Chap 9 — 4

空间曲线与曲面

9.4.1 参数曲线

设参数曲线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad t\in[\alpha,\beta]$$

对应参数t_0点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的**切向量**(指向t增加方向)

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=x'(t_0)\boldsymbol{i}+y'(t_0)\boldsymbol{j}+z'(t_0)\boldsymbol{k}$$

故M_0处**切线方程**

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}}$$

M_0处**法平面方程**(过切点且与切线垂直的平面)

$$\boxed{x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0}$$

◆ **光滑曲线**: 切向量连续变化的曲线.

◆ **逐段光滑曲线**如何定义?

◆ **正则点**: $|\boldsymbol{r}'(t_0)| \neq 0$. **正则曲线**如何定义?

例 证明螺旋线$(a, b > 0)$

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt, \quad t \in \mathbb{R}$$

在每点处的切线和z 轴成定角.

■ 弧长

光滑平面参数曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j},\quad t\in[\alpha,\beta]$$

的弧长

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

光滑空间参数曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad t\in[\alpha,\beta]$$

的弧长

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

■ 弧长参数

正则曲线起点 A 到动点 $M(t)$ 的弧长

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}|\boldsymbol{r}'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau,\quad t\in[\alpha,\beta]$$

该变上限积分的导数

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}=|\boldsymbol{r}'(t)|>0$$

故 $s(t)$ 严格增加, 存在反函数 $t=t(s)$, 因此有**自然方程**

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t(s))\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{r}(s)$$

取微分得 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{r}'(s)\mathrm{d}s$

由于

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{r}'(t)|, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

故有

$$\boxed{\boldsymbol{r}'(s) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}}$$

进而有

$$1 = |\boldsymbol{r}'(s)|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

单位切向量$\boldsymbol{r}'(s)$的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \quad \cos\beta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$$

注意 对弧长参数s的微商记为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}$$

例 求螺旋线

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = kt, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

的弧长.

■ 曲率

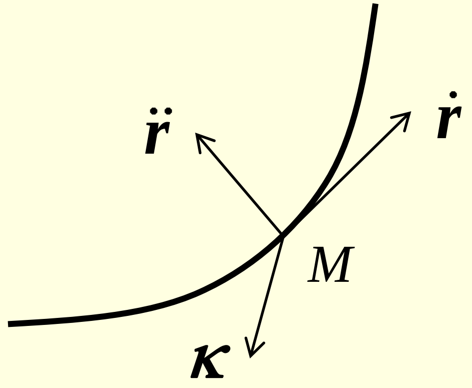
设正则曲线L: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$有二阶连续导数, 则

$$|\dot{\boldsymbol{r}}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = 0$$

结论 切向量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 与 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 总是正交. $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 称为**主法向量**.

而 $\boldsymbol{\kappa} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$ 称为**副法向量**. 且有

$$|\boldsymbol{\kappa}| = |\ddot{\boldsymbol{r}}|$$



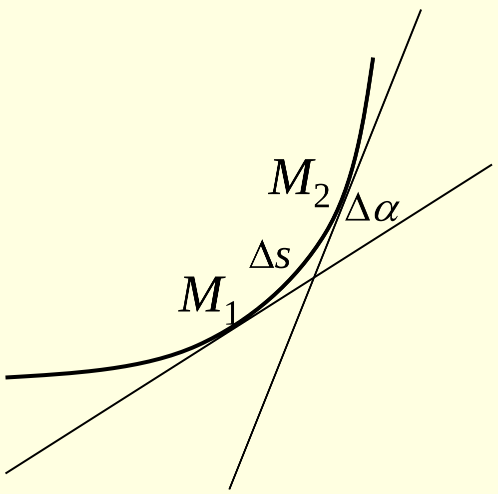
定义 设曲线上弧M_1M_2的长度为Δs, M_1处切线到M_2处

切线的总转角为$\Delta\alpha$，弧M_1M_2的**平均曲率**定义为

$$\boxed{\bar{\kappa} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|}$$

M_1点的**曲率**定义为

$$\boxed{\kappa = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|}$$



结论

$$\kappa = |\ddot{\boldsymbol{r}}| = |\boldsymbol{\kappa}|$$

命题 曲线用参数t 表示时, 有

单位切向量 $\dot{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$

主法向量 $\ddot{\boldsymbol{r}}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|^2}\boldsymbol{r}''(t)+\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right)\right]\boldsymbol{r}'(t)$

副法向量 $\boldsymbol{\kappa}=\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$

曲率 $\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|=\dfrac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$

例 求螺旋线$(a, b > 0)$

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt, \quad t \in \mathbb{R}$$

的曲率.

