Chap 11 — 5

Gauss定理和Stokes定理

11.5.1 Gauss定理

定理(Gauss公式) 设 $\mathbf{v} = (P, Q, R)$为空间有界闭域 V上的光滑向量场, ∂V 是分片光滑闭曲面, 则有

$$\boxed{\oiint_{\partial V^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V}$$

注 三重积分与其边界上第二型曲面积分的关系

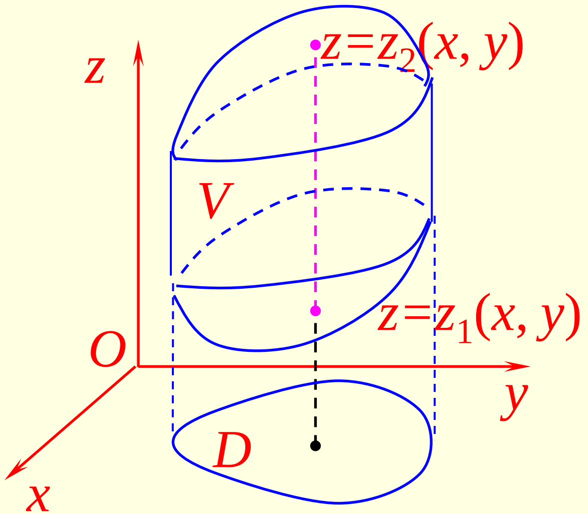
分析 先证 $\oiint_{\partial V^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V$

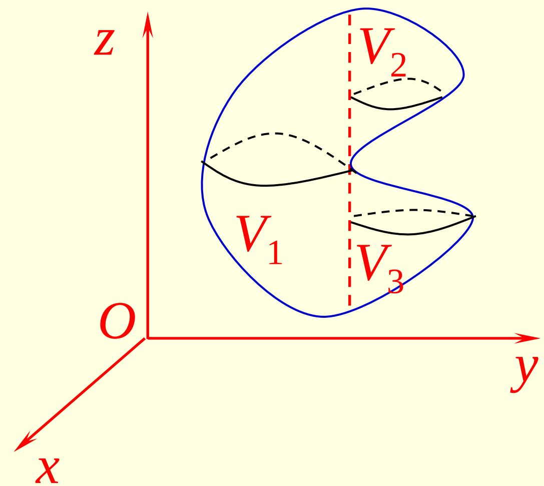
再证关于P, Q的等式, 三式相加即证.

先证 $\oiint_{\partial V^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V$

证 1) 当V是xy型区域, 即

$$V = \left\{(x,y,z)\middle| z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y)\in D\right\}$$





2) 当V是一般区域, 用母线平行z轴柱面分成若干xy型区域并运用1)的结论.

推论 设空间有界闭域V的边界分片光滑, 则其体积

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\partial V^{+}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

例1 计算积分

$$I=\oint\!\!\!\oint_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

$\boxed{4\pi abc}$

例2 计算积分

$$I=\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2},(0\le z\le h)$ 的下侧.

$$\boxed{\frac{5\pi h^3}{3}}$$

例3 计算积分

$$I=\iint_S \frac{xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中S为球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},(R>0)$ 的上侧.

$$\boxed{\frac{2\pi R^4}{5}}$$

例4 计算积分

$$I = \iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{r}|^2} \mathrm{d}S$$

其中S是包围原点的封闭光滑曲面，$\boldsymbol{n}$是S上点(x, y, z)处的外法向量，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

$\boxed{4\pi}$

■ Gauss公式的向量形式

由于 $$\oiint_{\partial V^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V$$

故有

$$\boxed{\oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V}$$

散度物理意义 $$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(M) = \lim_{V\to M}\frac{1}{\mathrm{Vol}(V)}\oiint_{\partial V^+} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

11.5.2 Stokes定理

定理(Stokes公式) 设 $\mathbf{v} = (P, Q, R)$为空间光滑曲面S上的光滑向量场, ∂S 是分段光滑闭曲线, 则有

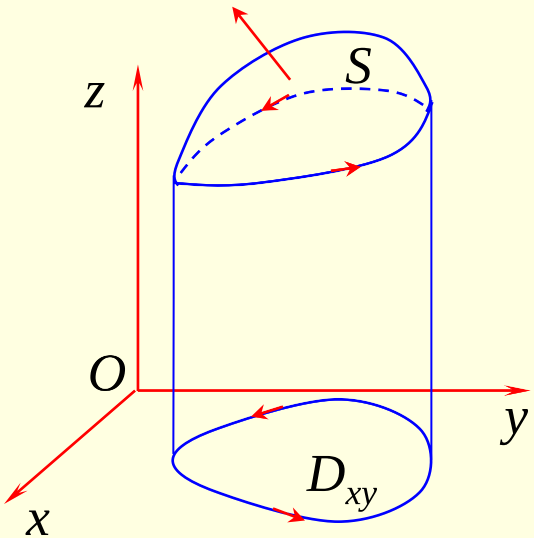
$$\oint_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

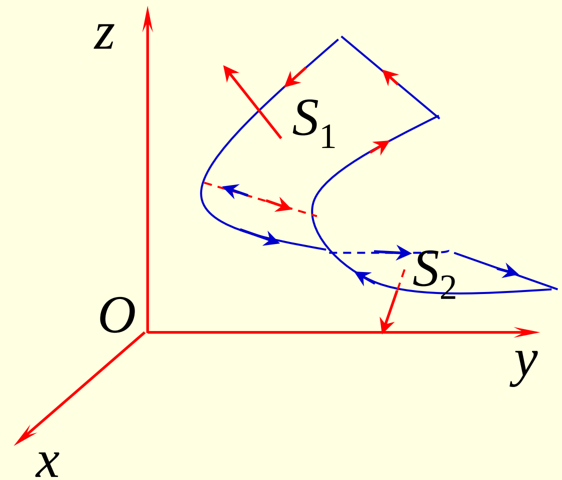
其中∂S的方向与S的侧向按右手法则联系.

注 第二型曲面积分与其边界上第二型曲线积分关系

分析 先证 $\oint_{\partial S} P\mathrm{d}x = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

证 1) 当S是z型曲面, 即 $S:\ z = z(x, y),\ (x, y) \in D_{xy}$





2) 一般曲面S 可分成若干z型曲面并运用1)的结论

再证 关于Q, R的等式, 三式相加即证.

■ 借助行列式, Stokes公式可记为

$$\oint_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

其中∂S定向与$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$按右手法则联系

例5 计算积分

$$I = \oint_C z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$$

其中C是平面$2x + 3y + z = 6$被三个坐标平面所截的三角形S 的边界, 其方向与S上侧满足右手法则. 18

例6 计算积分

$$I=\oint_C (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

其中曲线C为 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x+z=R \end{cases}$，积分方向从$Ox$轴正向看沿逆时针.

$\boxed{-4\pi R^2}$

■ Stokes公式的向量形式

记$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, 则$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, Stokes公式可写成

$$\boxed{\begin{aligned}\oint_{\partial S} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \iint_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}^{\circ}\, \mathrm{d}S\end{aligned}}$$

其中∂S的定向与S的定侧($\boldsymbol{n}^{\circ}$)满足右手法则

旋度物理意义 $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}^{\circ}\Big|_M = \lim\limits_{S\to M} \dfrac{1}{\mathrm{Area}(S)} \oint_{\partial S} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$