功能关系、角动量

概念回顾

质点的动能(Kinetic energy)：质量与其运动速率的平方乘积的一半。

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

动能定理：作用于质点的合力所作的功，等于质点动能的增量。

$$A = E_{kQ} - E_{kP}$$

扩展：所有外力和内力对物体系所作的功之和等于物体系总动能的增量。

功是质点能量改变的量度。

概念回顾

引力势能和重力势能(Potential energy)：由物体间万有引力作用和相对位置所决定的势能称为万有引力势能。重力势能是处于地球附近的物体与地球之间万有引力作用结果的特例。

取无穷远处为势能零点 $E_p = -G\dfrac{mm_e}{r}$ $E_P = \int_r^{\infty} -G\dfrac{Mm}{r^2}dr = -GMm\dfrac{1}{r}$

由P点到Q点，万有引力所做的功 $A = G\dfrac{mm_e}{r_Q} - G\dfrac{mm_e}{r_P}$

$$= -\left(E_{pQ} - E_{pP}\right)$$

万有引力做的功等于系统引力势能增量的负值。

重力做的功等于重力势能增量的负值，以地面为零势能点。

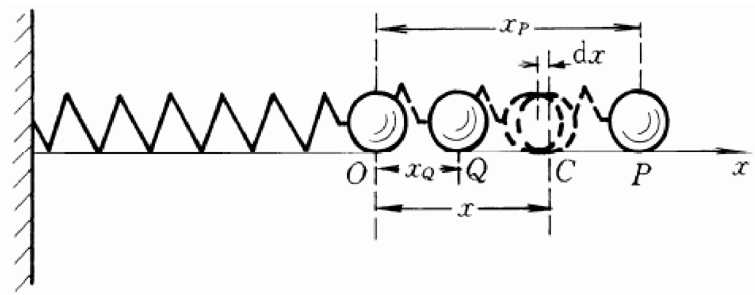
万有引力、重力所作的功，决定于质点的始、末位置，而与质点运动的路径无关。

概念回顾

弹性势能：

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$



取平衡位置处弹力势能为零 $E_P = \int_x^0 -kxdx = -(0 - \frac{1}{2}kx^2) = \frac{1}{2}kx^2$

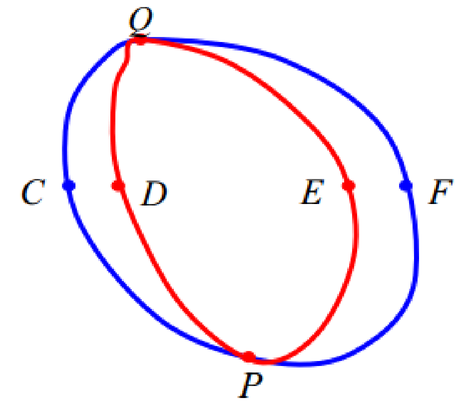
由P点到Q点，弹力所做的功 $A = -(E_{pQ} - E_{pP})$

弹力做的功等于弹簧系统弹力势能增量的负值。

概念回顾

保守力（conversation force）：物体在保守力的作用下，沿任意闭合路径绕行一周所作的功恒等于零。

万有引力，重力，弹力



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

不具备这种特性的力为非保守力，

摩擦力

1、只要有保守力，就可引入相应的势能。

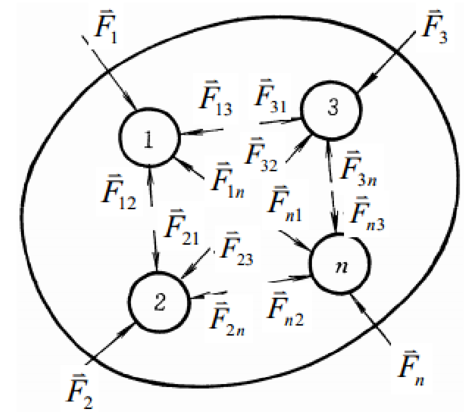
2、势能是状态函数。质点在某一点的势能大小等于在相应的保守力的作用下，由所在点移动到零势能点时保守力所做的功。

