Chap 11 — 4

向量场在曲面上的积分

11.4.1 双侧曲面及其定侧

双侧曲面 设S为光滑曲面, 指定其上点P处的法向量$\boldsymbol{n}$. 当点P 沿S上任意连续闭曲线不越过S的边界回到起始位置时, 法向量$\boldsymbol{n}$始终保持原来指向.

Möbius带 非双侧曲面(**单侧曲面**).

定侧曲面 双侧曲面S的侧向由其**法向量组**确定. 选定S 的一侧为**正侧**, 记为S^+, 则另一侧为**负侧**, 记为S^-

约定 若曲面S的方程为： $z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$

则其**单位法向量**

$$\boldsymbol{n}^\circ = \pm \frac{(-f'_x, -f'_y, 1)}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}$$

选“+”号时, 则$\boldsymbol{n}^\circ = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 其中

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}} > 0$$

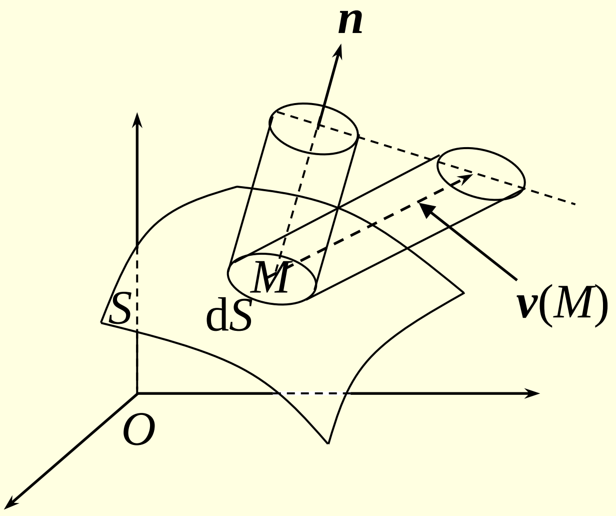
故$\boldsymbol{n}^\circ$与z轴正向夹角$\gamma < 90°$, 指向**上侧**, 规定为S的**正侧**

注 封闭曲面规定其**外侧**为**正侧**

11.4.2 向量场在曲面上的积分的定义与计算

问题 设均匀流体的流速场$\boldsymbol{v}=(P, Q, R)$. 流体自光滑曲面S负侧流向正侧, 求单位时间流体通过S的体积流量

微元法 考察单位时间流体通过曲面微元$\mathrm{d}S$的体积流量



$$\mathrm{d}N=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow N=\iint_{S}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S$$

其中$\boldsymbol{n}^{\circ}$是曲面S上指向正侧单位法向量

定义 设S为定侧曲面, 向量场$\boldsymbol{v} = (P, Q, R)$在$S$上的

第二型曲面积分

(向量形式) $\longrightarrow$ $$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \overset{\text{def}}{=} \iint_S (\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}^\circ)\mathrm{d}S$$

由于**定侧曲面微元**

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}^\circ \mathrm{d}S = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

于是

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S \\ &= \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}}$$

(两型曲面积分关系) (坐标形式)

注 当曲面S封闭时, 积分为流体通过S的**通量**, 记为

$$N=\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

侧向性 第二型曲面积分与曲面的侧向有关, 且

$$\iint_{S^-} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{S^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其它性质同第一型曲面积分, 如线性性和可加性.

注意 (1) 两型曲面积分的形式不同

(2) 当$P=Q=0$时, $\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 仍为第二型

此外, 还有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1 求向量场

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

过zOx面上定向为y轴正向的正方形 $\boxed{2\ln 3}$

$S = \{(x, 0, z) | \ 1 \le x \le 3, \ 0 \le z \le 2\}$的通量.

定理 若定侧光滑曲面S为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

则

$$\boxed{\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_D (PA + QB + RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

注 其中 ± 号选择由 S 指定侧的法向量确定.

特例 1) 若曲面S的方程为 $z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$

$$\boxed{\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_D (-Pf_x' - Qf_y' + R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

合一投影法

2) 当$P=Q=0$, 曲面S为 $z=f(x,y), (x,y)\in D$时

$$\boxed{\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D R(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

当曲面S指定上侧时, 选 $+$号, 指定下侧时, 选$-$号.

3) 当曲面S为母线平行于z 轴的柱面时

$$\boxed{\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0}$$

例2 计算积分 $I=\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\boxed{1)\ 0;\quad 2)\ \frac{2}{15}}$

其中S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$的部分外侧.

1) $z\geq 0$; 2) $x\geq 0, y\geq 0$.

例3 设有流速为 $\mathbf{v}=(x, 2xy, -2z)$的流体. 求单位时间流体经锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$ 上侧流向下侧的流量.

$$\boxed{\frac{5\pi h^3}{3}}$$

例4 求向量场 $\mathbf{v}=(q/r^3)\mathbf{r}$ 通过圆柱面S: $x^2+y^2=a^2$, $-h\le z\le h$ 外侧的通量, 其中$\mathbf{r}=(x, y, z)$, $r=|\mathbf{r}|$.

$$\boxed{4\pi q\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}}$$

例5 求曲面积分

$$\iint_S x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

其中S是上半椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(z\geq 0)$$

并指定上侧.

$$\boxed{\frac{2\pi abc}{5}(a^2+b^2)}$$