Кривая подгонки

Кривая подгонки или аппроксимации - это математическая модель или функция, которая приближенно описывает закономерности или зависимости в наборе данных. Процесс аппроксимации используется для нахождения наилучшего соответствия между математической моделью и реальными данными.

Основная цель кривой подгонки состоит в том, чтобы создать простую, но достаточно точную функцию, которая может быть использована для предсказания значений вне известных точек данных. Это особенно полезно, когда есть необходимость анализа или предсказания трендов, а также при работе с экспериментальными данными.

Процесс создания кривой подгонки включает в себя выбор подходящей математической формулы или модели, которая наилучшим образом соответствует данным. Обычно это может быть линейная или полиномиальная функция, экспоненциальная или логарифмическая кривая, или другие типы функций в зависимости от характера данных.

Методы подгонки, такие как метод наименьших квадратов, используются для определения параметров модели так, чтобы минимизировать разницу между предсказанными значениями и реальными данными. Полученная кривая подгонки может затем использоваться для анализа трендов, прогнозирования будущих значений или визуализации зависимостей в данных.

Конкретные примеры кривых подгонки могут включать следующие случаи:

1. **Линейная регрессия:**
   - *Модель:* $y = mx + b$
   - *Применение:* Подгонка прямой линии к данным, где предполагается линейная зависимость между переменными.
2. **Полиномиальная аппроксимация:**
   - *Модель:* $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
   - *Применение:* Аппроксимация кривой полиномом для более гибкого учета сложных зависимостей.
3. **Экспоненциальная кривая:**
   - *Модель:* $y = ae^{bx}$
   - *Применение:* Подгонка экспоненциальной кривой к данным с экспоненциальным ростом или затуханием.
4. **Логарифмическая кривая:**
   - *Модель:* $y = a \ln(x) + b$

- *Применение:* Аппроксимация кривой логарифмической функцией, когда наблюдается логарифмическая зависимость.

5. **Парабола:**
   - *Модель:* $y = ax^2 + bx + c$
   - *Применение:* Подгонка параболы к данным с квадратичной зависимостью.
6. **Кривая мощности (степенная функция):**
   - *Модель:* $y = ax^b$
   - *Применение:* Подгонка степенной функции к данным с асимптотическими свойствами.

Эти примеры демонстрируют различные формы математических моделей, которые могут быть использованы для аппроксимации разнообразных данных. Выбор конкретной модели зависит от природы данных и требований конкретной задачи.

Ошибки

1. **Максимальная ошибка (Infinity Norm):**

   $$E_\infty(f) = \max_{1<k<n} |f(x_k) - y_k|$$

   Эта формула представляет собой максимальное отклонение предсказанных значений от фактических значений на точках данных.
2. **Средняя ошибка (Mean Absolute Error):**

   $$E_1(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - y_k|$$

   Здесь мы находим среднюю абсолютную разницу между предсказанными значениями и фактическими значениями.
3. **Среднеквадратичная ошибка (Mean Squared Error):**

   $$E_2(f) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - y_k|^2}$$

   Эта формула представляет собой среднеквадратичное отклонение предсказанных значений от фактических значений.

4. **Абсолютная ошибка (Absolute Error):**

$$E_A(x_k) = |f(x_k) - y_k|$$

   Эта формула представляет собой абсолютное отклонение предсказанных значений от фактических значений в точке данных x_k.

5. **Относительная ошибка (Relative Error):**

$$E_R(x_k) = \frac{|f(x_k) - y_k|}{|y_k|} \times 100\%$$

   Эта формула измеряет относительное отклонение предсказанных значений от фактических значений в точке данных x_k, выраженное в процентах. Она учитывает масштаб фактических значений для более объективной оценки ошибки.

Примеры

Пример 1.a

Проведен эксперимент для проверки закона Гука. Измерения позволили получить следующие данные:

- Сила (F): [1 2 3 4 5]
- Изменение длины (Δx): [3 6 9 12 15]

Составить график зависимости удлинения пружины от приложенной силы и определить модуль упругости Янга. На сколько пружина удлинится, если на нее действует сила в 7 Н?

Пример 1.b

Вторая группа исследователей провела тот же эксперимент с той же пружиной, и получила следующие результаты:

- Сила (F): [1 2 3 4 5]
- Изменение длины (Δx): [3 6.5 9 11 15]

Какое значение модуля упругости Янга получила эта группа?

На сколько пружина удлинится при применении силы в 7 Н?

Задачи

ЗАДАЧА 1

Написать функцию, которая аппроксимирует заданный набор экспериментальных результатов полиномом первой степени. Входными параметрами функции являются векторы точек x, в которых производились измерения, и вектор, содержащий измеренные значения y. Выходным параметром функции является аппроксимационный полином P. Построить график экспериментальных данных и данных, полученных аппроксимацией.

ЗАДАЧА 2

Написать функцию, которая аппроксимирует заданный набор экспериментальных результатов полиномами третьей и четвертой степени. Входными параметрами функции являются векторы точек x, в которых производились измерения, и вектор, содержащий измеренные значения y. Выходным параметром функции является аппроксимационный полином с меньшей средней абсолютной ошибкой. В функции нужно проверить, имеют ли x и y одинаковую длину.

ЗАДАЧА 3

Написать функцию, которая аппроксимирует заданный набор экспериментальных результатов полиномами пятой и шестой степени. Входными параметрами функции являются векторы точек x, в которых производились измерения, и вектор, содержащий измеренные значения y. Выходными параметрами функции являются аппроксимационные полиномы P5 и P6. В функции нужно проверить, имеют ли x и y одинаковую длину.

ЗАДАЧА 4

Написать функцию, которая аппроксимирует заданный набор экспериментальных результатов полиномом произвольной степени так, чтобы максимальная относительная ошибка аппроксимации не превышала 1%. Входными параметрами функции являются векторы точек x, в которых производились измерения, и вектор, содержащий измеренные значения y. В функции нужно проверить, имеют ли векторы x и y одинаковую длину. Выходными параметрами функции являются коэффициенты и степень полинома.