Chap 11

曲线和曲面积分

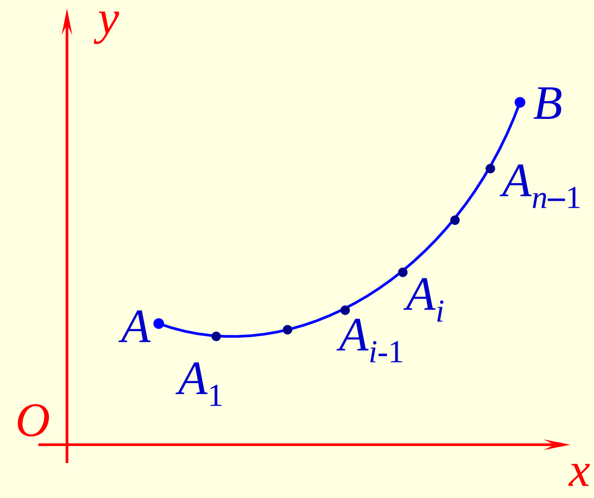
Chap 11 — 1

数量场在曲线上的积分

11.1.1 基本概念

问题 如何求一段弧状质线的质量？

设有xOy面上的曲线L, 其端点为A, B, 点(x, y)处的线密度为$\varphi(x, y)$.



用分点$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$将$L$分成$n$小段, 记$A_0 = A$, $A_n = B$, 第i小段弧$A_{i-1}A_i$的长度为Δs_i,任取(ξ_i, η_i) $\in$弧$A_{i-1}A_i$, 则第i小段弧质量近似为$\varphi(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$, 故

总质量近似为 $\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$

记 $|T| = \max_{1\le i\le n} \Delta s_i$, 则弧状质线的质量

$$m = \lim_{|T|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

试一试 去掉物理背景, 给出定义在曲线L上的函数

$f(x, y)$的**第一型曲线积分**(**数量场的曲线积分**)

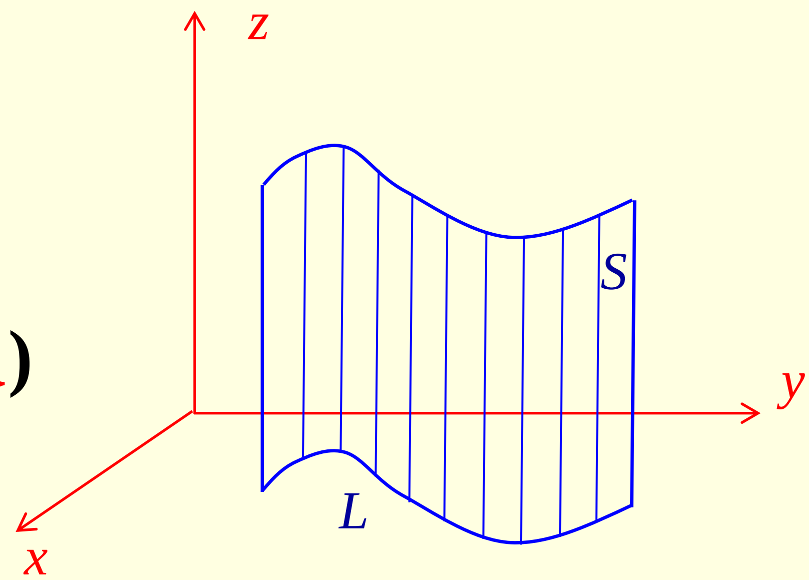
$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \lim_{|T|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

的定义.

几何问题 求一块柱面的面积.

设曲线$L \subset xOy$ 面, S是以L为准线, 母线平行Oz轴的柱面, 其高度为 $f(x, y)$, 求xOy 面以上部分柱面S的面积

$$\boxed{S = \int_L f(x, y)\mathrm{d}s}$$



(第一型曲线积分**几何意义**)

■ **性质**　**无方向性** 若曲线L为 $\overset{\frown}{AB}$，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\mathrm{d}s$$

线性性 设α,β为常数，则

$$\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}s=\alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}s+\beta\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

可加性 设曲线段L_1与L_2首尾相接成曲线L，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

此外，$\int_L 1\mathrm{d}s=s_L$，其中s_L为曲线L的弧长.

11.1.2 数量场曲线积分的计算

定理 设 $f(x, y)$在光滑曲线L上连续, L的**参数方程**为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j},\ t \in [\alpha, \beta]$$

则有

$$\boxed{\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\underbrace{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t}_{}}$$

ds弧微分

注意 由于ds是弧长, 取正值, 故定积分限应$\alpha < \beta$

若曲线L的方程为 $y = y(x),\ x \in [a, b]$, 则

$$\boxed{\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x}$$

例1 计算曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}s$，其中L为抛物线 $y=x^2$上

点$O(0, 0)$ 与点$B(1, 1)$间的弧段.

$$\boxed{\frac{5\sqrt{5}-1}{12}}$$

例2 求曲线积分$\int_L x\mathrm{d}s$，其中L为平面上$O(0, 0)$，$A(1, 0)$，

$B(0, 1)$为顶点的三角形的边界.

