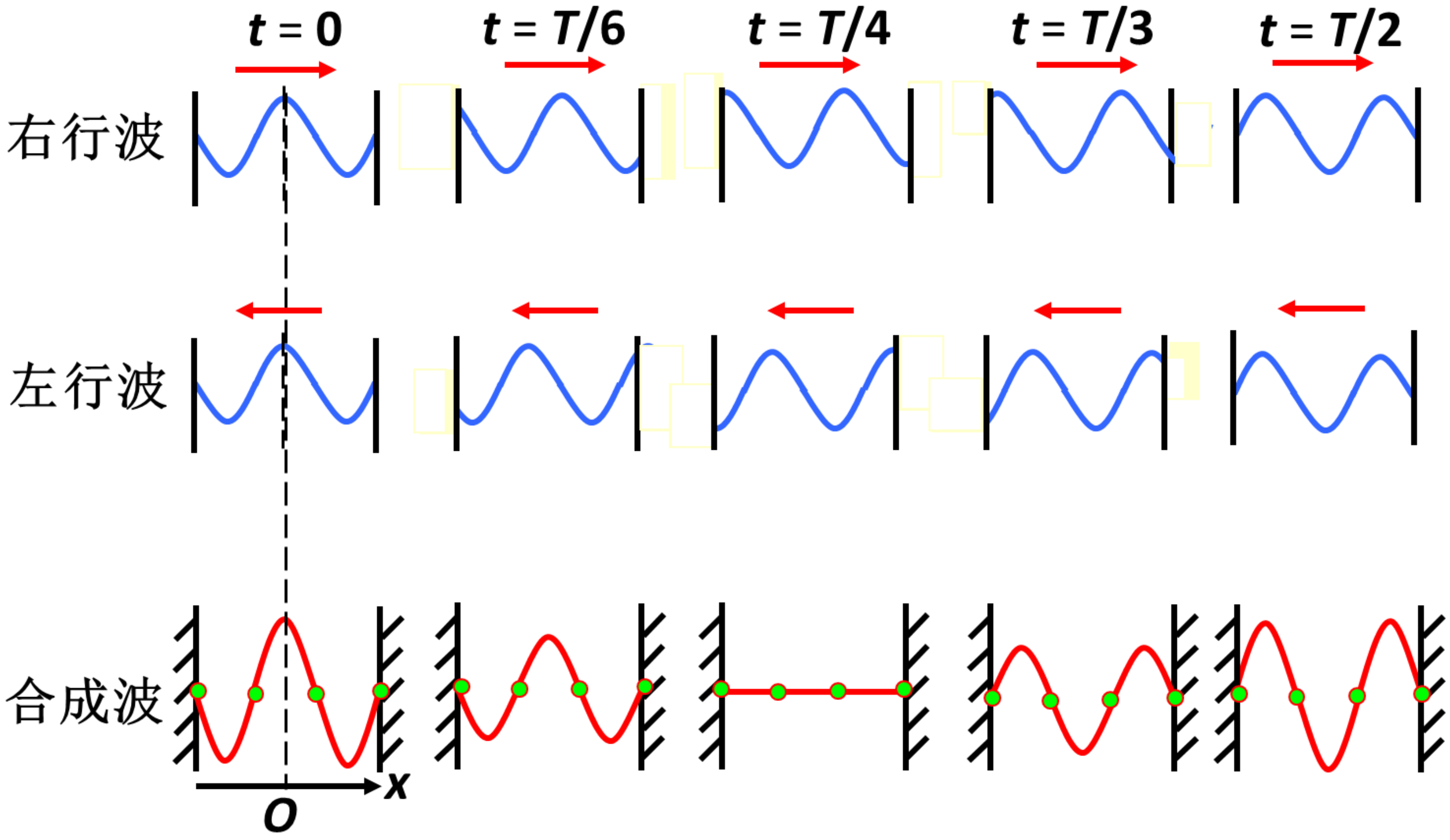
驻波(Standing wave)的产生



驻波的数学表达式

当两列振幅相同，频率相同，振动方向相同的波以相反方向传播时，叠加形成驻波。

表达式

设： $y_1 = A\cos(\omega t - kx)$

$y_2 = A\cos(\omega t + kx)$

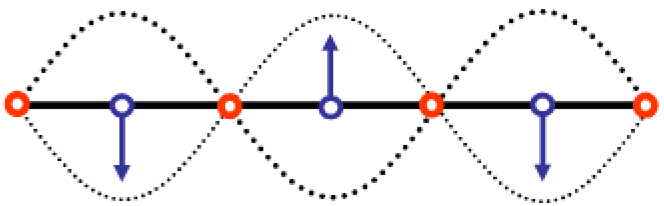
$y = y_1 + y_2 = 2A\cos kx\cos\omega t$

或： $y_1 = A\cos(\omega t - kx)$

$y_2 = -A\cos(\omega t + kx)$

$y = 2A\sin kx\sin\omega t$

关于驻波能量的总结：



各质点同时到达最大位移时，动能为零，势能不为零，波节处形变最大，基本上势能集中在波节附近。

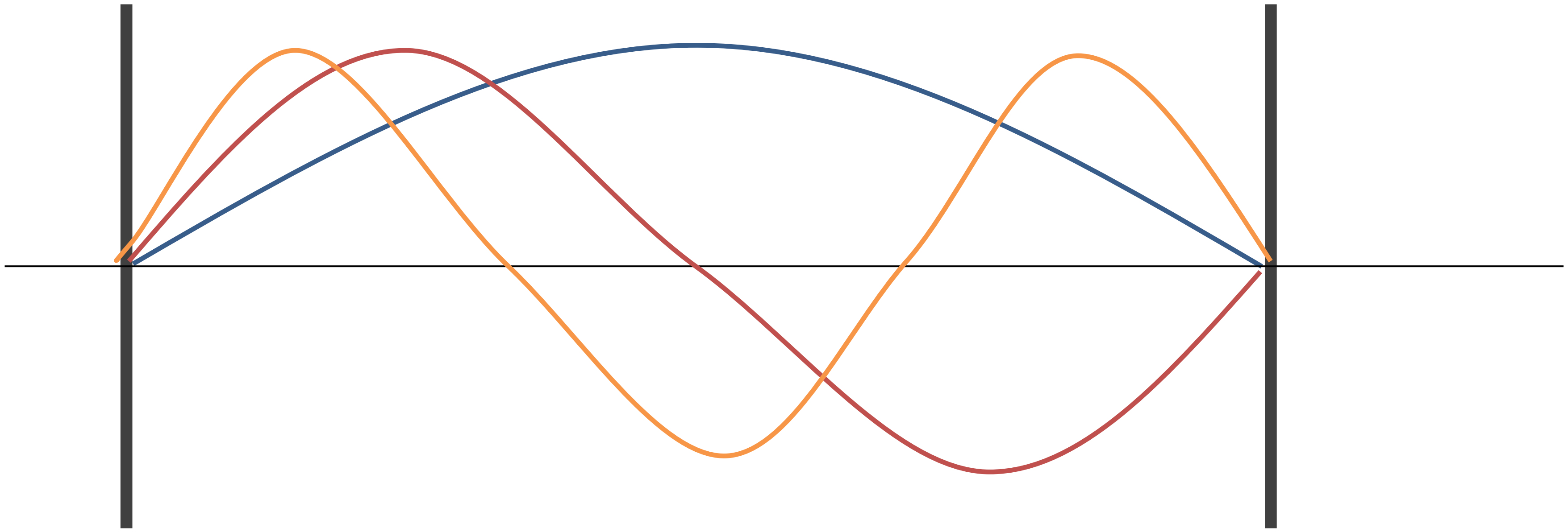
当各质点同时回到平衡位置时，全部势能为零，动能最大，波腹处质点速度最大，基本上动能集中在波腹附近。

