Chap12 — 3

收敛性定理

12.3.1 Dirichlet收敛定理

定义 设$f:[a, b]\to\mathbf{R}$, 若可将$[a, b]$分为有限个子区间, 使 f 在每个开子区间内部连续可微, 端点有单侧极限, 及拟单侧导数, 则称f 在$[a, b]$上分段可微.

定理 设f 以2π为周期, 在$[-\pi, \pi]$上分段可微, 则其F氏级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

证明 记

$$S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

f 的F氏级数的部分和函数

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

称为f 的n阶**Fourier多项式**. 下面证明:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

第一步

Dirichlet积分

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}} \overset{\text{def}}{=} D_n(u)$$

Dirichlet积分核

简单事实

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right)\mathrm{d}u = 1}$$

第二步

$$S_n(x)-S(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-2S(x)]D_n(u)\mathrm{d}u$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(u,x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}\mathrm{d}u$$

第三步 (Riemann) 设 g 在[0, π]上可积且平方可积, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,\mathrm{d}u=0$$

第四步

$$g(u)=\frac{\varphi(u,x)}{2\sin\frac{u}{2}}=\frac{f(x+u)+f(x-u)-2S(x)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

在[0, π]上可积且平方可积.

推论 设f连续并满足定理条件, 又f'可积且平方可积,

则其F氏级数在R上一致收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$$

12.3.2 平方平均收敛定理

定理 设 $f\in R[-\pi,\pi]$, 则$\{S_n(x)\}$平方平均收敛于 f, 即

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|=0$$

例1 写出 $f(x)=x^2\ (x\in[-\pi,\pi])$ 的F氏级数的和函数在[−π, π]上的表达式.

$$\boxed{x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2\quad(-\pi\le x\le\pi)}$$

例2 写出 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 的F氏级数的和函数在[−π, π]上的表达式.

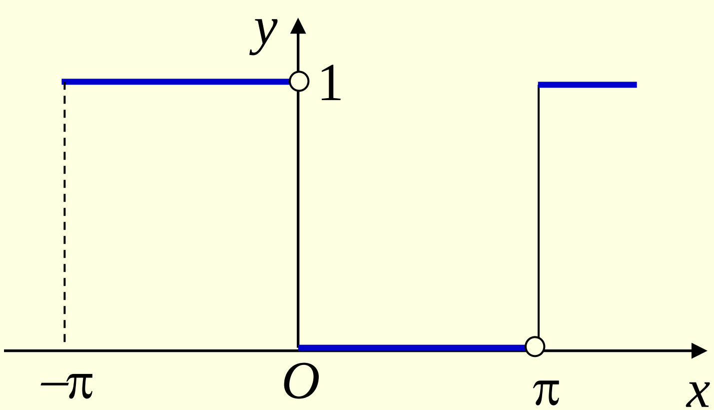
$$\boxed{f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right\}}=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x<\pi,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

例3 求 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}$ **的F氏级数, 并写出和函数.**

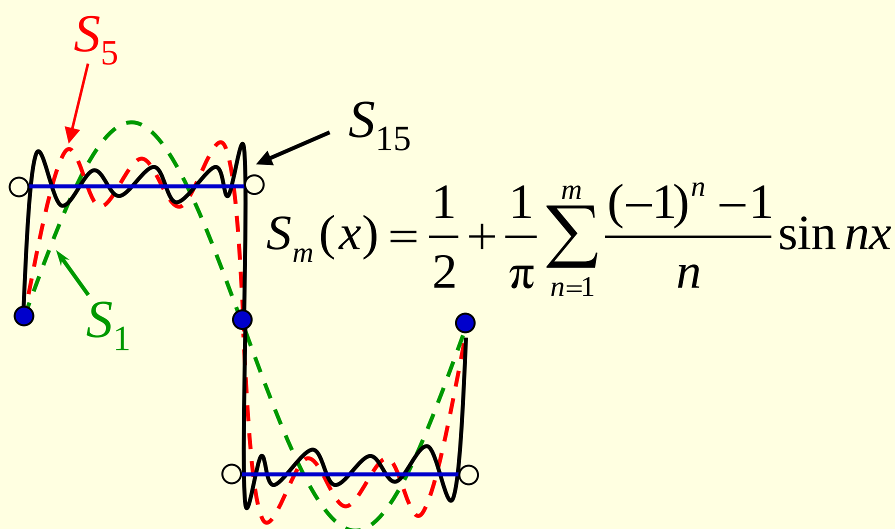
$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$$

