# 第二章：质点动力学

# 惯性系和非惯性系

牛顿第一定律（惯性定律）：任何物体，只要没有外力改变他的状态，便会永远保持静止或匀速直线运动的状态。

牛顿第一定律适用的参考系为惯性系；

牛顿第一定律不适用的参考系为非惯性系。

地球可近似作为惯性系，应用牛顿定律解决问题

# 伽利略相对性原理

1. 在相对于惯性系作匀速直线运动的参考系中，所总结出的力学规律，都不会由于整个系统的匀速直线运动而有所不同。

2. 相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系；

对于描述力学规律而言，所有惯性系都是等价的。

这便是伽利略相对性原理，也称为力学相对性原理

# 惯性力

非惯性系中牛顿运动定律不成立，不能直接用牛顿运动定律处理力学问题。若仍希望能用牛顿运动定律处理问题，则必须引入一种作用于物体上的惯性力。

惯性力没有施力物体，所以不存在反作用力。

# 惯性力

## 1. 直线加速参考系中的惯性力

在直线加速参考系中

惯性力的方向与非惯性系相对于惯性系的加速度的方向相反,

大小等于所研究物体的质量与加速度的乘积

在非惯性系中应用牛顿定律时，计算力要计入真实力和假想的惯性力，加速度要用相对加速度。

真实力

运动质点相对于非惯性系的加速度

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}'_{\text{惯}} = m\vec{a}'$$

惯性力

# 惯性力

## 2. 匀速转动参考系中的惯性力

在匀速转动的非惯性系中会有惯性离心力的作用

$\vec{F}^* = m\omega^2\vec{r}$ 惯性力的方向总是背离轴心，称为惯性离心力

$\vec{F}_{\mathrm{T}} + \vec{F}^* = 0$ 若质点在匀速转动非惯性系中保持静止，则外力与惯性离心力的合力等于零

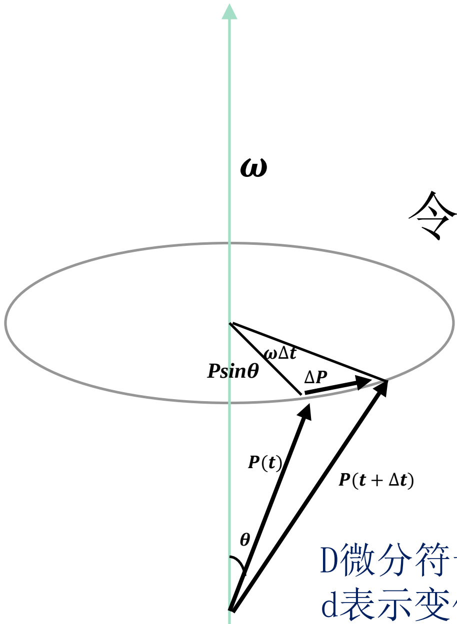
## 3. 科里奥利力

物体相对于匀速转动参考系运动时，物体受到惯性离心力和另一种称为科里奥利力的惯性力作用

# 科里奥利力

静止参考系（惯性系）、旋转参考系（非惯性系）

$\Delta t$间隔内转过角度ω$\Delta t$




令$\vec{P} = \vec{r}$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta r \approx r sin\theta\omega\Delta t = |\vec{\omega} \times \vec{r}|\Delta t \\ \Delta\vec{r} \approx \vec{\omega} \times \vec{r}\Delta t\end{gathered}}$$

质点静止在旋转系时，

$$\boxed{\frac{D\vec{r}}{Dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

D微分符号表示变化率是对静止系而言的，

d表示变化率是对旋转系而言的，质点在旋转系运动时

$$\boxed{\frac{D\vec{r}}{Dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

表示质点相对于旋转系的速度

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{D^2\vec{r}}{Dt^2} &= \vec{\omega} \times \frac{D\vec{r}}{Dt} + \frac{D\vec{v}}{Dt} \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a}\end{aligned}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

