Estatística de Redes Sociais

Antonio Galves

Módulo 1

2a. aula

A formação de consenso na rede. O modelo do votante.

Definindo o modelo $(X_n)_{n\geq 0}$

Recapitulando:

Os ingredientes do modelo são:

Definindo o modelo $(X_n)_{n\geq 0}$

Recapitulando:

Os ingredientes do modelo são:

- A especificação das relações de influência entre os atores;

Definindo o modelo $(X_n)_{n \geq 0}$

Recapitulando:

Os ingredientes do modelo são:

- A especificação das relações de influência entre os atores;
- A especificação da funcão probabilística usada na escolha de cada nova opinião de um ator, em função das últimas opiniões de seus influenciadores.

Um modelo simples de Rede Social

Um modelo simples de Rede Social

- $\mathcal{A}$: conjunto finito de atores.

Um modelo simples de Rede Social

- $\mathcal{A}$: conjunto finito de atores.
- $\mathcal{O} = \{+1, -1\}$: conjunto de opiniões possíveis.

Um modelo simples de Rede Social

- $\mathcal{A}$: conjunto finito de atores.
- $\mathcal{O} = \{+1, -1\}$: conjunto de opiniões possíveis.
- $X_n(a) \in \mathcal{O}$: última opinião emitida pelo ator a, até o instante n.

Um modelo simples de Rede Social

- $\mathcal{A}$: conjunto finito de atores.
- $\mathcal{O} = \{+1, -1\}$: conjunto de opiniões possíveis.
- $X_n(a) \in \mathcal{O}$: última opinião emitida pelo ator a, até o instante n.
- $A_n \in \mathcal{A}$: ator que emitiu uma opinião no instante n.

Um modelo simples de Rede Social

- $\mathcal{A}$: conjunto finito de atores.
- $\mathcal{O} = \{+1, -1\}$: conjunto de opiniões possíveis.
- $X_n(a) \in \mathcal{O}$: última opinião emitida pelo ator a, até o instante n.
- $A_n \in \mathcal{A}$: ator que emitiu uma opinião no instante n.
- $X_n = (X_n(a) : a \in \mathcal{A})$: lista com as últimas opiniões emitidas pelo conjunto de atores, até o instante n.

Um modelo simples de Rede Social

- $\mathcal{A}$: conjunto finito de atores.
- $\mathcal{O} = \{+1, -1\}$: conjunto de opiniões possíveis.
- $X_n(a) \in \mathcal{O}$: última opinião emitida pelo ator a, até o instante n.
- $A_n \in \mathcal{A}$: ator que emitiu uma opinião no instante n.
- $X_n = (X_n(a) : a \in \mathcal{A})$: lista com as últimas opiniões emitidas pelo conjunto de atores, até o instante n.
- $X_0, X_1, X_2 \ldots, ..$ sequência descrevendo a evolução das opiniões dos diversos atores ao longo do tempo.

Conjuntos de influenciadores.

Conjuntos de influenciadores.

- **Exemplo 1:** Seja $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ o conjunto de atores da rede;

Conjuntos de influenciadores.

- **Exemplo 1:** Seja $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a-1, a+1\}$, com a convenção $N + 1 = 1$.

Conjuntos de influenciadores.

- **Exemplo 1:** Seja $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a - 1, a + 1\}$, com a convenção $N + 1 = 1$.
- **Exemplo 2:** Seja $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) : \, a_1 = 1, \ldots, N \, , a_2 = 1, \ldots, N\}$, o conjunto de atores da rede;

Conjuntos de influenciadores.

- **Exemplo 1:** Seja $\mathcal{A} = \{1, \dots, N\}$ o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a-1, a+1\}$, com a convenção $N+1=1$.
- **Exemplo 2:** Seja $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) :\ a_1 = 1, \dots, N\,, a_2 = 1, \dots, N\}$, o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$,

$$\mathcal{V}_{\cdot \to (a_1,a_2)} = \{(a_1+1, a_2), (a_1-1, a_2), (a_1, a_2+1), (a_1, a_2-1)\}\,,$$

também com a convenção $N+1=1$.

Exemplo de função probabilística usada por um ator para escolher uma nova opinião

Exemplo de função probabilística usada por um ator para escolher uma nova opinião

- Seja $U_n^a(+1)$ o número de influenciadores do ator a, cuja última opinião emitida até o instante n foi $+1$.

