Unidade V - Coordenadas

IME 04-10842
Computação Gráfica
Professor Guilherme Mota
Professor Gilson Costa

Coordenadas

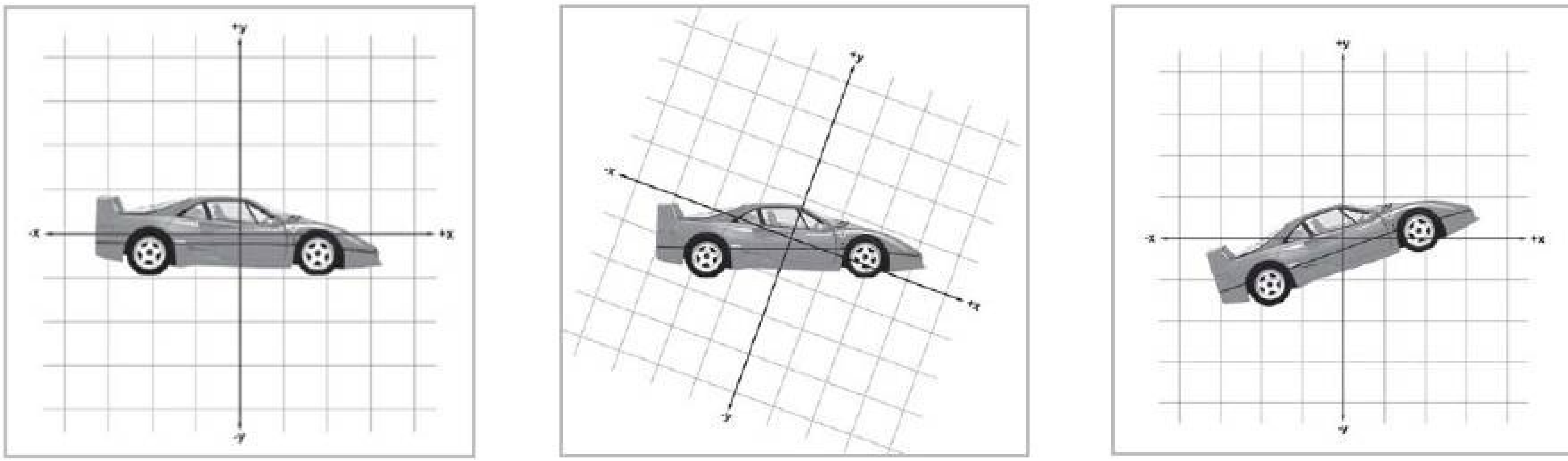
Coordenadas

- Permite uma representação analítica dos objetos
- A representação é dependente do sistema de coordenadas
- Mudar a representação implica em mudar o sistema de coordenadas
- A escolha da representação simplifica a solução de problemas

Geometria → Coordenadas → Representação

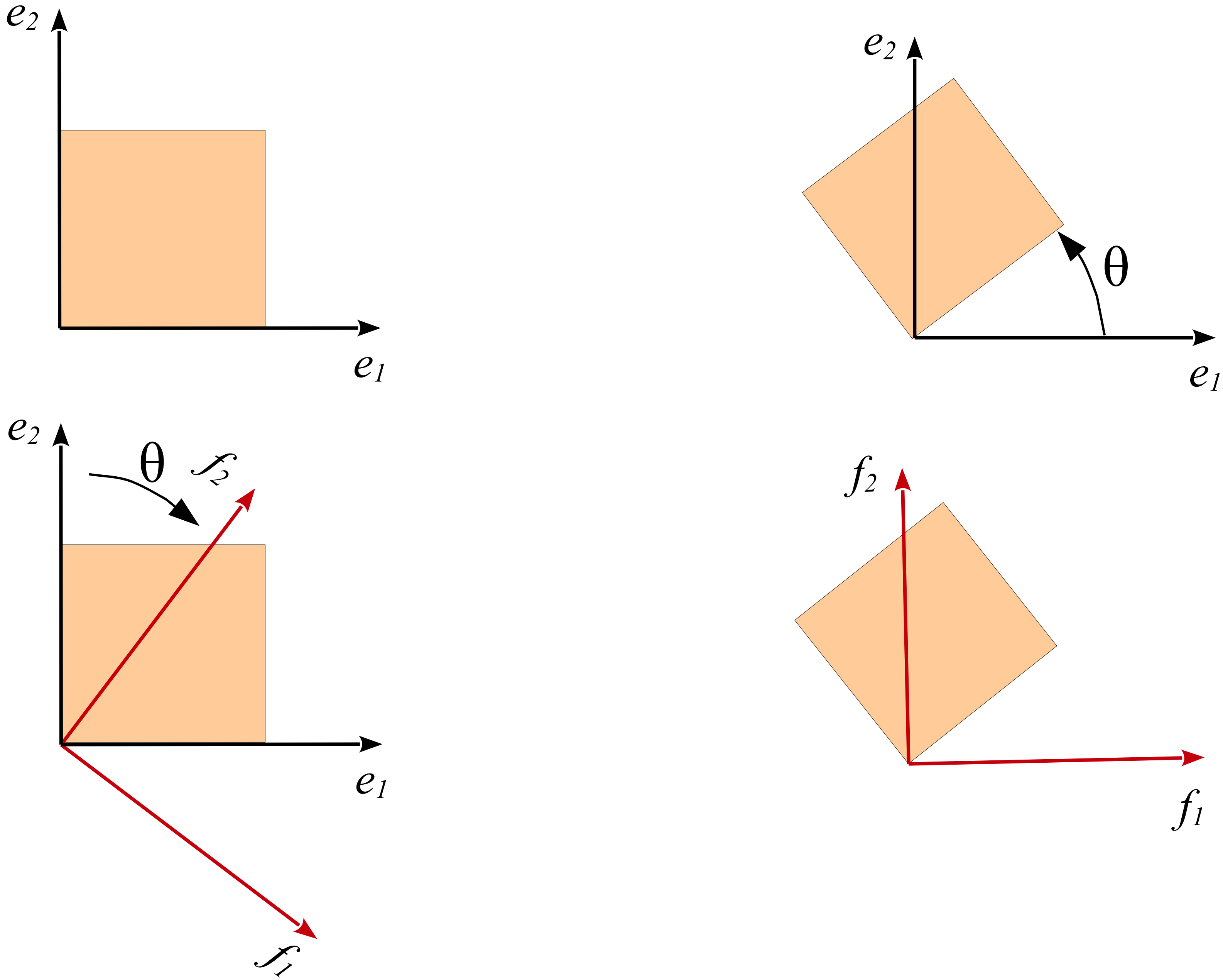
Transformações: objetos, referenciais e coordenadas

Múltiplas Representações de um mesmo objeto



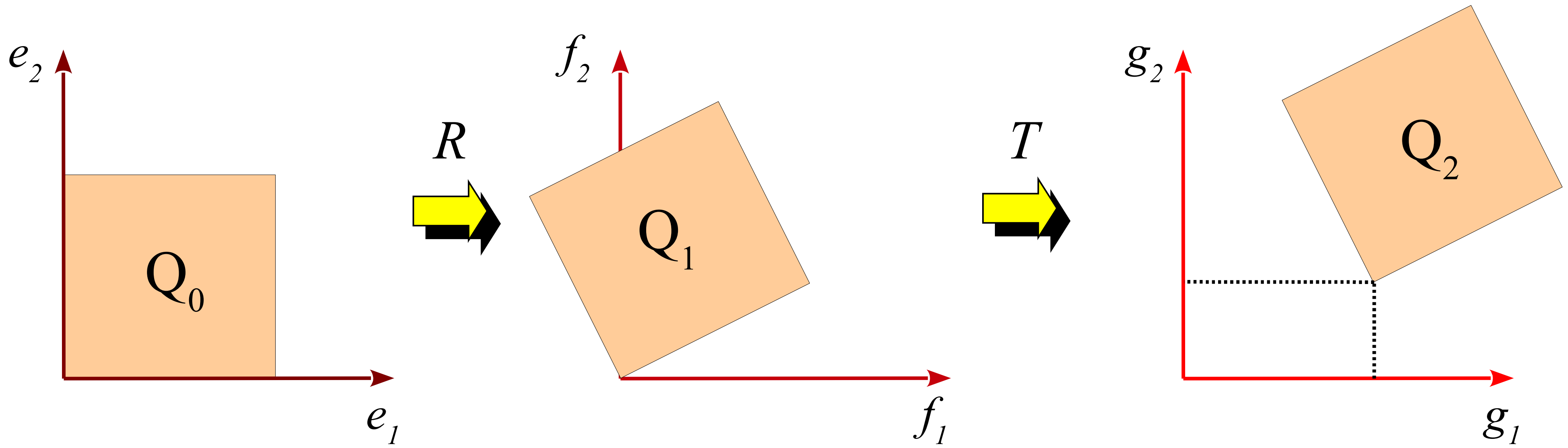
Dois pontos de vista do mesmo problema

Múltiplas Representações de um Mesmo Objeto



Transformando objetos

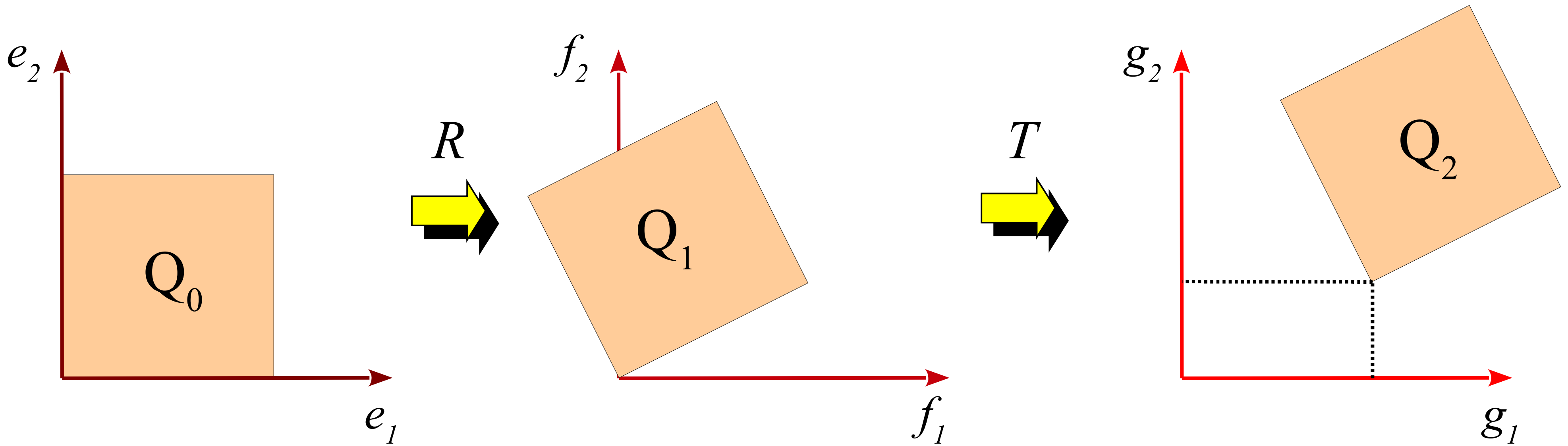
Movimento de um Objeto



$$R = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

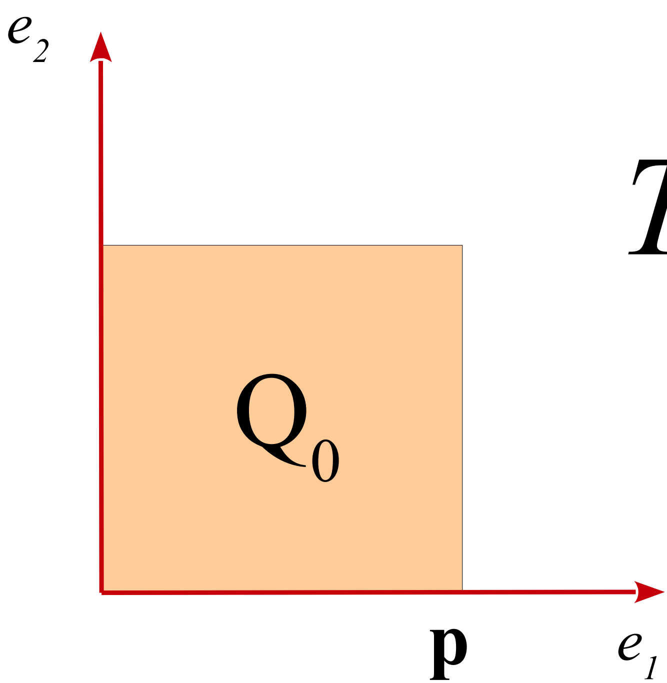
Movimento é parametrizado por θ, t_1 e t_2

Movimento de um Objeto

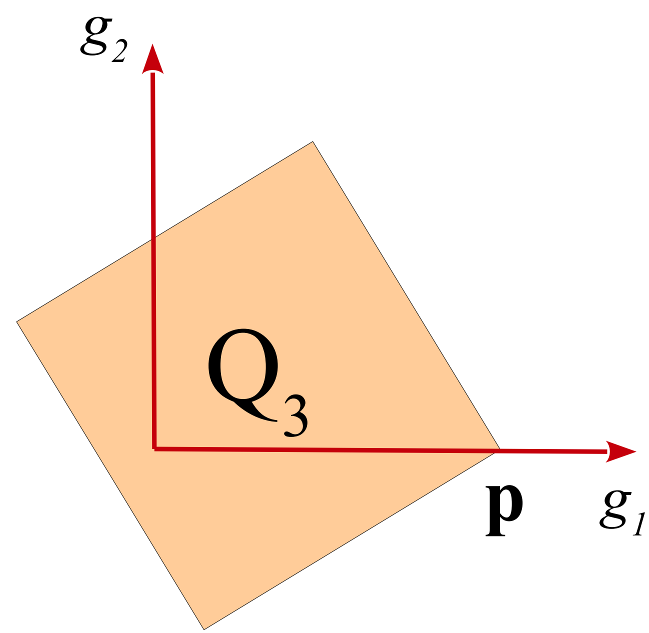


$$T \cdot R = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & t_1 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

