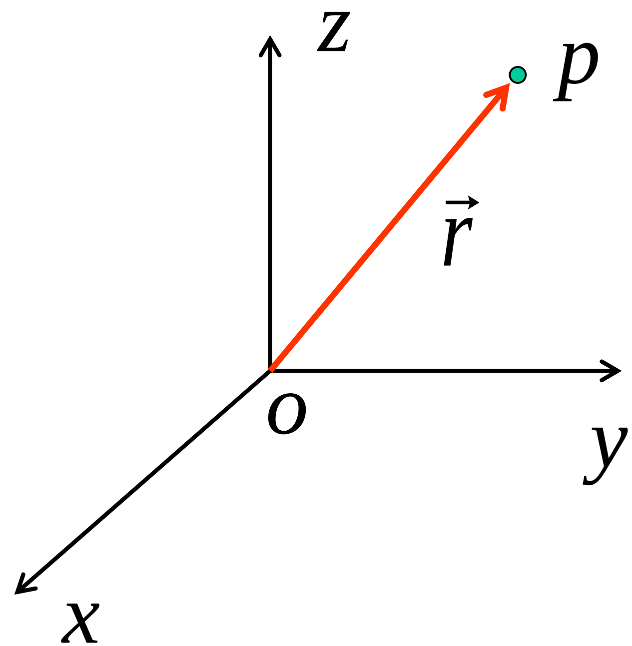
第一章：质点运动学

直角坐标系--位矢

$$\vec{r} = \overrightarrow{op}$$



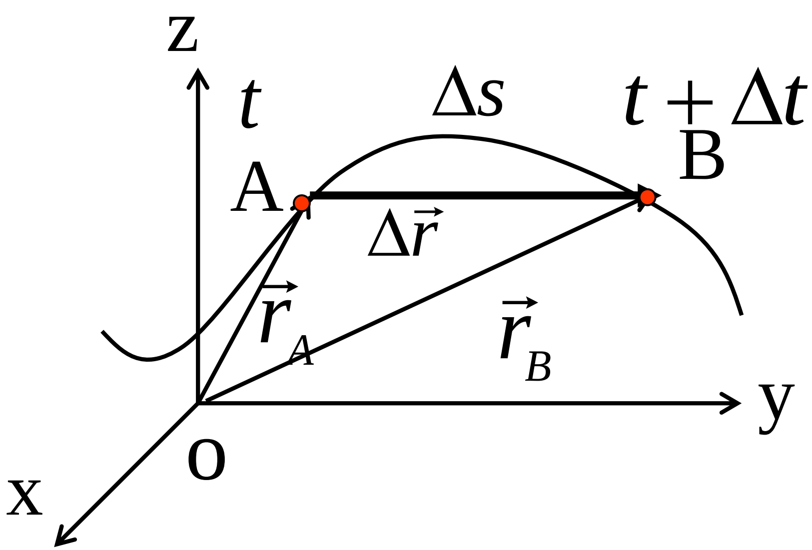
质点的位置与运动时间 (*t*) 有关，位置矢量满足一定的函数关系：

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

——称为质点运动方程

直角坐标系--位 移

在 Δt 时间内质点从A运动到B，则质点在 Δt 时间内的位移定义为：



$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$$

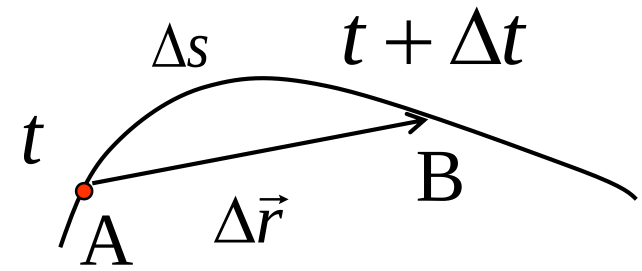
$$\Delta s\neq\left|\Delta\vec{r}\right|$$

当时间间隔很小时：

$$\Delta t\to 0\quad \Delta s=\left|\Delta\vec{r}\right|\Rightarrow ds=\left|d\vec{r}\right|$$

