

VERSUCH 602

Röntgenemission und -absorption

Annika Bennemann
annika.bennemann@tu-dortmund.de

Paulin Vehling
paulin.vehling@tu-dortmund.de

Durchführung: 24.05.2022

Abgabe: 31.05.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Emission von Röntgenstrahlung	3
2.2 Absorption von Röntgenstrahlung	4
2.3 Analyse der Röntgenstrahlung	5
3 Aufbau und Durchführung	6
3.1 Überprüfung der Bragg-Bedingung	7
3.2 Analyse des Emissionsspektrums einer Cu-Röntgenröhre	7
3.3 Analyse der Absorptionsspektren	7
4 Auswertung	7
4.1 Vorbereitungsaufgabe	7
4.2 Überprüfung der Bragg-Bedingung	8
4.3 Analyse des Emissionsspektrums einer Cu-Röntgenröhre	9
4.4 Analyse der Absorptionsspektren	10
4.5 Das Moseleysche Gesetz	13
5 Diskussion	14
5.1 Überprüfung der Bragg-Bedingung	14
5.2 Analyse des Emissionsspektrums einer Cu-Röntgenröhre	14
5.3 Analyse des Absorptionsspektrum	15
Literatur	15

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuches ist es, Emissionsspektren einer Cu-Röntgenröhre und Absorptionsspektren verschiedener Materialien aufzunehmen und zu analysieren.

2 Theorie

2.1 Emission von Röntgenstrahlung

Zur Erzeugung von Röntgenstrahlung wird eine Röntgenröhre verwendet. In dieser werden aus einer Glühkathode durch den glühelektrischen Effekt Elektronen emittiert, welche durch ein elektrisches Feld beschleunigt werden und dann auf eine Anode treffen. Beim Auftreffen auf die Anode kommt es zu einer starken Abbremsung, infolgedessen Energie in Form von Röntgenstrahlung abgegeben wird. Die entstandene Röntgenstrahlung wird unterteilt in das kontinuierliche Bremspektrum und die charakteristische Röntgenstrahlung des Anodenmaterials.

Das kontinuierliche Bremspektrum entsteht, weil das Elektron beim Auftreffen auf die Anode vom Coulombfeld des Atomkerns abgebremst wird und dadurch ein Röntgenquant emittiert wird, dessen Energie dem Energieverlust des abgebremsten Elektron entspricht. Durch die Tatsache, dass Elektronen ihre gesamte kinetische Energie oder nur einen Teil davon abgeben können, ist das Bremspektrum ein kontinuierliches Spektrum, welches in Abbildung 1 dargestellt ist.

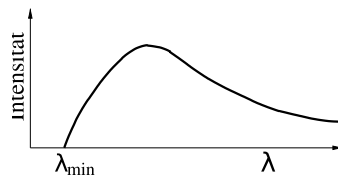


Abbildung 1: Das kontinuierliche Spektrum der Bremsstrahlung.[1]

In dem Fall, dass das Elektron seine gesamte kinetische Energie $E_{kin} = e_0 U$ abgibt und diese in Strahlungsenergie $E = h\nu$ umgewandelt wird, ergibt sich eine maximale Energie bzw. minimale Wellenlänge

$$\lambda_{min} = \frac{h \cdot c}{e_0 U}, \quad (1)$$

mit der Elementarladung e_0 , der Beschleunigungsspannung U , des Planck'schen Wirkungsquantums h und der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c .

Das charakteristische Spektrum der Röntgenstrahlung entsteht durch die Ionisierung der Anode. Hierbei entsteht in einer inneren Schale eine Lücke und ein Elektron von einer äußeren Schale kann unter Aussendung eines Röntgenquants in die innere Schale zurückfallen. Die Energie des Röntgenquants entspricht hier der Energiedifferenz der beiden Energieniveaus der Schalen $h\nu = E_m - E_n$. Somit besteht das charakteristische

Spektrum aus scharfen Linien, welche mit $K_\alpha, K_\beta, L_\alpha$ bezeichnet werden, abhängig davon auf welche Schale das Elektron zurückfällt. Die griechischen Indizes stehen für die Schale aus der das Elektron kommt. Das Spektrum ist charakteristisch, da es sich um ein diskretes Spektrum handelt, das je nach Anodenmaterial verschieden ist. In einem Atom mit mehreren Elektronen verringert sich durch die Wechselwirkungen der Elektronen die Coulomb-Anziehung auf die äußeren Elektronen. Die Bindungsenergie eines Elektrons auf der n ten Schale wird durch

$$E_n = -R_\infty z_{eff}^2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

beschrieben, mit der Rydbergenergie $R_\infty = 13,6 \text{ eV}$ und der effektiven Kernladung $z_{eff} = z - \sigma$. σ ist die Abschirmkonstante, welche sich für jedes Elektron unterscheidet und empirisch bestimmbar ist. Die Spektrumslinien der äußeren Elektronen teilen sich in mehrere eng aneinanderliegende Linien auf (Feinstruktur), da die äußeren Elektronen aufgrund des Bahndrehimpulses und des Elektronenspins nicht alle dieselbe Bindungsenergie besitzen. Die Energie der einzelnen Linien kann mithilfe der Sommerfeld'schen Feinstrukturformel

