

Die Gruppentheorie des Zauberwürfels und des Skewbs

von

Annika Stein

Matrikelnummer: 2120070

Bachelorarbeit in Mathematik
vorgelegt dem Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik (FB 08)
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz
am 14. Januar 2019

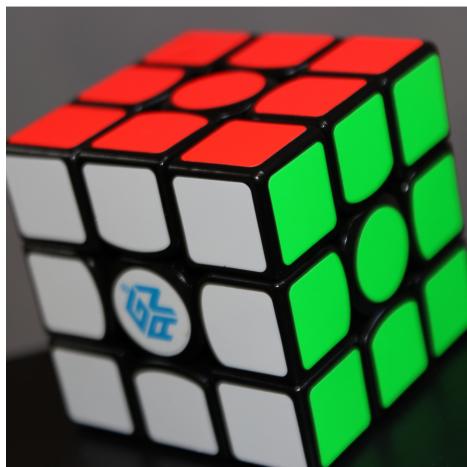
1. Gutachter: Prof. Dr. Felix Leinen
2. Gutachter: Prof. Dr. Theo de Jong

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
2 Die Gruppentheorie des Zauberwürfels	3
2.1 Aufbau des Würfels	3
2.2 Bezeichnungen, Notation	3
2.2.1 Basic Moves und Rotations	3
2.2.2 Bezeichnung der Cubies	5
2.2.3 Bezeichnung der Sticker (<i>Facets</i>)	6
2.3 Die Struktur der Cube Group	6
2.3.1 Permutationen der Cubies	9
2.3.2 Orientierungen der Cubies	23
2.3.3 Die Cube Group als semidirektes Produkt und als Untergruppe der Construction Group	37
2.4 Erweiterung des Zauberwürfels mit orientierten Mittelstücken (Fotowürfel) und die Beschreibung der so entstehenden Supergroup des Zauberwürfels . .	39
3 Lösungsstrategien für den Rubik's Cube unter Nutzung der Gruppentheorie	42
3.1 Lösen des Zauberwürfels Ebene für Ebene	42
3.2 Getrenntes Lösen der Ecken und Kanten	43
3.2.1 Corner-Edge-Methode	43
3.2.2 Blindlösemethode	45
4 Ein verwandtes Drehpuzzle: der Skewb	49
4.1 Notation	50
4.2 Identifikation der Orientierungen und Permutationen mit bekannten Gruppen	51
4.3 G als direktes Produkt von G_C und G_V	54
5 Fazit	57
A Literaturverzeichnis	58
B Abbildungsverzeichnis	59
C Tabellenverzeichnis	59
Danksagung	61

1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird die Struktur der Cube Group besprochen, der Gruppe, die durch die Drehbewegungen der sechs verschiedenen Seiten eines Zauberwürfels erzeugt wird. Auch der Markenname *Rubik's Cube* ist geläufig und erinnert an den Erfinder des Zauberwürfels, Ernő Rubik. Als ein wesentliches Resultat ergibt sich daraus die Mächtigkeit der Cube Group von $\frac{1}{2} \cdot 8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{11}$ bzw. ausgeschrieben 43 252 003 274 489 856 000. Für diesen Teil wurden hauptsächlich die Quellen [NST94] und [Joy08] verwendet. Aufgrund meiner Affinität zum Speedcubing, dem Lösen des Cubes auf Zeit, soll auch noch ein kleiner Einblick gegeben werden, wie die dazu verwendeten Lösungsstrategien oder Algorithmen entstehen. Einige dieser Strategien lassen sich mithilfe zuvor betrachteter Untergruppen des Zauberwürfels sowie der Verwendung von Konjugation mit Elementen der Gruppe herleiten. Lässt man an einem normalen Zauberwürfel auch Drehungen der Mittelstücke um sich selbst zu, was beispielsweise bei mit Bildern bedruckten Würfeln relevant ist, so reichen einerseits die für den Zauberwürfel gefundenen Algorithmen nicht mehr aus, andererseits muss auch die Struktur der Gruppe um die zusätzlichen Orientierungen der Mittelstücke erweitert werden (vgl. [Ban82]). Neben dem Zauberwürfel kann man auch die Gruppenstruktur ähnlicher Drehpuzzles betrachten, hier anhand der des Skewbs. Jener wurde von Tony Durham erfunden, wenngleich die heutige Bezeichnung auf Douglas Hofstadter zurückgeht (vgl. [Voi]).



1.1: Der Zauberwürfel



1.2: Der Skewb

Abbildung 1: Die im Detail betrachteten Drehpuzzles, eigene Darstellung

2 Die Gruppentheorie des Zauberwürfels

2.1 Aufbau des Würfels

Der *Rubik's Cube* (oder im Folgenden synonym verwendet: Magic Cube, Zauberwürfel, 3x3) ist ein mechanisches Drehpuzzle, welches aus 3x3x3 Steinen (genannt *Cubies*) besteht und sich so aus 27 kleinen zu einem großen Würfel zusammensetzt und wurde 1974 von Ernő Rubik in Budapest erfunden (vgl. [RT]). Durch die Konstruktion im Inneren mithilfe dreier Achsen und sechs Verbindungen zum Achsenkreuz (*Core*) wird ermöglicht, dass sich alle sechs äußereren Ebenen (*Layer*) unabhängig voneinander um ihr Zentrum drehen können. Von den genannten 27 Steinen sind aufgrund des inneren Aufbaus nur 26 tatsächlich vorhanden, der innerste Cubie ist in der Realität nicht existent und wird stattdessen vom Core ausgefüllt. Auf den von außen sichtbaren Flächen dieser Cubies sind insgesamt 54 Sticker (von sechs Farben jeweils neun Sticker auf vier Ecken, vier Kanten und einem Mittelstück) angebracht, die *Facets*, welche im gelösten Zustand allesamt nur auf der Seite des Cubes liegen, dessen Mittelstück die betrachtete Farbe hat (vgl. [NST94], S. 242).

Von diesen 26 Cubies wiederum können durch Bewegungen der Layer nur 20 permutiert bzw. orientiert werden, da die sechs Mittelstücke (*Centers*) bei Rotation um ihre eigene Achse weder ihre Permutation ändern können (fixierte Ausrichtung am Core durch Verschraubung), noch ihre Orientierung (sofern man keine Markierungen an den Stickern der Mittelstücke angebracht hat, vgl. [NST94], S. 243). Ließe man die Mitrotation der Mittelstücke dennoch zu, wie es beispielsweise bei *Super-* oder *Picturecubes* der Fall ist, ergäbe sich die größere sog. *Supergroup*, vgl. [FS10], S. 114 und S. 130, die noch in Abschnitt 2.4 besprochen wird. Diese Beobachtung ermöglicht es nun, eine Notation für die möglichen Rotationen der Layer zu definieren, die unabhängig von den Farben der am Cube angebrachten Sticker gilt. Hier wird von der Notation in [NST94], S. 243 bewusst abgesehen, da diese nur für den Spezialfall eines bestimmten Farbschemas gilt.

2.2 Bezeichnungen, Notation

2.2.1 Basic Moves und Rotations

Zu Beginn sollen die möglichen Drehbewegungen des Cubes definiert werden. Zu unterscheiden sind dabei Drehungen der einzelnen Layer im Gegensatz zu Drehungen des gesamten Cubes.

Definition 1 (Basic Move, [NST94], S. 243). *Ein Basic Move ist die Rotation einer äußeren Layer um 90° im Uhrzeigersinn um ihr Zentrum, das jeweilige Mittelstück.*

Dementsprechend gibt es sechs verschiedene Basic Moves, je einen für jedes fixierte Mittelstück der sechs Seiten. Ein Notationssystem zur Beschreibung der möglichen Drehbewegungen (*Basic Moves*) an den sechs Layern, welches unabhängig von dem vom Hersteller

angebrachten Farbschema gilt, ist die auf David Singmaster zurückgehende *Singmaster-Notation*, die in [FS10], S. 15 f., [Joy08], S. 71 f. und [Sin81], S. 3 beschrieben wird. Diese Notation bietet sich an, da sie für beliebige Orientierungen des gesamten Cubes gilt ([Sin81], S. 3). Die Notwendigkeit eines solchen allgemeingültigen Notationssystems sieht man schon daran, dass das Farbschema heutiger Rubik's Cubes, in Übereinstimmung mit [Sin81], S. 3, die Farben weiß gegenüber von gelb, blau gegenüber von grün und rot gegenüber von orange besitzt. Dabei liegen die Farben weiß, rot, grün von außen betrachtet im Uhrzeigersinn vor. In [NST94], S. 243 hingegen werden die Farben „red, sapphire, turquoise, umber, violet and white“ genannt.

Singmaster-Notation für Basic Moves

Für die Singmaster-Notation wird jeder drehbaren Ebene eine Beschreibung relativ zum Beobachter bzw. zur Person, die den Cube verwendet, zugeordnet. Die Kennzeichnung wird mithilfe der englischen Bezeichnungen

Right	<i>R</i>
Left	<i>L</i>
Up	<i>U</i>
Down	<i>D</i>
Front	<i>F</i>
Back	<i>B</i>

Tabelle 1: Basic Moves der Singmaster-Notation

vorgenommen. Nun bedeutet ein einzelner Buchstabe aus obiger Tabelle 1 eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn. Bei zweifacher Drehung wird zur Abkürzung der Buchstabe mit einer hochgestellten „2“ versehen. So z.B. bedeutet R^2 die Hintereinanderausführung zweier *R*-Drehungen, also RR , gelegentlich auch mit $R2$ bezeichnet (angelehnt an die von der World Cube Association verwendeten Notation bei offiziellen Wettbewerben, vgl. [Com18], S. 9 f., Article 12). Ergänzt man diese Auflistung um Drehungen um 90° gegen den Uhrzeigersinn und bezeichnet diese mit einem Apostroph am jeweiligen Basic Move, so erhält man beispielsweise $R' := R^{-1}$, also stellt X' das Inverse zu einem $X \in \{R, L, U, D, F, B\}$, dar und wird je nach Kontext *X prime, Strich, inverted* oder *inverse* genannt. Kombinationen und Hintereinanderausführungen der Basic Moves führen zur Cube Group, die in Kap. 2.3 betrachtet wird. Die so entstehenden zusammengesetzten Drehbewegungen werden dort ebenfalls definiert.

Rotationen des gesamten Cubes

Will man die Drehungen des gesamten Cubes ebenfalls bezeichnen, kann man sich dabei an die bereits gegebene Notation für Basic Moves anlehnen. So ergeben sich erneut sechs Möglichkeiten, nämlich eine Rotation des gesamten Cubes um 90° im Uhrzeigersinn pro Seite, auf die der Betrachter schauen und den Cube dann um die gedachte Achse in Blickrichtung drehen kann (vgl. [FS10], S. 16). Um jedoch eine minimale Zahl an Generatoren der später besprochenen Cube Group zu erhalten, wird sich herausstellen, dass man nur fünf der sechs Basic Moves benötigt. Ähnlich verhält es sich auch mit den Rotationen des gesamten Cubes, wobei hier nur zwei der sechs Rotationen notwendig sind. Dazu wird an dieser Stelle auf

Right	\mathcal{R}
Left	\mathcal{L}
Up	\mathcal{U}
Down	\mathcal{D}
Front	\mathcal{F}
Back	\mathcal{B}

Tabelle 2: Rotationen des gesamten Cubes in der Singmaster-Notation

Bemerkung 10 verwiesen, wobei die Resultate aus [FS10], S. 110, 113 und 163 für die Basic Moves sowie S. 18 und 156 für die Rotationen des gesamten Cubes entnommen worden sind.

2.2.2 Bezeichnung der Cubies

Der Notation von [FS10], S. 12 f. folgend, werden die Cubies mit den Buchstaben bezeichnet, an welchen Seiten die jeweiligen Seiten des Cubies anliegen. Die Abkürzungen für jede der sechs Seiten wird aus Tabelle 1 übernommen.

Kante	entspricht
UF	FU
UL	LU
UB	BU
UR	RU
RF	FR
FL	LF
LB	BL
BR	RB
DF	FD
DL	LD
DB	BD
DR	RD

Ecke	entspricht	entspricht
URF	RFU	FUR
UFL	FLU	LUF
ULB	LBU	BUL
UBR	BRU	RUB
DFR	FRD	RDF
DLF	LFD	FDL
DBL	BLD	LDB
DRB	RBD	BDR

Tabelle 4: Eckenbezeichnungen nach [FS10], S. 13

Tabelle 3: Kantenbezeichnungen nach [FS10], S. 12

Right face (rechte Seite)	RBU	RB	RBD	RD	RFD	RF	RFU	RU
Left face (linke Seite)	LFU	LF	LFD	LD	LBD	LB	LBU	LU
Up face (obere Seite)	URB	UR	URF	UF	ULF	UL	ULB	UB
Down face (untere Seite)	DRF	DR	DRB	DB	DLB	DL	DLF	DF
Front face (vordere Seite)	FRU	FR	FRD	FD	FLD	FL	FLU	FU
Back face (hintere Seite)	BLU	BL	BLD	BD	BRD	BR	BRU	BU

Tabelle 5: An die sechs Seiten angrenzende Cubies nach [Joy08], S. 73, wiederum bezeichnet als *Singmaster notation* (vgl. ebd.)

Nun gilt es, zwölf Kantensteine und acht Ecksteine zu bezeichnen, wobei es für die Kanten jeweils zwei, für die Ecken jeweils drei Möglichkeiten gibt, je nach erstgenannter Seite, an

welcher der betrachtete Stein anliegt (vgl. [FS10], S. 12 f.). Bei den Ecken ist zu beachten, dass die Bezeichnung im Uhrzeigersinn erfolgt, wenn man von außen auf den Cube schaut und eine gedachte Diagonale zur gegenüberliegenden Ecke zieht (vgl. [FS10], S. 12). Anders aufgeteilt kann man auch jeder der sechs Seiten (*Faces*) alle dort angrenzenden Cubies zuordnen, wie dies bei [Joy08], S. 73 dargestellt ist, siehe Tabelle 5.

2.2.3 Bezeichnung der Sticker (*Facets*)

Insbesondere für eine Zykelschreibweise der Basic Moves und für spätere Analysen von aus Basic Moves bestehenden Prozessen ist es hilfreich, auch den einzelnen Stickern bzw. *Facets* eine Bezeichnung zuzuordnen, zumindest denen, die nicht zu einem Mittelstück gehören. Dementsprechend folgt nun Abb. 2 nach [Joy08], S. 72, der man die Bezeichnung jedes der 48 Nicht-Mittelstück-Facets entnehmen kann.

			1	2	3							
			4	<i>U</i>	5							
			6	7	8							
9	10	11	17	18	19	25	26	27	33	34	35	
12	<i>L</i>	13	20	<i>F</i>	21	28	<i>R</i>	29	36	<i>B</i>	37	
14	15	16	22	23	24	30	31	32	38	39	40	
			41	42	43							
			44	<i>D</i>	45							
			46	47	48							

Abbildung 2: Bezeichnung der Facets nach [Joy08], S. 72

2.3 Die Struktur der Cube Group

Nachdem die Basic Moves bereits bezeichnet wurden, kann man nun betrachten, wie sich die Hintereinanderausführung von Basic Moves auf den Cube auswirkt. Damit gelangt man zur sogenannten Cube Group, die unten definiert wird und den Gegenstand dieses Kapitels darstellt.

Da das Konzept der Gruppe und der Untergruppe bereits aus dem Grundstudium, beispielsweise aus der Vorlesung „Geometrie, Algebra und Zahlentheorie“ (Universität Mainz, insbesondere angeboten im Wintersemester 2017/18) oder vergleichbaren Veranstaltungen bekannt ist, wird auf die anfänglichen Definitionen an dieser Stelle verzichtet.

In späteren Abschnitten ist der Begriff der erzeugten Untergruppe von Interesse. Die Defi-

nition jener kann auf verschiedene Weisen erfolgen, als Schnitt aller eine Teilmenge umfassender Untergruppen, oder als Menge endlicher Produkte von Elementen einer Menge und ihren Inversen, vgl. [Fis17], S. 12 f. Dort wird die Äquivalenz beider Definitionen gezeigt, in dieser Arbeit wird hingegen nur von letzterer Gebrauch gemacht, da sie sich leicht mit den Eigenschaften der Cube Group vereinbaren lässt. Oben genannte Produkte von Elementen (Basic Moves) und ihren Inversen werden mit den sogenannten (Compound) Moves identifiziert (siehe Def. 1 und 4).

In [Fis17] wird die Äquivalenz beider Definitionen formal als Satz postuliert und dann bewiesen. Für diese Arbeit soll die Aussage als Definition der erzeugten Untergruppe dienen:

Definition 2 (erzeugte Untergruppe, [Fis17], S. 12 f.). *Für eine Teilmenge $M \subseteq G$ ist $\text{Erz}(M) = \{a_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}, a_i \in M, \varepsilon_i = \pm 1\}$, also die Menge aller endlichen Produkte von Elementen aus M und ihren Inversen, die erzeugte Untergruppe von M .*

Eine erzeugte Untergruppe wird manchmal auch mit $\langle M \rangle$ bezeichnet. Die im nächsten Schritt eingeführte Cube Group ist ein Spezialfall einer von einer Teilmenge erzeugten Untergruppe.

Definition 3 (endlich erzeugte Untergruppe, [Fis17], S. 13). *Man nennt eine Gruppe G endlich erzeugt, wenn es eine endliche Teilmenge $M \subseteq G$ gibt, so dass $G = \text{Erz}(M)$.*

Definition 4 (Cube Group, [NST94], S. 243). *Die Cube Group M ist die Gruppe, die von den Basic Moves R, L, U, D, F, B erzeugt wird, in Zeichen: $M = \langle R, L, U, D, F, B \rangle$. Die Elemente der Cube Group sind die Compound Moves (oder: Moves, d.h. zusammengesetzte Drehungen).*

Die Moves haben, wenn man Definition 2 heranzieht, zum Beispiel folgende Gestalt: $RUR^{-1}U^{-1}$ bzw. mit der ebenfalls verbreiteten Schreibweise (vgl. Abschnitt 2.2.1) $RUR'U'$. Dabei macht man sich zunutze, dass die Inversen eines jeden Basic Moves gerade die Drehungen um 90° gegen den Uhrzeigersinn sind. Die Cube Group kann als die Permutationsgruppe der 54 Facets aufgefasst werden (bzw. 48, wenn man die fixierten Mittelstücke außen vor lässt, vgl. [Joy08], S. 92). Dazu sollen nun noch weitere Begriffe eingeführt werden, mit denen eine weitere, äquivalente Definition der Cube Group möglich wird.

Definition 5 (symmetrische Gruppe, [Fis17], S. 19). *Für eine beliebige Menge M nennt man $S(M) := \{f : M \rightarrow M : f \text{ bijektiv}\}$ zusammen mit der Hintereinanderschaltung \circ von Abbildungen die symmetrische Gruppe von M .*

$S(M)$ ist in der Tat eine Gruppe, denn für (bijektive) Abbildungen f, g, h ist die Komposition fg wieder eine (bijektive) Abbildung, es gilt das Assoziativgesetz $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, das neutrale Element ist die identische Abbildung id_M , und das Inverse f^{-1} ist die Umkehrabbildung (vgl. [Fis17], S. 19).

Definition 6 (Permutationsgruppe, [Fis17], S. 19). *Für die endliche Menge $M = \{1, \dots, n\}$ ist $S_n := S(\{1, \dots, n\})$ die Permutationsgruppe mit $n!$ Elementen.*

Für die nun folgende Definition wird zwar der Begriff Permutationsgruppe genutzt (den Ausführungen in [Joy08], S. 91 f. folgend), dieser entspricht aber vielmehr der symmetrischen Gruppe, wie sie bei [Fis17], S. 19 definiert wird.

Definition 7 (Permutationsgruppe mit Generatoren, vgl. [Joy08], S. 91 f.). *Sei X eine endliche Menge und $S = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ eine endliche Menge bestehend aus Permutationen von X , d.h. bestehend aus Elementen von S_X . Sei G die Menge aller möglichen Produkte der Form $g = x_1 \cdot \dots \cdot x_m$, $m > 0$, wobei $x_i \in S$ für alle $i = 1, \dots, n$. G mit der Gruppenoperation der Komposition von Permutationen bildet die Permutationsgruppe mit Generatoren g_1, \dots, g_n oder die von S erzeugte Permutationsgruppe.*

Für spätere Aussagen bietet sich die Zykelschreibweise von Permutationen an, die nachfolgend definiert wird.

Definition 8 (m -Zyklus, [Fis17], S. 108). *Ist M eine beliebige nichtleere Menge, so heißt ein $\xi \in S(M)$ ein Zyklus der Länge m (oder m -Zyklus), wenn es paarweise verschiedene $x_1, \dots, x_m \in M$ gibt, so dass $\xi(x_i) = x_{i+1}$ für $i = 1, \dots, m-1$, $\xi(x_m) = x_1$ und $\xi(x) = x$ für alle $x \in M \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. Man schreibt dafür $\xi := (x_1, \dots, x_m)$*

Mit den letztgenannten Definitionen kann man nun auch die Cube Group selbst noch einmal anders auffassen, wozu sich, vor der eigentlichen Betrachtung der Struktur jener, noch eine Bemerkung anschließt.

Bemerkung 9 (Alternative Definition der Cube Group, vgl. [Joy08], S. 92). Im Sinne der gerade gegebenen Definition einer „Permutationsgruppe mit Generatoren“ kann man nun auch die Cube Group alternativ definieren. Sei dazu X die Menge aller 54 Facets des Rubik's Cubes (bzw. 48 ohne Mittelstücke, vgl. Abbildung 2) und seien $R, L, U, D, F, B \in S_X$ die Basic Moves des Rubik's Cubes (wie in Def. 1). Dann nennt man $M_{Joyner} = \langle R, L, U, D, F, B \rangle \subseteq S_X$ die Cube Group (vgl. ebd.). Die Generatoren kann man dann zudem in Zykelschreibweise angeben:

$$\begin{aligned} F &= (17, 19, 24, 22)(18, 21, 23, 20)(6, 25, 43, 16)(7, 28, 42, 13)(8, 30, 41, 11) \\ B &= (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27) \\ L &= (9, 11, 16, 14)(10, 13, 15, 12)(1, 17, 41, 40)(4, 20, 44, 37)(6, 22, 46, 35) \\ R &= (25, 27, 32, 30)(26, 29, 31, 28)(3, 38, 43, 19)(5, 36, 45, 21)(8, 33, 48, 24) \\ U &= (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19) \\ D &= (41, 43, 48, 46)(42, 45, 47, 44)(14, 22, 30, 38)(15, 23, 31, 39)(16, 24, 32, 40) \end{aligned}$$

Offenbar spielt für diese etwas andere Definition außerdem noch eine Rolle, auf welche Objekte (in diesem Falle Facets) die Basic Moves wirken. Diese Beschreibung ist allerdings auch schon hinreichend, was bei [Joy08], S. 185 als „First fundamental theorem of cube theory“ bezeichnet wird. Ausschließlich die Permutation und Orientierung der Cubies bzw. Facets ist notwendig, um einen Zustand des Cubes zu beschreiben, da sich die relative Position der Mittelstücke nie ändert. Allenfalls könnte man noch betrachten, wie sich die Mittelstücke bezüglich ihrer Orientierung verändern (siehe Abschnitt 2.4, in welchem die größere sogenannte Supergroup des Cubes betrachtet wird, für die auch die Orientierungen der Mittelstücke relevant sind).

Bemerkung 10 ([FS10], S. 110, 113, 163 sowie S. 18 und 156). Es reicht aus, nur die fünf Basic Moves R, L, U, D, F als Generatoren zu verwenden: dazu muss man nur zeigen, dass sich aus dem Erzeugnis $\langle R, L, U, D, F \rangle$ der Basic Move B konstruieren lässt. Frey und Singmaster geben dazu den Compound Move $F^{-1}D^2U^2F^{-1}L^2D^2L^2R^2U^2R^2FD^2R^2F^2R^2F^2R^2L^2F^2L^2F^2U^2D^2R^2D^2F^{-1}U^2D^2F^{-1}L^2R^2$ an, der genau wie B auf die Facets die Permutation $(33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$ ausübt. Ganz ähnlich hätte man allerdings auch eine andere Kombination von fünf Basic Moves nehmen und den

verbliebenen sechsten Basic Move damit darstellen können. Auch für die Rotationen des gesamten Cubes muss man nicht alle sechs Rotationen aus Tabelle 2 nutzen, beispielsweise kann man \mathcal{F} und \mathcal{U} auswählen und damit die anderen Rotationen darstellen:

$$\mathcal{R} = \mathcal{U}\mathcal{F}\mathcal{U}^{-1}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{F}\mathcal{U}\mathcal{F}^{-1}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{F}^{-1}$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{U}^{-1}$$

Um zu verstehen, wie die oben in Definition 4 angesprochene Cube Group mit bekannten Gruppen in Verbindung steht, wird im Folgenden betrachtet, welche Wirkungen die Basic Moves einerseits auf Permutationen gesamter Cubies (Ecken und Kanten, später als Blöcke betrachtet, vgl. Bemerkung 72) sowie auf Orientierungen derselben haben. Dies stellt ein Beispiel für Operationen von Gruppen auf Mengen dar, was nun noch formal definiert wird.

Definition 11 (Operation, [Fis17], S. 102). *Eine Operation einer Gruppe G auf einer nicht leeren Menge M ist eine Abbildung $\tau : G \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto \tau_a(x)$, mit $\tau_{a \cdot b}(x) = \tau_a(\tau_b(x))$ und $\tau_e(x) = x$ für alle $a, b \in G$ und $x \in M$.*

Definition 12 (G -Menge, [NST94], S. 32). *Eine Menge zusammen mit einer Operation einer Gruppe auf jener Menge wird als G -Menge (engl. G -space/ G -set) bezeichnet.*

Definition 13 ((einfach) transitive Operation, [Fis17], S. 103). *Eine Operation von G auf M heißt transitiv, wenn es zu $x, y \in M$ ein $a \in G$ gibt mit $a(x) = y$, und einfach transitiv, wenn $a \in G$ zu $x, y \in M$ eindeutig bestimmt ist.*

Wenn eine Operation transitiv ist, bedeutet dies vereinfacht ausgedrückt, dass jedes Element einer Menge zu jedem anderen transportiert werden kann (vgl. [Fis17], S. 104). Während dies nicht für alle Operationen auf Mengen der Fall ist, kann man jedoch zumindest jedem Element der Menge alle Elemente zuordnen, die man von dort mithilfe einer Gruppenoperation erreichen kann:

Definition 14 (Bahn, [Fis17], S. 104). *Operiert G auf M und ist $x \in M$, so heißt $G(x) := \{a(x) \in M : a \in G\} \subset M$ die Bahn von x .*

Anders kann man auch sagen, dass eine Bahn als eine transitive G -Teilmenge verstanden werden kann (vgl. [NST94], S. 51)

2.3.1 Permutationen der Cubies

Nun kann zur Beschreibung der Wirkung der Cube Group auf die Cubies übergegangen werden, im ersten Schritt ausschließlich auf Permutationen von Ecken und Kanten. Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass nur 20 Cubies insgesamt von den (Basic) Moves permutiert werden können, nämlich 12 Kanten und 8 Ecken, da die Mittelstücke ihre Position nicht ändern und auch der theoretisch 27. Cubie in der Mitte in der Praxis nicht existiert. Nun wird den verbleibenden beweglichen Cubies noch eine Bezeichnung gegeben.

Definition 15 ((bewegliche) Cubies (Ecksteine, Kantensteine), vgl. [NST94], S. 243). *Die Menge aller 20 von Basic Moves permutierbaren Cubies (Ecksteine und Kantensteine) wird mit Γ , die Menge aller acht Ecksteine mit Γ_c , und die Menge aller zwölf Kantensteine mit Γ_e bezeichnet.*

Wie die Cube Group auf die gerade definierten Mengen Γ, Γ_c und Γ_e wirkt, zeigen die nachfolgende Bemerkung 16 und das anschließende Lemma 17.

Bemerkung 16 ([NST94], S. 243). Mit (Compound) Moves kann jeder Eckstein zu jedem anderen Eckstein und jeder Kantenstein zu jedem anderen Kantenstein gebracht werden.