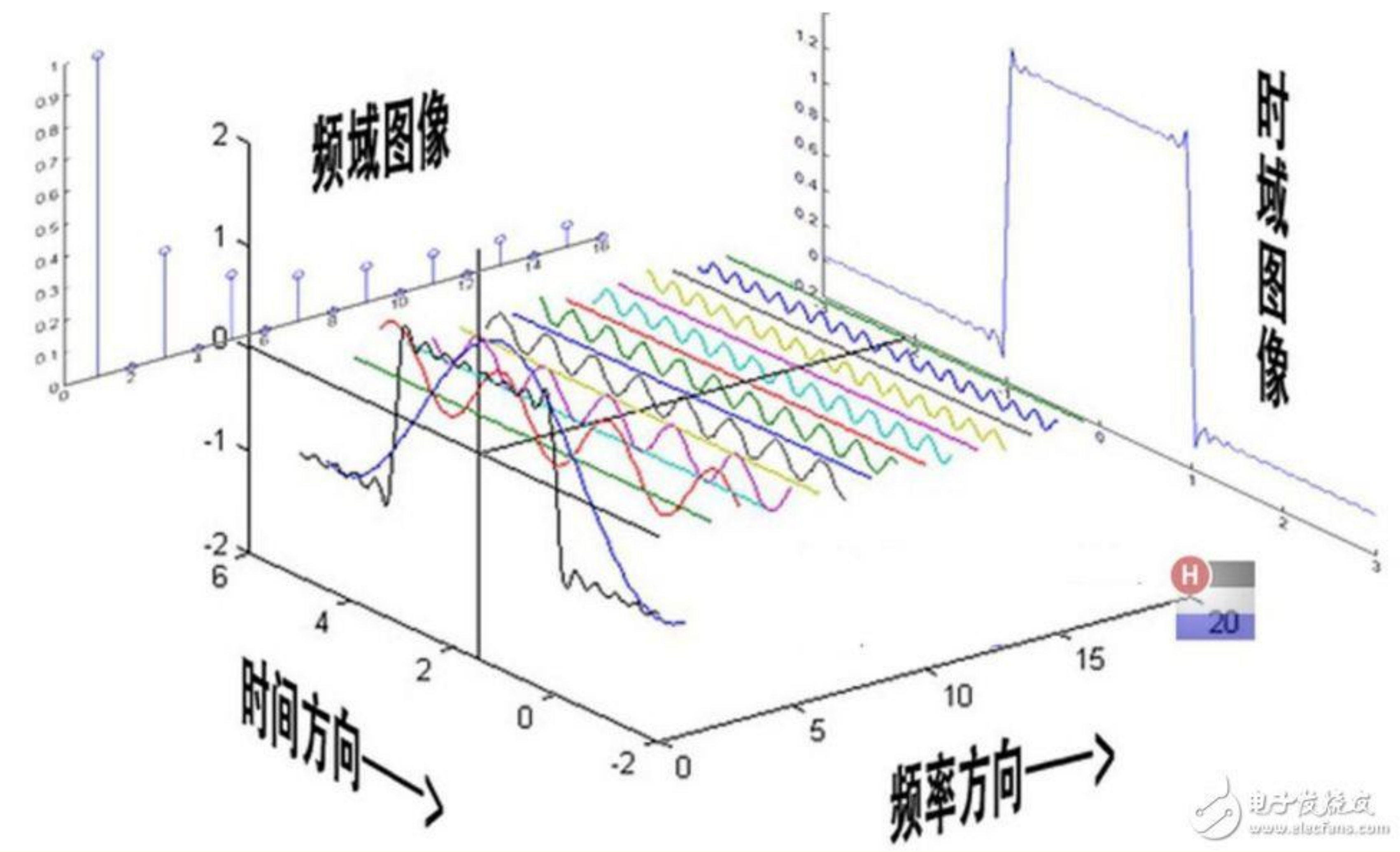
$$S(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0,\\ \frac{1}{2}, & x=0,\pm\pi,\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$$



电工学方波



正弦波叠加



频域图像
时域图像
时间方向—→
频率方向—→