Chap 10

多变量函数的重积分

Chap 10 — 1

二重积分

10.1.1 平面图形的面积

设平面点集$D\subset[a, b]\times[c, d]$. 作矩形分割$T$, 记$D$内的及与$D$相交的小矩形面积和分别为$\sigma^-{}_T(D)$和$\sigma^+{}_T(D)$.

注 分割越细, $\sigma^-{}_T(D)$越大(有上界), $\sigma^+{}_T(D)$越小(有下界)

定义 设$D\subset[a, b]\times[c, d]$. 作矩形分割$T$, 若

$$\lim_{|T|\to 0}\sigma^+{}_T(D)=\lim_{|T|\to 0}\sigma^-{}_T(D)$$

则称D为**Jordan可测集**. 极限值称为D的**测度**(或**面积**).

注意到 $0 \le \sigma^{+}{}_{T}(D) - \sigma^{-}{}_{T}(D) \le \sigma^{+}{}_{T}(\partial D)$

故当∂D为**零测集**时, 则D可测.

曲顶柱体 设D为可测有界闭集. 以D为底, 曲面

$S: z = f(x, y)$为顶, ∂D为准线, 母线平行于Oz轴的

柱面为侧面的立体.

问题 如何求此曲顶柱体的体积?

设$D \subset [a, b] \times [c, d]$. 令$f(x, y) = 0$, $(x, y) \in [a, b] \times [c, d] \backslash D$.

(1) **分割**: 取$[a, b]\times[c, d]$的分割T:$\{x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_m\}$

得小矩形D_{ij}, 其面积记为$\Delta\sigma_{ij}$.

(2) **求和**: 当D_{ij}很小时, 其上的小曲顶柱体的体积用平顶柱体近似. 任取 $(\xi_i,\eta_j)\in D_{ij}$, 则有总体积

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}.$$

(3) **取极限**: 记 $|T| = \max\limits_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \operatorname{diam}\{D_{ij}\}$, 则有

$$V = \lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}.$$

✓ 用类似思想可求面密度不为常数的平面薄板质量.

10.1.2 二重积分定义

设$f(x, y)$在可测有界闭集$D\subset[a, b]\times[c, d]$上定义. 令$f(x, y) = 0, (x, y)\in[a, b]\times[c, d]\backslash D$. 若对$[a, b]\times[c, d]$的$\forall$矩形分割$D_{ij}$及$\forall\ (\xi_i, \eta_j)\in D_{ij}, (i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$,

总有 $$\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij} = I.$$

其中 $|T|=\max\limits_{1\le i\le n, 1\le j\le m}\mathrm{diam}\{D_{ij}\}$, 则称$f(x,y)$在$D$上**可积**, I称为$f(x,y)$在D上的**二重积分**, 记为 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $\iint$为**积分号**, D为**积分区域**, $f(x,y)$ 为**被积函数**,

$\mathrm{d}\sigma$为**面积元素**, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}$ 称为**Riemann和**.

■ 几何、物理意义

◆ 以有界闭集D为底, 以曲面S: $z = f(x,y)$为顶的曲顶柱体体积

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

◆ 形状为D, 面密度为$\mu(x,y)$的平面薄板质量

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

■ 可积的条件

必要条件 若f 在D上可积, 则 f 有界.

充要条件 设 f 在D上有界. 则 f 可积 $\Leftrightarrow$

(I) $\overline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \underline{\iint_{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(II) $\forall \varepsilon > 0, \exists$分割$T$: $\sum_T \omega_{ij} \Delta\sigma_{ij} < \varepsilon$,其中$\omega_{ij}$为$f$ 在D_{ij}上振幅.

充分条件 (I) 若 $f \in C(D)$, 则 f 可积.

(II) 若 f 有界且间断点为零测集, 则 f 可积.

10.1.3 二重积分的性质

设以下性质中出现的积分均存在

性质1 (线性) 设α, β是常数, 则

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质2 (可加性) 若D分成内部不交的子集D_1, D_2, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质3 $\iint_D 1\mathrm{d}\sigma = A_D$ (D的面积)

性质4 (单调性) 若$f(x, y) \le g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

推论 (1) 若$f(x, y) \ge 0$, 则$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \ge 0$.

(2) (估值不等式) 若$m \le f(x,y) \le M$, 则

$$mA_D \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le MA_D.$$

(3) (绝对值不等式) $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$

性质5 (**中值定理**) 设D是连通有界闭集, $f(x, y) \in C(D)$,

则$\exists (\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta) A_D .$$

10.1.3 二重积分的计算

定义 设 $f:[a,b]\times[c,d]\to \mathbf{R}$. 固定 $x\in[a,b]$, 若存在

首次积分 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 且 φ 在 $[a,b]$ 可积, 则称

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

为 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上先 y 后 x 的**累次(二次)积分**, 也记为

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

想一想 先 x 后 y 的累次积分的定义?