其它时刻，则是动能和势能并存。

驻波与行波不同，没有能量的定向传播。它只是介质的一种特殊的振动状态。

驻波的简正模式(normal mode)

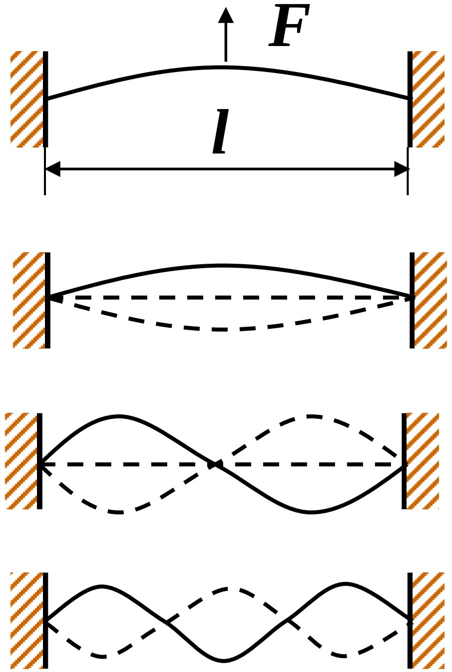
两端固定的张紧弦中产生驻波



或者：电子波函数位于势阱中； 电磁波位于谐振腔内；。。。

实例：乐器的结构与音色

对于两端固定的弦，最低频率叫做**基频**，而其它的频率叫做**泛音**。一种乐器所奏出的特定**音调**(基频)的**音色**，决定于存在的泛音的数目和这些泛音各自的强度。



n=1

n=2

n=3

波长 $\lambda_n = \dfrac{2l}{n}$

波频 $f_n = \dfrac{nv}{2}$

其中 $n = 1,2,3,\cdots$

系统究竟按那种模式振动，取决于初始条件,一般是各种简正模式的叠加.

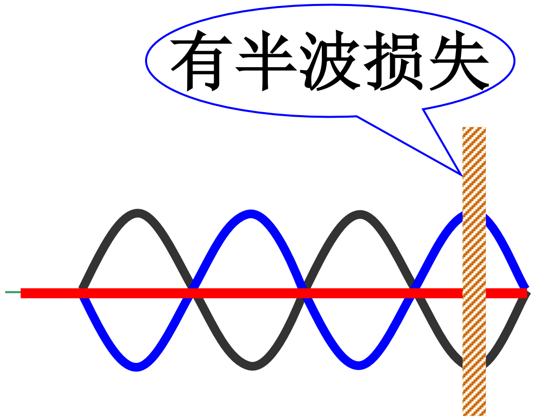
*半波损失

固定端点：反射波与入射波在此端点O的相位变化为π

端点O(x=l)为波节，相位差了π相对于波程差了λ/2，因此

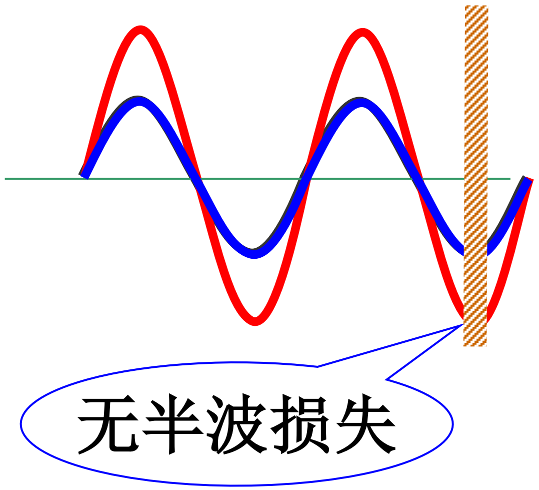
称波在端点具有半波损失。

自由边界：反射波与入射波的干涉是相长干涉，同相的。



波疏介质 波密介质

波密介质 波疏介质



*相速度和群速度

两列不同频率波的叠加：

$$e^{i(\omega_1 t-k_1 x)}+e^{i(\omega_2 t-k_2 x)}$$

$$=\underbrace{e^{\frac{1}{2}i[(\omega_1+\omega_2)t-(k_1+k_2)x]}}_{\text{以平均频率与平均波数行进}}\underbrace{\{e^{\frac{1}{2}i[(\omega_1-\omega_2)t-(k_1-k_2)x]}+e^{-\frac{1}{2}i[(\omega_1-\omega_2)t-(k_1-k_2)x]}\}}_{\text{调制振幅}}$$

当这两列波的频率相差很小时，即 $(|\omega_1-\omega_2|<<\omega_1,\omega_2)$

特征：1）波前速度(或波节速度或快速振动所传播的速度)基本上仍等于ω/k；

2）振幅得到调制，传播程度并不等于w/k而是

$$V_{\text{调}}=\frac{x}{t}=\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}$$

