

VERSUCH 353

Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Annika Bennemann
annika.bennemann@tu-dortmund.de

Paulin Vehling
paulin.vehling@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.2021

Abgabe: 17.12.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Allgemeines Relaxationsverfahren	3
2.2	Entladevorgang eines Kondensators	3
2.3	Aufladevorgang eines Kondensators	4
2.4	Relaxationsphänomen bei einer periodischen Auslenkung	4
2.5	RC-Kreis als Integrator	5
3	Durchführung	5
3.1	Bestimmung der Zeitkonstante des RC-Kreises mithilfe der Entladekurve .	5
3.2	Bestimmung der frequenzabhängigen Amplitude und Phasenverschiebung	6
3.3	RC-Kreis als Integrator	6
4	Auswertung	6
4.1	Zeitkonstante eines RC-Kreises	6
4.2	Frequenzabhängige Amplitude und Phasenverschiebung	8
4.3	RC-Kreis als Integrator	10
5	Diskussion	11
5.1	Bestimmung der Zeitkonstante	11
5.2	RC-Kreis als Integrator	12
6	Anhang	12
	Literatur	13

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises zu untersuchen. Dies erfolgt durch Bestimmung der Zeitkonstante, Messung der frequenzabhängigen Amplitude der Kondensatorspannung und der frequenzabhängigen Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung. Außerdem wird gezeigt, dass der RC-Kreis als Integrator arbeiten kann.

2 Theorie

2.1 Allgemeines Relaxationsverfahren

Relaxation in der Physik ist das nicht-oszillatorische Zurückkehren in den Ausgangszustand eines Systems, nachdem es daraus entfernt wurde. Als Beispiel für das Relaxationsphänomen kann die Schaltung in Abbildung 1 benutzt werden.

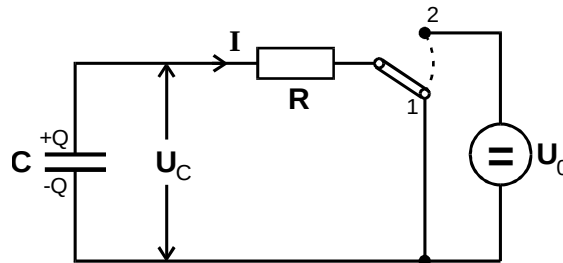


Abbildung 1: Auf- und Entladung eines Kondensators über einen Widerstand.[5]

Diese stellt die Auf- und Entladung des Kondensators über einen Widerstand dar. Die Aufladevorgang beginnt, wenn der Schalter auf Position 2 gestellt wird und der Entladevorgang beginnt, wenn der Schalter auf Position 1 steht.

2.2 Entladevorgang eines Kondensators

Der Entladevorgang beginnt, wenn sich auf dem Kondensator die Ladung Q befindet. Dann liegt zwischen den Platten die Spannung

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (1)$$

an und nach dem Ohmschen Gesetz ergibt dies den Strom

$$I = \frac{U_C}{R}. \quad (2)$$

Der zeitliche Verlauf der Ladung lässt sich darstellen durch

$$Q(t) = Q(0)e^{\frac{-t}{RC}} \quad (3)$$

,wobei RC eine Zeitkonstante ist, die im nächsten Kapitel näher erläutert wird.

2.3 Aufladevorgang eines Kondensators

Beim Aufladevorgang müssen die Randbedingungen

$$Q(0) = 0 \quad \text{und} \quad Q(\infty) = CU_0 \quad (4)$$

gelten. Der Aufladevorgang kann dann durch die Gleichung

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (5)$$

dargestellt werden. Die Zeitkonstante wird auch hier wieder durch RC ausgedrückt. Sie ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der das System seinem Endzustand (hier $Q(\infty)$) entgegen strebt. Die Ladung auf dem Kondensator ändert sich um den Faktor

$$\frac{Q(t)}{Q(0)} = \frac{-t}{RC} \quad (6)$$

und für den Zeitraum $\Delta T = RC$ gilt

$$\frac{Q(t)}{Q(0)} = \frac{1}{e} \approx 0,368. \quad (7)$$

2.4 Relaxationsphänomen bei einer periodischen Auslenkung

Ein weiteres Relaxationsphänomen ist zum Beispiel bei einer periodischen Auslenkung zu beobachten. Dieses kann auch mit einem RC-Kreis untersucht werden.