3、势能仅有相对意义，所以必须指出零势能参考点。两点间的势能差是绝对的，即势能是质点间相对位置的单值函数。

4、势能是属于具有保守力相互作用的质点系统的。

概念回顾

质点系动能定理：外力和内力对系统所作的功的代数和，等于系统内所有质点的总动能的增量。



$$A_{外} + A_{内} = E_{kQ} - E_{kP}$$

$$A_{内} = A_{保内} + A_{非保内} \qquad A_{保内} = -(E_{pQ} - E_{pP})$$

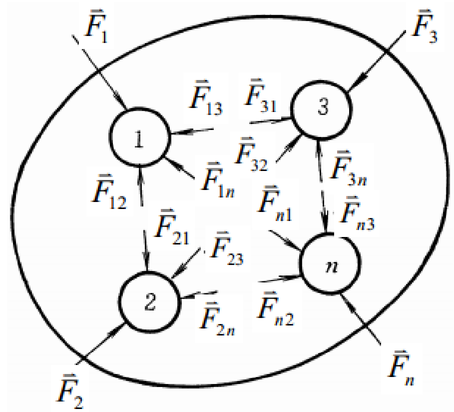
$$A_{外} + A_{非保内} = (E_{kQ} + E_{pQ}) - (E_{kP} + E_{pP})$$

系统的动能与势能之和称为系统的机械能，用E表示

$$A_{外} + A_{非保内} = E(Q) - E(P)$$

功能原理：在系统从一个状态变化到另一个状态的过程中，其机械能的增量等于外力所作功和系统的非保守内力所作功的代数和。

概念回顾



功能原理：在系统从一个状态变化到另一个状态的过程中，其机械能的增量等于外力所作功和系统的非保守内力所作功的代数和。

$$A_{外} + A_{非保内} = E(Q) - E(P)$$

$$A_{外} + A_{非保内} = 0 \Rightarrow E_{kQ} + E_{pQ} = E_{kP} + E_{pP}$$

机械能守恒定律：在外力和非保守内力都不作功或所作功的代数和为零的情况下，系统内质点的动能和势能可以互相转换，系统的机械能保持恒定。

概念回顾

动量定理：在运动过程中，作用于质点的合力在一段时间内的冲量等于质点动量的增量。

$$\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\,\mathrm{d}t \quad \vec{I}=\vec{p}-\vec{p}_0=m\vec{v}-m\vec{v}_0$$

质点系动量定理：在一段时间内，作用于质点系的外力矢量和的冲量等于质点系动量的增量。

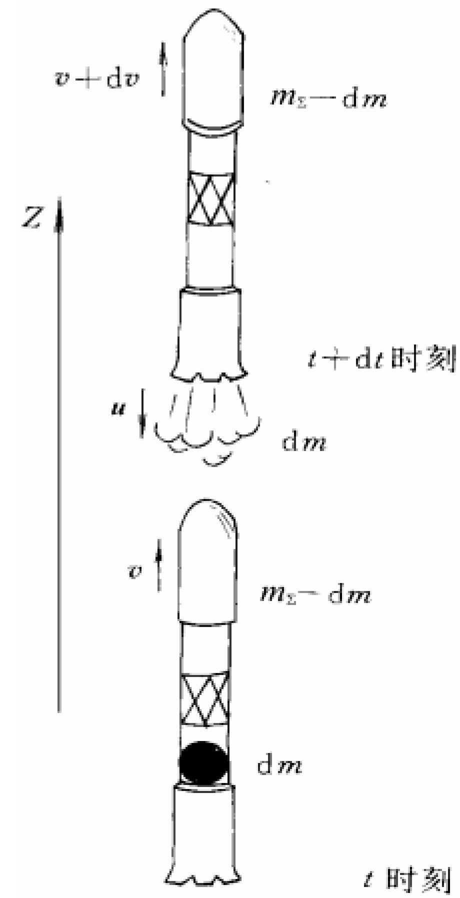
$$\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}$$

