Chap 13

反常积分和含参变量积分

Chap 13 — 1

反常积分

13.1.1 无穷积分的收敛性

按定义判别敛散性需: 先求原函数, 再取极限.

定理1(Cauchy准则) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > a,\ \forall A', A'' > A:\ \left|\int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.}$$

- **问题** $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散的**Cauchy准则？**

定义 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**;

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

定理2 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

命题 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则

$\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

问题 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛,

结论如何? 又问若两者都条件收敛, 结论又如何?

13.1.2 非负函数无穷积分判别法

定理3 (收敛原理) 设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$\boxed{F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \text{ 在}[a,+\infty)\text{有上界.}}$$

定理4 (比较判别法) 设$g(x) \geq f(x) \geq 0$, 则

(1) $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理5 (极限形式) 设 $f(x) \geq 0,\ g(x) > 0$, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l,$$ 则

(1) 当$0 < l < +\infty$时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2) 当$l = 0$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3) 当$l = +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论 (p-判别法) 设 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = l$, 则

(1) 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例1 证明: 对任意 $\alpha \in \mathbf{R}$, $\int_1^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛.

例2 判断 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}$ 的敛散性.

13.1.3 A-D判别法

Abel变换 设有$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 记$A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, 则

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})}$$

积分第二中值定理 设$f\in R[a,b]$, 则有

1) 若$g(x)$在$[a,b]$上单调减少且$g(x)\ge 0$, 则$\exists\xi\in[a,b]$使

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x}$$

Bonnet型

2) 若$g(x)$在$[a,b]$上单调增加且$g(x)\ge 0$, 则$\exists\xi\in[a,b]$使

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x}$$

3) 若$g(x)$在$[a,b]$上单调, 则$\exists\xi\in[a,b]$使

Weierstrass型

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x}$$

定理6 (Bonnet型) 设$f \in R[a, b]$, $g(x)$在$[a, b]$单调减少,

且$g(x) \geq 0$, 则$\exists \xi \in [a, b]$使

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x}$$

证 令$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则$F \in C[a, b]$, 记其最大, 小值为$M, m$

- 若$g(a) = 0$, 则$g(x) \equiv 0$, 结论显见.
- 若$g(a) > 0$, 则只需证 $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)} \leq M$

或 $mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq Mg(a)$.

由$g \in R[a, b]$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists [a, b]$分划 T: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

使得
$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(g) \Delta x_k < \varepsilon.$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x_{k-1}) + g(x) - g(x_{k-1})]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_{k-1})\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x) - g(x_{k-1})]\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_{k-1})\mathrm{d}x}_{\mathbf{I}_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x)-g(x_{k-1})]\mathrm{d}x}_{\mathbf{I}_2}$$

$$|\mathbf{I}_2| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x)-g(x_{k-1})]\mathrm{d}x\right| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\cdot|g(x)-g(x_{k-1})|\mathrm{d}x$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} L\int_{x_{k-1}}^{x_k}\omega_k(g)\mathrm{d}x = L\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k \le L\varepsilon,\quad \text{其中} |f(x)| \le L.$$

$$\mathbf{I}_1 = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\left[F(x_k)-F(x_{k-1})\right]$$

$$= g(x_{n-1})F(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)\left[g(x_{k-1})-g(x_k)\right]$$

$$\boxed{A_k = \sum_{i=1}^{k}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right] = F(x_k)}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2\,, \qquad |\mathbf{I}_2| \le L\varepsilon$$

$$\mathbf{I}_1 = g(x_{n-1})F(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)\left[g(x_{k-1}) - g(x_k)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{I}_1 \le M\left(g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[g(x_{k-1}) - g(x_k)\right]\right) = Mg(a)$$

$$\mathbf{I}_1 \ge m\left(g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[g(x_{k-1}) - g(x_k)\right]\right) = mg(a)$$

从而 $\quad mg(a) - L\varepsilon \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le Mg(a) + L\varepsilon$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 得 $\quad mg(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le Mg(a).$

定理7(A-D判别法) 设 f, g 满足下列两组条件之一:

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(Abel) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$在$[a, +\infty)$单调有界;

(Dirichlet) $F(A)=\int_a^{A} f(x)\mathrm{d}x$ 在$[a,+\infty)$ 有界, $g(x)$

在$[a,+\infty)$单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0.$

例3 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

13.1.4 瑕积分敛散性判别

定理8 (Cauchy准则) 设b为瑕点. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x',\ x'' \in (b-\delta,\ b):\ \left|\int_{x'}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.}$$

➢ **问题** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散的Cauchy准则？

定义 若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**;

若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

定理9 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

命题 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$$ 绝对收敛.

问题 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛,

结论如何? 又问若两者都条件收敛, 结论又如何?

定理10 (收敛原理) 设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x \text{ 在}[a, b)\text{有上界.}$$

定理11 (比较判别法) 设 $g(x) \geq f(x) \geq 0$，则

(1) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理11(极限形式) 设b为瑕点 $f(x)\ge 0,\ g(x)>0$, 且

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$ 则

(1) 当$0<l<+\infty$时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2) 当$l=0$ 时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3) 当$l=+\infty$ 时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发 散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论 (*p*-**判别法**) **设** $f(x) \ge 0$, **且** $\lim\limits_{x \to b^-}(b-x)^p f(x) = l$, **则**

(1) 当$0 \le l < +\infty$, **且**$p < 1$ **时**, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛;**

(2) 当$0 < l \le +\infty$, **且**$p \ge 1$ **时**, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散.**

思考 a**为瑕点的** *p*-**判别法?**

例5 讨论椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, (0 < k < 1)$$

的敛散性.

例6 讨论$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$的敛散性.

例7 讨论$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta}\mathrm{d}x\ (\beta>0)$ 的敛散性.