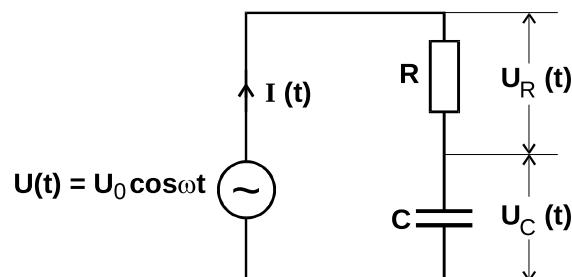


Abbildung 2: Beispiel für eine Schaltung zur Diskussion von Relaxationsphänomen unter periodischen Auslenkung.[v353]

Es wird eine Schaltung wie in Abbildung 2 aufgebaut und eine Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (8)$$

mit einer Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ angelegt. Das Verhalten des RC-Kreises ist abhängig von der Frequenz, so gilt, dass für $\omega \ll \frac{1}{RC}$ die Kondensatorspannung U_C ungefähr der Wechselspannung $U(t)$ am Generator entspricht. Bei zunehmender Frequenz kommt es zu einer Phasenverschiebung ϕ zwischen den Spannungen, wobei die Generatorspannung der Kondensatorspannung vor läuft. Dies liegt daran, dass der Auflade- und Entladevorgang

zu langsam wird und der Kondensator nicht komplett aufgeladen werden kann. Dadurch wird die Amplitude

$$\frac{A(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (9)$$

kleiner.

Die Phasenverschiebung nähert sich bei zunehmender Frequenz einem Wert von $\phi = \frac{\pi}{2}$ an und bei niedrigen Frequenzen geht sie gegen 0. Sie kann auch beschrieben werden durch

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \quad (10)$$

2.5 RC-Kreis als Integrator

Ein RC-Kreis kann eine zeitlich veränderliche Spannung unter bestimmten Voraussetzungen integrieren. So gilt, dass wenn die Frequenz $\omega \gg \frac{1}{RC}$ beträgt, U_C proportional zu $\int U(t)dt$ ist. Wenn die Voraussetzungen

$$\omega \gg \frac{1}{RC}, \quad |U_C| \ll |U_R| \quad \text{und} \quad |U_C| \ll |U|$$

gelten, dann kann näherungsweise

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} \quad \text{oder} \quad U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (11)$$

geschrieben werden.

3 Durchführung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstante des RC-Kreises mithilfe der Entladekurve

Zur Bestimmung der Zeitkonstante wird die Schaltung in Abbildung 3 aufgebaut, wobei vom Oszilloskop die Kondensatorspannung $U_C(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit angezeigt wird.

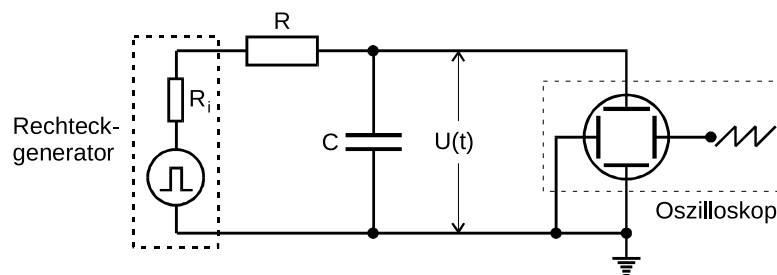


Abbildung 3: Schaltbild zur Bestimmung der der Zeitkonstante.[5]

Mit dem Rechteckgenerator wird eine Rechteckspannung mit einer Frequenz angelegt, die so gewählt ist, dass sich während der Aufzeichnungszeit die Kondensatorspannung $U_C(t)$ um den Faktor 5 bis 10 ändert. Nachdem das Oszilloskop so eingestellt wird, dass eine Entladekurve angezeigt wird, werden 12 Werte abgelesen und in eine Tabelle eingetragen.