$$E_{n,j} = -R_\infty (z_{eff,1}^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \alpha^2 z_{eff,2}^4 \cdot \frac{1}{n^3} (\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n})) \quad (3)$$

bestimmt werden. $\alpha = \frac{1}{137}$ ist hierbei die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante, n die Hauptquantenzahl und j der Gesamtdrehimpuls des Elektrons. Für die K-Schale gilt unter Vernachlässigung des Drehimpulses

$$E_{K,abs} = R_\infty (z - \sigma_1)^2 \quad (4)$$

$$E_{K,\alpha} = R_\infty (\frac{1}{n})^2 \cdot (z - \sigma_1)^2 - R_\infty (\frac{1}{m})^2 \cdot (z - \sigma_2)^2 \quad (5)$$

$$E_{K,\beta} = R_\infty (\frac{1}{n})^2 \cdot (z - \sigma_1)^2 - R_\infty (\frac{1}{l})^2 \cdot (z - \sigma_3)^2. \quad (6)$$

2.2 Absorption von Röntgenstrahlung

Besitzt die Röntgenstrahlung eine Energie, die kleiner ist als 1 MeV, treten als dominante Prozesse bei der Absorption der Compton-Effekt und der Photo-Effekt auf. Daher nimmt der Absorptionskoeffizient bei zunehmender Energie ab, wenn die Röntgenstrahlung auf einen Absorber trifft, steigt jedoch sprunghaft an, sobald die Photoenergie gerade größer ist als die Bindungsenergie eines Elektrons aus der nächsten inneren Schale. Dieses Phänomen ist in Abbildung 2 dargestellt.

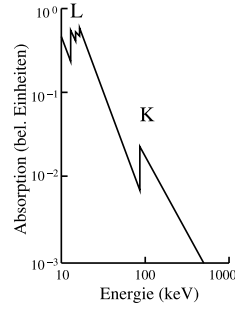


Abbildung 2: Absorptionsverlauf in Abhängigkeit der Energie der Röntgenstrahlung.[1]

Die Energie der Elektronen und die Lage der Absorptionskante $E_n - E_\infty = h\nu_{abs}$ sind beinahe identisch. Die zugehörigen Energien werden Absorptionskanten genannt. Sie werden nach der Schale benannt wo das Elektron hergekommen ist. Aufgrund der Feinstruktur gibt es drei L-Kanten, jedoch nur eine K-Kante. Für die Elektronen der K-Schale kann aus der K-Kante mit der Sommerfeld'schen Feinstruktur (siehe Gleichung 3) die Abschirmkonstante

$$\sigma_K = Z - \sqrt{\frac{E_K}{R_\infty} - \frac{\alpha^2 Z^4}{4}} \quad (7)$$

bestimmt werden. Z ist hier die Ordnungszahl des Absorbermaterials. Die Berechnung der Abschirmkonstante der L-Kanten ist komplizierter. Im Versuch ist die L_I - und die L_{II} -Kante jedoch nicht zu unterscheiden und es wird die Differenz $\Delta E_L = E_{L,II} - E_{L,III}$ verwendet. Daher ergibt sich für die Abschirmkonstante der L-Schale

$$\sigma_L = Z - \left(\frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{\Delta E_L}{R_\infty}} - \frac{5\Delta E_L}{R_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{19}{32} \alpha^2 \frac{\Delta E_L}{R_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

2.3 Analyse der Röntgenstrahlung

Analysieren lässt sich die Wellenlänge und somit auch die Energie der Röntgenstrahlung experimentell mithilfe der Bragg'schen Reflexion.(siehe Abbildung 3)

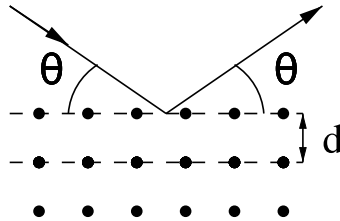


Abbildung 3: Reflexion der Röntgenstrahlung am Gitterkristall.[1]

Die in der Röntgenröhre erzeugte Röntgenstrahlung fällt auf einen LiF-Kristall. An jedem Atom des Kristallgitters werden die Photonen gebeugt. Die Röntgenstrahlen interferieren

miteinander und bei einem bestimmten Winkel gibt es konstruktive Interferenz. Dieser Winkel θ wird Glanzwinkel genannt. Die Beziehung zwischen Glanzwinkel θ , und gebeugter Wellenlänge λ ist durch die Bragg-Bedingung

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (9)$$

gegeben, wobei d die Gitterkonstante und n die Beugungsordnung ist.