质点相对于旋转系的加速度

$$\vec{A} = \frac{D^2\vec{r}}{Dt^2}$$

质点相对于静止系的加速度

$$\vec{a} = \vec{A} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

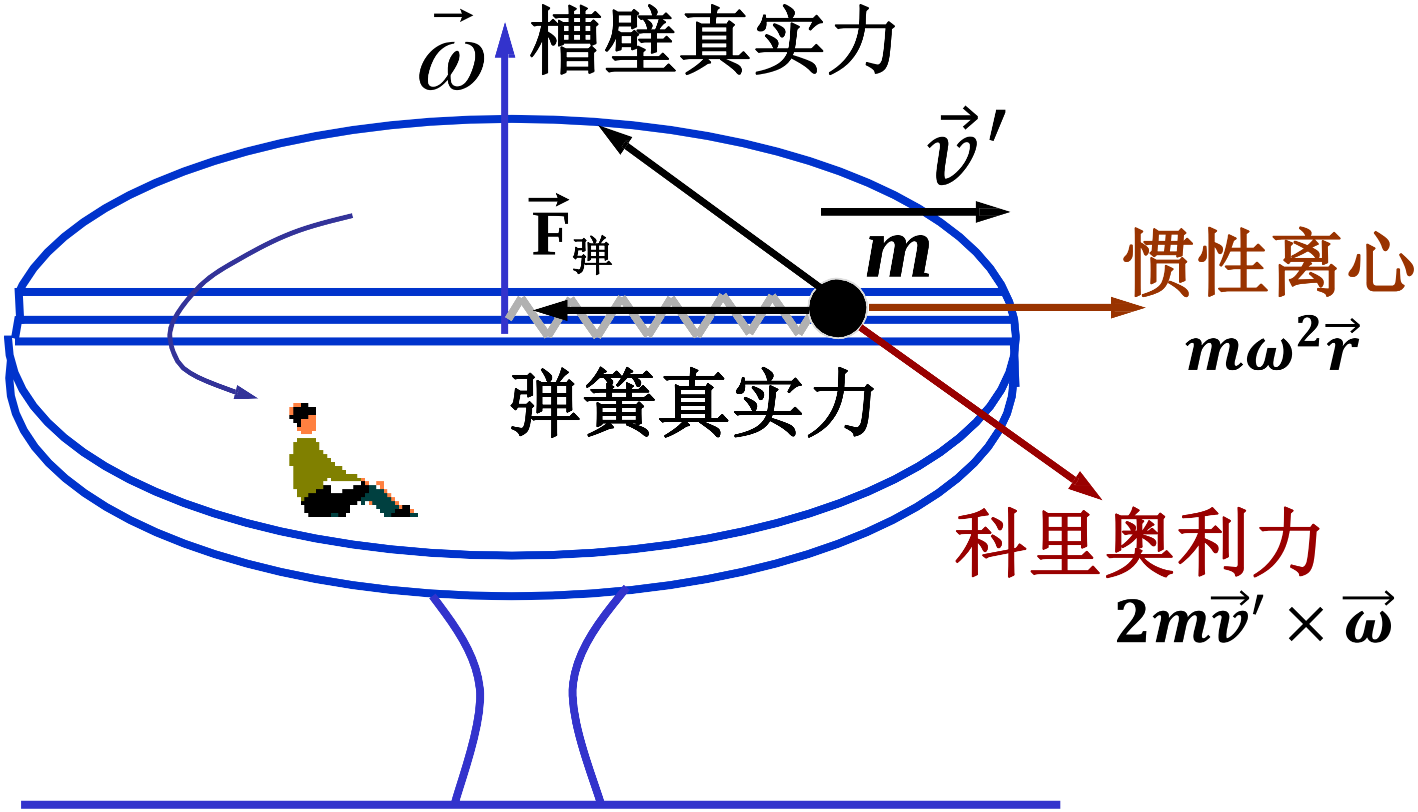
$$m\vec{a} = m\vec{A} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$f_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

