

Chap 11 — 3

向量场在曲线上的积分

11.3.1 曲线的定向

设曲线 L 的端点为 A, B , 规定其一为起点, 这样的曲线称为**定向曲线**. 起点为 A , 终点为 B 的定向曲线记为 L_{AB}

设平面定向曲线 L 的参数方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

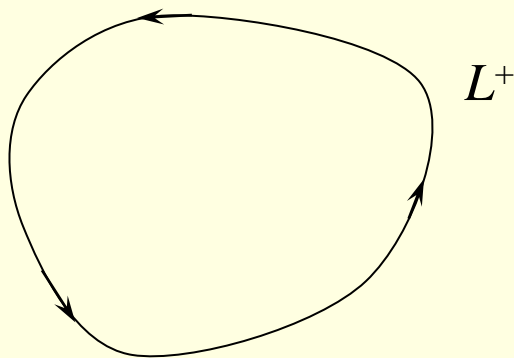
其起点参数为 α , 终点参数为 β , 则记该定向曲线 L 为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t: \alpha \rightarrow \beta$$

结论 $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ 是指向参数增加方向切向量

因此 $\boldsymbol{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ 是指向参数增加方向单位切向量

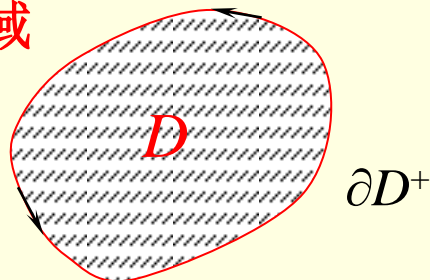
对简单闭曲线 $L \subset xOy$ 面, 通常规定逆时针方向为其正向, 记为 L^+ , 顺时针方向为负向, 记为 L^- .



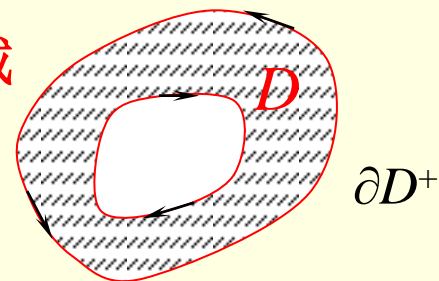
■ 连通区域及其边界定向

设 D 为平面区域, 若 D 内的任意一条闭曲线所围区域都落在 D 内, 则称 D 为**单连通**的, 否则称其为**复连通**的

单连通区域



复连通区域



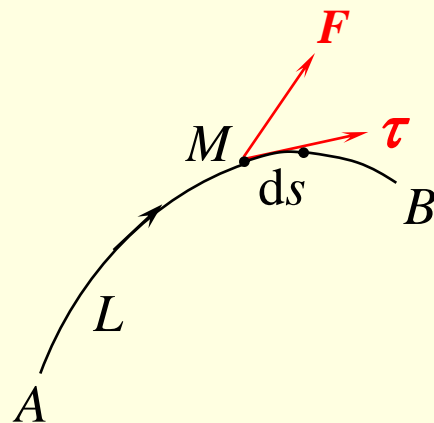
当点沿区域 D 边界朝一个方向前进时, D 总在其左手侧, 规定此方向为区域 D 诱导的**边界正向**, 记为 ∂D^+ 与 ∂D^+ 相反的方向称为 D 的**边界负向**, 记为 ∂D^-

11.3.2 向量场在曲线上的积分与计算

问题 设光滑平面曲线 L 上有连续作用力(向量场) $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, 求 \mathbf{F} 作用于质点使之沿 L 自起点 A 移动到终点 B 所做的功?

考察质点在 L 上任一 M 处
移动一段弧微元 ds 所作的功

$$dW = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$
$$\Rightarrow W = \int_L \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$



定义 设 L 为定向曲线, 向量场 $F = (P, Q)$ 在 L 上的

第二型曲线积分

(向量形式) $\longrightarrow \int_L F \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \int_L (F \cdot \boldsymbol{\tau}) ds$

由于**定向弧微分**

$$d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds = (\cos \alpha, \cos \beta) ds = (dx, dy)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_L F \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds \\ &= \int_L P dx + Q dy \end{aligned}$$

(两型曲线积分关系) (坐标形式)

注 当 L 为闭曲线时, 视向量场 $\mathbf{v} = (P, Q)$ 为流体的
流速场, 则积分表示流体沿 L 的**环(流)量**, 可记为

$$\Phi = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L Pdx + Qdy$$

方向性 第二型曲线积分与曲线的方向有关, 且

$$\int_{L_{BA}} Pdx + Qdy = -\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy$$

其它性质同第一型曲线积分, 如线性性和可加性.

注意 (1) 两型曲线积分的形式不同

(2) 当 $Q = 0$ 时, $\int_L Pdx$ 仍为第二型

此外, 还有

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L Pdx + \int_L Qdy$$

例1 试将第二型曲线积分

$$I = \int_L x^2 dx - xydy$$

化为第一型曲线积分, 其中 L 是自点 $(-1, 0)$ 到点 $(1, 0)$

的上半圆周 $y = \sqrt{1-x^2}$

定理 若定向曲线 L 为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t: \alpha \rightarrow \beta$$

则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

特例 (1) 若曲线 L 的方程为 $y = y(x)$, $x:a \rightarrow b$, 则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx$$

(2) 若 L 为平行 x 轴的定向线段, 则 $\int_L Qdy = 0$

例2 计算曲线积分

$$I = \int_L 2xydx + x^2dy$$

其中 L 是由点 $O(0, 0)$ 到点 $B(1, 1)$ 的如下路径:

(1) 直线 $y = x$;

(2) 曲线 $y = x^3$;

(3) 由 O 经点 $A(1, 0)$ 到 B 的折线.

