

太 原 理 工 大 学

Taiyuan University of Technology

离散数学

$$(1) (p \rightarrow q) \leftrightarrow r$$

主析取范式:

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (\neg p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (r \vee (\neg p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee r) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee \neg p)) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_{100} \vee m_{001} \vee m_{011} \vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1,3,4,7}$$

$$\text{CNF: } (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{111} \Leftrightarrow \sum_{0,7}$$

$$(2) p \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge (q \vee \neg q) \vee q \wedge (p \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge p)$$

$$\Leftrightarrow m_{10} \vee m_{00} \vee m_{11}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0,1,3}$$

$$(3) (\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \leftrightarrow \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)]$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_{11} \vee m_{10} \vee m_{01}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1,2,3}$$

$$(4) p \vee (\neg p \rightarrow (q \vee (\neg q \rightarrow r)))$$

$$\Leftrightarrow p \vee (\neg p \vee (q \vee (\neg q \rightarrow r)))$$

$$\Leftrightarrow p \vee (\neg p \vee (q \vee (\neg q \vee r)))$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (r \vee \neg r) \vee (\neg p \vee (q \vee (q \vee r)))$$

$$\Leftrightarrow m_{001} \vee m_{010} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1,2,3,4,5,6,7}$$

$$(5) (p \rightarrow q \wedge r) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$$

$$\Leftrightarrow [\neg p \vee (q \wedge r)] \wedge [p \vee (\neg q \wedge \neg r)]$$

$$\Leftrightarrow [\neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg p \wedge (r \vee \neg r))] \vee [p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (p \wedge (\neg r \vee r))]$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow m_{000} \vee m_{111} \Leftrightarrow \sum_{0,7}$$

$$(6) p \wedge \neg q \wedge s \vee \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee r) \wedge (s \vee \neg s) \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee p) \wedge (\neg r \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s)$$

$$\Leftrightarrow m_9 \vee m_7 \vee m_6 \vee m_{11}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{6,7,9,11}$$

太 原 理 工 大 学

Taiyuan University of Technology

100. 作业.

$$\textcircled{1} (\neg p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow p)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge [q \rightarrow p] \wedge [p \rightarrow q]$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge [(\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)]$$

$$\Leftrightarrow [(p \vee r) \vee (q \wedge \neg q)] \wedge [(\neg q \vee p) \vee (r \wedge \neg r)] \vee [(p \vee r) \wedge (\neg q \vee p)] \vee [(p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)]$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \neg q)$$

$$\wedge (\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg q \vee p \vee \neg r)$$

$$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{010} \wedge M_{011}$$

$$\wedge M_{100} \wedge M_{101} \Leftrightarrow \text{CNF: } \prod_{0,2,3,4,5}$$

$$\text{则 DNF: } \sum_{4,6,7}$$

$$\textcircled{2} \neg(p \rightarrow q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow M_{00} \wedge M_{01} \wedge M_{11}$$

$$\text{CNF: } \prod_{0,1,3} \quad \text{DNF: } \sum_2$$

$$\text{DNF 直接原式变为真(或真)的赋值} \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee [r \vee (\neg p \wedge \neg q)]$$

$$\text{CNF 使公式为假. (每个 max term)} \Leftrightarrow \sum_{0,1,3,5,6,7}$$

或假..

③求此公式的DNF与CNF(或)看看不一样.

$$\text{对 } (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee r)] \vee [(\neg p \wedge r) \wedge (q \vee \neg q)] \vee [(q \wedge r) \wedge (p \vee \neg p)]$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q)$$

$$\vee (q \wedge r \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge \neg p)$$

$$\Leftrightarrow m_{110} \vee m_{111} \vee m_{011} \vee m_{001} \vee m_{011}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7}$$

$$\text{对 } (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee r)] \vee [(\neg p \wedge r) \wedge (q \vee \neg q)]$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow m_{111} \vee m_{110} \vee m_{011} \vee m_{001}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7}$$

由于 DNF 相等, 那么两公式等价.

$$\textcircled{4} (1) (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow [\neg(p \wedge q \rightarrow r)] \rightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \neg[\neg(p \wedge q) \vee r] \vee (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge \neg r] \vee (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee [(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)]$$

故为可满足式

太 原 理 工 大 学

Taiyuan University of Technology

$$\begin{aligned}
 & 2) (p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q \\
 \Leftrightarrow & \neg [(p \vee q) \wedge \neg p] \vee q \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \wedge \neg q) \vee p] \vee q \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \wedge \neg q) \vee p] \vee q \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \vee q \\
 \Leftrightarrow & (\neg q \vee p) \Leftrightarrow 1
 \end{aligned}$$

\therefore 原式为永真式

⑤ 设 S: 天晴 R: 下雨 M: 电影
B: 看书

例 $S \vee R, S \rightarrow M, M \rightarrow \neg B; B \rightarrow R$

证: ① $S \rightarrow M$ (P)

② $M \rightarrow \neg B$ (P)

③ $S \rightarrow \neg B$ (假言三段论, ①②)

④ $B \rightarrow \neg S$

⑤ B 为真

⑥ 由④, 得 $\neg S$

⑦ $S \vee R, \neg S, R$ 析取三段论

⑧ $B \rightarrow R$

例为有效结论