Exemplo de função probabilística usada por um ator para escolher uma nova opinião

- Seja $U_n^a(+1)$ o número de influenciadores do ator a, cuja última opinião emitida até o instante n foi $+1$.
- Seja $U_n^a(-1)$, o número de influenciadores do ator a, cuja última opinião emitida até o instante n foi -1.

Exemplo de função probabilística usada por um ator para escolher uma nova opinião

- Seja $U_n^a(+1)$ o número de influenciadores do ator a, cuja última opinião emitida até o instante n foi $+1$.
- Seja $U_n^a(-1)$, o número de influenciadores do ator a, cuja última opinião emitida até o instante n foi -1.
- Se o ator a decidir emitir uma opinião no instante $n+1$, ele escolherá a opinião $+1$, com probabilidade

$$p_n^a(+1) = \frac{U_n^a(+1)}{U_n^a(+1) + U_n^a(-1)}$$

Exemplo de função probabilística usada por um ator para escolher uma nova opinião

- Seja $U_n^a(+1)$ o número de influenciadores do ator a, cuja última opinião emitida até o instante n foi $+1$.
- Seja $U_n^a(-1)$, o número de influenciadores do ator a, cuja última opinião emitida até o instante n foi -1.
- Se o ator a decidir emitir uma opinião no instante $n+1$, ele escolherá a opinião $+1$, com probabilidade

$$p_n^a(+1) = \frac{U_n^a(+1)}{U_n^a(+1) + U_n^a(-1)}$$

- e escolherá a opinião -1, com probabilidade

$$p_n^a(-1) = \frac{U_n^a(-1)}{U_n^a(+1) + U_n^a(-1)}$$

Um algoritmo gerando a sequência $(X_n)_{n \geq 0}$

Um algoritmo gerando a sequência $(X_n)_{n \geq 0}$

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões
   $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$

Um algoritmo gerando a sequência $(X_n)_{n\geq 0}$

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões
   $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:

Um algoritmo gerando a sequência $(X_n)_{n \geq 0}$

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões
   $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   2.1 Sorteie A_n independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$

Um algoritmo gerando a sequência $(X_n)_{n\geq 0}$

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões
   $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   2.1 Sorteie A_n independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$
   2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, escolha $O_n = o \in \mathcal{O}$, com probabilidade

$$\mathbb{P}\{O_n = o \,|\, X_{n-1}, A_n = b\} = p^b_{n-1}(o)$$

Um algoritmo gerando a sequência $(X_n)_{n\geq 0}$

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \dots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   2.1 Sorteie A_n independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$
   2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, escolha $O_n = o \in \mathcal{O}$, com probabilidade
   $$\mathbb{P}\{O_n = o \,|\, X_{n-1}, A_n = b\} = p^b_{n-1}(o)$$
   2.3 Para todo $a \in \mathcal{A}$, defina $X_n(a) = O_n$, se $a = A_n$ e $X_n(a) = X_{n-1}(a)$, se $a \neq A_n$.

Uma outra versão do algoritmo

Em vez de

2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, escolha $O_n = o \in \mathcal{O}$, com probabilidade

$$\mathbb{P}\{O_n = o \,|\, X_{n-1}, A_n = b\} = p_n^b(o),$$

faremos

2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, sorteie $I_n \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}$, com probabilidade uniforme e defina

$$O_n = X_{n-1}(I_n).$$

Melhorando o algoritmo

Melhorando o algoritmo

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões
   $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$

Melhorando o algoritmo

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões
   $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \dots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:

Melhorando o algoritmo

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
    2.1 Sorteie A_n independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$

Melhorando o algoritmo

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   2.1 Sorteie A_n independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$
   2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, sorteie $I_n \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}$, com probabilidade uniforme e defina

$$O_n = X_{n-1}(I_n)$$

Melhorando o algoritmo

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   2.1 Sorteie A_n independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$
   2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, sorteie $I_n \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}$, com probabilidade uniforme e defina

$$O_n = X_{n-1}(I_n)$$

   2.3 Para todo $a \in \mathcal{A}$, defina $X_n(a) = O_n$, se $a = A_n$ e $X_n(a) = X_{n-1}(a)$, se $a \neq A_n$.

Explicando em palavras

Explicando em palavras

- Tendo já sorteado todas as opiniões até o instante $n-1$, definimos X_n da seguinte maneira:

Explicando em palavras

- Tendo já sorteado todas as opiniões até o instante $n-1$, definimos X_n da seguinte maneira:
- Primeiro sorteamos o ator A_n que vai emitir uma opinião no instante n. Esse sorteio é feito uniformemente em $\mathcal{A}$;

Explicando em palavras

- Tendo já sorteado todas as opiniões até o instante $n-1$, definimos X_n da seguinte maneira:
- Primeiro sorteamos o ator A_n que vai emitir uma opinião no instante n. Esse sorteio é feito uniformemente em $\mathcal{A}$;
- Para decidir que opinião emitir, o ator A_n sorteia uniformemente um de seus influenciadores, isto é, um ator em $\mathcal{V}_{\cdot \to A_n}$, e simplesmente reproduz a última opinião que este influenciador sorteado emitiu até o instante $n-1$.