Beweis. Für den Beweis der Aussage werden insgesamt vier Tabellen angelegt, die einerseits den Eckstein URF mit gewissen Moves zu jedem anderen Eckstein bringen, andererseits jeden Eckstein zum Eckstein URF bringen. Damit sichert man, dass die Bedingung „beliebiger Eckstein zu beliebigem Eckstein“ erfüllt ist. Selbiges geschieht dann noch mit den Kantensteinen, d.h. es werden Moves zum Permutieren des Kantensteins RF zu jedem anderen Kantenstein und umgekehrt angegeben, wodurch man zeigt, dass auch jeder beliebige Kantenstein zu jedem anderen Kantenstein gebracht werden kann. Ist in einem Beispiel weder der Eckstein URF noch der Kantenstein RF involviert, so kann man mit beiden Tabellen aber immer den Umweg über den jeweils ohne Beschränkung der Allgemeinheit aus allen Eck- bzw. Kantensteinen ausgewählten Vertreter, URF oder RF, gehen.

Ziel-Eckstein	Moves
UFL	U
ULB	U^2
UBR	U^{-1}
DFR	F
DLF	F^2
DLB	$U^2 L^{-1}$
DRB	R^2

Tabelle 6: Eckstein URF zu beliebigem anderen Eckstein bringen

Start-Eckstein	Moves
UFL	U^{-1}
ULB	U^2
UBR	U
DFR	F^{-1}
DLF	F^2
DLB	LU^2
DRB	R^2

Tabelle 7: Beliebigen Eckstein zum Eckstein URF bringen

Ziel-Kantenstein	Moves
UF	F^{-1}
UL	$F^2 L^{-1}$
UB	RU^{-1}
UR	R
FL	F^2
LB	$RU^2 L^{-1}$
BR	R^2
DF	F
DL	FD^{-1}
DB	$R^{-1} D$
DR	R^{-1}

Tabelle 8: Kantenstein RF zu beliebigem anderen Kantenstein bringen

Start-Kantenstein	Moves
UF	F
UL	LF^2
UB	UR^{-1}
UR	R^{-1}
FL	F^2
LB	$LU^2 R^{-1}$
BR	R^2
DF	F^{-1}
DL	DF^{-1}
DB	$D^{-1} R$
DR	R

Tabelle 9: Beliebigen Kantenstein zum Kantenstein RF bringen

□

Lemma 17 ([NST94], S. 243). *Die Gruppe M operiert intransitiv auf Γ und besitzt zwei Bahnen, die Menge Γ_c der acht Ecksteine und die Menge Γ_e der zwölf Kantensteine.*

Beweis. Offenbar ist es der Konstruktion des Cubes wegen nicht möglich, ein beliebiges Element aus Γ auf ein beliebiges anderes Element von Γ abzubilden, da weder Ecksteine an die Positionen von Kantensteinen, noch Kantensteine an die Positionen von Ecksteinen gebracht werden können. Damit kann M nicht mehr transitiv auf Γ operieren, da die Bedingung dazu aus Definition 13 nicht erfüllt werden kann. Stattdessen operiert M intransitiv auf Γ . Γ_c und Γ_e allerdings sind transitive Teilmengen von Γ , wie bereits in Bemerkung 16 gezeigt wurde. \square

Bemerkung 18 ([Fis17], S. 104). Die Bahnen zweier Elemente einer Menge, auf der eine Gruppe operiert, sind identisch genau dann, wenn eines der Elemente in der Bahn des anderen enthalten ist, in Zeichen: $G(x) = G(y)$ für $x, y \in M \Leftrightarrow y \in G(x)$, denn $y \in G(x) \Leftrightarrow y = a(x)$ für ein $a \in G \Leftrightarrow G(y) = G(a(x)) = G(x)$. Für den Cube bedeutet dies, dass man sich beispielsweise einen Kantenstein aussuchen kann und alle erreichbaren Kantensteine in einer Menge zusammenfasst. Die somit beschriebene Bahn ist aber identisch zu all den anderen Bahnen, die von den beliebigen anderen Kantensteinen ausgehen, da diese in der Bahn des zunächst ausgewählten enthalten sind. Gleiches gilt auch, wenn man Ecksteine betrachtet. So gibt es insgesamt also nur zwei verschiedenen Bahnen auf Γ , wie oben in Lemma 17 beschrieben.

Das Verständnis der Cube Group wird erleichtert, wenn man Abbildungen zwischen Gruppen mit bestimmten Eigenschaften betrachtet. Die Kenntnis von Homomorphismen bzw. Endo-, Mono-, Epi-, Auto- und Isomorphismen wird allerdings erneut vorausgesetzt. Grundlegende Eigenschaften, wie sie in [Fis17], S. 28 f. bewiesen werden, werden aus demselben Grund hier nicht mehr angeführt. Auch die im Folgenden verwendeten Begriffe wie Bild und Kern (vgl. ebd.), Fehlstände und Signum, gerade / ungerade Permutation sowie die alternierende Gruppe und die Transposition werden hier nicht ausführlich besprochen, auch wenn diese für die Beschreibung der Cube Group maßgeblich sind. Als Vorbereitung für die Analyse der Struktur der Cube Group sollen nun allerdings dennoch zwei theoretische Abschnitte folgen, um die späteren Aussagen ausreichend begründen zu können. Erneut orientieren sich die Ausführungen an [Fis17], wobei es wieder zu Überschneidungen mit Inhalten aus dem Grundstudium kommt.

Definition 19 (Konjugation, [Fis17], S. 34). *Für ein beliebiges Element $a \in G$ einer Gruppe nennt man die Abbildung $\kappa_a : G \rightarrow G, x \mapsto axa^{-1}$ die Konjugation mit a .*

Bemerkung 20 ([Fis17], S. 34). Die Konjugation ist ein Automorphismus mit $\kappa_a^{-1} = \kappa_{a^{-1}}$.

Beweis. Es gilt $G' = G$, d.h. die Abbildung bildet von einer Gruppe in sich selbst ab, was eine Voraussetzung für Endo- und Automorphismen ist. Die nachfolgenden Beweisschritte zum Beweis des Automorphismus folgen [Hum96], S. 74. Es gilt: κ_a ist ein Homomorphismus, denn für $g, h \in G$ ist $\kappa_a(g)\kappa_a(h) = (aga^{-1})(aha^{-1}) = a(gh)a^{-1} = \kappa_a(gh)$. Außerdem ist κ_a injektiv: falls $\kappa_a(g) = \kappa_a(h)$, dann gilt $aga^{-1} = aha^{-1}$ und damit auch $g = h$. Weiterhin ist κ_a auch surjektiv, denn für ein beliebiges $h \in G$ gilt $\kappa_a(a^{-1}ha) = a(a^{-1}ha)a^{-1} = h$ mit $a^{-1}ha \in G$. Dann erhält man $\kappa_a(G) = G$, also die Surjektivität. Zusammen bedeutet dies also, dass die Konjugation ein Automorphismus ist. Um $\kappa_a^{-1} = \kappa_{a^{-1}}$ zu zeigen, kann man die Hintereinanderausführung $\kappa_a(\kappa_{a^{-1}}(g))$ für ein beliebiges $g \in G$ betrachten: $\kappa_a(\kappa_{a^{-1}}(g)) = a(\kappa_{a^{-1}}(g))a^{-1} = a(a^{-1}ga)a^{-1} = ege = g$, d.h. $\kappa_a \circ \kappa_{a^{-1}} = id_G$. \square

Definition 21 (Nebenklassen, [Fis17], S. 36 f.). Gegeben sei eine Untergruppe $H \leq G$ und $a \in G$. Dann heißt $aH := \{ax : x \in H\}$ die linke Nebenklasse von H bezüglich a , $Ha := \{xa : x \in H\}$ die rechte Nebenklasse von H bezüglich a . Die Menge der Nebenklassen einer Gruppe G bezeichnet man mit $G/H := \{aH : a \in G\}$ und $G \setminus H := \{Ha : a \in G\}$.

Definition 22 (Ordnung und Index, [Fis17], S. 38). 1) Die Anzahl der Elemente einer Gruppe G bezeichnet man mit Ordnung, in Zeichen $\text{ord}(G) := \#G$. Hat G unendlich viele Elemente, so setzt man $\text{ord}(G) = \infty$, andernfalls ist $\text{ord}(G) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

2) Ist $H \leq G$, so nennt man die Anzahl Nebenklassen, d.h. die Elemente in G/H oder $G \setminus H$, den Index von H in G , in Zeichen $\text{ind}(G : H) := \#(G/H)$.

Satz 23 (Lagrange, [Fis17], S. 38). Ist H Untergruppe der endlichen Gruppe G , so gilt $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot \text{ind}(G : H)$.

Beweis. Alle Nebenklassen enthalten $\text{ord}(H)$ Elemente, da die Abbildung $H \rightarrow aH, x \mapsto ax$ für alle $a \in G$ bijektiv ist. Da G in $\text{ind}(G : H)$ disjunkte Nebenklassen partitioniert ist bzw. disjunkte Vereinigung jener Nebenklassen ist, folgt die Aussage des Satzes. \square

Definition 24 (Elementordnung, [Fis17], S. 38 f.). Für ein Element $a \in G$ definiert man die Ordnung als Anzahl der Elemente in der von a erzeugten Untergruppe, also $\text{ord}(a) := \text{ord}(\text{Erz}(a)) \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$. Insbesondere ist $\text{ord}(a) = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a^k = e\}$, falls $\text{ord}(a) < \infty$.

Korollar 25 ([Fis17], S. 39). Ist G eine endliche Gruppe, so gilt für jedes $a \in G$: $a^{\text{ord}(G)} = e$.

Beweis. Wegen Satz 23 und Definition 24 muss die Elementordnung die Gruppenordnung teilen. Dann allerdings gilt: $a^{\text{ord}(G)} = a^{\text{ord}(a) \cdot \text{Kofaktor}} = (a^{\text{ord}(a)})^{\text{Kofaktor}} = e^{\text{Kofaktor}} = e$. \square

Definition 26 (Normalteiler, [Fis17], S. 44). Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt Normalteiler (in Zeichen $H \triangleleft G$), wenn für alle $a \in G$ gilt: $aH = Ha$, d.h. die linken und rechten Nebenklassen stimmen überein.

Bemerkung 27 ([Fis17], S. 44). Für eine Untergruppe $H \leq G$ ist es gleichwertig, für jedes $a \in G$ folgendes zu fordern:

- i) $aH = Ha$,
- ii) $aHa^{-1} \subset H$,
- iii) $aHa^{-1} = H$

Beweis. i) \Rightarrow ii): Ist $x \in aHa^{-1}$, so ist $x = aya^{-1}$ mit $y \in H$. Also ist $xa = ay \in aH \stackrel{i)}{=} Ha$, also $x \in H$.

ii) \Rightarrow iii): Eigenschaft ii) bedeutet, dass H unter allen Konjugationen invariant ist. Aus $\kappa_a(H) \subset H$ und $\kappa_{a^{-1}}(H) \subset H$ folgt, dass $\kappa_a(\kappa_{a^{-1}}(H)) \subset H$. Da aber $\kappa_a \circ \kappa_{a^{-1}} = id_H$, folgt, dass $\kappa_a|_H$ surjektiv ist (bzw. $\kappa_a(H) = aHa^{-1} = H$). Hier wurde von der Beweistechnik aus dem Surjektivitätsbeweis von Bemerkung 20 Gebrauch gemacht.

iii) \Rightarrow i): Ist $x \in Ha$, so ist $x = ya$ mit $y \in H$. Also ist $xa^{-1} = y \in H \stackrel{iii)}{=} aHa^{-1}$, also $x \in aH$, d.h. also $Ha \subseteq aH$. ($aH \subseteq Ha$ analog). \square

Lemma 28 ([Fis17], S. 45). Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus von Gruppen.

a) Ist $N' \triangleleft G'$, so ist $\varphi^{-1}(N') \triangleleft G$ Normalteiler. Insbesondere ist $\text{Ker } \varphi \triangleleft G$ Normalteiler.

b) Ist φ surjektiv und $N \triangleleft G$ Normalteiler, so ist $\varphi(N) \triangleleft G'$ Normalteiler.

Beweis. a) Nach der Bemerkung in [Fis17], S. 28 f. ist $\varphi^{-1}(N') < G$. Sei $x \in \varphi^{-1}(N')$, also $x' = \varphi(x) \in N'$ und $a \in G$. Dann: $\varphi(axa^{-1}) = \varphi(a)x'\varphi(a)^{-1} \in N'$, also $axa^{-1} \in \varphi^{-1}(N')$. Das bedeutet, dass $\varphi^{-1}(N')$ invariant unter Konjugation ist, und dies ist nach Bemerkung 27 äquivalent dazu, dass $\varphi^{-1}(N')$ ein Normalteiler von G ist. Ist insbesondere $N' = \{e'\}$, so ist $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\{e'\})$.

b) Ebenfalls nach [Fis17], S. 28 f. ist $\varphi(N) < G'$. Ist $x' = \varphi(x) \in \varphi(N)$ mit $x \in N$ und $a' = \varphi(a) \in G'$ mit $a \in G$, so ist $a'x'a'^{-1} = \varphi(axa^{-1}) \in \varphi(N)$. Erneut greift die äquivalente Definition eines Normalteilers, invariant unter Konjugation zu sein.

□

Satz 29 (Faktorgruppe, [Fis17], S. 46 f.). *Sei G eine Gruppe und $N \triangleleft G$ ein Normalteiler. Dann gibt es genau eine Verknüpfung $*$ auf G/N mit folgenden Eigenschaften:*

a) G/N zusammen mit $*$ ist eine Gruppe,

b) Die kanonische surjektive Abbildung $\rho : G \rightarrow G/N, a \mapsto aN = Na$, ist ein Homomorphismus.

Das neutrale Element von G/N ist $N \in G/N$, das Inverse von aN ist $a^{-1}N$ und $\text{Ker } \rho = N \triangleleft G$.

Beweis. $*$ muss wegen $(ab)N = \rho(ab) = \rho(a) * \rho(b) = (aN) * (bN)$ folgendermaßen definiert werden: $(aN) * (bN) := (ab)N$. Damit erhält man einen Homomorphismus.

1. $*$ ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $a, b \in G$, denn: für a' und b' gelte $aN = a'N$, d.h. $a^{-1}a' \in N$ und $bN = b'N$, d.h. $b^{-1}b' \in N$. Dann ist $Nb' = b'N$, da N Normalteiler ist (nach Voraussetzung). D.h. zu $x \in N$ gibt es ein $y \in N$ mit $xb' = b'y$. Für $x = a^{-1}a'$ gilt dann $(ab)^{-1}(a'b') = b^{-1}a^{-1}a'b' = b^{-1}xb' = b^{-1}b'y \in N$ und damit $(ab)N = (a'b')N$.
2. $*$ ist assoziativ, denn $((aN) * (bN)) * (cN) = ((ab)N) * (cN) = ((ab)c) * N = (a(bc)) * N = (aN) * ((bN) * (cN))$.
3. Für e als neutrales Element von G ist $N = eN$ das neutrale Element von G/N , denn $(eN) * (aN) = (aN) * (eN) = aN$.
4. Das Inverse von aN ist $a^{-1}N$, da $(aN) * (a^{-1}N) = (aa^{-1})N = N$.

□

Definition 30 (Faktorgruppe, [Fis17], S. 46). *Die Gruppe aus Satz 29 nennt man Faktorgruppe von G nach N .*

Definition 31 (Zyklische Gruppe, [Fis17], S. 47, 13-15). *In der abelschen Gruppe \mathbb{Z} ist $m\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und die Faktorgruppe $Z_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist die zyklische Gruppe. Dabei ist $m\mathbb{Z} := \{m \cdot k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{0 + m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, \dots, (m-1) + m\mathbb{Z}\}$.*

Isomorphiesätze und Produkte von Gruppen

Satz 32 (Faktorisierungssatz, [Fis17], S. 50 f.). *Sei $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, $N \triangleleft G$ ein Normalteiler und $\rho : G \rightarrow G/N$ der kanonische Homomorphismus. Ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow G'$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \rho$ existiert genau dann, wenn $N \subseteq \text{Ker } \varphi$. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist $\bar{\varphi}$ eindeutig bestimmt durch $\bar{\varphi}(aN) = \varphi(a)$. Weiter ist $\bar{\varphi}(G/N) = \varphi(G)$ und $\text{Ker } \bar{\varphi} = (\text{Ker } \varphi)/N$.*

Beweis. „ \Rightarrow “ $\varphi = \bar{\varphi} \circ \rho$ bedeutet für alle $a \in G$, dass $\varphi(a) = \bar{\varphi}(\rho(a)) = \bar{\varphi}(aN)$. Für $a \in N$ gilt dann $aN = N$, wobei dies das neutrale Element von G/N darstellt. Also muss $\bar{\varphi}(aN) = e' \in G'$ sein. Mit $\varphi(a) = \bar{\varphi}(\rho(a)) = \bar{\varphi}(aN)$ folgt dann, dass $\varphi(a) = e'$, also $N \subseteq \text{Ker } \varphi$. Dadurch kann $\bar{\varphi}$ nur durch $\bar{\varphi}(aN) := \varphi(a)$ definiert werden.

„ \Leftarrow “ Zu zeigen ist, dass $\bar{\varphi}$ unter der notwendigen Bedingung $N \subseteq \text{Ker } \varphi$ wohldefiniert ist. Dazu sei $aN = bN$, d.h. $a^{-1}b \in N \subseteq \text{Ker } \varphi$. Daraus folgt $\varphi(a^{-1}\varphi(b)) = \varphi(a^{-1}b) = e'$, und somit $\varphi(a) = \varphi(b)$. Die so definierte Abbildung $\bar{\varphi}$ ist ein Homomorphismus: $\bar{\varphi}((aN)(bN)) = \bar{\varphi}((ab)N) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \bar{\varphi}(aN)\bar{\varphi}(bN)$.

Zu $\bar{\varphi}(G/N) = \varphi(G)$: Dies folgt aus der Definition von $\bar{\varphi}$, da die Komposition mit dem kanonischen surjektiven Homomorphismus ganz φ ist.

Zu $\text{Ker } \bar{\varphi} = (\text{Ker } \varphi)/N$: $aN \in \text{Ker } \bar{\varphi} \Leftrightarrow e' = \bar{\varphi}(aN) = \varphi(a) \Leftrightarrow a \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow aN \in (\text{Ker } \varphi)/N$. \square

Satz 33 (Erster Isomorphiesatz, [Fis17], S. 51). *Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist die Abbildung $\bar{\varphi} : G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \varphi(G)$, $a \cdot \text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(a)$ ein Isomorphismus. Ist φ surjektiv, so folgt $G' \cong G/\text{Ker } \varphi$.*

Beweis. Setzt man in Satz 32 $N = \text{Ker } \varphi$, so ist $\bar{\varphi}(G/\text{Ker } \varphi) = \varphi(G)$ und $\text{Ker } \bar{\varphi} = N/N = \{eN\}$ ist das neutrale Element von G/N (d.h. der Kern ist trivial), somit ist $\bar{\varphi} : G/N \rightarrow G'$ ein Monomorphismus. Zusammen mit der Surjektivität (d.h. $\bar{\varphi}$ ist ein Epimorphismus) aus Satz 32 liegt hier also ein surjektiver Monomorphismus, also ein Isomorphismus vor. \square

Definition 34 ((äußeres) direktes Produkt, [Fis17], S. 53). *Sind G_1, G_2 Gruppen, so definiert man auf der Menge $G_1 \times G_2$ eine Verknüpfung $*$ durch $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) := (a_1b_1, a_2b_2)$. $G_1 \times G_2$ zusammen mit der komponentenweisen Verknüpfung heißt (äußeres) direktes Produkt von G_1 und G_2 .*

Satz 35 (über das äußere direkte Produkt, [Fis17], S. 53 f.). *Sind G_1, G_2 Gruppen, so gilt für $G_1 \times G_2$ mit der oben erklärten Verknüpfung $*$:*

- a) $G_1 \times G_2$ ist eine Gruppe.
- b) Für $i = 1, 2$ sind die Projektionen $\pi_i : G_1 \times G_2 \rightarrow G_i$, $(a_1, a_2) \mapsto a_i$, Homomorphismen.
- c) Ist H eine beliebige Gruppe mit einem Homomorphismus $\varphi_i : H \rightarrow G_i$ für $i = 1, 2$, so gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : H \rightarrow G_1 \times G_2$, so dass $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$. D.h. man kann einen Homomorphismus nach $G_1 \times G_2$ in den Komponenten unabhängig voneinander erklären.
- d) $G_1 \times G_2$ ist genau dann abelsch, wenn G_1 und G_2 abelsch sind.

Beweis. a) Da G_1 und G_2 Gruppen sind, ist die Verknüpfung auf dem zunächst erklärten kartesischen Produkt $G_1 \times G_2$ abgeschlossen. Das Assoziativgesetz in $G_1 \times G_2$ gilt, da es in G_1 und in G_2 gilt. Sind $e_i \in G_i$ die neutralen Elemente und a_i^{-1} die Inversen zu a_i , so ist $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$ neutrales Element und das Inverse ist gegeben durch $(a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1})$.

- b) Für die π_i gilt: $\pi_i((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) = \pi_i(a_1 b_1, a_2 b_2) = a_i b_i = \pi_i(a_1, a_2) \pi_i(b_1, b_2)$.
- c) Für ein $c \in H$ gibt es wegen der Forderung $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ nur die Möglichkeit $\varphi(c) := (\varphi_1(c), \varphi_2(c))$, und diese Abbildung ist offensichtlich ein Homomorphismus.
- d) Dies ist klar, da die einzelnen Komponenten kommutativ sind.

□

Das direkte Produkt und wann ein solches kommutativ ist, wie in Teil d) beschrieben, wird beispielsweise für die Beschreibung der sogenannten Construction Group (siehe Def. 73) des Zauberwürfels verwendet.

Bemerkung 36 ([Fis17], S. 56). Ist $a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1$ für alle $a_i \in H_i$, wobei $H_i \leq G$ und G eine Gruppe, so ist $H_1 \cdot H_2 \leq G$ eine Untergruppe.

Beweis. Für $a_1 a_2, b_1 b_2 \in H_1 \cdot H_2$ gilt:

$$a_1 a_2 (b_1 b_2)^{-1} = a_1 a_2 b_2^{-1} b_1^{-1} = a_1 a_2 b_1^{-1} b_2^{-1} = (a_1 b_1^{-1})(a_2 b_2^{-1}) \in H_1 \cdot H_2.$$

Und dies entspricht der Forderung, die für eine Untergruppe erfüllt sein muss (Lemma aus [Fis17], S. 11). □

Lemma 37 (partielle Kommutativität für Normalteiler, [Fis17], S. 56). *Für Normalteiler $N_1, N_2 \triangleleft G$ einer Gruppe G mit $N_1 \cap N_2 = \{e\}$ gilt:*

- 1) $a_1 a_2 = a_2 a_1$ für $a_1 \in N_1, a_2 \in N_2$.
- 2) $N_1 \cdot N_2 \leq G$ ist eine Untergruppe und $N_1 \cdot N_2 = N_2 \cdot N_1$.

Beweis. 1) $(a_1 a_2) \cdot (a_2 a_1)^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} a_1 (a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}) \in N_1 \\ (a_1 a_2 a_1^{-1}) a_2^{-1} \in N_2 \end{array} \right\} \in N_1 \cap N_2 = \{e\}$. Da die Inversen eindeutig sind, folgt die Aussage.

- 2) folgt wegen 1) wie in Bem. 36.

□

Definition 38 (inneres direktes Produkt, [Fis17], S. 56). *Gegeben seien eine Gruppe G mit zwei Untergruppen $H_1, H_2 \leq G$. G heißt inneres direktes Produkt von H_1 und H_2 , in Zeichen $G = H_1 \times H_2$, wenn folgendes gilt:*

- a) H_1 und H_2 sind Normalteiler von G .
- b) $H_1 \cdot H_2 = G$ und $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

Satz 39 (Zusammenhang äußeres und inneres direktes Produkt, [Fis17], S. 56 f.). *Seien $N_1, N_2 \triangleleft G$ Normalteiler einer Gruppe G und bezeichne $N_1 \times N_2$ das äußere direkte Produkt. Dann gilt: G ist inneres direktes Produkt von N_1 und N_2 genau dann, wenn die Abbildung $\varphi : N_1 \times N_2 \rightarrow G, (a_1, a_2) \mapsto a_1 \cdot a_2$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “ Ist G inneres direktes Produkt, so ist φ wegen Teil 1) aus Lemma 37 ein Homomorphismus, der wegen $N_1 \cdot N_2 = G$ auch surjektiv ist. Ist $\varphi(a_1, a_2) = a_1 a_2 = e$, so folgt $a_2 = a_1^{-1}$ und $a_1, a_2 \in N_1 \cap N_2 = \{e\}$, also $(a_1, a_2) = (e, e)$. Somit ist φ auch injektiv, denn $\text{Ker } \varphi = (e, e)$.

„ \Leftarrow “ Ist φ Isomorphismus, so muss $N_1 \cdot N_2 = G$ sein. Da $\varphi(N_1 \times \{e\}) = N_1$ und $\varphi(\{e\} \times N_2) = N_2$, folgt $N_1 \cap N_2 = \varphi(e, e) = \{e\}$. \square

Definition 40 (inneres direktes Produkt, [Fis17], S. 56). Eine Gruppe G heißt *inneres direktes Produkt von Untergruppen* $N_1, \dots, N_k \leq G$, in Zeichen $G = N_1 \times \dots \times N_k$, wenn folgendes gilt:

- a) N_1, \dots, N_k sind Normalteiler von G .
- b) $N_1 \cdot \dots \cdot N_k = G$ und $N_i \cap (N_1 \cdot \dots \cdot N_{i-1} \cdot N_{i+1} \cdot \dots \cdot N_k) = \{e\}$ für alle $i = 1, \dots, k$.

Satz 41 (Zusammenhang äußerer und inneres direktes Produkt mehrerer Untergruppen, [Fis17], S. 57 f.). Eine Gruppe G ist genau dann inneres direktes Produkt von Normalteilern $N_1, \dots, N_k \triangleleft G$, wenn die Abbildung $\varphi : N_1 \times \dots \times N_k \rightarrow G, (a_1, \dots, a_k) \mapsto a_1 \cdot \dots \cdot a_k$, vom äußeren direkten Produkt nach G ein Isomorphismus ist. Dann ist insbesondere jedes $a \in G$ in eindeutiger Weise als $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_k$ mit $a_i \in N_i$ darstellbar.

Beweis. „ \Rightarrow “ Ist G inneres Produkt, so folgt aus Bedingung 40 b), dass φ surjektiv ist, und dass $N_i \cap N_j = \{e\}$ für $i \neq j$. Daher gilt nach 1) aus Lemma 37, dass $a_i a_j = a_j a_i$ für $a_i \in N_i$ und $a_j \in N_j$. Wie im Fall $k = 2$ folgt, dass φ ein Homomorphismus ist. Er ist auch injektiv: Aus $\varphi(a_1, \dots, a_k) = a_1 \cdot \dots \cdot a_k = e$ folgt $a_1 = (a_2 \cdot \dots \cdot a_k)^{-1}$, also $a_1 \in N_1 \cap (N_2 \cdot \dots \cdot N_k)$ und $a_i = e$ für alle i , also $(a_1, \dots, a_k) = (e, \dots, e)$.

„ \Leftarrow “ Ist umgekehrt φ ein Isomorphismus, so ist $N_1 \cdot \dots \cdot N_k = G$ und $\varphi(N_1 \times \{(e, \dots, e)\}) = N_1$ sowie $\varphi(\{e\} \times N_2 \times \dots \times N_k) = N_2 \cdot \dots \cdot N_k$. Daraus folgt $N_1 \cap (N_2 \cdot \dots \cdot N_k) = \{e\}$ und analog mit i statt 1. \square

Definition 42 ((äußeres) semidirektes Produkt, [Fis17], S. 58). Zu den Gruppen G_1, G_2 sei der Homomorphismus $\Phi : G_2 \rightarrow \text{Aut}(G_1), a_2 \mapsto \Phi_{a_2}$, d.h. $\Phi_{a_2 \circ b_2} = \Phi_{a_2} \circ \Phi_{b_2}$, für $a_2, b_2 \in G_2$, gegeben. Eine Verknüpfung in der Menge $G_1 \times G_2$ wird nun definiert durch $(a_1, a_2) *_{\Phi} (b_1, b_2) := (a_1 \cdot \Phi_{a_2}(b_1), a_2 b_2)$. Abkürzend schreibt man $G_1 \times_{\Phi} G_2$ für die Menge $G_1 \times G_2$ mit der Verknüpfung $*_{\Phi}$ (oder kürzer $*$), man nennt sie (äußeres) semidirektes Produkt.