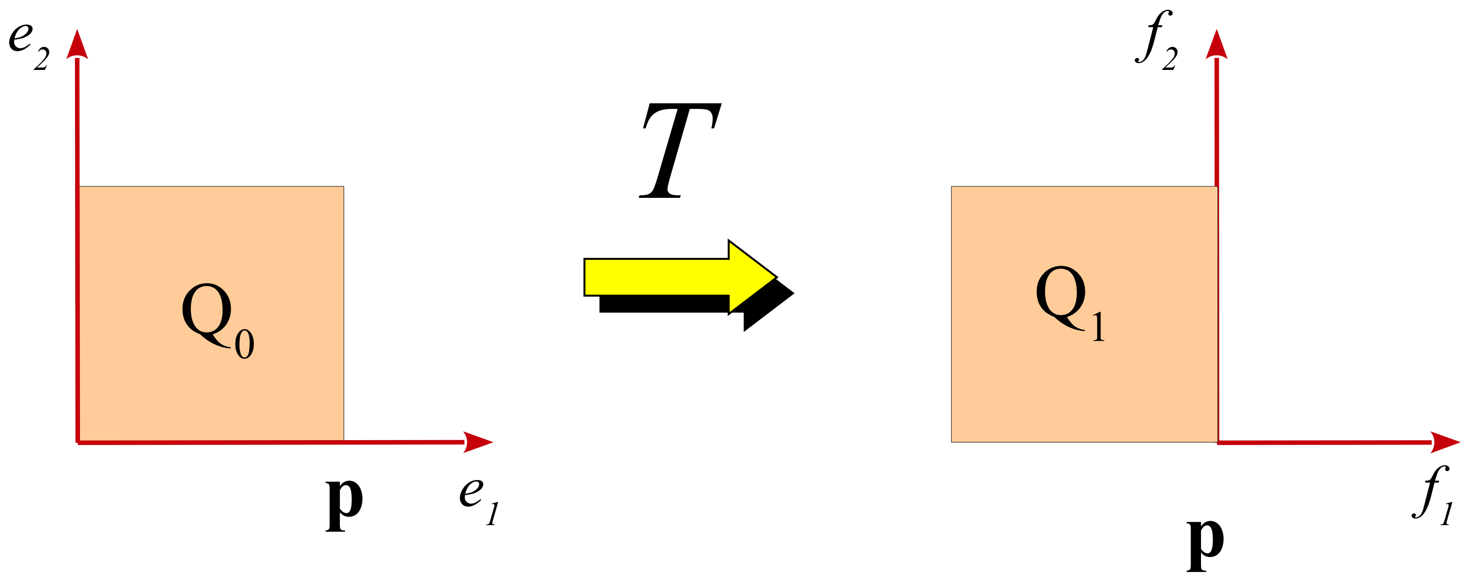
Rotação em Torno de um Ponto Arbitrário



$$T \rightarrow R \rightarrow T^{-1}$$

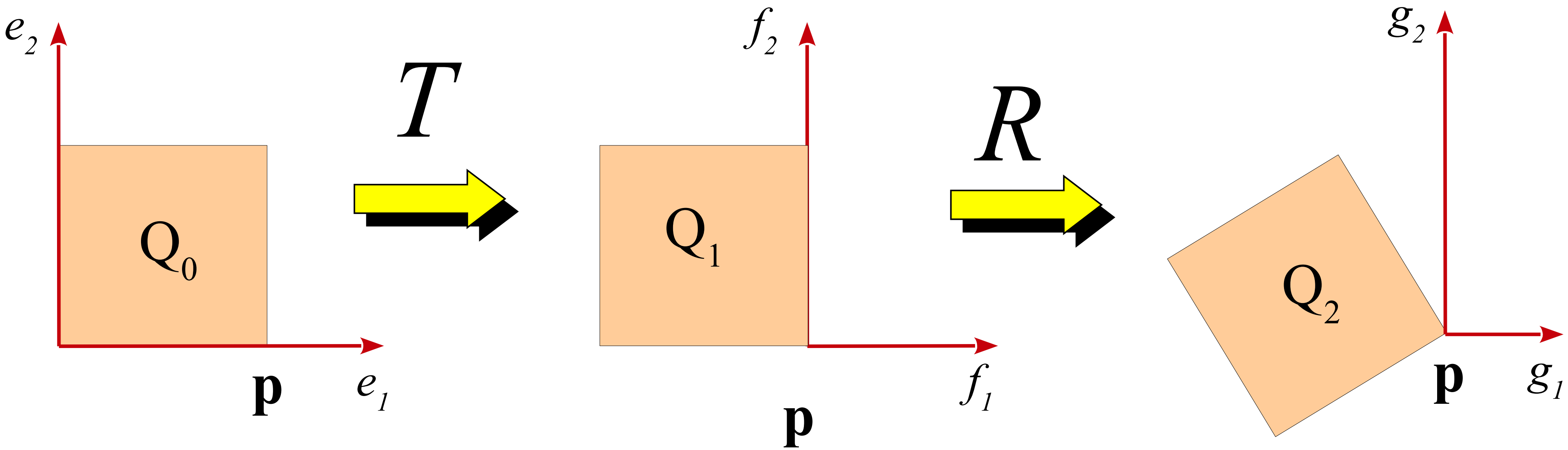


Rotação em Torno de um Ponto Arbitrário



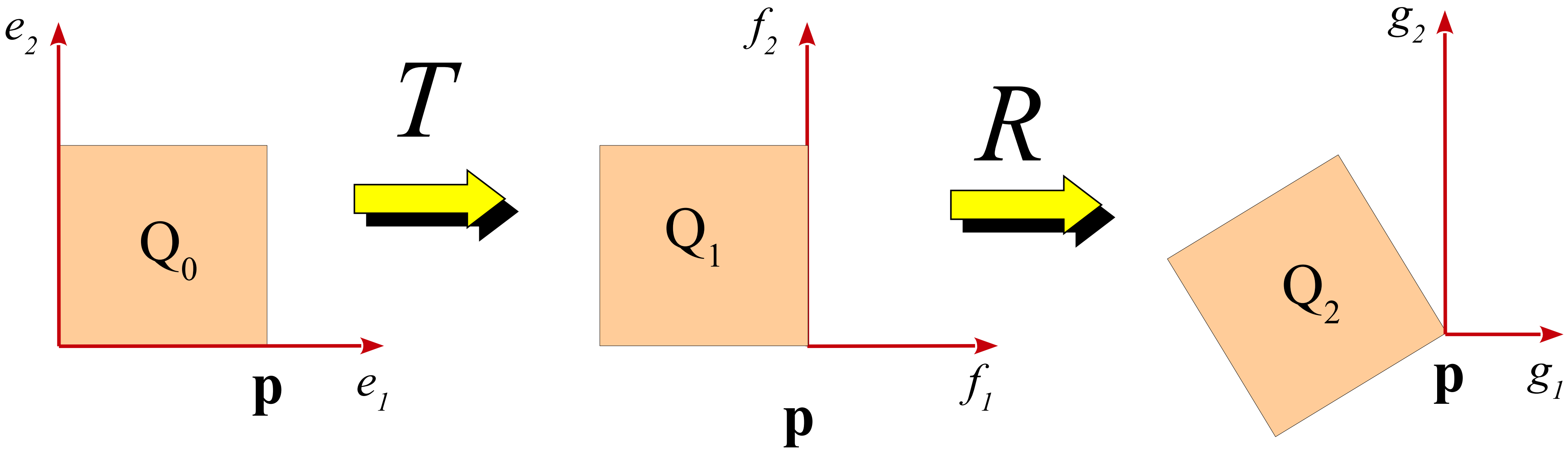
$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rotação em Torno de um Ponto Arbitrário



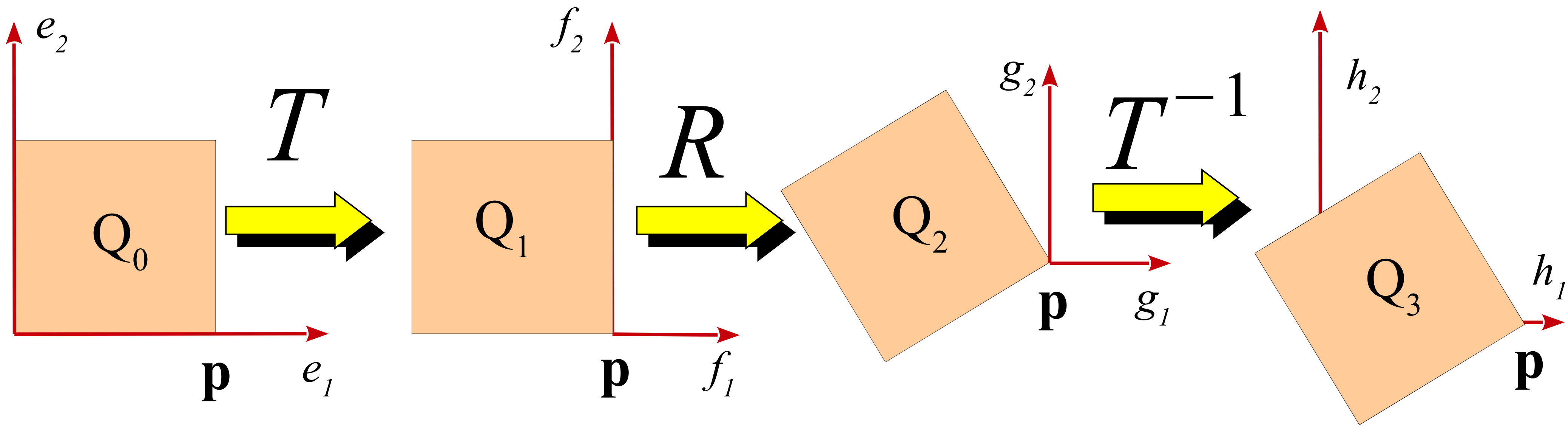
$$R = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rotação em Torno de um Ponto Arbitrário



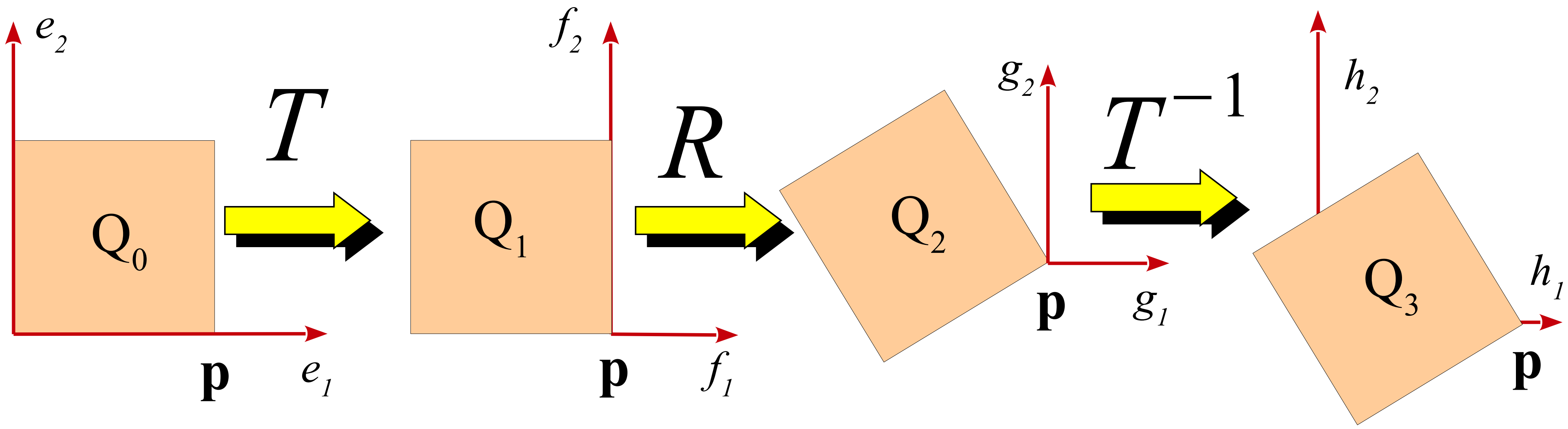
$$R \cdot T = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & -p_1\cos\theta + p_2\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & -p_1\operatorname{sen}\theta - p_2\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rotação em Torno de um Ponto Arbitrário



