方差分析

ANOVA: ANalysis Of VAriance

什么是方差分析

t检验 vs 方差分析

- **t检验**
  - 两组均值的比较
  - $H_0: \mu_1 = \mu_2$
  - $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$

- **方差分析**
  - 三组或以上均值的比较
  - $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$
  - $H_A: \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$不全相等

数值变量: response/dependent variable (DV)

成绩	教学法
90	A
82	A
92	A
79	B
88	B
95	B

分类变量/因素(factor; 2个水平): explanatory/independent variable (IV)

水平1/组1/条件1; μ_1

水平2/组2/条件2; μ_2

t检验

- H_0: $\mu_1 = \mu_2$
- H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$

数值变量 (DV)

成绩	教学法
90	A
82	A
92	A
79	B
88	B
95	B
97	C
100	C
88	C

分类变量/因素(> 2个水平; IV)

水平1/组1/条件1; μ_1

水平2/组2/条件2; μ_2

水平3/组3/条件3; μ_3

One-way ANOVA

- H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
- H_A: μ_1, μ_2, μ_3 不全相等

数值变量 (DV)　分类变量/因素(≥ 2个水平; IV)

成绩	教学法	奖励
90	A	是
82	A	是
92	A	否
79	A	否
88	B	是
95	B	是
97	B	否
100	B	否

分类变量/因素(≥ 2个水平; IV)

组1/条件1; μ_1

组2/条件2; μ_2

组3/条件3; μ_3

组4/条件4; μ_4

Two-way ANOVA

方差分析的核心

因变量的总变化

自变量引起的变化
(可以解释的变化)

其他因素引起的变化
(无法解释的变化)

→

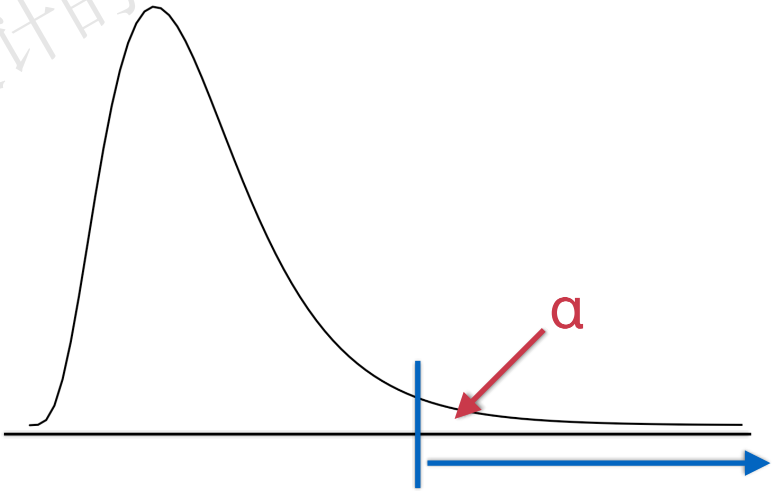
自变量引起的变化
(可以解释的变化)

———

其他因素引起的变化
(无法解释的变化)

方差分析的核心

$$\frac{\text{自变量引起的变化(可以解释的变化)}}{\text{其他因素引起的变化(无法解释的变化)}} = F$$



单因素方差分析

One-way ANOVA

单因素方差分析

- 一个因变量和一个自变量(包含3个或更多个水平)
- H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ (k = #groups or #levels or #conditions)
- H_A: $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ 不全相等

单因素方差分析的前提条件

- 独立性: (1) 组内独立(随机抽样/分配; 样本容量 $<$ 10%总体容量); (2) 组间独立(非配对)
- 正态性: 各组总体服从正态分布
  - 样本容量较大(每组样本容量 $\geq$ 10)时, 如果一定程度上违反了正态性, 仍可以使用ANOVA
  - 样本容量较小时, 如果违反了正态性, 则应使用非参数方法进行分析

单因素方差分析的前提条件

- 方差齐性: 各组总体的方差相等
  - 各组样本的样本容量相等时, 如果一定程度上违反了方差齐性, 仍可以使用ANOVA
  - 各组样本的样本容量不相等时, 如果最大的样本标准差与最小的样本标准差之比不超过2, 仍可以使用ANOVA