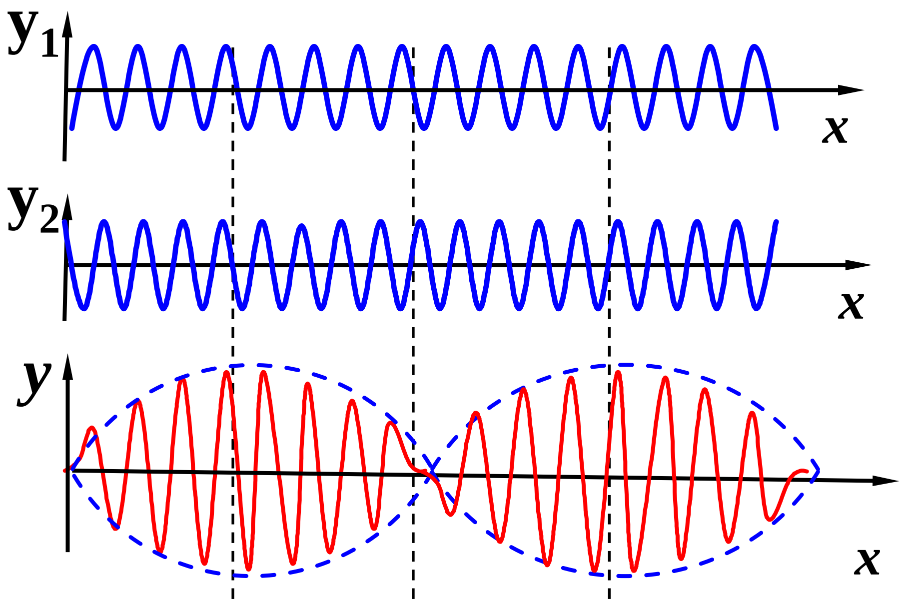
这个调制速度称为群速度，记为V_g。

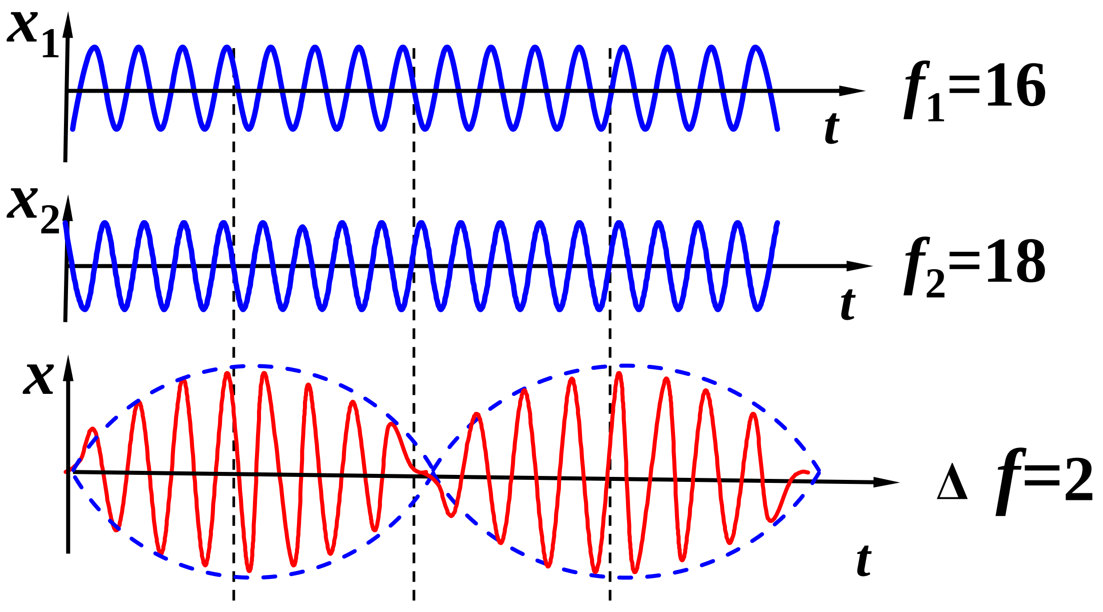
当频率差无限小时，波数差也无限小，在此极限情况下，有：

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}$$

即，对于非常慢的调制和非常慢的拍行进速率不等于波的相速度。

相速度与群速度的区别





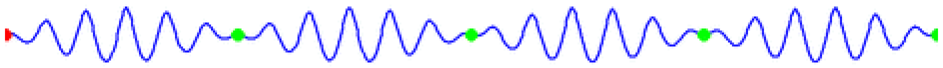
●合成的振动相当于振幅随时间缓慢变化的简谐振动。

●振动频率与原两振动频率几乎相等。

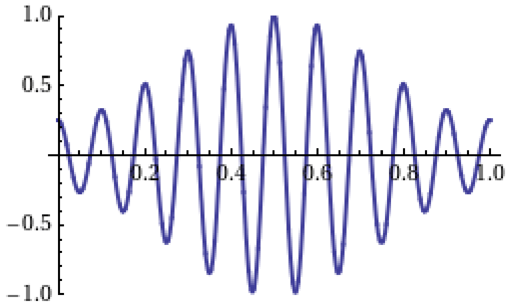
拍——频率较大但相差不大的两个同方向简谐振动合成时产生合振动振幅周期性变化的现象.

拍频——单位时间内振动加强或减弱的次数.

$$\omega_{拍} = |\omega_{20} - \omega_{10}| \qquad f_{拍} = |f_2 - f_1|$$



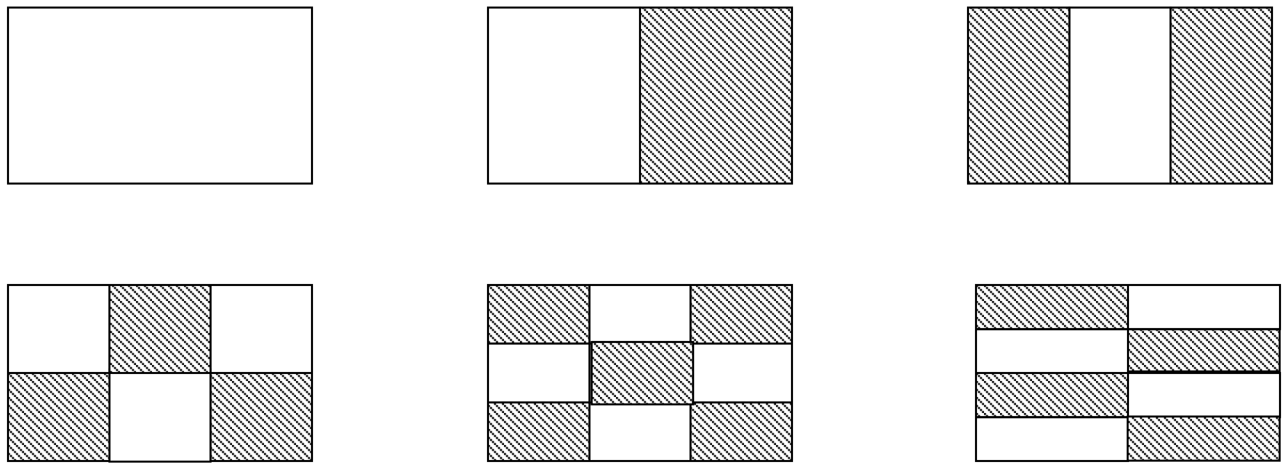
绿点-群速度（能量最小处）
红点-相速度（振幅最大，相位为0处）



群速度向右，相速度向左

*二维驻波

板和膜的振动，波在边界往复的反射形成驻波.



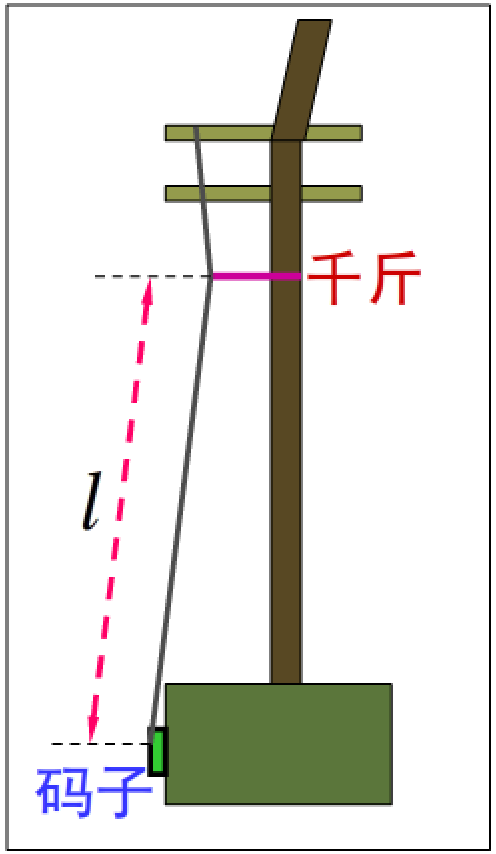
矩形膜上的二维驻波，阴影部分和明亮部分反相，两者的交线为波节.

例题：钢琴最高音的频率是最低音的150倍。如果最高音的弦长5.0cm，而最低音的弦线密度与最高音的一样，且弦上的张力也一样，请问最低音的弦长应为多少？

解：因为两根弦的线密度相同，张力也相同，所以在弦中传播的波速也是一样的，所以频率 *f* 仅与弦的长度 *L* 有关，有 $\frac{L_{\mathrm{L}}}{L_{\mathrm{H}}}=\frac{f_{\mathrm{H}}}{f_{\mathrm{L}}}$ ，下标L和H分别表示最低和最高频率。

因此，L_{L}= $L_{\mathrm{H}}\times\frac{f_{\mathrm{H}}}{f_{\mathrm{L}}}$ =5.0×150=750(cm)。

如图二胡弦长$l=0.3\ \mathrm{m}$，张力 $T=9.4\mathrm{N}$. 密度 $\rho=3.8\times10^{-4}\ \mathrm{kg/m}$. 求弦所发的声音的基频和谐频.