Bemerkung 43 (Automorphismen einer Gruppe, [Fis17], S. 29). Die Menge $\text{Aut}(G)$ aller Automorphismen einer Gruppe G mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung ist eine Gruppe, was aus der Bemerkung in [Fis17], S. 28 f. als Korollar folgt.

Satz 44 (über das äußere semidirekte Produkt, [Fis17], S. 58 f.). Für beliebige Gruppen G_1, G_2 und jeden Homomorphismus $\Phi : G_2 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$ ist $G_1 \times_{\Phi} G_2$ eine Gruppe. Neutrales Element ist (e_1, e_2) , das Inverse ist gegeben durch $(a_1, a_2)^{-1} = (\Phi_{a_2}^{-1}(a_1^{-1}), a_2^{-1})$.

Beweis. Aus $((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) * (c_1, c_2) = (a_1 \cdot \Phi_{a_2}(b_1) \cdot \Phi_{a_2 \circ b_2}(c_1), a_2 b_2 c_2)$ $= (a_1, a_2 * ((b_1, b_2) * (c_1, c_2)))$ folgt die Assoziativität. Da $\Phi_{e_2} = \text{id}_{G_1}$ ist, ist (e_1, e_2) neutral und $(a_1, a_2) * (\Phi_{a_2}^{-1}(a_1^{-1}), a_2^{-1}) = (a_1 \cdot \Phi_{a_2}(\Phi_{a_2}^{-1}(a_1^{-1})), a_2 a_2^{-1}) = (e_1, e_2)$. \square

Definition 45 (Normalisator, [Fis17], S. 60). Ist $H \leq G$ Untergruppe, so heißt $\text{Nor}_G(H) := \{a \in G : aHa^{-1} = H\}$ der Normalisator von H in G . Damit ist $\text{Nor}_G(H)$ die größte Untergruppe, in der H Normalteiler ist.

Bemerkung 46 ([Fis17], S. 60). Seien $G_1, G_2 \leq G$ und $G_2 \leq \text{Nor}_G(G_1)$. Dann gilt:

- a) $G_1 \cdot G_2 = \{a_1 a_2 : a_1 \in G_1, a_2 \in G_2\} \leq G$.
 - b) $G_1 \cdot G_2 = G_2 \cdot G_1$.
 - c) Ist $G_1 \cap G_2 = \{e\}$, so ist jedes $a \in G_1 G_2$ eindeutig als $a = a_1 a_2$ mit $a_i \in G_i$ darstellbar.
- Beweis.* a) $G_1 G_2$ ist abgeschlossen unter Multiplikation, denn: sind $a_1 a_2, b_1 b_2 \in G_1 G_2$, so gilt wegen $a_2 G_1 a_2^{-1} = G_1$ folgendes: $(a_1 a_2)(b_1 b_2) = a_1 a_2 b_1 (a_2^{-1} a_2) b_2 = a_1 (a_2 b_1 a_2^{-1}) a_2 b_2 \in G_1 G_2$. Außerdem ist $(a_1 a_2)^{-1} = a_2^{-1} a_1^{-1} = (a_2^{-1} a_1^{-1} a_2) a_2^{-1} \in G_1 G_2$.
- b) $G_1 G_2 \subseteq G_2 G_1$, denn $a_1 a_2 = a_2 (a_2^{-1} a_1 a_2) \in G_2 G_1$ und $G_2 G_1 \subseteq G_1 G_2$, denn $a_2 a_1 = (a_2 a_1 a_2^{-1}) a_2 \in G_1 G_2$.
 - c) Ist $a = a_1 a_2 = b_1 b_2$, so ist $b_1^{-1} a_1 = b_2 a_2^{-1} \in G_1 \cap G_2 = \{e\}$, also $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$. □

Satz 47 (über das innere semidirekte Produkt, [Fis17], S. 61). *In einer Gruppe G seien Untergruppen $G_1, G_2 \leq G$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:*

- a) $G_1 \triangleleft G$ ist Normalteiler (also offenbar $G_2 \leq \text{Nor}_G(G_1)$),
- b) $G_1 G_2 = G$ und $G_1 \cap G_2 = \{e\}$.

Dann ist die Abbildung $G_1 \times_{\Phi} G_2 \rightarrow G, (a_1, a_2) \mapsto a_1 \cdot a_2$, ein Isomorphismus, wenn Φ_{a_2} für $a_2 \in G$ die Konjugation in G_1 bezeichnet, d.h. $\Phi_{a_2}(a_1) := a_2 a_1 a_2^{-1}$. Außerdem ist die Abbildung $G_2 \rightarrow G/G_1, a_2 \mapsto a_2 G_1$, ein Isomorphismus.

Definition 48 (inneres semidirektes Produkt, [Fis17], S. 61). *Unter den Voraussetzungen von Satz 47 nennt man G inneres direktes Produkt von G_1 und G_2 , man schreibt dafür auch $G = G_1 \rtimes G_2$.*

Im vorangegangenen Unterabschnitt wurden insbesondere der Begriff des Gruppenhomomorphismus sowie eine Reihe von Produkten von Gruppen angesprochen. Nun werden Operationen von Gruppen auf Mengen noch aus einem anderen Blickwinkel betrachtet, der die Beschreibung der Wirkung von M auf Γ und der später besprochenen Mengen erleichtern wird.

Bemerkung 49 ([Fis17], S. 102). Sei G eine Gruppe und M eine nicht leere Menge.

- a) Ist τ eine Operation von G auf M , so ist für jedes $a \in G$ die Abbildung $\tau_a : M \rightarrow M, x \mapsto \tau_a(x)$, bijektiv und die Abbildung $G \rightarrow S(M), a \mapsto \tau_a$, ist ein Gruppenhomomorphismus.
- b) Umgekehrt ist für jeden Gruppenhomomorphismus $\tau : G \rightarrow S(M), a \mapsto \tau_a$, die Abbildung $G \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto \tau_a(x)$, eine Operation.

Beweis. Die Abbildung τ_a auf M ist bijektiv, denn: $\tau_{a^{-1}}$ ist Umkehrabbildung, in Zeichen: $(\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}}$. Da $\tau_{a^{-1}}(\tau_a(x)) = \tau_e(x) = \tau_a(\tau_{a^{-1}}(x))$ für alle $a \in G$ und $x \in M$ gilt auch, dass $\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = id_M = \tau_{a^{-1}} \circ \tau_a$. □

Bemerkung 50 ([NST94], S. 32). Bei [NST94], S. 32 wird diese Gegebenheit als Lemma dargestellt, aus welchem hervorgeht, dass es eine Eins-zu-Eins-Beziehung zwischen Operationen einer Gruppe G auf einer Menge Ω und Repräsentationen von G als Permutationen von Ω gibt.

Definition 51 ([Sam17], S. 10 und [Fis17], S. 103). Eine Operation heißt treu, wenn der zugehörige Homomorphismus $\tau : G \rightarrow S(M)$ injektiv ist.

Bemerkung 52 ([Fis17], S. 103 & [NST94], S. 32). Jedes τ kann nach dem Ersten Isomorphiesatz (Satz 33) durch den Übergang zu $\bar{\tau} : G/\text{Ker } \tau \rightarrow \tau(G) < S(M)$ treu gemacht werden, da $\bar{\tau}$ dann injektiv ist.

Anwendung der vorangegangenen Begriffe auf die Permutationen der Cubies bzw. die Operation der Cube Group auf der Menge der beweglichen Cubies

Man kann sich nun Bem. 50 zu Nutze machen und beispielsweise für die Operation von M auf Γ betrachten, wie die Permutationen von Γ klassifiziert sind.

Lemma 53 ([NST94], S. 243). Die Gruppe aller Permutationen von Γ , die Ecksteine zwischen Ecksteinen sowie Kantensteine zwischen Kantensteinen permutieren, ist das direkte Produkt $S(\Gamma_c) \times S(\Gamma_e)$, welches mit man mit $S_8 \times S_{12}$ identifizieren kann.

Beweis. Γ ist eine Menge, $S(\Gamma_c)$ und $S(\Gamma_e)$ sind nach Def. 5 Gruppen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung. Nummeriert man jeden Eckstein und jeden Kantenstein durch (mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 8 bzw. von 1 bis 12), so geht $S(\{1, \dots, 8\})$ über in S_8 und $S(\{1, \dots, 12\})$ wird zu S_{12} im Sinne der Definition der Permutationsgruppe in Def. 6. Es handelt sich nach Definition 38 um ein direktes Produkt, wie man an der Überprüfung aller Voraussetzungen sehen kann. Zunächst sind S_8 und S_{12} Normalteiler der Permutationen von Γ (dass sie Untergruppen sind, ist klar, da es sich um Teilmengen der Permutationen von Γ handelt und S_8 sowie S_{12} als symmetrische Gruppen bereits die Eigenschaften für Untergruppen erfüllen (Abgeschlossenheit bzgl. Hintereinanderausführung)). Für die Normalteilereigenschaft wird am Beispiel von S_8 gezeigt, dass $aS_8a^{-1} \subseteq S_8$ für alle $a \in \Gamma$ gilt (also Bemerkung 27 ii) überprüft). Angenommen, $a \in S_8$ und S_8 ist wie oben erklärt die Gruppe der Permutationen aller acht Ecken. Dann wird a als auch a^{-1} in die Untergruppe S_8 absorbiert und es gilt klarerweise die geforderte Beziehung. Falls a (bzw. a^{-1}) nicht in S_8 (angewandt auf die acht Ecken) sind, so kann man a^{-1} auch vorziehen, da dieses Element nicht auf der Menge operiert, auf der S_8 wirkt, d.h. man darf sie vertauschen. Dann erhält man aber $aa^{-1}S_8 = S_8 \subseteq S_8$, da das Produkt aus einem Element aus den Permutationen von Γ mit seinem Inversen gerade der Identität auf Γ entspricht. In beiden Fällen konnte also die Normalteilereigenschaft nachgewiesen werden, und ein analoges Vorgehen bestätigt diese Eigenschaft ebenso für die Gruppe der Permutationen der Kanten S_{12} . Jetzt fehlen nur noch die einfacheren Bedingungen für das direkte Produkt aus Def. 38. Das Produkt von S_8 und S_{12} entspricht allen Permutationen von Γ . Denn einerseits sind beliebige Produkte bzw. Verknüpfungen von Elementen aus S_8 bzw. S_{12} in der Gruppe aller Permutationen von Cubies enthalten, andererseits lässt sich jede Permutation von Cubies (also Permutationen auf Γ , dem kartesischen Produkt der Ecken und Kanten) mithilfe von Permutationen der Ecken bzw. Kanten darstellen (also mithilfe von Produkten von S_8 und S_{12}). Dabei geht die triviale Beobachtung ein, dass aufgrund der Konstruktion des Zauberwürfels Ecken nur

an die Stellen von anderen Ecken und Kanten nur an die Stellen von anderen Kanten gebracht werden können. Aus den gerade beschriebenen Richtungen „ \subseteq “ und „ \supseteq “ kann man dann Gleichheit folgern. Zum Schluss ist auch klar, dass aufgrund der gerade beschriebenen Eigenschaften von Permutationen aller Cubies (mit den disjunkten Ecken- und Kantenmengen), nur die Identität im Schnitt beider Gruppen S_8 und S_{12} enthalten sein kann (also dass $S_8 \times S_{12} = \text{id}$) gilt. \square

Definition 54 (Permutationen von M auf Γ , [NST94], S. 243). *Die von M auf der Menge Γ erzeugte Permutationsgruppe wird mit P bezeichnet.*

Bemerkung 55. P ist wegen Def. 7 und Bemerkung 50 wohldefiniert. Weiterhin gilt $P \leq S_8 \times S_{12}$. Dies ist erfüllt, da es sich einerseits um eine Teilmenge des direkten Produkts handelt (klar, zwischen Operationen auf einer Menge und Permutationen derselben gibt es eine 1-zu-1-Beziehung, vgl. Bemerkung 49 und 50, und Moves können maximal sämtliche Permutationen der Ecken- und Kantensteine bewirken). Außerdem ist die Abgeschlossenheit aufgrund der Definition von M trivialerweise erfüllt, und für Permutationen aller Cubies sind zunächst keine weiteren Bedingungen zu überprüfen.

Für die weitere Beschreibung der Permutationen von Γ stellt es sich als hilfreich heraus, weitere Informationen über Zykel und Permutationen zu sammeln. Für einige Beweise werden allerdings Ergebnisse verwendet, die in identischer Form bereits aus den Grundvorlesungen bekannt sind.

Satz 56 ([Fis17], S. 109). *Ist $n \geq 3$, so gilt:*

- a) *Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist Produkt von Transpositionen.*
- b) *Jede Permutation $\sigma \in A_n$ ist Produkt von 3-Zyklen.*

Beweis. a) σ ist nach [Fis17], S. 108 f. Produkt von elementfremden Zyklen, und diese wiederum sind das Produkt von Transpositionen (vgl. ebd., S. 108, bzw. aus der Vorlesung Geometrie, Algebra und Zahlentheorie (im Folgenden abgekürzt mit GAZ)).

- b) Nach Voraussetzung ist $\text{sign } \sigma = +1$. Weiterhin ist $\text{sign } \tau = -1$, wenn τ eine Transposition ist (siehe [Fis17], S. 33) und σ muss das Produkt einer geraden Zahl von Transpositionen sein (vgl. ebd., S. 108). Zeigt man nun noch, dass jedes Produkt von zwei Transpositionen als Produkt von 3-Zyklen darstellbar ist, folgt die Behauptung. Dazu betrachtet man zwei Fälle:
 1. Die Transpositionen sind elementfremd, d.h. i, j, k, l für $n \geq 4$ sind paarweise verschieden: so folgt $(k, l) \circ (i, j) = (i, l, k) \circ (i, j, k)$.
 2. Andernfalls gilt $(i, k) \circ (i, j) = (i, j, k)$ für $n \geq 3$.

\square

Bemerkung 57 ([Fis17], S. 110). Ist $\sigma = \xi_1 \circ \dots \circ \xi_m \in S_n$ mit elementfremden Zyklen der Längen k_1, \dots, k_m , so gilt:

- a) $\text{sign } \sigma = (-1)^{k_1-1} \cdot \dots \cdot (-1)^{k_m-1}$.
- b) $\text{ord } \sigma = kgV(k_1, \dots, k_m)$.

Beweis. a) Wegen des Satzes aus [Fis17], S. 32 f. (das Signum ist ein Homomorphismus), ist bereits klar, dass das Signum multiplikativ ist. Außerdem wurde bereits gezeigt, welches Vorzeichen Zykeln der Länge $k_i, i = 1, \dots, m$ haben (nämlich $(-1)^{k_i-1}$, siehe ebd., S. 108 oder alternativ in der Vorlesung GAZ). Damit folgt die Behauptung.

b) Sei $k := \text{ord } \sigma$. Da die ξ_i vertauschbar sind (vgl. ebd.), folgt $k|kgV(k_1, \dots, k_m)$, denn es gilt: $(\xi_1 \circ \dots \circ \xi_m)^k = \xi_1^k \circ \dots \circ \xi_m^k$ und für jedes Vielfache von k_i ist $\xi_i^{k_i} = e$, also gilt für jedes gemeinsame Vielfache k auch $(\xi_1 \circ \dots \circ \xi_m)^k = e$. Aus $\sigma^k = id$ folgt auch $\xi_i^k = id$ für alle i , da die Faktoren elementfremde Zyklen sind. Also gilt auch $k_i|k$ und $kgV(k_1, \dots, k_m)|k$. Insgesamt folgt damit die Behauptung. \square

Definition 58 ([Fis17], S. 164). Ist G eine Gruppe, so heißt zu $a, b \in G$ das Element $[a, b] := aba^{-1}b^{-1} \in G$ der Kommutator von a und b .

Nun geht es wieder zurück zur Operation von M auf Γ :

Satz 59 ([NST94], S. 244). Seien X, Y zwei Basic Moves angrenzender Seiten des Rubik's Cubes. Dann operiert der Kommutator beider Basic Moves, namentlich $XYX^{-1}Y^{-1}$, als ein 3-Zykel auf Γ_e , d.h. er permutiert drei Kanten zyklisch und lässt die anderen neun Kanten unverändert. Weiterhin operiert $XYX^{-1}Y^{-1}$ als zweifache Transposition von Γ_c , indem er je zwei Paare von Ecken vertauscht und die anderen vier Ecken unverändert lässt.

Beweis. Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = R$ und $Y = U$ die vorgegebenen Basic Moves. Dann ist die zu den beiden Basic Moves gehörende Zykelschreibweise für die Eck- und Kantensteine (siehe Def. 8, beachte, dass die Notation der Moves von links nach rechts, die der Zykel allerdings wie üblich von rechts nach links gelesen wird):

$$\begin{aligned} RUR^{-1}U^{-1} &= (URF, UBR, ULB, UFL) \circ (URF, FRD, DRB, BRU) \\ &\quad \circ (URF, UFL, ULB, UBR) \circ (URF, BRU, DRB, FRD) \\ &= (URF, UBR, ULB, UFL) \circ (URF, FRD, DRB, BRU) \\ &\quad \circ (URF)(FLU, LBU, BRU, DRB, FRD) \\ &= (URF, UBR, ULB, UFL) \\ &\quad \circ (URF, FRD, UFL, ULB)(BRU)(DRB) \\ &= (URF, FRD)(BRU, ULB)(DRB)(UFL) \\ &= (URF, FRD)(BRU, ULB) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RUR^{-1}U^{-1} &= (UR, UB, UL, UF) \circ (RF, RD, RB, RU) \\ &\quad \circ (RF, RU, RB, RD) \circ (UR, UF, UL, UB) \\ &= (UR, UB, UL, UF) \circ (RF, RD, RB, RU) \\ &\quad \circ (RF, UF, UL, UB, RU, RB, RD) \\ &= (UR, UB, UL, UF) \\ &\quad \circ (RF, UF, UL, UB)(RU)(RB)(RD) \\ &= (RF, RU, UB)(RB)(RD)(UF)(UL) \\ &= (RF, RU, UB) \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich das Produkt zweier Paarvertauschungen von Ecksteinen. Daran kann man außerdem ablesen, dass der Kommutator von benachbarten Basic Moves auf die Kantensteine wirkt wie ein 3-Zykel dreier Kanten, während die anderen Kanten nicht permutiert werden.

Die Angabe „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ war erlaubt, denn selbst wenn man ein anderes Paar von Basic Moves, deren Seiten benachbart sind, oder eine andere Reihenfolge selbiger wählt, ergeben sich immer noch die oben beschriebenen Paarvertauschungen bzw. 3-Zykel. Dies folgt daraus, dass z.B. der Kommutator von U mit R , also $URU^{-1}R^{-1}$ gerade das Inverse des obigen Kommutators $RUR^{-1}U^{-1}$ darstellt, denn: $RUR^{-1}U^{-1}URU^{-1}R^{-1} = e$. So muss $[U,R]$ also die Permutationen, die $[R,U]$ auf der Menge der Kantensteine bzw. Ecksteine bewirken, rückgängig machen. Und dies sind ebenfalls wieder ein 3-Zykel von Kantensteinen und zwei Paarvertauschungen von Ecksteinen. \square

Um die Schreibweise bzw. die Definition 58 beibehalten zu können, beachte man hier noch den Hinweis darauf, dass es in der obigen Bemerkung keine Rolle spielt, ob man $aba^{-1}b^{-1}$ oder $a^{-1}b^{-1}ab$ als Kommutator definiert, da bis auf die Richtung in beiden Fällen 3-Zykel von Kantensteinen auftreten. In welche „Richtung“ man Paarvertauschungen betrachtet, ist offensichtlich egal, da die Hintereinanderausführung ein und derselben Paarvertauschung bereits wieder zum neutralen Element führt, d.h. diese haben Ordnung 2.

Korollar 60 ([NST94], S. 244). *$[X,Y]^2$ operiert auf Γ_e als 3-Zyklus und bringt die durch $[X,Y]^2$ vertauschten Ecksteine aus Γ_c wieder zurück, d.h. $[X,Y]^2 = \text{id}_{\Gamma_c}$, wobei dadurch noch nicht gesichert ist, dass auch die Orientierung der Ecksteine wieder dem Ausgangszustand entspricht. Dagegen bewirkt $[X,Y]^3$ auf Γ_c zwei Paarvertauschungen und liefert auf Γ_e die Identität.*

Beweis. Wegen Satz 59 ist bereits klar, dass $[X,Y]$ als 3-Zyklus der Kantensteine und als Paarvertauschung zweier Ecksteinpaare operiert. Aus der Aussage $\text{ord}(x_1, \dots, x_m) = m$ (beispielsweise aus der Vorlesung GAZ bekannt) ergibt sich, dass die Ordnung eines 3-Zyklus 3 beträgt. Also ist nach zweimaliger Durchführung des Kommutators auf die Kantensteine bezogen die Identität noch nicht erreicht, die Kantensteine wurden also nur erneut zyklisch vertauscht; nach dreimaliger Durchführung hingegen schon. Ähnlich läuft die Begründung für die Ecksteine ab, wobei hier nur zu berücksichtigen ist, dass wegen derselben Bemerkung die Ordnung von Paarvertauschungen gerade 2 beträgt, nach zweimaliger Anwendung des Kommutators liefert dieser die Identität auf Γ_c , bei der nächsten Anwendung hingegen erneut dieselbe Paarvertauschung wie der Kommutator selbst. \square

Satz 61 ([NST94], S. 244). *Die 3-Zykel, die aus den Kommutatoren benachbarter Basic Moves hervorgehen, erzeugen die Gruppe A_{12} aller geraden Permutationen von Γ_e , und die Paare von Transpositionen, die selbige Kommutatoren auf Γ_c bewirken, erzeugen die Gruppe A_8 der geraden Permutationen von Γ_c .*

Beweis. Dieser Beweis wird mit Hilfe von [Tra], S. 4 f. durchgeführt, in diesem ersten Abschnitt bezüglich der Kantensteine. Es wird verwendet, dass jede Permutation $\sigma \in A_n$ Produkt von 3-Zykeln ist (Satz 56). Umgekehrt liegt jeder 3-Zyklus in der alternierenden Gruppe, denn ein 3-Zyklus hat positives Signum ($(-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1$). Auch die Komposition mehrerer solcher 3-Zyklen ist in der alternierenden Gruppe, denn das Produkt von Permutationen mit positivem Signum hat wieder positives Signum (nach [Fis17], S. 32 f., das Signum ist ein Homomorphismus). Nun wird noch gezeigt, dass die Kommutatoren $[X, Y]$ von Basic

Moves angrenzender Seiten des Cubes alle möglichen Permutationen von Γ_e mit positivem Signum erzeugen. Startet man mit einem beliebigen 3-Zykel von Kantensteinen, z.B. aus $[R, U]$, wird klarerweise bereits A_3 erzeugt. Zusammen mit $[R, F]$ erzeugt man bereits A_5 , denn die beiden Kommutatoren haben genau ein Element gemeinsam. Das Produkt ist ein 5-Zykel. Man erhält daraus bereits ausreichend 3-Zykeln, die A_5 erzeugen, da man beide Kommutatoren und ihre Inversen zur Verfügung hat. Die Prozedur kann man mit einem weiteren Kommutator, z.B. mit $[R, D]$ fortsetzen und generiert damit A_7 . Nimmt man immer weitere Kommutatoren zur Hilfe, die mit den bestehenden Kommutatoren ein gemeinsames Element permutieren, kann man so ebenfalls noch A_9 und A_{11} erzeugen, durch einen letzten hinzugenommenen Kommutator, der mit den bisherigen zwei Elementen gemeinsam hat, erzeugt man dann mit allen bisherigen Kommutatoren der Form aus Satz 59 die alternierende Gruppe mit zwölf Elementen auf Γ_e .

Auf Γ_c operiert ein Kommutator der Form $[X, Y]$, wobei X, Y Basic Moves angrenzender Seiten sind, als Transposition zweier Ecksteinpaare, wie in Satz 59 gezeigt wurde. Eine einzelne Transposition ist eine ungerade Permutation, zwei Transpositionen, deren Elemente leeren Durchschnitt haben, wie es für den Kommutator $[X, Y]$ der Fall ist, sind damit eine gerade Permutation und liegen damit insgesamt in A_4 . [Tra], S. 5 folgend, nimmt man nun einen weiteren Kommutator obiger Form hinzu, der genau eine der vier vom ersten Kommutator permutierten Ecksteine bewegt. Dadurch generiert man wie im Falle der Kantensteine bereits eine größere alternierende Gruppe, in diesem Falle A_7 . Ein letzter Kommutator, der auch den letzten, achten verbliebenen Eckstein permutiert, generiert zusammen mit den bisherigen Kommutatoren bereits A_8 . \square

Nun kann man auch eine Aussage darüber treffen, wie groß die Gruppe P aus Definition 54 mindestens ist:

Korollar 62 ([NST94], S. 244). *Es gilt $A_8 \times A_{12} \leq P$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 61. \square

Satz 63 ([NST94], S. 244). *Es gilt $P \leq (S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$.*

Beweis. Im Beweis zu Satz 59 wurde bereits gezeigt und verwendet, dass ein einzelner Basic Move als ein 4-Zykel von Kantensteinen sowie Ecksteinen wirkt. Da 4 gerade ist, ist das Signum eines einzigen Basic Moves, bezogen auf die Ecksteine, $(-1)^{4-1} = -1$ und ein Basic Move damit eine ungerade Permutation der Ecksteine. Dasselbe Argument liefert aber auch die Aussage, dass ein einzelner Basic Move eine ungerade Permutation der Kantensteine ist. Da ein Basic Move auf Γ_e wie auch Γ_c jeweils eine ungerade Permutation bewirkt, können damit alle Permutationen von Γ_c und Γ_e erzeugt werden, wenn man dabei jeweils die andere Menge unbeachtet lässt. Betrachtet man dagegen beide Mengen Γ_c und Γ_e simultan als Γ , so lässt sich durch obige Aussage leicht feststellen, dass ein Basic Move auf Γ als gerade Permutation wirkt (Komposition elementfremder Zykeln mit jeweils gerader Länge und negativem Signum ergibt eine gerade Permutation mit positivem Signum). Daraus folgt bereits, dass P im Schnitt des direkten Produkts $S_8 \times S_{12}$ mit der alternierenden Gruppe A_{20} liegen muss und auf diese Weise dann die Behauptung. \square

Bemerkung 64 ([NST94], S. 244). *$(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$ beinhaltet damit alle Permutationen, die entweder auf Γ_e und Γ_c gerade oder auf Γ_e und Γ_c ungerade sind. Dementsprechend enthält $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$ die Untergruppe $A_8 \times A_{12}$ vom Index 2.*

Lemma 65 ([NST94], S. 244). *Die Gruppe P ist isomorph zu $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$ und enthält alle Permutationen von Γ , die auf Γ_c und Γ_e das gleiche Signum liefern. Die Ordnung von P ist $\frac{1}{2} \cdot 8! \cdot 12!$.*

Beweis. Die Isomorphie ist eine Folgerung aus Korollar 62, Satz 63 und Bemerkung 64. Mit einem Move wie $R U R' F' R U R' U' R' F R^2 U' R' U' \in P$ (genannt Jb-Permutation, tauscht UR und UF (ungerade Permutation auf Γ_e) sowie URF und UBR (ungerade Permutation auf Γ_c), siehe [The18], mit hinzugefügtem letzten Move U') deckt man zudem auch ab, dass ein Element aus $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$ ungerades mal ungerades Signum haben könnte, es sich aber nicht einfach nur um einen Basic Move handelt und jeweils nur die minimale Anzahl von zwei Cubies, je zwei Ecken und je zwei Kanten, vertauscht werden. Jedes Element aus $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$ kann damit von Elementen aus P erzeugt werden, wenn man Konjugationen zulässt, es gibt also eine Eins-zu-Eins-Zuordnung zwischen beiden Gruppen. Wie auch schon weiter oben wird davon ausgegangen, dass man die einzelnen Cubies durchnummernieren kann, sodass die Abbildung in $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$ gerechtfertigt ist. Später wird dazu auch noch eine konkrete Beschreibung angegeben, die an dieser Stelle allerdings noch nicht notwendig ist (vgl. „Beschreibung der *Construction Group / Illegal Cube Group* nach [Joy08]“). Zählt man alle Elemente aus S_n ab, erhält man als Ordnung der symmetrischen Gruppe über n Elementen gerade $\text{ord } S_n = n!$, denn für das erste Element sind n Plätze möglich, für das zweite nur noch $n - 1$ und so weiter, bis für das letzte, damit n -te Element nur noch ein möglicher Platz vorhanden ist (vgl. [Bos01], S. 12). Also gilt $\text{ord } S_n = n!$.

