第三章 偏微分方程

3.5 二阶线性方程的分类

常系数与变系数

常系数：每个偏微分的系数都是常数

变系数：某个偏微分的系数是可变的

齐次与非齐次

当除了代求函数项，即自由项为0，则为齐次。

二阶偏微分方程

n个自变量的二阶偏微分方程为例：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\dots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \tag{1}$$

当 $a_{i,j}, b_i$为常数，则是常系数；否则为变系数。

当 $f == 0$ 时候为齐次，否则为非齐次。

二阶常系数齐次方程的

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \tag{2}$$

二次型判别式为：

$$\triangle = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \tag{3}$$

当 $\triangle > 0$ ，为双曲方程

当 $\triangle = 0$ ，为抛物方程

当 $\triangle < 0$ ，为椭圆方程

第四章 抛物方程

4.1 预备知识

内点：定解区域内部的节点

边界点：边界 Γ 与网格线的交点

正则内点：一个内点的四个相邻系节点均属于 定解区域与边界的并集 $\Omega \cup \Gamma$

非正则内点：一个内点的相邻节点至少有一个不属于 $\Omega \cup \Gamma$

4.2 三种古典差分格式

考虑一维非齐次热传导的定解问题

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad 0 < x < 1, \quad T \ge t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0,t) = \varphi_1(t), \quad u(1,t) = \varphi_2(t) \end{gathered} \tag{4}$$

4.2.1 最简显式格式

在t方向用一阶向前差商代替一阶偏导数

在x方向用中心差商代替二阶偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\tau}(u_j^{k+1} - u_j^k) - \frac{\tau}{2}u_{tt}(x_j, t_k) \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) - \frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{6}$$

网格比：

$$r = \frac{\tau}{h^2} \tag{7}$$

局部截断误差：

$$R_j^k = \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_j, t_k) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{8}$$

格式：

$$u_j^{k+1} = aru_{j+1}^k + (1-2ar)u_j^k + aru_{j-1}^k + \tau f_j^k \tag{9}$$

4.2.2 最简隐式格式

在t方向用一阶向后差商代替一阶偏导数

在x方向用中心差商代替二阶偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\tau}(u_j^k - u_j^{k-1}) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_j, t_k) \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{11}$$

网格比：

$$r = \frac{\tau}{h^2} \tag{12}$$

局部截断误差：

$$R_j^k = -\frac{\tau}{2} u_{tt}(x_j, t_k) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{13}$$

格式：

$$-aru_{j+1}^k + (1+2ar)u_j^k - aru_{j-1}^k = u_j^{k-1} + \tau f_j^k \tag{14}$$

4.2.3 Richardson格式

空间方向使用中心差商

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\tau}(u_j^{k+1} - u_j^{k-1}) - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \tag{15}$$

局部截断误差

$$R_j^k = \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{16}$$

格式：

$$u_j^{k+1} = 2ar(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k \tag{17}$$

4.3 稳定性、相容性、收敛性

适定性问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad a > 0, t > 0, x \in R \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in R \end{cases} \tag{18}$$

还有其他边界条件

满足：

(1)$\forall \varphi(x)$，以$\varphi(x)$为初值的方程存在唯一解

(2)存在常数c，使得$\forall t \in R$，成立

$$||u(x,t)|| \le c||u(x,0)|| = c||\varphi(x)|| \tag{19}$$

则称该定解问题是适定的

> 笔者理解：主要是要满足一些极限条件

相容性:

如果当$\tau \rightarrow 0$，$h \rightarrow 0$,$k\tau \rightarrow t$时，解u充分光滑，差分格式的截断误差$R_j^k \rightarrow 0$，即有

$$||R_j^k|| = ||L_h[u]_j^k - [Lu]_j^k|| \rightarrow 0 \tag{20}$$

其中$L_h[u]_j^k, [Lu]_j^k$分别表示差分方程和微分方程在节点处的取值

> 相容性表示的是，差分格式是否在局部是微分格式很好的近似。

收敛性:

设$u(x,t)$是微分方程的解，u_j^k是相应的差分格式的"精确解"。如果当$\tau \rightarrow 0$，$h \rightarrow 0$时，

$$e_j^k = u(x_j, t_k) - u_j^k \rightarrow 0 \tag{21}$$

则称差分格式是收敛的。

其中$u(x_j, t_k), u_j^k$是微分方程和差分方程的真解。

> 离散尺度无穷小时，数值解是否会趋向真实解

稳定性

一般的先行双层格式可写为:

$$\sum_l a_l u_{j+l}^{k+1} = \sum_p b_p u_{j+p}^k + \tau f_j^k \tag{22}$$

定义：称差分格式是初值稳定的，如果存在常数$M > 0$，使得与之相应的齐次方程的解满足不等式

$$||U^k|| \leq M||U^0||, \quad \forall 0 < k < T/\tau \tag{23}$$

几种常用的离散范数:

$$||u^k|| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_j^k)^2 h^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

$$||u^k|| = \max_{-\infty<j<+\infty} |u_j^k| \tag{25}$$

$$||u^k|| = \sum_{-\infty<k<+\infty} |u_j^k| \tag{26}$$

定义：称差分格式是右端稳定的，如果存在$M > 0$，使得与$U^0 = 0$初值条件的解满足不等式

$$||U^k|| \leq M\tau \sum_{l=0}^{k-1} ||F^l|| \quad 0 < \forall k < T/\tau \tag{27}$$

定理：如果差分方程关于初值稳定，则其也是右端稳定的。

差分方程的稳定性讨论，可以归结为初值稳定。

Lax等价定理

定理：给定一个适定的线性初值问题，如果逼近它的差分格式是和他相容的，那么差分格式的收敛性是差分格式稳定性的充分必要条件。

> (i) 问题是初值问题，并包括周期性边界条件的初编制问题
>
> (ii)初值问题必须是时定的
>
> (iii)初值问题必须是先行的。

定理指明了一种用稳定性判断收敛性的方法（一般收敛性很难证明）

4.4 判别稳定的Fourier方法

传播因子

首先将网格点的函数，在h方向上扩展，变成连续有定义的函数

$$U(x, t_k) = u_j^k \quad (j - \frac{1}{2})h \leq x < (j + \frac{1}{2})h \tag{28}$$

$$F(x) = f_j \quad (j - \frac{1}{2}h) \leq x < (j + \frac{1}{2}h) \tag{29}$$

之后通过傅里叶变换，将在x轴上的平移，转变为乘项

例如:

$$U(x_i, t_{k+1}) = U(x, t_k) - ar[U(x_i, t_k) - U(x_{i-1}, t_k)] \tag{30}$$

转变为：

$$\hat{U}(w,t_k+1)=\hat{U}(w,t_k)(1-ar(1-e^{-iwh})) \tag{31}$$

其中，记

$$G(r)=1-ar(1-e^{-iwh}) \tag{32}$$

为传播因子，或增长因子。

定理：Von Neumann条件，差分格式稳定的一个必要条件是：当$\tau\leq\tau_0,k\tau\leq T$，有

$$||G(r)||<1+M\tau \tag{33}$$

> 实际上也是充要条件

实际计算中：

令：

$$u_j^k=v^ke^{iwjh} \tag{34}$$

传播矩阵

对于抛物型微分方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=\boldsymbol{A}\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial x^2} \tag{35}$$