3.2 Bestimmung der frequenzabhängigen Amplitude und Phasenverschiebung

Die Schaltung aus Abbildung 3 wird so verändert, dass das Oszilloskop nun als Zweikanal-Oszilloskop genutzt werden kann. Es wird eine Sinusspannung angelegt und die Frequenz manuell variiert. Gemessen wird in einem Bereich von 20 Hz bis 20 000 Hz und pro Zehnerpotenz werden 5 Werte genommen. Zu jedem Messpunkt werden die Frequenz, die Amplitude und der Abstand der Extrempunkte der beiden Kurven abgelesen und in eine Tabelle eingetragen.

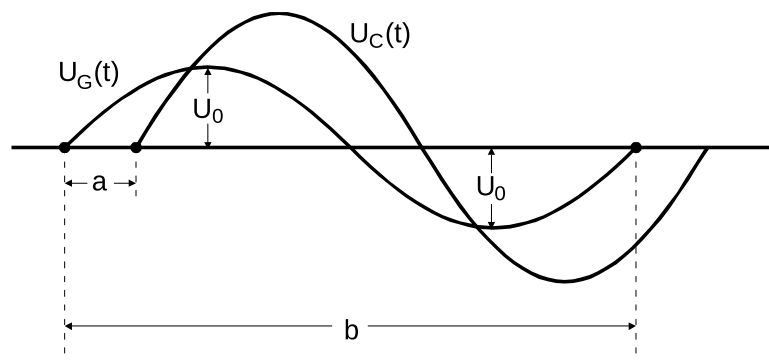


Abbildung 4: Messung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen.[5]

3.3 RC-Kreis als Integrator

Am Generator wird eine Frequenz von 800 Hz eingestellt. Der Reihe nach werden dann eine Sinus-, Rechteck- und Dreiecksspannung angelegt. Auf dem Bildschirm sollen nun die integrierte und die zu integrierende Spannung zu sehen sein. Anschließend wird von jeder Spannung ein Bild gemacht.

4 Auswertung

4.1 Zeitkonstante eines RC-Kreises

Wie in Unterabschnitt 3.1 beschrieben, werden 12 Messwerte aus Abbildung 5 abgelesen und in Tabelle 1 dargestellt. Zudem wird der Logarithmus von dem Verhältnis der Kondensatorspannung U_C zur angelegten Spannung U_0 berechnet. U_0 beträgt hierbei 1 V, die Frequenz wird auf 110,7 Hz eingestellt.

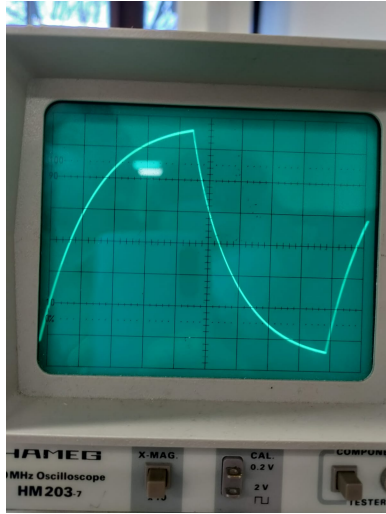


Abbildung 5: Entladekurve des RC-Kreises am Oszilloskop.

t / ms	U_C / V	$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right)$
0,0	14,0	2,6
0,4	10,4	2,3
0,8	7,6	2,0
1,2	5,0	1,6
1,6	4,0	1,4
2,0	2,8	1,0
2,4	1,8	0,6
2,8	1,1	0,1
3,2	0,8	-0,2
3,6	0,4	-0,9
4,0	0,3	-1,2
4,4	0,2	-1,6

Tabelle 1: Spannungsverlauf der Entladekurve des RC-Kreises.

Die Messwerte der Entladekurve dienen der Bestimmung der Zeitkonstante RC . Hierzu wird mit dem Pythonmodul Matplotlib [1] der Y-Achsenabschnitt und die Steigung der linearen Regression $y = a \cdot x + b$, sowie die zugehörigen Fehler berechnet.

Auch im Folgenden werden zur Berechnung der Werte und Fehler und zum Erstellen der Plots die Pythonmodule Matplotlib [1], Uncertainties [3] Numpy [4] und Scipy [2] verwendet.