Wegen $S_n = A_n \cup \sigma A_n = A_n \cup A_n \sigma$ für jedes $\sigma \in S_n$ mit $\text{sign } \sigma = -1$ (vgl. [Fis17], S. 41), ist $\text{ord } A_n = \frac{n!}{2}$. Die Hälfte aller Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ ist gerade. Ebenso kann man argumentieren, dass nur die Hälfte aller möglichen Permutationen von $\Gamma_c \times \Gamma_e$ entweder gerade mal gerade, oder ungerade mal ungerade sind, also das gleiche Signum haben. Dies zeigt dann die Behauptung. \square

Bemerkung 66. Dabei zählt eine Permutation, die beispielsweise einen 3-Zykel auf Γ_c und die Identität auf Γ_e bewirkt, zu P , denn die Identität ist ein Zykel der Länge Null, es liegen keine Fehlstände vor, wodurch das Signum der Identität auch wieder $(-1)^0 = 1$ beträgt, also ist die Identität eine gerade Permutation. Ebenfalls gehört $\text{id}_{\Gamma_c} \cdot \text{id}_{\Gamma_e}$ aus demselben Grund zu P bzw. $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$.

Mit Lemma 65 sind die Permutationen der Cubies nun hinreichend beschrieben. Im nächsten Abschnitt geht es dann hingegen um die Orientierung der Cubies, was mit der Einführung einer weiteren Menge einhergeht.

2.3.2 Orientierungen der Cubies

Im vorherigen Abschnitt wurde betrachtet, wie die Permutationen von Γ beschaffen sind, wenn man die Gruppe M auf Γ operieren lässt. Nicht alle Elemente von M permutieren aber auch tatsächlich die Cubies untereinander, sondern fixieren diese bzw. verdrehen diese bloß im Vergleich zu ihrer originalen Position, lassen sie aber im Ganzen unpermutiert. Die Beschreibung solcher Elemente aus M ist nun Gegenstand dieses Abschnitts.

Definition 67 (Gruppe N [NST94], S. 244). *Der Kern der Abbildung $M \rightarrow S(\Gamma)$ bzw. von $\varphi : M \rightarrow P$, also der Kern der Operation von M auf Γ , ist die Gruppe N , die alle Cubies an ihren Positionen belässt, diese aber (bezogen auf die Ausgangsorientierung) möglicherweise in sich verdreht hat.*

Bemerkung 68 (N ist normal in M , [NST94], S. 244). N ist ein Normalteiler von M und es gilt $P \cong M/N$.

Beweis. N wurde als der Kern des Gruppenhomomorphismus $\varphi : M \rightarrow P$ definiert. Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist nach Lemma 28 bereits ein Normalteiler. Nach dem ersten Isomorphiesatz (Satz 33) folgt $P \cong M/N$, denn $N = \text{Ker } \varphi$, $\varphi : M \rightarrow P$ ist ein Homomorphismus zweier Gruppen, der nach Definition von P surjektiv ist. Außerdem erhält man noch die Aussage, dass $\bar{\varphi} : M/\text{Ker } \varphi \rightarrow \varphi(M)$, $a \cdot \text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(a)$ ein Isomorphismus ist. \square

Für eine weiterführende Betrachtung von N soll nun beschrieben werden, wie sich N auf die einzelnen Sticker bzw. Facets des Cubes auswirkt.

Definition 69 (Menge der Nicht-Mittelstück-Facets, [NST94], S. 245). Von den insgesamt $6 \cdot 9 = 54$ Stickern befinden sich 48 nicht auf einem Mittelstück und können dadurch von M permutiert werden. Die Menge dieser verbliebenen 48 Facets wird mit Ω bezeichnet.

Bemerkung 70 ([NST94], S. 245). 1) M operiert auf Ω als Gruppe der Permutationen von Ω . Die Operation ist treu.

2) Ω ist die disjunkte Vereinigung von Ω_c und Ω_e , wobei Ω_e die Facets bezeichnet, die auf Kantensteinen platziert sind, und Ω_c die Facets bezeichnet, die auf Ecksteinen platziert sind. Weiterhin gilt $|\Omega_c| = |\Omega_e| = 24$.

Beweis. 1) Der zugehörige Homomorphismus $\tau : M \rightarrow S(\Omega)$ ist injektiv, nur das neutrale Element der Gruppe fixiert alle Elemente der Menge Ω , d.h. der Kern von τ ist trivial und τ ist damit injektiv (siehe [Fis17], S. 28 f.). Nach Definition 51 ist die Operation von M auf Ω treu, was zu zeigen war.

2) Jeder Eckstein besitzt drei Facets und derer gibt es acht, sodass insgesamt 24 Facets auf Ecksteinen liegen. Pro Kantenstein aller zwölf Kantensteine liegen zwei Facets vor, sodass sich auch hier insgesamt 24 Facets ergeben. Ein Facet kann nicht gleichzeitig auf einem Kanten- und einem Eckstein liegen, sodass $\Omega = \Omega_c \dot{\cup} \Omega_e$ gilt. \square

Lemma 71 ([NST94], S. 245). Die Gruppe M hat zwei Bahnen in Ω , nämlich Ω_c und Ω_e .

Beweis. Ein (Compound) Move, also ein Element aus M bringt Kantensteinfacets zu Kantensteinfacets sowie Ecksteinfacets zu Ecksteinfacets, wobei jedes auf einem Eckstein liegende Facet zu einem beliebigen anderen Ecksteinfacet und jedes Kantensteinfacet zu einem beliebigen anderen Kantensteinfacet gebracht werden kann. Dies sieht man wie beim Beweis für die Bahnen der Cubies anhand mehrerer Tabellen. Man verwendet nun außerdem wieder die Notation aller Sticker aus Abbildung 2 und stellt dann fest, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit einem Facet beginnt, es zu jedem beliebigen anderen bringen kann und durch die Inversen der zugehörigen Moves auch jedes Facet zum Startfacet bringen kann. Dann ist es unter Zuhilfenahme des Umwegs über das ausgewählte Facet möglich, jedes Kantensteinfacet zu jedem anderen Kantensteinfacet zu bringen (für Ecksteinfacets analog). Der Übersichtlichkeit wegen wird für das Inverse eines Basic Moves hier X' anstatt X^{-1} , und für die zweifache Drehung $X2$ statt X^2 verwendet (in Anlehnung an die Konvention aus Abschnitt 2.2.1).

Ziel-Facet	Move $\in M$
1	e
3	U
6	U'
8	$U2$
9	$L U$
11	$U2 F'$
14	B
16	$B L'$
17	L
19	$L F$
22	$L F'$
24	$L F2$
25	$L U'$
27	B'
30	$U2 F$
32	$U B'$
33	$U2 R$
35	$B' U'$
38	$U R$
40	L'
41	$L2$
43	$L2 D$
46	$L2 D'$
48	$L2 D2$

Tabelle 10: Ecken-Sticker 1 zu bel.
anderen Ecken-Sticker
bringen

Start-Facet	Move $\in M$
1	e
3	U'
6	U
8	$U2$
9	$U' L'$
11	$F U2$
14	B'
16	$L B'$
17	L'
19	$F' L'$
22	$F L'$
24	$F2 L'$
25	$U L'$
27	B
30	$F' U2$
32	$B U'$
33	$R' U2$
35	$U B$
38	$R' U'$
40	L
41	$L2$
43	$D' L2$
46	$D L2$
48	$D2 L2$

Tabelle 11: Bel. Ecken-Sticker zu
Ecken-Sticker 1 bringen

□

Bemerkung 72 ([NST94], S. 245). Das Lemma 71 zeigt, dass die Operation von M auf Γ_c und Γ_e transitiv ist. Außerdem ist sie imprimitiv, wie es auch in [Sam17], S. 145 f. beschrieben wird, „da die drei Flächen einer Ecke einen Block bilden (bzw. die zwei Flächen einer Kante)“ (ebd.). Dabei ist ein Block von $f_{imprim} : M \rightarrow \Omega$ eine Teilmenge Δ der Menge Ω mit $1 < |\Delta| < |\Omega|$, auf der die Gruppe G operiert, für die gilt, dass für alle $g \in G$, die Mengen ${}^g\Delta$ und Δ entweder gleich oder disjunkt sind. Falls Blöcke existieren, nennt man die Operation imprimitiv, andernfalls primitiv (vgl. ebd., S. 9 & 16). In [NST94], S. 245 wird dies auch mit der Beobachtung in Verbindung gebracht, dass die Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Gamma$, die jedem Facet den zugehörigen Cubie zuordnet, ein M -Morphismus ist. Dieser setzt sich zusammen aus zwei M -Morphismen, die auf transitiven M -Mengen operieren, nämlich $f_c : \Omega_c \rightarrow \Gamma_c$, einer 3-zu-1-Abbildung, und $f_e : \Omega_e \rightarrow \Gamma_e$, einer 2-zu-1-Abbildung (vgl. ebd.). Bezogen auf den Cube ist ein Block also eine Ansammlung von Facets auf einem Cubie, die nicht gegen andere Facets ausgetauscht werden können. Man könnte auch sagen, die Facets sind, der Realität entsprechend, auf dem Cubie festgeklebt, und können nur im Ganzen

Ziel-Facet	$\text{Move} \in M$
2	e
4	U'
5	U
7	$U2$
10	$B L$
12	B
13	$B L2$
15	$B L'$
18	$U R' F'$
20	$U' L$
21	$U R'$
23	$U R' F$
26	$B' R'$
28	$B' R2$
29	B'
31	$B' R$
34	$U R B$
36	$U R$
37	$U' L'$
39	$U R B'$
42	$B2 D2$
44	$B2 D$
45	$B2 D'$
47	$B2$

Tabelle 12: Kanten-Sticker 2 zu bel.
anderen Kanten-Sticker
bringen

Start-Facet	$\text{Move} \in M$
2	e
4	U
5	U'
7	$U2$
10	$L' B'$
12	B'
13	$L2 B'$
15	$L B'$
18	$F R U'$
20	$L' U$
21	$R U'$
23	$F' R U'$
26	$R B$
28	$R2 B$
29	B
31	$R' B$
34	$B' R' U'$
36	$R' U'$
37	$L U$
39	$B R' U'$
42	$D2 B2$
44	$D' B2$
45	$D B2$
47	$B2$

Tabelle 13: Bel. Kanten-Sticker zu
Kanten-Sticker 2 bringen

permutiert oder orientiert werden. Die Ziel-Facets einer Gruppenoperation für einen Block als Menge der Start-Facets haben dementsprechend mit den Start-Facets keinen, oder alle Facets gemein. Dieses Wirkungsprinzip wird auch später noch einmal bei der Interpretation des Kranzproduktes auf den Cube angesprochen.

Die Construction Group als Hilfsmittel Nun wird über den Umweg einer größeren Gruppe Q und der Beschreibung von Kranzprodukten bestimmt, welchen Anforderungen die weiter oben eingeführten Gruppen M und N genügen müssen.

Definition 73 (Construction Group, [NST94], S. 245). *Die Gruppe aller Operationen auf der Menge aller Cubies, die man erhält, wenn man den Cube auseinander und beliebig wieder zusammenbaut (die "konstruierbare" Gruppe oder Construction Group, vgl. [Tra], S. 5), wird mit Q bezeichnet.*

Satz 74 (über die Construction Group, [NST94], S. 245 und [Tra], S. 5). *Für die Gruppe Q aus Definition 73 gilt:*

- a) $M \subseteq Q$
- b) $|Q| = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$
- c) $Q = Q_c \times Q_e$, wobei Q_c das willkürliche Auseinandernehmen und Zusammenbauen der Ecksteine, Q_e das willkürliche Auseinandernehmen und Zusammenbauen der Kantensteine bezeichnen. Hierbei ist $|Q_c| = 8! \cdot 3^8$ und $|Q_e| = 12! \cdot 2^{12}$.

Beweis. a) Hier ist nur kurz zu begründen, dass $M \subseteq Q$. Dies ist aber klarerweise gegeben, da sich jede Permutation der Cubies oder Facets, die mit M erreicht wurde, auch durch eine Aneinanderreihung von Elementen aus Q gewinnen lässt. Die Aussage für die umgekehrte Richtung wäre nicht richtig, da nicht jede Operation aus Q auch zwangsläufig eine mögliche, mit M erreichbare Permutation liefert. Die später erklärten Bedingungen an die Orientierung der Cubies, oder auch schlichtweg die Verletzung der Eigenschaft aus Lemma 65, indem man "von Hand" die Cubies so zusammensetzt, dass sie auf Γ_c und Γ_e unterschiedliches Signum liefern, liegen zwar in Q , aber nicht mehr in M . Dazu müsste man nur beispielsweise zwei Ecken oder zwei Kanten tauschen, ohne dabei noch andere Tauschvorgänge vorzunehmen. M ist offenbar nicht-leer und es gilt $ab^{-1} \in M$ für beliebige $a, b \in M$ (M ist nach Def. 2.3 eine Gruppe, die bereits die Gruppenaxiome erfüllt). Schließlich greift das Lemma aus [Fis17], S. 11, woraus die Behauptung folgt.

- b) Zunächst wird die Behauptung nur aus kombinatorischen Ansätzen hergeleitet, alternativ kann man auch mit der zuvor bewiesenen Aussage aus c) zum selben Ergebnis kommen. Mit besagten kombinatorischen Argumenten betrachtet man, auf wieviele Weisen alle Ecken und alle Kanten platziert und dann an ihren jeweiligen Plätzen orientiert werden können. Das Produkt all jener einzelnen Möglichkeiten ergibt dann die Gesamtzahl an möglichen Kombinationen zum Auseinander- und Zusammenbauen. Für die Ecken gilt, dass jede einzelne Ecke in drei möglichen Orientierungen vorliegen kann. Für die Permutationen gilt, dass für die erste Ecke acht Möglichkeiten, für die zweite nur noch sieben Plätze möglich sind. Angewandt auf alle acht Ecken ergibt sich $8!$ als Anzahl aller frei wählbaren Permutationen der Ecken mit Operationen aus Q (vgl. [Tra], S. 5). Die zwölf Kanten können untereinander auf $12!$ verschiedene Weisen angeordnet bzw. permutiert werden, und für jede einzelne gibt es zwei verschiedene Orientierungen. Insgesamt führt dies auf die Behauptung $|Q| = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$.
- c) Geht man wie in der Behauptung vorgeschlagen davon aus, dass Q als Gruppe bereits bekannt ist, so muss man Definition 38 zum Beweis heranziehen. Im einzelnen wird dazu gefordert, dass Q_e und Q_c Untergruppen von Q und außerdem Normalteiler sind. Zusätzlich müsste $Q_e \cdot Q_c = Q$ und $Q_e \cap Q_c = \{e\}$ gelten.

Q_e und Q_c sind klarerweise Untergruppen von Q , sie sind einerseits Teilmengen von Q und weiterhin kann man schnell sehen, dass die Gruppenaxiome vererbt werden: Produkte und Inverse von Elementen aus entweder Q_e oder Q_c sind wieder in der jeweiligen Menge enthalten, und die Assoziativität bei der Hintereinanderausführung ergibt sich aus der Assoziativität bei Permutationen der Kanten- bzw. Ecksteine untereinander und von einander unabhängigen zyklischen Permutationen einzelner Cubies. Einfacher ginge der Nachweis der Assoziativität auch über die Aussage, dass diese für Abbildungen generell bereits gegeben ist (vgl. [Fis17], S. 19).

Für die Normalteilereigenschaft reicht es aus, die linken und rechten Nebenklassen der jeweiligen Untergruppen auf Identität zu überprüfen (vgl. die beiden Definitionen 21 und

26). Hier soll nun die gleichwertige Bedingung aus Bemerkung 27 iii) gezeigt werden, die sich stattdessen auf die Konjugation (vgl. Def. 19) des potentiellen Normalteilers mit Elementen aus Q bezieht. Für jeweils Q_e und Q_c ist die Konjugation mit einem Element der Gruppe Q wieder in den jeweiligen Untergruppen enthalten. Am Beispiel von Q_e kann eine Fallunterscheidung durchgeführt werden: wäre für aQ_ea^{-1} das Element $a \in Q \setminus Q_e = Q_c$, so spielen sich die Operationen a und a^{-1} auf der einen Menge ab (bzw. der, auf der Q_c operiert), die Operationen aus Q_e aber in der zu Q_c disjunkten Menge Q_e . In diesem speziellen Fall sind die Operationen unabhängig voneinander anzusehen. Eine Umordnung zu $aa^{-1}Q_e = Q_e$ liefert dann aber wieder Q_e selbst, sodass mit Bemerkung 27 die Behauptung für diesen ersten Fall folgt. Im zweiten Fall, dass das aus Q ausgewählte Element a gleichzeitig auch in Q_e selbst liegt, liegt auch a^{-1} in Q_e . Da Q_e eine Untergruppe von Q ist, ist auch die Komposition eines beliebigen Elementes von Q_e und a^{-1} wieder Element von Q_e . Gleiches gilt auch für $aQ_e \subseteq Q_e$. Insgesamt erhält man hier zumindest die etwas schwächere Bedingung aus Bem. 27 ii), die aufgrund selbiger Bemerkung aber auch äquivalent zur Aussage „ Q_e ist invariant unter allen Konjugationen“ ist (Teil iii)). Also wurde die Aussage in beiden Fällen für das oben ausgewählte Beispiel Q_e bewiesen. Auf analoge Weise kann der Beweis aber auch für Q_c durchgeführt werden.

Die Bedingung $Q_e \cdot Q_c = Q$ ist erfüllt, da sich einerseits jedes Element aus Q durch ein Produkt von Elementen aus Q_e und Q_c darstellen lässt („ \supset “) und andererseits jedes Produkt von Q_e und Q_c in Q enthalten ist („ \subset “). Aus beiden Ungleichungen folgt die Mengengleichheit.

Schließlich gilt auch $Q_e \cap Q_c = \{e\}$, da die Mengen, auf denen die beiden Untergruppen operieren, disjunkt sind, und es deshalb nur eine Abbildung auf ganz Q gibt, die in beiden Untergruppen enthalten ist, nämlich die identische Abbildung.

Die soeben gezeigten Aussagen führen insgesamt auf $Q = Q_e \times Q_c$, also ist Q das direkte Produkt von Q_e und Q_c . Wieder kann mit kombinatorischen Argumenten auf die Ordnung der beteiligten Untergruppen geschlossen werden: acht Ecken können auf acht Plätze verteilt werden. Jeder Platz wird von genau einem Cubie eingenommen, woraus sich wie im Beweis zu b) genau $8!$ Möglichkeiten für Permutationen der Ecken untereinander ergeben. Jede der Ecken kann für sich ohne Einschränkungen um Vielfache von $\frac{2\pi}{3}$ gedreht werden, weshalb sich pro Ecke drei Orientierungen ergeben. Analog werden 12 Kanten auf 12 eindeutig zu belegende Plätze verteilt, die sich jeweils um Vielfache von π in sich drehen können. So folgt einerseits $|Q_e| = 12! \cdot 2^{12}$ und andererseits $|Q_c| = 8! \cdot 2^8$. Nun kann die rein kombinatorische Überlegung im Beweis zu b) auch dadurch bestätigt werden, dass c) gilt. Mit Satz 41 ist dann auch jedes Element aus Q eindeutig als Produkt von Elementen aus Q_e und Q_c darstellbar. Aus diesem Grund, der Eins-zu-Eins-Zuordnung (Bijektivität / Isomorphismus von $Q_e \times Q_c$ nach Q), stimmt dann auch die Ordnung von Q mit der Ordnung von $Q_e \cdot Q_c$ überein, also $|Q| = |Q_e| \cdot |Q_c| = 12! \cdot 2^{12} \cdot 8! \cdot 3^8$.

□

Im Anschluss an den vorangegangenen Satz 74 stellt sich die Frage, ob man nicht auch die Struktur von Q_e und Q_c näher beschreiben kann. Aus der Ordnung der beiden (Unter-)Gruppen kann man bereits darauf schließen, dass zwei verschiedene Typen von (Permutations-) Gruppen Anwendung finden. Da die bisherigen Begriffe noch nicht hinreichend zur Beschreibung sind, werden nun noch weitere Hilfsmittel angeführt:

Lemma 75 (zur zyklischen Gruppe, [Sam17], S. 1). *Die zyklische Gruppe G , die nur aus Potenzen von x besteht, ist abelsch.*

Beweis. Zur Überprüfung kann man das Produkt zweier Elemente $a, b \in G$ betrachten: $ab = x^n x^m = x^{n+m} = x^m x^n = ba$. Offensichtlich spielt die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle und die Gruppe ist damit abelsch. \square

Definition 76 (elementarabelsch, [Sam17], S. 23). *Eine abelsche Gruppe E heißt elementarabelsch p -Gruppe, falls eine Primzahl p mit $x^p = 1$ für alle $x \in E$ existiert.*

Lemma 77 (Z_p ist elementarabelsch). *Zyklische Gruppen von Primzahlordnung p sind elementarabelsch p -Gruppen.*

Beweis. In einer zyklischen Gruppe der Primzahlordnung p hat jedes nichttriviale Element die Ordnung p , da p eine Primzahl ist und die Elementordnung nach dem Satz von Lagrange (Satz 23) die Gruppenordnung teilen muss. Dass zyklische Gruppen abelsch sind, wurde bereits in Lemma 75 gezeigt. Daraus folgt dann die Behauptung. \square

Bemerkung 78 (zur Wirkungsweise von Q_e und Q_c , [NST94], S. 245 f.). Für die Gruppen Q , Q_c und Q_e gelten die folgenden Aussagen:

- a) Q_c operiert auf Γ_c wie S_8 .
- b) Der Kern der Operation von Q_c auf Γ_c , bezeichnet mit K_c , ist das achtfache direkte Produkt von Z_3 . K_c ist elementarabelsch 3-Gruppe.
- c) Q_e operiert auf Γ_e wie S_{12} .
- d) Der Kern der Operation von Q_e auf Γ_e ($=: K_e$) ist das zwölffache direkte Produkt von Z_2 . K_e ist eine elementarabelsch 2-Gruppe.

Beweis. a) (und c)) Dies ist offensichtlich erfüllt, da sich die Ecken bzw. Kanten durchnummerieren lassen und Q_c bzw. Q_e alle Permutationen der so durchnummerierten Elemente zulassen, was den bijektiven Selbstabbildungen der Ecken- bzw. Kantenmenge entspricht (vgl. die beiden Definitionen 5 und 6).

- b) (und d)) Jede Ecke kann für sich um $0, \frac{2\pi}{3}$ oder $\frac{4\pi}{3}$ rotiert werden, ohne die Permutation auf der Menge Γ_c zu verändern (vgl. [NST94], S. 245). Offenbar ist diese Beschreibung des Kerns äquivalent zur Beschreibung als $(Z_3)^8$ bzw. $\underbrace{Z_3 \times \dots \times Z_3}_{8\text{-fach}}$. Darin ist jeder

einzelne Faktor ein Normalteiler (Untergruppe und Invarianz unter Konjugation mit Element aus der Gruppe, siehe Def. 26 und Bem. 27). Da die jeweiligen zyklischen Gruppen allesamt auf unterschiedlichen Mengen operieren, nämlich der Facetmenge einer der acht Ecken, ist auch die Beschreibung als direktes Produkt gerechtfertigt (vgl. Def. 40 und Satz 41). Nach Lemma 77 ist eine zyklische Gruppe mit Primzahlordnung elementarabelsch, und bei den hier betrachteten Gruppen ist die Gruppenordnung entweder 2 oder 3, also prim. Der Kern obiger Abbildung ist direktes Produkt von abelschen Gruppen, worin die Gruppenverknüpfung (die Hintereinanderausführung) komponentenweise vorgenommen wird. Dementsprechend ist auch das direkte Produkt genau dann kommutativ, wenn die Faktoren und damit die einzelnen Komponenten es sind (vgl. Satz 41 und Satz 35). Da in diesem Fall zusätzlich alle Faktoren in ihrer

Struktur identisch sind (also bis auf Isomorphie gerade der zyklischen Gruppe mit drei Elementen entsprechen), wobei in den einzelnen Faktoren bereits jedes nichttriviale Element Ordnung 3 besitzt, muss dies auch für das direkte Produkt gelten. Damit erhält man die Aussage, dass K_c elementarabelsche 3-Gruppe ist (siehe Definition 76). In analoger Weise erhält man die Aussage für die Kanten, wobei der Kern hier aus Rotationen der einzelnen Kanten um 0 oder π besteht, woraus sich die Isomorphie zu $\underbrace{Z_2 \times \dots \times Z_2}_{12\text{-fach}} = (Z_2)^{12}$ ergibt (vgl. [NST94], S. 245 f.). Mit denselben Argumenten wie oben liefert dies die Aussage, dass K_e eine elementarabelsche 2-Gruppe ist.

□

Wie die Gruppe Q insgesamt beschaffen ist, soll nun eine Reihe von Aussagen zeigen. Hier erfolgt nun auch die Einführung des Kranzprodukts, welches sich als das beschreibende Konstrukt für Q_e und Q_c und damit auch Q herausstellen wird.

Definition 79 (Kranzprodukt, [NST94], S. 92 f., [Mel95], S. 3 f.). *Seien G und H zwei Permutationsgruppen, die auf den endlichen Mengen Γ und Δ operieren. Dann ist das Kranzprodukt $G \wr H$ definiert als die Gruppe der Permutationen t der Menge $\Gamma \times \Delta$, für die gilt, dass*

$$t : (\gamma, \delta) \mapsto (\gamma g_\delta, \delta h),$$

wobei $g_\delta \in G$ und $h \in H$. Weiter soll mit G^Δ das mit Δ durchnummerierte direkte Produkt von Kopien von G bezeichnet werden. Ein Element von G^Δ kann dann als eine Funktion von Δ nach G beschrieben werden, wobei dies als Umindizierung interpretiert werden kann. Die Wirkung von H auf G^Δ mit $f \in G^\Delta$ wird beschrieben durch $f^h(\delta) = f(\delta h^{-1})$, $\delta \in \Delta$, $h \in H$ (andere Schreibweise dafür wie in [NST94], S. 92: g_δ , dies wurde z.B. in obiger Abbildung verwendet). Bleibt man hingegen bei der Schreibweise von [Mel95], so lautet die das Kranzprodukt beschreibende Gleichung

$$(\gamma, \delta)(fh) = (\gamma f(\delta), \delta h), \quad f \in G^\Delta, h \in H$$

Definition 80 (alternative Definition des Kranzproduktes, [Joy08], S. 195). Aufgrund der obigen definierenden Eigenschaften des Kranzproduktes kann jenes aber auch als ein spezielles semidirektes Produkt aufgefasst werden (entspricht der Definition aus [Joy08], S. 195):

$$G \wr H = G^\Delta \rtimes H$$

Bemerkung 81 (zum Kranzprodukt, [Mel95], S. 3 f.). Die Gruppe G aus Definition 79 wird auch *bottom group*, die Gruppe H *top group* und die Gruppe G^Δ auch *base group* genannt, um das Wirkungsprinzip des Kranzproduktes auf dem kartesischen Produkt $\Gamma \times \Delta$ zu illustrieren. So greift die Permutationsgruppe H „von oben“ auf die Basis G^Δ , bestehend aus den zugrundeliegenden $|\Delta|$ Permutationsgruppen G , zu.

Ein Beispiel für das soeben eingeführte Objekt ist die verallgemeinerte symmetrische Gruppe, die gleichzeitig bei der Beschreibung der Construction Group und der Cube Group Anwendung findet.

Definition 82 (verallgemeinerte symmetrische Gruppe, [Joy08], S. 194). *Sei Z_d die zyklische Gruppe der Ordnung d , aufgefasst als Menge $\{0, 1, \dots, d - 1\}$ mit der Addition modulo d als Verknüpfung und $N = Z_d^n$ das n -fache direkte Produkt der zyklischen Gruppe, aufgefasst*

als Vektor mit n Komponenten. Sei ferner S_n die symmetrische Gruppe von n Elementen. S_n operiere auf Z_d^n als Vertauschung der Indizes. Mit $f \in S_n$ werde ein Homomorphismus $f^* : Z_d^n \rightarrow Z_d^n$ wie folgt definiert: $f^*(v) = P(f^{-1})v^t$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in Z_d^n$. Das semidirekte Produkt $Z_d^n \rtimes S_n$ wird dann mit folgender Verknüpfung definiert:

$$(p, v) \cdot (q, w) = (pq, w + q^*(v))$$

(alternative Schreibweise: $(\vec{v}, p) \cdot (\vec{w}, q) = (\vec{w} + q^*(\vec{v}), pq)$)

Dabei bezeichnet $P(f)$ die zur Permutation gehörende Permutationsmatrix.