两层格式的一般形式类似于方程，可以写成

$$\sum_l\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{U}_{j+l}^{k+1}=\sum_p\boldsymbol{B}_p\boldsymbol{U}_{j+p}^k \tag{36}$$

分析可得到：

$$\boldsymbol{V}^{k+1}=\boldsymbol{G}(r)\boldsymbol{V}^k \tag{37}$$

$\boldsymbol{G}(r)$ 称为传播矩阵。

若 $\boldsymbol{G}$ 为正规矩阵，则有 $||G||=\rho(G)$ ，从而有：

定理：如果差分格式的过度矩阵 $G(r)$ 是正规矩阵，那么Von Neumann条件是稳定性的充分必要条件。

定理：差分格式的过度矩阵 $G(r)$ 为一个元素时，Von Neumann条件是稳定性的充要条件。

定理：如果存在相似S，有

$$SGS^{-1}=D\quad ||S||\leq c_1\quad ||S^{-1}||\leq c_2 \tag{38}$$

其中D和G同阶的对角阵，则Von Neumann条件是差分格式的充要条件。

定理：设传播矩阵G，G是n阶方阵。

(1) 若G有n个不同的特征值，则VN条件是差分格式组稳定的充要条件

(2) 若G的特征值有重根，但它的谱半径小于1，则差分格式组稳定。

两层差分格式的稳定性总结

VN条件是两层差分格式稳定性的充要条件：

(1) $G(r)$是正规矩阵

(2) $G(r)$为一个元素

(3) $G(r)$可以相似对角化

(4) $G(r)$有n个不同的特征值

(5) $G(r)$的特征值有重根，但谱半径小于1（不对，不应放在这里）

4.4.1 最简显格式的稳定性分析

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}=0 \tag{39}$$

傅里叶：

$$\frac{v^{k+1}e^{iwjh}-v^ke^{iwjh}}{\tau}-a\frac{v^ke^{iw(j+1)h}-2v^ke^{iwjh}+v^ke^{iw(j-1)h}}{h^2}=0 \tag{40}$$

化简：

$$v^{k+1} = v^k(1+ar(e^{iwh}-2+e^{-iwh})) \tag{41}$$
$$= v^k(1+2ar(cos(wh)-1)) \tag{42}$$
$$= v^k(1-4ar\sin^2(\frac{wh}{2})) \tag{43}$$

稳定性要求：

$$|1-4ar\sin^2\frac{wh}{2}| \le 1 \tag{44}$$

可以推出：

$$ar \le \frac{2}{1} \tag{45}$$

4.4.2 最简隐格式的稳定性分析

$$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = 0 \tag{46}$$

化简：

$$v^k(1-ar(e^{iwh}-2+e^{-iwh})) = v^{k-1} \tag{47}$$

$$v^k(1+4ar\sin^2\frac{wh}{2}) = v^{k-1} \tag{48}$$

是恒稳定的

4.4.3 Richardson格式的稳定性分析

$$u_j^{k+1} = 2ar(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} \tag{49}$$

将三层转化为二层

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = 2ar(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} \\ u_j^k = u_j^k \end{cases} \tag{50}$$

定义

$$U_j^{k+1} = (u_j^{k+1}, u_j^k)^T \tag{51}$$

于是

$$U_j^{k+1} = \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{j+1}^k + \begin{bmatrix} -4ar & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} U_j^k + \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{j-1}^k \tag{52}$$

转换：

$$U_j^k = V^k e^{iwjh} \tag{53}$$

于是

$$V^{k+1}e^{iwjh} = \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^k e^{iw(j+1)h} + \begin{bmatrix} -4ar & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} V^k e^{iwjh} + \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^k e^{iw(j-1)h} \tag{54}$$

进一步

$$V^{k+1} = \begin{bmatrix} 2are^{iwh} - 4ar + 2are^{-iwh} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} V^k \tag{55}$$

$$G(r) = \begin{bmatrix} -8ar\sin^2\frac{wh}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{56}$$

特征值方程：

$$\lambda^2 + 8\lambda ar\sin^2\frac{wh}{2} - 1 = 0 \tag{57}$$

求出特征值谱半径大于1，因此绝对不稳定。

4.5 常系数方程的其他差分格式

4.5.1 Crank-Nicolson差分格式

主要思路是：考虑在t方向节点中间$t^{k+\frac{1}{2}}$的值。对t的偏导由中心差商代替。对x的偏导由t^k和t^{k+1}点加权平均实现。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_{k+\frac{1}{2}})-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{k+\frac{1}{2}})=0 \tag{58}$$

差商代替偏分

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_{k+\frac{1}{2}})=\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} \tag{59}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{k+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(u_{xx}(t_k)+u_{xx}(t_{k+1})) \tag{60}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2} \tag{61}$$

于是：

$$u_j^{k+1}-u_j^k=\frac{ar}{2}(u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}+u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k) \tag{62}$$

第一部分截断误差计算方法：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_{k+\frac{1}{2}})=\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} \tag{63}$$

第二部分截断误差计算方法：

> 思路为：首先将$u_{xx}(t_{k+1})$在$(j,k+1)$点展开表示。之后将该表示作为一个整体，在$(j,k+/frac12)$点再次展开，得到误差。

加权平均第一项

$$u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}=[h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(h^6)]_{x_j,t_{k+1}} \tag{64}$$

$$=[1+\frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}][h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(h^6)]_{x_j,t_{k+\frac{1}{2}}} \tag{65}$$

$$=[h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2\tau}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial u}+\frac{\tau^2h^2}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}]_{x_j,t_{k+\frac{1}{2}}}+O(\tau h^4,\tau^2h^4,h^6) \tag{66}$$

同理第二项

$$u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k=[h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{h^2\tau}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial u}+\frac{\tau^2h^2}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}]_{x_j,t_{k+\frac{1}{2}}}+O(\tau h^4,\tau^2h^4,h^6) \tag{67}$$

相加有

$$\frac{a}{2h^2}(u_{xx}(t_k)+u_{xx}(t_{k+1}))=\frac{a}{2h^2}\{[2h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\tau^2h^2}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{2h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}]_{x_j,t_{k+\frac{1}{2}}}+O(\tau h^4,\tau^2h^4,h^6)\} \tag{68}$$

$$=u_{xx}+\frac{\tau^2}{8}u_{xxtt}+\frac{h^2}{12}u_{xxxx}+O(\tau h^2,h^4) \tag{69}$$