问题 二重积分与二次积分的关系?

定理 设$f(x, y)$在$[a, b]\times[c, d]$可积, 且$\forall x\in[a, b]$, 存在

首次积分 $F(x)=\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$, 则

$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y}$$

试一试 另一情形 $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$

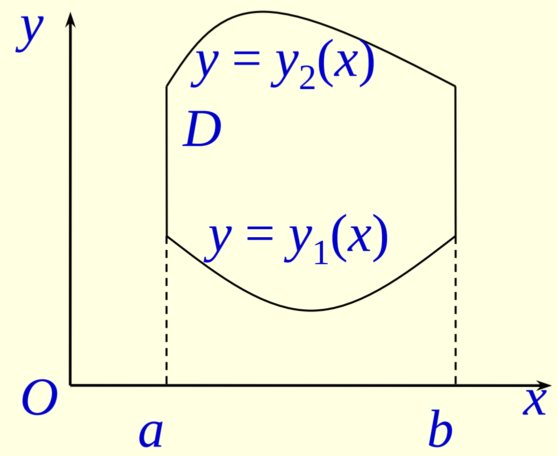
推论1 若$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$连续, 则有

$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x}$$

推论2 若f在x**型区域**$D=\{(x,y)|a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$

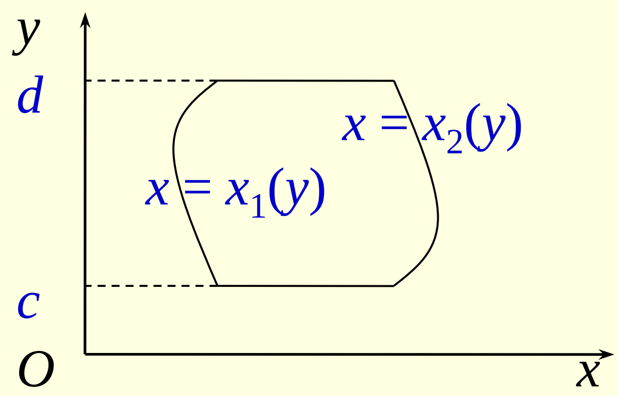
连续, 则有

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y}$$



试一试 y型区域情形

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x}$$



注 面积元素 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

几何直观 过x处且垂直x轴的平面截曲顶柱体得

曲边梯形, 其面积 $A(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$

故曲顶柱体体积

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

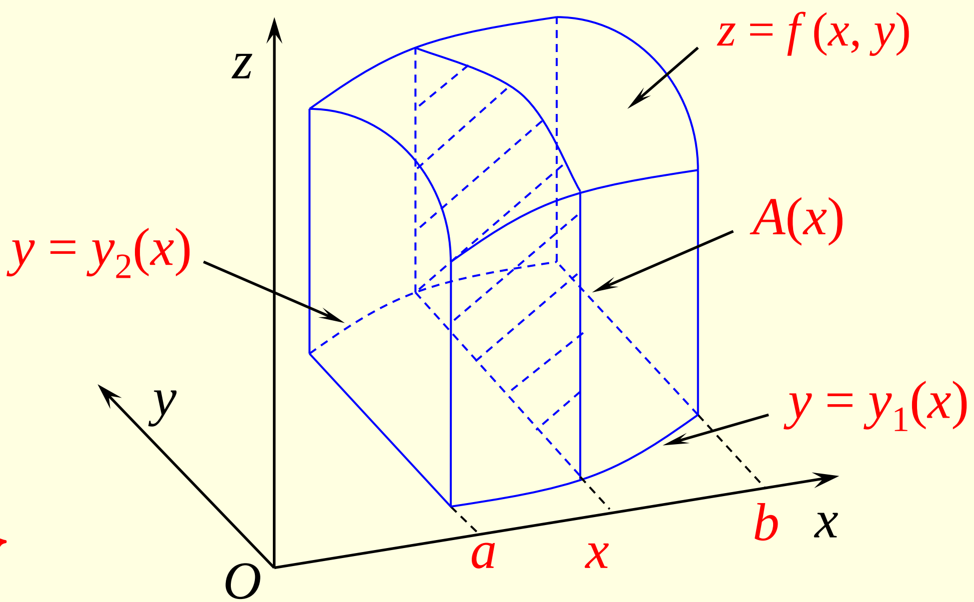
$$\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{def}}{=}\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

↑

先y后x二次积分



结论 设 $f \in C[a,b], g \in C[c,d]$, 则有

$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_c^d g(y)\mathrm{d}y}$$

例1 计算 $\iint\limits_{[0,1]^2} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例2 计算 $\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,1]} x\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例3 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由抛物线$y^2 = x$与直线 $y = x - 2$ 所围区域.

