# Chap 11 — 7

## 保守场与无源场

## 11.7.1 空间曲线积分与路径无关的条件

### ■ 空间区域的连通性

**定义** 设$V$为空间区域, 若$V$中的任意闭曲线都可在$V$中连续收缩为一点, 则称$V$为**一维(曲面)单连通.**

若$V$中的任意闭曲面可在$V$中连续收缩为一点, 则称$V$为**二维(空间)单连通.**

**定理** 设函数$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$在一维单连通区域$V$内有连续偏导数, 则下面四条等价:

**(1)** 在$V$内的任一条分段光滑闭曲线$L$上

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$$

**(2)** 在$V$内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 与路径无关

**(3)** $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$是某三元函数$\varphi$的全微分, 即

$$\mathrm{d}\varphi = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

**(4)** 在$V$内恒成立 $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

## ■ 保守场与势函数

**定义** 设 $\boldsymbol{v}=(P,Q,R)$是连通区域$V$内光滑向量场, 若

**(1)** 在$V$内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 与路径无关

则称$\boldsymbol{v}$为$V$中的**保守场**.

**(2)** $\mathrm{d}\varphi=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$, 则称$\varphi$是$\boldsymbol{v}$的**势函数**, $\boldsymbol{v}$是$\varphi$的**梯度场**, 即$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$.

**(3)** 在$V$内恒有 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$, 则称$\boldsymbol{v}$为$V$中的**无旋场**.

**定理** 设$\boldsymbol{v}=(P, Q, R)$是一维单连通区域$V$内的光滑向量场, 则下面三条等价:

**(1)** $\boldsymbol{v}$为$V$中的保守场;

**(2)** $\boldsymbol{v}$为$V$中有势场(存在势函数);

**(3)** $\boldsymbol{v}$为$V$中无旋场.

**推论** 设$\boldsymbol{v}$为$V$中的保守场, $\varphi$为$\boldsymbol{v}$的势函数, 则有

$$\int_A^B \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\varphi\Big|_A^B=\varphi(B)-\varphi(A)$$

**例1** 证明向量场

$$\boldsymbol{v} = (x^2 - yz)\boldsymbol{i} + (y^2 - zx)\boldsymbol{j} + (z^2 - xy)\boldsymbol{k}$$

为有势场, 并求出其一个势函数.

## 11.7.2 向量势与无源场

**定义** 设 $\boldsymbol{v}$ 为光滑向量场, $V \subset \mathbf{R}^3$. 若存在向量场 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\alpha} = \nabla \times \boldsymbol{\alpha}$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{v}$ 的向量势.

**例2** 设向量场 $\boldsymbol{\alpha} = x^2\boldsymbol{i} - zx\boldsymbol{j} + xy^2\boldsymbol{k}$, 令 $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\alpha}$, 求 $\boldsymbol{v}$ 及其散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$.

**定义** 设 $\boldsymbol{v}$ 为向量场, 若其散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, 则称 $\boldsymbol{v}$ 为无源场.

**定理** 若$\boldsymbol{v}$为光滑向量场, 则$\boldsymbol{v}$ 存在向量势的充要条件

是$\boldsymbol{v}$为无源场.

**命题** 若$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 均为光滑向量场$\boldsymbol{v}$ 的向量势, 则$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$

至多相差一个梯度场.