于是这一部分的截断误差（减去u_{xx}）：

$$\frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{70}$$

稳定性分析：

$$v^{k+1}-v^k=-2ar\sin^2\frac{wh}{2}(v^{k+1}+v^k) \tag{71}$$

进一步：

$$v^{k+1}=\frac{1-2ar\sin^2\frac{wh}{2}}{1+2ar\sin^2\frac{wh}{2}}v^k \tag{72}$$

稳定条件：

$$-1\le\frac{1-2ar\sin^2\frac{wh}{2}}{1+2ar\sin^2\frac{wh}{2}}\le 1 \tag{73}$$

恒成立，因此CN格式无条件稳定

4.5.2 加权隐格式

对显示格式和隐式子格式加权去平均

显：

$$u_j^k - u_j^{k-1} = ar(u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1}) + f_j^{k-1} \tag{74}$$

隐

$$u_j^k - u_j^{k-1} = ar(u_{j+1}^{k} - 2u_j^{k} + u_{j-1}^{k}) + f_j^{k} \tag{75}$$

加权后：

$$u_j^k - u_j^{k-1} = ar[(1-\theta)(u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1}) + \theta(u_{j+1}^{k} - 2u_j^{k} + u_{j-1}^{k})] + (1-\theta)f_j^{k-1} + \theta f_j^k \tag{76}$$

如何判断局部极端误差的微分方程的取值点?

基于事实：对空间求偏导数时，时间不变；对时间求偏导数时候，空间不变。

以加权隐格式为例子：

（1）定位空间：查看时间偏导项目$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau}$，于是可知道空间是在$j$点

（2）定位时间：查看空间偏导项目，有两项：分别对应$k-1$和k时间，查看具有同一空间下标的项目，当其权重相等时候，认为在对称中心处（CN格式）取，否则在哪一点展开都可以

截断误差的计算

(1)空间点在j，时间点在k-1

$$\frac{\partial u}{\partial t}_{j,k-1} = \frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\tau} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{77}$$

$$\delta_x^2 u(x_j, t_{k-1}) = u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1} \tag{78}$$

$$= [h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^6)]_{j,k-1} \tag{79}$$

$$\delta_x^2 u(x_j, t_k) = u_{j+1}^{k} - 2u_j^{k} + u_{j-1}^{k} \tag{80}$$

$$= [h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^6)]_{j,k} \tag{81}$$

$$= [1 + \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}][h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^6)]_{j,k-1} \tag{82}$$

$$= [h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial u} + \frac{\tau^2 h^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial u^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}]_{j,k-1} + O(\tau h^4, h^6) \tag{83}$$

于是

$$\begin{gathered}\frac{a}{h^2}[(1-\theta)\delta_x^2 u(x_j, t_{k-1}) + \theta\delta_x^2 u(x_j, t_k)] = \\ a[(1-\theta)(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4)) + \theta(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\tau h^2, h^4))]\end{gathered} \tag{84}$$

进而，这一项的截断误差为（可能要取负号）：

$$a(\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \theta\tau\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}) \tag{85}$$

总截断误差：

$$LTE = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \theta\tau\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}) \tag{86}$$

如果方程是齐次的，那么有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{87}$$

截断误差进一步可写为：

$$a(a\tau(\frac{1}{2} - \theta) - \frac{h^2}{12}))u_{xxxx} \tag{88}$$

稳定性分析：

$$v^k - v^{k-1} = ar[4(1-\theta)(v^{k-1})(-\sin^2\frac{wh}{2}) + 4\theta(v^k)(-\sin^2)\frac{wh}{2}] \tag{89}$$

于是

$$v^k = \frac{1-4ar(1-\theta)sin^2}{1+4ar\theta\sin^2} \tag{90}$$

稳定条件：

$$2ar(1-2\theta) \leq 1 \tag{91}$$

当

$$\theta \geq \frac{1}{2} \tag{92}$$

时，恒成立

当

$$\theta < \frac{1}{2} \tag{93}$$

时，需满足

$$ar \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \tag{94}$$

4.5.3 三层显示格式（Du Fort-Frankel格式）

对Richardson格式的改进，回顾Richardson格式

$$u_j^{k+1} = 2ar(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} + 2\tau f_j^k \tag{95}$$

Du Fort-Frankel格式改进，把$2u_j^k$用$u_j^{j+1} + u_j^{k-1}$代替：

$$\frac{u_j^{j+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = \frac{a}{h^2}(u_{j+1}^k - (u_j^{k+1} + u_j^{k-1}) + u_{j-1}^k) \tag{96}$$

截断误差：

在(x_j, t_k)点

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\tau} = u_t + \frac{\tau^2}{3}u_{ttt} \tag{97}$$

第二项移项到左边(不带a和h)，于是

$$-(u_{j+1}^k - (u_j^{k+1} + u_j^{k-1}) + u_{j-1}^k) = \delta_x^2 u(x_j, t_k) + (2u_j^k - u_j^{k+1} - u_j^{k-1}) \tag{98}$$

$$= \delta_x^2 u(x_j, t_k) - \delta_t^2(x_j, t_k) \tag{99}$$

$$= [h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^6)]_{j,k} + [\tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + O(\tau^6)]_{j,k} \tag{100}$$

于是截断误差(乘上系数$\frac{a}{h^2}$)为：

$$a\frac{\tau^2}{h^2}u_{tt} + O(\tau^2, h^2) \tag{101}$$

只有当$\frac{\tau}{h} \to 0$时，才相容。

稳定性：

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = 2ar(u_{j+1}^k - (u_j^{k+1} + u_j^{k-1}) + u_{j-1}^k) + u_j^{k-1} \\ u_j^k = u_j^k \end{cases} \tag{102}$$

令$U_j^k = [u_j^{k+1}, u_j^k]^T$

方程组写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1+2ar & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U_j^k = \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{j+1}^{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 1-2ar \\ 1 & 0 \end{bmatrix} U_j^{k-1} + \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_{j-1}^{k-1} \tag{103}$$

傅里叶分析：

$$\begin{bmatrix} 1+2ar & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^k = \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{k-1}e^{iwh} + \begin{bmatrix} 0 & 1-2ar \\ 1 & 0 \end{bmatrix} V^{k-1} + \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{k-1}e^{-iwh} \tag{104}$$

进一步

$$\begin{bmatrix}1+2ar & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}V^k=\begin{bmatrix}4arcos(wh) & 1-2ar\\ 1 & 0\end{bmatrix}V^{k-1} \tag{105}$$

$$V^k=\begin{bmatrix}\frac{4ar}{1+2ar}cos(wh) & \frac{1-2ar}{1+2ar}\\ 1 & 0\end{bmatrix}V^{k-1} \tag{106}$$

传播矩阵：

$$G(r)=\begin{bmatrix}\frac{4ar}{1+2ar}cos(wh) & \frac{1-2ar}{1+2ar}\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{107}$$

特征值方程：

$$(1+2ar)\lambda^2-4arcos(wh)\lambda-(1-2ar)=0 \tag{108}$$

特征值：

$$\lambda_{1,2}=\frac{2ar\cos(wh)\pm\sqrt{1-4a^2r^2sin^2(wh)}}{1+2ar} \tag{109}$$