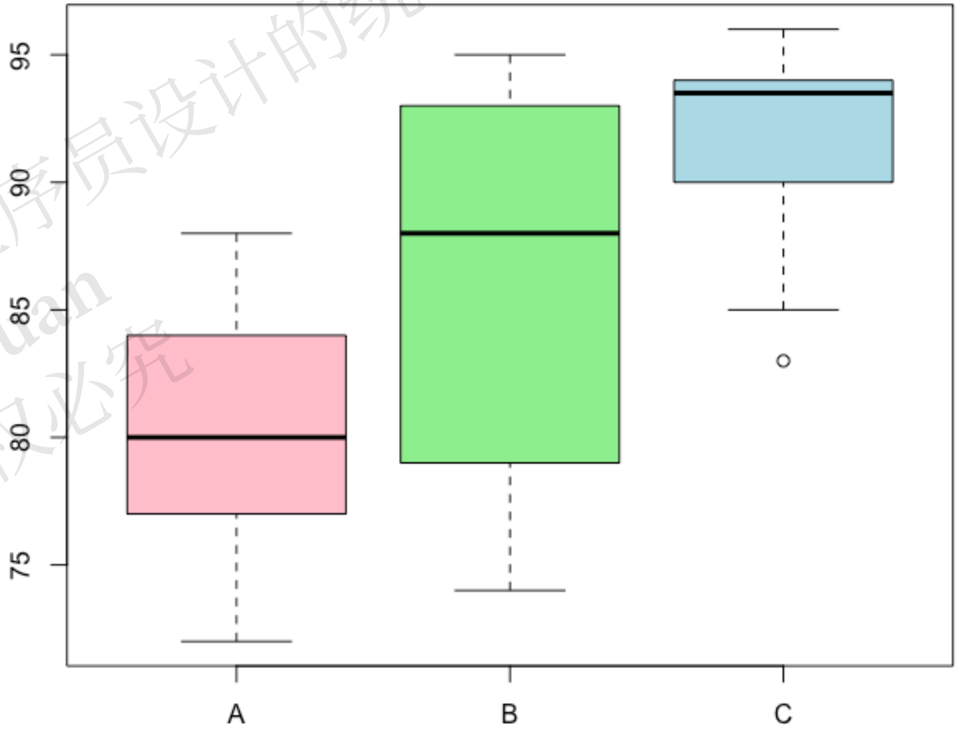
单因素方差分析

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96

- 因变量(DV): 数学成绩
- 自变量(IV): 教学法
- H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ (k = 3)
- H_A: μ_1, μ_2, μ_3不全相等
- 满足独立性, 正态性, 方差齐性
- 样本容量: $n_1 = n_2 = n_3 = 10$; $n = 30$

单因素方差分析

教学法		
A	**B**	**C**
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96



单因素方差分析

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96

因变量的总变化

→ 自变量引起的变化(可以解释的变化)

→ 其他因素引起的变化(无法解释的变化)

单因素方差分析

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96

- A组, B组, C组数学成绩的平均

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij} \longrightarrow \begin{aligned} \bar{y}_1 &= 80 \\ \bar{y}_2 &= 86.3 \\ \bar{y}_3 &= 91.5 \end{aligned}$$

- 数学成绩的总平均

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \times \bar{y}_j \qquad n = \sum_{j=1}^{k} n_j$$

$$\longrightarrow \bar{y} = \frac{10\times 80 + 10\times 86.3 + 10\times 91.5}{10 + 10 + 10} = 85.9$$

单因素方差分析

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96

- 数学成绩的总变化(总偏差平方和/总变差)

$$SST = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \bar{y})^2$$

Sum of Squares Total SS_{Total}

$$SST = (77 - 85.9)^2 + .. + (96 - 85.9)^2 = 1523.9$$

单因素方差分析

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96

- 自变量引起的变化(组间变化/效应平方和)

$$SSG = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j - \bar{y})^2$$

Sum of Squares Group

$SS_{Between-groups}$

SS_{Effect}

$$SSG = 10\times(80-85.9)^2+10\times(86.3-85.9)^2 + 10\times(91.5-85.9)^2 = 663.3$$

单因素方差分析

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96

- 其他因素引起的变化(组内变化/误差平方和)

$$SSE = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

Sum of Squares Error

$SS_{Within-groups}$

SS_{Error}

$$SSE = 860.6$$

单因素方差分析

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96

$SST = 1523.9$

因变量的

总变化

$SSG = 663.3$

自变量引起的变化

(可以解释的变化)

其他因素引起的变化

(无法解释的变化)

$SSE = 860.6$

$SST = SSG + SSE$

$$SST = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}[(y_{ij} - \bar{y}_j) + (\bar{y}_j - \bar{y})]^2$$

单因素方差分析

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96

$$\frac{\text{自变量引起的变化(可以解释的变化)}}{\text{其他因素引起的变化(无法解释的变化)}} = \frac{SSG}{SSE}\ ?$$

$$\text{样本方差} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

单因素方差分析

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96

$$样本方差 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$MSG = \frac{SSG}{df_G} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j - \bar{y})^2}{k-1} = \frac{663.3}{3-1} = 331.7$$

$$MSE = \frac{SSE}{df_E} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2}{n-k} = \frac{860.6}{30-3} = 31.9$$

单因素方差分析

$$\frac{\text{自变量引起的变化（可以解释的变化)}}{\text{其他因素引起的变化（无法解释的变化)}} = \frac{MSG}{MSE} = \frac{331.7}{31.9} = 10.4 \qquad \frac{MSG}{MSE} \sim F(df_G, df_E)$$