Explicando em palavras

- Tendo já sorteado todas as opiniões até o instante $n-1$, definimos X_n da seguinte maneira:
- Primeiro sorteamos o ator A_n que vai emitir uma opinião no instante n. Esse sorteio é feito uniformemente em $\mathcal{A}$;
- Para decidir que opinião emitir, o ator A_n sorteia uniformemente um de seus influenciadores, isto é, um ator em $\mathcal{V}_{\cdot\to A_n}$, e simplesmente reproduz a última opinião que este influenciador sorteado emitiu até o instante $n-1$.
- As últimas opiniões emitidas por todos os atores diferentes de A_n se mantêm.

Este novo algoritmo gera uma cadeia com a mesma lei que o primeiro

Com efeito,

$$\mathbb{P}(O_n = +1 \mid X_{n-1}, A_n = b) =$$

Este novo algoritmo gera uma cadeia com a mesma lei que o primeiro

Com efeito,

$$\mathbb{P}(O_n = +1 \mid X_{n-1}, A_n = b) = \frac{\sum_{v \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}} \mathbf{1}\{X_{n-1}(v) = +1\}}{|\mathcal{V}_{\cdot \to b}|} =$$

$$= \frac{U^b_{n-1}(+1)}{|\mathcal{V}_{\cdot \to b}|} = \frac{U^b_{n-1}(+1)}{U^b_{n-1}(+1) + U^b_{n-1}(-1)} = p^b_{n-1}(+1).$$

Qual a vantagem de mudar o algoritmo?!

Qual a vantagem de mudar o algoritmo?!

- Neste novo algoritmo não é necessário calcular as proporções $p_n^a(+1)$ e $p_n^a(-1)$.

Qual a vantagem de mudar o algoritmo?!

- Neste novo algoritmo não é necessário calcular as proporções $p_n^a(+1)$ e $p_n^a(-1)$.
- Com efeito, o sorteio da opinião de um influenciador escolhido ao acaso tem exatamente o mesmo efeito.

Qual a vantagem de mudar o algoritmo?!

- Neste novo algoritmo não é necessário calcular as proporções $p_n^a(+1)$ e $p_n^a(-1)$.
- Com efeito, o sorteio da opinião de um influenciador escolhido ao acaso tem exatamente o mesmo efeito.
- Este algoritmo tem um aspecto mais importante: ele nos permite fazer uma busca retrospectiva da origem da última opinião emitida por cada ator até o instante presente.

Qual a vantagem de mudar o algoritmo?!

- Neste novo algoritmo não é necessário calcular as proporções $p_n^a(+1)$ e $p_n^a(-1)$.
- Com efeito, o sorteio da opinião de um influenciador escolhido ao acaso tem exatamente o mesmo efeito.
- Este algoritmo tem um aspecto mais importante: ele nos permite fazer uma busca retrospectiva da origem da última opinião emitida por cada ator até o instante presente.
- E isso nos leva a uma compreensão profunda do comportamento do conjunto de opiniões ao longo do tempo.

Construção gráfica

Construção gráfica

- Para simplificar a apresentação vamos nos limitar ao exemplo 1.

Construção gráfica

- Para simplificar a apresentação vamos nos limitar ao exemplo 1.
- No exemplo 1, $\mathcal{A} = \{1, ..., N\}$ e para todo $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a-1, a+1\}$ com a convenção $N+1 = 1$.

Construção gráfica

- Para simplificar a apresentação vamos nos limitar ao exemplo 1.
- No exemplo 1, $\mathcal{A} = \{1, ..., N\}$ e para todo $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a - 1, a + 1\}$ com a convenção $N + 1 = 1$.
- Vamos indicar graficamente de quais influenciadores cada um dos atores adota sucessivamente as opiniões ao longo do tempo.

