

**Protokoll zu Versuch Nr.103 des physikalischen
Grundpraktikums**

Biegung von elastischen Stäben

Annika Bennemann
annika.bennemann@tu-dortmund.de

Paulin Vehling
paulin.vehling@tu-dortmund.de

Durchführung: 19.11.2021

Abgabe: 26.11.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Allgemein	3
1.2	Einseitige Einspannung	3
1.3	Beidseitige Auflage	4
2	Durchführung	5
2.1	Einseitige Einspannung	6
2.2	Beidseitige Auflage	6
3	Auswertung	7
3.1	Einseitige Einspannung	8
3.2	beidseitige Auflage	11
4	Diskussion	16
5	Anhang	17
	Literatur	22

1 Theorie

Ziel des Versuchs ist es, das Elastizitätsmodul eines Metalls zu bestimmen und die berechneten Daten mit Literaturwerten abzugleichen.

1.1 Allgemein

In der Physik können Körper Gestalts- und Volumenänderungen erfahren, wenn Kräfte an der Oberfläche angreifen. Diese Kräfte werden Spannungskräfte genannt, welche sich auf Flächeneinheiten beziehen. Die Spannung wird komponentenweise aufgeteilt und die Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, wird als Normalspannung σ oder Druck bezeichnet. Als Tangential- oder Schubspannung wird die oberflächenparallele Komponente bezeichnet. Die Gestaltsänderung kann beschrieben werden durch $\frac{\Delta L}{L}$. Ist diese hinreichend klein, kann ein linearer Zusammenhang zwischen der Deformation $\frac{\Delta L}{L}$ und der angreifenden Spannung σ gebildet werden [5, S. 106]. Dies wird durch das Hooksche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

beschrieben. E ist das Elastizitätsmodul, was ein materialabhängiger Proportionalitätsfaktor ist. Dieses lässt sich bestimmen durch eine messbare Veränderung an einem Probestab bei nur geringer Krafteinwirkung. Diese Veränderung wird als Biegung bezeichnet, wobei die Durchbiegung $D(x)$ größer als $\frac{\Delta L}{L}$ ist bei gleichen Versuchsbedingungen.

1.2 Einseitige Einspannung

Wird der Stab einseitig eingespannt und auf der anderen Seite wirkt eine Kraft, entsteht eine Durchbiegung $D(x)$. Entgegen der Kraft F wirkt zusätzlich eine Zugspannung in der

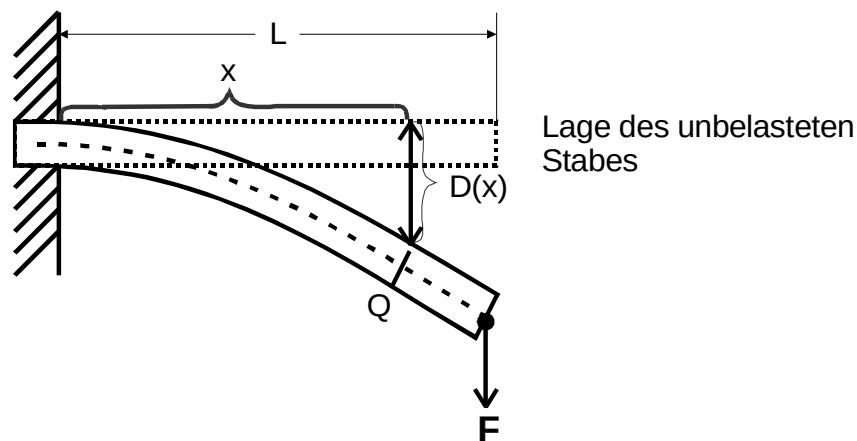


Abbildung 1: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung. [5, S. 107]

oberen Stabschicht und in der unteren eine Druckspannung (siehe Abbildung 1). Daraus

lässt sich die Drehmomentgleichung

$$M_F = M_Q \quad (2)$$

aufstellen, wobei das Drehmoment

$$M_Q = \int_Q y \sigma(y) dq. \quad (3)$$

sich aus der Integration über den Querschnitt Q berechnet. y ist der Abstand zur neutralen Faser. Dies ist der Zustand ohne Spannung, also wenn keine Kräfte auf den Stab wirken. Das Drehmoment

$$M_F = F(L - x) \quad (4)$$

ist die äußere Kraft, die auf den Stabquerschnitt an der Biegung $L - x$ angreift, wobei L die Länge des eingespannten Stabes ist. Die beiden Drehmomente eingesetzt in Gleichung 2 ergeben

$$\int_Q y \sigma(y) dq = F(L - x). \quad (5)$$

Durch Beziehungen aus der Differentialgeometrie kann das Hooksche Gesetz zu

$$\sigma(y) = Ey \frac{d^2 D}{dx^2}. \quad (6)$$

umgeformt werden. Außerdem kann das Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_Q y^2 dq(y) \quad (7)$$

aufgrund der formalen Analogie zum Massenträgheitsmoment Θ eingefügt werden. [5, S. 109] Das Umformen von Gleichung 5 und einsetzen von Gleichung 6 und Gleichung 7 führt zur finalen Formel

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (\text{für: } 0 \leq x \leq L) \quad (8)$$

für die einseitige Einspannung.