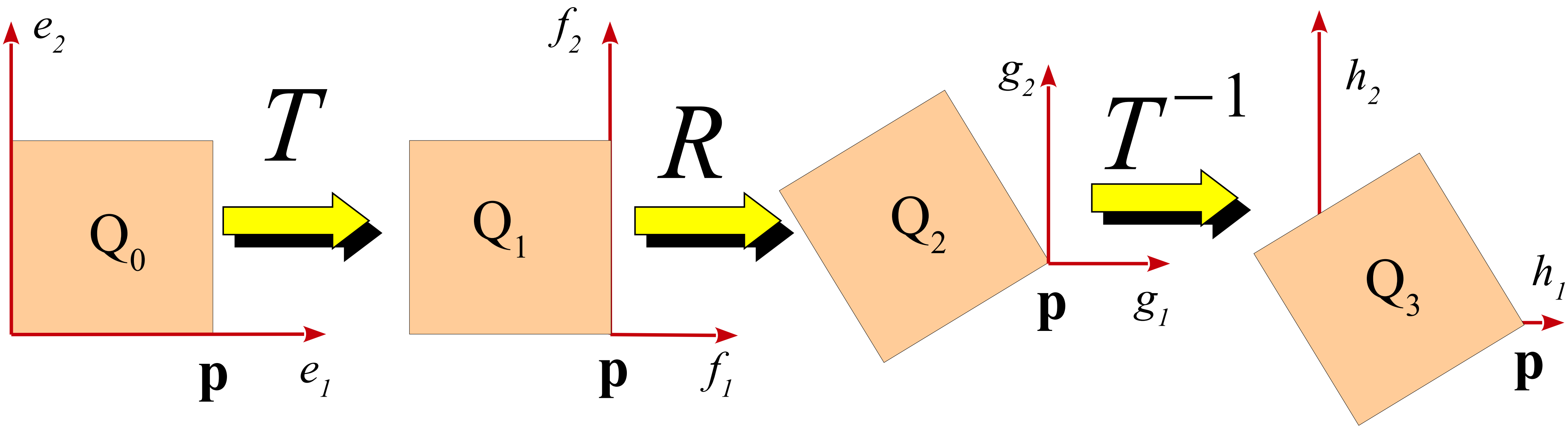
$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rotação em Torno de um Ponto Arbitrário



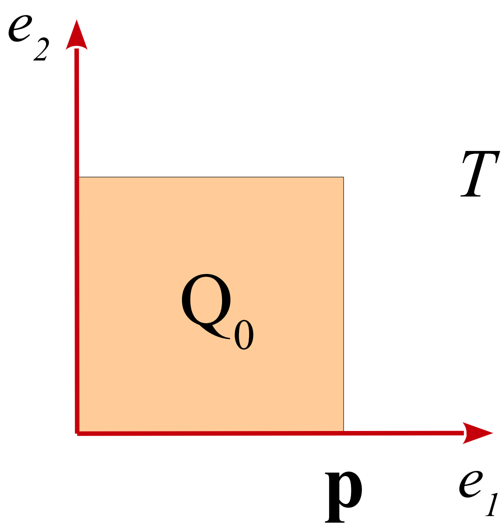
$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad R \cdot T = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & -p_1\cos\theta + p_2\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & -p_1\operatorname{sen}\theta - p_2\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rotação em Torno de um Ponto Arbitrário

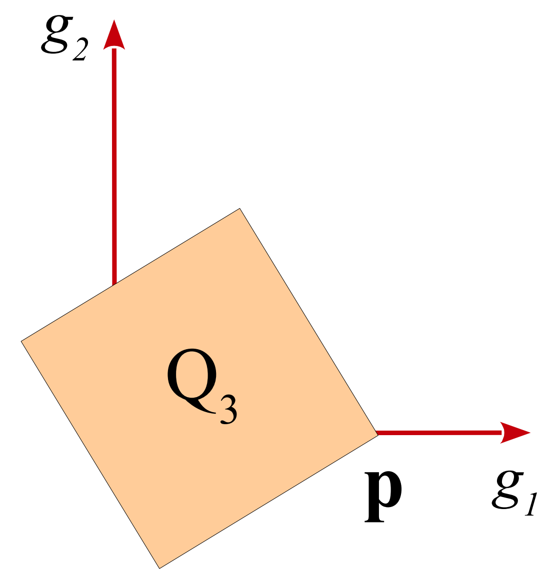


$$T^{-1}RT = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & p_1(1-\cos\theta)+p_2\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & p_2(1-\cos\theta)-p_1\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rotação em Torno de um Ponto Arbitrário



$$T \rightarrow R \rightarrow T^{-1} \Leftrightarrow T^{-1} \cdot R \cdot T$$

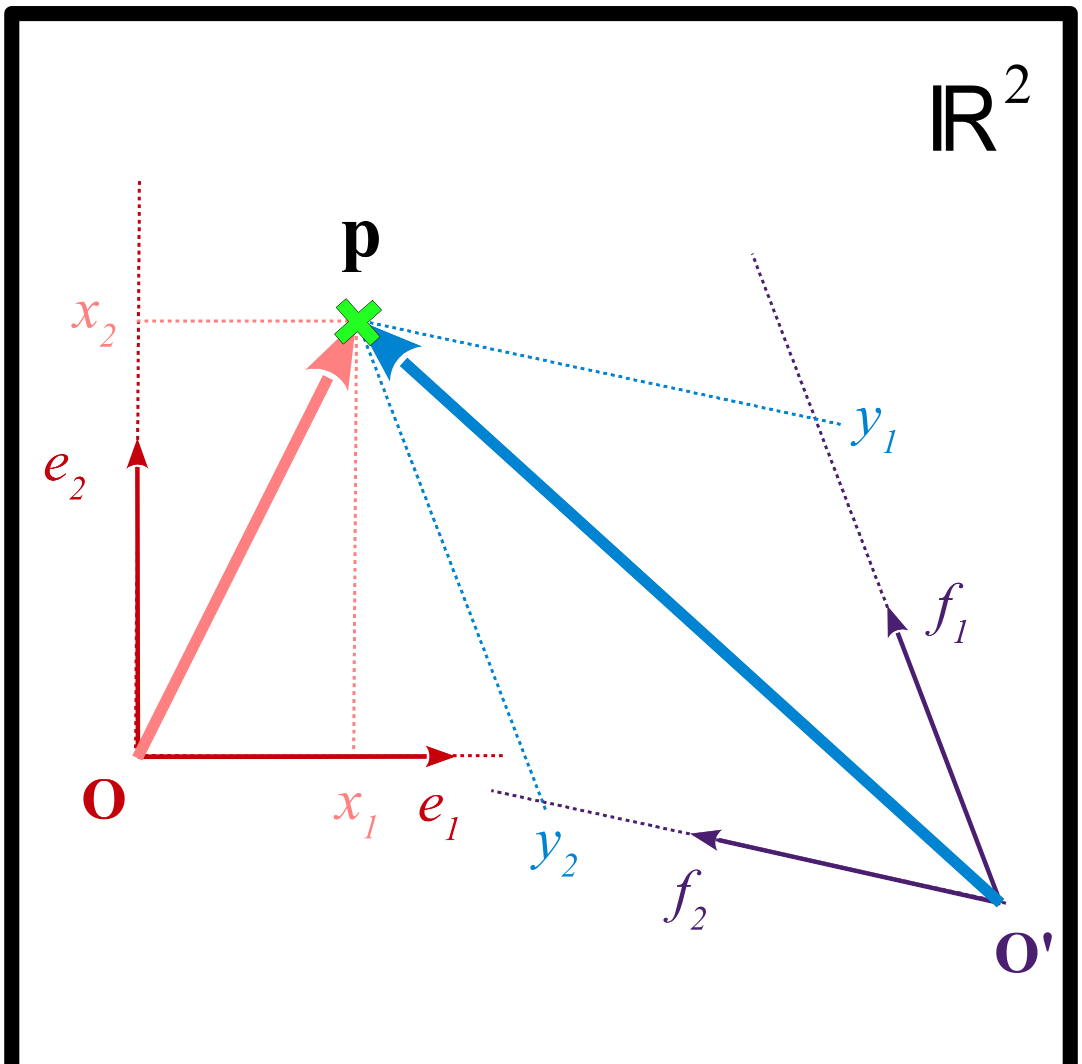


$$T^{-1}RT = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & p_1(1-\cos\theta)+p_2\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & p_2(1-\cos\theta)-p_1\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transformando referenciais

Referenciais e Sistemas de Coordenadas

- Um sistema de coordenadas fica definido por um referencial



$$\mathcal{E} = (\mathbf{O}, \{e_1, e_2\})$$

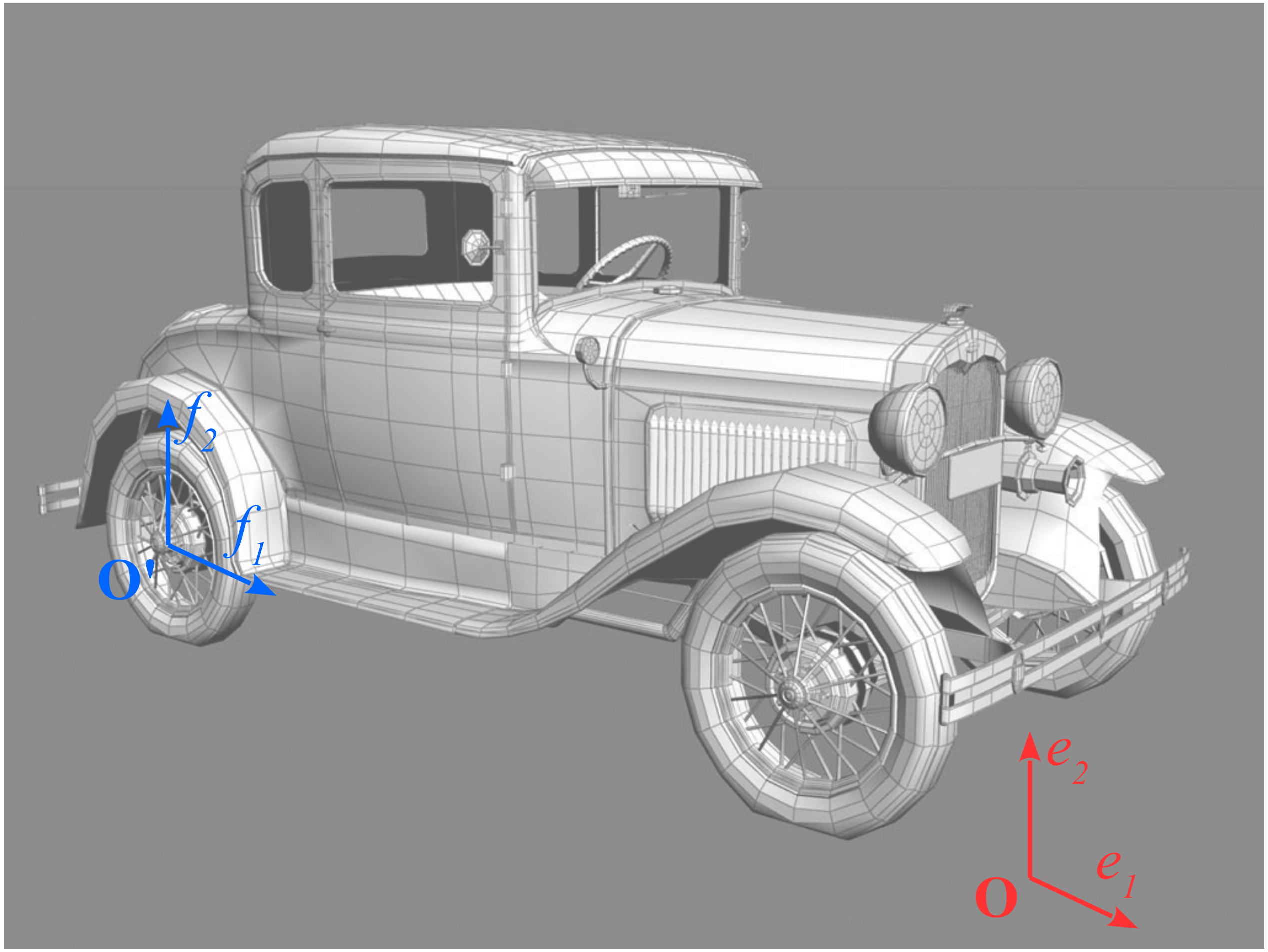
$$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$\mathcal{F} = (\mathbf{O'}, \{f_1, f_2\})$$

$$\overrightarrow{O'P} = y_1 f_1 + y_2 f_2$$

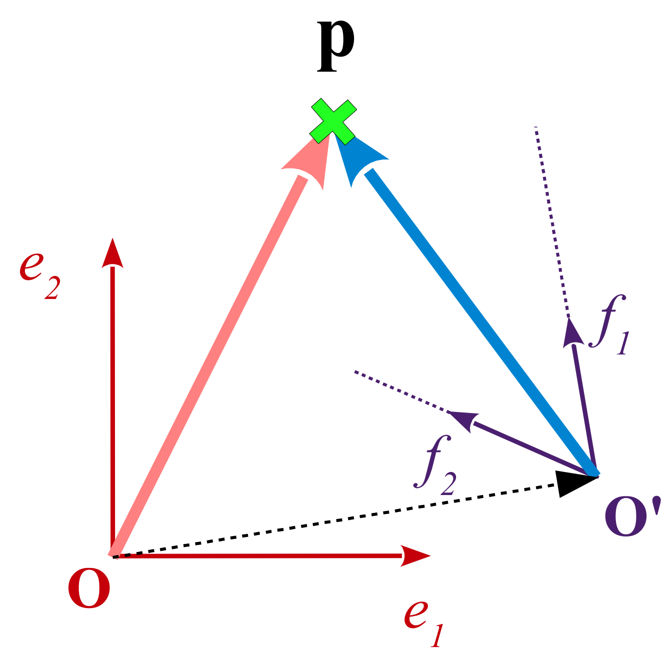
Importância da Escolha do Sistema de Coordenadas

- Exemplo Movimento da Roda de um Carro



Transformação entre os Referenciais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$

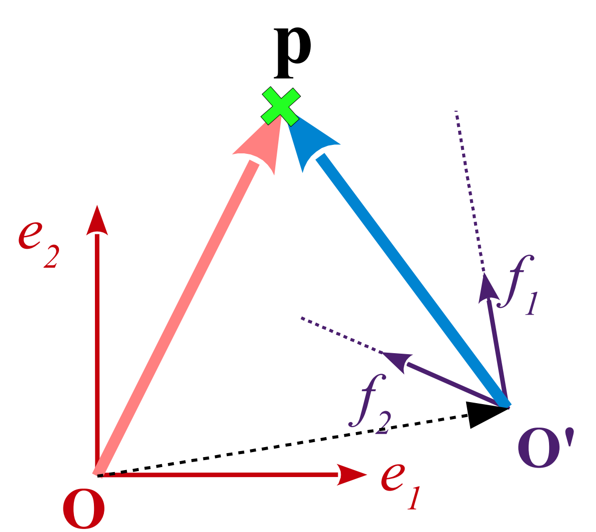
- $\mathcal{E} = (\mathrm{O}, \{e_1, e_2\})$
- $\mathcal{F} = (\mathrm{O'}, \{f_1, f_2\})$



- Etapas do processo:
  - Determinação da transformação linear L que leva a base $\{e_1, e_2\}$ na base $\{f_1, f_2\}$;
  - Determinação da translação T que leva a origem O do referencial $\mathcal{E}$ na origem O' do referencial $\mathcal{F}$.