当有重根时：

$$\lambda_{1,2}=\frac{2ar\cos(wh)}{1+2ar}\leq 1 \tag{110}$$

没有重根时的判断方法：

引理：实系数二次方程$\lambda^2-b\lambda-c=0$的根$|\lambda_{1,2}|\leq 1$的充要条件是$|b|\leq 1-c,|c|\leq 1$

对特征值方程进行判断：

$$c=\frac{1-2ar}{1+2ar}<1 \tag{111}$$

$$|b|=\frac{|4arcos(wh)|}{1+2ar}\leq 1-c=\frac{4ar}{1+2ar} \tag{112}$$

所以

$$\lambda_{1,2}\leq 1 \tag{113}$$

于是Du Fort-Frankel格式是无条件稳定的。

4.5.4 三层隐格式

原差分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \tag{114}$$

三层隐格式1

$$\frac{3}{2\tau}(u_j^{k+1}-u_j^k)-\frac{1}{2\tau}(u_j^k-u_j^{k-1})=\frac{a}{h^2}(u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1})+f_j^k \tag{115}$$

或者

$$(3+4ar)u_j^{k+1}-2ar(u_{j+1}^{k+1}+u_{j-1}^{k+1})=4u_j^k-u_j^{k-1} \tag{116}$$

截断误差（展开点 $j,k+1$）

$$\triangle_t^- u_j^{k+1}=\tau u_t-\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt} \tag{117}$$

$$\begin{aligned}\triangle_t^- u_j^k&=[\tau u_t-\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}]|_{j,k} &(118)\\ &=[1-\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}][\tau u_t-\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}]|_{j,k+1} &(119)\\ &=\tau u_t-\frac{\tau^2}{2}u_{tt}-\tau^2u_{tt}+\frac{\tau^3}{2}u_{ttt} &(120)\\ &=\tau u_t-\frac{3\tau^2}{2}u_{tt}+\frac{\tau^3}{2}u_{ttt} &(121)\end{aligned}$$

$$\delta_x^2u_j^{k+1}=h^2u_{xx}+\frac{h^4}{12}u_{xxxx} \tag{122}$$

求和（记得把）：

$$
\begin{aligned}
LTE &= \frac{3}{2\tau}\triangle_t^- u_j^{k+1} - \frac{1}{2\tau}\triangle_t^- u_j^{k+1} - \frac{a}{h^2}(\delta_x^2 u_j^{k+1}) - (\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) && (123)\\
&= \frac{3}{2\tau}(\tau u_t - \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}) - \frac{1}{2\tau}(\tau u_t - \frac{3\tau^2}{2}u_{tt} + \frac{\tau^3}{2}u_{ttt}) - \frac{a}{h^2}(h^2 u_{xx} + \frac{h^4}{12}u_{xxxx}) - (\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) && (124)\\
&= O(\tau^2, h^2) && (125)
\end{aligned}
$$

一个错误方法，截断误差(在j, k点展开):

> 因为对空间的偏导实在时间$k+1$点的，所以截断误差应该在$j, k+1$点展开

$$\triangle_t^+ u_j^k = \tau u_t + \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt} \tag{126}$$

$$\triangle_t^- u_j^k = \tau u_t - \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt} \tag{127}$$

$$
\delta_x^2 u_j^{k+1} = \begin{aligned}
\delta_x^2 u(x_j, t_{k+1}) &= u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1} && (128)\\
&= [h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^6)]_{j,k+1} && (129)\\
&= [1 + \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}][h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^6)]_{j,k} && (130)\\
&= [h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau h^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t} + \frac{\tau^2 h^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}]_{j,k} + O(\tau h^4, h^6) && (131)
\end{aligned}
$$

求LTE

$$
\begin{aligned}
LTE &= \frac{3}{2\tau}\triangle_t^+ u_j^k - \frac{1}{2\tau}\triangle_t^+ u_j^k - \frac{a}{h^2}(\delta_x^2 u_j^{k+1}) - (\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\\
&= \frac{3}{2\tau}(\tau u_t + \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}) - \frac{1}{2\tau}(\tau u_t - \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt}) - \frac{a}{h^2}(h^2 u_{xx} + \tau h^2 u_{xxt} + \frac{\tau^2 h^2}{2}u_{xxtt} + \frac{h^4}{12}u_{xxxx}) - (\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
&= O(\tau^2, h^2)???
\end{aligned}
$$

> 此处不知道哪里有问题，计算不出$O(\tau^2, h^2)$

稳定性：省略

三层隐格式2

把Richardson格式推广，用三层的二阶中心差商的平均值代替原有的二阶差商

$$\frac{\triangle_t u_j^k}{2\tau} - \frac{a}{3h^2}(\delta_x^2 u_j^{k+1} + \delta_x^2 u_j^k + \delta_x^2 u_j^{k-1}) = 0 \tag{135}$$

截断误差

$$\triangle_t u_j^k = 2\tau u_t + \frac{\tau^3}{3}u_{ttt} \tag{136}$$

$$\delta_x^2 u_j^{k+1} + \delta_x^2 u_j^k + \delta_x^2 u_j^{k-1} \tag{137}$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_x^2 u_j^{k+1} + \delta_x^2 u_j^k + \delta_x^2 u_j^{k-1} = && (138)\\
&[1 + (1 + \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) + (1 - \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})][[h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^6)]_{j,k}] && (139)
\end{aligned}
$$

最终截断误差为$O(\tau^2 + h^2)$

稳定性：

$$(1 - \frac{2}{3}ar\delta_x^2)u_j^{k+1} = \frac{2}{3}ar\delta_x^2 u_j^k + (1 + \frac{2}{3}ar\delta_x^2)u_j^{k-1} \tag{140}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3}ar\delta_x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U_j^k = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}ar\delta_x^2 & 1 + \frac{2}{3}ar\delta_x^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} U_j^{k-1} \tag{141}$$

傅里叶变换

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{8}{3}ar\sin^2(\frac{wh}{2}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^k = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3}ar\sin^2(\frac{wh}{2}) & 1 - \frac{8}{3}ar\sin^2\frac{wh}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} U_j^{k-1} \tag{142}$$

令 $a = \frac{8}{3}arsin^2\frac{wh}{2}$

$$G(r) = \begin{bmatrix} \frac{-a}{1+a} & \frac{1-a}{1+a} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{143}$$

特征方程为：

$$\lambda^2+\frac{a}{1+a}\lambda-\frac{1-a}{1+a}=0 \tag{144}$$

绝对稳定

第五章 双曲方程的差分方程

二阶判别式：

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0 \tag{145}$$

5.1 一阶常系数双曲方程简介

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad a>0\\ u(x,0)=f(x)\end{cases} \tag{146}$$