3 Aufbau und Durchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 4 dargestellt.

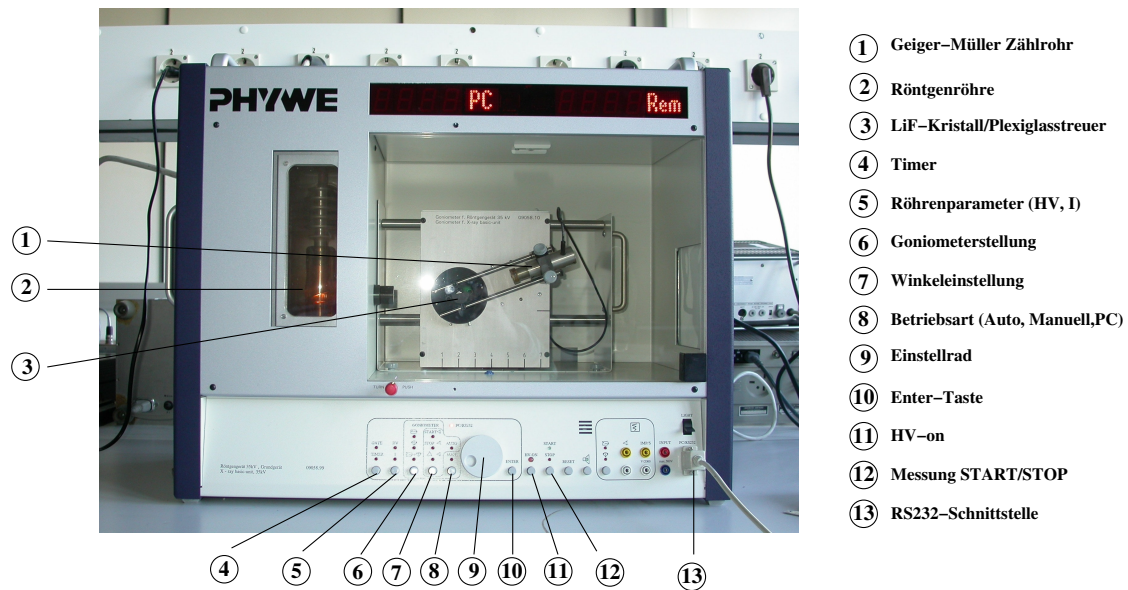


Abbildung 4: Versuchsaufbau und Benennung der Bestandteile.[1]

Die wesentlichen Bestandteile sind eine Kupfer-Röntgenröhre, ein LiF-Kristall und ein Geiger-Müller-Zählrohr. Die Strahlung der Röntgenröhre ist auf den Kristall gerichtet, wobei dieser drehbar ist und somit die Intensität der Röntgenstrahlung durch das Geiger-Müller-Zählrohr für variierbare Glanzwinkel gemessen werden kann. Mithilfe der Einstellelemente der Apparatur kann die Messung geregelt werden. Die Beschleunigungsspannung an der Röntgenröhre wird für alle Messungen auf $U = 35 \text{ kV}$ eingestellt und der Emissionsstrom am Geiger-Müller-Zählrohr auf $I = 1 \text{ mA}$. Mithilfe der Winkeleinstellung (7) kann ein fester Winkel für den LiF-Kristall eingestellt werden. Die 1 mm Blende und der Kristall werden in die jeweiligen Halterungen gebracht. Die Schlitzblende muss waagrecht auf dem Geiger-Müller-Zählrohr sitzen. Die Messergebnisse werden über einen PC aufgenommen. Es kann die Messart, der Kristallwinkel, ein Drehmodus und die Integrationszeit für die Messungen ausgewählt bzw. eingestellt werden. Als Messart wird „Spektren“ verwendet.

3.1 Überprüfung der Bragg-Bedingung

Im ersten Versuchsteil wird die Bragg-Bedingung überprüft. Dazu wird ein fester Kristallwinkel von $\theta = 14^\circ$ eingestellt. Mit einem Winkelzuwachs von $\Delta\theta = 0,1^\circ$ in einer Integrationszeit von $\Delta t = 5\text{ s}$ wird die Intensität der Röntgenstrahlung am Geiger-Müller-Zählrohr in einem Winkelbereich von $\theta_{GM} = 26^\circ$ bis $\theta_{GM} = 30^\circ$ gemessen. Es wird eine Funktion der Zählrate gegenüber des Kristallwinkels geplottet und das Maximum der Kurve bestimmt.

3.2 Analyse des Emissionsspektrums einer Cu-Röntgenröhre

Um das Emissionsspektrum der Röntgenröhre aufzunehmen werden im Programm measure die Einstellungen verändert. Die Messung erfolgt im 2:1 Koppelmodus. Das Röntgenspektrum wird im Winkelbereich von $\theta = 4^\circ$ bis $\theta_{GM} = 26^\circ$ gemessen. Der Winkelzuwachs wird auf $\Delta\theta = 0,2^\circ$ und die Integrationszeit wird beibehalten. Auch hier wird eine Funktion der Zählrate gegenüber dem Kristallwinkel geplottet und die Maxima bestimmt. Anschließend wird die Halbwertsbreite bestimmt und daraus das Auflösungsvermögen der Apparatur. Zuletzt werden die Abschirmkonstanten von Kupfer aus den Emissionsenergien der K_α - und K_β -Linien.