Die verallgemeinerte symmetrische Gruppe ist also ein Kranzprodukt, passend zur alternativen Definition 80. Die *base group* besteht in diesem Fall aus Z_d^n , die bottom group ist Z_d und die top group ist S_n . Die weiter oben beschriebenen Gruppen Q_e und Q_c können jeweils als verallgemeinerte symmetrische Gruppe, bzw. als Kranzprodukt beschrieben werden.

Bemerkung 83 (zur Beschreibung der Construction Group mit Kranzprodukten, [Joy08], S. 223 und [NST94], S. 246). Für die beiden Gruppen Q_e und Q_c als direkte Faktoren der Construction Group Q gilt: $Q_e \cong Z_2 \wr S_{12}$ und $Q_c \cong Z_3 \wr S_8$. Damit ergibt sich weiterhin $Q \cong (Z_3 \wr S_8) \times (Z_2 \wr S_{12})$. Dieses Ergebnis wird nach einer weiteren Bemerkung zur Interpretation und der Einführung zusätzlicher Notation begründet, da [NST94] im Gegensatz zu [Joy08] hierzu nur die Aussage, aber noch keinen Beweis angibt (siehe Beweis zu Satz 87).

Bemerkung 84 (Interpretation des Kranzprodukts). Weiter oben wurde bereits beschrieben, dass durch Bewegungen einzelne Cubies blockweise vertauscht werden können, bzw. dass die Operation von M , aber auch von der hier beschriebenen Gruppe Q auf der Menge der Facets imprimitiv ist (vgl. Bemerkung 72). Nun beschreibt das Kranzprodukt, wie die dort angesprochenen Blöcke untereinander aber auch in sich selbst permutiert werden können. Bei [Sin81], S. 59 wird die Operation des Kranzproduktes auf den „orientierten Objekten“ wie folgt beschrieben: für ein Objekt, welches an die j -te Position bewegt wird, wird der j -te Orientierungswechsel auf die Orientierung i angewandt, um die neue Orientierung an der Stelle j zu erhalten. Die neue Orientierung ist demnach nicht nur abhängig von der vorherigen Orientierung des Objekts, welches an die betrachtete Stelle gebracht wird, sondern auch vom mit der Permutation verbundenen Orientierungswechsel.

Beschreibung der Construction Group / Illegal Cube Group nach [Joy08] Oben wurde bereits erwähnt, dass mit zusätzlicher Notation auch eine Rechtfertigung für Bem. 83 gegeben werden kann. Dies soll an dieser Stelle nun nachgeholt werden. Q wird bei [Joy08] mit *Illegal Rubik's Cube Group* bezeichnet (vgl. ebd., S. 196, 221). Zunächst wird eine Ausgangsorientierung aller Facets (Menge Ω) und eine Ausgangspermutation aller Cubies (Menge Γ) angegeben, die als Referenz für sämtliche Operationen, die die Gruppe Q auf beiden Mengen bewirkt, dienen soll.

Die Kanten:

Orientierungen Auf jede Kante wird genau ein Symbol, beispielsweise ein „+“, angebracht, um die jeweilige Orientierung zu kennzeichnen. Wo dies geschieht, ist an sich bis auf Symmetrie willkürlich, im Einklang mit [Joy08], S. 220 soll dies wie folgt geschehen: für die nachfolgend genannten Kanten befindet sich das „+“ jeweils immer auf dem Facet, welches in der Bezeichnung des Cubies zuerst genannt wird. Die Cubies wiederum werden wie in der

Tabelle 3 bezeichnet. Dann befinden sich die „+“ Symbole auf den Kanten DL, DB, LF, LU, BL, BU, UF, UR, RB, RD, FR, FD.

Permutationen Um außerdem jedem Kantenstein auch eine Zahl zuordnen zu können (dies wird benötigt für die Identifikation der Kantenmenge mit der Menge $\{1, \dots, 12\}$), liegt die Ausgangspermutation in folgender Reihenfolge vor, wobei die Position in der Reihenfolge gerade dem i -ten Element obiger Menge entspricht: UF, UR, UB, UL, LF, FR, RB, BL, DF, DR, DB, DL (ohne Beachtung der Orientierung, ausschließlich zur Bezeichnung der Gesamt-Cubies).

Die Ecken:

Orientierungen Das Prinzip der Festlegung der Ausgangsorientierung wird von den Kanten übernommen. Hier befinden sich die „+“ Symbole dann auf den folgenden Ecken (auf dem Facet an erster Stelle, beachte die Bezeichnung der Cubies in Tab. 4): URF, UBR, ULB, UFL, DFR, DRB, DBL, DLF. Das sind gerade die Facets, die auf der Up- bzw. Down-Layer sichtbar sind.

Permutationen Hier ist die Reihenfolge der Ecksteine in der Ausgangspermutation die folgende, wieder ohne Beachtung der Orientierung: DFR, DRB, FUR, RUB, LUF, BUL, DBL, DLF.

Definition 85 (Homomorphismen der Construction Group, [Joy08], S. 221 f.). *Mit $\rho : Q \rightarrow S_c$ werde der Homomorphismus bezeichnet, der jedem Element aus Q die zugehörige Permutation auf der Menge der Ecken zuordnet, also ein Element aus der symmetrischen Gruppe über Γ_c . Analog bezeichne $\sigma : Q \rightarrow S_e$ den Homomorphismus von der Construction Group in die symmetrische Gruppe über Γ_e . Weiter sei $\vec{v} : Q \rightarrow Z_3^8$ die Zuordnung eines Orientierungswechsels eines jeden Ecksteins im Bezug auf die Referenzmarkierung, wenn ein Element $q \in Q$ angewandt wird und $\vec{w} : Q \rightarrow Z_2^{12}$ die analoge Bezeichnung für die Orientierungswechsel der Kanten.*

Lemma 86 (Hintereinanderausführung von Elementen aus Q und ihre Wirkung auf die Orientierungen, [Joy08], S. 222 f.). *Für die in Def. 85 angesprochenen Vektoren zur Beschreibung der Orientierungswechsel gelten bei Hintereinanderausführung zweier Elemente aus Q , namentlich g und h , folgende Zusammenhänge:*

$$\begin{aligned}\vec{v}(gh) &= \vec{v} + \rho(g)^{-1}(\vec{v}(h)) \quad \text{und} \\ \vec{w}(gh) &= \vec{w} + \sigma(g)^{-1}(\vec{w}(h)).\end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis wird hier am Beispiel der Ecken durchgeführt, wobei sich dieser analog auf die Kanten übertragen lässt. Die Hintereinanderausführung gh permutiert nach Definition die Ecken mittels $\rho(gh)$ und orientiert den i -ten Eckstein mit $v_i(gh)$, wobei v_i die i -te Komponente von \vec{v} ist (bzw. analog für $\sigma(gh)$, $w_i(gh)$ und $\vec{w}(gh)$). Der Definition zufolge operiert zunächst g , dann h (beachte, dass hier von der üblichen Konvention abgewichen wird, und die Reihenfolge der Abbildungen von links nach rechts gelesen wird, wie in der Notation für Algorithmen üblich). So bewirkt g eine Neuorientierung des i -ten Ecksteins um $v_i(g)$ und eine Permutation nach $\rho(g)(i)$ (bzw. um $w_i(g)$ für die Orientierung der Kanten und $\sigma(g)(i)$ als Ergebnis der Permutation des i -ten Kantensteins). h muss dann im Anschluss auf die bereits erfolgte Permutation und Orientierung angewandt werden. Vernachlässigt man den ersten Orientierungswechsel und möchte nur den im Anschluss stattfindenden Orientierungswechsel von h betrachten, kann man für den Moment $\vec{v}(g)$ von $\vec{v}(gh)$ (bzw. $\vec{w}(g)$

von $\vec{w}(gh)$) subtrahieren. Um Kollisionen mit der bisherigen Notation zu vermeiden, wird nun angesprochen, wie sich h auf die Orientierung des j -ten Ecksteins (bzw. Kantensteins) auswirkt. Wie oben für g wird der j -te Eckstein dann um $v_j(h)$ orientiert und mit $\rho(h)(j)$ permutiert (analog für die Kanten: $w_j(h)$ und $\sigma(h)(j)$). Die Position j an dieser Stelle wurde aber im Vergleich zum Ausgangscube bereits permutiert, nämlich von $\rho(g)$ (bzw. $\sigma(g)$). Das heißt, dass der (nun wieder in der Ursprungsnotation) i -te Eck- (bzw. Kantenstein) per h um $v_{\rho(g)^{-1}(i)}(h)$ (bzw. $w_{\sigma(g)^{-1}(i)}(h)$) orientiert wird. Nun kann auch der ursprüngliche Orientierungswechsel durch g wieder hinzugefügt werden, um als den gesamten Orientierungswechsel des i -ten Cubies ($1 \leq i \leq 8$ für die Ecken, $1 \leq i \leq 12$ für die Kanten) folgendes Resultat zu erhalten:

$$\begin{aligned} v_i(gh) &= v_i(g) + v_{\rho(g)^{-1}(i)}(h) \\ w_i(gh) &= w_i(g) + w_{\sigma(g)^{-1}(i)}(h) \end{aligned}$$

Aufgrund der Vektorgestalt folgt dann die Aussage für die Vektoren \vec{v} und \vec{w} . \square

Hier sei zudem angemerkt, dass die Verknüpfung in ρ die Addition mod 3 (Ecken), und in σ die Addition mod 2 ist. Die etwaig als Produkt verstandenen Verknüpfungen in den Definitionen des semidirekten Produkts und des Kranzproduktes werden dadurch nicht verletzt und haben für die weitere Beschreibung weiterhin Bestand. Die Schwierigkeit in der Notation lässt sich jedoch aufgrund der komponentenweisen Addition innerhalb der Vektoren \vec{v} und \vec{w} nicht vermeiden.

Satz 87 (Isomorphie von Q zum direkten Produkt zweier Kranzprodukte, [Joy08], S. 223). *Fasst man Elemente aus Q zunächst als Elemente von $Z_3^8 \times S_c \times Z_2^{12} \times S_e$ auf, wobei S_c für die bijektiven Selbstabbildungen der Eckenmenge, S_e für die bijektiven Selbstabbildungen der Kantenmenge steht, und die Verknüpfung zweier Elemente q und q' aus Q wie folgt definiert ist:*

$$q \cdot q' = (\vec{v}, \rho, \vec{w}, \sigma) \cdot (\vec{v}', \rho', \vec{w}', \sigma') = (\vec{v} + P(\rho)(\vec{v}'), \rho\rho', \vec{w} + P(\sigma)(\vec{w}'), \sigma\sigma'),$$

so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : Q &\rightarrow (Z_3^8 \rtimes S_c) \times (Z_2^{12} \rtimes S_e) \\ q &\mapsto (\vec{v}(q), \rho(q), \vec{w}(q), \sigma(q)) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus, d.h. es gilt $Q \cong (Z_3^8 \rtimes S_c) \times (Z_2^{12} \rtimes S_e)$, wobei dies außerdem zur Gruppe $(Z_3^8 \rtimes S_8) \times (Z_2^{12} \rtimes S_{12})$ isomorph ist.

Beweis. Für das Produkt zweier Elemente aus Q gilt (beachte dazu Lemma 86):

$$\begin{aligned} &(\vec{v}(g), \rho(g), \vec{w}(g), \sigma(g)) \cdot (\vec{v}(h), \rho(h), \vec{w}(h), \sigma(h)) \\ &= (\vec{v}(g) + P(\rho(g))(\vec{v}(h)), \rho(g)\rho(h), \vec{w}(g) + P(\sigma(g))(\vec{w}(h)), \sigma(g)\sigma(h)) \end{aligned}$$

Dies erfüllt bereits die Homomorphismeneigenschaft, da die Verknüpfung in der zweiten Zeile obiger Gleichung gerade der Verknüpfung in der Definition des Kranzproduktes (bzw. semidirekten Produktes) entspricht (vgl. die Definitionen 34, 79 und 82). Da sich jede Orientierung und jede Permutation mit einem Element aus Q erreichen lässt, ist ι surjektiv. Andererseits besteht der Kern nur aus dem neutralen Element und ist damit trivial (wenn man weder permutiert noch umorientiert, bewirkt dies die Identität auf $(Z_3^8 \rtimes S_c) \times (Z_2^{12} \rtimes S_e)$, woraus

folgt, dass ι auch injektiv ist. Dies zusammen mit den früher gezeigten Eigenschaften von ι führt in Konsequenz dazu, dass ι ein Isomorphismus ist. Die zweite Isomorphie ist trivial, da sich die Cubies eindeutig nummerieren lassen, beispielsweise wie zu Beginn dieses Abschnitts (vgl. „Beschreibung der *Construction Group / Illegal Cube Group* nach [Joy08]“). \square

Anwendung der Erkenntnisse über Q auf N Mit dem Wissen über Q kann man nun auch weitergehende Aussagen über N , bzw. N_c und N_e , machen:

Definition 88 (N_c und N_e , [NST94], S. 246). *Mit N_c werden die Permutationen bezeichnet, die von N auf Ω_c induziert werden. Analog besteht N_e aus allen Permutationen von Ω_e , die sich mit N erreichen lassen. N_c sind also all diejenigen Elemente aus M , die maximal die Orientierung der Kanten ändern, aber keine Permutation vornehmen, und N_e besteht aus Elementen von M , die höchstens die Orientierung der Ecken ändern, ohne zu permutieren.*

Bemerkung 89 (zu N_e und N_c , [NST94], S. 256). Es gilt $N_c \leq K_c$ und $N_e \leq K_e$, da es sich jeweils um Teilmengen handelt, für die eine Hintereinanderausführung wieder in besagten Teilmengen endet. Mit der Übertragung der Struktur gilt dann auch, dass N_e elementarabelsch der Ordnung 2, N_c elementarabelsch der Ordnung 3 ist (siehe auch Def. 76).

Satz 90 (N ist direktes Produkt, [NST94], S. 246). *Für N gilt $N = N_e \times N_c$.*

Beweis. Anhand der Definition 38 wird nachgeprüft, dass N tatsächlich ein direktes Produkt aus N_e und N_c ist. Offensichtlich ist der Schnitt von N_e mit N_c nur die Identität, und das Produkt der beiden ergibt die Gruppe N (jede Orientierung von Ω kann durch Wirkung von N_e und N_c erzeugt werden, und ein beliebiges Element des Produkts $N_e \cdot N_c$ ist in N enthalten). Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass N_e und N_c Normalteiler von N sind. Einerseits muss dazu erst einmal die Untergruppeneigenschaft erfüllt sein. Dies ist aber für beide Gruppen jeweils gegeben, sie sind einerseits Teilmengen (und operieren auf Teilmengen von Ω , nämlich Ω_e und Ω_c). Andererseits sind sie jeweils abgeschlossen unter Verknüpfung (Hintereinanderausführung der Umorientierung von Ecken- bzw. Kantenfacets ist wieder eine Umorientierung der Ecken- bzw. Kantenfacets und damit wieder in der Menge, auf der die jeweiligen Gruppen operieren, enthalten). Wie im Beweis zu Satz 74 muss für beide Untergruppen noch die Invarianz gegenüber Konjugation getestet werden. Am Beispiel von N_e werde nun eine Fallunterscheidung nach der Herkunft des Elements aus N durchgeführt. Angenommen, $n \in N_c = N \setminus N_e$, so gilt für die Konjugation $nN_en^{-1} = nn^{-1}N_e = N_e$, da man n^{-1} an N_e „vorbeischieben“ darf (die Operationen finden auf disjunkten Mengen statt und sind voneinander unabhängig). Gilt hingegen $n \in N_e = N \setminus N_c$, so gilt trivialerweise $nN_en^{-1} = N$. In beiden Fällen bleibt die Untergruppe N_e also bezüglich Konjugation mit einem Element aus N invariant. Analog gilt dies auch für die Untergruppe N_c , womit dann beide Untergruppen Normalteiler sind. Dann liefert Def. 38 die Aussage. \square

Weiter oben wurden bereits Bezeichnungen für die Orientierungen eingeführt (vgl. „Beschreibung der *Construction Group / Illegal Cube Group* nach [Joy08]“). Aufgrund dieser Markierungen kann man Bedingungen angeben, wann eine Position bzw. eine Orientierung, erzeugt mit Q , auch mit M erreicht werden kann, also außerdem Element der Cube Group ist.

Definition 91 (k_c und k_e , [NST94], S. 246 und [Tra], S. 6 f.). Es bezeichne $\frac{2\pi k_c}{3}$ (mit $k_c \equiv 0, 1$ oder 2 modulo 3) den Gesamtwinkel, um den alle Ecken in sich verdreht worden sind und πk_e (mit $k_e \equiv 0$ oder 1 modulo 2) den Gesamtwinkel, um den alle Kanten in sich verdreht worden sind, wenn eine Operation aus Q angewandt wird.

Satz 92 ([NST94], S. 246 und [Tra], S. 6 f.). Für jeden (Compound) Move der Cube Group M gilt: $k_e = 0 = k_c$.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. Einerseits muss gezeigt werden, dass die Abbildung von Q in den Restklassenring modulo 2 (für die Kanten) bzw. 3 (für die Ecken) ein Homomorphismus ist. Weiterhin benötigt man die Aussage, dass k_e und k_c für Basic Moves verschwinden. Der erste Teil des Beweises ist angelehnt an [Tra], S. 6 f., verwendet allerdings auch die Notation von Def. 85 und Satz 87. Sei also

$$\begin{aligned}\chi_c : Q &\rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \chi_c(p) &= \frac{3}{2\pi} \sum_{i=1}^8 \Theta_{c_i}(p) = k_c \bmod 3 \quad \text{und} \\ \chi_e : Q &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \chi_e(p) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{12} \Theta_{e_i}(p) = k_e \bmod 2,\end{aligned}$$

wobei Θ_{c_j} den Winkel zwischen dem vorherigen und jetzigen j -ten Eckstein bezeichnet (analog für Θ_{e_j} als Änderung des Winkels bezüglich des vorherigen Kantensteins an j -ter Stelle, wenn das Element p aus Q angewandt wird). Für die Hintereinanderausführung zweier Elemente p und q aus Q gilt:

$$\begin{aligned}\chi_c(pq) &= \frac{3}{2\pi} \sum_{i=1}^8 \Theta_{c_i}(pq) = \frac{3}{2\pi} \sum_{i=1}^8 (\Theta_{c_i}(p) + \Theta_{c_i}(q)) \\ &= \frac{3}{2\pi} \sum_{i=1}^8 \Theta_{c_i}(p) + \frac{3}{2\pi} \sum_{i=1}^8 \Theta_{c_i}(q) = \chi_c(p) + \chi_c(q) \\ \chi_e(pq) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{12} \Theta_{e_i}(pq) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{12} (\Theta_{e_i}(p) + \Theta_{e_i}(q)) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{12} \Theta_{e_i}(p) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{12} \Theta_{e_i}(q) = \chi_e(p) + \chi_e(q)\end{aligned}$$

Bis auf Rechenregeln für Summen und die Definition von χ_c und χ_e wurde als nichttriviale Aussage beim zweiten Gleichheitszeichen jeweils verwendet, dass die ursprünglichen Änderungen der Winkel (noch ohne mod 3 bzw. mod 2) addiert werden können. Dies stellt trotz etwaiger Permutationen kein Problem dar, da die Cubies bereits bezüglich ihrer Position relativ zu den fixierten Mittelstücken bezeichnet bzw. nummeriert worden sind (vgl. „Beschreibung der Construction Group / Illegal Cube Group nach [Joy08]“). Für χ_c und χ_e wurde deshalb bereits gezeigt, dass es sich um Homomorphismen handelt. Da die Aussage nicht für alle Elemente aus Q , sondern nur für die, die auch in M liegen, gezeigt werden soll, werden nun die Basic Moves als Generatoren von M betrachtet. Gälte die Behauptung für die besagten sechs Basic Moves, so gälte sie aufgrund der Homomorphismeneigenschaft auch für alle (Compound) Moves.

p	\vec{v}	\vec{w}	$\chi_c(p)$	$\chi_e(p)$
R	(1,2,2,1,0,0,0,0)	(0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0)	$(1+2+2+1) \equiv_3 6 \equiv_3 0$	$(1+1) \equiv_2 2 \equiv_2 0$
L	(0,0,0,0,1,2,1,2)	(0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0)	$(1+2+1+2) \equiv_3 6 \equiv_3 0$	$(1+1) \equiv_2 2 \equiv_2 0$
F	(2,0,1,0,1,0,0,2)	(1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0)	$(2+1+1+2) \equiv_3 6 \equiv_3 0$	$(1+1) \equiv_2 2 \equiv_2 0$
B	(0,1,0,2,0,2,1,0)	(0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0)	$(1+2+2+1) \equiv_3 6 \equiv_3 0$	$(1+1) \equiv_2 2 \equiv_2 0$
U	(0,0,0,0,0,0,0,0)	(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0)	$0 \equiv_3 0$	$(1+1) \equiv_2 2 \equiv_2 0$
D	(0,0,0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1)	$0 \equiv_3 0$	$(1+1) \equiv_2 2 \equiv_2 0$

Tabelle 14: Basis Moves $p \in M$ und ihre Repräsentation als Elemente aus Q : Orientierungen, nach [Joy08], S. 221 f.

p	ρ	σ
R	(1, 3, 4, 2)	(6, 2, 7, 10)
L	(5, 8, 7, 6)	(4, 5, 12, 8)
F	(5, 3, 1, 8)	(1, 6, 9, 5)
B	(4, 6, 7, 2)	(3, 8, 11, 7)
U	(3, 5, 6, 4)	(4, 3, 2, 1)
D	(1, 2, 7, 8)	(9, 10, 11, 12)

Tabelle 15: Basis Moves $p \in M$ und ihre Repräsentation als Elemente aus Q : Permutationen

Eine Auflistung zeigt, wie die Basic Moves als Elemente aus Q dargestellt werden können. Für den Beweis von Interesse ist die obere Tabelle 14 mit den Informationen über die Orientierungswchsel, aufgefasst als Elemente aus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (Ecken: \vec{v}) und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Kanten: \vec{w}), wobei die zweite Tabelle 15 der Vollständigkeit halber auch die Permutationen beinhaltet. Demnach gilt für alle Basic Moves bereits, dass $k_e = 0 = k_c$. Mit dem oben erklärten Homomorphismus muss dann auch eine Abfolge von (Basic) Moves auf $k_e = 0 = k_c$ führen, was die Behauptung für jeden (Compound) Move aus M zeigt. \square

Satz 93 ([NST94], S. 246 f., [Ban82], S. 48 und [Joy08], S. 224-226). a) N_c besteht aus den Elementen aus K_c , deren totale Winkelsumme 0 modulo 3 beträgt. N_c hat Index 3 in K_c und dementsprechend $|N_c| = 3^7$ Elemente. Weiter gilt $N_c \cong Z_3^7$.

b) N_e besteht aus den Elementen aus K_e , deren totale Winkelsumme 0 modulo 2 beträgt. N_e hat Index 2 in K_e und dementsprechend $|N_e| = 2^{11}$ Elemente. Weiter gilt $N_e \cong Z_2^{11}$.

Beweis. a) Die Richtung $n \in N_c \Rightarrow n \in \{K_c | k_c = 0\}$ ist bereits in Satz 92 gezeigt worden. Für die Rückrichtung genügt es, einen Compound Move in N_c zu finden, der unter Konjugation sämtliche möglichen Elemente in K_c erzeugt, die $k_c = 0$ erfüllen (dies ist wohldefiniert bzw. erlaubt, da die Normalteiler unter Konjugation abgeschlossen sind, K_c der Kern eines Homomorphismus und damit ein Normalteiler ist, vgl. Bem. 27 und 78 sowie Lemma 28). Ein solcher Compound Move ist nach [Joy08], S. 226 durch $c := (R' D2 R B' U2 B)^2 (= R^{-1} D^2 R B^{-1} U^2 B)^2$, gelesen von links nach rechts, gegeben. Dabei wird die Ecke UFR um 120° im Uhrzeigersinn, die Ecke BDL um 240° im Uhrzeigersinn gedreht. Die Mengengleichheit mit dem Wissen, dass die Restklasse $0\mathbb{Z}$ gerade für ein Drittel aller möglichen k_c für Elemente aus Q angenommen wird, liefert die Aussage, dass $\text{ind}(N_c : K_c) = 3$. Mit dem Satz von Lagrange (Satz 23) und der bekannten

Ordnung von K_c (aus Bem. 78, der bekannten Ordnung $|Z_3| = 3$ und der Mächtigkeit des kartesischen Produkts) folgt außerdem $|N_c| = \frac{|K_c|}{3} = 3^7$. Die Isomorphie zeigt man im letzten Schritt noch folgendermaßen ([Ban82], S. 48):

$$\begin{aligned}\nu : N &\rightarrow Z_3^7 \times Z_2^{11}, \\ n = (\vec{v}, \text{id}, \vec{w}, \text{id}) &\mapsto ((v_1, \dots, v_7), (w_1, \dots, w_{11}))\end{aligned}$$

Letzterer Isomorphismus kann z.B. so verstanden werden, dass eine Eckenorientierung eines Cubies immer von den anderen Ecken bestimmt wird (analog für die Kanten). Da es sich bei Z_3^7 um eine Identifikation mit einer Untergruppe von Z_3^8 handelt, in der $v_1 + \dots + v_8 \equiv_3 0$ gilt (vgl. [Joy08], S. 228) und $n \in N_c \Leftrightarrow n \in \{K_c | k_c = 0\}$ bereits gezeigt wurde, folgt die Aussage $N_c \cong Z_3^7$.

- b) $n \in N_e \Rightarrow n \in \{K_e | k_e = 0\}$ ist aus Satz 92 bereits bekannt. Die umgekehrte Richtung wird erneut dadurch gezeigt, dass ein Compound Move wie $e := L F R^{-1} F^{-1} L^{-1} U^2 R U R U^{-1} R^2 U^2 R$ genau zwei Kanten in sich dreht (nämlich UF und UR), allerdings keine weiteren Änderungen vornimmt (weder Orientierung der Ecken, noch Permutationen von Γ), also in N_e liegt. Sämtliche möglichen Konjugationen mit Elementen aus M liefern die Aussage, dass wenn $n \in \{K_e | k_e = 0\}$ gilt, dann auch $n \in N_e$. Offenbar ist nur die Hälfte aller Elemente aus K_e auch in N_e (die Restklasse $0\mathbb{Z}$ ergibt sich in der Hälfte aller Berechnungen von χ_e), woraus $\text{ind}(N_e : K_e) = 2$ folgt. Weiterhin erhält man wie oben in a) mit dem Satz (23) von Lagrange $|N_e| = \frac{|K_e|}{2} = 2^{11}$. Die Isomorphie ergibt sich analog zum Beweis von a). Derselbe Isomorphismus liefert eine Identifikation von Z_2^{11} mit einer Untergruppe von Z_2^{12} , in der $w_1 + \dots + w_{12} \equiv_2 0$ gilt (vgl. [Joy08], S. 228). Mit $n \in N_e \Leftrightarrow n \in \{K_e | k_e = 0\}$ von oben folgt dann auch $N_e \cong Z_2^{11}$.

□

Korollar 94. Für die Ordnung von N gilt $|N| = 3^7 \cdot 2^{11}$.

Beweis. Aufgrund von Satz 93 ist $N = N_c \times N_e = Z_3^7 \times Z_2^{11}$ bereits bekannt. Für das kartesische Produkt der zu beiden Untergruppen gehörenden Mengen gilt:

$|Z_3^7 \times Z_2^{11}| = |Z_3^7| \cdot |Z_2^{11}| = 3^7 \cdot 2^{11}$. Daraus folgt die Behauptung. □

2.3.3 Die Cube Group als semidirektes Produkt und als Untergruppe der Construction Group

Mit der Beschreibung von N und $P = M/N$ wurde auf die zentrale Aussage dieser Arbeit hingeleitet, die die Struktur der Cube Group beschreibt und die Bestimmung der Ordnung von M möglich macht.

Satz 95 (M ist semidirektes Produkt, [NST94], S. 247 und [Ban82], S. 48). Für die Cube Group gilt: $M = N \rtimes P \cong N \rtimes M/N \cong (Z_3^7 \times Z_2^{11}) \rtimes ((S_8 \times S_{12}) \cap A_{20})$.

