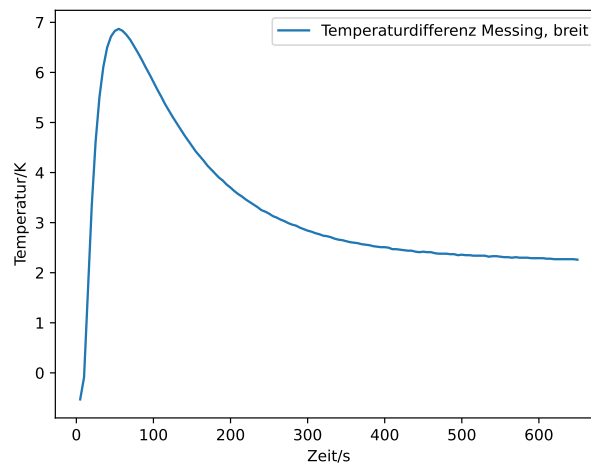
Messzeitpunkt $t / s$	Messing,breit			Messing,schmal		
	$T_1 / K$	$T_2 / K$	$\frac{\Delta Q}{\Delta t} / W$	$T_3 / K$	$T_4 / K$	$\frac{\Delta Q}{\Delta t} / W$
50	299,40	306,23	-1,235	307,85	299,52	-0,879
200	311,45	315,15	-0,669	315,21	310,28	-0,520
350	315,68	318,31	-0,476	317,60	313,57	-0,425
500	317,99	320,35	-0,427	319,38	315,55	-0,404
650	319,70	321,96	-0,409	320,89	317,12	-0,398
Messzeitpunkt $t / s$	Aluminium			Edelstahl		
	$T_5 / K$	$T_6 / K$	$\frac{\Delta Q}{\Delta t} / W$	$T_7 / K$	$T_8 / K$	$\frac{\Delta Q}{\Delta t} / W$
50	303,19	308,64	-2,067	303,04	294,66	-0,268
200	316,09	318,32	-0,846	312,29	299,94	-0,395
350	319,00	320,70	-0,645	314,59	303,54	-0,354
500	320,85	322,43	-0,599	316,49	306,11	-0,332
650	322,35	323,91	-0,592	318,16	308,15	-0,320

In der Tabelle 4 sind die mithilfe von Gleichung 1 berechneten Wärmeströme der verschiedenen Metalle zu fünf unterschiedlichen frei gewählten Messzeitpunkten zu sehen.





(a) Verlauf der Temperaturdifferenz am Edelstahlstab.



(b) Verlauf der Temperaturdifferenz am breiten Messingstab.

**Abbildung 4:** Verlauf der Temperaturdifferenzen zwischen den Thermoelementen.

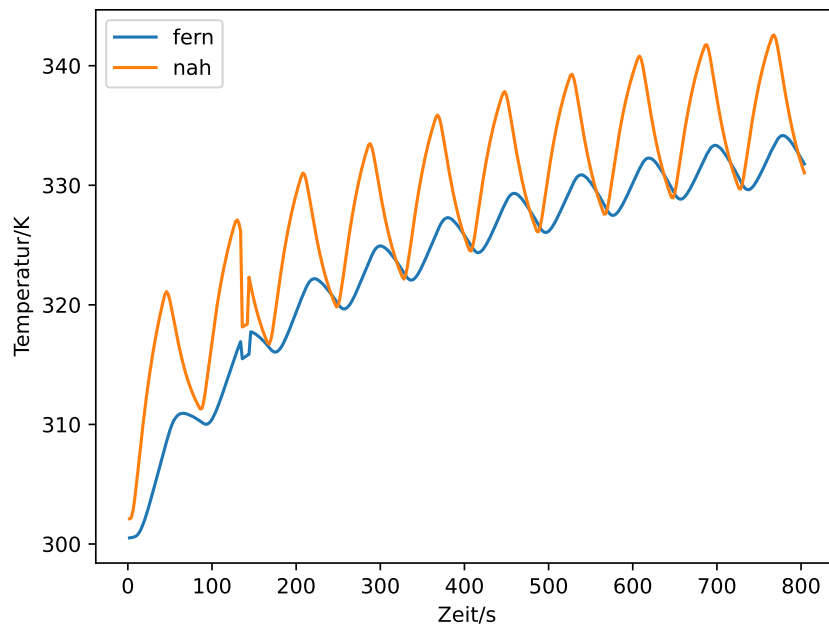
In Abbildung 4 sind die Verläufe der Temperaturdifferenzen zwischen den Thermoelementen auf dem breiten Messingstab, sowie dem Edelstahlstab dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass die Kurve der Differenz bei beiden Stäben zunächst stark bis zu einem Hochpunkt ansteigt. Danach fällt sie bis sie sich einem Sättigungswert annähert. Beim Messingstab ist die Differenz allerdings ab dem Hochpunkt der Kurve deutlich niedriger als beim Edelstahlstab. Die Temperaturdifferenz am Hochpunkt der Kurve bei Edelstahl erreicht einen Wert von über 12 K, wobei der Wert am Hochpunkt der Messingkurve unter 7 K liegt.