解：弦两端为固定点，是波节.

$$l=n\frac{\lambda}{2}\quad n=1,2,\cdots$$

频率 $f=\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{n\,v}{2l}$　　波速 $v=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

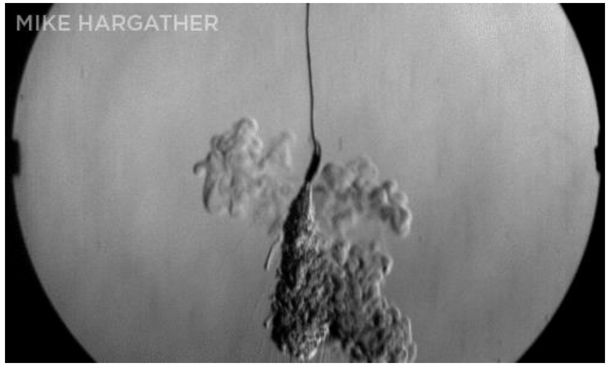
基频　$n=1$　$f_1=\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}=262\ \mathrm{Hz}$

谐频　$n>1$　$f_n=\dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

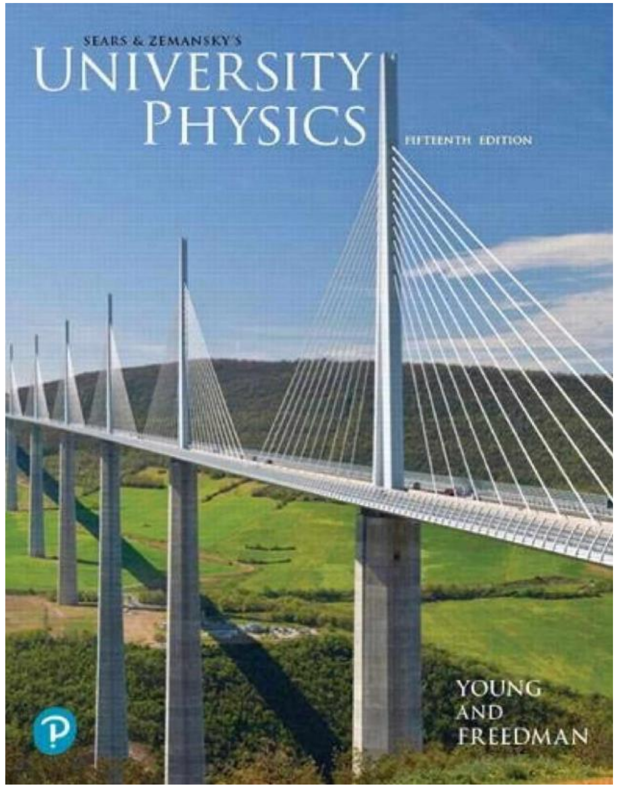
普通物理I PHYS1181 第14讲

声波和听力
Sound and hearing

拍手时的声波



鞭炮燃爆的声波

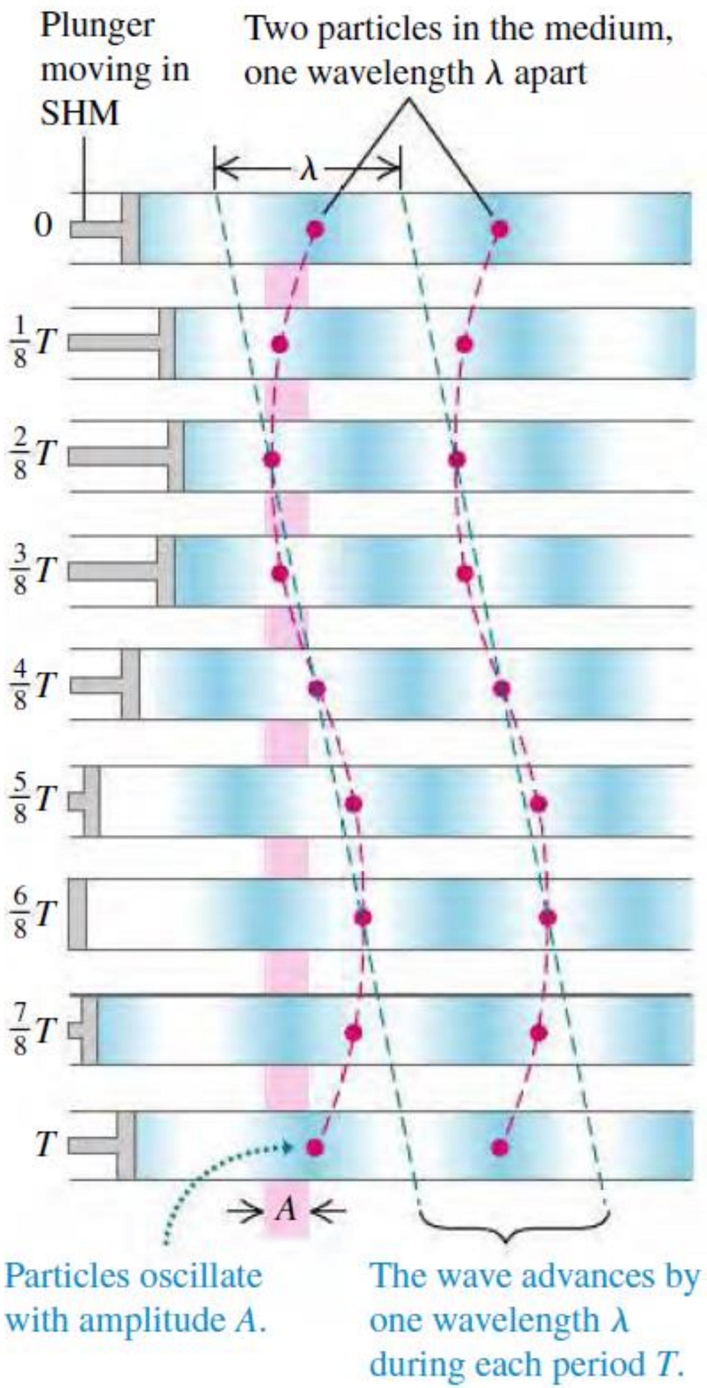


声波的波动方程：

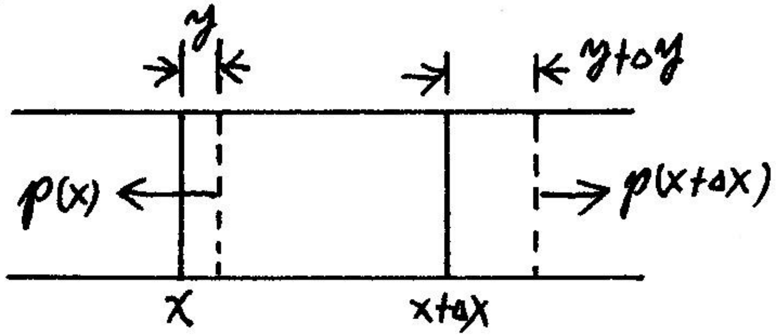
$$y=A\cos(kx-\omega t)$$

声波： 纵波 – 传播方向和振荡方向同向。

考虑对象： y (x, t) – 任意位置小元相对于平衡位置的位移，方向$\hat{x}$



弹性细棒中纵波的波动方程和波速



取弹性棒中的任意一小段棒，此小段棒两端的平衡位置为x和$x+\Delta x$，运动中两端面的位移为y和$y+\Delta y$，应力为 $p(x)$和 $p(x+\Delta x)$

设棒的横截面积为S，材料的杨氏模量为Y。则这小段棒受到的合力为

$$F(x+\Delta x)-F(x)=S[p(x+\Delta x)-p(x)]$$

$$=S\left[Y\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}-Y\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x}\right]=SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

小段棒的质量为$\Delta m=\rho S\Delta x$

由牛顿第二定律 $$SY\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x=(\rho S\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

得

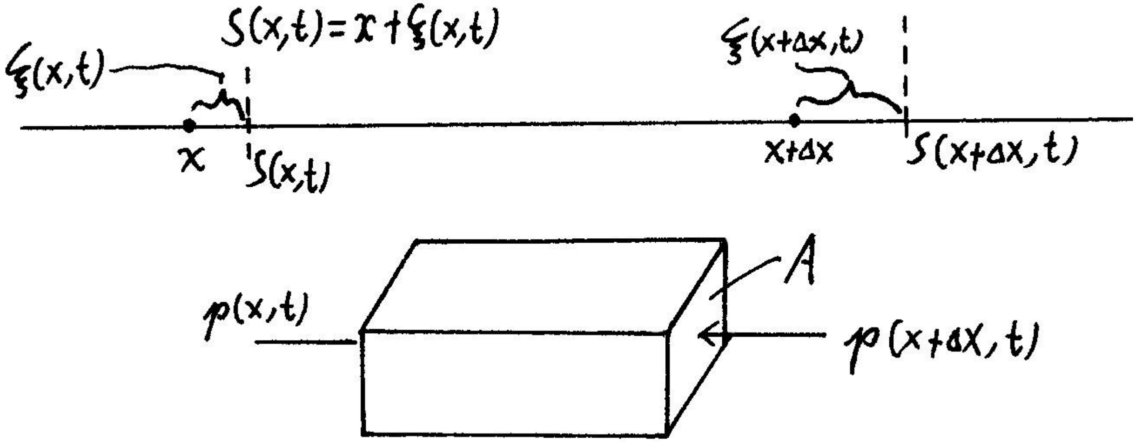
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