■ 平面曲线曲率

设xOy面内参数曲线

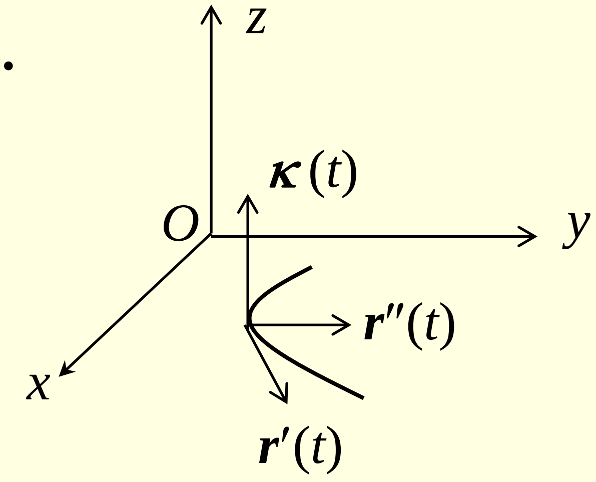
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

副法向量 $$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{3/2}}\boldsymbol{k}$$

其**曲率**定义为

$$\kappa=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}$$

结论 $\boldsymbol{r}''(t)$始终指向曲线的凹侧.



命题 曲线方程为$y=f(x)$时

$$\boldsymbol{\kappa}=\frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{3/2}}\boldsymbol{k}$$

$$\kappa=\frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{3/2}}$$

例 求摆线$(a > 0)$

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in (0, 2\pi)$$

的曲率.

9.4.2 参数曲面

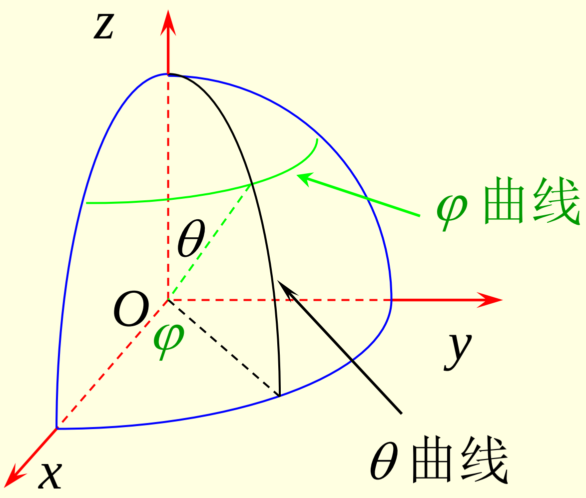
设参数曲面方程

$$\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\quad (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$$

- 固定v可得**u曲线**, 类似定义**v曲线**

例 球面方程

$$\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\varphi, \\ y=R\sin\theta\sin\varphi, \\ z=R\cos\theta \end{cases}$$



其中$0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi<2\pi.$

■ 切平面

设曲面S参数方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\quad (u,v)\in D$$

S上点$M_0\ (x_0, y_0, z_0)$参数(u_0, v_0), 过M_0的u, v曲线切向量

$$\boldsymbol{r}_u'(u_0,v_0),\quad \boldsymbol{r}_v'(u_0,v_0)$$

设$L\subset S$为过M_0的任一 光滑曲线, 它由D中曲线

$$u = u(t),\ v = v(t)$$

经$\boldsymbol{r}(u,v)$映射得到, 其中$u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0$, 即

$$L:\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$$

L在M_0的切向量

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=\boldsymbol{r}_u'(u(t_0),v(t_0))u'(t_0)+\boldsymbol{r}_v'(u(t_0),v(t_0))v'(t_0)$$

$$=\boldsymbol{r}_u'(u_0,v_0)u'(t_0)+\boldsymbol{r}_v'(u_0,v_0)v'(t_0)$$

它始终与 $\boldsymbol{r}_u'(u_0,v_0),\boldsymbol{r}_v'(u_0,v_0)$ 共面. 故S上过M_0的光滑曲线之切线共面, 该平面称为S在M_0的**切平面**. 其法向量

$$\boxed{\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{r}_u'(u_0,v_0)\times\boldsymbol{r}_v'(u_0,v_0)}$$

想一想 切平面的方程?