3.3 Analyse der Absorptionsspektren

Um das Absorptionsspektrum zu messen wird ein Absorber vor das Geiger-Müller Zählrohr gesetzt. Der Winkelzuwachs wird wieder auf $\Delta\theta = 0,1^\circ$ eingestellt und die Integrationszeit auf $\Delta t = 20\text{ s}$ erhöht. Der Messbereich ist abhängig von dem Absorber und muss somit individuell angepasst werden. Aus der geplotteten Funktion wird die Absorptionsenergie der gemessenen K-Kante bestimmt. Anschließend wird die Abschirmzahl σ_K berechnet. Diese Messung wird für insgesamt für fünf Absorber durchgeführt. Die Abschirmzahlen wird aus den bestimmten Energieübergängen aus den gemessenen K-Kanten berechnet. Zuletzt wird aus den bestimmten Absorberenergien eine $\sqrt{E_K} - Z$ Diagramm gezeichnet und aus der Steigung die Rydbergkonstante berechnet.

4 Auswertung

4.1 Vorbereitungsaufgabe

In Vorbereitung auf den Versuch wird herausgesucht bei welchen Energien die Cu- K_α - und die Cu- K_β -Linien zu erwarten sind und bei welchen Winkeln θ sie bei Verwendung eines LiF-Kristalls ($d = 201,4\text{ pm}$) liegen. Die Energien liegen bei $E_{K_\alpha,theo} = 8,05\text{ keV}$ und $E_{K_\beta,theo} = 8,91\text{ keV}$ [2]. Durch Umstellen von Gleichung 9 zu

$$\theta = \arcsin \frac{h \cdot c}{E \cdot 2d} \quad (10)$$

wird der Glanzwinkel berechnet zu $\theta_{K_\alpha} = 22,48^\circ$ und $\theta_{K_\beta} = 20,21^\circ$.

Zudem wird die Ordnungszahl und Energie der K-Kante für die zu untersuchenden Materialien herausgesucht. Mithilfe von Gleichung 10 wird der Glanzwinkel bestimmt und mithilfe von Gleichung 7 die Abschirmkonstante berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 aufgetragen.

Tabelle 1: Literaturwerte und daraus berechnete Größen verschiedener Elemente.[2]

Element	Z	E_K^{lit} [keV]	θ_K^{lit} [°]	σ_K
Zn	30	9,65	18,60	3,56
Ge	32	11,11	16,08	3,66
Br	35	13,48	13,20	3,84
Rb	37	15,21	11,68	3,93
Sr	38	16,12	11,01	3,98
Zr	40	18,01	9,84	4,08
Ga	31	10,38	17,25	3,60

4.2 Überprüfung der Bragg-Bedingung

Die Messung wird nach Unterabschnitt 3.1 durchgeführt. Aus den gemessenen Daten wird das Maximum der Kurve bestimmt und mit dem Sollwinkel verglichen.

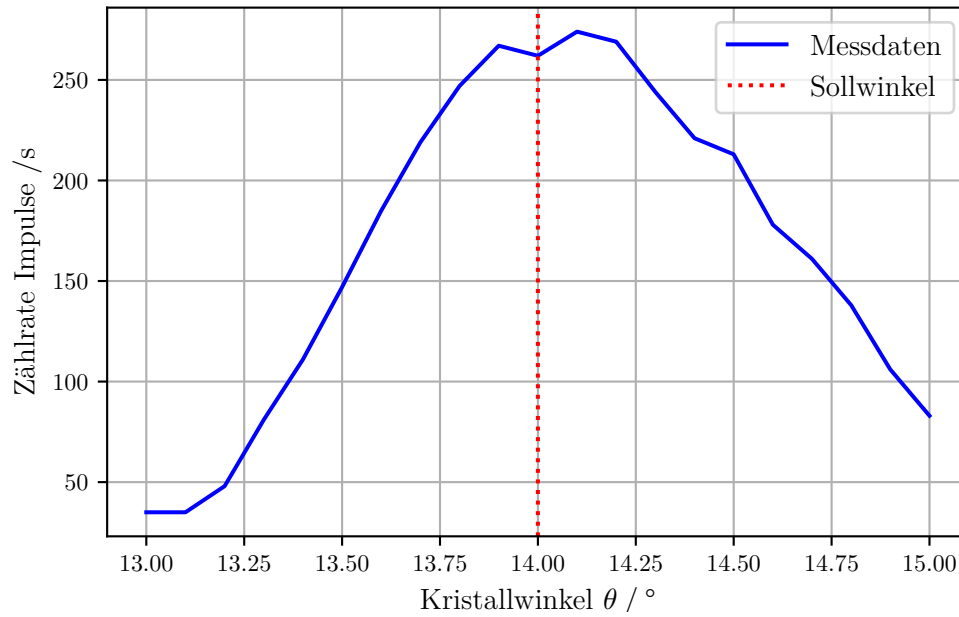


Abbildung 5: Emissionsspektrum bei festem Kristallwinkel von $\theta = 14^\circ$.

Das Maximum der Kurve in Abbildung 5 liegt bei $\theta = 14,1^\circ$.

4.3 Analyse des Emissionsspektrums einer Cu-Röntgenröhre

Nach Unterabschnitt 3.2 wird die Messung aufgenommen. Die Messergebnisse sind in Abbildung 6 dargestellt.