这是一维波动方程，声速为

$$V = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

其中 ρ 为棒的密度。

*空气中声波的波动方程和波速



考虑空气微元：x方向(x，x+Δx)，截面积为A的体积元。x处偏离平衡位置ξ(x,t)，(x+Δx)处偏离平衡位置ξ(x+Δx,t)。

断面实际位置为S(x,t)，断面移动速度为 $v=\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial \xi}{\partial t}$

加速度为 $a=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

牛顿第二定律 $[-p(x+\Delta x,t)+p(x,t)]A=\Delta m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

$$\therefore \rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

假设此过程是一个等温过程：pV=const

此微元的体积为

$$V+\Delta V = A\{[(x+\Delta x)+\xi(x+\Delta x,t)]-[x+\xi(x,t)]\}$$
$$= A\{\Delta x+\xi(x+\Delta x,t)-\xi(x,t)\} = A\{\Delta x+\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x\}$$
$$= A(1+\frac{\partial \xi}{\partial x})\Delta x$$

$$p[V+\Delta V] = const \Rightarrow pA\Delta x[1+\frac{\partial \xi}{\partial x}] = const \Rightarrow p[1+\frac{\partial \xi}{\partial x}] = const$$

对x求一次偏导

$$\frac{\partial p}{\partial x}(1+\frac{\partial \xi}{\partial x})+p\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x}\approx -p\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

此微元的受力分析和牛顿第二定律

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx -p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \approx p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

即波动方程

$$\upsilon = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

因为密度和气压都是温度的函数!

纵波的能量和能流

在弹性介质中，介质质元不仅因有振动速度而具有动能，而且因发生形变而具有弹性势能，所以振动的传播必然伴随能量的传递。

一、波的能量

设波在体密度为ρ 的弹性介质中传播, 在波线上坐标**x** 处取一个体积元**dV**, 在时刻**t** 该体积元各量如下:

振动位移：$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{v})$

振动速度：$\upsilon_{\mathrm{y}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\omega(t - \frac{x}{v})$

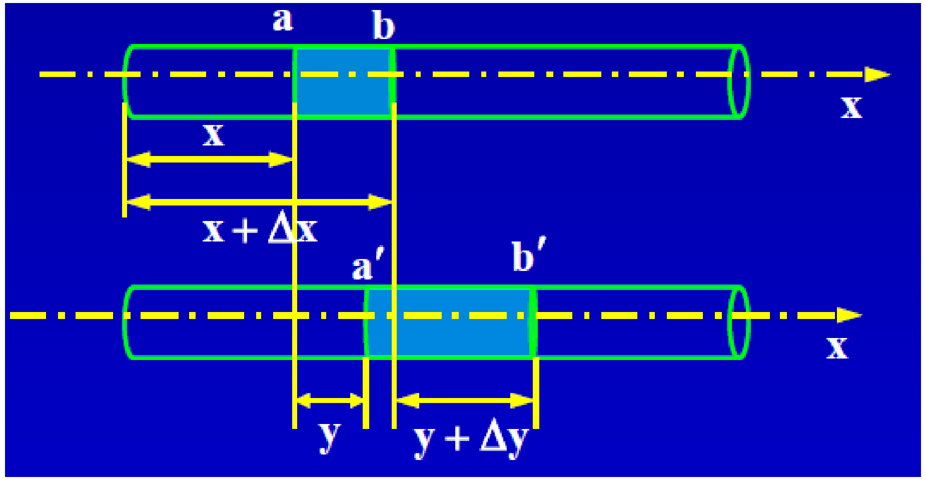
振动动能：$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t - \frac{x}{v})$

关于体积元的弹性势能：

以金属棒中传播纵波为例.在波线上任取一体积为**ΔV=SΔx**，质量为**Δm=ρSΔx**的体积元.利用金属棒的杨氏弹性模量的定义和虎克定律

$$\frac{F}{S}=T=Y\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k=\frac{SY}{\Delta x}$$



$$\therefore dE_p=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2=\frac{1}{2}SY\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

因 $\Delta V=S\Delta x$，$v=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$，　$\frac{\partial y}{\partial x}=A\frac{\omega}{v}\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$

$$\therefore \mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}\rho v^2 \mathrm{d}VA^2 \frac{\omega^2}{v^2}\sin^2\omega(t-\frac{x}{v}) = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

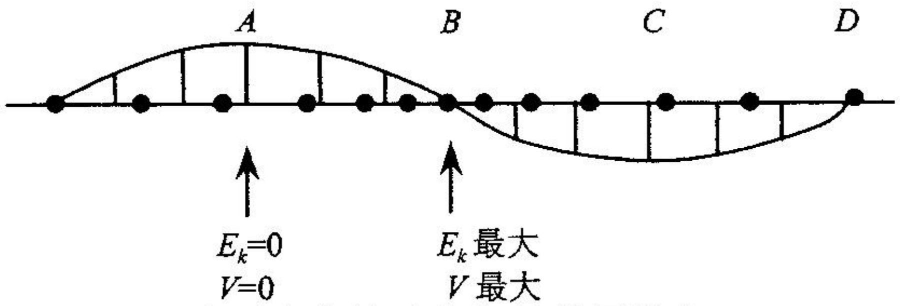
$$\mathrm{d}E_k = \mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$$

体积元总能量：$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p = \rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$

讨论

① $E_k=E_p$ 随时间周期性变化，周期为波动周期的一半。

② 振动中动能与势能相位差为$\pi/2$，波动中动能和势能同相；



波到达之处动能与势能同位相

③ 波动能量随时间变化；振动系统的机械能保持恒定。

二、能量密度

①能量密度: 单位体积介质中的波动能量

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dV}} = \quad \rho\, A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{v})$$

波的能量密度与总能量dE均随时间作周期性变化，且同相.

② 平均能量密度

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon dt == \frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{v})\mathrm{d}t$$

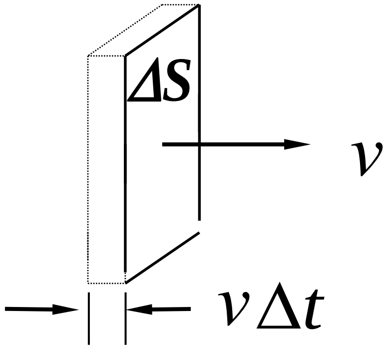
$$= \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$$

波的平均能量密度与振幅的平方成正比，与频率的平方成正比。

三、能流密度(波的强度)

平均能流密度：单位时间通过垂直于波的传播方向上单位面积的平均能量.

$$I=\frac{v\Delta t\Delta S}{\Delta t\Delta S}\bar{\varepsilon}=v\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v$$



平均能流密度是矢量, 方向沿波的传播方向.

$$\vec{I}=\bar{\varepsilon}\vec{v}=\frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\vec{v}$$

简称能流密度，单位: W. m^{-2}

电磁学和电动力学中称为坡印廷矢量.