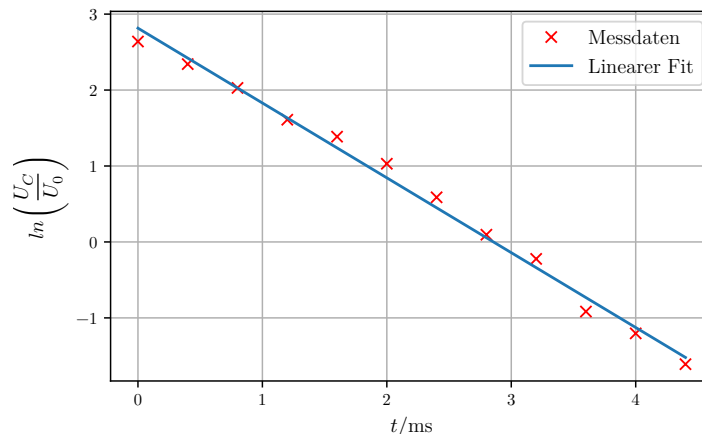


Abbildung 6: Logarithmierte Kondensatorspannung der Entladekurve gegenüber der Zeit.

Mit den Parametern der linearen Regression

$$a = (-0.99 \pm 0.03) \frac{1}{\text{ms}}$$

$$b = (2.82 \pm 0.07)$$

und

$$RC = -\frac{1}{a}$$

wird die Zeitkonstante des Relaxationsverhaltens am RC-Kreis zu

$$RC_1 = (1.02 \pm 0.03)\text{ms}$$

bestimmt.

4.2 Frequenzabhängige Amplitude und Phasenverschiebung

Nach Unterabschnitt 3.2 wird eine Messung durchgeführt und die Messergebnisse in der folgenden Tabelle dargestellt.

Tabelle 2: Messwerte der Kondensatorspannung und der angelegten Spannung, sowie der Abstand der Extrempunkte der Spannungskurven bei Variation der Frequenz.

f / Hz	U_C / V	U_0 / V	t / ms
20	8,0	9,0	2,5
56	7,5	9,0	1,4
92	6,5	9,0	1,4
128	5,5	9,0	1,1
164	5,0	9,0	1,0
200	4,0	9,0	0,7
560	1,6	9,0	0,4
920	1,0	9,0	0,25
1280	0,75	9,0	0,20
1640	0,6	9,0	0,15
2000	0,28	9,0	0,125
5600	0,17	9,0	0,04
9200	0,1	9,0	0,02
12 800	0,08	9,0	0,02
16 400	0,06	9,0	0,015
20 000	0,05	9,0	0,0125

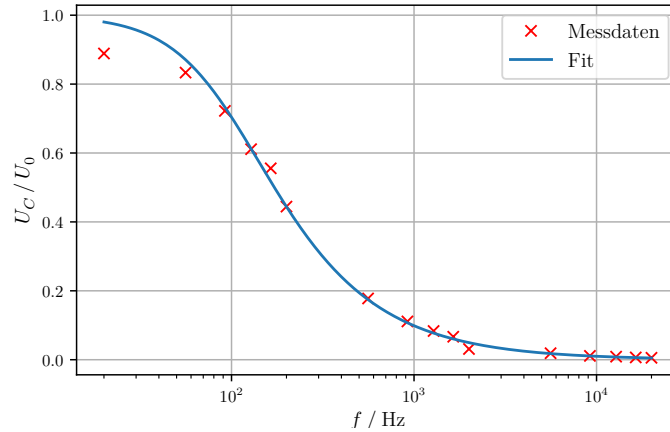


Abbildung 7: Spannungsverhältnis der Kondensatorspannung zur Generatorspannung gegenüber der Frequenz.