1.3 Beidseitige Auflage

Eine andere Methode zur Erzeugung einer Durchbiegung ist es den Stab auf beiden Seiten aufzulegen und ein Gewicht in die Mitte zu hängen.

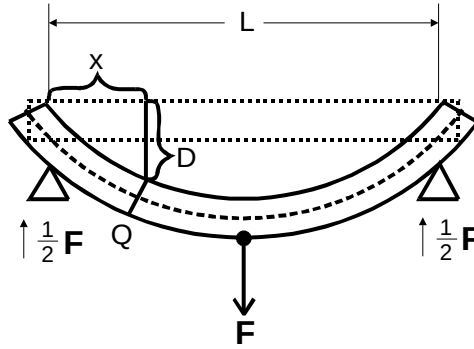


Abbildung 2: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei beidseitiger Auflage.[5, S. 110]

Dann greift die Kraft in der Mitte des Stabes an. Am Querschnitt Q mit dem Hebelarm x beträgt die Kraft dann $\frac{F}{2}$ (siehe Abbildung 2). Deswegen muss der Stab in zwei Intervalle aufgeteilt werden, in denen sich das Drehmoment M_F unterscheidet.

Im Bereich $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ gilt

$$M_F = -\frac{F}{2}x \quad (9)$$

und in dem Bereich $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ gilt

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x). \quad (10)$$

Diese beiden Formeln werden beide in Gleichung 2 eingefügt und analog wie im vorherigen Kapitel umgeformt. Sodass sich daraus

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \quad (\text{für: } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \quad (11)$$

und

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad (\text{für: } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \quad (12)$$

ergibt.

2 Durchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 schematisch dargestellt. An der Vorrichtung befinden sich auf einer Schiene mit Längenskalierung zwei verschiebbare Messuhren, die die Auslenkung messen. Zunächst werden die Massen und Maße der elastischen Stäbe mithilfe einer elektrischen Waage, eines Maßbandes und eines Messschiebers bestimmt. Bei den Probekörpern handelt es sich um einen rechteckigen und einen runden Stab des gleichen Materials.

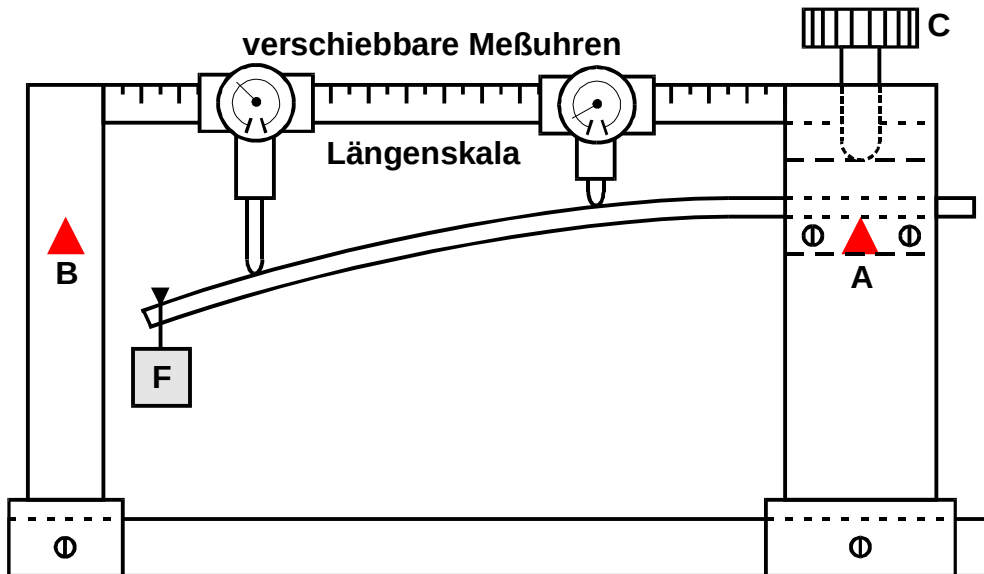


Abbildung 3: Aufbau der Apparatur zur Messung der Durchbiegung der elastischen Stäbe.[5, S. 111]