声学中称为“声强”

在声学中测定声强级(*I.L*)的特定单位为“贝尔”，更常用的单位是“分贝(dB)”，它与贝尔的关系为：**10dB=1**贝尔。

任意声音的强度级用它的“能流密度”按以下方式定义：

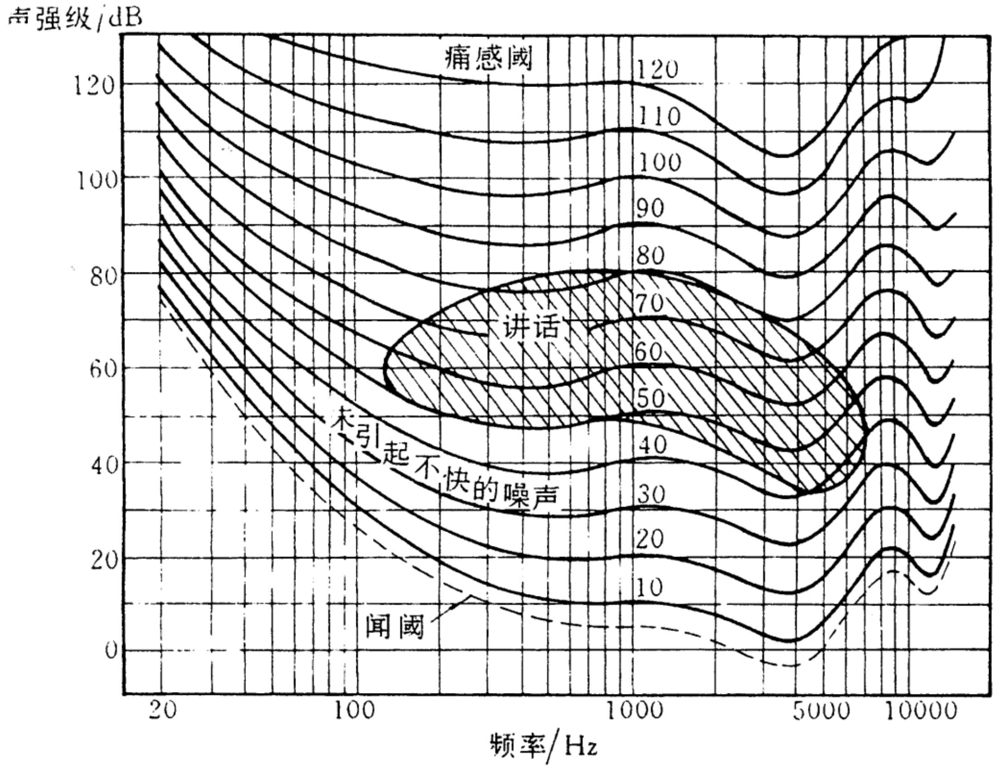
$$I.L = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

其中I_0为参考强度，常取人类可听到的最小平均强度(临界听觉)，$I_0=1.0\times10^{-12}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$。

普通声音的强度等级

声源	P/P_{ref}	I/dB	说明
	$10^0=1$	0	听觉阈值
正常呼吸	10^1	20	很难听到
图书馆	10^2	40	安静
会话	10^3	60	
工厂	10^4	80	
地铁列车	10^5	100	对听觉有危险
摇滚音乐会	10^6	120	痛阈
喷气式飞机起飞	10^7	140	
火箭发射	10^9	180	

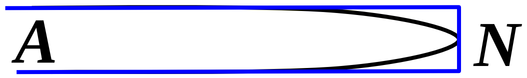
人耳听到的声音也有一定的频率范围(20Hz～20000Hz)，而且对所有能听到的频率也不是同样敏感的，不同频率的声音需要不同的强度听起来才具有同样的音量感觉。



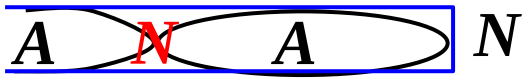
乐器实例：一端封闭的管风琴中空气柱的振动

设管一端封闭，另一端敞开，开端形成波腹，闭端形成波节.固有振动的波长和频率为

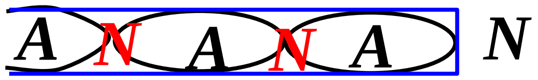
$$\lambda_n = \frac{4l}{n} \qquad f_n = \frac{n}{4l}v \qquad n = 1,3,5,\cdots$$



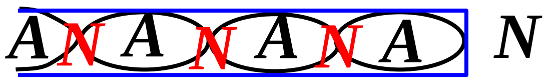
$$\lambda_1 = 4l \qquad f_1 = \frac{1}{4l}v$$



$$\lambda_3 = \frac{4l}{3} \qquad f_3 = \frac{3}{4l}v$$



$$\lambda_5 = \frac{4l}{5} \qquad f_5 = \frac{5}{4l}v$$



$$\lambda_7 = \frac{4l}{7} \qquad f_7 = \frac{7}{4l}v$$

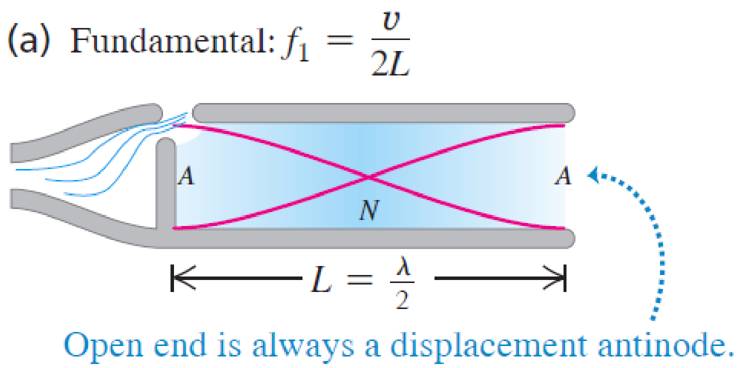
乐器实例：两端开放的管风琴中空气柱的振动

设管两端均开放，开端形成波腹，基本波长和基本频率为：

$$\lambda_1=2L \qquad f_1 = \frac{v}{2L}$$

n次谐频的波长和频率为：

$$\lambda_n=2L/n \qquad f_n = \frac{nv}{2L}$$



多普勒效应

如果波源与观察者之间有相对运动，则观察者接受到的波频率不同于波源的频率，这种现象称为多普勒效应。对弹性波来说，所谓波源和观察者的运动或静止，都是相对于在其中传播的连续介质而言的。

假定波源、观察者的运动发生在二者的连线上。设波源的频率为 f，波长为 λ，在介质中的传播速度为 v.若波源和观察者相对于介质静止时，测得的频率则为

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

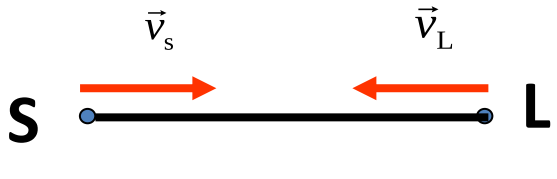
观察者观测到的波速 v' 与观测到的波长 λ' 之比称为观测频率 f'