◆ 直角坐标计算二重积分步骤

- ➢ 画出区域D的草图, 并确定类型;
- ➢ 按所确定的类型表示区域D;
- ➢ 化二重积分为二次积分(注意上、下限);
- ➢ 计算二次积分.

◆ 确定积分区域D类型的原则

- ➢ 对它划分的块数越少越好;
- ➢ 首次积分可以且容易算出.

例4 计算二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$

例5 交换二次积分次序

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

- 交换二次积分次序步骤
  - 将二次积分还原为二重积分;
  - 由积分限确定积分区域D, 并按另一类型表示它;
  - 化二重积分为另一次序的二次积分.

例6 计算二重积分$I=\iint\limits_D (y+y^2\sin^3 x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

其中D是上半圆域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}.$

◆ 用积分区域对称性和被积函数奇偶性简化积分计算

若D关于y轴对称, 记D_1为D中$x\ge 0$部分, 则

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases} 0, & f(-x,y)=-f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,y)=f(x,y) \end{cases}}$$

若D关于x轴对称, 有类似的结果.

例7 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2, y^2\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. (考研试题)

例8 设函数 $f(x)\in C[0,1]$, 且设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$, 计算

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x) f(y) \mathrm{d}y.$$

例9 计算圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与 $x^2+z^2=R^2$

所围立体的体积.

Chap 10 — 2

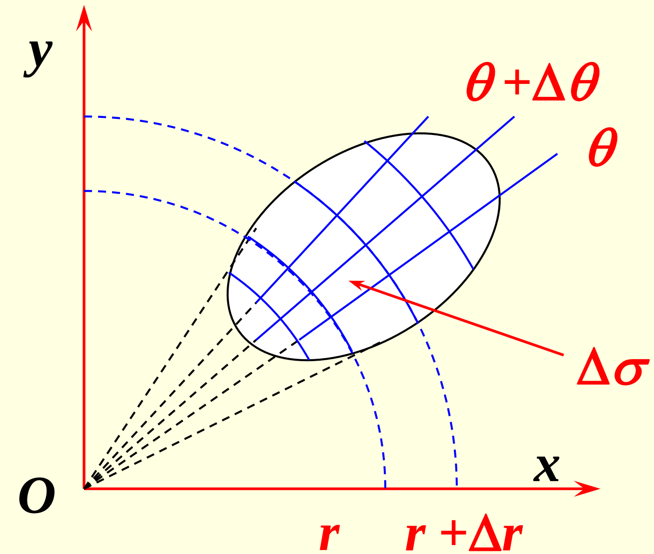
二重积分的换元

10.2.1 极坐标计算二重积分

当积分区域边界曲线或被积函数用极坐标表示简单时，可用极坐标来计算二重积分

考虑面积元素dσ在极坐标下的形式.

用r =常数(圆周族)和θ=常数(射线族)分割区域D, 则小区域面积



$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}[(r+\Delta r)^2\Delta\theta-r^2\Delta\theta]=r\Delta r\Delta\theta+\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad \mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

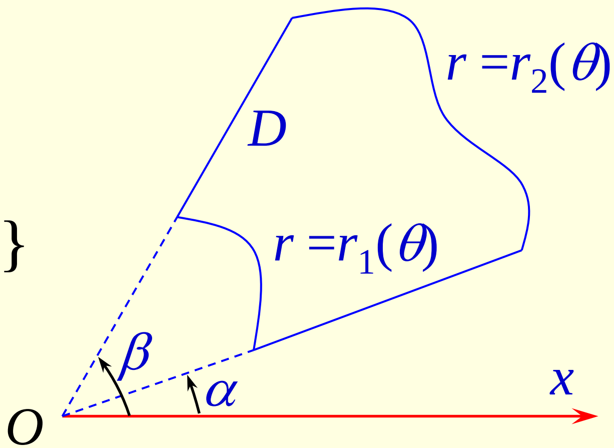
从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

其中D'是D在极坐标下的表示形式.