特征线法：

考虑如下的特征方程

$$dx-adt=0 \tag{147}$$

解为：

$$x-at=\xi \tag{148}$$

是一组相互平行的直线，这组直线为对流方程的特征线。

因为沿特征线方向有：

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}a=0 \tag{149}$$

所以u在特征线上的取值不变。即方程的解为：

$$u(x,t)=f(x-at) \tag{150}$$

5.2 几种显式差分格式

5.2.1 迎风格式

时间采用一阶向前差商，空间分别采用一阶向前、向后、中心差商构成三种差分格式。

$$\frac{\triangle_t^+u}{\tau}+a\frac{\triangle_x^+u}{h}=0 \tag{151}$$

$$\frac{\triangle_t^+u}{\tau}+a\frac{\triangle_x^-u}{h}=0 \tag{152}$$

$$\frac{\triangle_t^+u}{\tau}+\frac{a\triangle_x^0u}{2h}=0 \tag{153}$$

截断误差显然为：$O(\tau+h)$,$O(\tau+h)$,$O(\tau+h^2)$

稳定性分析

$$v^{k+1}=v^k(1-ar(e^{iwh}-1))=v^k(1+ar-are^{iwh}) \tag{154}$$

$$v^{k+1}=v^k(1-ar+are^{iwh}) \tag{155}$$

$$v^{k+1}=v^k(1-ar(e^{iwh}-e^{-iwh}))=v^k(1-iar\sin(wh)) \tag{156}$$

其中

$$|G_3(r)|=|1-iarsin(wh)|=\sqrt{1+a^2r^2sin^2(wh)}>1 \tag{157}$$

绝对不稳定

$$\begin{aligned}
|G_1(r)| &= |1+ar(1-e^{iwh})| && (158)\\
&= |(1+ar-ar\cos(wh))-iar\sin(wh)| && (159)\\
&= (1+ar-ar\cos(wh))^2+(ar\sin(wh))^2 && (160)\\
&= (1+ar)^2+(ar\cos(wh))^2-2(1+ar)(ar\cos(wh))+(ar\sin(wh))^2 && (161)\\
&= 1+a^2r^2+2ar+a^2r^2-2ar(1+ar)\cos(wh) && (162)\\
&= 1+2ar(1+ar)-2ar(1+ar)\cos(wh) && (163)\\
&= 1+2ar(1+ar)(1-cos(wh)) && (164)\\
&= 1+4ar(1+ar)\sin^2\frac{wh}{2} && (165)
\end{aligned}$$

$$|G_1(r)| = |1 + ar(1 - e^{iwh})| = \sqrt{1 + 4ar(1 + ar)\sin^2\frac{wh}{2}} \tag{166}$$

$$|G_2(r)| = |1 - ar(1 - e^{iwh}) = \sqrt{1 + 4ar(-1 + ar)\sin^2\frac{wh}{2}} \tag{167}$$

第一种格式的稳定条件为:

$$a^2r^2 \leq -ar \tag{168}$$

于是

$$a < 0且ar \geq -1 \tag{169}$$

第二种格式的稳定条件为:

$$a > 0且ar \leq 1 \tag{170}$$

5.2.2 Lax-Friedrichs格式

在迎风格式的第三种不稳定的情况下，改进时间差分格式

$$\frac{u_j^{k+1} - \frac{1}{2}(u_j^{k-1} + u_j^{k+1})}{\tau} + \frac{a}{2h}\triangle_x^0 u_j^k = 0 \tag{171}$$

第一项截断误差:

$$\begin{aligned} LTE_1 &= 由时间向前引起的误差 + 平均引起的误差 \\ &= \frac{1}{2}\tau u_x - \frac{1}{2\tau}h^2 u_x x \end{aligned} \tag{172}$$

稳定性:

整理:

$$u_j^{k+1} = \frac{1}{2}(1 - ar)u_{j+1}^k + \frac{1}{2}(1 + ar)u_{j-1}^k \tag{173}$$

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= [\frac{1}{2}(e^{iwh} + e^{-iwh}) - \frac{1}{2}ar(e^{iwh} - e^{-iwh})]v^k \\ &= [cos(wh) - iarsin(wh)]v^k \end{aligned} \tag{174}$$

增长因子:

$$\begin{aligned} |G(r)| &= |cos(wh) - iarsin(wh)| \\ &= \sqrt{cosn^2(wh) + a^2r^2sin^2(wh)} \end{aligned} \tag{175}$$

要求:

$$|ar| \leq 1 \tag{176}$$

5.2.3 Lax-Wendroff格式

推导:

泰勒展开

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \tau u_t|_j^k + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}|_j^k \tag{177}$$

利用微分方程有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x} \tag{178}$$

进一步:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}^2 \tag{179}$$

带入有:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - a\tau u_x|_j^k + \frac{\tau^2 a^2}{2}u_{xx}|_j^k + O(\tau^3) \tag{180}$$

利用中心差商近似两个对x的偏导:

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \frac{a\tau}{2h}\triangle_x^0 u_j^k + \frac{\tau^2 a^2}{2h^2}\delta_x u_j^k + O(\tau^3 + \tau h^2) \tag{181}$$

把τ除过来之后，截断误差为:

$$O(\tau^2+h^2) \tag{182}$$

上式即为Lax-Wendroff格式，重写为：

$$u_j^{k+1}-u_j^k=-\frac{1}{2}ar\triangle_x^0u_j^k+\frac{1}{2}a^2r^2\delta_xu_j^k \tag{183}$$

稳定性：

$$v^{k+1}=(1-iarsin(wh)-2a^2r^2sin^2\frac{wh}{2})v^k \tag{184}$$

传播因子：

$$\begin{aligned}|G(r)|&=|(1-2a^2r^2sin^2\frac{wh}{2})^2+(arsin(wh))^2|\\&=|1+4a^4r^4sin^4\frac{wh}{2}-4a^2r^2sin^4\frac{wh}{2}|\end{aligned} \tag{185}$$

稳定条件：

$$|ar|\leq 1 \tag{186}$$

5.2.4 蛙跳格式

空间及时间都采用中心差商

$$\frac{1}{2\tau}\triangle_t^0u_j^k+a\frac{1}{2h}\triangle_x^0u_j^k=0 \tag{187}$$

截断误差：显然为

$$\frac{\tau^2}{6}u_{ttt}+\frac{ah^2}{6}u_{xxx} \tag{188}$$

三层格式，写出傅里叶分析：

$$U_j^{k+1}=\begin{bmatrix}-ar&0\\0&0\end{bmatrix}U_{j+1}^k+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}U_j^k+\begin{bmatrix}ar&0\\0&0\end{bmatrix}U_{j-1}^k \tag{189}$$