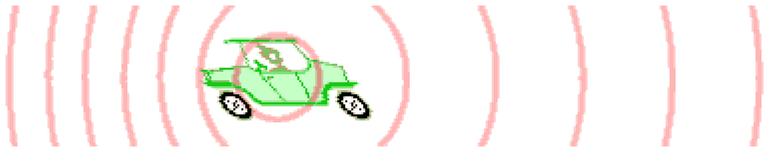
$$f' = \frac{v'}{\lambda'}$$

多普勒效应

当波源S和接收器L有相对运动时，接收器所测得的频率f_L不等于波源振动频率 f_s 的现象。

机械波的多普勒效应





- 参考系：媒质
- 符号规定： **S和L 相互靠近时v_s, v_r为正**
- f_S： 波源振动频率，f: 波的频率，f_L： 接收频率

1. 波源和接收器都静止 (v_S=0，v_L=0)

$$f_L = f = f_s$$

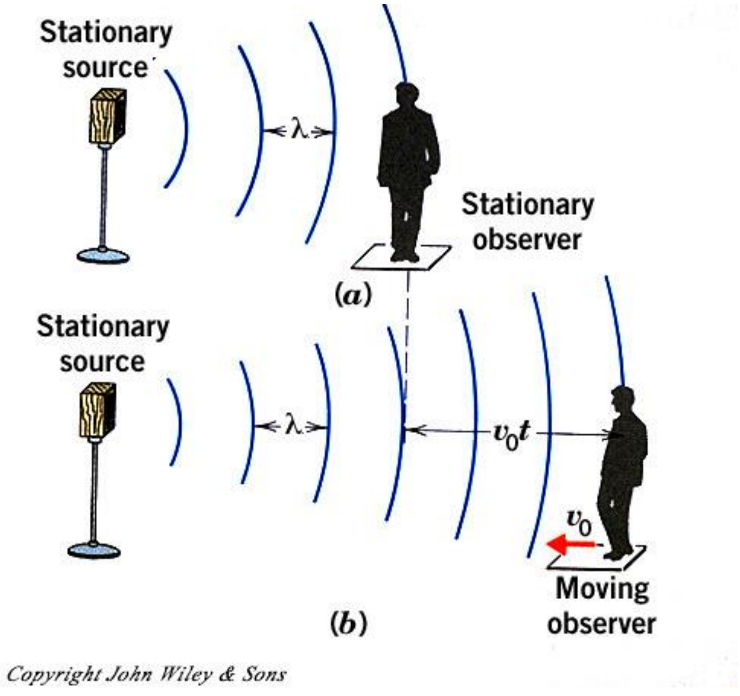
多普勒效应

2. 波源静止，接收器运动(v_s=0)

相当于单位时间内波通过接收器的总距离为 $V + V_L$

单位时间接收到完整波的个数

$$\boxed{f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} = \frac{v + v_L}{v} f_s}$$



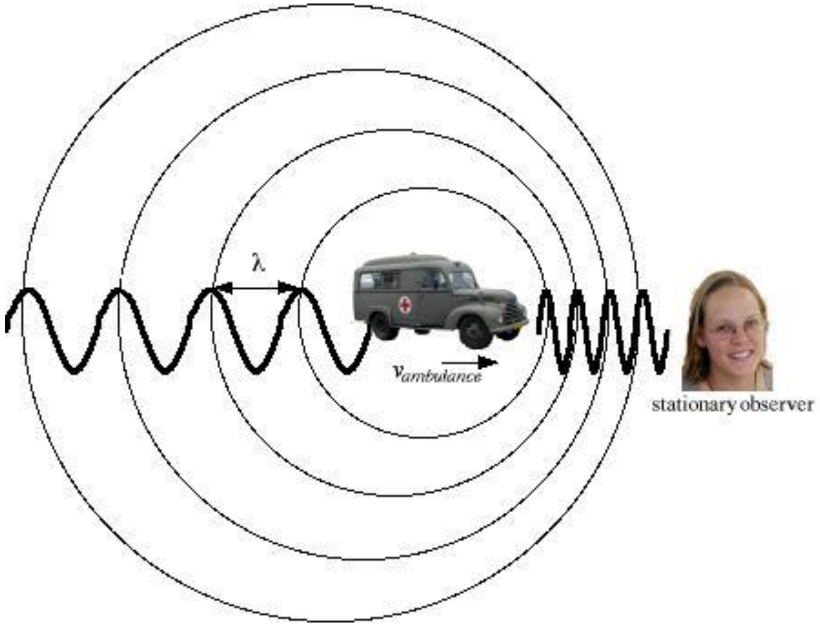
观察者相对波源相向运动，频率增大；观察者相对波源远离运动，频率减小。

多普勒效应

3. 波源运动，接收器静止(v_L=0) → 不等价于接收器向波源运动！介质！

非自由传播，连续受迫振动，波长变化：$\lambda = \frac{v}{f_s} - \frac{v_s}{f_s}$

$$\boxed{f_{\mathrm{L}} = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_{\mathrm{s}}} f_{\mathrm{s}}}$$



波源相对观察者相向运动，频率增大；波源相对观察者远离运动，频率减小。

机械波的多普勒效应

4. 波源和接收器皆运动

$$f_{\mathrm{L}}=\frac{v+v_{\mathrm{L}}}{\lambda'}$$

$$\lambda'=\frac{v}{f_s}-\frac{v_s}{f_s}$$

$$\boxed{f_{\mathrm{L}}=\frac{v+v_{\mathrm{L}}}{v-v_{\mathrm{s}}}f_{\mathrm{s}}}$$

➢若S和 L 的运动不在二者连线上

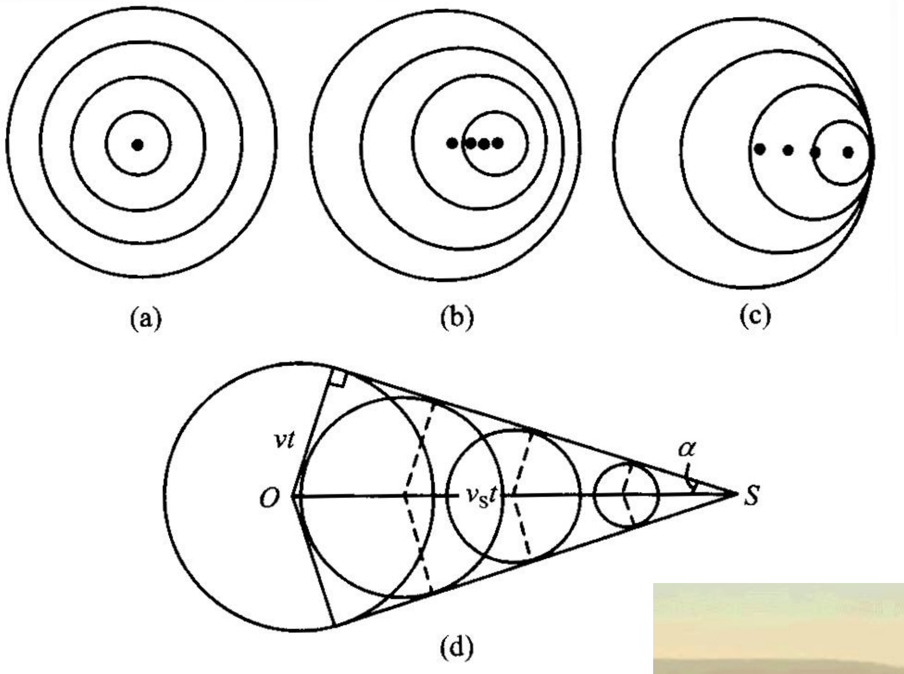
$$f_{\mathrm{L}}=\frac{v+v_{\mathrm{L}}\cos\theta_{\mathrm{L}}}{v-v_{\mathrm{s}}\cos\theta_{\mathrm{s}}}f_{\mathrm{s}}$$

➢有纵向多普勒效应；无横向多普勒效应(不考虑相对论效应)