右边第二项为惯性离心力，右边第三项为科里奥利力

# 科里奥利力

圆盘匀速转动，质量为m的小球沿着凹槽运动，求小球相对于圆盘的受力情况。



# 科里奥利力

因地球自转，在地球上科里奥利力的作用非常明显。

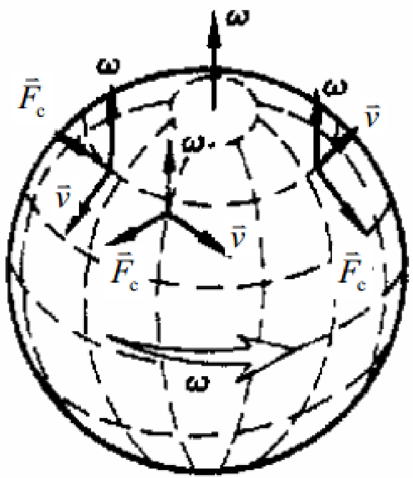
在北半球地面上运动的物体，所受科里奥利力总是指向前进方向的右侧；

在南半球地面指向前进方向的左侧。

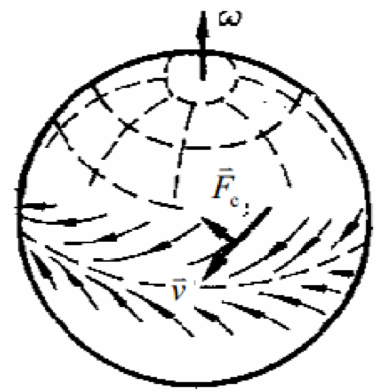
所以北半球的河流，右岸被冲刷得比较厉害，常呈陡峭状。

单行线铁路的右轨被磨损得比较严重。而在南半球，情况与此相反。

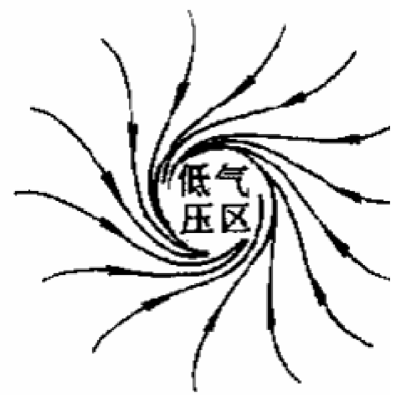
在北半球，从北向南流动的气流所受科里奥利力的方向是从东向西的，形成东北信风；而在南半球则形成东南信风。




北半球的科里奥利力



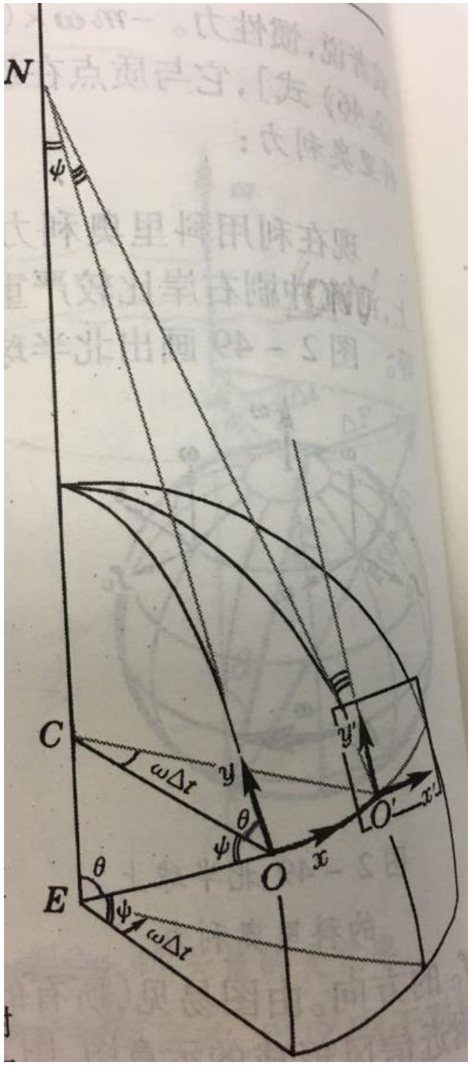

信风的形成




旋风的形成

## 【例】

法国物理学家傅科发现长约67m的大单摆在摆动过程中，摆动平面不断做顺时针方向的偏转，证明地球是不断自转的。
求傅科摆摆面进动的角速度$\Omega$与纬度$\psi$的关系。