Transformação entre os Referenciais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$

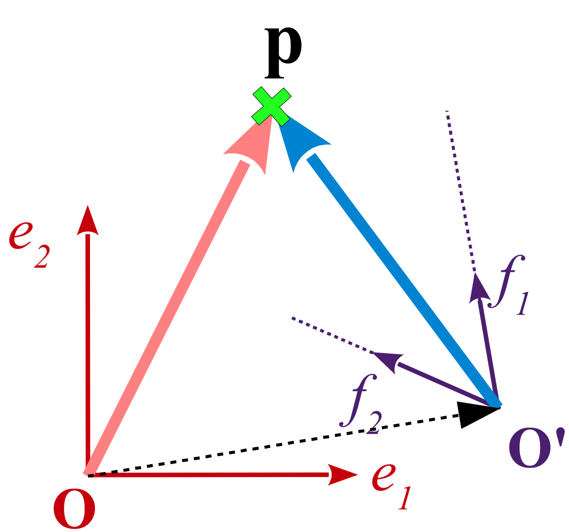
- Etapas do processo:
  - Determinação da transformação linear L que leva a base $\{e_1, e_2\}$ na base $\{f_1, f_2\}$;
    - $f_1 = L(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$
    - $f_2 = L(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$
  - Determinação da translação T que leva a origem O do referencial $\mathcal{E}$ na origem O' do referencial $\mathcal{F}$.
    - $\overrightarrow{OO'} = t_1 e_1 + t_2 e_2$



Transformação entre os Referenciais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$

- Etapas do processo:
  - Determinação da translação T que leva a origem O do referencial $\mathcal{E}$ na origem O' do referencial $\mathcal{F}$.
    - $\overrightarrow{OO'} = t_1 e_1 + t_2 e_2$

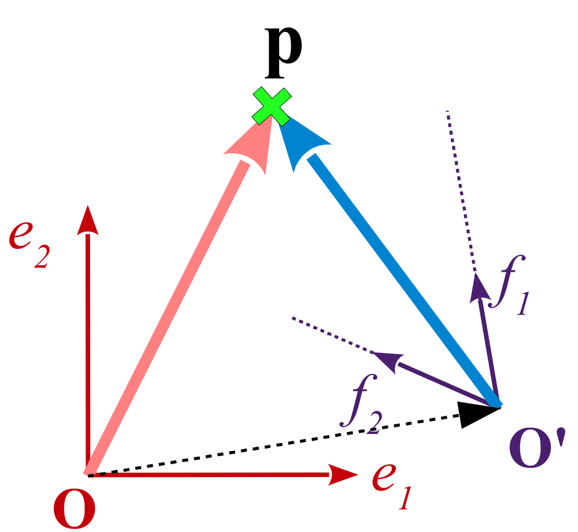
$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Transformação entre os Referenciais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$

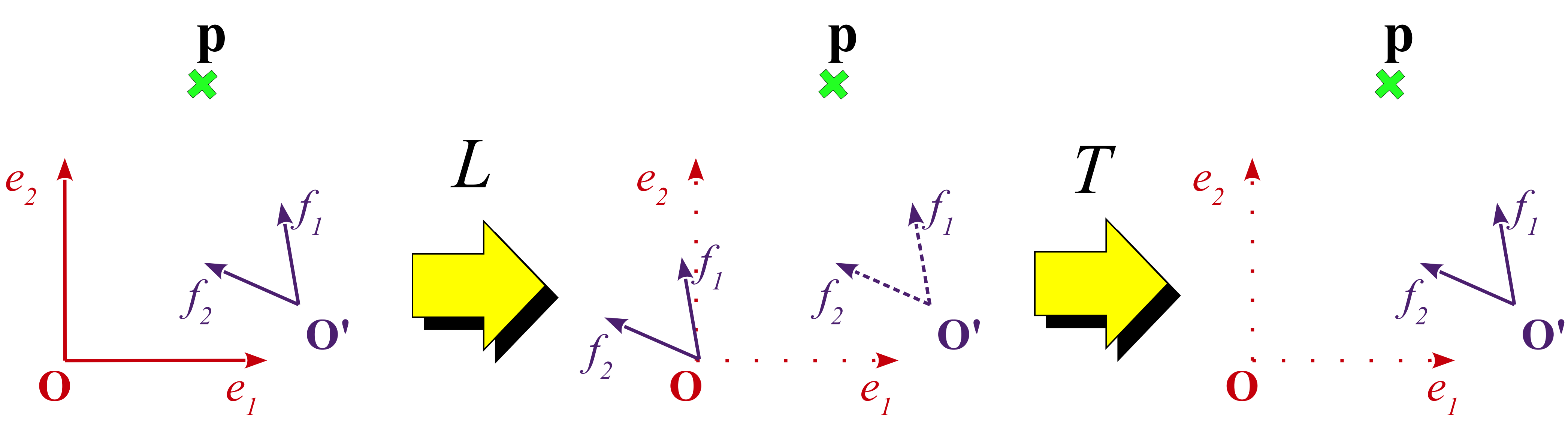
- Etapas do processo:
  - Determinação da transformação linear L que leva a base $\{e_1, e_2\}$ na base $\{f_1, f_2\}$;
    - $f_1 = L(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$
    - $f_2 = L(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$

$$L = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Transformação entre os Referenciais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$

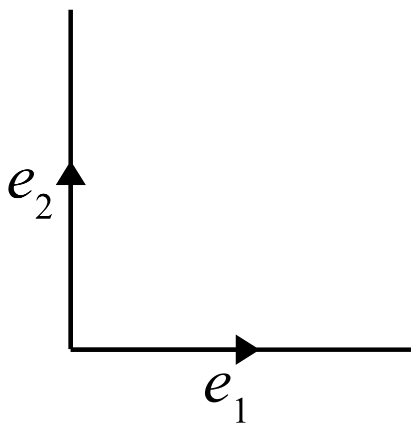
$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = T \cdot L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Transformação entre os Referenciais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$

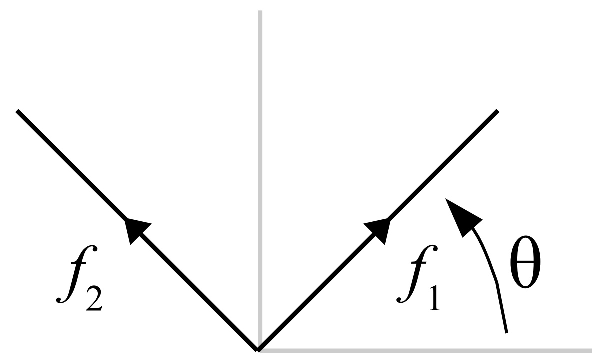
Exemplo: Mudança de base

base $\{e_1, e_2\}$



$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

base $\{f_1, f_2\}$



$$f_1 = \begin{vmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ 1 \end{vmatrix} \qquad f_2 = \begin{vmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ 1 \end{vmatrix}$$

L: leva a base $\{e_1, e_2\}$ na base $\{f_1, f_2\}$:

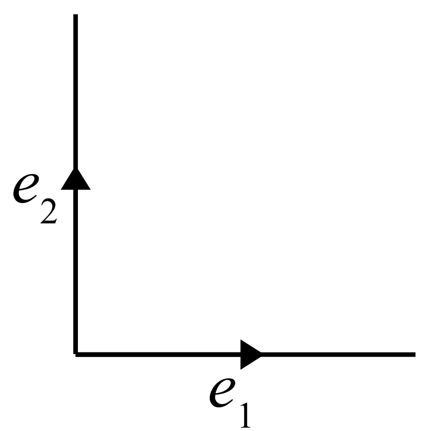
$$f_1 = L(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$$
$$f_2 = L(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$$

$$f_1 = L(e_1) = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$$
$$f_2 = L(e_2) = -e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta$$

Transformação entre os Referenciais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$

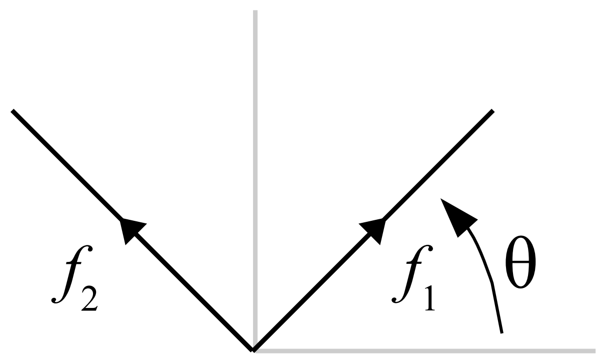
Exemplo: Mudança de base

base $\{e_1, e_2\}$



$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

base $\{f_1, f_2\}$



$$f_1 = \begin{vmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ 1 \end{vmatrix} \qquad f_2 = \begin{vmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ 1 \end{vmatrix}$$

L: leva a base $\{e_1, e_2\}$ na base $\{f_1, f_2\}$:

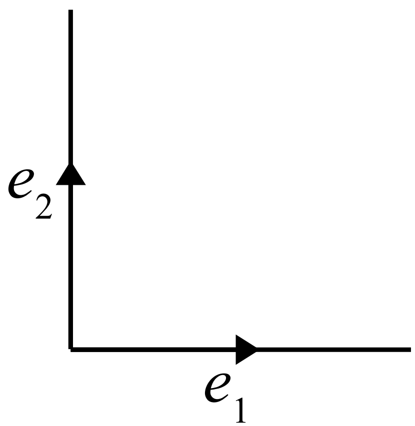
$$f_1 = L\,(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$$
$$f_2 = L\,(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$$

$$L = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transformação entre os Referenciais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$

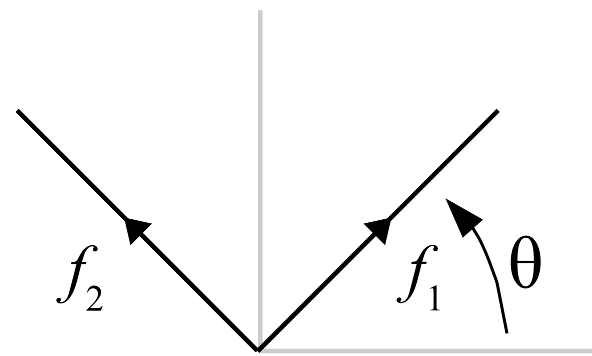
Exemplo: Mudança de base

base $\{e_1, e_2\}$



$$e_1 = \left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right| \qquad e_2 = \left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right|$$

base $\{f_1, f_2\}$



$$f_1 = \left|\begin{matrix} f_{11} \\ f_{12} \\ 1 \end{matrix}\right| \qquad f_2 = \left|\begin{matrix} f_{21} \\ f_{22} \\ 1 \end{matrix}\right|$$