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Zeitkonstante RC stellt Gleichung 9 dar. Es wird ein Plot mit dem Verhältnis der Kondensatorspannung zur Generatorspannung erstellt und eine Regression nach Gleichung 9 bestimmt. Die Zeitkonstante RC ergibt sich demnach zu

$$RC_2 = (1.61 \pm 0.06)\text{ms}.$$

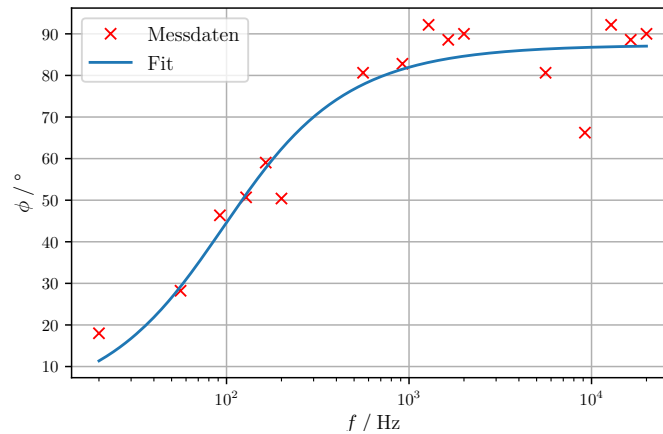


Abbildung 8: Phasendifferenz der Kondensatorspannung zur Generatorspannung gegenüber der Frequenz.

Eine dritte Möglichkeit der Bestimmung der Zeitkonstante besteht darin, die Phasendifferenz der Kurven und die zugehörigen Frequenzen in einem Plot gegeneinander

aufzutragen. Außerdem wird eine Funktion der Regression nach Gleichung 10 eingefügt. Durch umstellen von Gleichung 10 kann die Zeitkonstante zu

$$RC_3 = (1.65 \pm 0.25)\text{ms}$$

bestimmt werden.

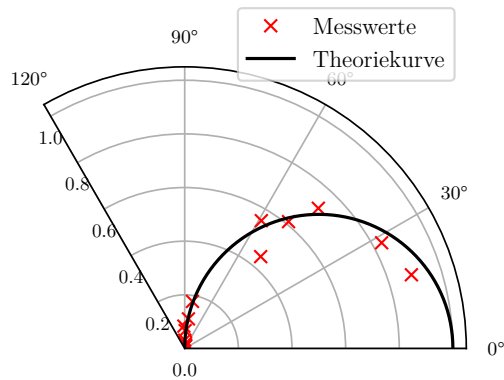
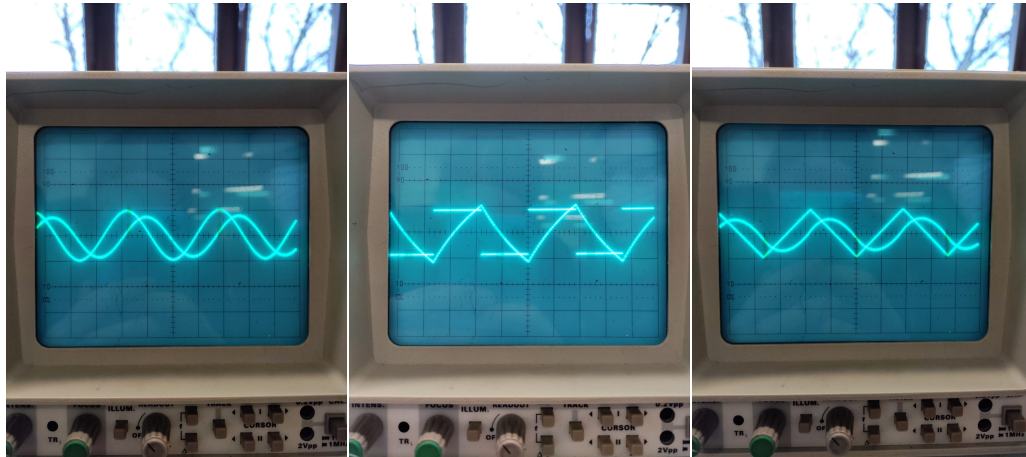


Abbildung 9: Polarplot der Messergebnisse, radial wird das Amplitudenverhältnis und im Polarwinkel die Phasenverschiebung dargestellt.

In Abbildung 9 wird der Zusammenhang zwischen Amplitudenverhältnis und Phase des RC-Kreises mit den vom Oszilloskop abgelesenen Messergebnissen (siehe Tabelle 2) dargestellt. Dabei ist das Amplitudenverhältnis auf der radialen Achse und die Phasenverschiebung im Polarwinkel abgebildet. Zu Referenzzwecken wird zusätzlich die Kosinusfunktion geplottet.