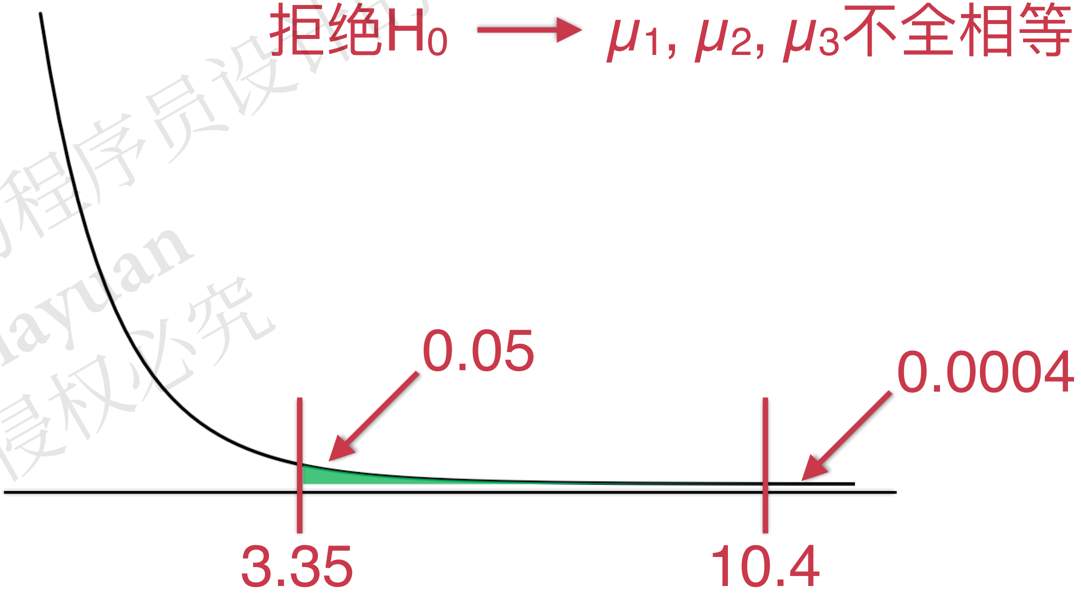
$$\frac{{S_1}^2/{S_2}^2}{{\sigma_1}^2/{\sigma_2}^2} \sim F\ (n_1 - 1, n_2 - 1)$$

单因素方差分析

$$\frac{MSG}{MSE} \sim F(2,27)$$

$$\frac{MSG}{MSE} = \frac{331.7}{31.9} = 10.4$$

拒绝H_0 $\longrightarrow$ μ_1, μ_2, μ_3不全相等



方差分析表

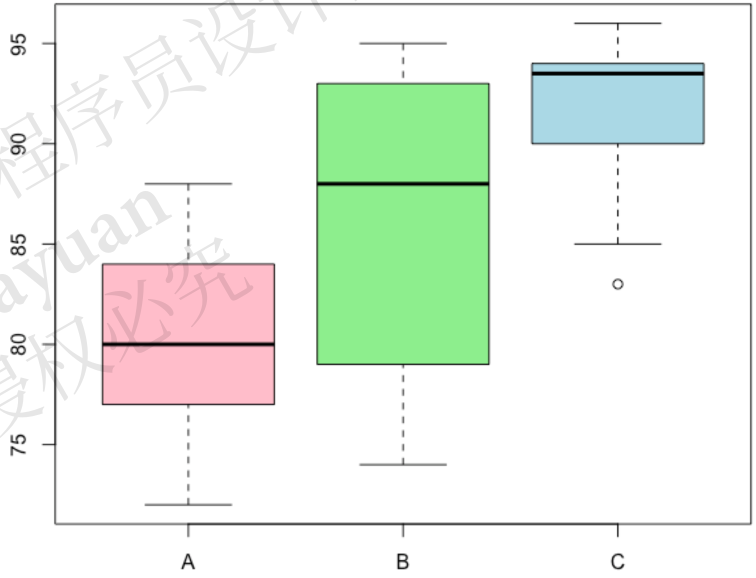
	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Group	2	663.3	331.7	10.4	0.0004
Residuals	27	860.6	31.9	—	—

多重比较

Multiple Comparisons

拒绝H_0 ⟶ μ_1, μ_2, μ_3不全相等

教学法		
A	B	C
77	74	93
88	88	94
77	77	95
85	93	83
81	91	94
72	95	94
80	85	85
80	88	91
76	93	90
84	79	96



$\mu_1 \neq \mu_2$?

$\mu_1 \neq \mu_3$?

$\mu_2 \neq \mu_3$?