2.1 Einseitige Einspannung

Der Probekörper wird einseitig am Punkt C eingespannt. Am Ende des Stabes wird ein Gewicht angehängen, sodass sich der Stab durchbiegt. Hierbei soll eine maximale Auslenkung von 3 bis 7 mm erreicht werden. Es werden mehrere Messungen entlang des Stabes durchgeführt. Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Stäbe exakt gerade sind, werden die Messuhren vor jeder Messung der Auslenkung auf Null gesetzt, bevor das Gewicht angehängen wird. Nun wird die Auslenkung $D(x)$ bestimmt und in Abhängigkeit vom Abstand x zur Einspannung in einer Tabelle notiert, bevor die Messuhren um einen Abstand von 2,5 cm verschoben werden. $D(x)$ wird bestimmt durch die Formel

$$D(x) = D_m(x) - D_0(x) \quad (13)$$

, wobei $D_0(x)$ hier Null ist, wenn die Messuhr vor jeder Messung auf Null gesetzt wird und $D(x)$ somit direkt abgelesen werden kann.

2.2 Beidseitige Auflage

Das Verfahren wird analog für die beidseitige Auflage wiederholt. Nun liegt der Probekörper jedoch auf den Punkten A und B auf und das Gewicht wird mittig angehängen anstatt am Ende des Stabes. Außerdem muss nun beachtet werden, dass an beiden Hälften des Stabes mit verschiedenen Messuhren gemessen wird.

3 Auswertung

Tabelle 1: Maße des runden und des eckigen Stabes.

	Runder Stab	Eckiger Stab
l / mm	592,0	602,0
l_{Lit} / mm	551,82	591,18
h / mm	10,0	10,0
m / g	129,4	167,2
m_{Lit} / g	120,9	164,0

Aus den bestimmten Daten der Stäbe wird die Dichte des Materials nach der Formel

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (14)$$

, mit V = Volumen des Stabs, zu $\rho_r = 2783,06 \text{ kg/m}^3$, sowie $\rho_e = 2777,41 \text{ kg/m}^3$ bestimmt. Aus dem Vergleich mit Literaturwerten [4] wird klar, dass es sich um Aluminium handelt. Außerdem wird das Flächenträgheitsmoment I_r der Stäbe bestimmt. Bei einem runden Querschnitt wird dafür die Formel [2]

$$I_r = \frac{\pi(d/2)^4}{4} \quad (15)$$

verwendet. Das Flächenträgheitsmoment für den runden Stab beträgt also:

$$I_r = 4,91 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4.$$

Das Flächenträgheitsmoment des eckigen Stabes mit quadratischem Querschnitt berechnet sich nach der Formel [2]

$$I_e = \frac{b^4}{12}. \quad (16)$$

Das Flächenträgheitsmoment für den eckigen Stab beträgt dadurch:

$$I_e = 8,33 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4.$$

3.1 Einseitige Einspannung

Tabelle 2: Messung der Biegung des runden Stabs bei einseitiger Einspannung.

x / mm	$D(x) / \text{mm}$
100	0,28
125	0,35
150	0,36
175	0,45
200	0,51
225	0,62
250	0,78
275	0,93
300	1,16
325	1,34
350	1,58
370	1,78
400	2,07
425	2,30
450	2,58
475	2,79
500	3,10
525	3,48

Tabelle 3: Messung der Biegung des eckigen Stab bei einseitiger Einspannung.

x / mm	$D(x) / \text{mm}$
100	0,32
125	0,46
150	0,62
175	0,73
200	0,87
225	1,03
250	1,15
275	1,32
300	1,64
325	1,86
350	2,01
375	2,32
400	2,68
425	2,90
450	3,05
475	3,44
500	3,75
525	4,11

Die Masse des angehängten Gewichts beträgt beim runden Stab $m_{\text{rund}} = 400 \text{ g}$ und beim eckigen Stab $m_{\text{eckig}} = 600 \text{ g}$. Mit den Messwerten aus Tabelle 2 kann das Elastizitätsmodul mithilfe der Hilfsfunktion $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ und der Gleichung 8 berechnet werden. Hierzu wird mit dem Pythonmodul Matplotlib [3] der Y-Achsenabschnitt und die Steigung der linearen Regression $y = a \cdot x + b$, sowie die zugehörigen Fehler berechnet.

$$a_{\text{rund}} = (0.0344 \pm 0.0009)$$

$$b_{\text{rund}} = (-0.0844 \pm 0.0462)$$

$$a_{\text{eckig}} = (0.0396 \pm 0.0005)$$

$$b_{\text{eckig}} = (0.1098 \pm 0.0293)$$

Das Umstellen der Formel Gleichung 8 nach E

$$a = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \Leftrightarrow E = \frac{m \cdot g}{2 \cdot a \cdot I} \quad (17)$$

ergibt das Elastizitätsmodul.