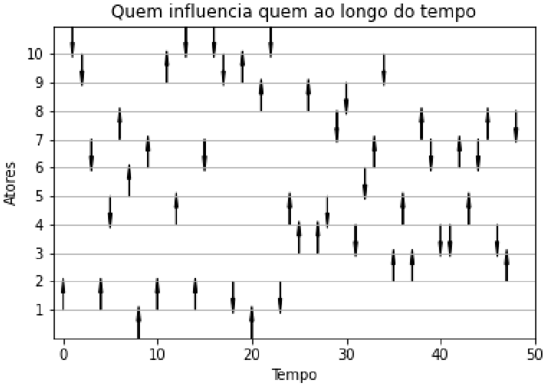
Construção gráfica

- Para simplificar a apresentação vamos nos limitar ao exemplo 1.
- No exemplo 1, $\mathcal{A} = \{1, ..., N\}$ e para todo $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a-1, a+1\}$ com a convenção $N + 1 = 1$.
- Vamos indicar graficamente de quais influenciadores cada um dos atores adota sucessivamente as opiniões ao longo do tempo.
- Para cada instante $n \geq 1$, escolhemos o ator A_n e, dado A_n, escolhemos I_n dentre seus influenciadores.

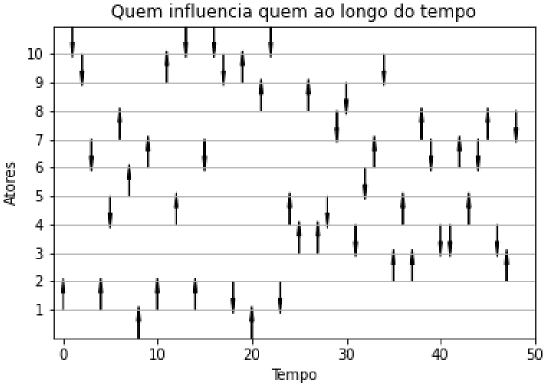
Construção gráfica

- Para simplificar a apresentação vamos nos limitar ao exemplo 1.
- No exemplo 1, $\mathcal{A} = \{1, ..., N\}$ e para todo $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a-1, a+1\}$ com a convenção $N+1 = 1$.
- Vamos indicar graficamente de quais influenciadores cada um dos atores adota sucessivamente as opiniões ao longo do tempo.
- Para cada instante $n \geq 1$, escolhemos o ator A_n e, dado A_n, escolhemos I_n dentre seus influenciadores.
- Representamos isso, colocando uma flecha de $(n, a-1)$ até (n, a) ou de $(n, a+1)$ até (n, a), sempre que $A_n = a$ e $I_n = a-1$ ou $I_n = a+1$, respectivamente.

Construção gráfica



Construção gráfica



Quiz: Qual a origem da opinião dos atores 4, 5 e 8 no instante 50?

Questões

Questões

1. Nos modelos dos exemplos 1 e 2, com $N = 10$, faça um programa que busque a origem das últimas opiniões de todos os atores emitidas até o instante $T = 100$.

Questões

1. Nos modelos dos exemplos 1 e 2, com $N = 10$, faça um programa que busque a origem das últimas opiniões de todos os atores emitidas até o instante $T = 100$.
2. No modelo do exemplo 1, com $N = 10$, escolha os valores de X_0 aleatóriamente, dando a cada ator a opinião inicial $+1$ ou -1, com probabilidades 0.3 e 0.7 respectivamente. Simule o sistema e anote o valor da última opinião emitida pelo ator 10 até o instante $T = 100$. Repita a simulação de forma independente 100 vezes e calcule a proporção de vezes em que a última opinião emitida pelo ator 10 até o instante 100 foi $+1$. Faça o mesmo em relação ao ator 5. Que conclusão os resultados obtidos lhe sugerem?

Questões - continuação

3. Uma questão da maior atualidade é entender a influência que pode ter um robô atuando em uma rede social. No modelo que estamos considerando, um robô é representado por um ator que não se deixa influenciar pelos demais atores e mantem fixada a sua opinião. No modelo do exemplo 1, vamos supor que o ator 5 seja um robô que mantenha uma opinião fixa em -1. Simule esse modelo e veja como ele afeta o comportamento sugerido pelos exercícios 1 e 2 desta aula.

Referência

O modelo que estamos considerando é baseado no Modelo do Votante introduzido em 1975 por Dick Holley e Tom Liggett.

Holley, Richard A.; Liggett, Thomas M. (1975). "Ergodic Theorems for Weakly Interacting Infinite Systems and the Voter Model". The Annals of Probability. 3 (4): 643–663.
doi:10.1214/aop/1176996306