■ 法向量场

曲面S上参数为(u, v)的点处法向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u'(u,v)\times\boldsymbol{r}_v'(u,v)=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{k}$$

光滑曲面 法向量连续变化的曲面

记 $$E=|\boldsymbol{r}_u'|^2,\quad G=|\boldsymbol{r}_v'|^2,\quad F=\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v'$$

则 $$|\boldsymbol{r}_u'(u,v)\times\boldsymbol{r}_v'(u,v)|=\sqrt{|\boldsymbol{r}_u'|^2|\boldsymbol{r}_v'|^2-(\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v')^2}=\sqrt{EG-F^2}$$

而单位法向量 $$\boldsymbol{n}^0=\frac{\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'}{|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'|}$$

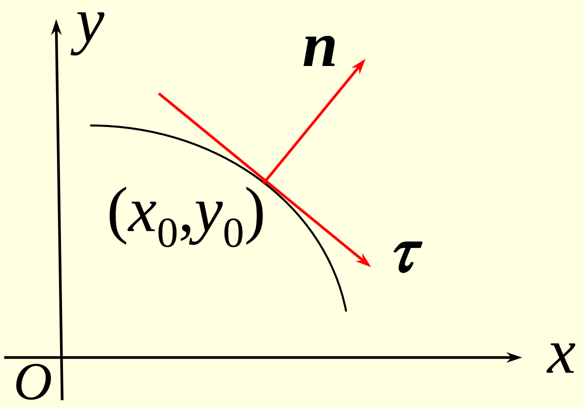
9.4.3 隐式曲线和曲面

■ **平面隐式曲线** 设函数$F(x, y)$有连续偏导数, 则曲线 $F(x, y) = 0$在(x_0,y_0)处的

切线方程 $\boxed{F'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0)(y-y_0)=0}$

法向量 $\boldsymbol{n}=(F'_x, F'_y)\big|_{(x_0, y_0)}$

切向量 $\boldsymbol{\tau}=(F'_y, -F'_x)\big|_{(x_0, y_0)}$

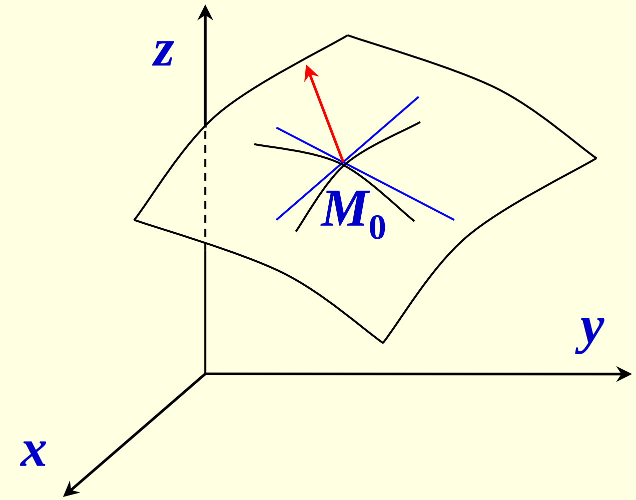


例 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在点(x_0,y_0)处的切线方程.

■ 空间隐式曲面

设曲面S的方程 $F(x, y, z) = 0$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$,

S上过M_0(对应参数t_0)的曲线为



$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

曲线在S上, 故 $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$

$$\Rightarrow (F'_x, F'_y, F'_z) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 0 \xrightarrow{t=t_0} \nabla F(M_0) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = 0$$

故切向量 $\boldsymbol{\tau}_0 = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 总与 $\nabla F(M_0)$ 正交.

曲面的法向量 $\boxed{\nabla F(M_0) = (F'_x, F'_y, F'_z)\big|_{M_0}}$

切平面方程

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

特别地, 若S: $z=f(x,y)$, 则法向量为

$$\boxed{\boldsymbol{n}=(-f'_x(x_0,y_0),-f'_y(x_0,y_0),1)}$$

切平面

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

■ 空间隐式曲线

设空间曲线L的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

点$M_0 \in L$, 其切线为两曲面在M_0点切平面之交线, 故

切向量 $\tau = \nabla F(M_0) \times \nabla G(M_0)$

$$= \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0} \boldsymbol{i} + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0} \boldsymbol{j} + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0} \boldsymbol{k}$$

想一想 切线的方程?

例 求曲面 $z = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$ 上点(−1,−2,1)处的切平面和法线方程.

例 求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9 \\ z^2 = 3x^2 + y^2 \end{cases}$ 在点(1, −1,2)处的切线.