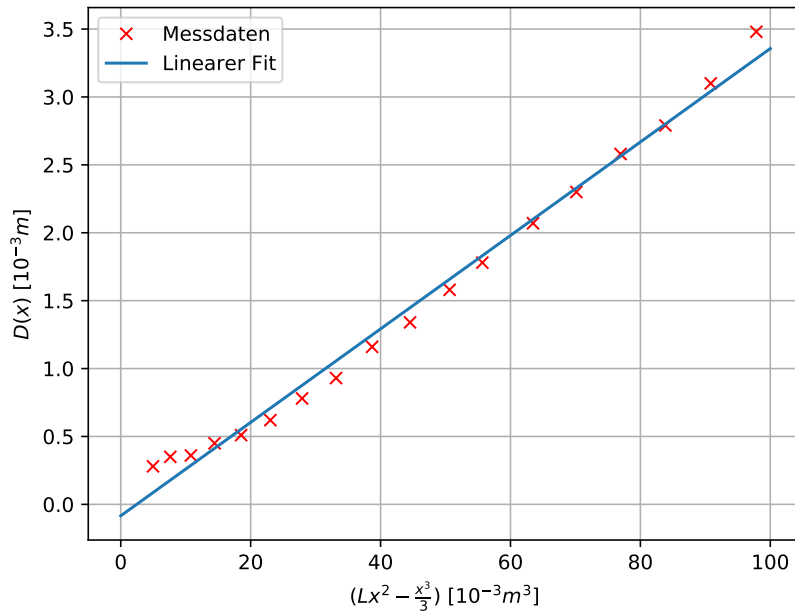


Abbildung 4: Durchbiegung des runden Stabs bei einseitiger Einspannung.

Nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung wird der Fehler durch

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E = \frac{m \cdot g}{2 \cdot I \cdot a^2} \cdot \Delta a.$$

berechnet. Somit erhält man folgende Werte für das Elastizitätsmodul:

$$E_{\text{rund}} = (116,16 \pm 3,04) \text{ GPa}$$

$$E_{\text{eckig}} = (89,22 \pm 1,13) \text{ GPa}$$

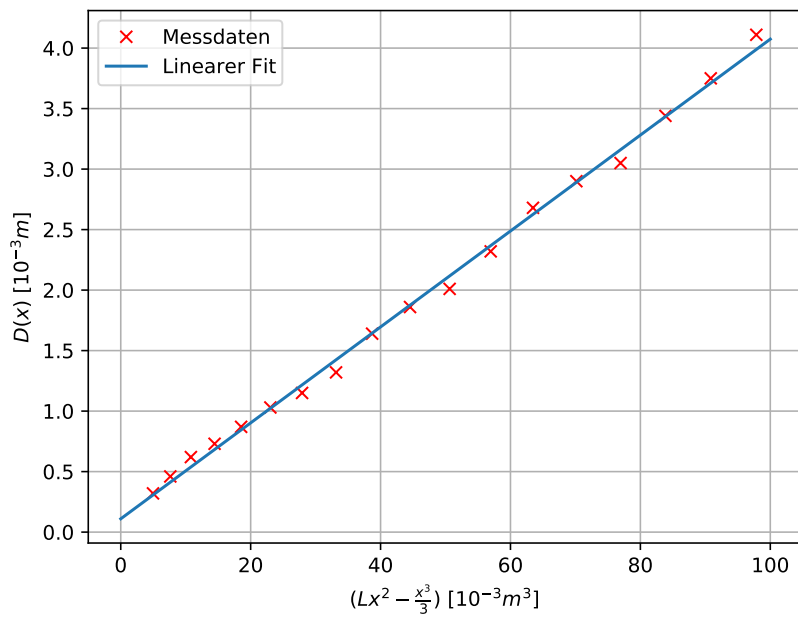


Abbildung 5: Durchbiegung des eckigen Stabs bei einseitiger Einspannung.

