Quiz 4.

1. 定义如下内积：$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$，请问 $sinx+cosx$ 与 $sinx-cosx$ 是否正交。

$$\langle \sin x+\cos x,\ \sin x-\cos x\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x-\cos^2 x\,dx=-\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\,dx=0.$$

$\Rightarrow$. 正交

2. 若 $f(x)$ 满足分段可微，且绝对可积并连续，求 $f(x)$ 的傅立叶变换

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$$

3. 求常数 α，使积分 $\oint_C\frac{xdx-\alpha ydy}{x^2+y^2}=0$ 恒成立，其中 C 为平面上任意满足定义域的封闭曲线。

$$P=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad Q=-\frac{\alpha y}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2\alpha xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow \alpha=1$$

4. 计算积分 $\int_L x^2ds$，其中 $L:x^2+y^2+z^2=a^2,x+y+z=0$。

$$\int_L x^2ds=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{3}a^2\int_L ds=\frac{2\pi a^3}{3}$$

1. 设 P,Q,R 在 L 上连续，L 为光滑弧段，弧长为 l，证明：

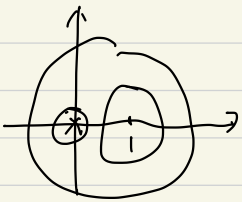
$$\left|\int_L Pdx+Qdy+Rdz\right|\le Ml.$$

其中，$M=\max_{(x,y,z)\in L}|\sqrt{P^2+Q^2+R^2}|$。(10 分)

$v=(P,Q,R)$. $\qquad |v|\le M$.

$$\left|\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r}\right|\le\int|\vec{v}|\,|d\vec{r}|=v\int|d\vec{r}|=Ml.$$

2. 2. 计算 $\oint_{C^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$. 其中 C 以 (1, 0) 为圆心，以 R($R\neq 1$) 为半径。设 C^+ 表示其上的方向为逆时针方向。(15 分)



① $0<R<1 \Rightarrow \oint_{C^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0.$

② $R>1 \Rightarrow \oint_{C^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=2\pi$

$(x\ln x)'=1+\ln x$

3. 计算积分 $I=\int_L x\ln(x^2+y^2-1)dx+y\ln(x^2+y^2-1)dy$, 其中 L 是被积函数的定义域内从点 (2, 0) 到 (0, 2) 的逐段光滑曲线。(10 分)

$$I=\int_L \ln(x^2+y^2-1)\,d(x^2+y^2-1)=(x^2+y^2-1)\ln(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-1)\Big|_{(0,2)}^{(2,0)}$$

$$=0$$

4. 计算积分 $I=\int_{L^+}\frac{(1+\sqrt{x^2+y^2})(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$. 其中 L^+ 是从不过原点，从 (1, 0) 到 (0, 2) 的分段光滑曲线。(10 分)

$$I=\frac{1}{2}\int_{L^+}\frac{(1+\sqrt{x^2+y^2})\,d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}=\frac{1}{2}\left[\int_{L^+}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\int_{L^+}\frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2)+2\sqrt{x^2+y^2}\right]\Big|_{(1,0)}^{(0,2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln 4+2\sqrt{4}-\ln 1-2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\ln 2+4-\ln 1-2\right]=\ln 2+1$$

5. 将周期为 2π 的函数 $f(x)=\frac{1}{4}x(2x-\pi), x\in[0,2\pi]$ 展开为 Fourier 级数，并由此求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 并由此求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. (15 分)

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)dx=\frac{1}{3}\pi^2$ $\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\cos nx\,dx=-\frac{1}{n^2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\,dx\sin nx=0$

$f(x)$ 处处可导， $f(0+0)=f(2\pi-0)$

$\Rightarrow \frac{1}{4}x(2\pi-x)=\frac{1}{6}\pi^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx$ 　令 $x=0$，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(2) $\int_0^x\left[\frac{1}{4}t(2\pi-t)-\frac{1}{6}\pi^2\right]dt=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^x\cos nt\,dt$

$\Rightarrow \frac{1}{6}\pi^2x-\frac{1}{4}\pi x^2+\frac{x^3}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin nx$

积2次 $\Rightarrow -\frac{1}{36}\pi^2x^3+\frac{1}{48}\pi x^4-\frac{x^5}{240}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{\sin nx}{n}-x\right)$.

令 $x=2\pi$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}\pi^4$

Parseval 恒等式也可以做

6. 利用 Parseval 等式证明：若 f 与 g 在 $[-\pi,\pi]$ 上符合 Parseval 等式的条件，他们的 Fourier 系数分别为 a_n,b_n 与 α_n,β_n，证明：(10 分)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n).$$

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$

$g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx.$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f+g)^2dx=\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2.$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2dx=\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2.$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}fg\,dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\alpha_n+b_n\beta_n$

7. 设函数法 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上可积，证明：（10 分）

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\pi-x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

其中 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sin(nx)dx(n=1,2,...)$.

令 $\varphi(x)=\pi-x \Rightarrow \varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$ 则 $a_n=0$. $b_n=\frac{2}{n}$

由上式可知.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\cdot\varphi\, dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}b_n \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\pi-x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$