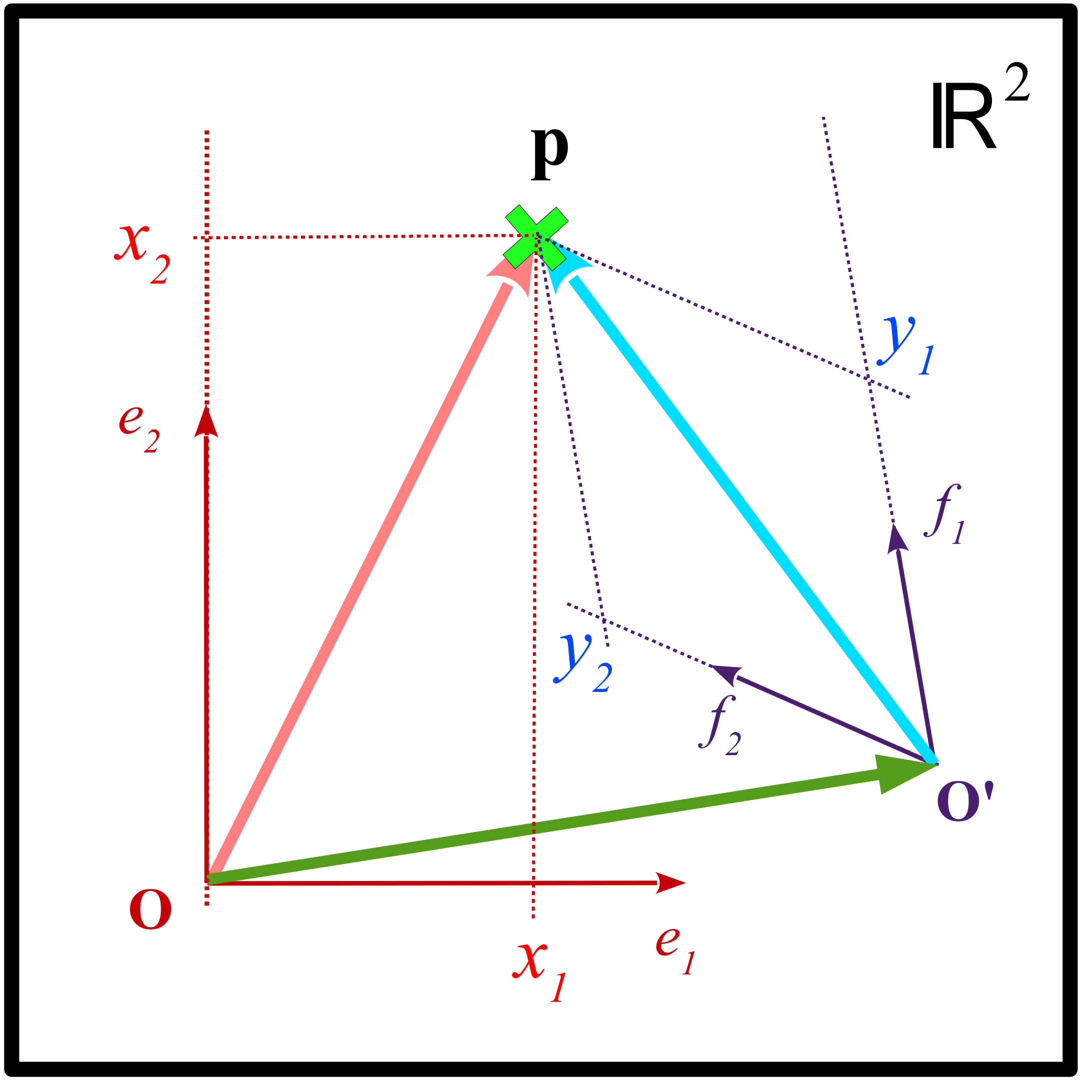
L: leva a base $\{e_1, e_2\}$ na base $\{f_1, f_2\}$:

$$f_1 = L(e_1) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$$
$$f_2 = L(e_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \left|\begin{matrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|$$

Transformando Coordenadas

Transformando Coordenadas



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$\overrightarrow{O'P} = y_1 f_1 + y_2 f_2$$

$$\overrightarrow{OO'} = t_1 e_1 + t_2 e_2$$

Transformando Coordenadas

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 \quad = \quad t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 f_1 + y_2 f_2$$

Transformando Coordenadas

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$\begin{aligned} x_1 e_1 + x_2 e_2 &= t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 f_1 + y_2 f_2 \\ &= t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2) + y_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2) \end{aligned}$$

Transformando Coordenadas

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$\begin{aligned}
x_1 e_1 + x_2 e_2 &= t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 f_1 + y_2 f_2 \\
&= t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2) + y_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2) \\
&= t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 a_{11} e_1 + y_1 a_{21} e_2 + y_2 a_{12} e_1 + y_2 a_{22} e_2 \\
&= e_1 (t_1 + y_1 a_{11} + y_2 a_{12}) + e_2 (t_2 + y_1 a_{21} + y_2 a_{22})
\end{aligned}$$

Transformando Coordenadas

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

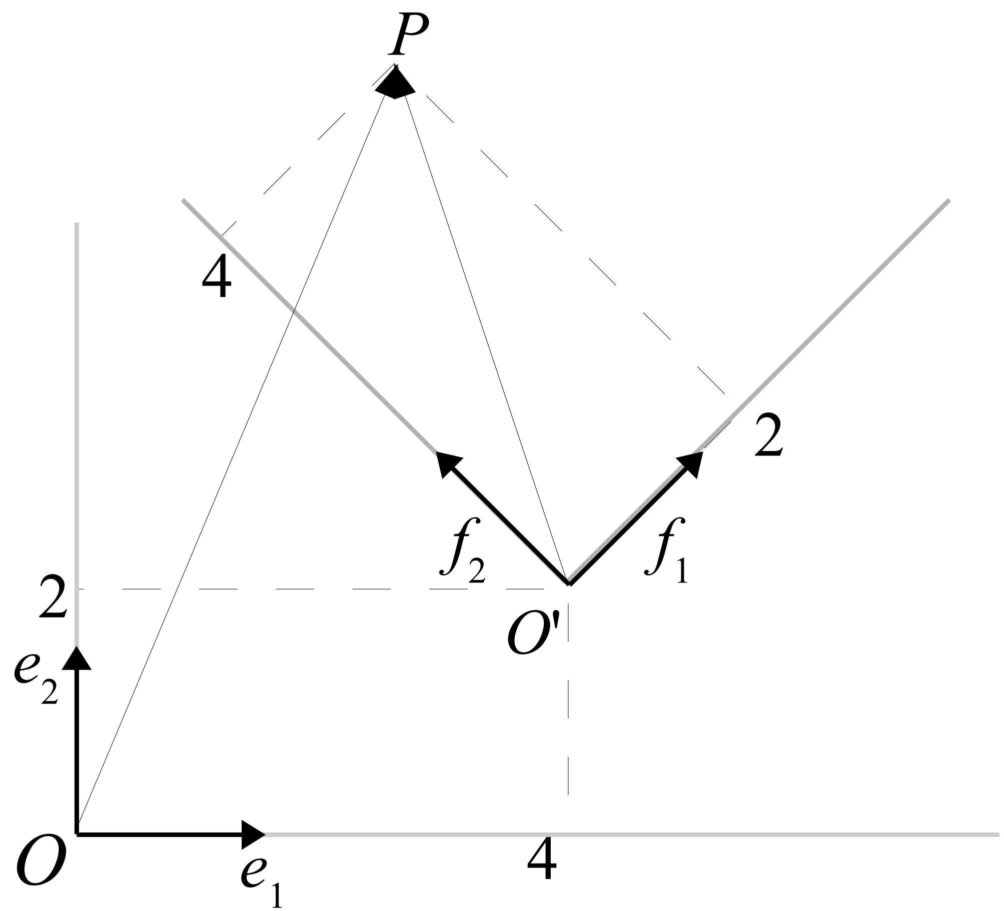
$$\begin{aligned}
x_1 e_1 + x_2 e_2 &= t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 f_1 + y_2 f_2 \\
&= t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2) + y_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2) \\
&= t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 a_{11} e_1 + y_1 a_{21} e_2 + y_2 a_{12} e_1 + y_2 a_{22} e_2 \\
&= e_1 (t_1 + y_1 a_{11} + y_2 a_{12}) + e_2 (t_2 + y_1 a_{21} + y_2 a_{22})
\end{aligned}$$

$$x_1 = t_1 + y_1 a_{11} + y_2 a_{12}$$
$$x_2 = t_2 + y_1 a_{21} + y_2 a_{22}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

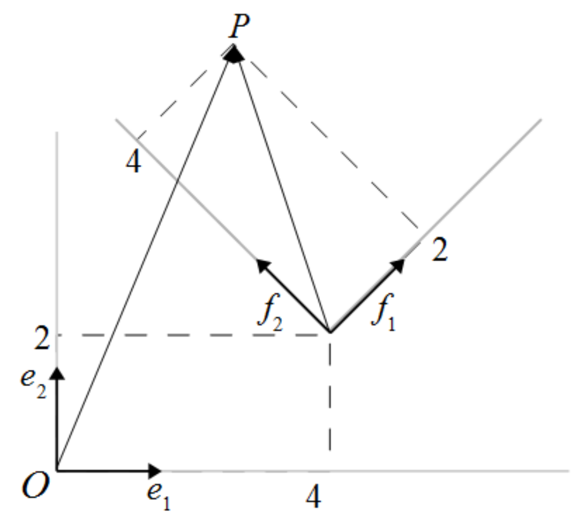
Transformando Coordenadas: Exemplo

Seja $\mathcal{E} = (O, \{e_1, e_2\})$, onde $O = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.
Seja $\mathcal{F} = (O', \{f_1, f_2\})$, onde $O' = (4, 2)$ e vetores f_1 e f_2 obtidos por uma rotação de e_1, e_2 de 45° no sentido anti-horário. Qual a coordenada do ponto $P = (2, 4)$ de $\mathcal{F}$ no referencial $\mathcal{E}$?



Transformando Coordenadas: Exemplo

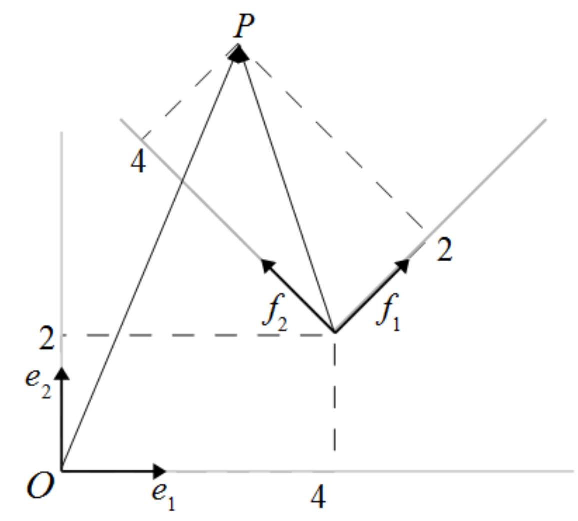
Seja $\mathcal{E} = (O, \{e_1, e_2\})$, onde $O = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.
Seja $\mathcal{F} = (O', \{f_1, f_2\})$, onde $O' = (4, 2)$ e vetores f_1 e f_2 obtidos por uma rotação de e_1, e_2 de 45º no sentido anti-horário. Qual a coordenada do ponto $P = (2, 4)$ de $\mathcal{F}$ no referencial $\mathcal{E}$?



$$f_1 = L(e_1) = e_1 \cos \pi/4 + e_2 \sin \pi/4$$
$$f_2 = L(e_2) = -e_1 \sin \pi/4 + e_2 \cos \pi/4$$
$$O' = 4e_1 + 2e_2$$

Transformando Coordenadas: Exemplo

Seja $\mathcal{E} = (O, \{e_1, e_2\})$, onde $O = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.
Seja $\mathcal{F} = (O', \{f_1, f_2\})$, onde $O' = (4, 2)$ e vetores f_1 e f_2 obtidos por uma rotação de e_1, e_2 de 45° no sentido anti-horário. Qual a coordenada do ponto $P = (2, 4)$ de $\mathcal{F}$ no referencial $\mathcal{E}$?

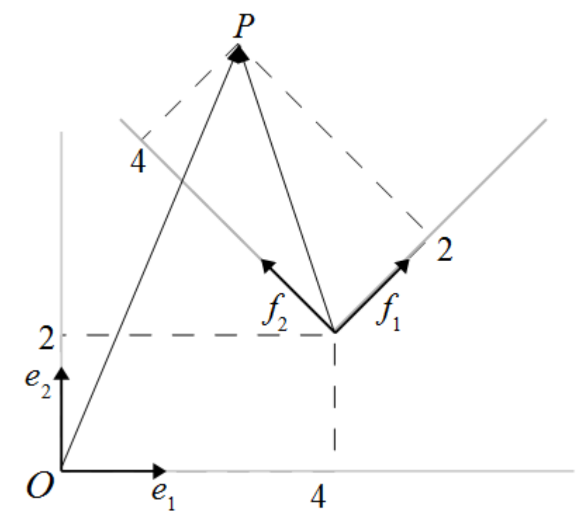


$$f_1 = L(e_1) = e_1 \cos \pi/4 + e_2 \sin \pi/4$$
$$f_2 = L(e_2) = -e_1 \sin \pi/4 + e_2 \cos \pi/4$$
$$O' = 4e_1 + 2e_2$$

$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 4 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transformando Coordenadas: Exemplo

Seja $\mathcal{E} = (O, \{e_1, e_2\})$, onde $O = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.
Seja $\mathcal{F} = (O', \{f_1, f_2\})$, onde $O' = (4, 2)$ e vetores f_1 e f_2 obtidos por uma rotação de e_1, e_2 de 45º no sentido anti-horário. Qual a coordenada do ponto $P = (2, 4)$ de $\mathcal{F}$ no referencial $\mathcal{E}$?



$$f_1 = L(e_1) = e_1 \cos \pi/4 + e_2 \sin \pi/4$$
$$f_2 = L(e_2) = -e_1 \sin \pi/4 + e_2 \cos \pi/4$$
$$O' = 4e_1 + 2e_2$$

$$\begin{vmatrix} 2.6 \\ 6.2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\sqrt{2} \\ 2+3\sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 4 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Transformando Coordenadas

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{vmatrix} = A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$\mathcal{E}$ $\mathcal{F}$

