```latex
\documentclass{article}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{amssymb}
\usepackage{physics}
\usepackage{geometry}
\geometry{a4paper, margin=1in}
\title{Formulation Lagrangienne de la Compression Critique \& Développements Asymptotiques}
\author{D'après Antoine Sekhi}
\date{2025}

\begin{document}

\maketitle

\section{1. Construction du Lagrangien canonique}

On définit un champ scalaire de compression critique $\Phi(x^\mu)$, où $x^\mu$ sont les
coordonnées spatio-temporelles.

\subsection{1.1 Hypothèse d'action compressive}
Nous postulons que l'action globale du champ est donnée par :
\begin{equation}
\mathcal{S} = \int \dd[4]{x} \sqrt{-g} \, \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, g_{\mu\nu})
\end{equation}
avec $g = \det(g_{\mu\nu})$.

\subsection{1.2 Lagrangien compressif minimal}
Inspiré par le modèle standard des champs scalaires, mais adapté à la compression critique, on
propose :
\begin{equation}
\mathcal{L} = \frac{1}{2} C(\Phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi)
\end{equation}

avec :
\begin{itemize}
  \item $C(\Phi)$ : fonction de compression critique locale,
  \item $V(\Phi)$ : potentiel effectif lié à la fécondité $F(\Phi)$ et à la résilience $R(\Phi)$.
\end{itemize}

\textbf{Choix minimal pour coller à ta structure :}
\begin{equation}
C(\Phi) = \frac{1}{\Phi}
\quad ; \quad
V(\Phi) = \Phi \, \log(\Phi)
\end{equation}
(remplaçable par d'autres formes si besoin)

\section{2. Variation de l'action}

\subsection{2.1 Equations du mouvement}

La variation de l'action donne :
```

\begin{equation}
\delta \mathcal{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \, C(\Phi) g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) + \frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0
\end{equation}

Ce qui est l'\textbf{'equation dynamique du champ compressif}.

\section{3. Développements asymptotiques}

\subsection{3.1 Compression faible ($\Phi \approx \Phi_0 + \delta\Phi$)}

En linéarisant autour d'un fond plat Φ_0 (constante) :
\begin{equation}
\Phi(x) = \Phi_0 + \delta\Phi(x)
\end{equation}
avec $|\delta\Phi| \ll \Phi_0$.

\textbf{Approximation de $C(\Phi)$ et $V(\Phi)$} :
\begin{equation}
C(\Phi) \approx \frac{1}{\Phi_0}
\quad ; \quad
V(\Phi) \approx V(\Phi_0) + V'(\Phi_0) \delta\Phi
\end{equation}

Ainsi l'\u00e9quation devient :
\begin{equation}
\Box \delta\Phi + m_{\text{eff}}^2 \delta\Phi = 0
\end{equation}
avec $\Box$ l'opérateur d'Alembertien dans $g_{\mu\nu}$, et $m_{\text{eff}}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2}\big|_{\Phi_0}$.

\textbf{\`A compression faible}, \textbf{ton champ se comporte comme un champ scalaire massif standard} :
\begin{itemize}
    \item Si $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ (plat), on retrouve la forme de Klein-Gordon ($ \Box \delta\Phi + m^2 \delta\Phi = 0$).
    \item Si $\delta\Phi$ oscille lentement, on obtient Schrödinger à basse énergie.
\end{itemize}

\subsection{3.2 Compression forte (Φ proche de 0)}

En compression forte ($\Phi \to 0$), le terme $C(\Phi) \sim \frac{1}{\Phi}$ diverge.

Cela implique que :
\begin{equation}
C(\Phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \gg V(\Phi)
\end{equation}

Autrement dit, \textbf{la dynamique devient dominée par le terme cinétique} :

\begin{equation}
\Box \Phi \approx 0

```latex
\end{equation}

\textbf{\`A compression forte}, le champ se comporte comme :
\begin{itemize}
    \item Un champ libre relativiste,
    \item Sensible aux fluctuations quantiques du vide.
\end{itemize}

\section{4. Vérification des dimensions}

\begin{itemize}
  \item $[\Phi] = \text{J.m}^{-3}$ (densité d'énergie).
  \item $[C(\Phi)] = \text{m}^3.\text{J}^{-1}$.
  \item $[\mathcal{L}] = \text{J.m}^{-3}$.
  \item $[\mathcal{S}] = \text{J.s}$ (action standard).
\end{itemize}

Tout est homogène.

\end{document}
```