Chap 12

Fourier分析

引例 1807年, Fourier研究杆状物热流问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T}{\partial t}, & T = T(x,t), \\ T(0,t) = T(l,t) = 0, & t > 0 \quad \text{(边界条件)} \\ T(x,0) = f(x), & 0 < x < l \quad \text{(初始条件)} \end{cases}$$

其中$T = T(x, t)$表示t 时刻杆子x处的温度.

解 设 $T(x, t) = \varphi(x)\,\psi(t)$, 则有

$$\varphi''(x)\psi(t) = \varphi(x)\psi'(t) \;\Rightarrow\; \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda \quad (\lambda > 0)$$

导出 $\begin{cases} \varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0, & \cdots(1) \\ \varphi(0)=\varphi(l)=0, & \\ \psi'(t)+\lambda\psi(t)=0. & \cdots\ (2) \end{cases}$

解方程(1)得 $\varphi(x)=b\sin\sqrt{\lambda}x+c\cos\sqrt{\lambda}x$

由 $\varphi(0)=0$ 得 $c=0$; 由 $\varphi(l)=0$ 得 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$

导出 $\sqrt{\lambda}l=n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

于是 $\varphi(x)=b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

解方程(2)得 $\psi(t)=Ce^{-\lambda t}$，取 $C=1$ **(为什么可以?)**

得一个解 $T_n(x,t)=b_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$

叠加得 $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$

令$t=0$有 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$ 进而确定b_n.

问题 $[0, l\,]$上函数 $f(x)$总能表示成三角函数之和? 即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

右端称为三角级数, 其中a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\ldots)$称为系数

思考 如何确定系数a_0, a_n, b_n?

Chap12 — 1

函数的Fourier级数

12.1.1 周期函数与三角函数系的正交性

一、周期函数 若$g(t)$以T为周期, 作变换

$$x=\frac{2\pi}{T}t \quad 或 \quad t=\frac{T}{2\pi}x$$

则

$$f(x)=g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

是以2π为周期的函数.

二、周期延拓 若f 是定义在$[-l, l]$上的函数, 令

$$F(x)=\begin{cases} f(x-2nl), & (2n-1)l<x<(2n+1)l \\ \dfrac{f(l)+f(-l)}{2}, & x=(2n+1)l \end{cases}$$

则F是**R**上以$2l$为周期的函数, $F(x)=f(x), x\in(-l, l)$.

例1 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le l \\ 0, & -l\le x<0 \end{cases}$$

将其延拓为**R**上周期为$2l$的函数.

三、偶延拓与奇延拓 若f是定义在$[0, l\,]$上的函数, 令

$$f_e(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le l \\ f(-x), & -l\le x<0 \end{cases}$$

则 $f_e(x)$是$[-l, l\,]$上的偶函数, $f_e(x)=f(x),\ x\in[0, l\,]$.

令

$$f_o(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\le l \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & -l\le x<0 \end{cases}$$

则$f_o(x)$是$[-l, l\,]$上的奇函数, $f_o(x)=f(x),\ x\in(0, l\,]$.

四、三角函数系的正交性

定义 函数集合 $\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$

称为**三角函数系**. 其特点: **正交性**

$$1)\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\neq 0\\ 2, & m=n=0\end{cases}\qquad (m,n=1,2,\cdots)$$

$$2)\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}\qquad (m,n=1,2,\cdots)$$

$$3)\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,\mathrm{d}x=0\qquad (m=1,2,\cdots;n=0,1,\cdots)$$

12.1.2 周期函数的Fourier级数

设在$[-\pi,\pi]$上函数$f(x)$可展开为三角级数, 即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

问题 级数的系数a_n, b_n与$f(x)$有什么关系?

结论 利用正交性，可得

Fourier系数公式

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n=0,1,2,\cdots, \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n=1,2,\cdots. \end{cases}$$

可积且绝对可积 函数f满足下两条件之一:

- $f\in R[-\pi,\pi]$;
- 瑕积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛;

定义 设$f(x)$以2π为周期, 且在$[-\pi,\pi]$上可积且绝对可积, 以f的**Fourier**系数a_n, b_n为系数的三角级数称为$f(x)$的**Fourier级数(F氏级数)**, 记为

$$\boxed{f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)}$$

注意 正确理解符号"~"的含义!

12.1.3 Dirichlet收敛定理

定义 设$f:[a,b]\to\mathbf{R}$, 若可将$[a,b]$分为有限个子区间, 使f在每个开子区间内部连续可微, 端点有单侧极限, 及**拟单侧导数**, 则称f在$[a,b]$上**分段可微**.

定理(Dirichlet) 设f以2π为周期, 在$[-\pi,\pi]$上分段可微, 则其F氏级数收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

例2 求 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 的F氏级数并写出和函数

12.1.4 正弦和余弦级数

设$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上可积且绝对可积, 且为奇函数, 则其Fourier系数中$a_n = 0$,

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x}$$

其Fourier级数 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 称为正弦级数.

想一想 余弦级数的定义?

约定 若f仅在$[0, \pi]$(或$[-\pi, 0]$)上可积且绝对可积,

对f作**奇延拓**后函数f_o的F氏(正弦)级数也称为f的

正弦级数, 此时

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x}$$

想一想 仅在$[0, \pi]$上定义的函数的**余弦级数**?

例3 求 $f(x) = x^2 \ (x \in [0, \pi])$ 的正弦和余弦级数.

12.1.5 周期为2l函数的F氏级数

设$f(x)$以$2l$为周期, 在$[-l, l]$上可积且绝对可积. 令

$x=\frac{l}{\pi}t$, 则 $g(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$在$[-\pi,\pi]$上可积且绝对可积, 故

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

从而 $$\boxed{f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\ \ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$

定理(Dirichlet) 设f 以$2l$为周期, 在$[-l, l]$上分段可微,

则其F氏收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\in(-l,l)\\[2ex] \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x=\pm l\end{cases}$$

例4 求$f(x)=|\sin x|$的周期为π的F氏级数并写出和函数

12.1.6 F氏级数的复数形式

由Euler公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \longleftrightarrow \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

可导出 f 的复数形式F氏级数.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega x}\right)$$

其中 $\omega=\frac{\pi}{l}$ 为基频,

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\omega x dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\omega x dx$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}+\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\right)$$

$$\overset{\text{def}}{=}F_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}+F_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

其中

$$F_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$F_n=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x,$$

$$F_{-n}=\overline{F_n}$$

称为f的**Fourier系数的复数形式.**