Transformando Coordenadas

$$\mathrm{C}_{\mathcal{E}} \qquad\qquad \mathrm{C}_{\mathcal{F}}$$

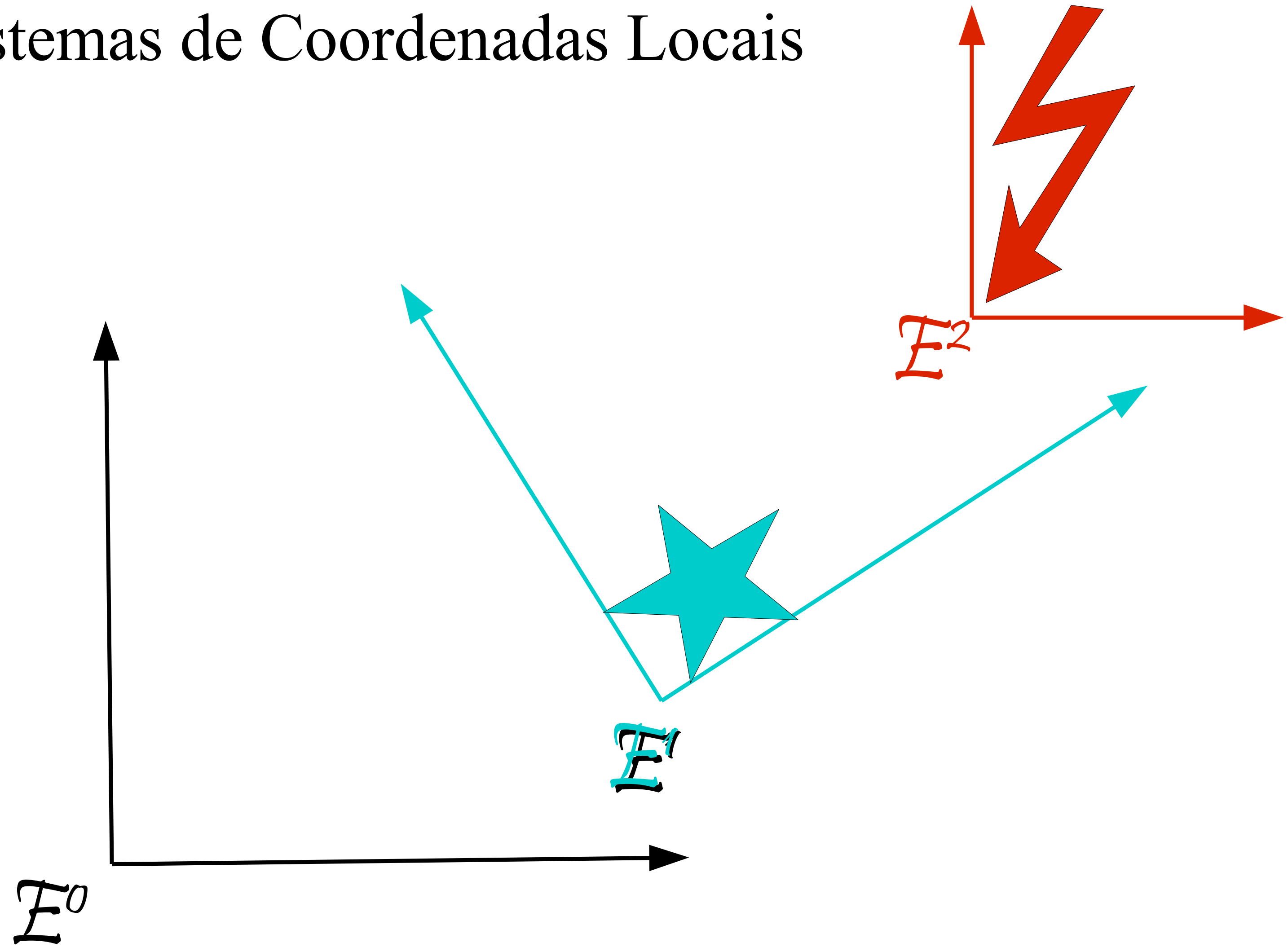
$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{vmatrix} = A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| &= A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} |\mathbf{y}| \\ A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}\,-1} |\mathbf{x}| &= A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}\,-1} A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} |\mathbf{y}| \end{aligned}$$

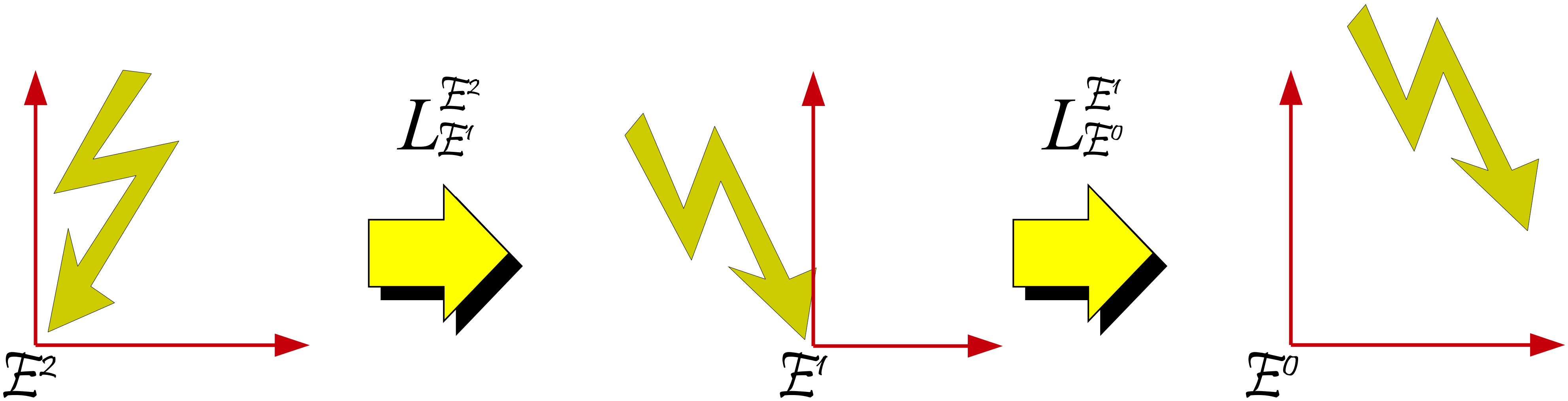
$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}\,-1} |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$$

Transformações Locais e Globais

- Sistema de Coordenadas do Mundo
- Sistemas de Coordenadas Locais



n Etapas do Movimento de Um Corpo Rígido



$$\mathcal{E}^0 = \left(O^0, \{b_1^0, b_2^0, \ldots, b_m^0\}\right)$$ Referencial Global

$$\mathcal{E}^1 = \left(O^1, \{b_1^1, b_2^1, \ldots, b_m^1\}\right)$$ Referenciais Sucessivos

$$\mathcal{E}^2 = \left(O^2, \{b_1^2, b_2^2, \ldots, b_m^2\}\right)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{E}^n = \left(O^n, \{b_1^n, b_2^n, \ldots, b_m^n\}\right)$$

n Etapas do Movimento de Um Corpo Rígido

$$T_0^1 \qquad T_1^2 \qquad T_2^3 \qquad \cdots \qquad T_{n-1}^n$$

$$\mathcal{E}^0 = \left(O^0, \{b_1^0, b_2^0, \ldots, b_m^0\}\right)$$ Referencial Global

$$\mathcal{E}^1 = \left(O^1, \{b_1^1, b_2^1, \ldots, b_m^1\}\right)$$ Referenciais Sucessivos

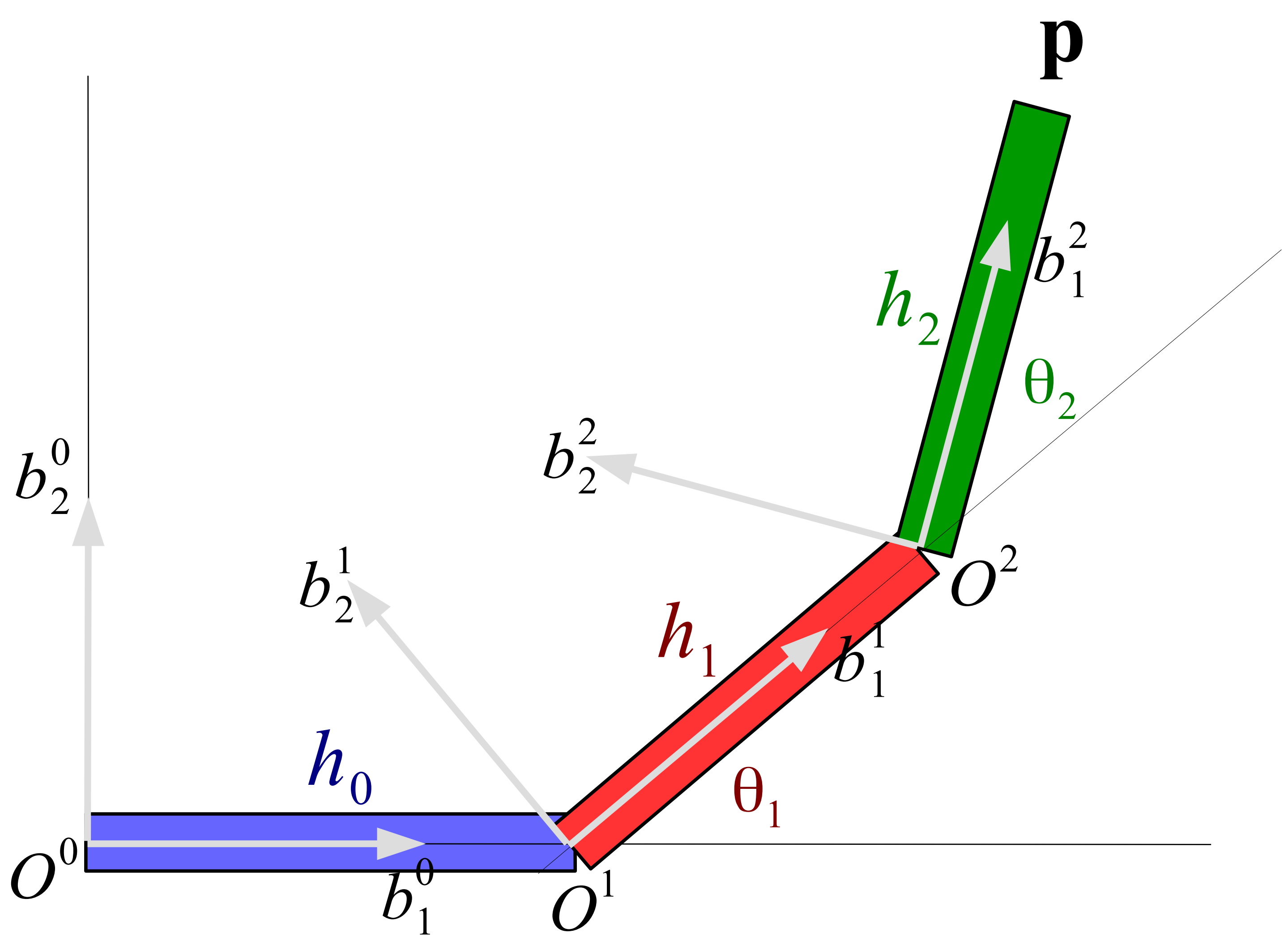
$$\mathcal{E}^2 = \left(O^2, \{b_1^2, b_2^2, \ldots, b_m^2\}\right)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{E}^n = \left(O^n, \{b_1^n, b_2^n, \ldots, b_m^n\}\right)$$

$$L_{\mathcal{E}^{n-1}}^{\mathcal{E}^n} = T_{n\text{-}1}^n \qquad\qquad T = T_0^1 T_1^2 T_2^3 \ldots T_{n-1}^n$$

Exemplo: Vários Referenciais em uma Hierarquia

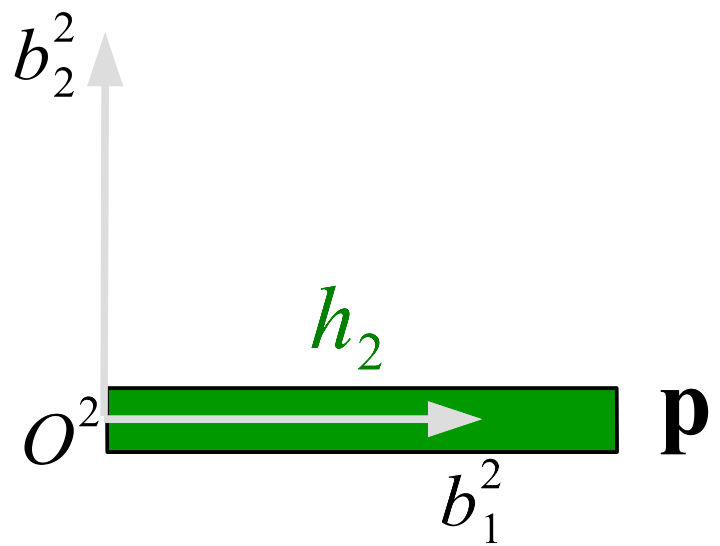


Exemplo: Vários Referenciais em uma Hierarquia

Em $\mathcal{E}^2$:

Desenhar a haste de dimensão h_2: $(0, 0) \rightarrow (h_2, 0)$

As coordenadas de **p** no referencial $\mathcal{E}^2$ são $(h_2, 0)$



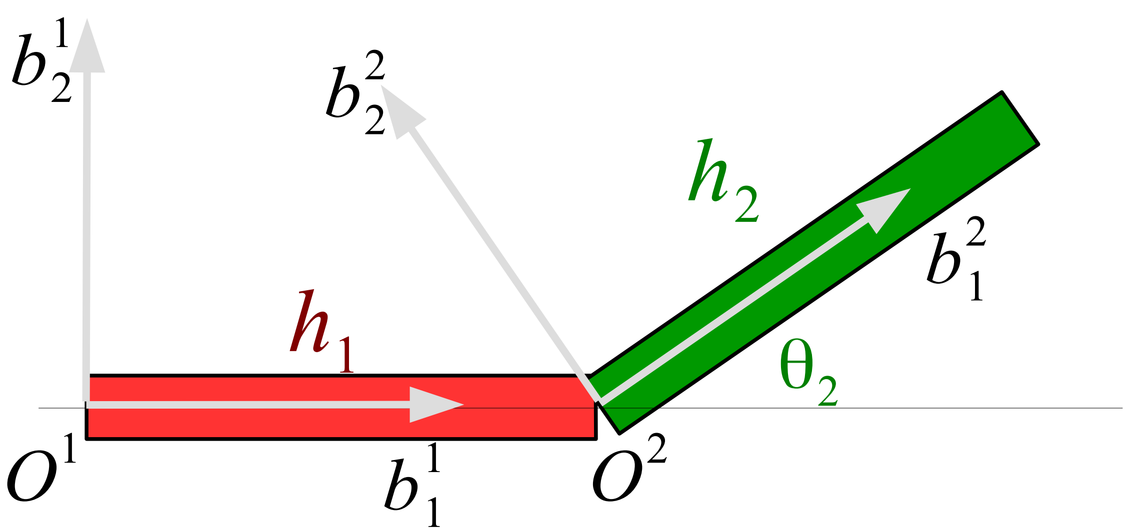
Exemplo: Vários Referenciais em uma Hierarquia