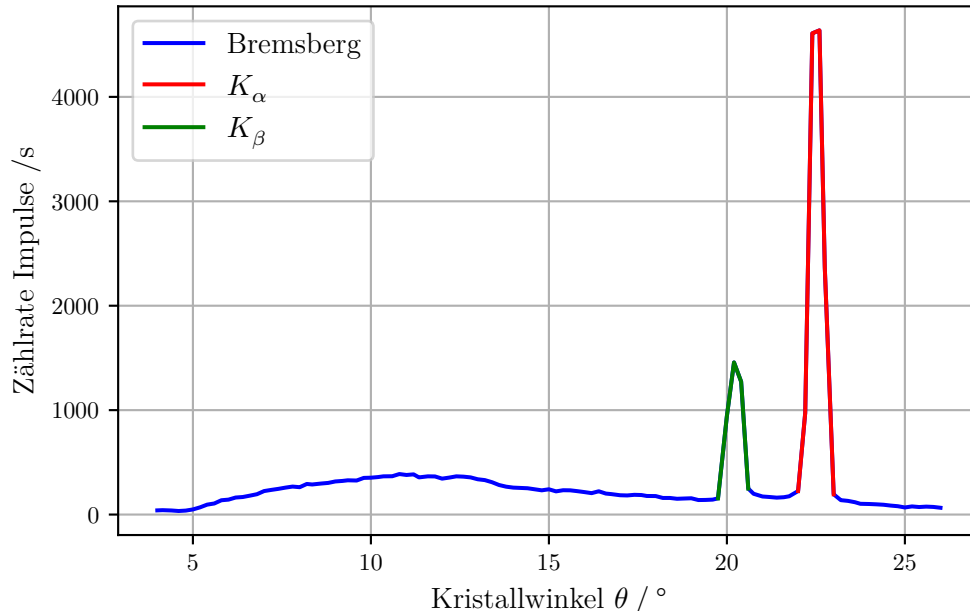


Abbildung 6: Emissionsspektrum der Cu-Röntgenröhre.

Die Maxima der Kurve und somit die Winkel für die Energien liegen für die K_α -Energie bei $\theta_\alpha = 22,6^\circ$ und für die K_β - Energie bei $\theta_\beta = 20,2^\circ$. Daraus folgen nach Gleichung 9 die Energien

$$E_{K_\alpha} = 8,01 \text{ keV}$$

$$E_{K_\beta} = 8,91 \text{ keV}$$

Aus Abbildung 6 werden außerdem die Halbwertsbreiten der K_α - Linie zu $\Delta\theta_{\alpha,halb} = 0,6^\circ$ und der K_β - Linie zu $\Delta\theta_{\beta,halb} = 0,4^\circ$ bestimmt. Mit den entsprechenden Werten

$$\theta_{\alpha,halb1} = 22,3^\circ$$

$$E_{\alpha,halb1} = 8,11 \text{ keV}$$

$$\theta_{\alpha,halb2} = 22,7^\circ$$

$$E_{\alpha,halb2} = 7,98 \text{ keV}$$

$$\theta_{\beta,halb1} = 19,9^\circ$$

$$E_{\beta,halb1} = 9,04 \text{ keV}$$

$$\theta_{\beta,halb2} = 20,5^\circ$$

$$E_{\beta,halb2} = 8,79 \text{ keV}$$

wird die Energiedifferenz

$$\Delta E_{\alpha,halb} = 0,13 \text{ keV}$$

$$\Delta E_{\beta,halb} = 0,25 \text{ keV}$$

berechnet. Das Auflösungsvermögen beträgt nach

$$A = \frac{E_K}{\Delta E} :$$

$$A_{K_\alpha} = 61.62$$

$$A_{K_\beta} = 35.64.$$

Die Abschirmkonstanten werden mit Gleichung 4 bis Gleichung 6 bestimmt. Hierbei wird $E_{K,abs} = 8,99 \text{ keV}$ [2] verwendet, was durch den Versuchsaufbau nicht bestimmt werden kann. Außerdem gilt $n = 1, m = 2$ und $l = 3$. Somit berechnen sich die Abschirmkonstanten zu

$$\sigma_1 = 3.29$$

$$\sigma_2 = 12.02$$

$$\sigma_3 = 21.72.$$

4.4 Analyse der Absorptionsspektren

Die Messung wird wie in Unterabschnitt 5.3 beschrieben durchgeführt. In Abbildung 7 bis 11 sind die Absorptionsspektren der fünf Materialien dargestellt. Aus denen kann der Winkel abgelesen werden, bei denen die K-Kanten auftreten. Diese werden in Tabelle 2 eingetragen und mit diesen Winkeln wird die Absorptionsenergie mit Gleichung 4 berechnet. Außerdem wird mit diesen Winkeln und den Absorptionsenergien die Abschirmzahlen σ_K mit Gleichung 7 bestimmt. Die bestimmten Zahlen werden der Tabelle 2 hinzugefügt.

Tabelle 2: Gemessener Kristallwinkel und daraus bestimmten Werte.

