Chap12 — 2

平方平均收敛

12.2.1 基本概念

记 $L^2[a,b]=\{f(x)\mid f在[a,b]上可积且平方可积\}$

- $L^2[a, b]$是一个**线性空间**
- 设$f, g \in L^2[a, b]$, 其**内积**定义为

$$\langle f, g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$\| f \|=\sqrt{\langle f, f\rangle}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$$

- f, g之间的**距离**

$$\| f-g \|=\sqrt{\langle f-g, f-g\rangle}=\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$$

是$L^2[-\pi,\pi]$的标准正交系.

定义 设$f\in L^2[a,b]$, 若存在 $f_n\in L^2[a,b]$使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|^2=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[f_n(x)-f(x)\right]^2\mathrm{d}x=0$$

则称f_n平方平均收敛于f.

12.2.2 Bessel不等式

记n阶三角多项式集合为

$$G=\left\{g_n(x)\middle|g_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right\}$$

问题 $\forall f\in L^2[-\pi,\pi]$, 是否存在$g_n(x)\in G$ 使得$g_n(x)$是

$f(x)$的最佳逼近?

定理 设 $f\in L^2[-\pi,\pi]$, 则对$\forall g_n\in G$ 有

$$\|f-S_n(x)\|\le\|f-g_n(x)\|$$

其中$S_n(x)$是f 的n阶Fourier多项式.

命题 设 $f\in L^2[-\pi,\pi]$, 则有

$$\|f-S_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]$$

其中a_k, b_k是f的F氏系数.

Bessel不等式 设 $f\in L^2[-\pi,\pi]$, 则f的F氏系数满足

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x}$$

推论 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$,则级数

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 其中$a_n$, b_n是f的F氏系数.

12.2.3 平方平均收敛

定理 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则$\{S_n(x)\}$平方平均收敛于 f, 即

$$\lim_{n\to\infty} \| f - S_n \|^2 = 0$$

Parseval等式 设$f \in L^2[-\pi, \pi]$, 则f 的F氏系数满足

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x}$$

例1 已知 $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

推论 设$f \in C[-\pi, \pi]$, 且f与三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$$

中的每一个都正交, 则 $f(x) \equiv 0.$

- 若$f, g \in C[-\pi, \pi]$, 且F氏系数相等, 则$f(x) \equiv g(x)$

推论 设 $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$, 其F氏系数分别为a_n, b_n和

$\overline{a}_n, \overline{b}_n$, 则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0\overline{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\overline{a}_n + b_n\overline{b}_n\right).$$

推论 设 $f \in L^2[-\pi, \pi]$, 其F氏级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则对$\forall [a, b] \subset [-\pi, \pi]$, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\mathrm{d}x$$

12.2.4 广义Fourier级数

设$\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots\}$ 是$L^2[a, b]$的标准正交系，即

$$\langle\varphi_m(x),\varphi_n(x)\rangle=\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$$

称 $a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$为$f$的**广义F氏系数**，

而f 的**广义F氏级数**定义为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x).$$

定理 设 $f\in L^2[a,b]$, $\{\varphi_n(x)\}$为标准正交系, 则对任意

n次φ-多项式 $T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$, 有

$$\|f-S_n\|\le\|f-T_n\|$$

$$\|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{m=1}^{n}a_m^2$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\le\|f\|^2$$

其中 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)$ 是f的广义F氏级数前n项和.

定义 设$\{\varphi_n(x)\}$为$L^2[a, b]$的标准正交系，且

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 = \| f \|^2$$

则称$\{\varphi_n(x)\}$为$L^2[a, b]$的完备标准正交系.

定理 设$\{\varphi_n(x)\}$为$L^2[a, b]$的完备标准正交系，则

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

平方平均收敛于f，即 $\lim\limits_{n \to \infty} \| f - S_n \| = 0$

定理 设$\{\varphi_n(x)\}$为$L^2[a, b]$的完备标准正交系, 则

(1) 若$f \in C[a, b]$, 则 $f(x) \equiv 0$当且仅当 f 的广义F氏系数

$$a_n = 0, (n = 1, 2, \ldots)$$

(2) 从$\{\varphi_n(x)\}$中删去任一函数, 则剩余函数系不完备;

(3) 若 $\int_a^b \varphi_0^2(x)\mathrm{d}x = 1$, 则$\{\varphi_n(x)\}$增加$\varphi_0(x)$ 所得函数系

非正交系.