## 5.2 Dynamische Messung

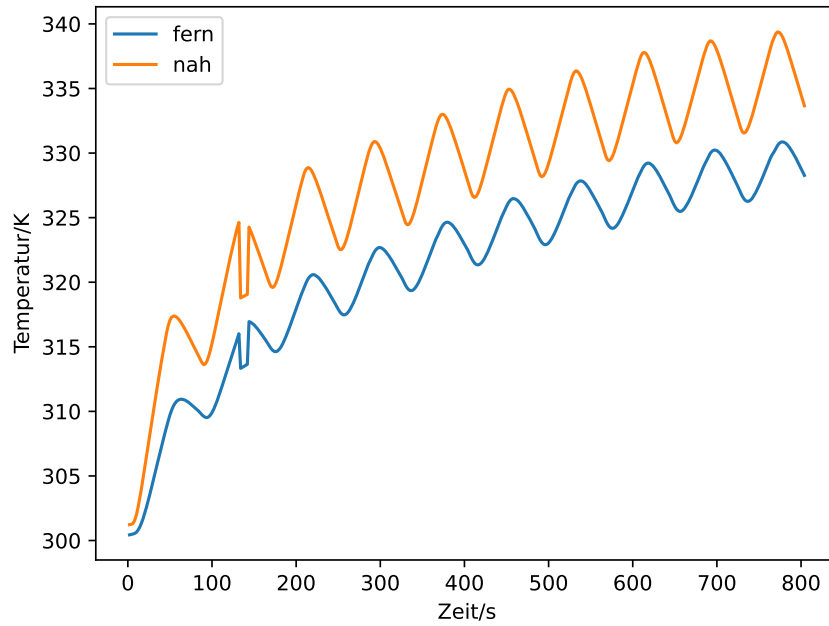
Wie in Unterabschnitt 4.3 beschrieben, werden mehrere dynamische Messungen der Temperaturverläufe an den Stäben durchgeführt.

### 5.2.1 Messung mit Periodendauer 80s

Zunächst wurde die Messung nach dem Angström-Verfahren mit einer Periodendauer von 80 s durchgeführt. Die Werte an den Thermoelementen am breiten Messingstab und am Aluminiumstab werden in Abbildung 5 und Abbildung 6 dargestellt.



**Abbildung 5:** Temperaturverlauf des breiten Messingstabs.



**Abbildung 6:** Temperaturverlauf des Aluminiumstabs.

Anhand der Graphen wurden die Amplituden, sowie die Phasendifferenzen aus den Abständen der Wellenhochpunkte beider Wellen bestimmt. Die Rechnungen wurde mithilfe der Pythonmodule Matplotlib [1], Numpy [4], Scipy [2] und Uncertainties[3] durchgeführt, weswegen die Fehler verschwindend gering sind und vernachlässigbar sind.