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

例3 求曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}s$，其中L为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

在第一象限的弧段.

$$\boxed{\dfrac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}}$$

例4 已知质线的线密度为 $\varphi=\sqrt{x^2+y^2}$, 其形状为上半圆周L: $y=\sqrt{4x-x^2}$, $x\in[0,4]$，求该质线的质量.

$\boxed{16}$

回顾 在极坐标 $r=r(\theta)$下, $\boxed{\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta}$

■ 思考与猜测　对于空间曲线L:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\ t\in[\alpha,\beta]$$

第一型曲线积分$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 的概念与计算公式如何?

例5 计算 $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中曲线$L$为球面

$x^2+y^2+z^2=4$ 与平面$x+z=2$的交线.

提示: 将L 的方程化为参数方程　$\boxed{8\sqrt{2}\pi}$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z+x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+\dfrac{y^2}{2}=1 \\ z+x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=1-\cos t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

Chap 11 — 2

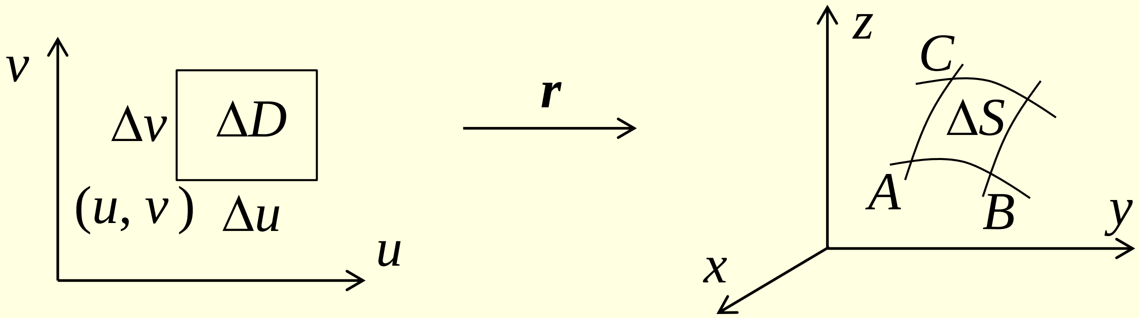
数量场在曲面上的积分

11.2.1 曲面的面积

设有光滑参数曲面S:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\ (u,v)\in D$$

微元法 在D中取小矩形ΔD, 其对应小曲面ΔS, 其面积



近似为向量AB和向量AC张成的平行四边形的面积

由于 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u,v) \approx \boldsymbol{r}_u'(u,v)\Delta u$

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{r}(u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u,v) \approx \boldsymbol{r}_v'(u,v)\Delta v$$

故小曲面ΔS的面积 $\Delta S \approx |\boldsymbol{r}_u'(u,v) \times \boldsymbol{r}_v'(u,v)| \Delta u \Delta v$

从而**曲面面积元素**

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_u'(u,v) \times \boldsymbol{r}_v'(u,v)| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

故曲面S面积

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \iint_D |\boldsymbol{r}_u'(u,v) \times \boldsymbol{r}_v'(u,v)| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned}}$$

其中

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

特别地, 当曲面为显式方程

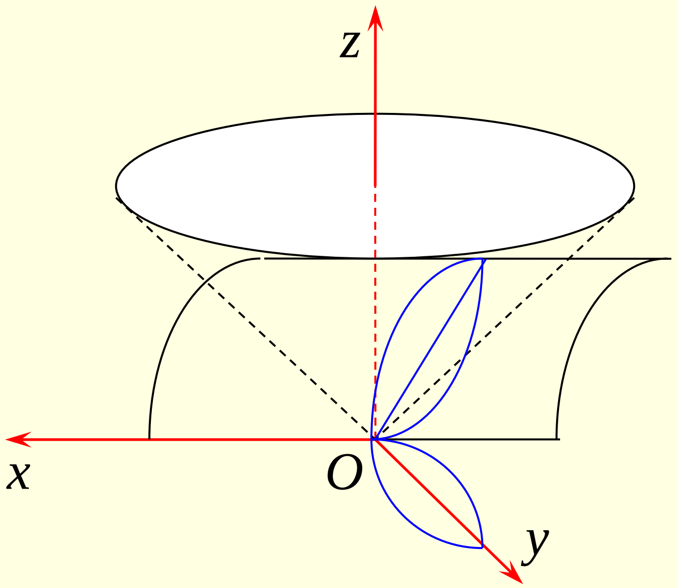
$$z=z(x,y),\quad (x,y)\in D$$

则

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ S &= \iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}}$$