## 【解】

傅科摆某时刻处在O点，经过$\Delta t$随地球转到O’点，分别做两点的切线，交于N点.
$\omega$为地球转动的角速度

$$\angle ONO' = \frac{\widehat{OO'}}{\overline{ON}} = \widehat{OO'}/(\overline{OC}/\cos\theta) = \angle OCO'\cos\theta$$

$$\Omega = \frac{\angle ONO'}{\Delta t} = \omega\cos\theta = \omega\sin\psi$$

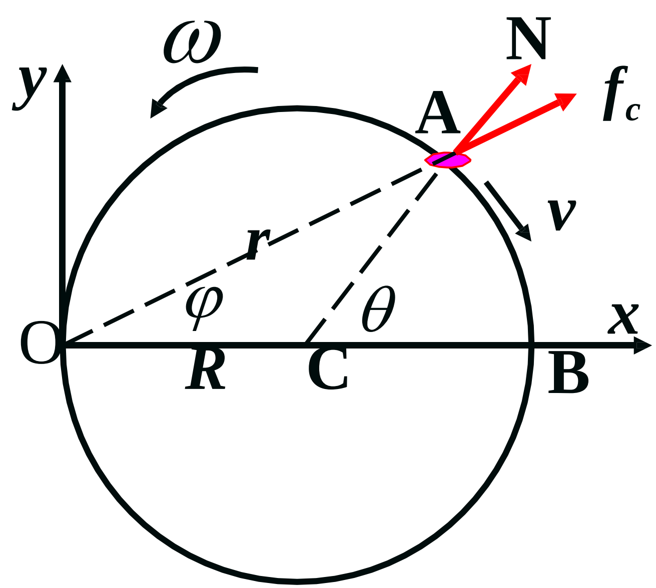
上式表明，在南北极处$\psi = \pm\frac{\pi}{2}, \Omega = \pm\omega$；
在赤道处$\psi = 0, \Omega = 0$。

【例】

质量为m的小环套在半径为R的光滑大圆环上，大圆环在水平面内以匀角速度$\omega$逆时针绕其上一点O转动。试分析某时刻小环相对大环以速度v顺时针运动的切向加速度分量和小环水平面内的所受的约束力N（X轴过圆心C，$\theta$已知）

非惯性系

**【解】如图，以直径OCB为极轴，位矢$\overrightarrow{OA}$与极**轴的夹角为$\varphi$。$\overrightarrow{CA}$与极轴的夹角为$\theta$。在随大环转动的参考系中，小环受到三个水平力：




**大环的约束力N（法向）**

**惯性离心力** $f_c = m\omega^2\vec{r}$

沿$\overrightarrow{OA}$方向，其中$r = \overline{OA} = 2R\cos\varphi, \varphi = \frac{\theta}{2}$

科里奥利力 $f_{\mathrm{cor}} = 2mv\omega$ $\vec{F}_{\mathrm{Cor}} = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$

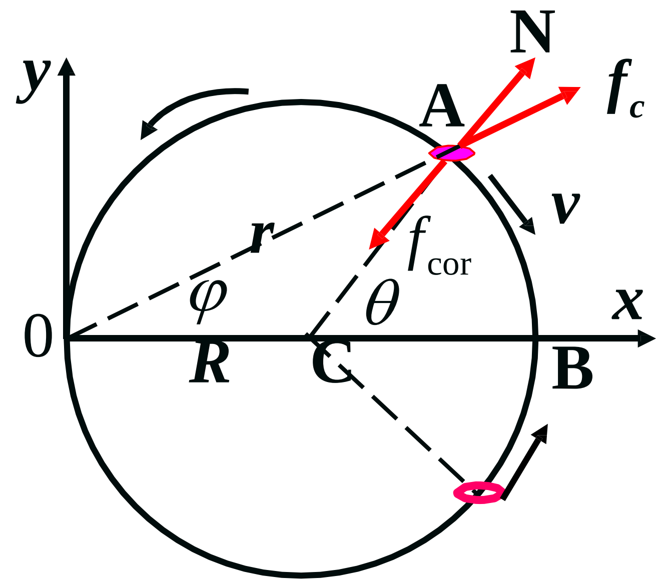
其中 $v = R\dfrac{d\theta}{dt}$ 为小环相对于大环速度，沿圆环的切线方向。