Element	Abbildung	$\theta_K [^\circ]$	$E_K [\text{keV}]$	σ_K
Zn	7	18,55	9,68	3,57
Sr	8	10,90	16,28	4,01
Zr	9	9,75	18,18	4,08
Br	10	13,10	13,58	3,75
Ga	11	17,10	10,47	3,49

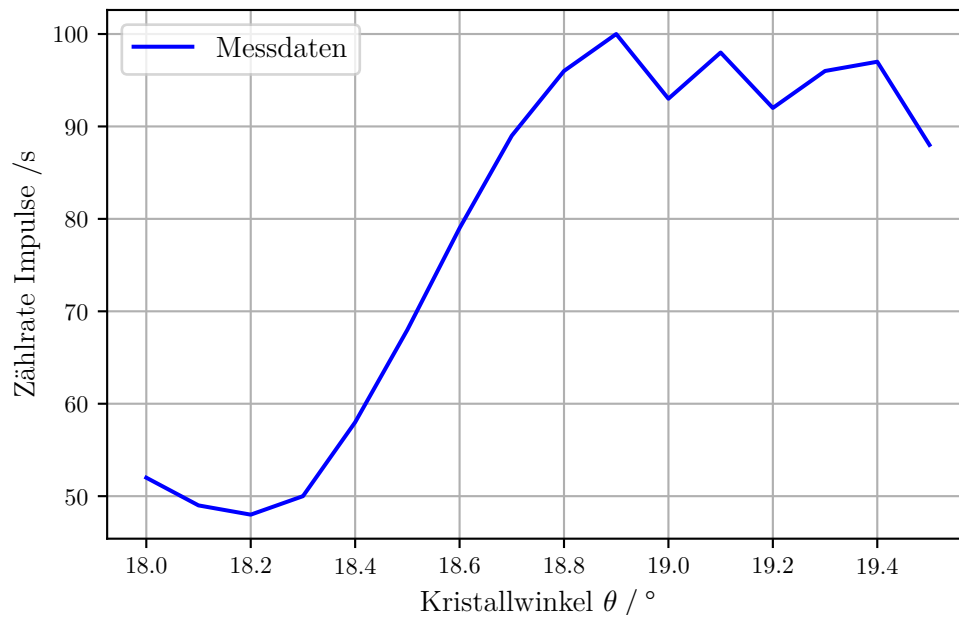


Abbildung 7: Absorptionsspektrum von Zink.

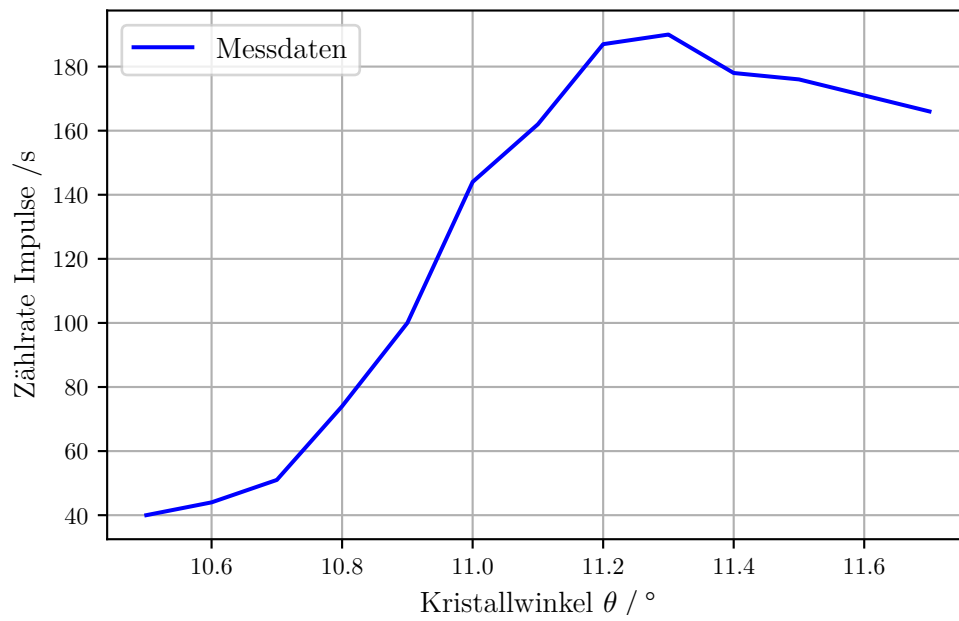


Abbildung 8: Absorptionsspektrum von Strontium.

