1. 一质点在xy平面内运动，其运动函数为$x = R\cos\omega t$和$y = R\sin\omega t$, 其中R和ω为正值常量。求质点的运动轨道以及任一时刻它的位矢、速度和加速度。

解 对 x, y 两个函数分别取平方，然后相加，就可以消去 t 而得轨道方程

$$x^2 + y^2 = R^2$$

这是一个圆心在原点，半径为 R 的圆的方程(图 1.11)。它表明质点沿此圆周运动。

质点在任一时刻的位矢可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = R\cos\omega t\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

此位矢的大小为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$$

以 θ 表示此位矢和 x 轴的夹角，则

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\omega t}{\cos\omega t} = \tan\omega t$$

因而

$$\theta = \omega t$$

质点在任一时刻的速度可由位矢表示式求出，即

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin\omega t\boldsymbol{i} + R\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

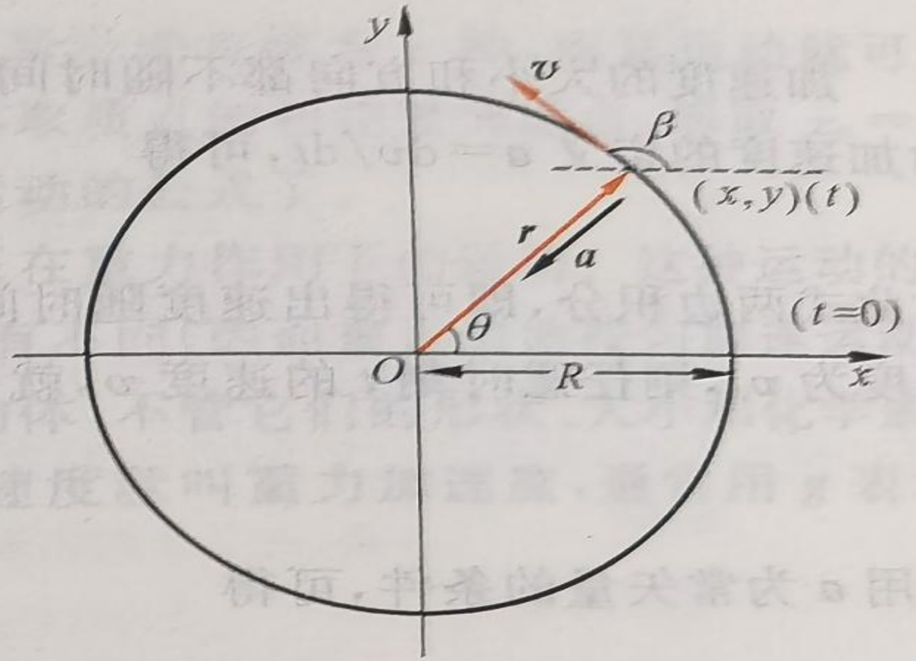


图 1.11　例 1.2 用图

它沿两个坐标轴的分量分别为

$$v_x = -R\omega\sin\omega t, \quad v_y = R\omega\cos\omega t$$

速率为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

由于 v 是常量，表明质点作匀速圆周运动。

以 β 表示速度方向与 x 轴之间的夹角，则

$$\tan\beta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\cos\omega t}{\sin\omega t} = -\cot\omega t$$

从而有

$$\beta = \omega t + \frac{\pi}{2} = \theta + \frac{\pi}{2}$$

这说明，速度在任何时刻总与位矢垂直，即沿着圆的切线方向。质点在任一时刻的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i} - R\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

而

$$a_x = -R\omega^2\cos\omega t, \quad a_y = -R\omega^2\sin\omega t$$

此加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$$

又由上面的位矢表示式还可得

2. 有一学生在体育馆阳台上以投射角$\theta = 30^\circ$和速率$v_0 = 20\mathrm{m/s}$向台前操场投出一垒球。球离开手时距离操场水平面的高度$h = 10m$. 试问球投出后何时着地? 在何处着地? 着地时速度的大小和方向各如何?

解 以投出点为原点，建 x,y 坐标轴如图 1.15 所示。引用式(1.24)，有

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

以(x,y)表示着地点坐标，则 $y=-h=-10\ \mathrm{m}$。将此值和 v_0，θ 值一并代入第二式得

$$-10 = 20 \times \frac{1}{2} \times t - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