1. 在旋转坐标系中，切向加速度分量

$$a_t = \frac{1}{m} f_c \sin\varphi = r\omega^2 \sin\varphi$$

$$= 2R\omega^2 \cos\varphi \sin\varphi = R\omega^2 \sin\theta$$

上式表明，小环的运动是以B点为平衡位置来回摆动，类似单摆。



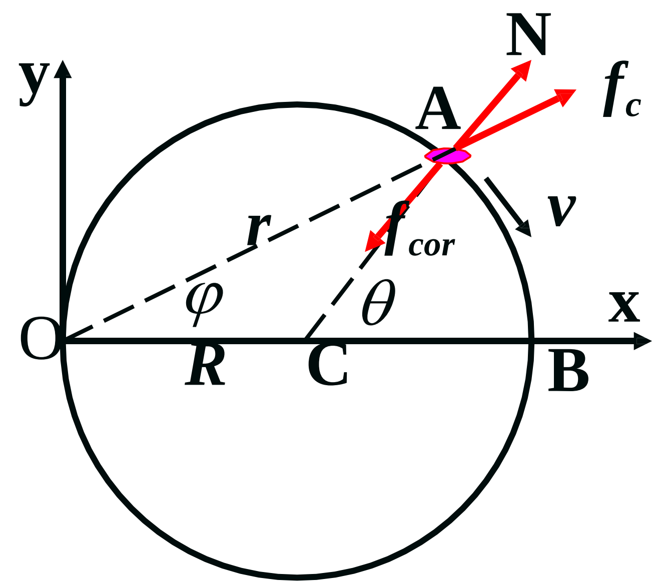
2. 在旋转坐标系中，水平面内约束力有

$$-N+f_{cor}-f_c\cos\varphi=ma_n=\frac{mv^2}{R}$$

$$\therefore \quad N=-f_c\cos\varphi+f_{cor}-\frac{mv^2}{R}$$

$$=-mr\omega^2\cos\varphi+2mv\omega-\frac{mv^2}{R}$$

$$=-mR\omega^2\left(1+\cos\theta\right)+2mv\omega-\frac{mv^2}{R}$$




非惯性系中把惯性力考虑进去，处理问题和惯性系相同

某长为 $l$ 的细杆与 $x$ 轴负方向夹角为$\theta$,现使得细杆从$\theta$=90°开始，两端A,B分别沿 $y$ 负方向和 $x$ 正方向滑动直到$\theta$=0°.求该过程中，细杆扫过的面积。

**提示：包络线**

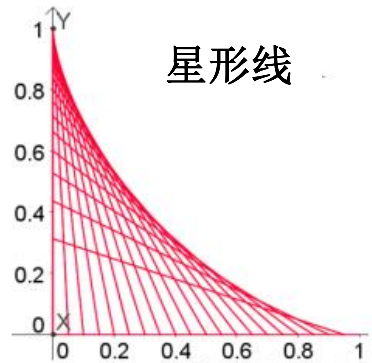
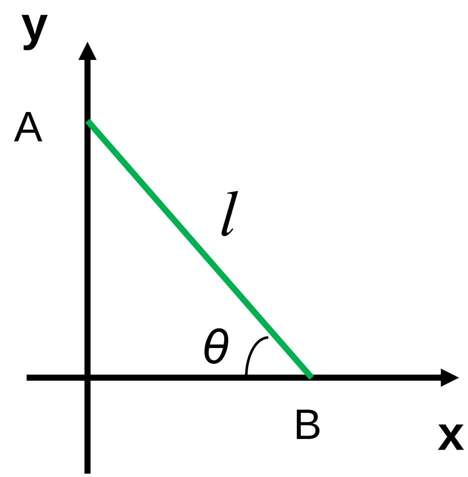


Figure 18. 滑落梯子的包络线




直线AB的方程：$y = lsin\theta - xtan\theta$

令：$f = y - lsin\theta + xtan\theta$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \\ &y = lsin\theta - xtan\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{包络线方程} \quad \begin{aligned} y &= lsin^3\theta \\ x &= lcos^3\theta \end{aligned}$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

细杆扫过的面积

$$S = \int_0^l y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 lsin^3\theta d lcos^3\theta = 3l^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6\theta d\theta\right)$$