特别地, 若

$$D' = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$$



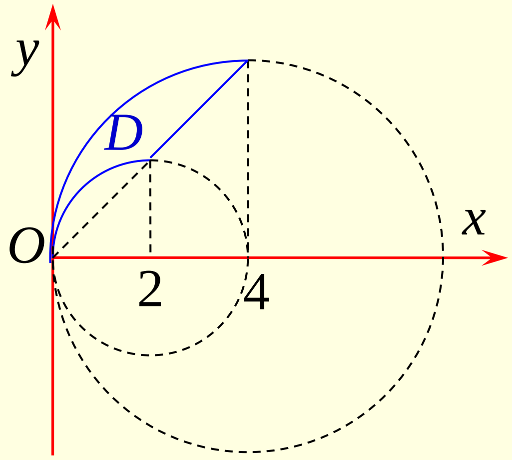
则有

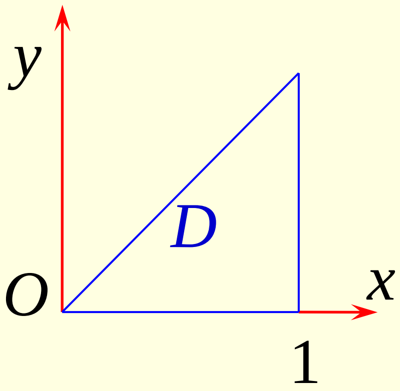
$$\boxed{\begin{aligned}&\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\end{aligned}}$$

例1 将 $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的累次积分, 其中D为

(1) 由$y=x$, 上半圆周 $x^2+y^2=4x$ 及 $x^2+y^2=8x$ 围成.

(2) 由直线$y=x$, $y=0$和$x=1$围成.

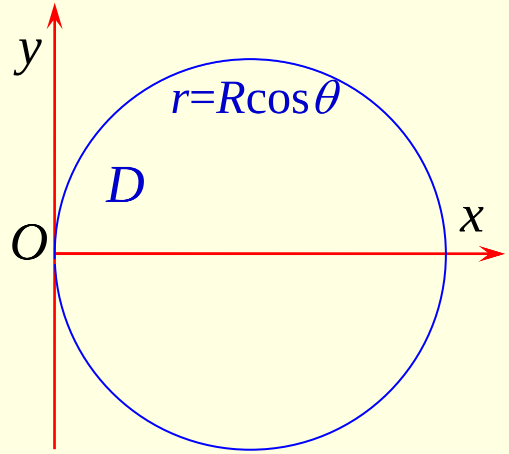


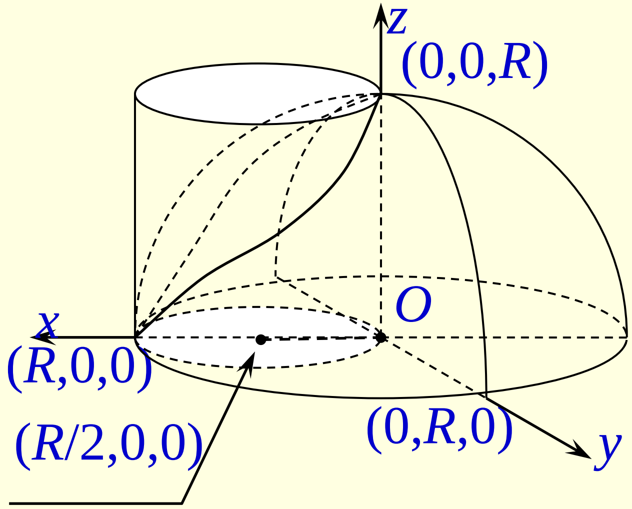


◆ 用极坐标表示积分区域

- 关键: 化积分区域边界为极坐标方程.
- 方法: 将$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$代入边界的直角坐标方程.

例2 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = \pm Rx$ 所割下部分的体积V.





◆ 积分区域边界方程或被积函数含x^2+y^2, 可考虑用极坐标

例3 求球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$

相交部分的体积

例4 求双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$所围图形的面积.

例5 (1) 计算 $I_R=\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D_R:x^2+y^2\le R^2,x\ge 0,y\ge 0$

(2) 计算Poisson积分 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

10.2.2 二重积分的换元

设变换 $\boldsymbol{F}:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 有连续偏导数, 且满足

$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, 又$f(x,y) \in C(D)$, 则

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

其中$\boldsymbol{F}$将D'变为D.

例6 计算积分$\iint_D \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

与坐标轴所围区域.

例7 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中区域$D$为

$$x^2+y^2\le x+y+1.$$

思考 若D 改为 $\dfrac{(x-2)^2}{a^2}+\dfrac{(y+1)^2}{b^2}\le 1$ 结论如何?

例8 计算积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为由曲线$xy=1$, $xy=2$, $y=x$和$y=4x$在第一象限所围区域.

例9 计算积分 $I=\iint\limits_D |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$2x^2-2xy+y^2\le 1$.