多重比较

$k*(k-1)/2 = 3$次t检验

- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$

P(拒绝 H_0 | H_0 为真) $= \alpha = 0.05$

- $H_0: \mu_1 = \mu_3$
- $H_A: \mu_1 \neq \mu_3$

P(拒绝 H_0 | H_0 为真) $= \alpha = 0.05$

- $H_0: \mu_2 = \mu_3$
- $H_A: \mu_2 \neq \mu_3$

P(拒绝 H_0 | H_0 为真) $= \alpha = 0.05$

P(type 1 error) ≈ α x t检验次数 = 0.15

post-hoc comparisons

多重比较

k*(k-1)/2 = 3次t检验

- $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$

P(拒绝 H_0 | H_0 为真)
= $\alpha^* = 0.05/3 = 0.017$

- $H_0: \mu_1 = \mu_3$
- $H_A: \mu_1 \neq \mu_3$

P(拒绝 H_0 | H_0 为真)
= $\alpha^* = 0.05/3 = 0.017$

- $H_0: \mu_2 = \mu_3$
- $H_A: \mu_2 \neq \mu_3$

P(拒绝 H_0 | H_0 为真)
= $\alpha^* = 0.05/3 = 0.017$

Bonferroni correction：$\alpha^* = \alpha$/比较次数 = $\alpha/(k^*(k-1)/2)$

post-hoc t检验

- 方差未知且相等的情况下，对两个总体均值差的检验

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\boxed{S_w}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t\boxed{(n_1+n_2-2)}$$

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1){S_1}^2+(n_2-1){S_2}^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$\sqrt{MSE}=\sqrt{\frac{SSE}{df_E}}$$

$$df_E$$

post-hoc t检验

- 方差未知且相等的情况下，对两个总体均值差的检验
  - H_0: $\mu_1 = \mu_2$
  - H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{MSE}{n_1}+\frac{MSE}{n_2}}} \sim t(df_E) = t(27)$$

$$\frac{(80-86.3)-0}{\sqrt{\frac{31.9}{10}+\frac{31.9}{10}}} = \text{-}2.49 \longrightarrow$$

p = 2 x 0.0096 = 0.019 > α* 接受H_0

α* = 0.05/3 = 0.017

post-hoc t检验

- $H_0: \mu_1 = \mu_3$
- $H_A: \mu_1 \neq \mu_3$

$$\frac{(80 - 91.5) - 0}{\sqrt{\frac{31.9}{10} + \frac{31.9}{10}}} = -4.55 \longrightarrow p = 2 \times 5.1e\text{-}5 = 0.0001 < \alpha^*$$ 拒绝H_0

- $H_0: \mu_2 = \mu_3$
- $H_A: \mu_2 \neq \mu_3$

$$\frac{(86.3 - 91.5) - 0}{\sqrt{\frac{31.9}{10} + \frac{31.9}{10}}} = -2.06 \longrightarrow p = 2 \times 0.025 = 0.05 > \alpha^*$$ 接受H_0

编程实现单因素方差分析

双因素方差分析

Two-way ANOVA

双因素方差分析

- 包含两个因素，每个因素包含2个或更多个水平
- 三组假设
  - H_{01}: 第一个因素各水平的效应都为0
  - H_{A1}: 第一个因素各水平的效应不全为0
  - H_{02}: 第二个因素各水平的效应都为0
  - H_{A2}: 第二个因素各水平的效应不全为0
  - H_{03}: 二个因素交互效应都为0
  - H_{A3}: 二个因素交互效应不全为0

双因素方差分析的前提条件

- 独立性: (1) 组内独立(随机抽样/分配; 样本容量 $<$ 10%总体容量); (2) 组间独立(非配对)
- 正态性: 各组总体服从正态分布
  - 样本容量较大(每组样本容量 $\geq$ 10)时, 如果一定程度上违反了正态性, 仍可以使用ANOVA
  - 样本容量较小时, 如果违反了正态性, 则应使用非参数方法进行分析

双因素方差分析的前提条件

- 方差齐性: 各组总体的方差相等
  - 各组样本的样本容量相等时, 如果一定程度上违反了方差齐性, 仍可以使用ANOVA
  - 各组样本的样本容量不相等时, 如果最大的样本标准差与最小的样本标准差之比不超过2, 仍可以使用ANOVA

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 因变量(DV): 数学成绩
- 自变量(IV): 教学法($r = 2$); 奖励($s = 2$)
- 满足独立性, 正态性, 方差齐性
- 样本容量: $n_{AN} = n_{AY} = n_{BN} = n_{BY} = 10$; $n = 40$