直角坐标系--速 度，加速度

平均速度：$\bar{\vec{v}} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

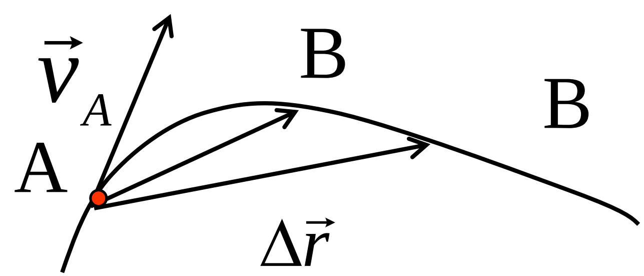


平均速率：$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速度：$\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ 方向：$\Delta t \to 0$时 $\Delta \vec{r}$之方向

$\Delta \vec{r}$沿A点处轨道的切线方向

瞬时速率：$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt}$

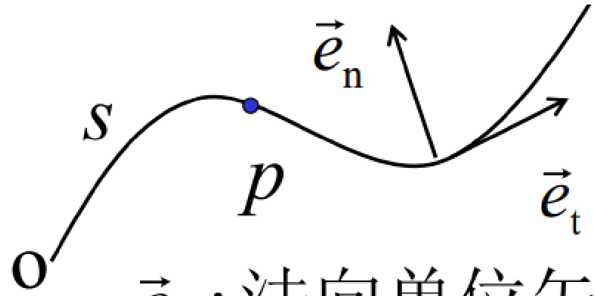


$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

自然坐标系（本性坐标系）

质点运动方程

s :自然坐标



$\vec{e}_{\mathrm{t}}$: 切向单位矢量

$\vec{e}_{\mathrm{n}}$: 法向单位矢量

$$s = s(t)$$

速度:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$

$\Delta \vec{r} \to \Delta s \vec{e}_{\mathrm{t}}$

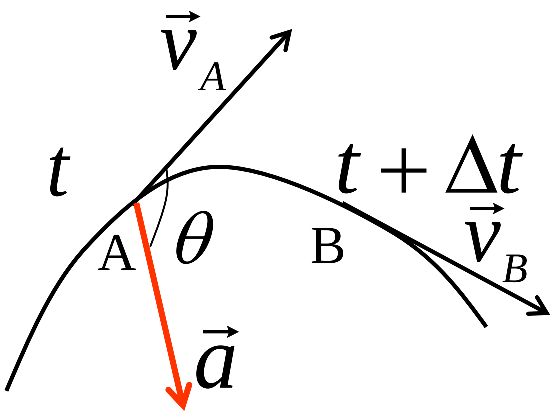
$$= (\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}) \vec{e}_{\mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = v \vec{e}_{\mathrm{t}}$$

速率:

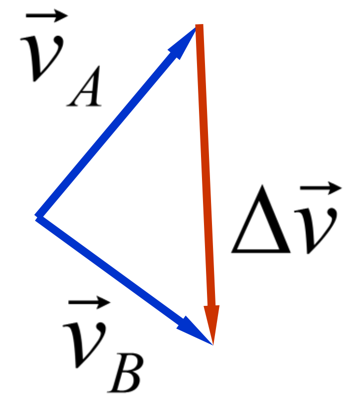
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

自然坐标系--加速度

速度增量： $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$



平均加速度：$\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$



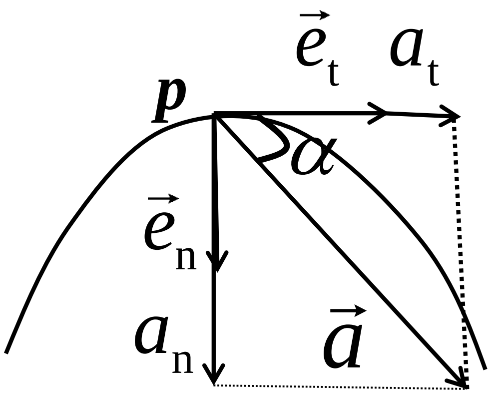
瞬时加速度 $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

自然坐标系--切向加速度和法向加速度

切向加速度分量：a_{t}

法向加速度分量：a_{n}

$$\vec{a} = a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}} + a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$



$$a_{\mathrm{t}} = a\cos\alpha \qquad a_{\mathrm{n}} = a\sin\alpha \qquad a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{n}}^2}$$