4.3 RC-Kreis als Integrator

Die folgenden Abbildungen zeigen die aufgenommenen Spannungsverläufe einer Sinus-, Rechteck-, und Dreiecksspannung, sowie die jeweiligen Spannungsverläufe der Kondensatorspannung U_C .



(a) Sinusspannung.

(b) Rechteckspannung.

(c) Dreieckspannung.

Abbildung 10: Integration verschiedener Spannungsverläufe am RC-Kreis.

5 Diskussion

5.1 Bestimmung der Zeitkonstante

Aus den drei Möglichkeiten zur Bestimmung der Zeitkonstante des Relaxationsverhalten des RC-Kreises folgen drei verschiedene Werte (siehe Abschnitt 4.).

$$RC_1 = (1.02 \pm 0.03) \text{ms}$$

$$RC_2 = (1.61 \pm 0.06) \text{ms}$$

$$RC_3 = (1.65 \pm 0.25) \text{ms}$$

Die Werte weichen nur wenig von einander ab. Die kleinste Abweichung, von RC_2 zu RC_3 , beträgt 2,4 % und die größte Abweichung liegt mit 38,2 % zwischen RC_1 und RC_3 . Anhand der Abbildungen in Abschnitt 4 und den daraus berechneten Fehlern der Werte, lässt sich folgern, dass die Bestimmung der Zeitkonstante über die Entladekurve, sowie über den Zusammenhang von der Frequenz und dem Verhältnis der Spannungen weniger fehlerbehaftet ist, als über den Zusammenhang von Phase und Frequenz der Schwingung. Daraus lässt sich schließen, dass die reale Zeitkonstante in einer Umgebung von RC_1 und RC_2 liegt. Die Abweichungen von den Regressionsfunktionen können zum Beispiel durch das manuelle Ablesen der Werte aus der Entladekurve in der ersten Messung entstehen. Dies wird in der nachfolgenden Messung durch das maschinelle Auswerten der Kurven durch Python vermindert. Weitere Messungenauigkeiten lassen sich auf die Ungenauigkeiten der verwendeten Geräte bzw. Bauteile erklären, wie zum Beispiel den Innenwiderstand der verwendeten Kabel.

5.2 RC-Kreis als Integrator

In Abbildung 10 ist zu sehen, dass die angelegten Spannungen durch den RC-Kreis integriert werden. So entsteht bei einer angelegten Sinusspannung am Kondensator eine Kosinusspannung. Dies bestätigt auch den in Abbildung 9 zu sehenden Zusammenhang zwischen Amplitude und Phase der Schwingung. So ist dort das Verhältnis U_C/U_0 gleich dem Kosinus der Phasenverschiebung. Weiter bildet sich bei einer angelegten Rechteckspannung eine Dreieckspannung am Kondensator aus und bei einer angelegten Dreieckspannung erscheint die Kondensatorspannung in paraboloider Kurvenform auf dem Oszilloskop, was auch zu erwarten war. Somit lässt sich folgern, dass ein RC-Kreis sich unter den gegebenen Bedingungen optimal als Integrator eignet. Die genauen Werte aus Abbildung 10 lassen sich nicht mit den Messungen zuvor vergleichen, da für diese ein anderes Oszilloskop verwendet wurde.

6 Anhang

b)

Frequenz	Kond.-Spannung (V)	Generator Ausgangsspannung (V ₀)	zeit Δt
20	8 V	9 V	2,5 ms
56	7,5 V	9 V	1,4 ms
92	6,5 V	9 V	1,4 ms
128	5,5 V	9 V	1,1 ms
164	5,0 V	9 V	1,0 ms
200	4,0 V	9 V	0,7 ms
560	1,6 V	9 V	0,4 ms
920	1 V	9 V	0,25
1280	0,75	9	0,20
1640	0,60	9	0,15
2000	0,28	9	0,125
5600	0,17	9	0,04
9200	0,10	9	0,02
12800	0,08	9	0,02
16400	0,06	9	0,015
20000	0,05	9	0,0125

$\varphi = \Delta t \cdot f \cdot 360^\circ$

Abbildung 11: Messwerte.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 353 Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.