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

$y_{ijk}; \ i = 1,2,\ldots,r; \ j = 1,2,\ldots,s; k = 1,2,\ldots,n_{ij}$

- AN, AY, BN, BY数学成绩的平均

$$\bar{y}_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} \longrightarrow$$

$$\bar{y}_{AN} = \bar{y}_{11} = 80.0$$

$$\bar{y}_{AY} = \bar{y}_{12} = 92.4$$

$$\bar{y}_{BN} = \bar{y}_{21} = 91.5$$

$$\bar{y}_{BY} = \bar{y}_{22} = 86.3$$

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 数学成绩的总平均

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}\times\bar{y}_{ij} \qquad n = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}$$

$$\bar{y} = \frac{10*80+10*92.4+10*91.5+10*86.3}{10+10+10+10}$$

$$= 87.55$$

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- A, B的平均

$$\bar{y}_{i.} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{s} n_{ij}} \sum_{j=1}^{s} n_{ij} \times \bar{y}_{ij}$$

$$\rightarrow \bar{y}_{A.} = \bar{y}_{1.} = \frac{10 * 80 + 10 * 92.4}{10 + 10} = 86.2$$

$$\rightarrow \bar{y}_{B.} = \bar{y}_{2.} = \frac{10 * 91.5 + 10 * 86.3}{10 + 10} = 88.9$$

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- N, Y的平均

$$\bar{y}_{.j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} n_{ij}} \sum_{i=1}^{r} n_{ij} \times \bar{y}_{ij}$$

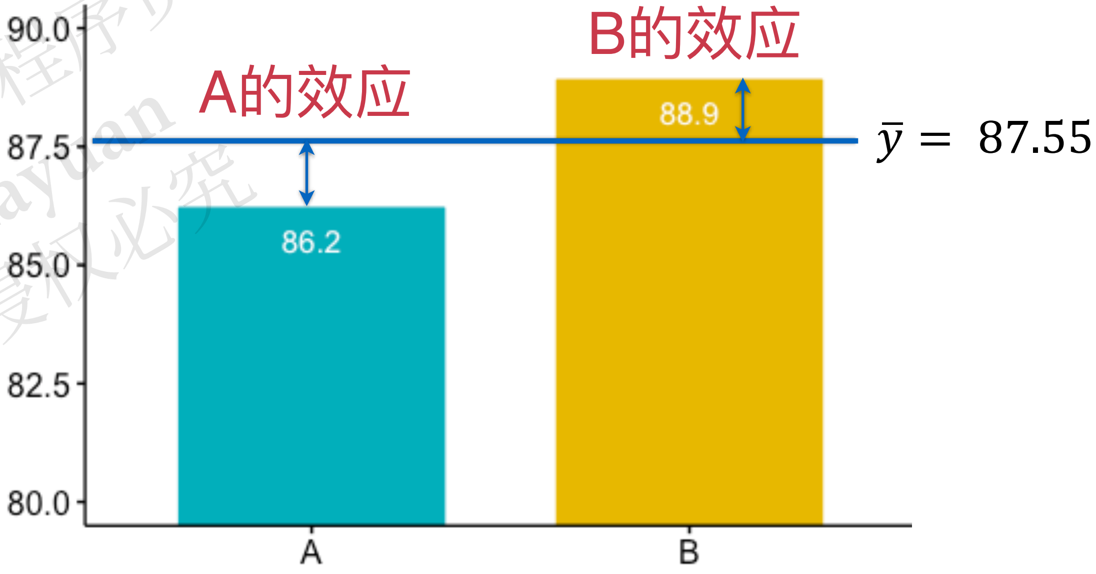
$$\rightarrow \bar{y}_{.N} = \bar{y}_{.1} = \frac{10 * 80 + 10 * 91.5}{10 + 10} = 85.75$$

$$\rightarrow \bar{y}_{.Y} = \bar{y}_{.2} = \frac{10 * 92.4 + 10 * 86.3}{10 + 10} = 89.35$$

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 教学法各水平的效应 $\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}$



双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 教学法的假设
  - H_0: $\mu_A = \mu_B$
  - H_A: $\mu_A \neq \mu_B$