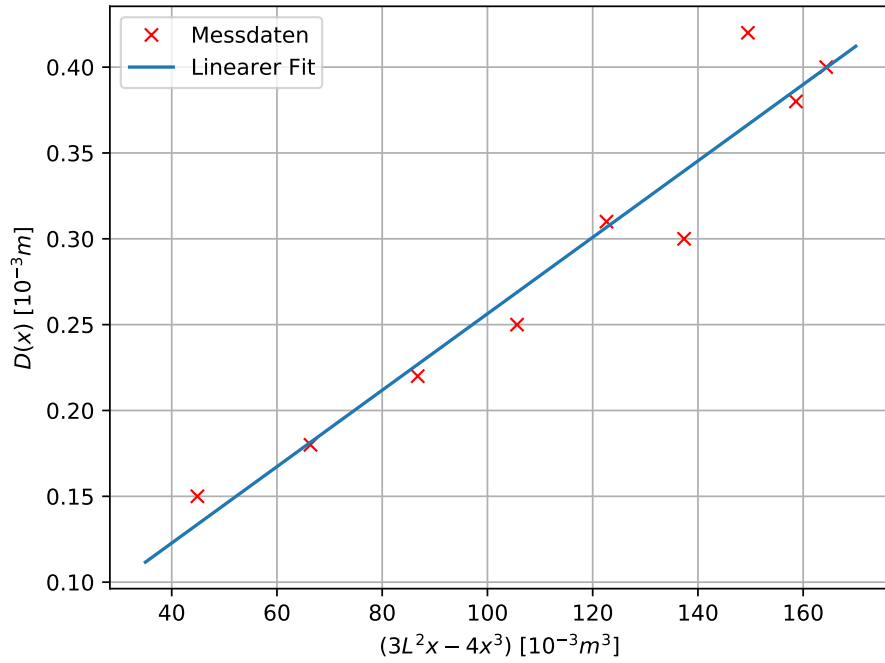
3.2 beidseitige Auflage

Tabelle 4: Messung der Biegung des runden Stabs bei beidseitiger Auflage.

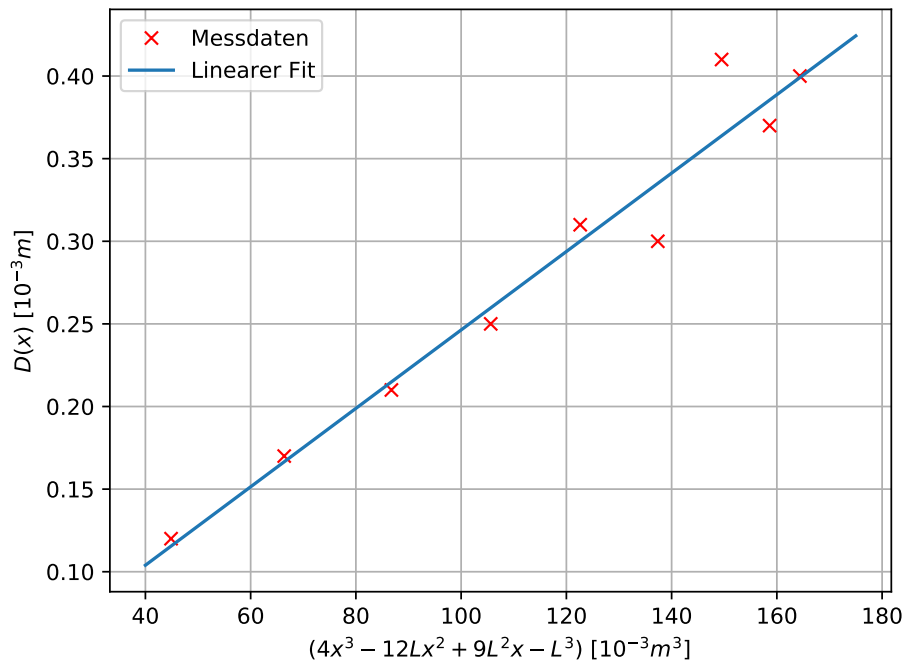
x / mm	$D(x)$ / mm
50	0,15
75	0,18
100	0,22
125	0,25
150	0,31
175	0,30
200	0,42
225	0,38
250	0,40
275	
300	0,40
325	0,37
350	0,41
375	0,30
400	0,31
425	0,25
450	0,21
475	0,17
500	0,12

Tabelle 5: Messung der Biegung des eckigen Stabs bei beidseitiger Auflage.

x / mm	$D(x)$ / mm
50	0,01
75	0,03
100	0,06
125	0,07
150	0,08
175	0,11
200	0,14
225	0,15
250	0,16
275	
300	0,18
325	0,17
350	0,16
375	0,15
400	0,12
425	0,12
450	0,10
475	0,08
500	0,04