动量守恒定律：在外力的矢量和为零的情况下，质点系的总动量不随时间变化。

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i=\text{恒矢量}$$

变质量系统

运载火箭技术反映了当代科技水平的综合技术，但其动力学原理仍是动量定理和动量守恒定律。



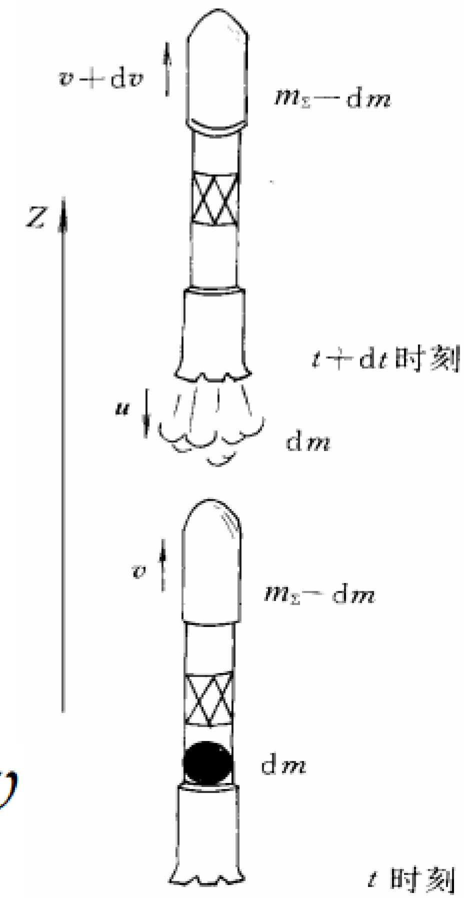
火箭在运行时生成的炽热气体高速向后喷射，使火箭主体获得向前的动量。若将火箭的总质量m_Σ分成两部分：

火箭主体质量$m_\Sigma-dm$

将被喷射的物质质量dm

变质量系统

运载火箭技术反映了当代科技水平的综合技术，但其动力学原理仍是动量定理和动量守恒定律。



在t 时刻，dm尚未被喷出，火箭总质量相对于地面的速度为v，动量为$m_\Sigma v$；

在t+dt时刻，dm被以相对于火箭的速度(称为喷射速度) u喷出，火箭主体则以 v+dv的速度相对于地面运行，由动量守恒定律

$$0=[(m_\Sigma-dm)(v+dv)+(dm)(v+dv-u)]-m_\Sigma v$$

m_Σ在减少，减少量为$-dm_\Sigma$，故有$dm=-dm_\Sigma$

$$0=[(m_\Sigma+dm_\Sigma)(v+dv)+(-dm_\Sigma)(v+dv-u)]-m_\Sigma v$$

$$=m_\Sigma dv+udm_\Sigma$$

变质量系统

运载火箭技术反映了当代科技水平的综合技术, 但其动力学原理仍是动量定理和动量守恒定律。

$$0=[(m_\Sigma+\mathrm{d}m_\Sigma)(v+\mathrm{d}v)+(-\mathrm{d}m_\Sigma)(v+\mathrm{d}v-u)]-m_\Sigma v$$

$$=m_\Sigma\mathrm{d}v+u\mathrm{d}m_\Sigma$$

$$0=\int_0^v\mathrm{d}v+u\int_{m_{\Sigma0}}^{m_\Sigma}\frac{\mathrm{d}m_\Sigma}{m_\Sigma}=v-u\ln\frac{m_{\Sigma0}}{m_\Sigma}$$