  等价于

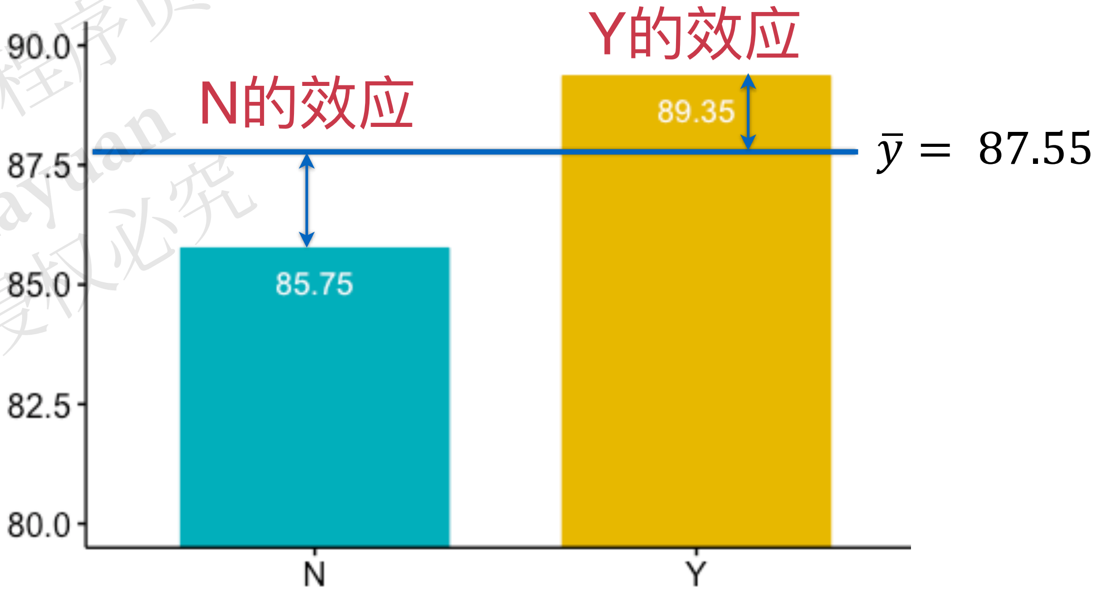
  - H_0: $\mu_A - \mu = \mu_B - \mu = 0$

    当且仅当 $\mu_A = \mu_B = \mu$时, 总平均为μ
  - H_A: $\mu_A - \mu$, $\mu_B - \mu$不全为0

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 奖励各水平的效应 $\bar{y}_{.j}$ - $\bar{y}$



双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 奖励的假设
  - $H_0: \mu_N = \mu_Y$
  - $H_A: \mu_N \neq \mu_Y$

  等价于

  - $H_0: \mu_N - \mu = \mu_Y - \mu = 0$

    当且仅当 $\mu_N = \mu_Y = \mu$ 时，总平均为 μ
  - $H_A: \mu_N - \mu, \mu_Y - \mu$ 不全为0

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 教学法水平i与奖励水平j的交互效应

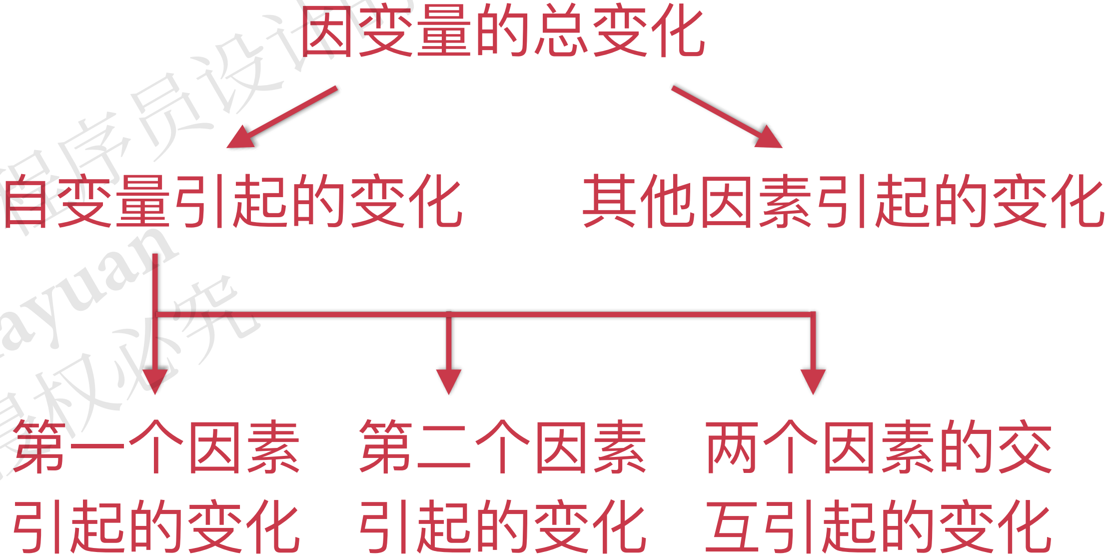
$$\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}$$

$$= (\bar{y}_{ij} - \bar{y}) - (\bar{y}_{i.} - \bar{y}) - (\bar{y}_{.j} - \bar{y})$$

- 教学法与奖励的交互作用的假设
  - H_0: μ_{ij} - μ_i - μ_j + μ对所有i,j的组合都为0
  - H_A: μ_{ij} - μ_i - μ_j + μ对某些i,j的组合不为0

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79



双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 数学成绩的总变化

$$SS_{Total}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk}-\bar{y})^2 \quad = 2191.9$$