$$S = 3l^2\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{32}l^2$$

# 行星运动开普勒定律

牛顿力学结合万有引力定律 推导天体运动的开普勒三定律

第一定律（轨道定律）：行星围绕太阳的运动轨道为椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上。

第二定律（面积定律）：行星与太阳的连线在相等的时间内扫过相等的面积。

第三定律（周期定律）：各行星椭圆轨道半长轴 $a$ 的三次方与轨道运动周期 $T$ 的二次方之比值为相同的常量，即

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

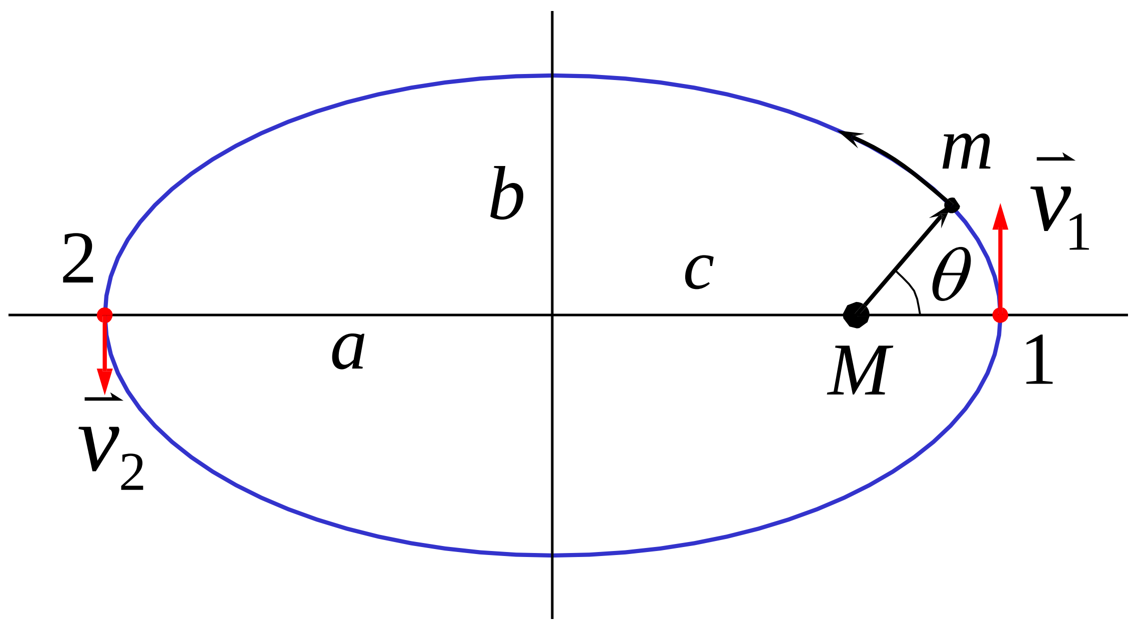
【例】

通过天文观测，发现存在行星椭圆轨道，假设质点间的万有引力大小与距离 $r$ 的关系为 $F = GMmr^{\alpha}$

试就下面两种情况分别确定 $\alpha$

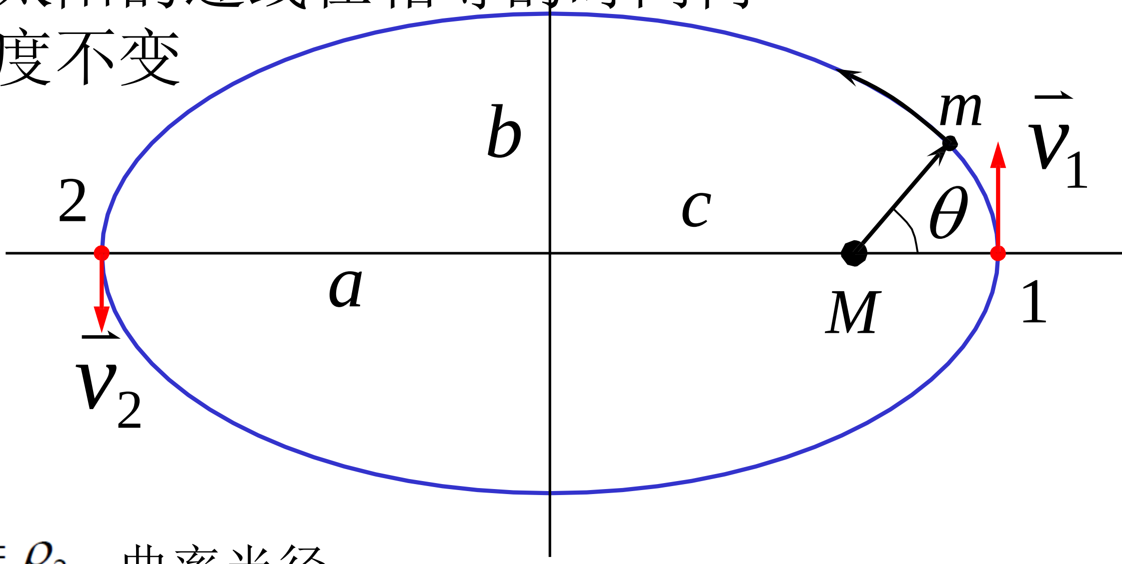
（1）太阳在椭圆轨道的一个焦点上；

（2）太阳在椭圆的中心



## （1）太阳在椭圆轨道的一个焦点上

开普勒第二定律：行星与太阳的连线在相等的时间内扫过相等的面积。面积速度不变




$$v_1(a-c)=v_2(a+c)$$

$$m\frac{v_1^2}{\rho_1}=GMm(a-c)^{\alpha}$$

$$m\frac{v_2^2}{\rho_2}=GMm(a+c)^{\alpha}\qquad \rho_1=\rho_2$$ 曲率半径

$$\Longrightarrow\quad (a+c)^{2+\alpha}=(a-c)^{2+\alpha}$$

**对于椭圆，$\mathbf{c\neq 0}$，必有$\boldsymbol{\alpha=-2}$**

开普勒第一，第二定律导出了引力的平方反比律

## （2）太阳在椭圆的中心

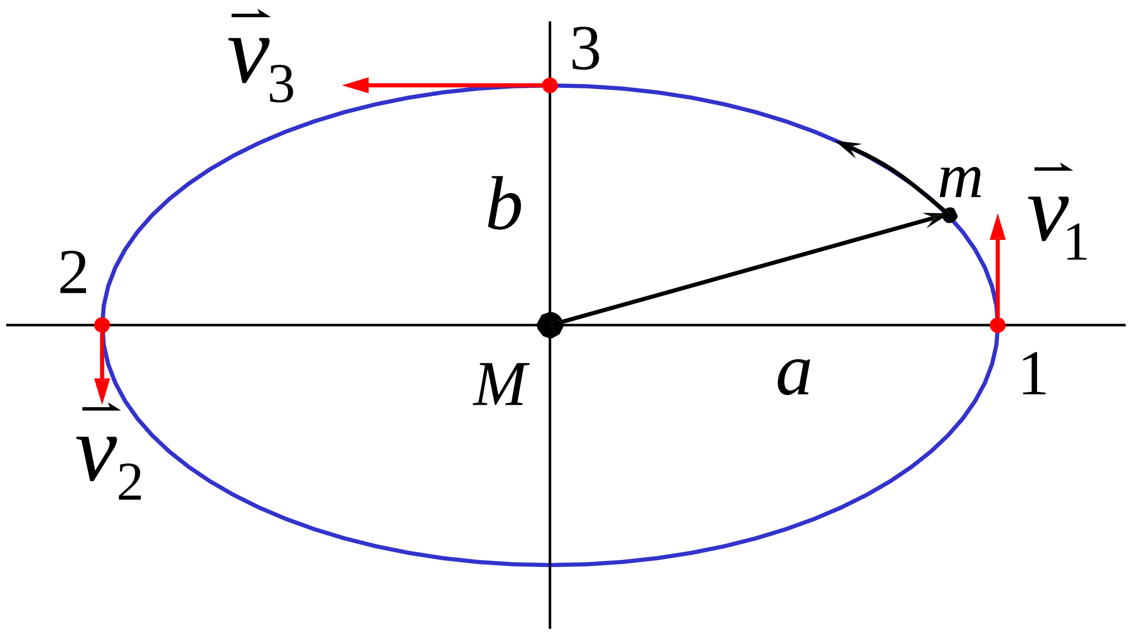
对于1、3两处

$$v_1 a = v_3 b$$