若波源速度超过波速$v_s>v$

上述计算结果将没有意义，多普勒不再适用。这时波源将位于波前的前方,各波前的切面形成一个圆锥面，称为马赫锥,其顶角满足

$$\sin\alpha=\frac{v}{v_s}$$

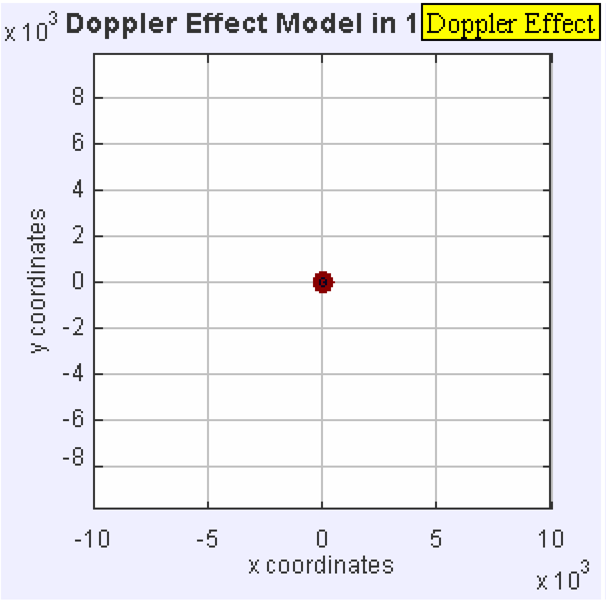


马赫锥

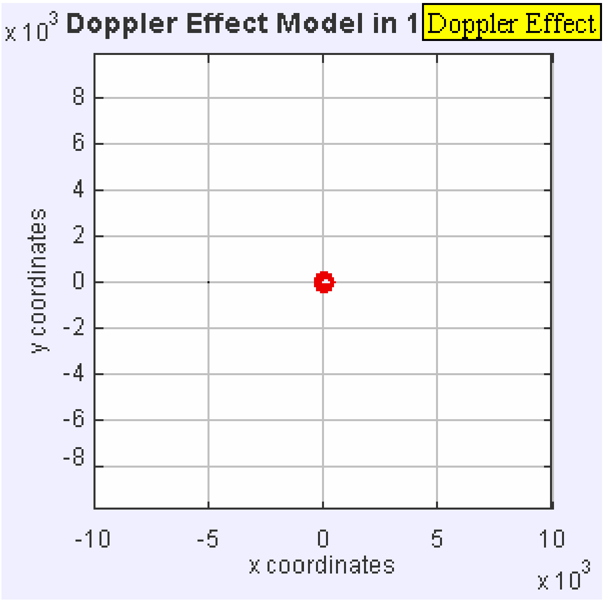
水上快艇造成的弓形水波

子弹在空气中高速运动造成的“冲击波”

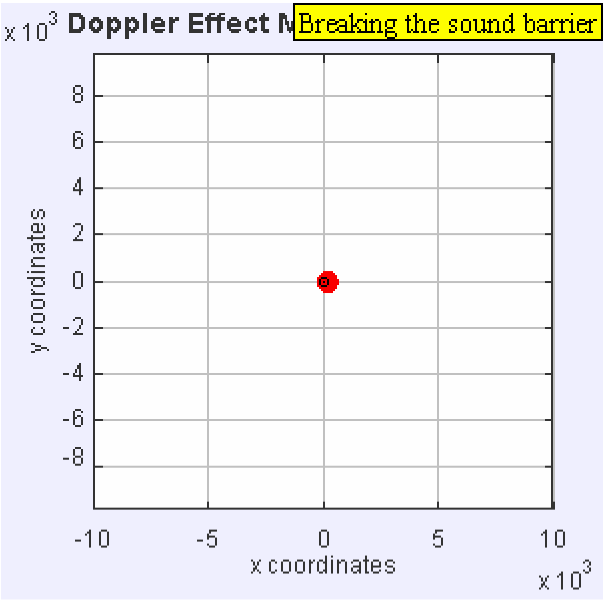
地震中的“超剪切波”（破裂速度超过横波速度



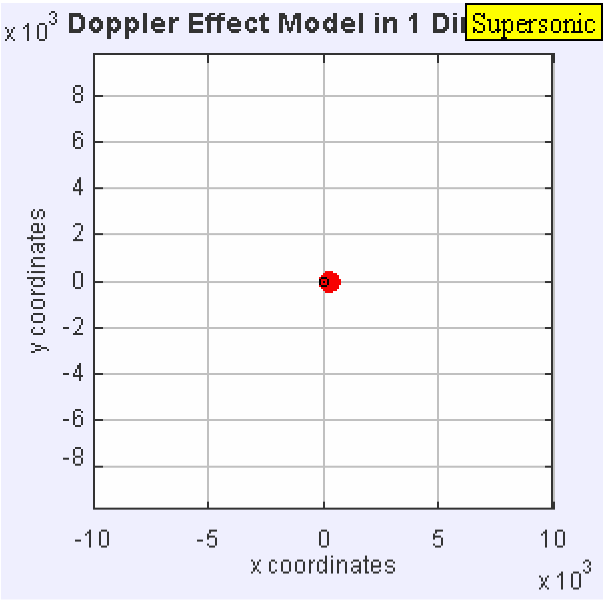
波源相对于介质静止



多普勒效应



“音障”



激波
（Shock Wave)

波源的速度超过了
介质中的波速，
超音速飞机

*光的多普勒效应

声波的多普勒效应不仅和声源与观察者的相对运动有关，还和介质有关系。

光的传播不需要介质，光波的多普勒效应只和光源与观察者的相对运动有关

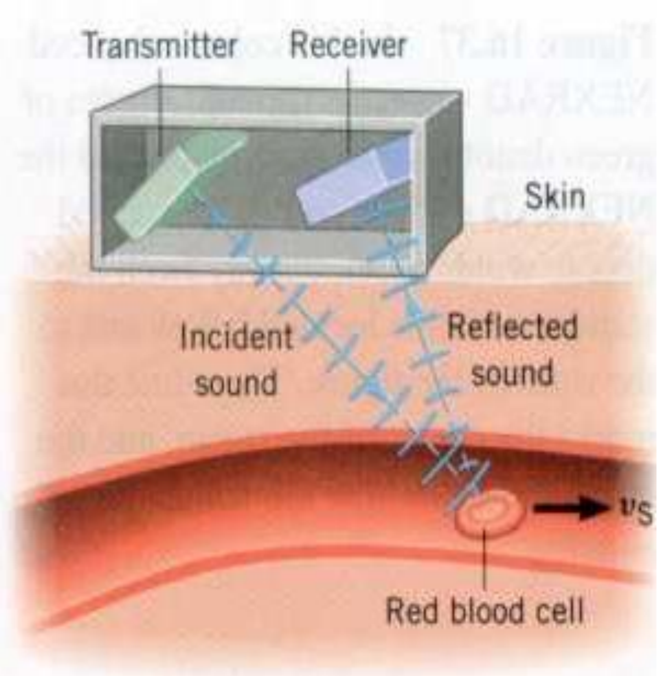
$$f' = f\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

其中v为光源和观察者相互接近的速度

多普勒效应的应用

利用声波的多普勒效应可以测定流体的流速，振动体的振动和潜艇的速度，还可以用来报警和监测车速。在医学上，利用超声波的多普勒效应对心脏跳动情况进行诊断，如做超声心动、多普勒血流仪等.

宇宙膨胀学说



例题：利用多普勒效应监测汽车行驶的速度．一固定波源发出频率为100kHz的超声波. 当汽车迎着波源驶来时. 与波源安装在一起的接受器接收到从汽车反射回来的超声波的频率为110kHz．已知空气中声速u为330m.s^{-1}, 求汽车行驶的速率.

解：第一步: 波向着汽车传播并被汽车接收, 此时波源是静止的. 汽车作为观察者迎着波源运动。设汽车的行驶速度为ν, 则接收到的频率为 $f' = f(u+\upsilon)/u$

第二步: 波从汽车表面反射回来，此时汽车作为波源向着接受器运动, 汽车发出的波的频率即是它接收到的频率ν′, 而接受器此时是观察者, 它接收到的频率为

$$f'' = \frac{u}{u-\upsilon} f' = \frac{u}{u-\upsilon} \frac{u+\upsilon}{u} f = \frac{u+\upsilon}{u-\upsilon} f$$

解得汽车行驶的速度为

$$\upsilon = \frac{f''-f}{f''+f} u = \frac{110-100}{110+100} \times 330 = 56.8\mathrm{km.h}^{-1}$$