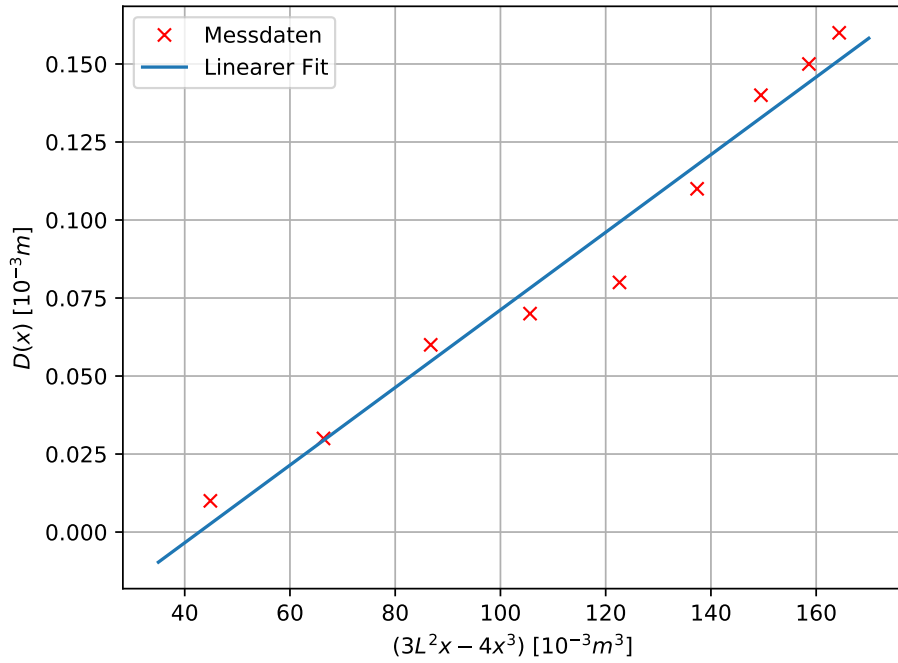


(a) Durchbiegung des runden Stabs bei beidseitiger Auflage im Bereich $0 < x < L/2$.

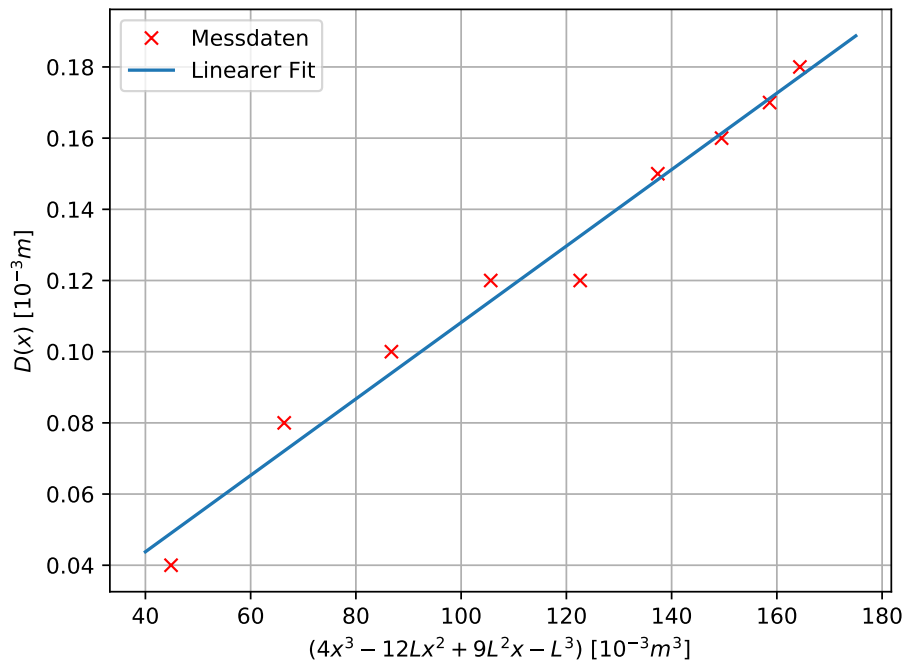


(b) Durchbiegung des runden Stabs bei beidseitiger Auflage im Bereich $x > L/2$.

Abbildung 6: Durchbiegung des runden Stabs bei beidseitiger Auflage.



(a) Durchbiegung des eckigen Stabs bei beidseitiger Auflage im Bereich $0 < x < L/2$.



(b) Durchbiegung des eckigen Stabs bei beidseitiger Auflage im Bereich $x > L/2$.

Abbildung 7: Durchbiegung des eckigen Stabs bei beidseitiger Auflage.

Bei den beidseitig eingespannten Stäben werden dieselben Massen m_{rund} und m_{eckig} angehängen. Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls werden diesmal die Hilfsfunktion $3L^2x - 4x^3$ und die Gleichung 11 für den Bereich 1 ($0 < x < L/2$) und die Hilfsfunktion $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$, sowie die Gleichung 12 für den Bereich 2 ($x > L/2$) verwendet. Analog zu Unterabschnitt 3.1 wird auch hier Matplotlib zur Berechnung der linearen Regression genutzt.

Für ($0 < x < L/2$) lauten die Parameter

$$a_{\text{rund}} = (0.0022 \pm 0.0002) \quad b_{\text{rund}} = (0.0337 \pm 0.0277).$$

und

$$a_{\text{eckig}} = (0.0012 \pm 0.0001) \quad b_{\text{eckig}} = (-0.0532 \pm 0.0105).$$

Für ($x > L/2$) werden die Parameter zu

$$a_{\text{rund}} = (0.0024 \pm 0.0002) \quad b_{\text{rund}} = (0.0090 \pm 0.0239)$$

und

$$a_{\text{eckig}} = (0.0011 \pm 0.0001) \quad b_{\text{eckig}} = (0.0008 \pm 0.0075)$$