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 教学法引起的变化

$$SS_{Method} = \sum_{i=1}^{r} n_{i.}(\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2$$

$$= 20 * (86.2 - 87.55)^2 + 20 * (88.9 - 87.55)^2 = 72.9$$

- 奖励引起的变化

$$SS_{Reward} = \sum_{j=1}^{s} n_{.j}(\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2$$

$$= 20 * (85.75 - 87.55)^2 + 20 * (89.35 - 87.55)^2 = 129.6$$

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 教学法和奖励的交互引起的变化

$$SS_{M\times R}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}n_{ij}(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y})^2$$

$$=10*(80-86.2-85.75+87.55)^2$$
$$+10*(92.4-86.2-89.35+87.55)^2$$
$$+10*(91.5-88.9-85.75+87.55)^2$$
$$+10*(86.3-88.9-89.35+87.55)^2$$
$$=193.6*4=774.4$$

双因素方差分析

A		B	
N	Y	N	Y
77	96	93	74
88	87	94	88
77	94	95	77
85	90	83	93
81	80	94	91
72	99	94	95
80	100	85	85
80	87	91	88
76	96	90	93
84	95	96	79

- 其他因素引起的变化

$$SS_{Error} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2 = 1215.0$$

双因素方差分析

$SS_{Total} = 1291.9$

因变量的总变化

自变量引起的变化

其他因素引起的变化

$SS_{Error} = 1215.0$

第一个因素引起的变化

第二个因素引起的变化

两个因素的交互引起的变化

$SS_{Method} = 72.9$ $SS_{Reward} = 129.6$ $SS_{M\times R} = 774.4$

$$SS_{Total} = SS_{Method} + SS_{Reward} + SS_{M\times R} + SS_{Error}$$

双因素方差分析

$$MS_{Method} = \frac{SS_{Method}}{r-1} = 72.9 \rightarrow F = \frac{72.9}{33.8} = 2.16 \sim F(1,36)$$

$$MS_{Reward} = \frac{SS_{Reward}}{s-1} = 129.6 \rightarrow F = \frac{129.6}{33.8} = 3.83 \sim F(1,36)$$

$$MS_{M\times R} = \frac{SS_{M\times R}}{(r-1)\times(s-1)} = 774.4 \rightarrow F = \frac{774.4}{33.8} = 22.91 \sim F(1,36)$$

$$MS_{Error} = \frac{SS_{Error}}{n-rs} = \frac{1215.0}{40-4} = 33.8$$

方差分析表

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Method	1	72.9	72.9	2.16	0.15
Reward	1	129.6	129.6	3.83	0.06
Method:Reward	1	774.4	774.4	22.91	2.9E-05
Residuals	36	1215.0	33.8	—	—

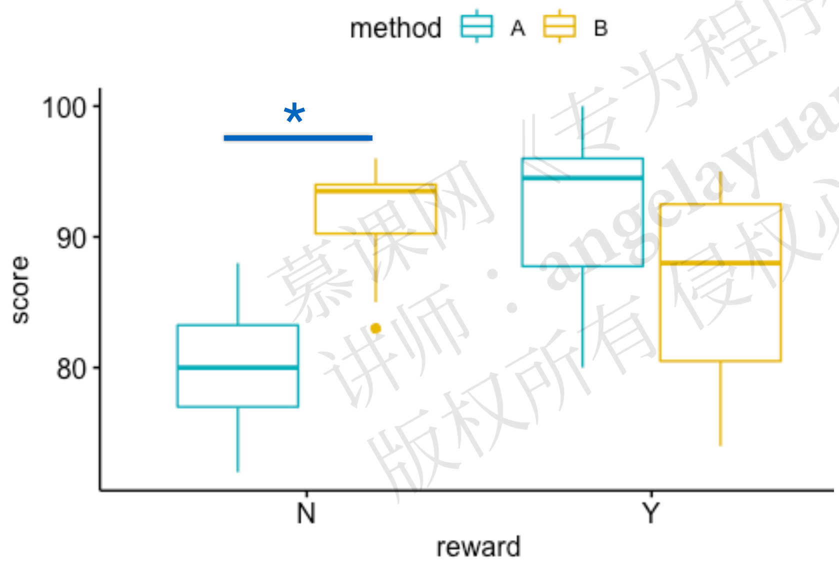
双因素方差分析

- 结果
  - 教学法: 接受零假设; 说明数学成绩不受教学法的调节
  - 奖励: 接受零假设; 说明数学成绩不受奖励与否的调节
  - 教学法与奖励的交互作用: 拒绝零假设