Beweis. Die Bedingungen aus Satz 47 müssen überprüft werden. Die Untergruppeneigenschaft wurde bereits gezeigt (für N ist dies eine Folgerung aus Bem. 68, für P gilt dies ebenfalls, da es sich hierbei um die Faktorgruppe von M nach N handelt, vgl. ebd. bzw. da P Teilmenge von M ist, die bezüglich Komposition abgeschlossen ist). Auch ist bekannt, dass es sich bei N um einen Normalteiler von M handelt (siehe Bem. 68). Außerdem gilt $N \cap P = (\vec{v}, \text{id}, \vec{w}, \text{id}) \cap (\vec{0}, \rho, \vec{0}, \sigma) = (\vec{0}, \text{id}, \vec{0}, \text{id}) = \text{id}_M$. Das Produkt der beiden Untergruppen

jedoch liefert ganz M : $(\vec{v}, \text{id}, \vec{w}, \text{id}) \cdot (\vec{0}, \rho, \vec{0}, \sigma) = (\vec{v}, \rho, \vec{w}, \sigma)$. Also gilt $M = N \rtimes P \cong N \rtimes M/N$. Mit den zusätzlichen Eigenschaften aus Satz 93 und Lemma 65 folgt dann außerdem noch $M \cong (Z_3^7 \times Z_2^{11}) \rtimes ((S_8 \times S_{12}) \cap A_{20})$ und damit die Behauptung. \square

Korollar 96 ([NST94], S. 247, [Sam17], S. 145). *Die Ordnung der Cube Group ist:*

$$\begin{aligned} |M| &= \frac{1}{2} \cdot 8! \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 2^{11} \\ &= 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \\ &= 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \end{aligned}$$

Beweis. Wegen Satz 95 und der schon mehrfach verwendeten Formel für die Mächtigkeit des „kartesischen Produkts der betrachteten Gruppen“ folgt zunächst die erste Zeile. Durch eine Primfaktorzerlegung erhält man die zweite. \square

Bemerkung 97 (Bis auf Symmetrie verschiedene Zustände des Zauberwürfels, [Sam17], S. 148). Die Zahl aus Korollar 96 beinhaltet auch Elemente, die sich mit Symmetrieroberungen ineinander überführen lassen. Grundverschieden sind demnach „nur“ 901 083 404 981 813 616 Zustände, wenn man von der Symmetriegruppe des Würfels (eines platonischen Körpers) absieht.

Nachdem die Struktur der Cube Group ergründet wurde, konnte die Ordnung der Cube Group hergeleitet werden, ohne bloß kombinatorische Argumente zu nutzen. Mit der Construction Group als Hilfsmittel und der Notation aus Satz 87 kann man die Cube Group M allerdings auch noch als eine Untergruppe jener Gruppe Q darstellen, wenn bestimmte Bedingungen erfüllt werden.

Satz 98 ([Joy08], S. 227). *Die Cube Group M ist gegeben durch*

$$M = \{q = (\vec{v}, \rho, \vec{w}, \sigma) \in Q \mid \text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma), (v_1 + \dots + v_8) \equiv_3 0 \text{ und } (w_1 + \dots + w_{12}) \equiv_2 0\}.$$

Beweis. Satz 93 liefert die Begründung für die Hin- und Rückrichtung für die letzten beiden Bedingungen. Wegen Lemma 65 gilt zudem, dass aus $m \in M$ folgt, dass $\text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma)$. Umgekehrt wurde allerdings auch in der Hinführung zu Satz 65 gezeigt, dass sich alle Elemente aus $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$ mit Elementen aus P erzeugen lassen, da Konjugationen der dort besprochenen Algorithmen erlaubt sind und damit die gesamte Gruppe $(S_8 \times S_{12}) \cap A_{20}$ erzeugen. Da also für Orientierungen und Permutationen jeweils beide Richtungen gezeigt wurden, folgt die Behauptung zur alternativen Darstellung der Struktur der Cube Group. \square

Bemerkung 99 ([NST94], S. 247). Mithilfe des letzten Satzes 98 und Satz 23 (von Lagrange) ist nun auch eine andere Deutung der Cube Group möglich, als Untergruppe der Construction Group vom Index 12, denn es gilt: $|Q| = |Q : M| \cdot |M| \Rightarrow |Q : M| = \frac{|Q|}{|M|} = \frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{\frac{1}{2} \cdot 8! \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 2^{11}} = 12 (= 2 \cdot 3 \cdot 2)$. Nur jedes zwölfte Element aus Q ist auch in M enthalten, da nur die Hälfte aller möglichen Permutationen auf Γ_c und Γ_e gleiches Signum liefert, nur ein Drittel aller Orientierungen der Ecken auf $k_c = 0$, und nur die Hälfte aller Orientierungen der Kanten auf $k_e = 0$ führt. Dies bedeutet aber auch, dass nur in einem von zwölf Fällen ein willkürlich neu zusammenggebauter Cube tatsächlich auch wieder lösbar ist, das entspricht gerade einmal etwas mehr als 8% (vgl. [NST94], S. 247).

Die Beschreibung der Struktur der Cube Group mit verschiedenen Mitteln ist demnach abgeschlossen und konnte tiefere Einblicke in die Funktionsweise des Cubes geben. Im Zuge dessen konnte auch bereits darauf eingegangen werden, wie die Construction Group beschaffen ist. Da sich ausgehend von der Cube Group auch noch diverse weitere Fragestellungen ergeben, unter anderem auch für die größere „Supergroup“, sind einige im Folgenden noch Gegenstand weiterer Abschnitte zur Gruppentheorie des Zauberwürfels.

2.4 Erweiterung des Zauberwürfels mit orientierten Mittelstücken (Fotowürfel) und die Beschreibung der so entstehenden Supergroup des Zauberwürfels

Bei einem Super- oder Picturecube (Fotowürfel) handelt es sich um einen Zauberwürfel, dessen Mittelstücke eine Orientierung aufweisen [Joy08], S. 288. Auch an einem sechsfarigen Zauberwürfel ohne Bilder oder Markierungen an den Mittelstücken bewegen sich die Mittelstücke um ihre eigene Achse, doch hat dies keinen Einfluss auf die Struktur der Gruppe, da man diese Orientierungen der Mittelstücke nicht sehen kann. Auch beim später behandelten Skewb muss die Mittelstückorientierung mit der Einführung einer Referenzmarkierung sichtbar gemacht werden, vergleiche dazu Definition 109. Beim 3x3x3 Zauberwürfel kann man diese Orientierung bereits in der Realität durch spezielle Sticker erkennbar machen, wie man in Abb. 3 sehen kann.



Abbildung 3: Fotowürfel (Picture-Cube) mit relevanter Mittelstückorientierung, eigene Darstellung

Definition 100 (Mittelstückorientierung, [Ban82], S. 81 f.). *Mit $\vec{x} \in Z_4^6$ wird pro Mittelstück (also allen sechs Mittelstücken auf je einer Seite des Würfels, in der willkürlichen Reihenfolge R, L, U, D, F, B) festgehalten, um das Wievielfache von 90° gegenüber der Referenz das jeweilige Mittelstück gedreht wurde.*

Wenn man also von nun an auch die Orientierung der Mittelstücke berücksichtigt, lässt sich die sogenannte Supergroup wie folgt definieren.

Definition 101 (Supergroup, [Ban82], S. 82). *Die Menge aller 5-Tupel von Permutationen von Ecken und Kanten sowie Orientierungen von Ecken, Kanten und Mittelstücken,*

die mithilfe von Hintereinanderausführung der Basic Moves und ihrer Inversen (also allen möglichen Compound Moves) erreicht werden können, wird als Supergroup S der Cube Group M bezeichnet, d.h., mit Q^* als Construction Group (ähnlich Def. 73) mit zusätzlichen Mittelstückorientierungen wie in Def. 100, gilt: $S = \{q = (\vec{v}, \rho, \vec{w}, \sigma, \vec{x}) \in Q^* \mid \exists m \in M = \langle R, L, U, D, F, B \rangle : m(\vec{0}, id, \vec{0}, id, \vec{0}) = q\}$.

Bemerkung 102 (zur erweiterten Construction Group). $Q^* = Q \times Z_4^6$, denn klarerweise gilt $Q^* = Q \cdot Z_4^6$ mit hinzugefügten Mittelstückorientierungen und $Q \cap Z_4^6 = id$. Die beiden Untergruppen Q und Z_4^6 von Q^* sind außerdem auch Normalteiler, wenn man beliebige Konjugationen mit Elementen aus Q^* überprüft. Jeweils kann sich das Element entweder in den potentiellen Normalteilern befinden, oder in der jeweils anderen Untergruppe, denn $Q^* = Q \cdot Z_4^6$ gilt bereits. Befindet sich das besagte Element in der Untergruppe, für die die Normalteilereigenschaft gezeigt werden soll, so gilt klarerweise die Mengeninklusion aus Bemerkung 27. Andernfalls wird das Element an der Untergruppe vorbeigezogen und das Produkt aus jenem Element mit seinem Inversen ergibt die Identität, also wird damit erneut die Invarianz gegenüber Konjugation beider Faktoren aus dem (damit bewiesenen) direkten Produkt $Q^* = Q \times Z_4^6$ gezeigt.

Aus dem vorherigen Kapitel ist bereits bekannt, dass die Cube Group M aus den Permutationen und Orientierungen der Cubies besteht, die die Bedingungen aus Satz 98 erfüllen. Zu den dort genannten Bedingungen muss allerdings für die Beschreibung der Supergroup eine weitere Einschränkung hinzugefügt werden.

Satz 103 (Bedingungen an die Supergroup, [Ban82], S. 82). *Die Supergroup S besteht aus genau den $q = (\vec{v}, \rho, \vec{w}, \sigma, \vec{x}) \in Q^*$, für die gilt, dass $\text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma)$, $(v_1 + \dots + v_8) \equiv_3 0$, $(w_1 + \dots + w_{12}) \equiv_2 0$ und $(-1)^{x_1+\dots+x_6} = \text{sgn}(\rho)$.*

Beweis. Die genannten Bedingungen sind notwendig („ \Rightarrow “), denn die ersten drei sind bereits nach Satz 98 notwendig und die vierte muss erfüllt werden, weil sie zu Beginn mit der Anfangsposition, dem gelösten Supercube, erfüllt ist: $x_1 = \dots = x_6 = 0$, also $(-1)^{0+\dots+0} = 1 = \text{sgn}(id_{S_C}) = \text{sgn}(\rho)$ und auch nach jedem Basic Move erfüllt ist, also auch mit jedem Compound Move erfüllt werden muss: ein Basic Move ist ein 4-Zykel der Ecken, also wird das Vorzeichen gewechselt, außerdem wird genau ein Mittelstück dabei um 90° gedreht, sodass sich der Exponent des obigen Terms um genau eins vergrößert. Die Gleichheit $(-1)^{x_1+\dots+x_6} = \text{sgn}(\rho)$ bleibt demnach für alle Basic Moves erhalten, da beide Seiten mit „ (-1) “ multipliziert werden. Für die Rückrichtung („ \Leftarrow “) muss unter Berücksichtigung der bekannten Ergebnisse aus Satz 98 nur noch gezeigt werden, dass sich beliebige Mittelstückorientierungen wie in der Bedingung $(-1)^{x_1+\dots+x_6} = \text{sgn}(\rho)$ angegeben auch von Elementen aus dem Erzeugnis aller Basic Moves herstellen lassen. Konkret werden Algorithmen für alle möglichen Orientierungen der Mittelstücke gesucht, ohne dass dies einen Effekt auf die Permutationen sowie Orientierungen der Ecken sowie Kanten hätte. Das ist gleichzusetzen mit der Identität auf den gerade genannten Mengen, wozu insbesondere $\rho = id$ mit $\text{sgn}(\rho) = 1$ gehört. Der Exponent der (-1) muss also gerade sein. Ohne Einschränkung werden die möglichen Orientierungen an den beiden Mittelstücken U und R, also x_3 und x_1 durchgespielt. Zum Beispiel wird ein Element der Cube Group benötigt, welches das Mittelstück oben um 180° dreht. Eine mögliche Abfolge von Moves ist $(U R L U^2 R' L')^2$ aus [Ban82], S. 81. Weiterhin muss es möglich sein, das obere Mittelstück um $+1 \cdot 90^\circ$, das rechte jedoch um $-1 \cdot 90^\circ$ zu drehen, da auch hier die Summe der Mittelstückorientierung gerade

2 Die Gruppentheorie des Zauberwürfels

bleibt. Hierzu gibt [Ban82], S. 81 die Zugfolge $R L' F B' U D' R' D U' F' B R' L U$ an. Weitere Kombinationen, die auf $(-1)^{x_1+\dots+x_6} = 1$ führen, kann man durch mehrfaches Anwenden der soeben zitierten Zugfolgen und Rotationen des gesamten Cubes erreichen. \square

Satz 104 (Mächtigkeit der Supergroup S , [Ban82], S. 82). *Die Mächtigkeit der Supergroup des Zauberwürfels beträgt $|S| = 4^5 \cdot 2 \cdot |M| = 2^{11} \cdot |M| = 88\,580\,102\,706\,155\,225\,088\,000 = 2^{38} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$.*

Beweis. Zu zeigen ist nach den bisherigen Erkenntnissen über die Supergroup (insbesondere Satz 102 und Satz 103) nur noch, dass durch die Mittelstückorientierungen $4^5 \cdot 2 = 2048$ Elemente aus S pro Element aus M möglich sind, dann folgt der restliche Teil der Aussage mithilfe einer Primfaktorzerlegung und der Kenntnis der Mächtigkeit der Cube Group M aus Korollar 96. Durch Satz 103 ist aber auch schon klar, dass die Orientierung des sechsten Mittelstücks aufgrund bekannter Orientierung der ersten fünf betrachteten Mittelstücke bereits bis auf gerade Vielfache von 90° -Drehungen fixiert ist. Die fünf zunächst betrachteten Mittelstücke können jeweils in vier verschiedenen Orientierungen auftreten. Das letzte, sechste Mittelstück kann dann aufgrund der Erhaltung des Vorzeichens der Eckenpermutation aus Satz 103 nur noch zwei aller vier Orientierungen annehmen. \square

3 Lösungsstrategien für den Rubik's Cube unter Nutzung der Gruppentheorie

In diesem Kapitel werden zu Beginn zunächst Lösungsstrategien vorgestellt, die insbesondere bei Anfängern und im Speedcubing beliebt sind. Für die beiden außerdem behandelten Methoden im zweiten Abschnitt lassen sich allerdings leichter Bezüge zur Gruppe des Zauberwürfels herstellen, weshalb diese etwas ausführlicher besprochen werden.

3.1 Lösen des Zauberwürfels Ebene für Ebene

Bereits 1981 wurde in der Zeitschrift DER SPIEGEL mit dem Titel „Schrei Hurra! Schmeiß 'ne Runde!“ (siehe [SPI]) ein deutschsprachiges Lösungsverfahren für den Zauberwürfel veröffentlicht. Der Ausspruch selbst stammt jedoch, wie man dem letzten Abschnitt des Artikels entnehmen kann, von David Singmaster, dessen Notation für Basic Moves und dessen Interpretation des Kranzproduktes in dieser Arbeit übernommen wurden (vgl. ebd. sowie Abschnitt 2.2.1 und Bemerkung 84). Singmaster selbst gilt nach [Wikb] als ein Erfinder der Lösungsstrategie, nach der man den Würfel Ebene für Ebene („Layer by layer“) löst. Auch in seinem Buch „Notes on Rubik's Magic Cube“ ([Sin81], Seiten S-1 bis S-4) wird das Verfahren bereits erläutert. Dabei bringt man zunächst die Kanten der obersten Ebene an die richtige Position und berücksichtigt die Orientierung. Danach werden die Ecken der obersten Ebene eingesetzt, und im Anschluss die Kanten der mittleren Ebene hinzugefügt. Bei den bisherigen Schritten war immer auf die Orientierung der Teile zu achten. In der „SPIEGEL-Lösung“ für die letzte Ebene geht es dann mit der Permutation der Kanten mit anschließender Orientierung, und der Permutation der Ecken sowie Orientierung derselben weiter (vgl. [SPI], S. 184). Bei Singmaster wird davon abweichend während der Lösung der Kanten der letzten Ebene zunächst die Orientierung hergestellt und die Permutation danach vorgenommen (vgl. [Sin81], S. S-2 f.), die Lösung der Ecken erfolgt analog zur „SPIEGEL-Lösung“. Für Fortgeschrittene werden einzelne Teilschritte der gerade vorgestellten Methoden zusammengefasst. Die sogenannte CFOP-Methode (kurz für Cross (die vier Kanten der ersten Ebene) - First Two Layers (die Ecken der ersten Ebene und die Kanten der zweiten Ebene gleichzeitig) - Orientation of the Last Layer (gleichzeitiges Orientieren der Kanten und Ecken der letzten Ebene) - Permutation of the Last Layer (gleichzeitiges Permutieren der Kanten und Ecken der letzten Ebene)) ist eine Erweiterung der oben angesprochenen Lösungsmethode, die Ebene für Ebene vorgeht, vgl. [Wika]. Im Gegensatz zur überschaubaren Anzahl von zu lernenden Algorithmen in den zuerst angesprochenen Methoden muss man sich hier allein für die letzte Ebene 78, für den Schritt „First Two Layers“ nochmal 41 Zugfolgen einprägen, vgl. ebd. Zum Zeitpunkt der Abfassung dieser Arbeit hält Yusheng Du (杜宇生) mit einer Einzelzeit von 3,47 Sekunden den Weltrekord und hat dazu die zuletzt angesprochene Lösungsmethode verwendet, konnte allerdings auch davon profitieren, dass der letzte Schritt glücklicherweise entfallen ist (bedingt durch seine Lösung des vorherigen Schrittes, vgl. [Ferb]).

3.2 Getrenntes Lösen der Ecken und Kanten

Offensichtlich wird der Lösungsprozess mit Voranschreiten der Ebenen immer schwieriger, da es immer mehr Bausteine gibt, die bereits korrekt platziert sind und nicht mehr verändert werden sollen. Für die Auswahl der verwendeten Zugfolgen heißt das, dass die Mengen, auf denen sie operieren dürfen, immer kleiner werden. Im Gegensatz zu den oben besprochenen, ebenenbasierten Lösungsstrategien kann man aus Kenntnis der Struktur der Cube Group jedoch schneller auf das Prinzip stoßen, zunächst die Kanten und dann im Anschluss die Ecken zu lösen (oder umgekehrt, siehe [Joy08], S. 286). Schließlich ist bekannt, dass das Lösen beider genannten Mengen bis auf das gleiche Vorzeichen der jeweiligen Permutationen von Ecken und Kanten unabhängig voneinander möglich ist, da nach Satz 95 bereits $M = N \times P = (Z_3^7 \times Z_2^{11}) \times ((S_8 \times S_{12}) \cap A_{20})$ und nach Satz 98 schon $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\rho)$ gelten. Das Vorgehen kann dann so durchgeführt werden, dass man entweder für Kanten und Ecken jeweils Permutation und Orientierung getrennt löst (Corner-Edge-Methode aus Abschnitt 3.2.1), oder diesen Prozess gleichzeitig, einmal bei den Kanten und einmal bei der Ecken durchführt (wie bei der vorgestellten Blindlösemethode aus Abschnitt 3.2.2). Bei der Erläuterung neuer Zugfolgen und Vorgehensweisen wird im Anschluss erklärt, wieso die jeweiligen Schritte funktionieren bzw. inwiefern die Gruppenstruktur die Schritte ermöglicht.

3.2.1 Corner-Edge-Methode

Für diese Methode, die in [Joy08], S. 289 beschrieben wird, verwendet man eine Folge von Untergruppen der Cube Group M , um den Zauberwürfel schrittweise zu lösen. Konkret handelt es sich um folgende Untergruppen:

Untergruppe	beeinflusste Eigenschaften	nicht beeinflusste Eigenschaften
$G_0 = M$	Permutationen und Orientierung von Ecken sowie Kanten	keine
G_1	Permutationen von Kanten, Orientierung von Ecken und Kanten	Permutationen von Ecken
$G_2 = N$	Orientierung von Ecken und Kanten	Permutationen von Ecken und Kanten
$G_3 = N_e$	Orientierung von Kanten	Permutationen von Ecken und Kanten, Orientierung von Ecken
$G_4 = \text{id}$	keine	Permutationen von Ecken und Kanten, Orientierung von Ecken und Kanten

Tabelle 16: Verwendete Untergruppen in der Corner-Edge-Methode

Durch die so definierten Untergruppen lässt sich ein gewisses $g_0 \in G_0$ schreiben als Produkt $g_0 = g_1 g_2 g_3 g_4$. Da g_0 einen möglicherweise verdrehten Zustand des Zauberwürfels beschreibt, lässt sich über das Inverse von g_0 , nämlich $g_0^{-1} = g_4^{-1} g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1}$, gerade wieder ein gelöster Würfel erzeugen. Das soeben angesprochene Element $g_0 \in M$ wird als *Scramble* bezeichnet, da diese Abfolge von Moves den Würfel verdreht bzw. vermischt (vgl. dazu [Com18], Article 4: Scrambling zur Erzeugung eines Scrambles bei offiziellen Wettbewerben und [Joy08], S.

233 zur Bezeichnung eines vermischten („gescrambleten“) Würfels). In Anlehnung an Tabelle 16 besteht die Lösungsmethode dann aus den folgenden Schritten:

1. Man löse die Permutation der Ecken mithilfe einer Zugfolge g_1^{-1} , indem zumindest alle Ecksteine an die korrekten Positionen gebracht werden, ohne bereits auf die Orientierung zu achten. Dadurch liegt die Hintereinanderausführung von g_0 und g_1^{-1} , bezeichnet mit $g'_1 = g_1^{-1}g_0$ in der Untergruppe G_1 , da diese aus den Elementen von M besteht, die die Permutation der Ecken nicht verändern.
2. Analog fügt man der Zugfolge g'_1 nun die Zugfolge g_2^{-1} hinzu, die außerdem die Kanten an die richtigen Positionen bringt und die bereits korrekt platzierten Ecken maximal noch in ihren Positionen orientiert. Dann liegt $g'_2 = g_2^{-1}g'_1 = g_2^{-1}g_1^{-1}g_0$ in G_2 , denn insgesamt würde diese Zugfolge am Zauberwürfel nur die Orientierung der Ecken bzw. Kanten verändern.
3. Auch im dritten Schritt wird eine Zugfolge g_3^{-1} an die bislang vorhandenen g'_2 hinzugefügt, die die bisher gelöste Permutation von Ecken und Kanten nicht mehr ändert, aber zusätzlich die korrekte Orientierung der Ecken herstellt. Zusammengefasst ergibt sich dann $g'_3 = g_3^{-1}g'_2 \in G_3$.
4. Schließlich muss nur noch mithilfe von g_4^{-1} die Orientierung der Kanten gelöst werden, während bisher vorhandene Permutationen von Ecken und Kanten sowie die Orientierung der Ecken nicht mehr verändert werden dürfen. Dann gilt $g'_4 = g_4^{-1}g'_3 \in G_4 = \text{id}$, also terminiert an dieser Stelle der Lösungsalgorithmus, da nach Konstruktion der Folge von Untergruppen nur die Identität selbst in G_4 vorhanden ist.

Zusammengefasst ergibt sich dann $\text{id} = g_4^{-1}g_3^{-1}g_2^{-1}g_1^{-1}g_0$, oder im Umkehrschluss $g_0^{-1} = g_4^{-1}g_3^{-1}g_2^{-1}g_1^{-1}$, was gleichbedeutend ist mit $g_0 = g_1g_2g_3g_4$. Nun werden nur noch hinreichend viele Zugfolgen benötigt, die jeweils die angesprochenen Untergruppen erzeugen.

1. Für die Permutation von Ecken bei Vernachlässigung der Kanten und der Orientierung der Ecken reicht es aus, einen 3-Zykel von Ecken anzugeben, und zusätzlich Rotationen des gesamten Würfels, einzelne Basic Moves, sowie die Konjugation mit beliebigen Elementen aus M zu erlauben. Mit den 3-Zykeln wird nach Satz 56 bereits die alternierende Gruppe A_8 erzeugt. Allerdings lässt man im ersten Schritt auch zu, dass mithilfe von zusätzlichen Moves Paarvertauschungen von Ecken erzeugt werden. Auswirkungen kann dies nach Satz 63 aber auch auf die Permutation von Kanten haben, also auch dort eine Paarvertauschung bewirken, schließlich muss das Signum der Ecken- und Kantenpermutationen nach Satz 98 identisch sein. Die Kanten müssen also im nachfolgenden Schritt nicht mehr unbedingt in der Permutation vorliegen, in die sie ursprünglich verdreht worden sind. Der hinreichende 3-Zykel für Ecken, den [Joy08], S. 288 angibt, ist der folgende und bewirkt die zyklische Vertauschung (BRD,URB,ULB): $R D R^{-1} U R D^{-1} R^{-1} U^{-1}$. Mit den gerade gemachten Annahmen kann man diese Zugfolge ohne Einschränkung zur Lösung der Eckenpermutation nutzen. Ein anderer 3-Zykel hätte allerdings ebenfalls dazu ausgereicht.
2. Auch für die Ecken reichen 3-Zykeln nach Satz 56 aus, und da bereits beim Lösen der Ecken ein positives Vorzeichen erzeugt wird (die gelöste Permutation der Ecken ist nach Schritt 1 die Identität, und diese hat positives Signum), liegt auch bei den

Kanten bereits eine gerade Permutation vor (Satz 98 sichert dies). Also wird ein 3-Zykel und die Erlaubnis, diesen mit beliebigen Elementen aus M zu konjugieren (bzw. Rotationen des gesamten Würfels zuzulassen) bereits hinreichend für die Lösung der Kantenpermutationen sein. Die Zugfolge, die (UF,UL,UR) zyklisch vertauscht, ist nach [Joy08], S. 288: $R^2 L^2 D^{-1} R L^{-1} F^2 R^{-1} L D^{-1} R^2 L^2$ und ist unter Hinzunahme von Konjugationen mit Elementen aus M hinreichend zur Lösung der Permutation der Kanten bei bereits gelöster Permutation der Ecken.

3. Für die korrekte Orientierung der Ecken muss ein Compound Move gefunden werden, der unter Hinzunahme von Konjugationen mit Elementen aus M alle möglichen Orientierungen der Ecken erzeugt. Ein solcher Move wurde bereits im Beweis zu Satz 93 a) angegeben und bewirkt an der Ecke FUR eine Drehung um 120° , an der Ecke BDL eine Drehung um 240° : $(R^{-1} D^2 R B^{-1} U^2 B)^2$. Offenbar gelingt es, mit Konjugationen mit Elementen aus M beliebige in sich zu drehende Ecken an die Positionen FUR und BDL zu bringen, diese mit dem angegebenen Algorithmus zu orientieren, aber sämtliche anderen Eigenschaften wie Permutationen und Orientierungen nicht zu verändern, was durch die Struktur des direkten Produktes $N = Z_3^7 \times Z_2^{11}$ und die Eigenschaft, dass $N \triangleleft M$ gilt, gesichert wird (vgl. Satz 95).
4. Auch im letzten Schritt, der Orientierung der Kanten, kann auf eine bereits genannte Zugfolge zurückgegriffen werden. Wie im Beweis zu Satz 93 b) verwendet, reicht bereits der Compound Move $L F R^{-1} F^{-1} L^{-1} U^2 R U R U^{-1} R^2 U^2 R$ aus, um (Konjugationen inbegriffen) sämtliche Orientierungen der Kanten zu erzeugen, und sie ebenso auch zu lösen. Hierbei werden einzig die beiden Kanten UF und UR in sich gedreht.

3.2.2 Blindlösemethode

Will man den Würfel blind lösen, so muss man eine Methode verwenden, für die man sich möglichst wenige Informationen merken muss. Vier Schritte, die jeweils acht Ecken und zwölf Kanten betreffen und bei denen jeder zweite Schritt auf dem Ergebnis des vorherigen aufbaut (vgl. die Methode aus dem vorherigen Abschnitt 3.2.1), sind dazu eher weniger geeignet, schließlich müsste man sich neben der Ausgangsposition auch alle weiteren Positionen im Verlaufe der Lösung merken. Die Methode, die in dieser Arbeit zum Blindlösen vorgestellt wird, macht implizit Gebrauch von der Struktur der Cube Group und wird „Old Pochmann“-Methode genannt, da dies die erste von Stefan Pochmann verwendete Methode war, um beliebige 3x3 Zauberwürfel blind zu lösen (vgl. [Poc]). Die hier vorgestellte Variante macht der Einfachheit halber, abweichend vom Original, Gebrauch von insgesamt drei Algorithmen (und nicht nur von einem bzw. zwei, vgl. [Poc] und [Fera]). Das Grundprinzip besteht darin, die Lösung des Würfels in die Lösung der Kanten und Ecken aufzuteilen. Bis auf die Bedingung an die gleichen Vorzeichen der Permutationen (wie in Satz 98 gezeigt) ist dies unabhängig voneinander möglich. Wie bereits angesprochen möchte man die zu memorisierenden Objekte minimieren, also ist das Ziel, neben der richtigen Permutation auch direkt die richtige Orientierung der Kanten bzw. Ecken zu erreichen.