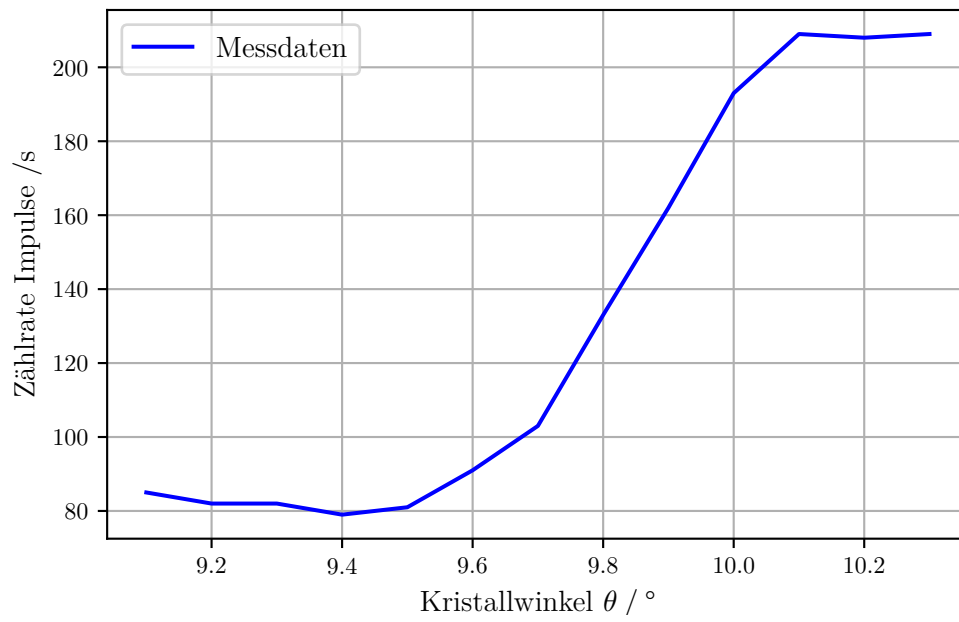


Abbildung 9: Absorptionsspektrum von Zirkonium.

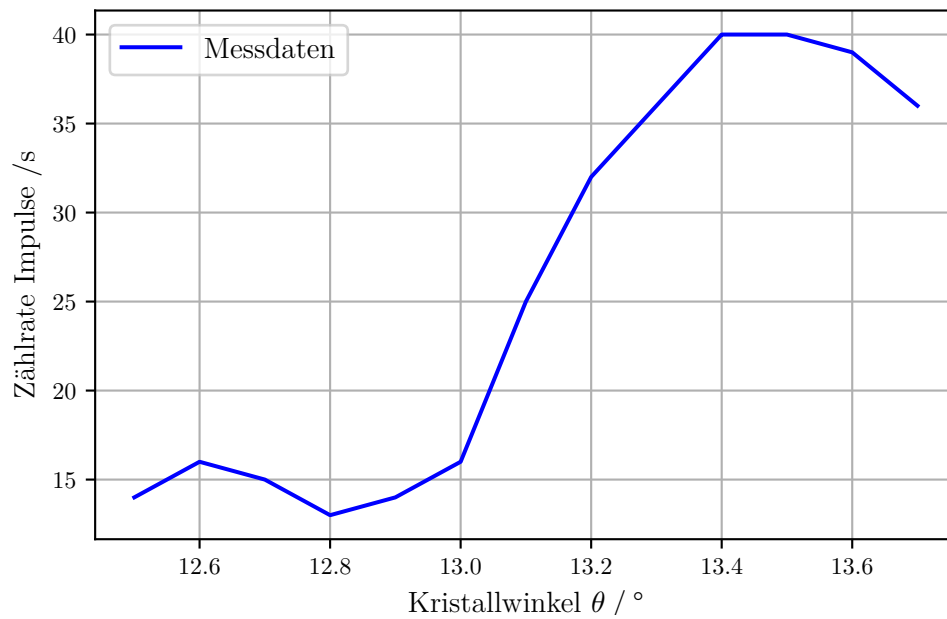


Abbildung 10: Absorptionsspektrum von Brom.

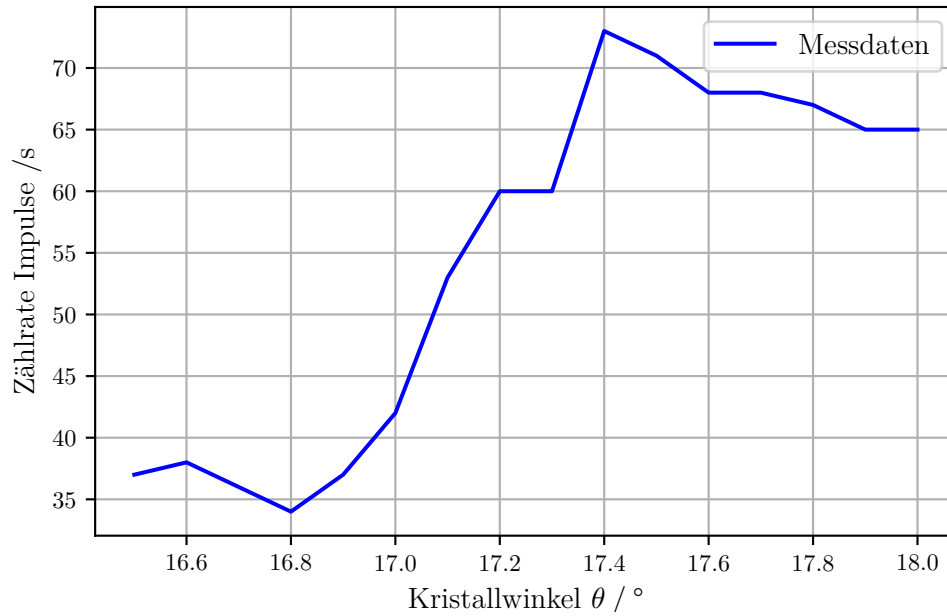


Abbildung 11: Absorptionsspektrum von Gallium.