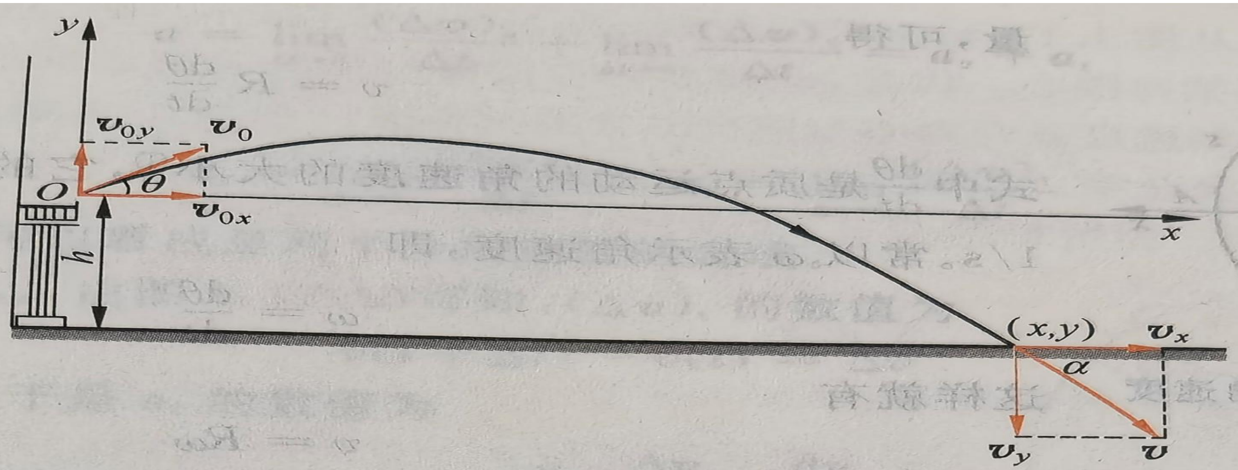


图 1.15　例 1.4 用图

解此方程，可得 $t=2.78$ s 和 -0.74 s。取正数解，即得球在出手后 2.78 s 着地。

着地点离投射点的水平距离为

$$x=v_0\cos\theta\cdot t=20\times\cos 30^\circ\times 2.78=48.1\ (\mathrm{m})$$

引用式(1.23)得

$$v_x=v_0\cos\theta=20\times\cos 30^\circ=17.3\ (\mathrm{m/s})$$

$$v_y=v_0\sin\theta-gt=20\sin 30^\circ-9.8\times 2.78=-17.2\ (\mathrm{m/s})$$

着地时速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{17.3^2+17.2^2}=24.4\ (\mathrm{m/s})$$