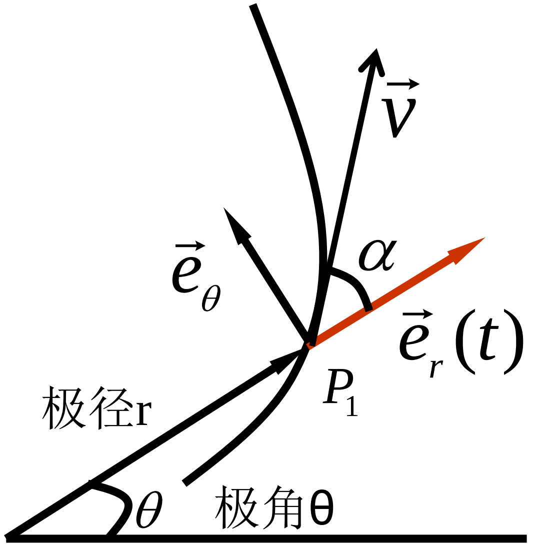
法向加速度分量：a_{n} 改变速度方向 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ 曲率半径

切向加速度分量：a_{t} 改变速度大小 $a_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$

平面极坐标系

质点位置矢量

$$\vec{r}(t)=r(t)\vec{e}_r(t)$$



$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}=\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=-\dot{\theta}\vec{e}_r$$

$$\vec{a}=\ddot{r}\,\vec{e}_r+\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta-r\dot{\theta}\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

径向速度大小变化

角向速度方向变化

角向速度大小变化

径向速度方向变化

思考题：如质点限于在平面上运动, 指出符合下列条件的各应是什么样的运动?

(1) $\dfrac{dr}{dt}=0 \quad \dfrac{d\vec{r}}{dt}\neq 0$ 圆周运动

(2) $\dfrac{dv}{dt}=0 \quad \dfrac{d\vec{v}}{dt}\neq 0$ 匀速率曲线运动

(3) $\dfrac{da}{dt}=0 \quad \dfrac{d\vec{a}}{dt}\neq 0$ 匀速率圆周运动

思考题：

一质点作斜抛运动，　t$_1$代表落地时刻。说明下面积分的意义。

$$\int_0^{t_1} v_x dt$$

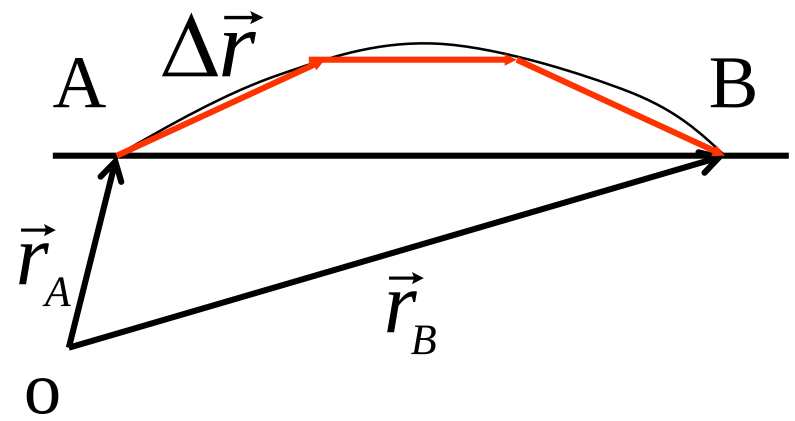
$$= \int_0^{t_1} \frac{dx}{dt} dt = \int_{x_A}^{x_B} dx = x_B - x_A$$

$$\int_0^{t_1} v dt = \int_0^{t_1} \frac{ds}{dt} dt = \int_0^{s} ds = s$$

$$\int_A^B d\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\int_A^B |d\vec{r}| = \int_A^B ds = s$$

$$\int_A^B dr = |\vec{r}_B| - |\vec{r}_A|$$



【例】已知沿直线运动的物体，其加速度为 $\boldsymbol{a}$**=-**$\boldsymbol{kx}$ (k =常数)，$x = 0$ 时，$v = v_0$

求：速度随坐标的变化关系 $v(x)=?$

解 $\because a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kx,\qquad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kx$