**Tabelle 5:** Amplituden und Phasendifferenzen Messing und Aluminium.

	Messing			Aluminium		
	$A_{nah} / K$	$A_{fern} / K$	$\Delta t / s$	$A_{nah} / K$	$A_{fern} / K$	$\Delta t / s$
	9,5	5,21	20	11,51	8,075	10
	7,91	3,865	16	9,43	5,505	4
	7,16	3,07	14	8,46	4,64	6
	6,83	2,635	12	8,19	4,18	8
	6,865	2,61	12	8,12	4,28	8
	6,67	2,48	10	8,05	4,19	8
	6,595	2,41	10	7,965	4,095	6
	6,615	2,395	10	7,98	4,19	8
	6,405	2,225	10	7,805	3,95	6
	6,45	2,265	10	7,817	3,915	6
Mittelwert	7,100	2,920	12,400	8,533	4,702	7,000

Aus den Werten in Tabelle 5 kann mithilfe von Gleichung 6 die Wärmeleitfähigkeit berechnet werden. Der Fehler wird nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung mit

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta t}\right)^2 \cdot (\Delta(\Delta t))^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial A_{\text{nah}}}\right)^2 \cdot (\Delta A_{\text{nah}})^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial A_{\text{fern}}}\right)^2 \cdot (\Delta A_{\text{fern}})^2} \quad (8)$$

bestimmt.

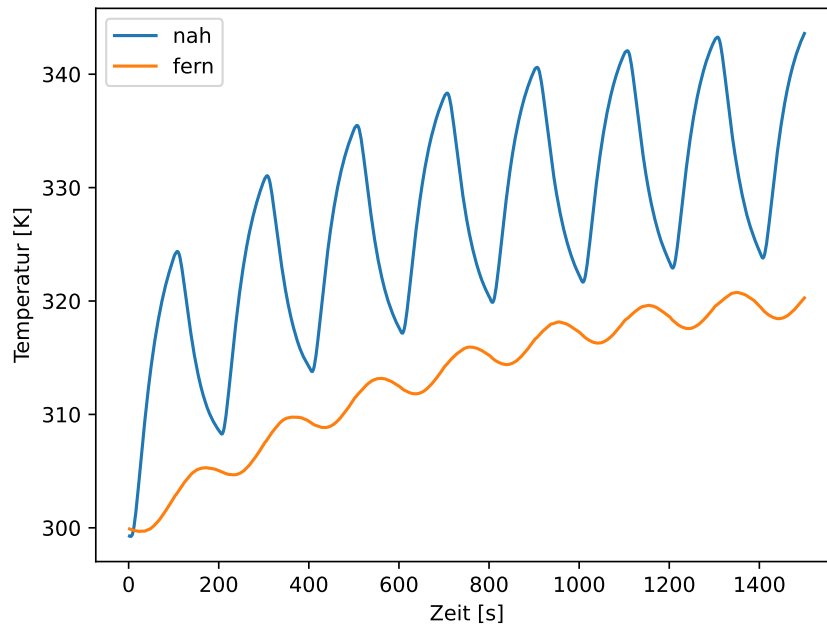
Die Wärmeleitfähigkeit beträgt somit:

$$\kappa_{\text{Messing}} = (133,95 \pm 63,92) \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\kappa_{\text{Aluminium}} = (250,72 \pm 140,93) \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

### 5.2.2 Messung mit Periodendauer 200s

Analog zu Unterunterabschnitt 5.2.1 wurde die Messung nach dem Angström-Verfahren mit einer Periodendauer von 200s durchgeführt. Die Werte an den Thermoelementen am Edelstahlstab werden in Abbildung 7 dargestellt.



**Abbildung 7:** Temperaturverlauf des Edelstahlstabs.

Auch hier werden die Amplituden und Phasendifferenzen berechnet.

**Tabelle 6:** Amplituden und Phasendifferenzen Edelstahl.

	$A_{nah}$ [K]	$A_{fern}$ [K]	$\Delta t$ [s]
	12,57	2,81	64
	11,39	2,56	64
	10,85	2,17	54
	10,585	2,065	50
	10,365	1,885	50
	10,205	1,665	46
	10,158	1,595	40
Mittelwert	10,879	2,107	52,571

Die Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl wird nun berechnet zu:

$$\kappa_{\text{Edelstahl}} = (10,97 \pm 1,52) \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

Nach Gleichung 7 lassen sich die Wellenlängen der Temperaturwellen bestimmen.

