第十章

二重积分肯定会考

计算、换元技巧

- 换元比原来更简单
- 最简单：极坐标换元
  - 结论要知道 证明过程复现不了也行
  - $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
- ordinary:
  - $$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$
  - $$\iint_D f\mathrm{d}\sigma = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

先后次序（累次积分）

证明题：

- 线性性、比较定理
- 书上：10.1. 4/5/6/7

n重积分

n → n-1 → n-2 → ...

做题

10.2.4

4. 证明: $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \left(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2.$

10.4.1

1. 计算下列 n 重积分.

(1) $\int \cdots \int_{[0,1]^n} \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$, 其中

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n\text{个}};$$

(2) $\int \cdots \int_{[0,1]^n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n \, \mathrm{d}x_n$.

10.综合.5 爆算题

5. 试求圆盘 $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leqslant a^2$ 与曲线 $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy$ 所围部分相交的区域 D 的面积.

10.综合.7

7. 证明: $\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 t^t \, \mathrm{d}t$.

换元：令 $xy = t, y/x = s$,

则 $|J| = 1/2s, t \in [0,1], s \in [t, 1/t]$

然后开算

The Original Form = $\int_0^1 t^t \mathrm{d}t \int_t^{1/t} 1/2s \mathrm{d}s = -\int_0^1 t^t \ln t \mathrm{d}t$

Because $\int_0^1 t^t (\ln t + 1) \mathrm{d}t = e^{t \ln t}\Big|_0^1 = 1 - 1 = 0$,

then the form = $\int_0^1 t^t \mathrm{d}t$.