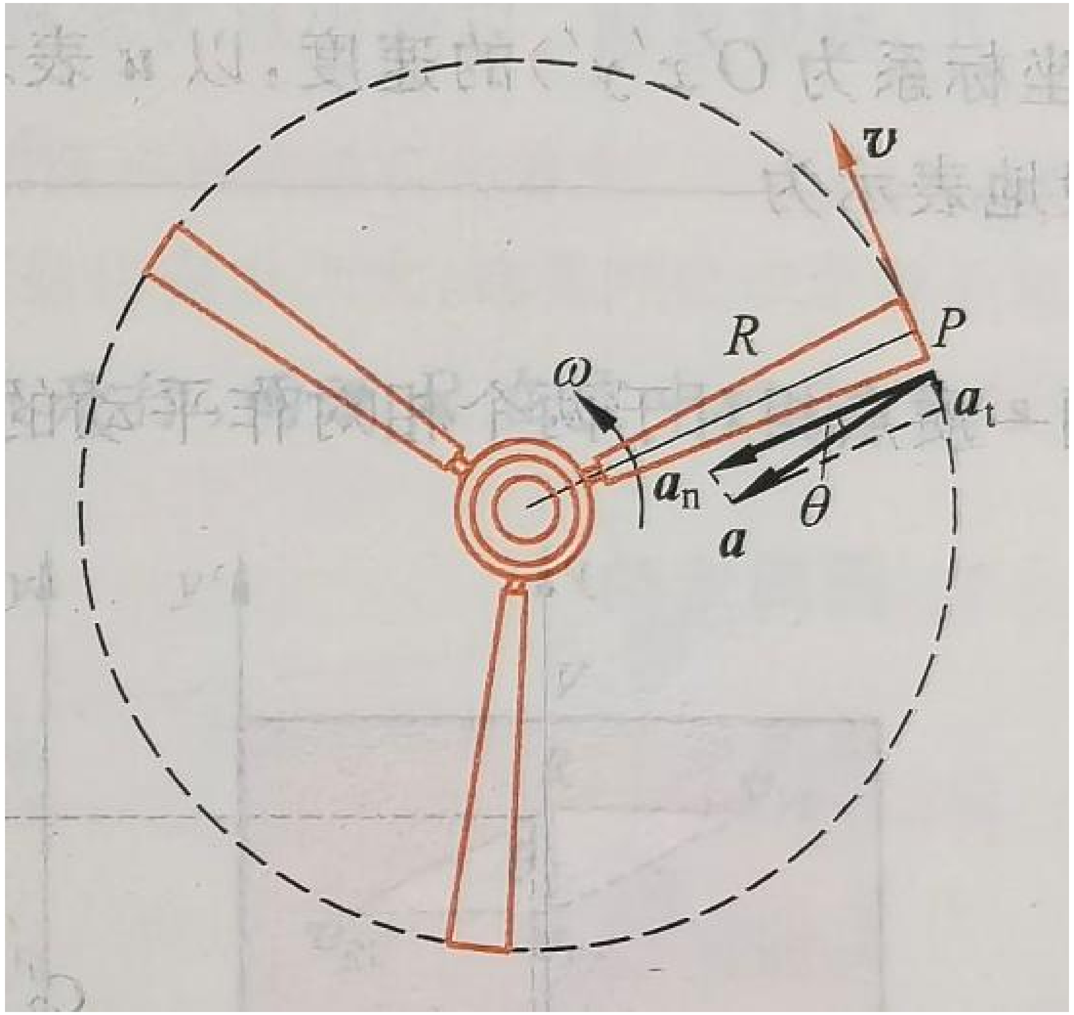
此速度和水平面的夹角

$$\alpha=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\frac{-17.2}{17.3}=-44.8^\circ$$

3. 一吊扇翼片长$R = 0.50m$，以$n = 180\ r/min$的转速转动。关闭电源开关后，吊扇均匀减速，经$t_A = 1.50min$转动停止。

（1）求吊扇翼尖原来的转动角速度ω_0与线速度v_0；

（2）求关闭电源开关后$t = 80\ s$时翼尖的角加速度α、切向加速度a_t、法向加速度a_n和总加速度a.



解 (1) 吊扇翼尖 P 原来的转动角速度为

$$\omega_0 = 2\pi n = \frac{2\pi \times 180}{60} = 18.8\ (\mathrm{rad/s})$$

由式(1.28)可得原来的线速度

$$v_0 = \omega_0 R = \frac{2\pi \times 180}{60} \times 0.50 = 9.42\ (\mathrm{m/s})$$

(2) 由于均匀减速，翼尖的角加速度恒定，

$$\alpha = \frac{\omega_A - \omega_0}{t_A} = \frac{0 - 18.8}{90} = -0.209\ (\mathrm{rad/s^2})$$

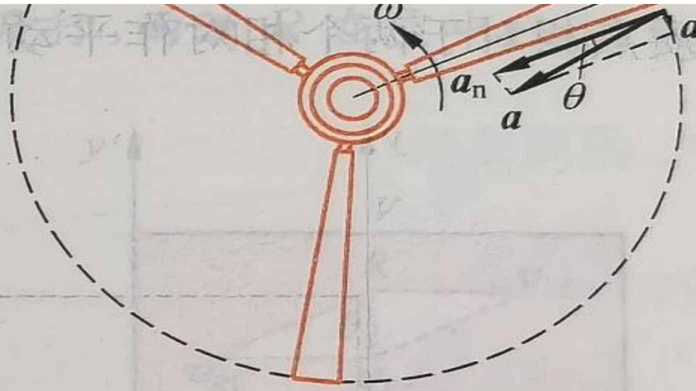


图 1.20　例 1.6 用图

由式(1.32)可知，翼尖的切向加速度也是恒定的，

$$a_t = \alpha R = -0.209 \times 0.50 = -0.105\ (\mathrm{m/s^2})$$

负号表示此切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 的方向与速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反，如图 1.20 所示。

为求法向加速度，先求 t 时刻的角速度 ω，即有

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 18.8 - 0.209 \times 80 = 2.08\ (\mathrm{rad/s})$$

由式(1.34)，可得 t 时刻翼尖的法向加速度为

$$a_n = \omega^2 R = 2.08^2 \times 0.50 = 2.16\ (\mathrm{m^2/s})$$

方向指向吊扇中心。翼尖的总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0.105^2 + 2.16^2} = 2.16\ (\mathrm{m/s^2})$$

此总加速度偏向翼尖运动的后方。以 θ 表示总加速度方向与半径的夹角(如图 1.20 所示)，则

$$\theta = \arctan\left|\frac{a_t}{a_n}\right| = \arctan\frac{0.105}{2.16} = 2.78^\circ$$

4. 跳水运动员沿竖直方向入水，接触水面时的速率为v_0，入水后重力和水的浮力相抵消，仅受水的阻力而减速，自水面向下取Oy轴，其加速度为$a_y =- kv_y^2$， v_y为速度，k为常量。求入水后运动员速度随时间的变化。