4.5 Das Moseleysche Gesetz

Das Moseleysche Gesetz besagt, dass die Absorptionsenergie E_{abs} proportional zu Z^2 ist. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 12 dargestellt. Außerdem wird ein linearer Fit hinzugefügt und die Steigung berechnet sich zu

$$A = (0.11484 \pm 0.00055)\sqrt{\text{keV}}. \quad (11)$$

Für die Rydbergenergie gilt

$$R_{\infty} = A^2 = (13.19 \pm 0.13)\text{eV}. \quad (12)$$

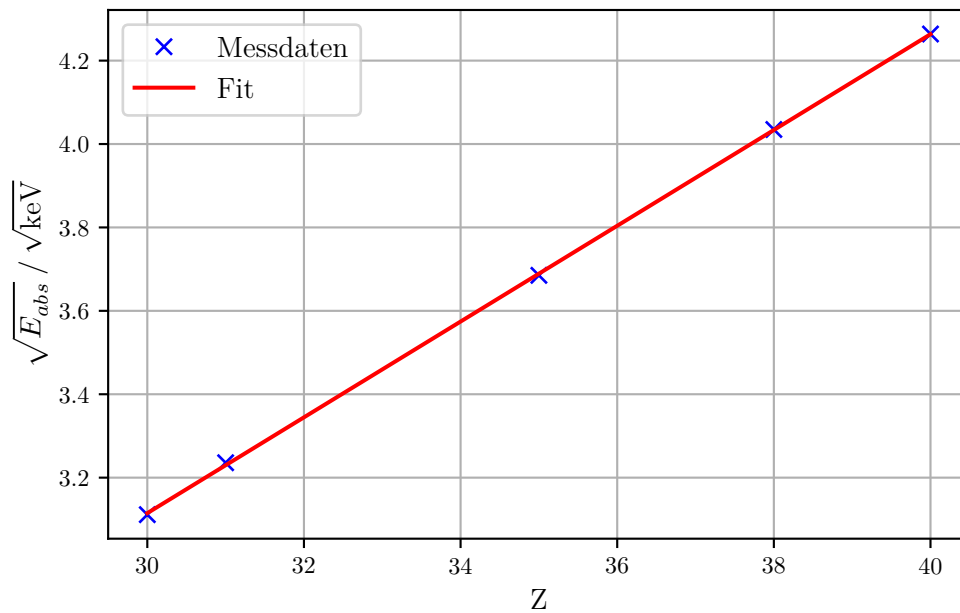


Abbildung 12: Proportionaler Zusammenhang zwischen Absorptionsenergie und der Ordnungszahl zum Quadrat.

5 Diskussion

Abweichungen von Literaturwerten werden im Folgenden mithilfe von

$$a = \frac{|x - x_{\text{lit}}|}{x_{\text{lit}}} \cdot 100$$

berechnet. Die Angabe erfolgt in Prozent.

5.1 Überprüfung der Bragg-Bedingung

Der bestimmte Winkel $\theta = 14,1^\circ$ weicht um $\Delta\theta = 0,1^\circ$, also um 0,71 % vom Sollwinkel $\theta_{\text{soll}} = 14,0^\circ$ ab. Die Apparatur ist somit genügend genau einjustiert um weitere Messungen durchführen zu können.

5.2 Analyse des Emissionsspektrums einer Cu-Röntgenröhre

Die für die K_α - und die K_β - Linien bestimmten Energien lauten

$$E_{K_\alpha} = 8,01 \text{ keV}$$

$$E_{K_\beta} = 8,91 \text{ keV}.$$

Die Abweichung zu den in Unterabschnitt 4.1 bestimmten Literaturwerten beträgt bei E_{K_α} 0,5 % und bei E_{K_β} 0,0 %. Die Werte sind also sehr genau bzw. stimmen im Fall von E_{K_β} sogar mit dem Theoriewert überein.
Das Auflösungsvermögen beträgt

$$A_{K_\alpha} = 61.62$$

$$A_{K_\beta} = 35.64,$$

jedoch ist anzunehmen, dass es nicht sehr genau ist, da die Werte um 72,9 % voneinander abweichen. Die Halbwertsbreite weist große Fehler auf, da die Kurve nicht genau genug aufgenommen wurde.

5.3 Analyse des Absorptionsspektrum

Der Vergleich der berechneten Werte (2) mit den Literaturwerten (1) ist in Tabelle 3 eingetragen.

Tabelle 3: Vergleich von Literaturwerten mit berechneten Werten.

Element	$\Delta E_K[\%]$	$\Delta \sigma_K\%$
Zn	0,31	0,28
Sr	0,99	0,75
Zr	0,94	0,00
Br	0,74	2,34
Ga	0,87	3,56

Die Rydbergenergie besitzt eine Abweichung von 3,01 %. Die Abweichungen sind sehr gering, woraus sich schlussfolgern lässt, dass diese Messung geeignet ist die Absorptionsenergie und die Abschirmzahl zu bestimmen. Die geringen Messunsicherheiten können zum einen durch das Ablesen der Maxima und Minima entstehen.

Literatur

- [1] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 602 Röntgenemission und -absorption.* TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [2] *X-Ray Transition Energy Database.* NIST. 2022. URL: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/XrayTrans/search.pl?element=All&trans=Kedge&lower=&upper=&units=eV> (besucht am 22.05.2022).