Das Grundprinzip

Nun ist die Idee, mit einem einmal festgelegten Platz, an dem sich ein sogenannter Puffer befindet, durch mehrmalige Vertauschungen sämtliche Kanten, bzw. sämtliche Ecken zu lösen.

Am Beispiel der Kanten definiert man ohne Einschränkung die Kante UR als Puffer, für die Ecken wird dies die Ecke ULB sein (vgl. [Fera]). Der Puffer allein allerdings reicht noch nicht, außerdem muss es mindestens eine zweite Kante (bzw. Ecke) geben, die der Reihe nach in den Puffer, und dann wieder heraus transportiert wird. Hier kommt nun zum ersten Mal zum Tragen, dass Paarvertauschungen von Kanten nur dann möglich sind, wenn auch gleichzeitig zwei Ecken vertauscht werden, und umgekehrt (siehe Satz 98 für die Erhaltung des Vorzeichens der Ecken- und Kantenpermutationen). Um sich nicht auf zufällig vertauschte Ecken (bzw. Kanten) zu verlassen, die die Bedingung des identischen Vorzeichens sichern, überlegt man sich für die Kanten und die Ecken jeweils genau einen Algorithmus, der zwei bestimmte Kanten und zwei bestimmte Ecken tauscht. Während der Lösung muss diese Wahl nicht mehr verändert werden und ist bereits ausreichend, zudem sollte man eine Veränderung zum leichteren Einprägen unterlassen.

Die Kanten

Für die Kanten wird in der Konvention nach Pochmann (vgl. [Poc]) die sogenannte „T-Permutation“ verwendet, die zum Algorithmenkomplex für Permutationen der CFOP - Methode aus Abschnitt 3.1 gehört und die Vertauschung (UR, UL) sowie (URF, UBR) durchführt (daher die Bezeichnung „T“). Die verwendete Zugfolge lautet konkret

$$R \ U \ R^{-1} \ U^{-1} \ R^{-1} \ F \ R^2 \ U^{-1} \ R^{-1} \ U^{-1} \ R \ U \ R^{-1} \ F^{-1} \quad [\text{Fera}].$$

Im Puffer möge nun im verdrehten Zustand eine gewisse Kante liegen, die dort nicht korrekt platziert ist. Man suche zunächst unter Beachtung der Orientierung, wo sich aktuell der richtige Platz für jene Kante befindet. Dazu kann man die triviale Benennung nach den Anfangsbuchstaben der Farben der Sticker oder Facets verwenden, dabei zur Vermeidung der Uneindeutigkeit für den Buchstaben G (Grün, Gelb) aber auf die englischen Bezeichnungen zurückgreifen (hier wird das Problem dann mit Y für Yellow vermieden). Hat man identifiziert, welches die erste Kante ist, die im Puffer liegt (z.B. BW, Blue-White, wobei der zuerst genannte Sticker oben, der zuletztgenannte rechts liegt), so bringt man mit einem geschickten Element der Cube Group M die Kante an die Position UL, die sich aktuell noch am Ziel-Platz BW befindet. Wenn man sich BW und nicht WB gemerkt hat, so ist auch genau der Sticker in die obere Ebene an die Stelle U von UL zu bringen, der an der Stelle B von BW liegt, anderenfalls würde man zwar die Permutation, nicht aber die Orientierung der ersten Kante lösen. Nach dem vorbereitenden Move, einem sogenannten Setup-Move (vgl. [Fera]), wird der oben angesprochene Vertauschungsalgorithmus durchgeführt, und der Setup-Move wieder rückgängig gemacht. Dies entspricht mathematisch gesehen der Konjugation der T-Permutation mit einem Setup-Move (vgl. 19). Allerdings muss eine Bedingung an den Setup-Move gestellt werden, sodass die Puffer-Steine unberührt bleiben: der Setup-Move darf weder die beiden Ecken URF und UBR, noch die Puffer-Kante UR bewegen (zumindest nicht im Endresultat des Setup-Moves). Dann sichert man die Invarianz der drei Puffer-Steine gegenüber Konjugation mit erlaubten Setup-Moves und kann mit den Vertauschungen wie gewohnt fortfahren. Für den Fall, dass nach dem mehrmaligen Durchführen dieser Vertauschungen die Kanten noch nicht alle gelöst, aber der Pufferstein der Kante UR bereits zurückgekehrt ist, können Spezialfälle auftreten:

- a) Es liegen noch Kanten vor, die sich weder in der richtigen Orientierung, noch in der richtigen Permutation befinden: so muss mit einem neuen Zykel begonnen werden.

Eine dieser nicht gelösten Kanten wird per Konjugation mit der T-Permutation in den Puffer gebracht und dann das oben erläuterte Prinzip wiederholt, bis sich der korrekte Pufferstein wieder im Puffer befindet. Dieser Fall kann so oft auftreten, wie es disjunkte Zykel der Kanten am verdrehten Zauberwürfel gibt. Für jeden Zykel führt allerdings die Lösung der vorletzten Kante bereits dazu, dass auch der Puffer wieder in die Pufferposition gebracht wird (denn induktiv über die Länge n der Zykel betrachtet, ist bei $n - 1$ korrekt platzierten Elementen nur noch ein Platz (der richtige) für das n -te Element, hier den Puffer, vorhanden).

- b) Der Pufferstein der Kante UR ist in sich verdreht (und damit mindestens noch eine weitere Kante). Man vertausche der Pufferstein mit einem der ebenfalls verdrehten Kantensteine per Konjugation mit der T-Permutation zu einem der beiden Sticker der ebenfalls verdrehten Kante. Im zweiten Schritt führe man die Konjugation mit der T-Permutation für den anderen Sticker durch. Dadurch löst sich, aufgrund der Invarianz des Gesamtwinkels der Kanten (vgl. 98), auch die Orientierung des Puffersteins. Bei Bedarf ist dieser Schritt mit allen in sich verdrehten Kanten zu wiederholen.

Behandlung einer ungeraden Anzahl von verwendeten Paarvertauschungen der Kanten

Offenbar ist der Nebeneffekt hierbei, dass man, obwohl man nur die Kanten betrachtet, mit jeder einzelnen Permutation außerdem auch die beiden Ecken URF und UBR vertauscht. Hat man Glück und die Anzahl verwendeter Vertauschungen bzw. Durchführungen der T-Permutation ist gerade, muss man beim Übergang zu den Ecken nichts beachten. War die benötigte Anzahl allerdings ungerade (sodass das Signum der Permutation der Kanten zu Beginn negativ war), so muss mit der Anwendung eines Paritätsalgorithmus sichergestellt werden, dass die aktuell vertauschten Ecken URF und UBR wieder an ihre Ausgangspositionen vor der Lösung der Kanten gebracht werden. Ebenso wird mit diesem Algorithmus den Kanten, die gleich bei der Lösung der Ecken als Puffer verwendet werden, eine zusätzliche Paarvertauschung hinzugefügt (die sich im Laufe der Lösung der Ecken wieder aufheben wird, denn auch dort muss wegen Satz 98 eine ungerade Anzahl von Vertauschungen durchgeführt werden). Der angesprochene Algorithmus ist eine sogenannte R-Permutation und lautet

$$U^{-1} (L \ U^2 \ L^{-1} \ U^2 \ L \ F^{-1} \ L^{-1} \ U^{-1} \ L \ U \ L \ F \ L^2 \ U) \ U \quad [\text{Fera}].$$

Diese vertauscht konkret (UL, UB) und (URF, UBR), was an ein gespiegeltes „R“ erinnert und so den Namen rechtfertigt.

Die Ecken

Für die Ecken wird der Puffer ULB verwendet, der mithilfe der „Y-Permutation“ mit der Ecke URF vertauscht werden kann. Zusätzlich wird bei dieser Y-Permutation auch das Paar (UL, UB) vertauscht, was optisch auf die Bezeichnung „Y“ schließen lässt:

$$F \ R \ U^{-1} \ R^{-1} \ U^{-1} \ R \ U \ R^{-1} \ F^{-1} \ R \ U \ R^{-1} \ U^{-1} \ R^{-1} \ F \ R \ F^{-1} \quad [\text{Poc, Fera}].$$

Die Lösung der Ecken erfolgt nach demselben Prinzip wie die der Kanten und man beginnt damit, zu verfolgen, an welche Stelle die Ecke transportiert werden muss, die sich aktuell im Puffer ULB befindet. Die Benennung der Ecken sollte hier ebenfalls die Orientierung mit einschließen, das heißt z.B. YOG (Yellow-Orange-Green) ist nicht zu verwechseln mit OGY.

Wenn man immer beachtet, welcher der obere Sticker ist (also der, der in ULB auf der U-Seite liegt), muss man mithilfe von Setup-Moves genau den Sticker der Ecke an die Position URF bringen, der aktuell noch dort liegt, wo später der U-Sticker der jetzigen Ecke ULB liegen soll. Auch hier ist die Konjugation der Y-Permutation mit Elementen aus M nicht ganz beliebig, sondern schließt all jene Moves aus, die die Steine ULB, UB oder UL beeinflussen (also permutieren oder orientieren). Zumindest kann man aufgrund der vorangegangenen etwaigen Anwendung eines Paritätsalgorithmus, falls die Anzahl zu vertauschender Kanten ungerade war, davon ausgehen, dass insgesamt auch bei den Ecken eine ungerade Anzahl von Vertauschungen notwendig ist. Diese könnten allesamt innerhalb eines Zyklus geschehen, oder wieder zu Spezialfällen wie bei den Kanten führen.

- a) Die Puffer-Ecke ULB ist (möglicherweise in sich verdreht) nach der Lösung eines Zyklus von Ecken wieder in der Puffer-Position angekommen, aber nicht alle Ecken sind bereits gelöst. Es muss mit einem neuen Zykel begonnen werden, was sich „breaking into a new cycle“ nennt (vgl. [Fera]). Dazu bringt man eine ungelöste Ecke per Konjugation der Y-Permutation in den Puffer und fährt dann in diesem neuen Zykel fort wie sonst auch. Je nach Anzahl der disjunkten Zykel der Ecksteine ist dieser Vorgang zu wiederholen.
- b) Zwei oder mehrere Ecksteine sind in sich verdreht, aber richtig permutiert. Es sei bemerkt, dass man diesen Fall darauf zurückführen kann, dass eine Ecke um 120° , eine andere um 240° verdreht ist (vergleiche den Beweis zu Satz 93). Dabei bringt man per Konjugation der Y-Permutation eine der Ecken in den Puffer, und löst diese dann (z.B. merkt man sich zunächst UFL und dann FLU, falls man erreichen möchte, dass die Ecke UFL um 120° gedreht wird). Der ursprüngliche Puffer muss diese Drehung allerdings ausgleichen (vgl. Satz 98), da keine andere Ecke von diesem Prozess beeinflusst wird. Ebendieser Satz garantiert aber auch, dass es niemals nur eine zu orientierende Ecke geben kann, und dass die Winkelsumme immer kongruent Null modulo dem Vollwinkel ist. Dadurch wird dieser Prozess irgendwann terminieren.

4 Ein verwandtes Drehpuzzle: der Skewb

Neben dem Zauberwürfel gibt es eine Vielzahl weiterer Drehpuzzles, deren Gruppenstruktur sich ähnlich untersuchen lässt wie die des Zauberwürfels. Als ein Beispiel für die Beschreibung verwandter Drehpuzzles wird nun noch der Skewb besprochen, wobei sich insbesondere Kapitel 13.2 aus [Joy08] als Quelle anbot. Eine Darstellung einer modernen, stickerlosen Variante mit konkaven Seiten für mehr Halt beim schnellen Lösen findet sich in Abbildung 4.1. Zusammengehalten wird der Skewb ähnlich wie der Zauberwürfel über einen inneren Mechanismus, der allerdings in diesem Fall tetraederförmig angeordnet ist (im Vergleich zum „Achsenkreuz“ mit sechs rechtwinklig platzierten Halterungen beim Zauberwürfel). Diesen inneren Tetraeder kann man in Abb. 4.2 sehen.



4.1: Der Skewb



4.2: Der innere Tetraeder des Skewbs

Abbildung 4: Der Skewb und der Mechanismus im Inneren, eigene Darstellung

Dementsprechend gibt es vier voneinander unabhängige Drehzentren, die den vier Ecken entsprechen, die an die Verstrebung in Tetraederform angeschraubt sind. Im zusammengebauten Zustand entsprechen diese Drehzentren ohne Einschränkung (bis auf Rotationen des gesamten Skewbs) gerade den Ecken FLU, UBR, BLD und DFR. Beginnt man also mit einer Ecke, von der man weiß, dass sie am Tetraeder angeschraubt ist, so sind auch alle drei Ecken, die mit der ersten genau eine Seite gemeinsam haben, am Tetraeder angeschraubt. Alle den auf diesem Weg definierten Ecken diametral gegenüberliegenden Ecken sind nicht am Tetraeder angeschraubt und können auch nicht durch beliebige Drehungen an die Stelle der zuvor definierten Ecken gebracht werden. Dies liefert schon die Begründung dafür, dass es zumindest die in Lemma 115 angesprochenen zwei Bahnen der Eckenmenge gibt.

4.1 Notation

Zunächst soll wie schon für den Zauberwürfel ein Schema folgen, wie die einzelnen Sticker (bzw. Facets) des Skewbs bezeichnet werden sollen. Die Bezeichnung der Ecken kann aus Tabelle 4 übernommen werden. Die Centers bzw. Mittelstücke werden wie die Seiten, auf denen sie sich befinden, benannt (also mit R, L, U, D, F, B). In Anlehnung an die Abbildungen 1.2 und 2 folgt nun dieses Schema:

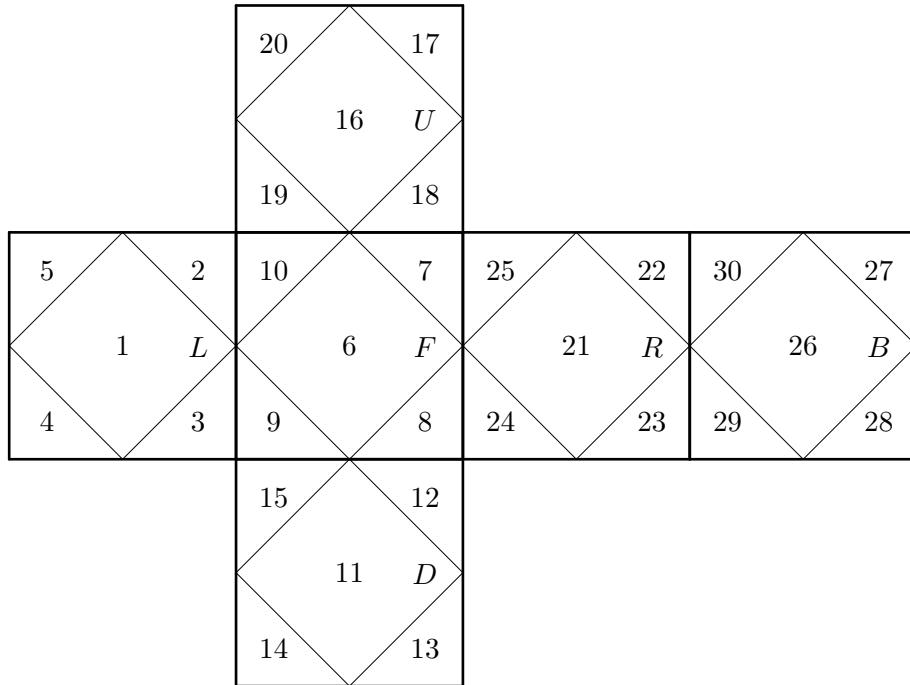


Abbildung 5: Bezeichnung der Skewb-Facets nach [Joy08], S. 77

Da man am Skewb keine „Layer“ bzw. Ebenen / Seiten wie am Zauberwürfel drehen kann, sondern nur an Ecken angrenzende Teile (das sind drei Mittelstücke und drei Ecken), muss eine Neudefinition der Basic Moves für den Skewb erfolgen.

Definition 105 (Basic Moves des Skewbs, [Joy08], S. 77 f.). *Unter Verwendung der Zyklenschreibweise von disjunkten Zykeln gilt für einen jeden der Basic Moves als Drehung um 120° um die angegebene Ecke folgendes:*

$$\begin{aligned}
 FUR &= (2, 30, 12)(6, 16, 21)(7, 18, 25)(8, 19, 22)(10, 17, 24) \\
 RUB &= (5, 13, 7)(16, 26, 21)(17, 30, 22)(18, 27, 23)(20, 29, 25) \\
 BUL &= (1, 26, 16)(2, 28, 17)(4, 30, 19)(5, 27, 20)(10, 14, 22) \\
 LUF &= (1, 16, 6)(2, 19, 10)(3, 20, 7)(5, 18, 9)(15, 27, 25) \\
 FDR &= (3, 18, 29)(6, 21, 11)(7, 23, 15)(8, 24, 12)(9, 25, 13) \\
 BDR &= (4, 8, 17)(11, 21, 26)(12, 22, 28)(13, 23, 29)(14, 24, 30) \\
 FDL &= (1, 6, 11)(2, 8, 14)(3, 9, 15)(4, 10, 12)(19, 24, 28) \\
 LDB &= (1, 11, 26)(3, 13, 27)(4, 14, 28)(5, 15, 29)(9, 23, 20)
 \end{aligned}$$

Auch wenn die Nutzung von vier nicht-angrenzenden Ecken als Drehachse für die Basic Moves ausreichen würde (schließlich wird dabei immer genau die eine Hälfte gedreht, die andere Hälfte des Skewbs fixiert, vgl. [Joy08], S. 77 und S. 253), wurden hier der Vollständigkeit halber alle möglichen einfachen Drehungen um eine der acht Ecken mitaufgenommen.

Wie schon in Def. 105 angesprochen, würden vier Basic Moves ausreichen, um die gleich eingeführte Gruppe, die sog. „Skewb Group“ zu erzeugen. Zum Beispiel ließe sich dies mit *FLU*, *BRU*, *FRD* und *BLD* bewerkstelligen (keine zwei Ecken liegen nebeneinander, vgl. [Voi], S. 3). Auch mit Blick auf den inneren Aufbau des Skewbs wird schnell deutlich, dass diese Basic Moves ausreichend wären und zum tetraederförmigen Mechanismus korrespondieren, der es nicht gestattet, die vier dort festgeschraubten Ecken untereinander zu permutieren. Diese vier Ecken werden später die Rolle der Mittelstücke bei der Beschreibung des Zauberwürfels übernehmen. Gleichzeitig folgt dann auch eine Referenz, welche Farbe zwischen welchen Ecken des gelösten Skewbs anzusiedeln ist. Der Einfachheit halber orientiert sich die Definition aber dennoch an den Ausführungen in [Joy08], S. 253 f., auch wenn diese Definition nicht minimal ist.

Definition 106 (Skewb Group, [Joy08], S. 253 f.). *Die von den Basic Moves aus Def. 105 erzeugte Gruppe $G = \langle FUR, FLU, BRU, BUL, DFR, DLF, BDR, BDL \rangle$ wird Skewb Group genannt.*

Eine weitere Definition beschäftigt sich mit zwei zur weiteren Beschreibung notwendigen Mengen des Skewbs.

Definition 107 (Eckenmenge und Mittelstückfacetmenge für den Skewb, [Joy08], S. 253). *Die Menge aller Ecken des Skewbs (aufgefasst als Blöcke) werde mit V (für Vertices) und die Menge aller Mittelstückfacets mit C (für Centers) bezeichnet.*

Analog zum Vorgehen für den Zauberwürfel wird auch direkt die Gruppe aller „erlaubten“ und „nicht erlaubten Moves“, also der Construction Group des Skewbs, eingeführt.

Definition 108 (Construction Group des Skewbs, [Joy08], S. 254). *Die Gruppe, die durch Auseinandernehmen und beliebiges Zusammenbauen des Skewbs erzeugt wird, wird mit G^* bezeichnet.*

Analog zur Beschreibung des Zauberwürfels wird ein Modell zur Beschreibung der Supergroup des Skewbs bereitgestellt.

Definition 109 (Supergroup des Skewbs, [Joy08], S. 254). *Jedes Mittelstückfacet sei mit einem Pfeil von einer Ecke zur gegenüberliegenden Ecke beschriftet. Auf diese Weise wird eine Orientierung der Menge aller Mittelstückfacets erklärt. Die Gruppe von Permutationen der Mittelstückfacets, der Orientierung von Mittelstückfacets, sowie der Permutation und Orientierung der Ecken des Skewbs, die von den Basic Moves erzeugt wird, wird mit $G_{super} = \langle FUR, FLU, BRU, BUL, DFR, DLF, BDR, BLD \rangle$ („Supergroup des Skewbs“) bezeichnet. Wie schon für die Skewb Group aus Def. 106 werde eine Construction Group (analog zu 108) für die Supergroup des Skewbs definiert und mit G_{super}^* bezeichnet.*

4.2 Identifikation der Orientierungen und Permutationen mit bekannten Gruppen

Wie bei der Beschreibung der Cube Group werden die Orientierungen mithilfe zyklischer Gruppen beschrieben (vgl. Def. 85).

Definition 110 (Orientierungen der Cubies des Skewbs, [Joy08], S. 254). *Die Orientierung der Ecken werde mit $y(g) \in Z_3^8 = \{0, 1, 2\}^8$, die Orientierung der Mittelstücke (verwendet für die Beschreibung der Supergroup) mit $z(g) \in Z_4^6 = \{0, 1, 2, 3\}^6$ bezeichnet. Die Werte bzw. Komponenten innerhalb der gerade definierten Vektoren ergeben sich durch Vergleich mit einer Referenzmarkierung, die für die Ecken auf jedem Up- und Down-Facet liegt. Für die Center wird die Referenzierung mithilfe der in Def. 109 eingeführten Pfeile vollzogen. Wie für Θ_c im Beweis zu Satz 92 wird die Gesamtorientierung über die Summe aller einzelnen Orientierungen bestimmt. $z(g)$ macht eine Aussage darüber, um das Wievielfache von 90° das j -te Mittelstück gedreht wurde, $y(g)$ um das Wievielfache von 120° die j -te Ecke gedreht wurde. Die Orientierungen werden im Beweis von Satz 112 nochmals aufgegriffen.*

Auch die Permutationen können analog zur Beschreibung des Rubik's Cubes mit den symmetrischen Gruppen der Mittelstück- und Eckenmenge in Verbindung gebracht werden.

Lemma 111 (Permutationen der Ecken und Mittelstücke des Skewbs, [Joy08], S. 254). *Sei S_C die symmetrische Gruppe auf der Centermenge C und S_V die symmetrische Gruppe auf der Eckenmenge V . Dann gibt es Homomorphismen $\rho : G \rightarrow S_C$ und $\sigma : G \rightarrow S_V$ derart, dass für jeden Move $g \in G$ gilt: $\rho(g) \hat{=} \text{Permutation der Mittelstück(facets)}$, die durch g bedingt ist und $\sigma(g) \hat{=} \text{Permutation der Ecken}$, die durch g bedingt ist.*

Beweis. Klarerweise ist es nicht von Relevanz, ob man erst mehrere Moves aus G verwendet, um dann die zugehörige Permutation einer der angegebenen Mengen zu erzielen, oder ob man sich für jeden Move zunächst ansieht, welche Permutationen damit assoziiert sind, um diese dann zu komponieren. \square

Satz 112 (Einbettung in direkte Produkte bekannter Gruppen, [Joy08], S. 254). *Seien $H = Z_3^8 \times S_C \times S_V$ und die Abbildung $\cdot : H \times H \rightarrow H$ gegeben mit der Abbildungsvorschrift $(\vec{y}, r, s) \cdot (\vec{y}', r', s') = (r^{-1}(\vec{y}') + \vec{y}, rr', ss')$. Ebenso sei $H_{super} = Z_3^8 \times S_V \times Z_4^6 \times S_C$ und $\cdot : H_{super} \times H_{super} \rightarrow H_{super}$ gegeben mittels*

$$(\vec{y}, r, \vec{z}, s) \cdot (\vec{y}', r', \vec{z}', s') = (r^{-1}(\vec{y}') + \vec{y}, rr', s^{-1}(\vec{z}') + \vec{z}, ss').$$

Dann gibt es einen Monomorphismus von G nach H und einen Monomorphismus von G_{super} nach H_{super} .

Beweis. Jeweils ist zu zeigen, dass es einen Homomorphismus gibt, der zugleich injektiv ist. So wie H und H_{super} definiert sind, folgt leicht, dass die angenommenen Homomorphismen existieren. So kann man alle Komponenten durchgehen und plausibel machen, dass die Abbildungsvorschrift genau die richtige für eine Hintereinanderausführung von Moves aus G bzw. G_{super} ist. Die Komponenten rr' und ss' sind klar, sie beschreiben jeweils die Hintereinanderausführung von Permutationen auf den Mengen $\{1, \dots, 8\}$ bzw. $\{1, \dots, 6\}$, die man mit bijektiven Selbstabbildungen auf der Ecken- bzw. Mittelstückmenge identifizieren kann. Analog zu Lemma 86 bestimmt sich die Orientierung eines Cubies aus der Orientierung, die von dem erstausgeföhrten Element in G bzw. G_{super} bewirkt wird und zusätzlich der, die das zuletzt ausgeführte auf den Cubie ausübt, der von der ersten Permutation an die betrachtete Stelle gebracht wurde. Das Argument funktioniert analog für Ecken- und Mittelstücke am Skewb. Für die Injektivität muss gelten, dass jedes Element der oben angegebenen Gruppen von G bzw. G_{super} maximal einmal getroffen wird. Anders kann man auch die Kontraposition beweisen und aus zwei ungleichen Elementen von G (bzw. G_{super}) folgern, dass dann

4 Ein verwandtes Drehpuzzle: der Skewb

auch das Bild in $Z_3^8 \times S_C \times S_V$ (bzw. $Z_3^8 \times S_V \times Z_4^6 \times S_C$) ungleich ist. Zu ungleichen Moves aus G bzw. G_{super} gehören auf mindestens einer der Mengen, die den Gruppen der direkten Produkte unterliegen, unterschiedliche Permutationen, d.h. sie unterscheiden sich entweder in der Permutation der Ecken oder Mittelstücke oder in der Orientierung jener Cubies. Dies sieht man daran, dass nur ein einzelner Basic Move schon dazu führt, auf einer der angesprochenen Mengen eine Permutation zu erwirken. Deshalb sind die Beschreibungen der Basic Moves als Elemente von H (bzw. H_{super}) nachfolgend tabellarisch aufgelistet. Da so die Injektivität bereits für G nach H gezeigt wurde, folgt aus demselben Argument bereits, dass auch die Abbildung von G_{super} nach H_{super} injektiv sein muss (denn auch ein einzelner veränderter Basic Move erzeugt eine Neuorientierung der Mittelstücke am Skewb, siehe Tabelle 17). Zum Lesen der Tabelle wird die Notation verwendet, die auch schon bei der Beschreibung des Zauberwürfels aufgetreten ist. Zum einen werden die Ecken bezeichnet wie in Abschnitt 2.3.2, mit den Markierungen, wie sie im selben Abschnitt festgelegt wurden. Andererseits wird die Orientierung durch das Prinzip vorgenommen, welches in Def. 110 eingeführt wurde. Durchnummerniert werden die Mittelstücke von 1 bis 6 wie folgt: F, R, B, L, U, D. Aus Abbildung 5 geht eine Möglichkeit zum Anbringen von Referenzmarkierungen der Mittelstücke hervor. So wird die (willkürliche) Markierung immer dort mit ihrer Pfeilspitze angebracht, wo sich die Bezeichnung des Mittelstücks befindet, in der erwähnten Abbildung zeigen demnach alle imaginären Pfeile nach rechts. Auf dieser Basis aufbauend wurde die Spalte zu \vec{z} erstellt, da diese in [Joy08], S. 256, zur Vervollständigung noch gefehlt hat. Dies ist nur eine andere Art zu beweisen, dass die Abbildung einen trivialen Kern hat.