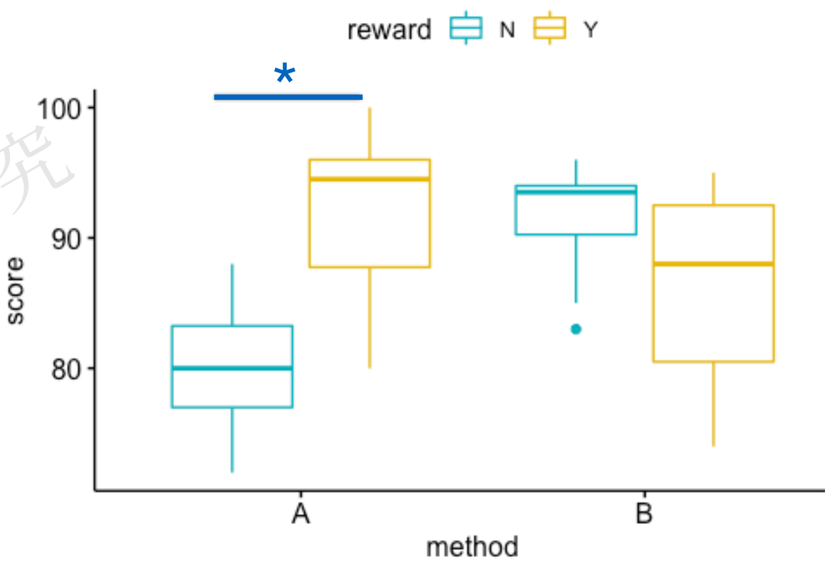
双因素方差分析

教学法与奖励的交互作用

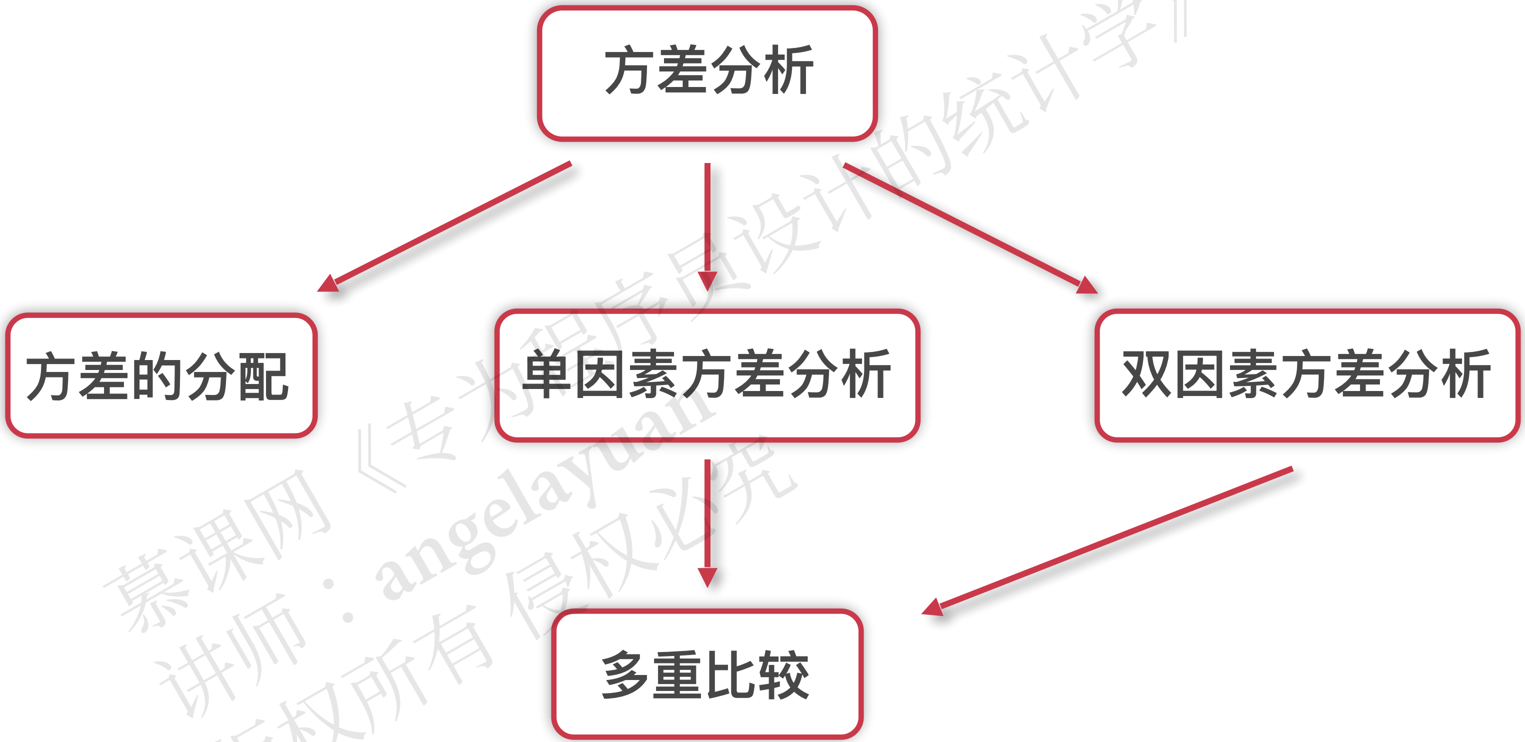
教学法对成绩的影响是否受奖励的调节



奖励对成绩的影响是否受教学法的调节



本章小结


方差分析
方差的分配
单因素方差分析
双因素方差分析
多重比较