火箭主体在其质量从$\boldsymbol{m}_{\Sigma 0}$变到$\boldsymbol{m}_{\Sigma}$时所达到的速度为

$$v=u\ln\frac{m_{\Sigma0}}{m_\Sigma}$$

采用多级火箭技术：$v_1=u\ln N_1\quad v_2-v_1=u\ln N_2,\quad v_3-v_2=u\ln N_3,\cdots$

$$v=\sum_i u\ln N_i=u\ln(N_1N_2N_3\cdots)$$

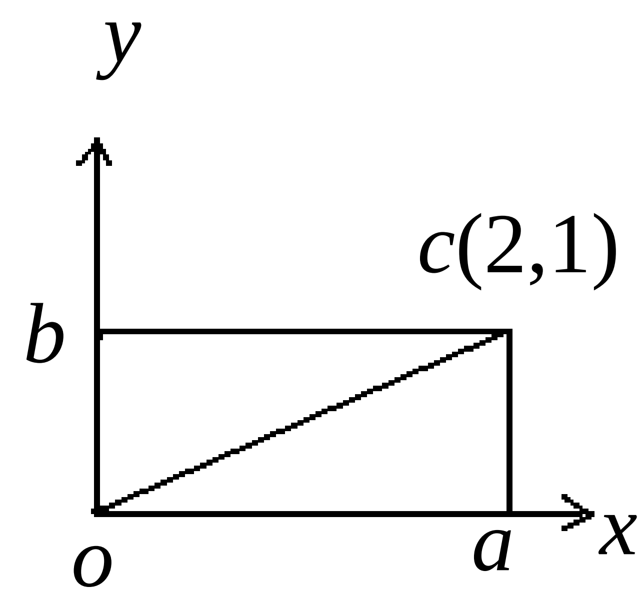
[例] 已知 $\vec{F}=2y\vec{i}+4x^2\vec{j}$, c点坐标（2，1）求：

F 的功 , F 是否为保守力?

（A）沿路径 oac

（B）沿路径 obc

（C）沿路径 oc



解：由 $A=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int(F_x dx+F_y dy)=\int(2ydx+4x^2dy)$

$$(A)\quad A_{oac}=\int_{oa}(2ydx+4x^2dy)+\int_{ac}(2ydx+4x^2dy)$$

$$=\int_{\mathrm{ac}}4x^2dy=16(J)$$

$$A = \int F \cdot dr = \int (F\,dx + F\,dy) = \int (2y\,dx + 4x^2\,dy)$$

$$(B) \quad A_{obc} = \int_{ob} 4x\ dy + \int_{bc} 2y\,dx = \int_{0} 2y\,dx = 4(\mathrm{J})$$

$$(C) \quad A_{oc} = \int_{oc} (2y\,dx + 4x\ dy) = \int_0^2 2y\,dx + \int_0^1 4x^2\,dy$$

$$x = 2y \quad \Rightarrow \quad A_{oc} = \int_0^2 x\,dx + \int_0^1 16y^2\,dy$$

$$= 2 + 5.33 = 7.33(\mathrm{J})$$

*F*为非保守力，做功与路经有关

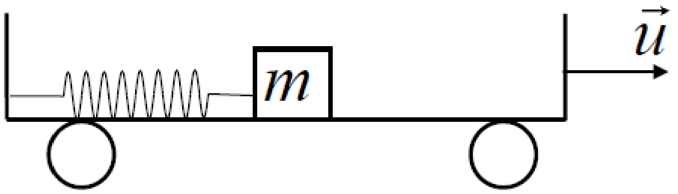
[例] 火车匀速v。弹簧一端固定，物体m靠在弹簧自由端，压缩后相对车厢由静止放手，离开弹簧时相对火车速度v'。求从放手到脱离自由端过程中车厢壁对弹簧的作用力做了多少功（相对地面）。