Das Umstellen von Gleichung 11 und Gleichung 12 nach E ergibt nun analog zu Gleichung 17 das Elastizitätsmodul

$$E = \frac{m \cdot g}{48 \cdot I \cdot a}.$$

Der Fehler berechnet sich nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung durch:

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E = \frac{m \cdot g}{48 \cdot I \cdot a^2} \cdot \Delta a.$$

Somit beträgt das Elastizitätsmodul

$$E_{\text{rund}} = (75,68 \pm 6,88) \text{ GPa}$$

und

$$E_{\text{eckig}} = (122,67 \pm 10,22) \text{ GPa}$$

für den Bereich ($0 < x < L/2$), sowie

$$E_{\text{rund}} = (69,38 \pm 5,78) \text{ GPa}$$

und

$$E_{\text{eckig}} = (133, 83 \pm 12, 17) \text{ GPa}$$

für den Bereich $(x > L/2)$. Diese Werte werden gemittelt zu

$$E_{\text{rund}} = (72, 53 \pm 2, 23) \text{ GPa}$$

und

$$E_{\text{eckig}} = (128, 25 \pm 3, 96) \text{ GPa}.$$

4 Diskussion

In diesem Versuch werden zwei Aluminiumstäbe mit verschiedenen Formen ausgewählt. Die Form ist einmal eckig und einmal rund. Beide Stäbe wurden wie in der Durchführung beschrieben untersucht. Die experimentell bestimmten Werte für das Elastizitätsmodul sind bei einseitiger Einspannung:

$$E_{\text{rund}} = (116,16 \pm 3,04) \text{ GPa}$$

$$E_{\text{eckig}} = (89,22 \pm 1,13) \text{ GPa}$$

und bei beidseitiger Einspannung:

$$E_{\text{rund}} = (72,53 \pm 2,23) \text{ GPa}$$

$$E_{\text{eckig}} = (128,25 \pm 3,96) \text{ GPa}.$$

Die Literaturwerte für das Elastizitätsmodul [1] liegen ungefähr bei 70 GPa. Auffällig ist, dass die experimentell bestimmten Werte, bis auf das Elastizitätsmodul beim beidseitig eingespannten runden Stab, stark vom Literaturwert abweichen. Die größte prozentuale Abweichung gab es bei der Messung $E_{\text{eckig-3}}$ mit 83,21% und die niedrigste Abweichung gab es bei $E_{\text{rund-3}}$ mit 3,61%. Die geringen Fehlerwerte lassen darauf schließen, dass es sich um statistische Messunsicherheiten handelt, da diese sich bei vielen Messungen "herausmitteln". Der Wert mit der geringsten Messungenauigkeit ist E_{eckig} . Somit liefert die Methode des einseitigen Einspannens eines eckigen Stabes die genauesten Werte für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls eines Materials.

Trotzdem gibt es in der Durchführung einige Umstände, die zu Messungenauigkeiten führen können. So sind beispielsweise die Messuhren sehr stoßempfindlich und verstellen sich häufig auch ohne äußere Einwirkung. Digitale Messuhren würden daher die Messung vereinfachen und die Fehler minimieren. Außerdem ist die Auflagefläche für die Messuhren beim runden Stab nicht ganz eben, weswegen die Uhren teilweise seitlich vom Stab rutschen können und somit die Messwerte verfälscht werden. Ungenau ablesen kann eine weitere Fehlerquelle darstellen. Diese Methode kann durch das Phänomen der elastischen Nachwirkung verfälscht werden. Es kann angenommen, dass die Stäbe auch vor anhängen eines Gewichtes Verformungen aufgewiesen haben. Durch das Nullen der Messuhren vor jeder Messung wurde dies jedoch versucht auszugleichen. Zuletzt könnte eine weitere Fehlerquelle sein, dass bei der beidseitigen Messung das Gewicht nicht so ausgewählt wurde, dass die maximale Auslenkung zwischen 3mm und 7mm liegt.

5 Anhang

V103: Biegung elastischer Stäbe

Material: Aluminium

19. Nov. 2024

echter Stab

$l = 60,2 \text{ cm}$

$h = 1 \text{ cm}$

$m = 167,2 \text{ g}$
 $\Delta m = 0,1 \text{ g}$

Theorie:
 $591,18 \text{ mm}$
 $\pm 0,13 \text{ mm}$

184 g

Zylinder Stab

$l = 53,2 \text{ cm}$

$d = 1 \text{ cm}$

$m = 123,4 \text{ g}$
 $\Delta m = 0,1 \text{ g}$

Theorie:
 $551,82 \text{ mm}$
 $\pm 0,13 \text{ mm}$

120,9 g (0 cm)