解：

$$\frac{dv_y}{dt} =- kv_y^2$$

整理后可得

$$- v_y^{-2}\mathrm{d}v_y = kdt$$

设入水时， $t = 0$，$v_y = v_0$。运动过程中t时刻速度为v_y。

将上式的两侧分别以v_y和t为积分变量，以$- v_y^{-2}$和k为被积函数作定积分，得

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = kt \quad 或 \quad v = \frac{v_0}{kv_0t+1}$$

可见运动员的速度随时间的增加而减小。当$t \to \infty$时，速度变成零。

5. 跳水运动员自10m跳台自由下落，入水后因受水的阻碍而减速，自水面向下取坐标轴Oy，其加速度为$-kv_y^2$，其中$k = 0.4m^{-1}$。求运动员速度减为入水速度1/10时的入水深度。

解：

设运动员以初速度0起跳。至水面时其速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10}\frac{m}{s} = 14\frac{m}{s}$$

在水中的加速度为

$$\frac{dv_y}{dt} =- kv_y^2$$

因落至不同位置对应不同速度，故可视v_y为y的函数，即$v_y = v_{\mathrm{y}}(y)$。于是可写出

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv_y}{dy}v_y$$

代入上式，得

$$\frac{dv_y}{dy} =- kv_y \text{ 即 } \frac{dv_y}{v_y} =- kdy$$

作不定积分并化简，得

$$v_y = Ce^{-ky}$$

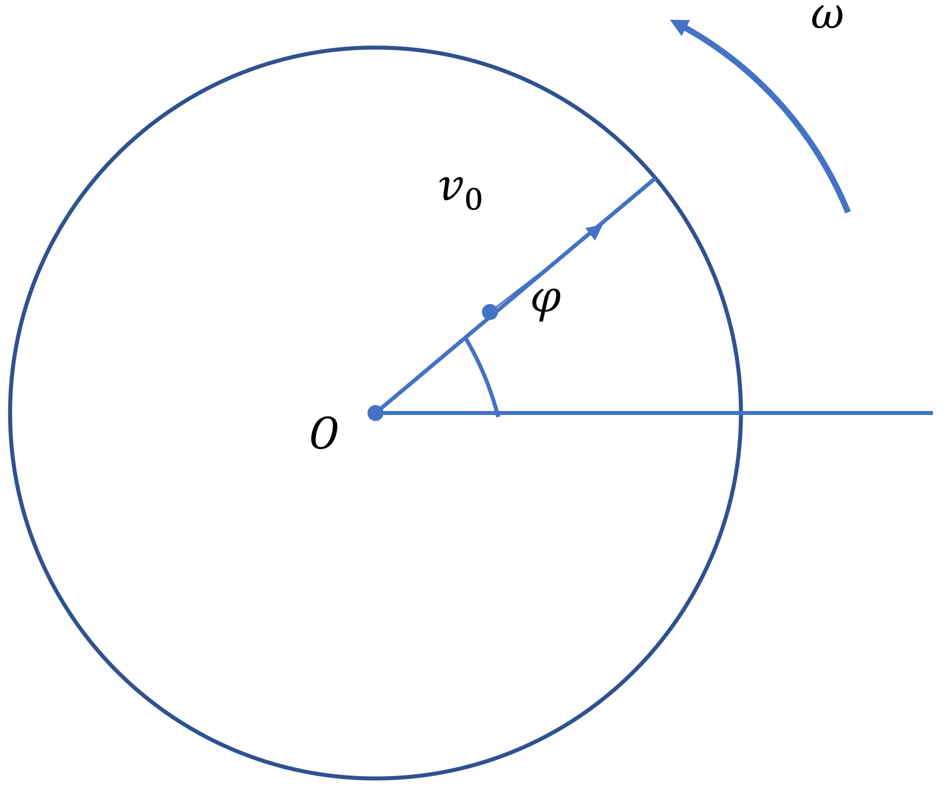
式中C为积分常数，引入初始条件$y = 0$时， $v_y = v_0$，代入上式求出C，得

$$v_y = v_0 e^{-ky}$$

设$v_y = v_0/10$，将$k = 0.4m^{-1}$代入，得

$$y = 5.67m$$

6. 有一圆盘绕通过中心且与盘面垂直的固定轴以匀角速ω转动，如图所示，一质点自中心沿着某一半径方向以匀速v_0向边缘运动。试给出该质点的运动情况。



解:

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} = v_0 \\ v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \rho\omega \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\rho}{dt} = v_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{dt} = \omega \end{cases}$$

两边分别积分并代入初始条件，得

$$\begin{cases} \rho = v_0 t \\ \varphi = \omega t \end{cases}$$

消去t即得到轨道方程，即阿基米德螺线

$$\rho = \frac{v_0}{\omega}\varphi$$

进而还能得到质点的加速度

$$\begin{cases} a_\rho = 0 - \rho\omega^2 \\ a_\varphi = 0 + 2v_0\omega = 2v_0\omega \end{cases}$$