**Tabelle 7:** Wellenlängen der Temperaturwellen.

Material	Wellenlänge [m]	
Messing	$0,203 \pm$	0,048
Aluminium	$0,329 \pm$	0,093
Edelstahl	$0,093 \pm$	0,006

Die Frequenzen  $f = 1/T$  betragen  $f_{80s} = 0,0125 \text{ 1/s}$  und  $f_{200s} = 0,005 \text{ 1/s}$ .

## 6 Diskussion

Wie schon in Unterabschnitt 5.1 angegeben, besitzt Aluminium von den verglichenen Metallen die beste Wärmeleitung und Edelstahl die schlechteste. Dies war im Bezug auf Tabelle 1 auch anzunehmen.

**Tabelle 8:** Vergleich der berechneten Wärmeleitfähigkeiten mit Literaturwerten.

Material	berechneter Wert/ $W/(mK)$		Literaturwert/ $W/(mK)$	Abweichung/ %
Messing	$133,95 \pm$	63,92	113	18,54
Aluminium	$250,72 \pm$	140,93	237	5,79
Edelstahl	$10,97 \pm$	1,52	20	45,17

In Tabelle 8 sind die aus den Messwerten berechneten Wärmeleitfähigkeiten und die zugehörigen Literaturwerte, sowie die Abweichungen davon aufgelistet. Die Werte von Messing und Aluminium wurden der Messung nach der Angström-Methode mit einer Periode von 80 s entnommen, bei Edelstahl wurden die Werte aus der Messung mit einer Periode von 200 s genommen.

**Tabelle 9:** Wellenlängen der Temperaturwellen.

Material	berechneter Wert/ m		Literaturwert/ m siehe Tabelle 1	Abweichung/ %
Messing	$0,203 \pm$	0,048	0,186	8,88
Aluminium	$0,329 \pm$	0,093	0,320	2,85
Edelstahl	$0,093 \pm$	0,006	0,125	25,95

Die Literaturwerte für die Wärmeleitfähigkeiten, sowie für die Wellenlängen von Aluminium und Messing liegen im Fehlerbereich der berechneten Werte, wobei die Abweichung bei Aluminium am geringsten ist. Die Werte von Edelstahl weichen jedoch stark von den Literaturwerten ab. Ein Grund dafür kann sein, dass es verschiedene Edelstahl-Zusammensetzungen mit unterschiedlichen Eigenschaften gibt und nicht genau klar ist um welche Zusammensetzung es sich beim Probestab handelt.

Es gibt verschiedene weitere Umstände die zu Unsicherheiten der Messungen geführt haben können. Systematische Unsicherheiten treten zum Beispiel dadurch auf, dass bei dem Versuch keine Laborbedingungen, wie z.B 20 °C Raumtemperatur, vorlagen, was auch zu größeren Abweichungen führt. Die Stäbe waren unzureichend isoliert, wodurch der Wärmeaustausch mit der Umgebung zwar verringert, aber nicht ganz vermieden werden konnte. Ein Grund für statische Messunsicherheiten stellen die Anfangstemperaturen der Stäbe dar, die nicht exakt gleich waren. Schwankungen in der Periodendauer treten durch das manuelle Umschalten des Schalters und Entfernen der Isolierung bei der periodischen Messung auf. Die Unsicherheiten in der Temperaturmessung von den

Thermoelementen fließen auch in die Messung ein. Auch die digitale Auswertung der Daten der Thermoelemente durch den GLX Datenlogger kann zu Fehlern führen. So gibt es in Abbildung 5 und Abbildung 6 Ausreißer bei ca. 130 s wo die Temperatur ohne erkennbaren Grund stark fällt und sofort wieder stark steigt, bevor die Kurve wieder den vorherigen Verlauf annimmt.

## Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] Wolfgang Schenk. *Physikalisches Praktikum*. Friedrich Kremer, Springer Spektrum, 2014. ISBN: 978-3-658-00665-5.
- [6] Anton Schweizer. 2021. URL: [https://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit\\_metall/wleit\\_metall.php](https://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit_metall/wleit_metall.php).
- [7] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 204 Wärmeleitung von Metallen*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.