Chap11—13

习题课

例1(11.3/6) 计算曲线积分

$$\int_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}.$$

$\boxed{-\pi}$

(1) L为从$A(-a, 0)$沿圆周 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 到$B(a, 0)$, $a > 0$;

(2) L为从$A(-1, 0)$沿抛物线 $y = 4-(x-1)^2$ 到$B(3, 0)$.

$\boxed{-\pi}$

例2 已知积分 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{f(x)+y^2} = A\,(A \neq 0)$, 其中$f(x)$可微, 且

$f(1)=16$, L为任意包围原点的正向分段光滑闭曲线

(1) 求函数 $f(x)$的表达式; $\boxed{16x^2}$

(2) 求积分值 A. $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

例3 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-2xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-yx^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中Σ: $x^2+2y^2+6z^2=1$，取外侧.

$$\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{45}\pi}$$

例4 记球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 的交线

为L, 方向从 z 轴正向看去为逆时针; 它们所围立体为

$$\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2,\quad x^2+y^2+z^2\le 2Rz.$$

(1) 计算曲线积分

$\boxed{0}$

$$I_1=\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-2y\sin x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y$$

(2) 计算曲面积分 $I_2=\iint\limits_{\partial\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S.$

$\boxed{\dfrac{3\pi}{2}R^4}$

例5 设有界闭域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$,其边界$\partial\Omega$为光滑曲面, 函数

$u(x, y, z)\in C^{(2)}(\Omega)$, 记$\boldsymbol{n}^0$为$\partial\Omega$上点$(x, y, z)$处的单位外

法向量, $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

(1) 证明

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^0}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(2) 设 $\Delta u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $B_1=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 1\right\}\subset\Omega$

计算积分

$$I=\iiint_{B_1}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

提示 (1) 先化为第二型曲面积分, 再用Gauss公式

(2) 先证

$$\iiint_{B_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}\rho \iint_{x^2+y^2+z^2=\rho^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

再利用(1)有

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}\rho \iint_{x^2+y^2+z^2=\rho^2} \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} \right)\mathrm{d}S$$

$$\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho \iint_{x^2+y^2+z^2=\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^0}\mathrm{d}S = \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho \iiint_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2} \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例6 设函数 $f(x)$在$[-\pi, \pi]$上连续, 其F氏系数为 a_n, b_n .

判断下列命题的真伪.

(1) 数列$\{a_n\},\{b_n\}$均必收敛于0;

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 均必收敛;

(3) 若 $a_n\ (n=0,1,2,\cdots)$, $b_n\ (n=1,2,\cdots)$ 全为0, 则必有

$$f(x)\equiv 0$$

例7 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ 0, & 1\le x<\pi\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$周期为2π 的余弦级数, 并写出其和函数

在$[0,\pi]$上表达式;

$$\boxed{a_0=\frac{2}{\pi}, a_n=\frac{2\sin n}{n\pi}}$$

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ 的和.

$$\boxed{\begin{matrix}\Vert\\ \dfrac{\pi-1}{2}\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\Vert\\ \dfrac{\pi-1}{2}\end{matrix}}$$

例8 设 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}},\ x\in[-\pi,\pi]$

(1) 求 $f(x)$周期为2π 的F氏级数, 并写出其和函数

在$[-\pi,\pi]$上表达式;

$$\boxed{a_0=1,\ a_n=\frac{(-1)^n}{1+n^2}}$$

(2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+4n^2}$ 的和.

$$\boxed{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{1}{2}}$$

Ex.1 设

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\le x<1, \\ 0, & 1\le x\le \pi, \end{cases}$$

记其周期为2π 的正弦级数的和函数为$S(x)$, 求$S(0)$

及$S(2\pi-1)$的值.

$$\boxed{S(0)=0, S(2\pi-1)=-\frac{e}{2}}$$

Ex.2 设 $f(x)=x, x\in[0,\pi]$

(1) 求 $f(x)$周期为2π 的余弦级数, 并写出其和函数

在$[0, \pi]$上表达式;

$$\boxed{a_0=\pi, a_n=2\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}}$$

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ 的和.

$$\boxed{\Vert \; \frac{\pi^2}{8}} \qquad \boxed{\Vert \; \frac{\pi^4}{96}}$$

例9 设$f(x)$连续, 以2π为周期, 其**F**氏系数为 a_0, a_n, b_n .

(1) 令 $$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{A_0=a_0^2, A_n=a_n^2+b_n^2}$$

求$F(x)$的**F**氏级数(用a_0, a_n, b_n表示);

(2) 若$F(x)$连续可微. 证明Parseval等式:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

提示 先证$F(x)$为偶函数, 再在$x=0$处用收敛性定理.

例10 设函数 $f \in C^{(2)}[0, \pi]$, 且 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$

(1) 记 $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$

求$f'(x)$周期为2π的正弦级数(用a_0, a_n表示);

$$-\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$$

(2) 证明不等式:

$$\int_0^{\pi} [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \geq \int_0^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

提示 对f 的余弦级数和 f'的正弦级数用**Parseval**等式

例11 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \cdot \arctan x}{x^\lambda} \mathrm{d}x \ (\lambda > 0)$

的敛散性(含绝对与条件收敛性).

分析 这是混合型的反常积分，需分成两个积分讨论

$$\text{原积分} = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) \frac{\cos x \cdot \arctan x}{x^\lambda} \mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} I_1 + I_2$$

$$\text{原积分} \begin{cases} \text{条件收敛，} & 0 < \lambda \le 1, \\ \text{绝对收敛，} & 1 < \lambda < 2, \\ \text{发散，} & \lambda \ge 2. \end{cases}$$

例12 设 $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y$，求$f'(x)$.

$$\boxed{\frac{3\sin x^3}{x}}$$

Ex.3 设 $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\cos xy}{y}\mathrm{d}y$，求$f'(x)$.

$$\boxed{\frac{3\cos x^3-2\cos x^2}{x}}$$

Ex.4 设f可微 $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)\mathrm{d}y$，求$F''(x)$.

$$\boxed{3f(x)+2xf'(x)}$$

例13(13.3/4) 计算积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\quad(0<a<b)$$

提示 利用积分号下求导定理. 令

$$I(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+y^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\quad(a\le y\le b)$$

则 $$I'(y)=2y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+y^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\cdots=\frac{\pi}{a+y}$$

故 $$I=I(b)=I(a)+\int_a^b I'(y)\mathrm{d}y=\pi\ln a+\pi\int_a^b\frac{1}{a+y}\mathrm{d}y=\boxed{\pi\ln\frac{a+b}{2}}$$