$$m\frac{v_1^2}{\rho_1} = GMma^{\alpha}, \rho_1 = \frac{b^2}{a}$$

$$m\frac{v_3^2}{\rho_3} = GMmb^{\alpha}, \rho_3 = \frac{a^2}{b}$$

$$\Rightarrow \quad a^{\alpha-1} = b^{\alpha-1}$$

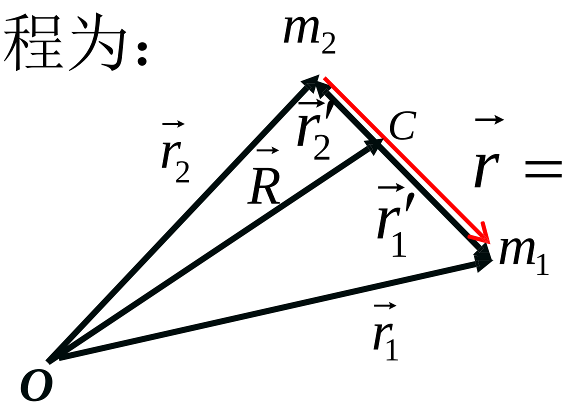



**对于椭圆，$a \neq b$, 必有$\alpha = 1$** 引力具有弹性力的特点

# 两体问题处理方法

惯性系中，动力学方程为：

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = -f(r)\vec{e}_r \\ m_2\vec{a}_2 = \quad f(r)\vec{e}_r \end{cases}$$




$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

质心位矢

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

**以$m_2$为参考点** $\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$

$$\vec{a} = -f(r)\vec{e}_r\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f(r)\vec{e}_r$$

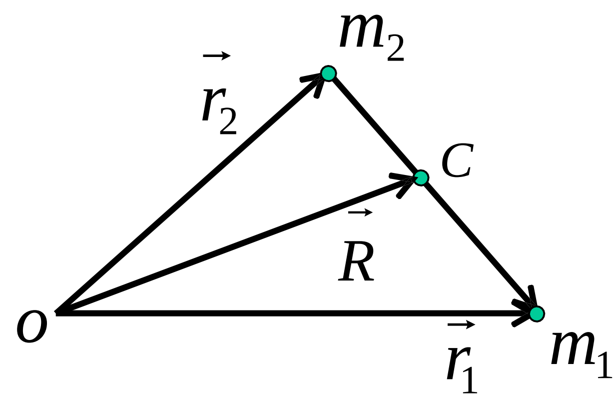
**引入约化质量** $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{m\vec{a} = -f(r)\vec{e}_r}$

把两体问题化成单体问题！ $m_1$相对$m_2$的动力学方程

【例】

对于太阳和某个行星构成的两体引力系统，若考虑到引力对太阳的影响，开普勒三定律将作哪些修正？

$$\boxed{\mu\vec{a} = -f(r)\vec{e}_r}\qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$