传播矩阵：

$$G(r)=\begin{bmatrix}-2arisin(wh)&1\\1&0\end{bmatrix} \tag{190}$$

特征值

$$\lambda_{1,2}=-arisinwh\pm\sqrt{1-a^2r^2sin^2wh} \tag{191}$$

分情况：

当$|ar|<1$时候，有两个根，并且其范数都等于1

$$|\lambda_{1,2}|^2=1-a^2r^2sin^2wh+a^2r^2sin^2wh=1 \tag{192}$$

是临界稳定的。

当$|ar|=1$时候，且把$sin(wh)=1$

考虑传播矩阵

$$G(r)=\begin{bmatrix}-2i&1\\1&0\end{bmatrix} \tag{193}$$

教材上通过无穷的自身相乘得到了他的不稳定。

第七章 椭圆方程的差分格式

典型方程：

二维Poisson方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y) \tag{194}$$

二维Laplace方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0 \tag{195}$$

7.1 几种差分格式

7.1.1五点差分格式

内部节点(x_i,y_j)的取值，用中心差商代替二级导数

$$\frac{1}{h_1^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})+\frac{1}{h_2^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})=f(x_i,y_j) \tag{196}$$

例题：

五点差分格式求解Laplace方程。

区域

$$\Omega=\{(x,y)|0\le x\le 4,0\le y\le 4\} \tag{197}$$

边界：

$$u(x,0)=20,u(x,4)=180,u(0,y)=80,u(4,y)=0 \tag{198}$$

取

$$h=\triangle x=\triangle y=1 \tag{199}$$

隔点从左下到右上定义为$U_1\to U_9$，分别对应$U(1,1),U(2,1)\to U(3,3)$

最终列出9个方程，方程的右侧值由边界值给出。

于是有：

$$AU=F \tag{200}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} B & -I & 0\\ -I & B & -I\\ 0 & -I & B\end{bmatrix} \tag{201}$$

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix} \tag{202}$$

7.2 椭圆方程的边界离散处理

7.2.1 矩形区域

第一类边界条件

$$u(x,y)=\alpha(x,y) \tag{203}$$

如何离散：

$$u_{ij}=u(x_i,y_j) \tag{204}$$

第二类和第三类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda u=\beta(x,y) \tag{205}$$

$\lambda=0$的时候就是第二类

如何离散，增加虚拟网格：

例如在x=0点处，方向导数是像曲线外边为正

$$\frac{u_{1,j}-u_{-1,j}}{2h}+\lambda u_{0,j}=\beta_{0,j} \tag{206}$$

7.2.2 一般区域

第一类边界条件

方法一：直接转移法

直接转移，找最近的节点代替边界节点

方法二：线性插值法

离散边界的点用边界和一个内部节点的差值得到

方法三：Talyor公式法

点P的上下左右分别为 BD, QT

通过在上下方向的Talyor展开，可以得到y方向的二阶导数

$$u(B) = u(P+\delta) = u(P) + \delta h u_y(P) + \frac{\delta^2 h^2}{2} u_{yy}(P) \tag{207}$$

$$u(D) = u(P-h) = u(P) - h u_y(P) + \frac{h^2}{2} u_{yy}(P) \tag{208}$$

于是

$$u_{yy}(P) = \frac{u(B) + \delta u(D) - (1+\delta) u(P)}{\frac{\delta(\delta+1)h^2}{2}} \tag{209}$$

同理可以求得 $u_{xx}(P)$

最后带入方程中可得到一个：

$$u_{xx}(P) + u_{yy}(P) = f(P) \tag{210}$$

这个方程是P和BDQT点联合的方程。

第三类边界条件

情况一：离散边界点在微分方程边界上

方法一：导数逼近法

如果外法线与坐标轴平行，即

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \pm \frac{\partial u}{\partial x} \tag{211}$$

当外法线方向与坐标轴方向一致时，取正号；否则取负号。之后用一节差商代替导数。节点为P， 右侧节点为Q，下侧节点为R，外法线向x轴负方向

$$+\frac{u(P) - u(Q)}{h_x} + \lambda u(P) = \beta(P) \tag{212}$$

如果外法向与坐标轴不平行，则

$$\frac{\partial u}{\partial n}(P) = \frac{\partial u}{\partial x} cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n,y) \tag{213}$$

同样用差分代替得到

$$\frac{u(Q) - u(p)}{h_x} \cos(n,x) + \frac{u(P) - u(R)}{h_y} \cos(n,y) + \lambda u(P) = \beta(P) \tag{214}$$

方法二：积分插值法

构建一个三角形，并沿着三角形的对 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 进行积分

$$\int_{\partial \triangle ABC} \frac{\partial u}{\partial n} ds = (\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}) \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int \frac{\partial u}{\partial x} cos(n,x) dx + \frac{\partial u}{\partial y} cos(n,y) dy \\ = \tag{215}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \tag{216}$$

不会了,反正最后等于

$$\int_{\partial \triangle ABC} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\triangle ABC} f^2 dxddy \tag{217}$$

在三角形三面的积分分别由，x平行的线，y平行的线和一条曲线组成。

曲线的积分则由构成

$$（\beta_{i,j} - \lambda_{i,j} u_{i,h}) * |BC| \tag{218}$$

最后可以得到一个方程

第八章 变分问题的近似计算方法

8.0 符号定义

连续函数空间

$$C[a,b]=\{f(x)|f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}\} \tag{219}$$

一阶连续函数空间

$$C^1[a,b]=\{f(x)|f'(x)\text{在}[a,b]\text{连续}\} \tag{220}$$

齐次（自己命名）空间

$$C_0^1[a,b]=\{f(x)|f\in C^1[a,b],f(a)=0,f(b)=0\} \tag{221}$$

平方可积函数空间

$$L^2[a,b]=\{f(x)|\int_a^b f^2(x)dx<\infty\} \tag{222}$$

8.2 变分问题的等价问题

8.2.1二次函数的极值问题

传统思路

n纬度欧式空间的二次函数

$$J(x)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) \tag{223}$$

那么二次函数在点$\boldsymbol{x_0}$处取得极值的必要条件是

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=0 \tag{224}$$

即

$$\boldsymbol{Ax_0}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \tag{225}$$

泛函思路

设泛函$J(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x_0}$处达到绩效，则对于一切

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R^n},\boldsymbol{x}\neq 0,\alpha\in\boldsymbol{R}\\ \text{令}\varphi(\alpha)=J(\boldsymbol{x_0}+\alpha\boldsymbol{x})\end{gathered} \tag{226}$$

都有

$$\varphi(\alpha)>\varphi(0) \tag{227}$$

于是把多元变量的函数机制的问题，转化为单变量函数机制问题。

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha)&=J(\boldsymbol{x_0}+\alpha\boldsymbol{x}) && (228)\\ &=\frac{1}{2}(Ax_0+\alpha Ax,x_0+\alpha x)-(b,x_0+\alpha x) && (229)\\ &=\frac{1}{2}((Ax_0,x_0)+\alpha(Ax_0,x)+\alpha(Ax,x_0)+\alpha^2(Ax,x))-(b,x_0)-\alpha(b,x) && (230)\\ &=J(x_0)+\alpha(Ax_0-b,x)+\frac{\alpha^2}{2}(Ax,x) && (231)\end{aligned}$$