Messungen mit dem Zylinderstab

$x_0 = 5$

x / mm	D_0 / mm	D_m / mm
500	0	
750	0,2	
1000	0,44	
1250	0,58	
1500	0,77	

x / mm	D_0 / mm	D_m / mm	Maximale Auslenkung $m = 400 \text{ g}$ $D_m = 3,4 \text{ mm}$ $x = 5200 \text{ mm}$
500	0		
1000	0	0,28 0,29	
1250	0	0,35 0,37	$m = \text{Messung 1}$
1500	0	0,36 0,45	$m = \text{Messung 2}$
1750	0	0,45 0,46	
2000	0	0,51 0,53	
2250	0	0,62 0,64	
2500	0	0,72 0,81	
2750	0	0,83 0,93	
3000	0	1,16 1,11	
3250	0	1,34 1,38	
3500	0	1,58 1,62	
3750	0	1,78 1,81	
4000	0	2,07 2,07	
4250	0	2,30 2,32	
4500	0	2,58 2,64	

X/mm	Do/mm	Dm	
4750	0	2,79	3,37 2,78
5000	0	3,1	3,38
5250	0	3,48	3,5

Durchführung

→ Stab eingespannt

→ Alle 2,5cm (Startpunkt 10cm) die Uhr genullt und dann das Gewicht eingehangen und den Unterschied bei D_m eingeschrieben
Grund: Die Biegung vom Stab ausgleichen und die Abweichung der Messuren, deswegen nur eine Uhr

Messung beidseitig eingespannter Zylinderstab

X/mm	Do/mm	Dm/mm	
500	0	0	0,15
750	0,18	0	0,37
1000	0,35	0	0,58
1250	0,49	0	0,82
1500	0,64	0	1,05
1750	0,81	0	1,16
2000	0,95	0	1,33
2250	1,09	0	1,49
2500	1,23	0	1,64
2750	geht nicht ⇒ Mittelpunkt ⇒ Gewicht hängt hier		
3000	-0,37	0	-0,52
3250	-0,82	0	-0,4
3500	-0,17	0	-0,28
3750	-0,59	0	-0,22
4000	-0,46	0	-0,14
4250	-0,37	0	-0,09
4500	-0,24	0	-0,01

X/mm
4750
5000

Durchführung

→ Stab
→ bei Messung
→ Alle 2,5cm
Messwerte

Messwerte

X/mm
500
750
1000
1250
1500
1750
2000
2250
2500
2750
3000
3250
3500
3750
4000
4250
4500
4750
5000
5250

X/mm	Do/mm	Dm/mm
4750	-0,11 0	0,07 0,17
5000	0 0	0,13 0,12

Durchführung

- Stab beidseitig eingespannt
- bei Messung 2 zwischendurch immer gehüllt
- Alle 2,5 cm von beiden Enden aus gemessen (Start: 5 cm / Ende 50 cm)
- Messwerte 5-25 Uhr 1 und Messwerte 30-50 Uhr 2

Messwerte einzeln eingespannter Rechteckstab

m = 600g

Max. Auslenkung
x = 5150 mm
Dm = 4,11 mm

X/mm	Do/mm	Dm/mm
500	0	
750	0	
1000	0	0,32
1250	0	0,46
1500	0	0,62
1750	0	0,73
2000	0	0,87
2250	0	1,03
2500	0	1,15
2750	0	1,32
3000	0	1,64
3250	0	1,86
3500	0	2,01
3750	0	2,32
4000	0	2,68
4250	0	2,9
4500	0	3,05
4750	0	3,44
5000	0	3,75
5250	0	4,11

Messwerte beidseitig eingespannter		Rechteckstab
X / mm	D ₀ / mm	D _m / mm
500	0	0,01
750	0	0,03
1000	0	0,06
1250	0	0,07
1500	0	0,08
1750	0	0,11 0,11
2000	0	0,14
2250	0	0,15
2500	0	0,16
2750	⇒ geht nicht	⇒ Gewicht hängt hier
3000	0	0,18
3250	0	0,17
3500	0	0,16
3750	0	0,15 0,15
4000	0	0,12
4250	0	0,12
4500	0	0,1
4750	0	0,08
5000	0	0,04
27		
30		
32		
35		
37		
40		
42		
45		

Literatur

- [1] *Elastizitätsmodul in Zahlen*. Universität Kiel. URL: https://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_7/illustr/t7_1_2.html (besucht am 24.11.2021).
- [2] *Flächenträgheitsmomente einiger Querschnitte*. Universität Siegen. URL: https://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm2/arbeitsblaetter/arbeitsblatt_08_flaechentraegheitsmomente_bsp.pdf (besucht am 21.11.2021).
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] *Metallglossar*. ESG Edelmetall-Service GmbH und Co. KG. URL: <https://www.scheideanstalt.de/metallglossar/metallglossar/> (besucht am 21.11.2021).
- [5] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 103 Biegung elastischer Stäbe*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.