行星相对太阳的加速度 $\vec{a}$

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = K$$

将引力公式代入 $$-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} = \mu\vec{a}$$

修正?

右式可改写为 $$-G\frac{(M+m)m}{r^3}\vec{r}=m\vec{a}$$

$$-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}=\mu\vec{a}$$

$$\mu=\frac{Mm}{M+m}$$

除了将太阳质量 $M$ 换成 $M+m$ 以外，所有结果保持不变。

开普勒第一、第二定律不依赖于太阳质量，保持不变。

开普勒第三定律依赖太阳质量，严格意义下不再成立。

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{G(M+m)}{4\pi^2}=\frac{GM}{4\pi^2}\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

即使是行星中质量最大的木星 $m=\dfrac{M}{1047.35}$

$$\frac{m}{M}=9.55\times10^{-4}$$

确实是小到可以忽略

# 两体问题处理方法

太阳系中太阳是质量最大的天体，行星中质量最大的木星

$$m_{木} = \frac{M_{太}}{1047.35}$$

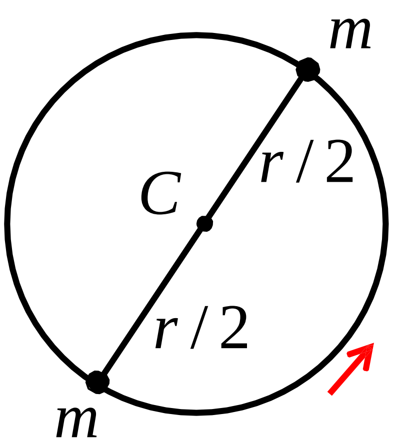
太阳近似处理成不动的质点，行星运动由太阳引力支配。
卫星距大行星很近，围绕着行星的运动由行星引力支配。

多体问题 $\rightarrow$ 两体问题 $\rightarrow$ 单体问题

【例】

$$m\cdot\frac{r}{2}\omega^2=f(r)$$

$$\Rightarrow\frac{m}{2}\cdot r\omega^2=f(r)$$




引入约化质量 $\mu=\dfrac{m\cdot m}{m+m}=\dfrac{m}{2}$