■ 思考与猜测 对于空间定向曲线 L :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t: \alpha \rightarrow \beta$$

向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 在 L 上的第二型曲线积分

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

的概念与计算公式如何?

例3 在力场 $\mathbf{F} = (y, -x, z)$ 作用下, 质点沿螺旋线

$$L: x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = t,$$

由点 $A(R, 0, 0)$ 运动到点 $B(R, 0, 2\pi)$, 求 \mathbf{F} 所做的功.

例4 已知质量为 M 和 m 的质点间的引力为

$$\mathbf{F} = -k \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}$$

其中 \mathbf{r} 是质点 M 指向质点 m 的**位置向量**, $r = |\mathbf{r}|$. 求质点 m 从点 A 运动到点 B 时, 引力 \mathbf{F} 所做的功.

例5 求向量场

$$kmM \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

沿 xOy 面上的圆周 $L: x^2 + y^2 = R^2$ 逆时针方向的环量.

11.3.3 Green定理

定理(Green公式) 设 $\nu = (P, Q)$ 为平面有界闭域 D 上的光滑向量场, D 的边界分段光滑, 则有

$$\oint_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

注 二重积分与其边界上第二型曲线积分的关系

分析 先证 $\oint_{\partial D^+} Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$

再证 $\oint_{\partial D^+} Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$, 两式相加即证

推论 设平面有界闭域 D 的边界分段光滑, 则其面积

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} xdy - ydx$$

例6 计算积分 $I = \oint_L (y-x)dx + (3x+y)dy$

其中 L 为椭圆周 $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$, 取逆时针方向.

例7 计算积分

$$I = \int_{AO} (e^x \sin y - 4x)dx + (e^x \cos y - 3)dy$$

其中 AO 是由 $A(a, 0)$ 到 $O(0, 0)$ 的弧段 $y = \sqrt{ax - x^2}, (a > 0)$

例8 设 L 是任意一条不过原点 O 的正向光滑闭曲线, 求

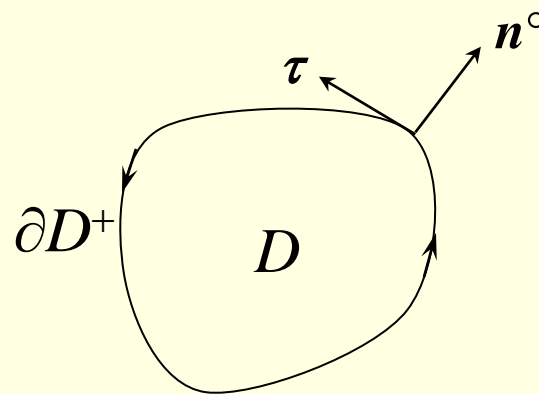
$$I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

■ Green公式的向量形式

设 $\mathbf{F} = (Q, -P)$, $\boldsymbol{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 为 ∂D^+ 的单位切向量,
设 \mathbf{n}° 为 ∂D 的单位外法向量, 则

$\mathbf{n}^\circ = (\cos \beta, -\cos \alpha)$, 故有

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^\circ ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} d\sigma$$



13.3.4 平面曲线积分与路径无关的条件

定义 设 D 为平面**单连通**区域. 若对任意 $A, B \in D$, 以及任意分段光滑曲线 $L_{AB} \subset D$, 曲线积分

$$\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy$$

的值仅与 A, B 有关, 而与 L 无关, 则称在 D 内**曲线积分与路径无关**, 此时积分可记为

$$\int_A^B Pdx + Qdy$$

定理(Green) 设 $\mathbf{v} = (P(x,y), Q(x,y))$ 是单连通区域 D 内的光滑向量场, 则下面四条等价:

(1) 在 D 内的任一条分段光滑闭曲线 L 上

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$

(2) 在 D 内曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关

(3) 向量场 \mathbf{v} 是某函数的**梯度场**, 即存在 $\varphi(x,y)$, 使得

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi(x, y) \quad \text{或} \quad d\varphi = Pdx + Qdy$$

(4) 在 D 内恒成立 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$

例9 计算积分

$$\int_L 2e^{2x} \cos y dx - e^{2x} \sin y dy$$

其中 L 是上半椭圆 $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 由 $O(0,0)$ 到 $A(2,3)$ 的弧

推论 设 \mathbf{v} 是单连通区域 D 内的光滑向量场, 且 \mathbf{v} 在 D 内的曲线积分与路径无关, 则对 $\forall A, B \in D$, 有

$$\int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

其中 $\varphi(x,y)$ 满足 $\mathbf{v} = \nabla \varphi$.

11.3.5 全微分求积与全微分方程

设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在单连通区域 D 有连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

则存在二元函数 φ 使得 $d\varphi = Pdx + Qdy$, 即 $Pdx + Qdy$ 是 φ 的**全微分**, 此时称 φ 为 $Pdx + Qdy$ 的**原函数**. 已知

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \quad \longleftarrow (\varphi \text{ 的求法})$$

注 上述求原函数的过程称为**全微分求积(分)**

例10 求 $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ ($x > 0$) 的原函数, 并计算积分

$$I = \int_{(1,0)}^{(\sqrt{3},3)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

若 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某函数的全微分, 则称方程 $Pdx + Qdy = 0$ 为**全微分方程**.

判别式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

解法 求出原函数 $\varphi(x, y)$, 则通解为 $\varphi(x, y) = C$

例11 求解方程 $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$