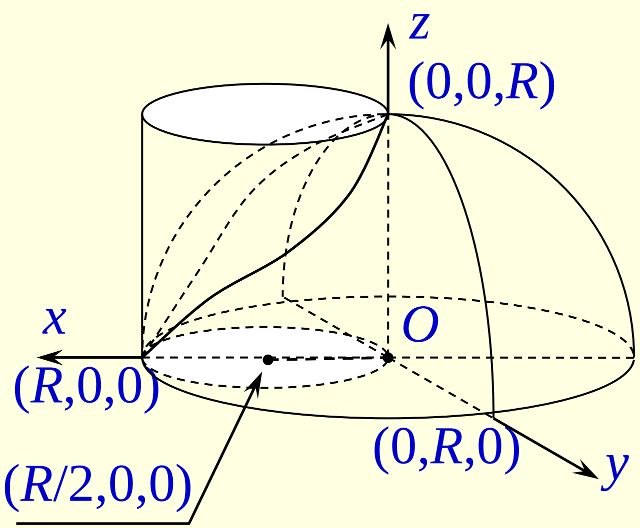
例1 计算锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2y$ 所截部分的面积.

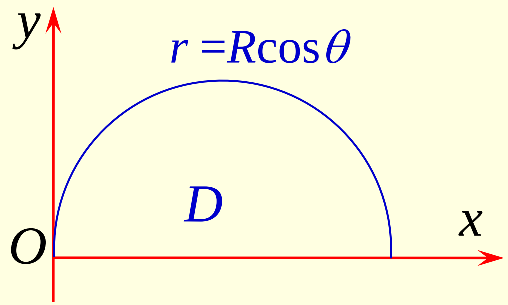
$\boxed{\sqrt{2}\pi}$



例2 计算球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=\pm Rx$ 所割下部分的曲面面积(**Viviani曲面**).

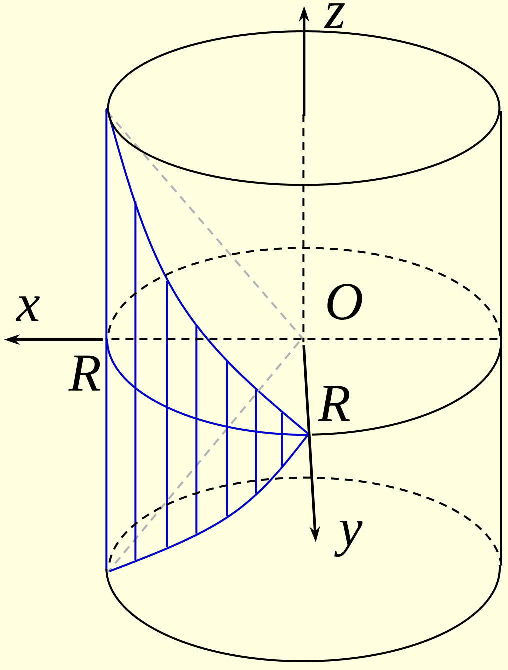
$$\boxed{4\pi R^2-8R^2}$$

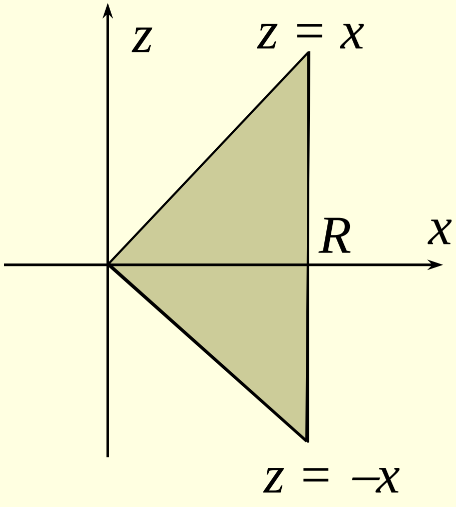




例3 计算柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被两平面 $x\pm z=0\,(x>0,y>0)$ 所截下部分曲面的面积.

$\boxed{2R^2}$





11.2.2 数量场曲面积分的概念与计算

问题 如何求面密度为 $f(x, y, z)$ 的曲面 S 的质量?

采用**分割**, **作近似和**, **取极限**的思想可得其质量,

进而导出 $f(x, y, z)$ 在 S 上的**第一型曲面积分**的定义

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

第一型曲面积分也称为**数量场的曲面积分**, 它有

类似于第一型曲线积分的性质, 如线性性和可加性.

定理 设光滑曲面S的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\ (u,v)\in D$$

又函数$f(x, y, z)$在S上连续, 则

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

其中 $$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

特别地, 当曲面为显式方程 $z=z(x,y),\quad (x,y)\in D$

则 $$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

例1 计算曲面积分

$$I=\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$$

其中S为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $\boxed{\pi R^3}$

提示 注意曲面的对称性

例2 计算曲面积分

$$I=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S \qquad \boxed{3\sqrt{2}\pi}$$

其中S为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截得曲面

例3 计算曲面积分

$$I=\iint_S z\mathrm{d}S$$

其中S为**螺旋面**

$$\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t, \quad (r,t)\in[0,a]\times[0,2\pi] \\ z=t, \end{cases}$$

$$\boxed{\pi^2\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)}$$