以弹簧和m为研究系统

在地面参考系中，车厢壁对弹簧的作用力（外力）有位移

功能原理：
系统机械能的增加等于外力和非保守内力做的功；

车厢壁对弹簧所做的功应等于弹簧和物体系统机械能的增量



$$A=\frac{m(v+v')^2}{2}-\left(E_p+\frac{mv^2}{2}\right)$$

在车厢参考系中，弹簧与车厢的连接点没有位移，弹簧和物体系统机械能守恒

$$E_p=\frac{1}{2}mv'^2$$

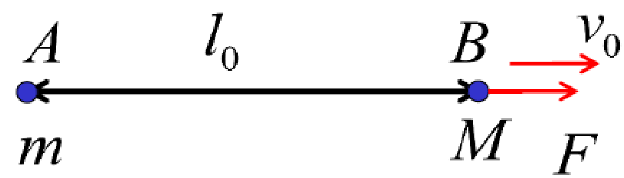
$$\Rightarrow A=mvv'$$

【例】某惯性系中质量各为m，M的质点A，B，开始相距l_0，A静止，B具有沿A，B连线延伸方向速度v_0，为抵消B受A的万有引力，可以如图所示对B施加一个与v_0同方向的变力F，使B从此作匀速直线运动。

（1）试求A，B间距可以达到的最大值l_{max}；

（2）计算从开始时刻到A，B间距达最大的过程中，变力F所作的总功W;

（3）对以上结果进行讨论。



取随B一起运动的惯性系为参考系，机械能守恒(F没有位移)

$$-G\frac{Mm}{l_{max}}=\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{l_0} \quad \Rightarrow l_{max}=\frac{2l_0GM}{(2GM-l_0v_0^2)}$$

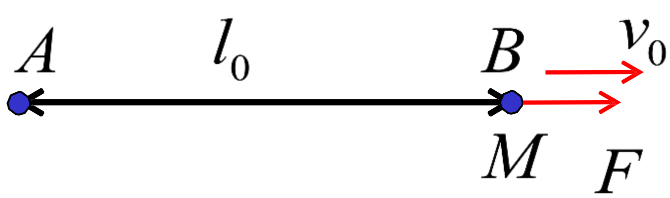
在原惯性系中，系统外力F有位移，机械能不守恒，由功能原理：

$$W=\left[\frac{1}{2}(m+M)v_0^2-G\frac{Mm}{l_{max}}\right]-\left(\frac{1}{2}Mv_0^2-G\frac{Mm}{l_0}\right)=mv_0^2$$

讨论：上述结果只适用于

$$\Rightarrow l_{\max} = \frac{2l_0 GM}{(2GM - l_0 v_0^2)}$$

$$v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{l_0}}$$



如果 $$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{l_0}}$$

取随*B*一起运动的惯性系为参考系，系统机械能：

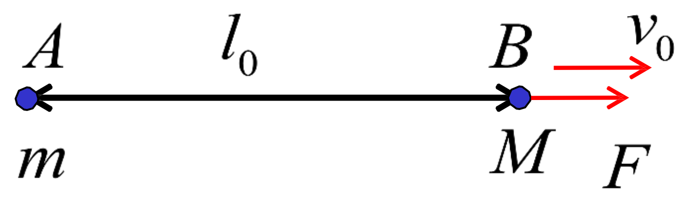
$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{Mm}{l_0} \geq 0$$

$$l_{\max} \Rightarrow \infty$$

取随B一起运动的惯性系为参考系，此时无穷远处势能为0，系统机械能守恒，（v_∞为A相对于B参考系的速度）

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2=\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{l_0}$$

$$\Rightarrow v_\infty=\sqrt{v_0^2-2\frac{GM}{l_0}}$$



在原惯性系中A的速度大小为 v_0-v_∞ ，由功能原理：

$$W=\left[\frac{1}{2}m(v_0-v_\infty)^2+\frac{1}{2}Mv_0^2\right]-\left(\frac{1}{2}Mv_0^2-G\frac{Mm}{l_0}\right)$$

$$=mv_0\left(v_0-\sqrt{v_0^2-2\frac{GM}{l_0}}\right)$$