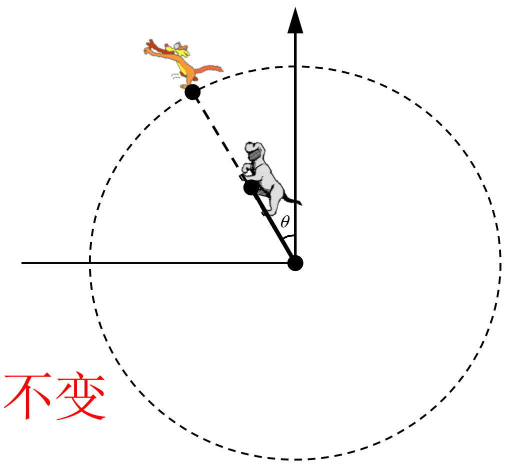
$$\therefore v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kx,\qquad v\mathrm{d}v = -kx\mathrm{d}x$$

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -\int_0^x kx\mathrm{d}x$$

解得：$v^2 = v_0^2 - kx^2$

【例】

狐狸沿半径为*R*的圆周跑，狗从圆心出发，速率都为*v*，圆心、狗、狐狸始终连成一直线。求狗的速度、加速度(用狗离圆心的距离*r*表示)和轨道方程（θ=0时r=0）

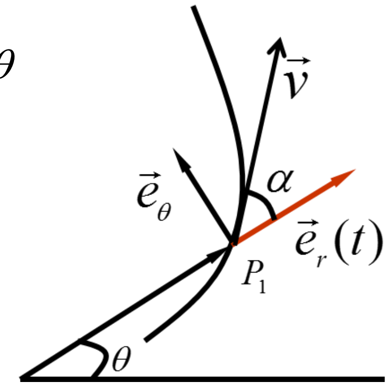


狐狸和狗的角速度相同，狐狸圆周运动 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{v}{R}$

极坐标系，狗有横向和径向速度，径矢在变，总速率保持不变

$$v_\theta=r\omega, v_r=\sqrt{v^2-v_\theta^2}=\sqrt{v^2-r^2\frac{v^2}{R^2}}$$

$$\vec v=\dot r\vec e_r+r\dot\theta\vec e_\theta$$



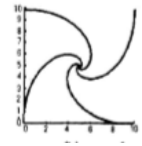
狗的横向和径向加速度

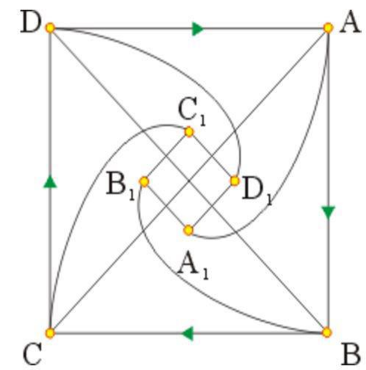
$$a_\theta=2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2},\quad a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$=2\frac{v^2}{R^2}\sqrt{R^2-r^2}\qquad\qquad =-2r\frac{v^2}{R^2}$$

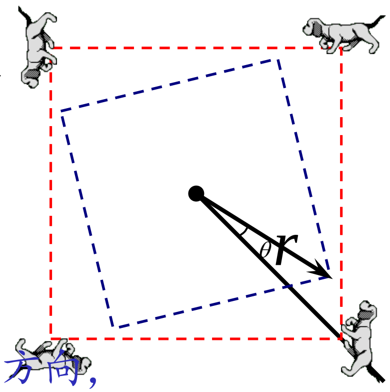
轨道方程 $\dfrac{dr}{d\theta}=\dfrac{v_r dt}{\frac{v}{R}dt}=\sqrt{R^2-r^2}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^r\frac{dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=\int_0^\theta d\theta$ $\Rightarrow$ $r=R\sin\theta$

【例】 等角螺线（对数螺线）





四只狗开始位于边长为 l 的正方形四个顶点上，A始终朝着B，B朝着C，C朝着D，D朝着A，且追击速率v保持不变，求开始时狗的加速度、相遇的时间和轨道方程。



分析1：自然坐标系

经过时间dt追击速率不变，说明只有向心加速度改变运动方向，

运动轨迹为只变方向，不变速率的曲线运动；

狗的曲率半径为所处正方形的边长

法向加速度分量：a_n 改变速度方向 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$ 曲率半径

初始加速度 $a_t=0$ $a=a_n=v^2/l$

切向加速度分量：a_t 改变速度大小 $a_t=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$

分析2：极坐标系，四只狗始终成一正方形，以正方形中心为极点，连接初始正方形顶点建立极轴

速度与径矢的夹角始终为135°

最终在中心相遇，A点

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}l$ $v_r=v\cos 45^\circ$ ➡

$$t=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}l}{v\cos 45^\circ}=\frac{l}{v}$$