Em $\mathcal{E}^1$:

1) Calcular $T_1^2 = \begin{vmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & h_1 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2) Converter coordenadas de objetos em $\mathcal{E}^2$ para $\mathcal{E}^1$

3) Desenhar a haste de dimensão h_1: $(0, 0) \rightarrow (h_1, 0)$



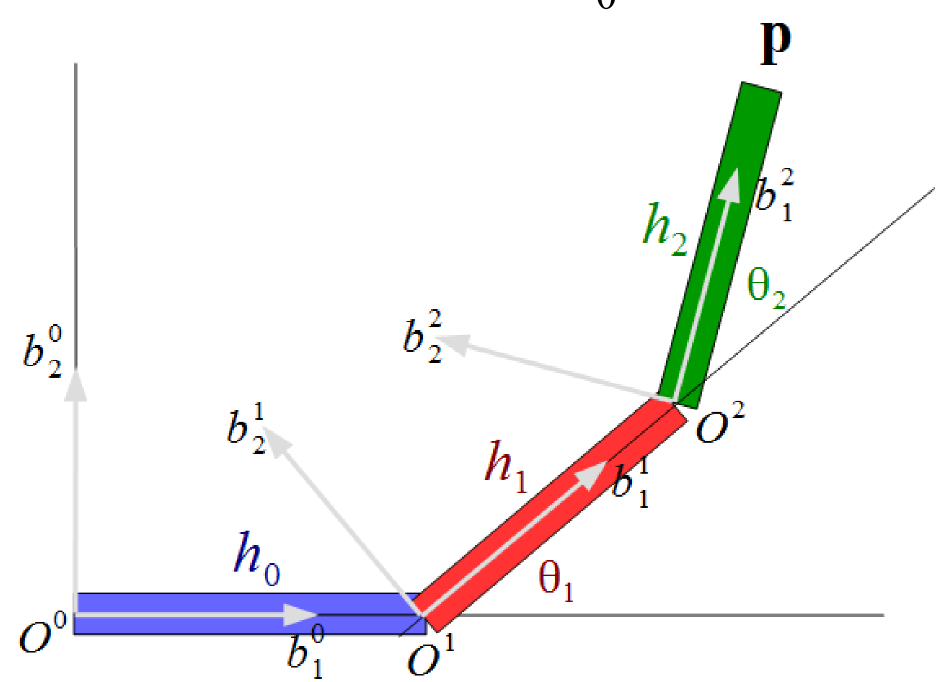
Exemplo: Vários Referenciais em uma Hierarquia

Em $\mathcal{E}^2$:

1) Calcular $T_0^1 = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & h_0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

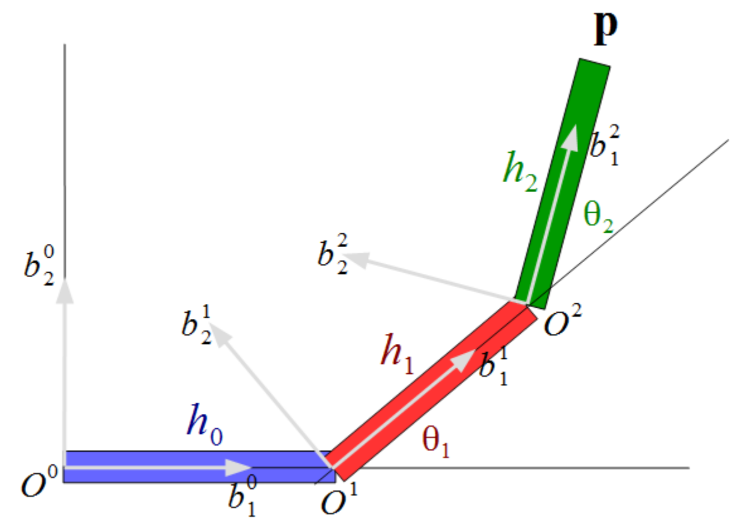
2) Converter coordenadas de objetos em $\mathcal{E}^2$ para $\mathcal{E}^1$

3) Desenhar a haste de dimensão h_0: $(0, 0) \rightarrow (h_0, 0)$



Exemplo: Vários Referenciais em uma Hierarquia

$$T = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & h_0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & h_1 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 & h_1\cos\theta_1 + h_0 \\ \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 & h_1\operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & h_1\cos\theta_1 + h_0 \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & h_1\operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transformando Coordenadas 3D

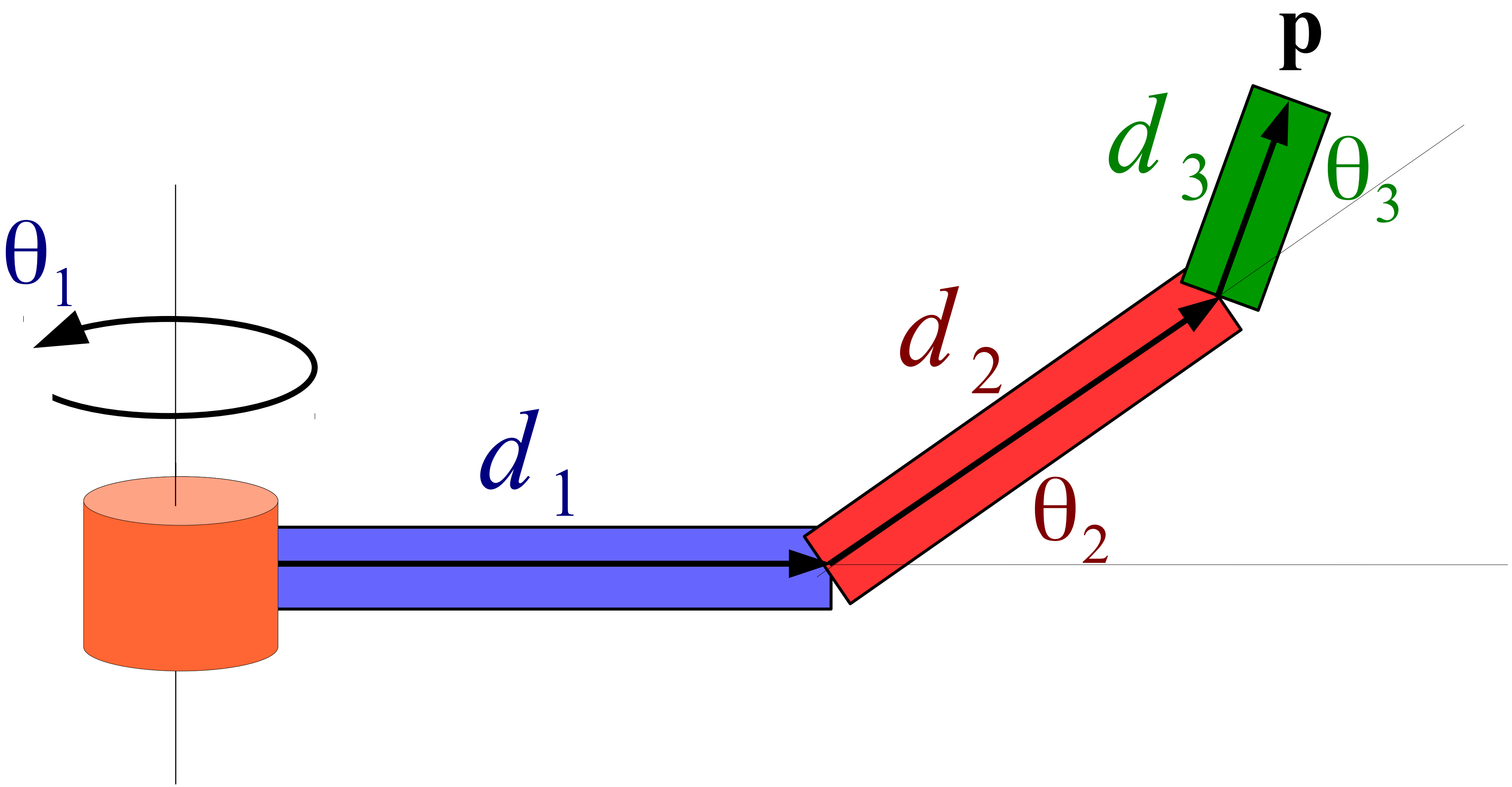
Rotações 3D

$$R_z = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

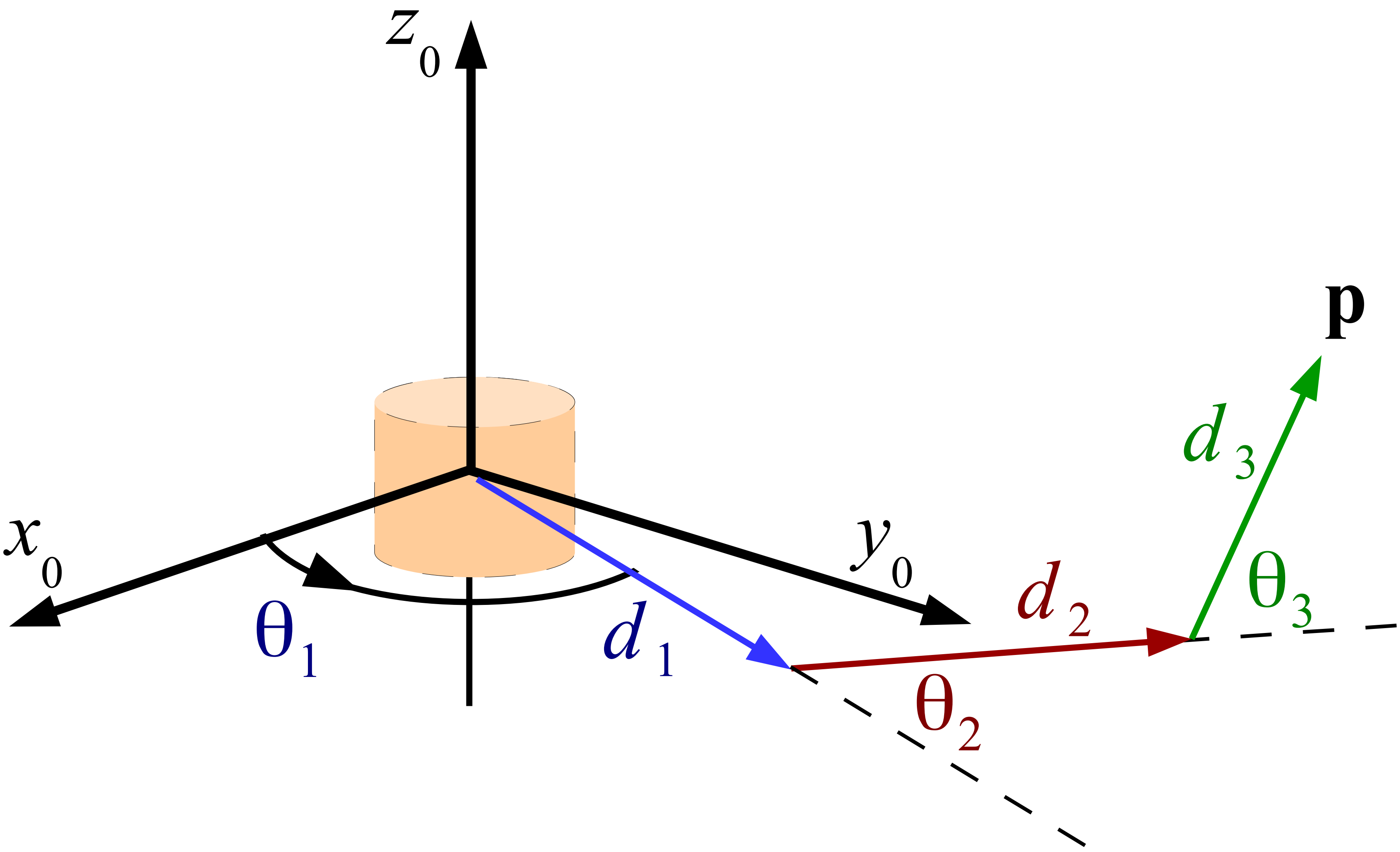
$$R_y = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

