姓名：________________

学号：________________

学院：________________

年级：________________

上海科技大学

2021–2022 学年第 2 学期期末考试卷

开课单位：数学科学研究所
授课教师：陈克应，朱佐农，姚成建，孙伟
考试科目：数学分析 II
课程序号：GEMA1010

考生须知：

1. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生，可以携带教师指定的材料独立完成考试，但不准相互讨论，不准交换材料。

考试成绩录入表：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
计分										
复核										

评卷人签名： **复核人签名：**

日期： **日期：**

分数: ________

页码: $\underline{\quad 1 \quad}$

1.（12 分）判断题（对的写 T，错的写 F）

(　　) (1) 设函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 内存在两个偏导数。如果偏导数 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 D 内连续，那么 f 在 D 内可微。

(　　) (2) 无穷多个开集的交集仍是开的。

(　　) (3) 设 $F(x,y)$ 是一个光滑函数。若 $F(x,y)=0$ 恰表示了一条自相交的曲线，那么在曲线交点处 $F(x,y)$ 的偏导数一定为 0。

(　　) (4) 连通集一定是道路连通集。

(　　) (5) 设函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数。如果积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}|f(x)|dx$ 收敛，那么 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛。

(　　) (6) 设 $V\subset\mathbb{R}^3$ 是开区域，$\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 是 V 上的光滑向量场。若 $\boldsymbol{v}$ 满足 $\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{v}$ 是保守场。

分数: ________

页码: 2

2.（10 分）判断下列反常积分的收敛性：

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6} \ln\left(1 - \frac{\sin^6 x}{6}\right) dx.$$

分数: ________

3.（10 分） 已知 $A(1,0,a)$, $B(2,3,1)$, $C(-1,2,1)$, $D(6,6,6)$ 在一个平面上，求 a 的值。

分数: ________

页码: ____4____

4.（10 分）计算积分

$$\iiint_V |z|dxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2 \leq 3.$$

5.（10 分） 由下列方程组求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{dz}{dx}$.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

（答案化简为最简形式）

分数: ________

页码: 6

6.（10 分） 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上将函数

$$f(x) = \sin^3 x$$

展开成 Fourier 级数。

分数: ________

页码: 7

7.（10 分） 已知 f 是以 2π 为周期的，在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积函数。假设存在某个正整数 $n \geq 1$，使得 f 的 Fourier 级数第 n 余弦项 $\cos nx$ 的系数 $a_n = 1$。求证: $\sup\limits_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x)| \geq \dfrac{\pi}{4}$。

分数: ________

页码: 8

8.（10 分）求下列曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^3+y^3)dydz+(6x^3+3x^2y)dzdx-6x^2zdxdy,$$

其中 Σ 是双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$（$0\le z\le\sqrt{3}$）外侧。

分数: ________

9.（18 分） 平面区域 D 是闭的有界 Jordan 可测区域，测度非零。假设 f,g 是 D 上的（Riemann）可积函数，正实数 p、q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

(1)（5 分）利用 Lagrange 乘数法证明，对于任意非负实数 x,y，有

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

(2)（5 分）求证: 以下不等式中的积分有意义，且不等式成立

$$\iint_D fg\,dxdy \le \left(\iint_D |f|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_D |g|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(3)（5 分）利用（2）中的不等式证明：极限 $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\iint_D |f|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$ 存在。

(4)（3 分）请问 $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\iint_D |f|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$ 是否等于 $\sup_D |f|$? 证明您的判断。