$g \in G$	\vec{z}	s	\vec{y}	r
UFR	(1, 2, 0, 0, 1, 0)	(1, 5, 2)	(1, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 0)	(2, 6, 4)
UFL	(1, 0, 0, 1, 2, 0)	(1, 4, 5)	(2, 0, 2, 1, 0, 0, 2, 0)	(1, 7, 3)
DFR	(1, 1, 0, 0, 0, 2)	(1, 2, 6)	(2, 0, 0, 0, 2, 1, 2, 0)	(1, 5, 7)
DFL	(1, 0, 0, 2, 0, 1)	(1, 6, 4)	(0, 0, 0, 2, 0, 2, 1, 2)	(4, 6, 8)
BRU	(0, 1, 3, 0, 0, 0)	(2, 5, 3)	(2, 1, 2, 0, 2, 0, 0, 0)	(1, 3, 5)
BLU	(0, 0, 1, 0, 3, 0)	(3, 5, 4)	(0, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 2)	(2, 4, 8)
DBR	(0, 0, 1, 0, 0, 3)	(2, 3, 6)	(0, 2, 0, 0, 1, 2, 0, 2)	(2, 8, 6)
DBL	(0, 0, 3, 1, 0, 0)	(3, 4, 6)	(0, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 1)	(3, 7, 5)

Tabelle 17: Permutationen und Orientierungen, die die Basic Moves des Skewbs bewirken

Eine weitere Folgerung aus Tabelle 17 ist, dass zumindest vier der Basic Moves wie sie oben definiert wurden (Def. 105) überflüssig sind, denn bis auf Symmetrie handelt es sich bei Basic Moves wie UFR und DBL um dieselben Permutationen bzw. Orientierungen des Skewbs. So wie die Ecken bzw. Mittelstücke durchnummert sind, sind die Vektoren \vec{y} äquivalenter Basic Moves beispielsweise gerade in der Mitte gespiegelt (wie für UFR und DBL mit (1, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 0) bzw. (0, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 1)). Auffällig, wenn auch nicht unerwartet ist außerdem, dass in den Permutationen der Ecken verwandter Basic Moves (im gerade erläuterten Sinne) immer genau zwei aller acht Ecken nicht permutiert werden, das sind genau die Ecken, um die die anderen Cubies gedreht werden, also die Drehzentren. \square

4.3 G als direktes Produkt von G_C und G_V

Satz 113 (G ist direktes Produkt, [Joy08], S. 254). *Sei G_C die Gruppe, die nur auf die Mittelstücke wirkt, und G_V die Gruppe, die nur auf die Ecksteine wirkt. Dann ist die Gruppe G aus Def. 106 gegeben durch das direkte Produkt $G = G_C \times G_V$.*

Beweis. Zum Beweis wird überprüft, ob alle Eigenschaften des direkten Produkts aus Definition 38 erfüllt sind. G_V und G_C sind Normalteiler (und insbesondere Untergruppen), denn sie sind jeweils unter Konjugation mit Elementen aus G abgeschlossen bzw. invariant (analog zu früheren Beweisen wie beispielsweise in Satz 74) und sind Teilmengen der mit G assoziierten Menge. Weiterhin gilt $G \subseteq G_V \cdot G_C$ (jedes Element aus G lässt sich durch ein Produkt aus $G_V \cdot G_C$ erzeugen) und $G \supseteq G_V \cdot G_C$ (alle Produkte aus $G_V \cdot G_C$ sind in G enthalten) und damit $G = G_V \cdot G_C$. Es ist zudem offensichtlich, dass G_V und G_C nur das neutrale Element gemeinsam haben. \square

Lemma 114 (G_C besteht nur aus geraden Permutationen, [Joy08], S. 255). *Es gilt $G_C \cong A_6$.*

Beweis. Aus Tabelle 17 geht hervor, dass jeder Basic Move des Skewbs einen 3-Zykel auf der Mittelstückmenge erzeugt. 3-Zykel sind gerade Permutationen (also das Signum ist +1, denn die 3-Zykel sind ein Produkt aus zwei Transpositionen, siehe Satz 56), Produkte von 3-Zykeln derselben Menge sind wieder 3-Zykel, und die 3-Zykel der symmetrischen Gruppe $S_C \cong S_6$ erzeugen die alternierende Gruppe mit sechs Elementen, A_6 (dies wurde ebenfalls in Satz 56 gezeigt). \square

Lemma 115 (G_V besitzt zwei Bahnen, [Joy08], S. 255). *Die Ecksteine werden folgendermaßen eingeteilt: man beginne mit einer der vier Ecken, die am inneren Tetraeder angeschraubt sind, und füge die drei Ecken hinzu, die zu den an der ersten Ecke anliegenden Flächen liegen und gleichzeitig der ersten Ecke gegenüberliegen. Das sind genau die vier Ecken, die mit dem Mechanismus verschraubt sind (=: $G_{V,fix}$). Die zu dieser Menge disjunkte Menge der verbleibenden Ecken werde ebenfalls definiert, und zwar als $G_{V,frei}$. Man kann den Skewb beispielsweise so halten, dass die fixierten Eckencubies genau den Ecken 1,3,5,7 und die freien Eckencubies genau den Ecken 2,4,6,8 entsprechen, wenn man die Nummerierung aus Abschnitt 2.3.2 für die Ecken des Zauberwürfels übernimmt. Dann ist $G = G_{V,fix} \times G_{V,frei}$.*

Beweis. Dass man die Operation von G_V auf der Eckenmenge in zwei Bahnen aufteilen muss, ist klar, da der Mechanismus es nicht zulässt, andere als die vier festgeschraubten Ecken an deren Stelle zu bringen. Offenbar ist ein Element aus $G_{V,frei}$ immer in allen Bahnen der anderen Elemente in $G_{V,frei}$ enthalten (analog für Elemente und Bahnen aus $G_{V,fix}$). Nach dem Umwege-Prinzip aus früheren Beweisen im Zuge der Beschreibung der Cube Group lässt sich einerseits ein ausgewähltes Element aus $G_{V,frei}$ bzw. $G_{V,fix}$ an die Stelle jedes anderen Elements derselben Menge bringen, und andererseits, mithilfe der Inversen, auch umgekehrt. Also gibt es nicht mehr als die genannten Bahnen (vgl. Bemerkung 18). Dies liefert andererseits aber auch bereits eine Begründung dafür, dass $G_{V,fix}$ und $G_{V,frei}$ invariant unter Konjugation mit einem Element aus G_V sind (Voraussetzung dafür, dass sie Normalteiler von G_V sind, die Begründung ist analog zur Begründung für die Normalteiler, die in der Cube Group besprochen worden sind, etwa N_e und N_c). Sie sind weiterhin Untergruppen von G_V (Teilmengen und abgeschlossen bei Hintereinanderausführung). Auch kann man feststellen, dass $G_V \subseteq G_{V,fix} \cdot G_{V,frei}$ und $G_V \supseteq G_{V,fix} \cdot G_{V,frei}$ gelten (mit $G_{V,fix}$ und $G_{V,frei}$ werden gerade alle Elemente aus G_V erzeugt, aber nicht mehr), was man auch als

4 Ein verwandtes Drehpuzzle: der Skewb

$G_V = G_{V,fix} \cdot G_{V,frei}$ schreiben kann. Zuletzt ist auch erfüllt, dass $G_{V,fix} \cap G_{V,frei} = e$ ist, und damit insgesamt, dass $G = G_{V,fix} \times G_{V,frei}$. \square

Satz 116 (G_V als Untergruppe, [Joy08], S. 255). Für G_V gilt $G_V \leq (Z_3^4 \rtimes S_4) \times (Z_3^4 \rtimes S_4)$. Präziser gilt sogar: G_V ist eine Untergruppe von $(Z_3^4 \rtimes A_4) \times (Z_3^4 \rtimes A_4)$ vom Index 9.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Satz 112 und daraus, dass man Lemma 86 auf den Skewb und seine Eckenmenge(n) anwenden kann. Damit ist bereits ersichtlich, dass die Gruppen $G_{V,fix}$ sowie $G_{V,frei}$ maximal wie ein Kranzprodukt auf jeweils vier Ecken mitsamt ihren Facets operieren können (äquivalent zur Schreibweise mit einem semidirekten Produkt aus base group und top group, siehe Def. 80 und Bem. 81). Jeweils drei Facets bilden auf jeder Ecke einen Block, der im Gesamten von Permutationen der jeweiligen Teil-Eckenmenge permutiert werden kann. Die Untergruppeneigenschaft erhält man dann daraus, dass G_V als Teilmenge von $(Z_3^4 \rtimes S_4) \times (Z_3^4 \rtimes S_4)$ bezüglich Komposition abgeschlossen ist. Zum Beweis der zweiten Aussage verwendet man die erste, die bereits gezeigt wurde. Man kann ein Element aus G_V dementsprechend schon als Tupel $h = (s, \vec{u}(h), t, \vec{v}(h)) \in G_V$ darstellen, mit $s \in S_4$, $t \in S_4$, sowie $\vec{u}(h) \in Z_3^4$ und $\vec{v}(h) \in Z_3^4$. Betrachtet man nur die Permutationen auf beiden Bahnen, so fällt auf, dass diese Signum +1 besitzen müssen, also jeweils Elemente von A_4 sind. Dies folgt wie schon im Beweis derselben Eigenschaft für die Mittelstücke daraus, dass jeder Basic Move einen 3-Zykel auf einer der beiden Bahnen bewirkt (siehe Tabelle 17 und Beweis zu Lemma 114). Dies zeigt bereits die Behauptung, dass $G_V \leq (Z_3^4 \rtimes A_4) \times (Z_3^4 \rtimes A_4)$ gilt. Für den Index kann man die Orientierungen heranziehen, die in \vec{y} aufgelistet sind. So gibt es ein $h \in G_V$ mit $s \in A_4$, $u(h) = (0, 0, 0, 0)$, $t \in A_4$ und $v(h) = (0, 0, 0, 0)$, sowie ein $h' \in G_V$ mit $s = \text{id}$, $t = \text{id}$ und $u(h)$ sowie $v(h)$ sind gerade Permutationen von $(1, 2, 0, 0)$. Beispiele für diese Forderungen sind die Moves $(FLUDFR FLU'DFR')^3$ für die erste Behauptung (aus [Sch], zwei disjunkte Paarvertauschungen in einer der beiden Bahnen, also eine gerade Permutation, die sich nach Satz 56 auch als Produkt von 3-Zyklen darstellen lässt) und $(FRU FLU)^6(BDL BDR)^3(DFR DFL)^3$, siehe [Joy08], S. 295, für die zweite Behauptung (pro Bahn wird genau eine Ecke um 120° , eine gegenüberliegende um 240° gedreht). Möchte man diesen Effekt stattdessen nur auf einer der beiden Bahnen erzielen, so ist $(FUR' LUF FUR LUF')^2(LUF' BUL LUF BUL')^2$ ein möglicher Move (dreht Ecke FLU um 240° , sowie Ecke BRU um 120° , aus [Str], S. 11). Anders gesagt wird also verwendet, dass es Moves gibt, die die Orientierung der Ecken nicht ändern, aber die Ecken von $G_{V,fix}$ bzw. $G_{V,frei}$ permutieren und andererseits, dass es Moves gibt, die keine Permutationen vornehmen, aber eine Ecke einer der beiden Bahnen um 120° , eine andere um 240° drehen. Mit diesen beiden Bemerkungen kann man, wenn man Konjugationen hinzunimmt, alle möglichen Permutationen bzw. Orientierungen von G_V erzeugen (die Konjugationen sind aufgrund der Normalteilereigenschaft erlaubt). Da [Joy08], S. 255 selbst nur anführt, dass die Behauptungen mit GAP bestätigt wurden, allerdings keine Moves hierzu angibt, war die obige Auflistung nicht vollständig, reicht zur Erzeugung gerader Permutationen und möglicher Orientierungen allerdings aus (die konkrete Angabe eines Moves zur bloßen Permutation dreier Ecken sei wie in [Joy08], S. 255 erwähnt einem Computeralgebra system überlassen). Andernfalls benutze man dazu den zusammengesetzten Algorithmus, der allerdings mehrere Schritte benötigt: Man beginne mit einem gelösten Skewb. Dann ersetze man die Ecke DFR mit RUB, was einem intuitiven ersten Schritt entspricht, in Anlehnung an [Str]:

1. $FUR' FLU FUR' FLU'$

Man vertausche die falsch platzierten Mittelstücke wieder in ihre Ausgangsposition, der Anfangs- und Endmove bereiten einen sogenannten „U-Perm“ vor bzw. machen die Vorbereitung rückgängig (man konjugiert mit DFR) [Str]:

$$2. \text{ DFR } (LUF' BUL LUF BUL' RUB' RFU RUB RFU') \text{ DFR}'$$

Wie man dann allerdings sieht, wird die Orientierung nicht erhalten. Konkret werden damit die Ecken FUR sowie LBU um 240° gedreht. Offenbar kann G_V dann nicht ganz $(Z_3^4 \rtimes A_4) \times (Z_3^4 \rtimes A_4)$ entsprechen, dann müsste auch die bloße Vertauschung von drei Ecken ohne Einschränkung an die Orientierung nicht permutierter Ecken möglich sein. Dadurch, dass die Orientierung der Ecke, die man zuletzt betrachtet, durch die anderen Eckenorientierungen festgelegt ist, nimmt man einen Freiheitsgrad bei den Eckenorientierungen aus Z_3^4 heraus, und dies gilt jeweils für $G_{V,fix}$ und $G_{V,frei}$. Wenn man ganz analog zu Def. 91 und Satz 92 vorgeht, erhält man jeweils für beide Bahnen von G_V eine Bedingung für den Gesamtwinkel, nämlich dass dieser modulo 2π gerade Null ist. Also kann gerade ein Drittel aller Z_3^4 mit Elementen aus $G_{V,fix}$ bzw. $G_{V,frei}$ getroffen werden. Die Orientierung des vierten Ecksteins beider Mengen wird eindeutig von den anderen drei Ecksteinen festgelegt. Wieder wird verwendet, dass man Z_3^3 mit einer Untergruppe von Z_3^4 identifizieren kann. Da die Bedingungen für beide Bahnen gelten, d.h. für beide Gruppen $G_{V,fix}$ und $G_{V,frei}$ muss der Index von G_V in $(Z_3^4 \rtimes A_4) \times (Z_3^4 \rtimes A_4)$ gerade $|((Z_3^4 \rtimes A_4) \times (Z_3^4 \rtimes A_4)) : G_V| = 3^2 = 9$ betragen. Dies führt außerdem auf die Isomorphie $G_V \cong (Z_3^3 \rtimes A_4) \times (Z_3^3 \rtimes A_4)$. \square

Korollar 117 (G als direktes Produkt bekannter Gruppen und ihre Mächtigkeit, [Joy08], S. 255 f.). Für G gilt: $G \cong A_6 \times (Z_3^3 \rtimes A_4) \times (Z_3^3 \rtimes A_4)$. Damit hat G die Mächtigkeit bzw. Gruppenordnung $|G| = \left(\frac{6!}{2}\right) \left(\frac{4!}{2}\right)^2 3^6 = 37\,791\,360$.

Beweis. Wegen Satz 116, Lemma 114 und Satz 113 folgt bereits die Behauptung bezüglich der Isomorphie. Dann kann man die Mächtigkeit von kartesischen Produkten ausnutzen: $|G| = \left(\frac{6!}{2}\right) \cdot \frac{3^4}{3} \cdot \left(\frac{4!}{2}\right) \cdot \frac{3^4}{3} \cdot \left(\frac{4!}{2}\right) = \left(\frac{6!}{2}\right) \cdot 3^6 \cdot \left(\frac{4!}{2}\right)^2 = 37\,791\,360$. \square

Bemerkung 118 (Die Struktur und Mächtigkeit von G^* , [Joy08], S. 255 f.). a) Für die Gruppe G^* aus Def. 108, bei der beliebiges Auseinander- und Zusammenbauen erlaubt ist, gilt: $G^* \cong S_6 \times S_8 \times Z_3^8$. Hier greift wieder das Argument, dass G^* zunächst direktes Produkt von Gruppen ist, die entweder auf Mittelstücken oder auf Ecken wirken. Da das Zusammenbauen allerdings beliebig (mit Abschrauben der fixierten Ecken vom Tetraeder) erfolgt, entfällt die Einteilung in zwei Eckenbahnen. Auch die Orientierungen unterliegen keiner Bedingung, sodass die volle zyklische Gruppe mit drei Elementen für alle acht Ecken verwendet wird. Da es sich bei den drei Gruppen um Normalteiler, also insbesondere Untergruppen handelt, deren Produkt ganz G^* ergibt (aber nicht mehr), und welche nur die Identität als Schnitt besitzen, führt dies auf das oben angegebene direkte Produkt.

b) Wegen a) ist die Wahrscheinlichkeit, einen lösbar Skewb zu erhalten, falls man Operationen aus G^* zulässt, nur $\frac{|G|}{|G^*|} = \frac{\left(\frac{6!}{2}\right)\left(\frac{4!}{2}\right)^2 3^6}{6!8!3^8} = \frac{1}{5040} \approx 0,0001984127 \approx 0,02\%$. Dabei wurde erneut verwendet, dass sich die Mächtigkeit der Gruppe bzw. die Gruppenordnung über die Mächtigkeit des kartesischen Produkts der den Gruppen unterliegenden Mengen berechnen lässt.

5 Fazit

In dieser Arbeit konnte die Gruppenstruktur dreier Drehpuzzles, die des Fotowürfels oder Picture-Cubes, die des Skewbs und allen voran die des Zauberwürfels analysiert werden. Mithilfe elementarer, bekannter Gruppen wie der symmetrischen Gruppe und der zyklischen Gruppe sowie der Verwendung verschiedener Produkte von Gruppen ((semi-)direktes Produkt und Kranzprodukt) ist es zudem möglich gewesen, die unvorstellbar großen Anzahlen möglicher Konstellationen zu berechnen. Mitunter erwies sich auch die zeitweise Be- trachtung größerer, aber weniger eingeschränkter Gruppen wie der Construction Group, als hilfreich, um von dort wieder auf den eigentlichen Untersuchungsgegenstand zu schließen, indem man die dort geltenden Bedingungen an Bekanntes hinzufügt. Nicht nur eventuell als abstrakt wahrgenommene Konzepte wie die Gruppe oder Operationen von Gruppen auf Mengen konnten so mit einem realen, beweglichen Objekt veranschaulicht werden und ließen damit auch aus didaktischer Sicht Anwendungen im Mathematikunterricht zu. Auch für die Lösungsmethodik selbst stellte die zuvor beschriebene Gruppenstruktur diverse Hinweise bereit, um sich selbstständig Lösungsansätze zu erschließen oder bereits vorhandene zu begründen oder zu verstehen. Die zugrundeliegende Struktur des Zauberwürfels zu verstehen und sie sich zunutze zu machen war aus der Sicht des Speedcubings ebenso wie aus der Perspektive der Mathematik faszinierend.

A Literaturverzeichnis

- [Ban82] Christoph Bandelow, *Inside Rubik's Cube and Beyond*, Birkhäuser, Boston, 1982.
- [Bos01] Siegfried Bosch, *Algebra, 8., korrigierte Auflage*, Springer, Berlin, 2001.
- [Com18] WCA Regulations Committee, *WCA Regulations and Guidelines*, <https://www.worldcubeassociation.org/regulations/wca-regulations-and-guidelines.pdf>, 2018, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.
- [Fera] Dénes Ferenc, *How to solve the Rubik's Cube Blindfolded*, <https://ruwix.com/the-rubiks-cube/how-to-solve-the-rubiks-cube-blindfolded-tutorial/>, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.
- [Ferb] ———, *New Rubik's Cube record: Yusheng Du - 3.47 seconds*, <https://ruwix.com/blog/yusheng-du-record-347/>, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.
- [Fis17] Gerd Fischer, *Lehrbuch der Algebra, 4. Auflage*, Springer, Wiesbaden, 2017.
- [FS10] Alexander H. Frey and David Singmaster, *Handbook of Cubik Math*, Lutterworth Press, Cambridge, 2010.
- [Hum96] John F. Humphreys, *A Course in Group Theory*, Oxford University Press, New York, 1996.
- [Joy08] David Joyner, *Adventures in group theory: Rubik's Cube, Merlin's machine, and other mathematical toys*, The Johns Hopkins University Press, 2008.
- [Mel95] J. D. P. Meldrum, *Wreath products of groups and semigroups*, Longman Group Limited, Copublished in the US with John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.
- [NST94] Peter M. Neumann, Gabrielle A. Stoy, and Edward C. Thompson, *Groups and Geometry*, Oxford University Press on Demand, 1994.
- [Poc] Stefan Pochmann, *Single algorithm 3x3 blindsolving*, <http://www.stefan-pochmann.info/spocc/blindsolving/3x3/old.php>, zuletzt abgerufen am 05.01.2019.
- [RT] Official Rubik's Web Site Rubik/Seven Towns, *BRIEF HISTORY OF THE CUBE*, <http://www.gyorgykata.hu/design/rubik/demo/cubehistory.html>, zuletzt abgerufen am 05.01.2019.
- [Sam17] Benjamin Sambale, *Endliche Permutationsgruppen*, Springer, Wiesbaden, 2017.
- [Sch] Jaap Scherphuis, *Skewb*, <https://www.jaapsch.net/puzzles/skewb.htm>, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.

- [Sin81] David Singmaster, *Notes on Rubik's magic cube*, Fifth Edition - enlarged, Enslow Pub Inc, London, 1981.
- [SPI] DER SPIEGEL, "Schrei Hurra! Schmeiß 'ne Runde!", ursprünglich veröffentlicht in "DER SPIEGEL", Ausgabe 4/1981, online unter <http://magazin.spiegel.de/EpubDelivery/spiegel/pdf/14319775>, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.
- [Str] Sarah Strong, *Speedskewbin*, <https://sarah.cubing.net/skewb/skewb-guide.pdf>, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.
- [The18] TheCubicle.us, *Jb Perm*, <http://algdb.net/puzzle/333/pl1/jb>, 2018, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.
- [Tra] Michael Travis, *The Mathematics of the Rubik's Cube*, <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2007/REUPapers/FINALAPP/Travis.pdf>, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.
- [Voi] Jürgen Voigt, *The Skewb Group*, http://www.math.tu-dresden.de/~voigt/vopubl/vopu_n/skewb-04.pdf, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.
- [Wika] Speedsolving.com Wiki, *CFOP*, https://www.speedsolving.com/wiki/index.php/CFOP_method, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.
- [Wikb] ———, *Layer by layer*, https://www.speedsolving.com/wiki/index.php/Layer_by_layer, zuletzt abgerufen am: 05.01.2019.

B Abbildungsverzeichnis

1	Die im Detail betrachteten Drehpuzzles, eigene Darstellung	2
1.1	Der Zauberwürfel	2
1.2	Der Skewb	2
2	Bezeichnung der Facets nach [Joy08], S. 72	6
3	Fotowürfel (Picture-Cube) mit relevanter Mittelstückorientierung, eigene Darstellung	39
4	Der Skewb und der Mechanismus im Inneren, eigene Darstellung	49
4.1	Der Skewb	49
4.2	Der innere Tetraeder des Skewbs	49
5	Bezeichnung der Skewb-Facets nach [Joy08], S. 77	50

C Tabellenverzeichnis

1	Basic Moves der Singmaster-Notation	4
2	Rotationen des gesamten Cubes in der Singmaster-Notation	5
3	Kantenbezeichnungen nach [FS10], S. 12	5
4	Eckenbezeichnungen nach [FS10], S. 13	5
5	An die sechs Seiten angrenzende Cubies nach [Joy08], S. 73, wiederum bezeichnet als <i>Singmaster notation</i> (vgl. ebd.)	5
6	Eckstein URF zu beliebigem anderen Eckstein bringen	10
7	Beliebigen Eckstein zum Eckstein URF bringen	10
8	Kantenstein RF zu beliebigem anderen Kantenstein bringen	10
9	Beliebigen Kantenstein zum Kantenstein RF bringen	10
10	Ecken-Sticker 1 zu bel. anderen Ecken-Sticker bringen	25
11	Bel. Ecken-Sticker zu Ecken-Sticker 1 bringen	25
12	Kanten-Sticker 2 zu bel. anderen Kanten-Sticker bringen	26
13	Bel. Kanten-Sticker zu Kanten-Sticker 2 bringen	26
14	Basis Moves $p \in M$ und ihre Repräsentation als Elemente aus Q : Orientierungen, nach [Joy08], S. 221 f.	36
15	Basis Moves $p \in M$ und ihre Repräsentation als Elemente aus Q : Permutationen	36
16	Verwendete Untergruppen in der Corner-Edge-Methode	43
17	Permutationen und Orientierungen, die die Basic Moves des Skewbs bewirken	53

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Bachelorarbeit unterstützt haben.

Bei Herrn Prof. Leinen möchte ich mich ganz besonders für die Betreuung eines Themas bedanken, durch welches ich mein Studienfach mit meinem Hobby verbinden konnte. Die Literaturhinweise und Anmerkungen, insbesondere auch zu den ersten Versionen der Arbeit im Verlaufe der Bearbeitung waren sehr hilfreich.

Ein besonderer Dank gilt auch meinen Eltern Marion Stein und Eugen Stein, die mir durch ihre Unterstützung das Studium ermöglicht und insbesondere bei dieser Arbeit das Korrekturlesen übernommen haben. Nicht zuletzt hat aber auch die moralische Unterstützung seitens meiner Familie dazu beigetragen, dass diese Arbeit vollendet werden konnte.

Ebenfalls möchte ich mich bei meinen Schulfreunden bedanken, durch die ich überhaupt erst auf den Zauberwürfel aufmerksam wurde. Hier sind insbesondere Vanessa Baden und Dagmar Fuhr zu nennen, von denen ich das Lösen gelernt habe, und mit denen ich mich auf den langen Busfahrten zur Schule unbemerkt bereits über die Cube Group unterhalten habe.

Zuletzt gilt mein Dank auch allen Cubern weltweit, die Anleitungen abseits der Fachliteratur veröffentlichen, Wettbewerbe und Treffen organisieren, Sammlungen von Strategien und Algorithmen bereitstellen und für den Austausch von Cubing-Wissen sorgen. Viele ehrenamtliche Tätigkeiten und unentgeltlich bereitgestellten Informationen tragen zu einem anhaltenden Interesse an den verschiedensten Drehpuzzles bei und wurden an einigen Stellen auch in dieser Arbeit verwendet.

Erklärung

gemäß § 18 Abs. 6 und § 15 Abs. 8 der Ordnung für die Prüfung im lehramtsbezogenen Bachelorstudiengang an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz (POLBA, ggf. POLBA-Dijon), bzw. § 18 Abs. 5 und § 15 Abs. 10 der Ordnung für die Prüfung im Masterstudiengang für das Lehramt an Gymnasien (POLMA, ggf. POLMA Dijon, iPOLMA-Dijon).

Hiermit erkläre ich, _____ (Matr.-Nr.: _____), dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen oder Hilfsmittel (einschließlich elektronischer Medien und Online-Quellen) benutzt habe. Mir ist bewusst, dass ein Täuschungsversuch oder ein Ordnungsverstoß vorliegt, wenn sich diese Erklärung als unwahr erweist. § 18 Absatz 3 und 4 der o. g. Ordnungen gilt in diesem Fall entsprechend.

Ort, Datum

Unterschrift**Auszug aus § 18 o. g. Ordnungen: Versäumnis, Rücktritt, Täuschung, Ordnungsverstoß**

(3) Versucht die Kandidatin oder der Kandidat das Ergebnis einer Prüfung durch Täuschung oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel zu beeinflussen, gilt die betreffende Prüfungsleistung als mit „nicht ausreichend“ (5,0) absolviert (...)

(4) Die Kandidatin oder der Kandidat kann innerhalb einer Frist von einem Monat verlangen, dass Entscheidungen nach Absatz 3 Satz 1 und 2 vom jeweils zuständigen Prüfungsausschuss überprüft werden. Belastende Entscheidungen sind der Kandidatin oder dem Kandidaten unverzüglich schriftlich mitzuteilen, zu begründen und mit einer Rechtsbehelfsbelehrung zu versehen. Der Kandidatin oder dem Kandidaten ist vor einer Entscheidung Gelegenheit zur Äußerung zu geben.