> 这里A是正定矩阵：于是有
>
> $$(Ax_0,x)==(Ax,x_0) \tag{232}$$

由最小值可以得到一阶导为0，二阶导数大于0

$$(Ax_0-b,x)=0 \tag{233}$$

注意到对任意的x都有此式子，于是

$$Ax_0-b=0 \tag{234}$$

于是可以得到如下定理：

定理1 若矩阵A是对称正定矩阵，则下面三个命题等价：

1 x_0是$Ax-b=0$的解

2 $(Ax_0,x)-(b,x)=0$对一切$x\in R^n$成立

3 $x_0\in R^n$是二次函数$J(x)$的极小值点，即$J(x_0)=\min_{x\in R^n}J(x)$

8.2.2 泛函极值问题中的基本概念和Euler方程

变分基本引理:

设$f(x) \in C[a,b]$，且对一切$g(x) \in C[a,b]$，如果

$$\int_a^b f(x)g(x) = 0 \tag{235}$$

则

$$f(x) == 0, \forall x \in [a,b] \tag{236}$$

> 类似对a,b上的线性不相关的基，任意g(x)求和都等于0，于是f(x)(前边所说的基)在a,b上只能恒等于0

一些基本概念:

函数 $f(x)$ 的邻域: $\delta(f)$:

$$\delta(f) = \{g| \quad |f(x) - g(x)| < \epsilon, \forall x \in [a,b]\} \tag{237}$$

如果函数 $f \in K$,且对任何 $g(x) \in \delta(f)$ 都有 $J(f(x)) \le J(g(x))$ ，则称函数 $f(x)$ 是泛函$J(\cdot)$的局部极小值。

真正的考虑泛函:

$$J(f) = \int_a^b F(x, f, f')dx \tag{238}$$

设函数$f(x)$是该泛函的极值，则有

$$\tilde{J}(\alpha) = \int_a^b F(\tilde{f}, \tilde{f}'; x)dx = \int_a^b F(f + \alpha\eta, f' + \alpha\eta'; x)dx \tag{239}$$

在$x = 0$处展开有:

$$\tilde{J}(\alpha) = \tilde{J}|_{\alpha=0} + \frac{d\tilde{J}}{d\alpha}|_{\alpha=0}\alpha + \frac{d^2\tilde{J}}{d\alpha^2}|_{\alpha=0}\frac{1}{2}\alpha^2 + \dots \tag{240}$$

又有:

$$\tilde{J}|_{\alpha=0} = J \tag{241}$$

于是

$$\tilde{J} - J = \tilde{J}_1\alpha + \tilde{J}_2\frac{1}{2}\alpha^2 \tag{242}$$

> 不知道这里有没有 $\frac{1}{2}$

则记:

一阶变分:

$$\delta J = \tilde{J}_1\alpha \tag{243}$$

二阶变分:

$$\delta J^2 = \frac{1}{2}\tilde{J}_2\alpha^2 \tag{244}$$

计算一下一阶变分:

$$\begin{aligned}
\delta J = \tilde{J}_1\alpha = \frac{d\tilde{J}}{d\alpha}|_{\alpha=0}\alpha = & \qquad (245)\\
= \int_a^b [\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\tilde{f}}\frac{d\tilde{f}}{d\alpha} + \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\tilde{f}'}\frac{d\tilde{f}'}{d\alpha}]|_{\alpha=0}dx\alpha & \qquad (246)\\
= \int_a^b [\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\tilde{f}}\eta + \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\tilde{f}'}\eta']|_{\alpha=0}dx\alpha & \qquad (247)\\
= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f}\delta y + \frac{\partial F}{\partial f'}\delta y' dx & \qquad (248)
\end{aligned}$$

其中

$$\delta y = \alpha\eta, \quad \delta y' = \alpha\eta' \tag{249}$$

进一步把一阶变分化简

$$\delta J = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f}\delta y + \frac{\partial F}{\partial f'}\delta y' dx \tag{250}$$
$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f}\delta y - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial f'})\delta y dx + \frac{\partial F}{\partial f'}\delta y|_a^b \tag{251}$$
$$= \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial f'}))\delta y dx \tag{252}$$

根据引理则得到著名的Euler方程：

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0 \tag{253}$$

这表示：

泛函问题的极值点是Euler方程的解

8.3 变分问题的数值计算方法

设二次泛函

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v,) - L(v) \tag{254}$$

其中

$$a(u, v) = \iint_\Omega T\nabla u \nabla v dx dy + \int_{\partial\Omega} \beta u v ds \tag{255}$$
$$L(v) = \iint_\Omega f v dx dy + \int_{\partial\Omega} \gamma v ds \tag{256}$$

$L(v)$ 是 $C^1(\bar{\Omega})$ 上有界的线性泛函，$a(u, v)$ 是 $C^1(\bar{\Omega})$ 上的双线性泛函，而且满足，对称性、有界的、正定性。

> 笔者：PDE的解是能将原泛函最小化的函数。
>
> 因此有两条路：
>
> 1.从泛函数出发，找出可以最小化它的函数
>
> 2.通过变分法转化为PDE，然后求解PDE
>
> Ritz方法对应的是第一条路，强弱形式的Galerkin方法对应第二条路
>
> 那么第一条路里边，我们也可以将泛函转化为PDE，这样最小化的函数就是PDE的解，所以Ritz方法也可被视为一种求解PDE的方法。
>
> 再注：这里从网上搜所得https://zhuanlan.zhihu.com/p/22457731，似乎与书上得Galerkin方法不一致

8.3.1Ritz方法

> 笔者注：Ritz方法是一种直接求解泛函，而不通过变分法转为PDE的方法。
>
> 同时对于一个PDE，如果能写出它对应的泛函，可以用Ritz方法求解PDE的解

笔者理解的一个对应形式：

$$J(y) = \frac{1}{2}B(y, y) - (f, y) = \frac{1}{2}\int_a^b (py'^2 + qy^2)dx - \int_a^b fy dx \tag{257}$$

他的一阶变分是：

$$\delta J = \frac{1}{2}\int_a^b 2py'\delta y' + 2qy\delta y - f\delta y dx \tag{258}$$

分部积分

$$\delta J = \frac{1}{2}\int_a^b -2(py')'\delta y + 2qy\delta y - f\delta y dx + py'\delta y|_a^b \tag{259}$$
$$= \int_a^b (-p'y' - py'' + qy - f)\delta y dx + py'\delta y|_a^b \tag{260}$$

当一阶变分为0的时候，有

$$-p'y' - py'' + qy - f = 0 \tag{261}$$

这即是微分方程的原形式。

求解

对于如下的一个变分问题：

$$J(u) = \min_{v\in K} J(v) \tag{262}$$

首先构造一组基底和子空间：

$$S_n = span\{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\} \tag{263}$$

则解写为：

$$u = \sum_n c_n \varphi_n \tag{264}$$

泛函的形式：

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \tag{265}$$

于是

$$J(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} c_i c_j a(\varphi_i, \varphi_j) - \sum_i c_i L(\varphi_i) \tag{266}$$