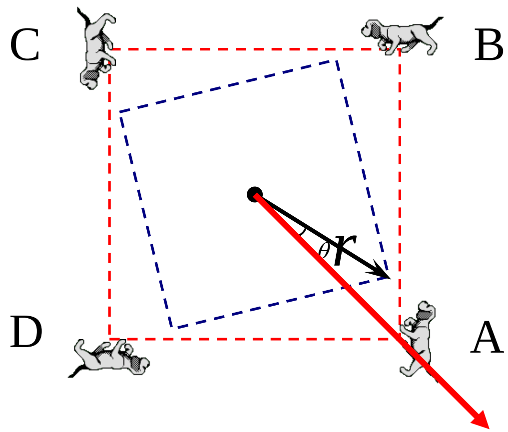
$$\frac{dr}{d\theta}=r\frac{v_r}{v_\theta}=-r \quad \Rightarrow \quad r=\frac{\sqrt{2}}{2}le^{-\theta}$$

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

参考链接： **http://www.guokr.com/article/67148/**

【例】 等角螺线（对数螺线）

四只狗开始位于边长为 l 的正方形四个顶点上，A始终朝着B，B朝着C，C朝着D，D朝着A，且追击速率v保持不变，求开始时狗的加速度、相遇的时间和轨道方程。



极坐标系，四只狗始终成一正方形，以正方形中心为极点，连接初始正方形顶点建立极轴

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$
$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

速度与径矢的夹角始终为135°，速率v不变，以A点为例。

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\frac{\sqrt{2}}{2}v$$

$$\frac{dr}{d\theta} = r\frac{v_r}{v_\theta} = -r \qquad r = \frac{\sqrt{2}}{2}le^{-\theta} \qquad \theta = -\ln\frac{r}{\frac{\sqrt{2}}{2}l}$$

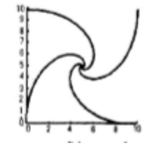
$$a_r = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{1}{2}\frac{v^2}{r}$$

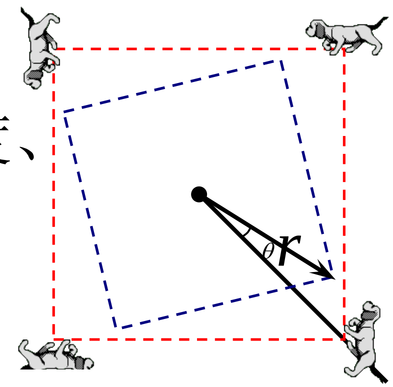
开始时狗的加速度 $a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

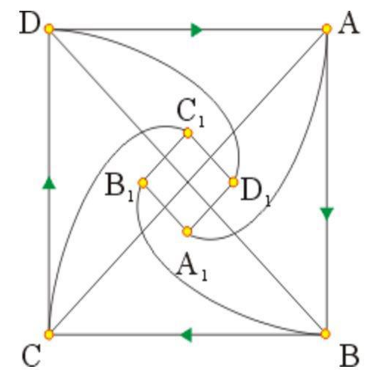
参考链接： **http://www.guokr.com/article/67148/**

【例】 等角螺线（对数螺线）



四只狗开始位于边长为 l 的正方形四个顶点上，A朝着B，B朝着C，C朝着D，D朝着A追击速率v保持不变，求开始时狗的加速度、相遇的时间和轨道方程。





一般而言，若一曲线在每个点 P 的切向量都与某定点 O 至此点 P 所成的向量 $\overrightarrow{OP}$ 夹成一定角，且定角不是直角，则此曲线称为一等角螺线（equiangular spiral），O 点称为它的极点（pole）。

沿径矢的分速度不变 → 相遇的时间

$$t=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}l}{v\cos 45^{\circ}}=\frac{l}{v}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=r\frac{v_r}{v_\theta}=-r \quad\Rightarrow\quad r=\frac{\sqrt{2}}{2}le^{-\theta}$$

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

参考链接： **http://www.guokr.com/article/67148/**