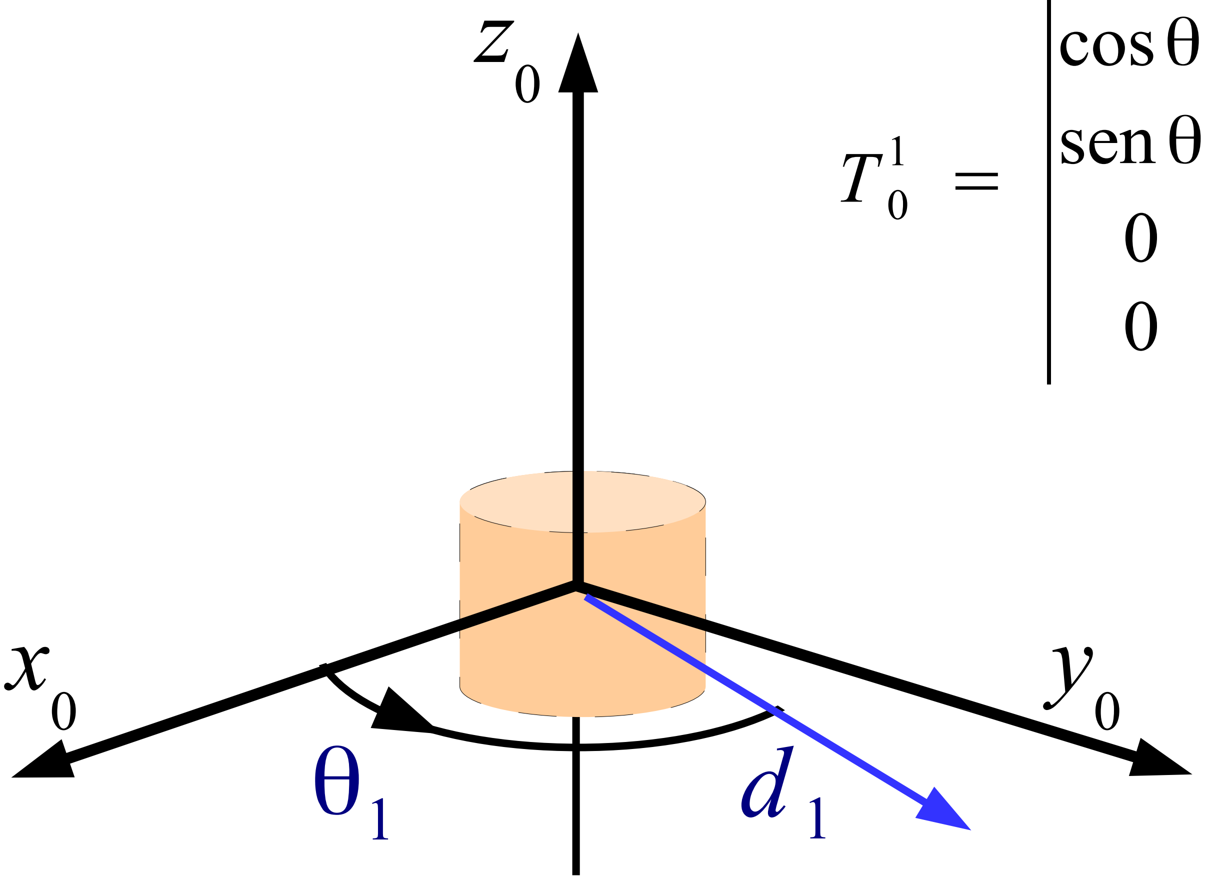
Exemplo 3D: Vários Referenciais



Exemplo 3D: Vários Referenciais

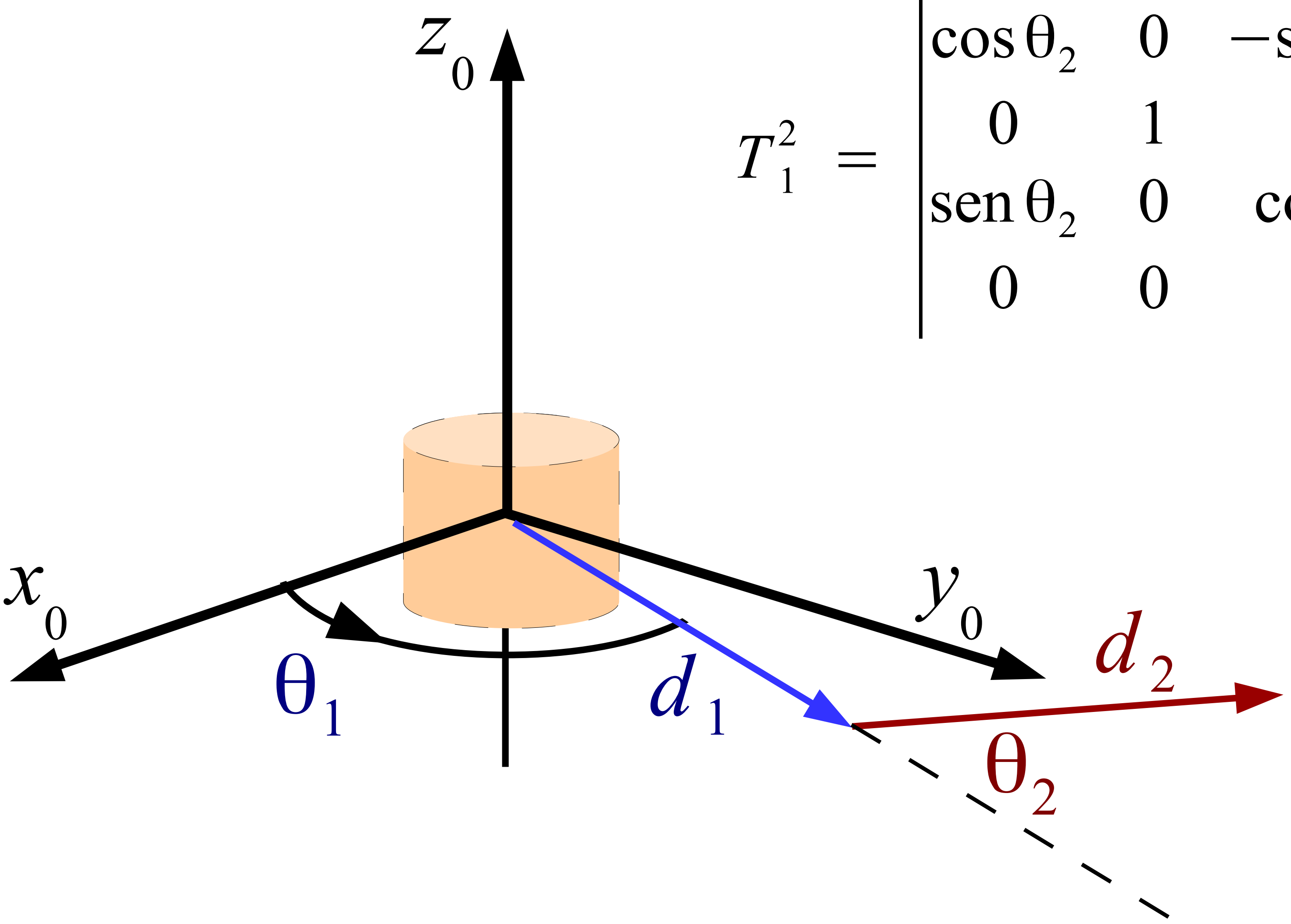


Exemplo 3D: Vários Referenciais



$$T_0^1 = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

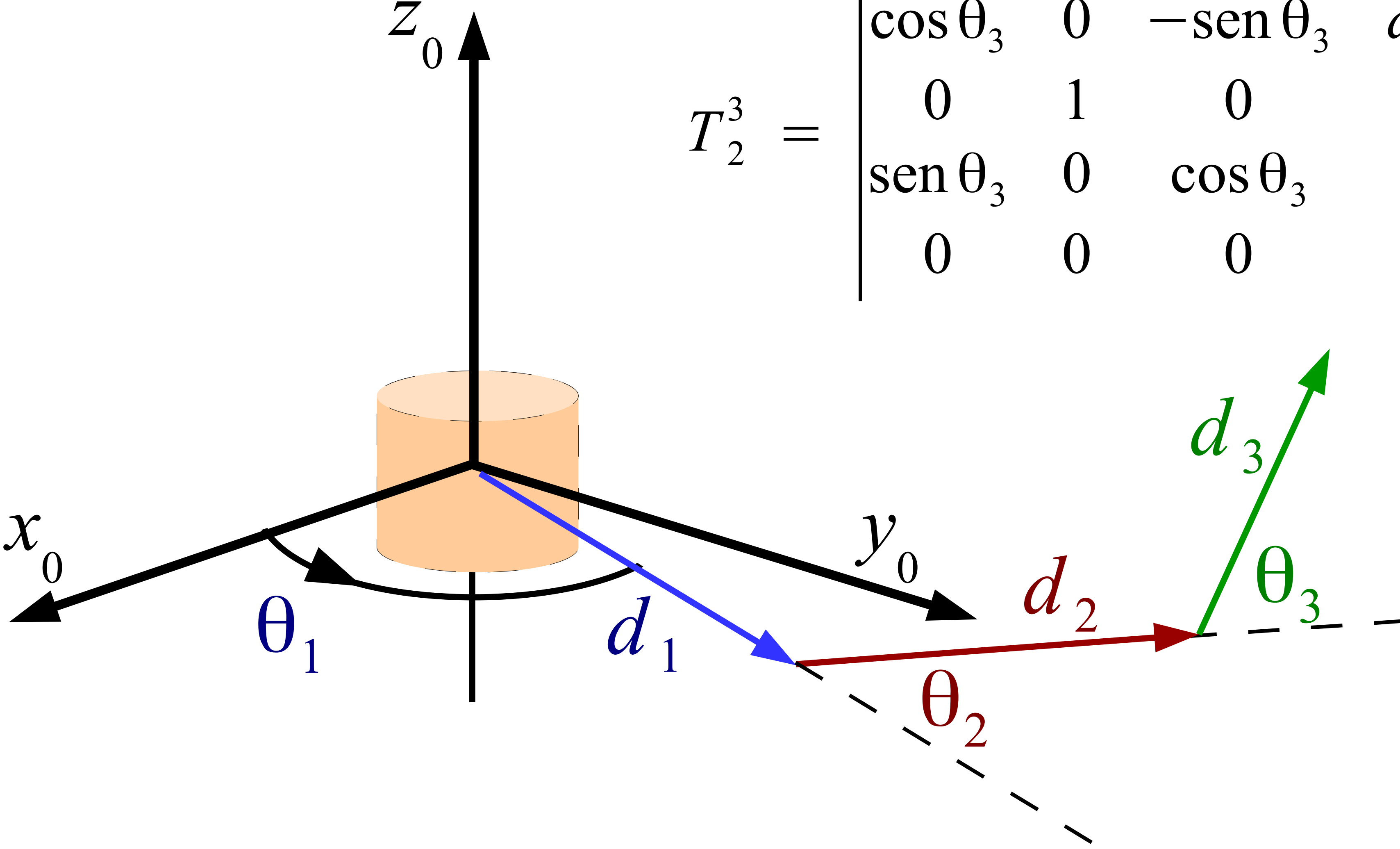
Exemplo 3D: Vários Referenciais



$$T_1^2 = \begin{vmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\operatorname{sen}\theta_2 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

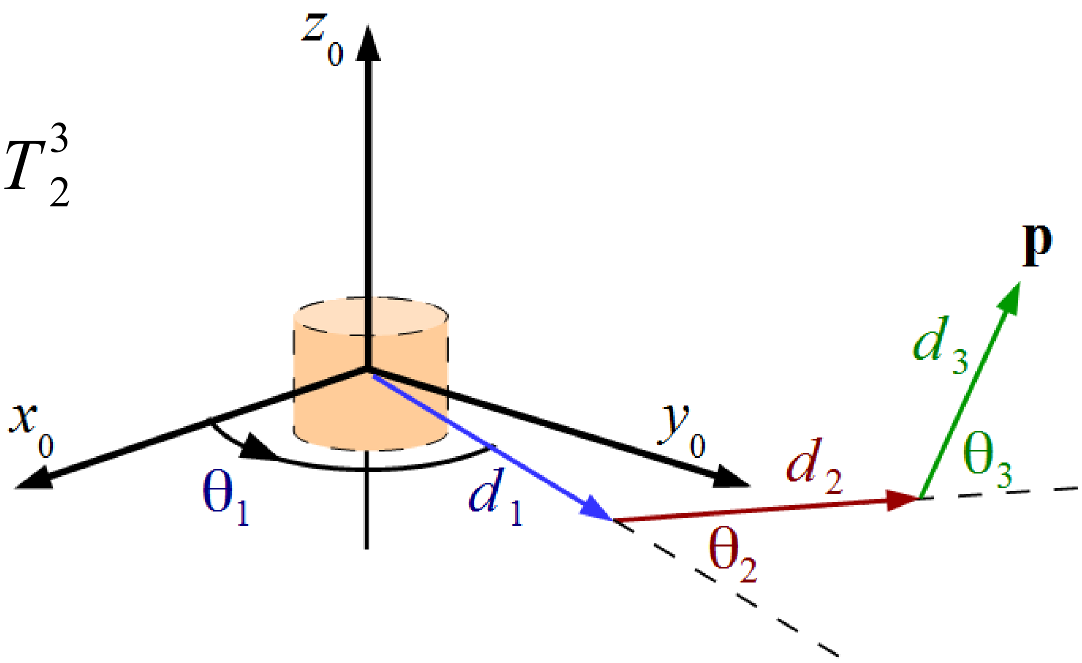
Exemplo 3D: Vários Referenciais

$$T_2^3 = \begin{vmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\mathrm{sen}\,\theta_3 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Exemplo 3D: Vários Referenciais

$$T = T_0^3 = T_0^1 \cdot T_1^2 \cdot T_2^3$$



$$T_0^1 = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\mathrm{sen}\,\theta_1 & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad T_1^2 = \begin{vmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\mathrm{sen}\,\theta_2 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad T_2^3 = \begin{vmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\mathrm{sen}\,\theta_3 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Fim