令，这是可以算的

$$A_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j) \tag{267}$$

$$L_i = L(\varphi_i) \tag{268}$$

则有

$$J(u) = \frac{1}{2}c^T Ac - c^T L \tag{269}$$

对c求导得0有

$$\frac{1}{2}(A^T + A)x - L = 0 \tag{270}$$

8.3.2 Galerkin方法

考虑求$u \in V$，使得对于$v \in V$，有

$$a(u,v) - L(v) = 0 \tag{271}$$

取有线子空间和基地：

$$S_n = span\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \tag{272}$$

把u和v都用展开

$$u = \sum_i c_i^0 \varphi_i \quad v = \sum_i c_i \varphi_i \tag{273}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) c_j^0 c_i - \sum_{i=1}^{n} c_i L(\varphi_i) = \sum_i^n c_i (\sum_j^n a(\varphi_i, \varphi_j) c_j^0 - L(\varphi_i)) \tag{274}$$

由 $c_1, \dots c_n$ 的任意性，得到：

$$\sum_{j=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) c_j^0 - L(\varphi_i) = 0 \tag{275}$$

背下来!!!

偏微分方程转为Ritz泛函和Galerkin泛函的等价

偏微分方程

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \tag{276}$$

函数

$$
\begin{aligned}
a(u,v)&=\int pu'v'dx+\int quvdx\\
L(v)&=\int fvdx
\end{aligned}
\tag{277}
$$

ritz泛函

$$
J(u)=\frac{1}{2}a(u,u)-L(u) \tag{278}
$$

Galerkin方程

$$
a(u,v)-L(v)=0 \tag{279}
$$

第九章 有限元方法

9.1 Lagrange插值函数

问题：

已知$y=f(x)$在$x_0,\ldots,x_n$节点上的函数值$y_0,\ldots,y_n$.于是通过一个插值函数来模拟y在整个可行域的值。

$$
\varphi_n(x)=\sum_0^n y_i l_i(x) \tag{280}
$$

其中

$$
l_i(x)=\frac{\sum_{j=0,i\neq j}^n(x-x_j)}{\sum_{j=0,i\neq j}^n(x_i-x_j)} \tag{281}
$$

于是有：

$$
l_i(x_j)=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases} \tag{282}
$$

其中 $l_j(x)$ 叫做节点 j 的Lagrange基函数

9.2微分方程的弱形式

一维的齐次Dirichlet边值问题

$$
\begin{cases}-u''=f(x), \quad 0<x<1\\ u(0)=0 \quad u(1)=0\end{cases} \tag{283}
$$

当

$$
f(x)=\delta(0.5) \tag{284}
$$

时候，虽然物理上问题存在，但是数学上不满足微分方程。

所以通过扩大积分来扩大微分方程的限制条件：

$$
\begin{cases}\int_0^1 u''vdx=\int_0^1 fvdx\end{cases} \tag{285}
$$

并确认v的空间

$$
v\in H_0^1=\{v:\int_0^1(v^2+v'^2)dx<\infty, v(0)=0, v(1)=0\} \tag{286}
$$

通过分部积分得到：

$$
\int_0^1 u'v'dx=\int_0^1 fvdx \quad \forall v\in H_0^1 \tag{287}
$$

非齐次的Dirichlet条件

$$
u(0)=u_0, u(1)=u_1 \tag{288}
$$

首先齐次化边界条件

$$
l_g(x)=(1-x)u_0+xu_1 \tag{289}
$$

于是

$$w(x)=u(x)-l_g(x) \tag{290}$$

进而得到方程：

$$-w''=f \tag{291}$$

Neumann问题

$$\begin{cases}-u''=f\\u'(0)=h_0,u'(1)=h_1\end{cases} \tag{292}$$

即边值由u'给出

同样利用上边的思路，但分部积分的第二项应该存在值：

$$\int_0^1 u'v'+h_0v(0)-h_1v(1)=\int_0^1 fvdx \tag{293}$$

9.3一维问题的有限元方法

> 笔者理解：有限元方法是解决变分为题的一种方法，同样是构造求解空间，之后将泛函中的话函数用有限元空间的基底表示出来。

线性有限元间

$$V_h=span\{\varphi_0(x),\dots\varphi_n(x)\} \tag{294}$$

其中 φ 的下标数量和节点数量是一致的。

φ_i 的具体形式是：

$$\varphi_i=\begin{cases}0,\quad x\le x_{i-1}\\\frac{x-x_{i-1}}{h},x_{i-1}\le x<x_i\\\frac{x_i-x}{h},x_i\le x<x_{i+1}\\0,x_{i+1}\le x\end{cases} \tag{295}$$

当然， 在边界 $i=0$或$i=n$ 上，只有一侧。

有限元方程的生成

在计算刚度矩阵的时候，可以考虑坐标变化

$$\xi=\frac{x-x_{i-1}}{h} \tag{296}$$

考虑Galerkin形式：

$$a(u,v)=L(v) \tag{297}$$

把他们都转成有限元的形式：

$$a(u_h,v_h)=L(v_h) \tag{298}$$

其中令

$$u_h=\sum_i u_i\varphi_i(x) \tag{299}$$

$$v_h=\forall i,\varphi_i(x) \tag{300}$$

有：

$$a(\sum_i u_i\varphi_i(x),\varphi_j(x))=L(\varphi_j) \tag{301}$$

化简

$$\sum_i u_ia(\varphi_i,\varphi_j)=L(\varphi_j) \tag{302}$$

在j向扩展一下

$$AU=F \tag{303}$$

其中

$$A(i,j)=a(\varphi_i,\varphi_j) \tag{304}$$

$$F(i)=L(\varphi_i) \tag{305}$$

$$U(i)=u_i \tag{306}$$

然后需要具体计算一下A

从φ的形式可知，下标相差2以上的a都为0

考虑三个：

第一个：

$$a(\varphi_{j-1},\varphi_j) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'_{j-1}\varphi'_j + q(x)\varphi_{j-1}\varphi_j dx \tag{307}$$

$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} -h^{-2} + q(x)\varphi_{j-1}\varphi_j dx \tag{308}$$

$$令\xi = \frac{x-x_{j-1}}{h} \to = \int_0^1 -h + hq(\xi h + x_{j-1})\xi(1-\xi)d\xi \tag{309}$$

第二三个类似计算即可。

第一行的元素最先两个非零。

最后一行的元素最后两列非零。

实际计算的时候，只考虑在具体某个单元的刚度矩阵，比如：第i个单元$[x_{i-1},x_i]$。

$$u^u = (u_{i-1},u_i)^T \tag{310}$$

$$K = \begin{bmatrix} a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} \\ a_{i,i-1} & a_{i,i} \end{bmatrix} \tag{311}$$

其中与 a 相关的各种计算如上述。

和单位荷载向量：

$$F = [L()] \tag{312}$$

按照书上的意思，有没有可能在考虑第i个单元$[x_{i-1},x_i]$计算刚度矩阵的时候，只考虑在$[x_{i-1},x_i]$上边考虑积分?