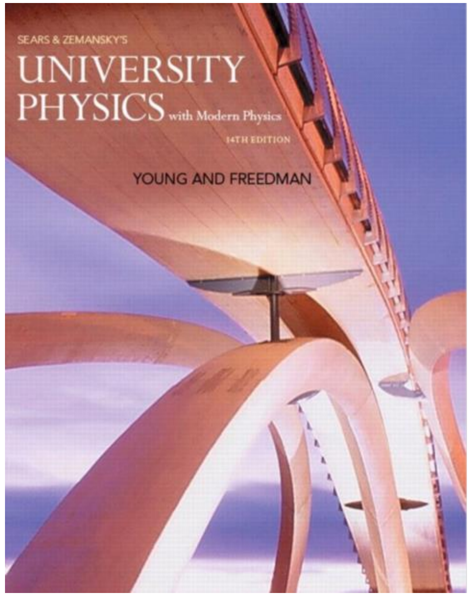
动量，冲量和碰撞


SEARS & ZEMANSKY'S
UNIVERSITY
PHYSICS with Modern Physics
14TH EDITION
YOUNG AND FREEDMAN

A. 动量、冲量、动量定理

B. 动量守恒定律

C. 质心、质心运动定理

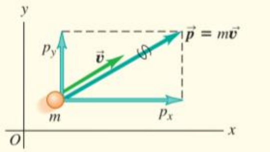
D. 火箭推进原理

E. 碰撞

Momentum of a particle: The momentum $\vec{p}$ of a particle is a vector quantity equal to the product of the particle's mass m and velocity $\vec{v}$. Newton's second law says that the net external force on a particle is equal to the rate of change of the particle's momentum.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (8.2)$$

$$\sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (8.4)$$

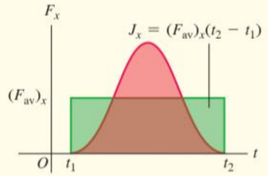


Impulse and momentum: If a constant net external force $\sum\vec{F}$ acts on a particle for a time interval Δt from t_1 to t_2, the impulse $\vec{J}$ of the net external force is the product of the net external force and the time interval. If $\sum\vec{F}$ varies with time, $\vec{J}$ is the integral of the net external force over the time interval. In any case, the change in a particle's momentum during a time interval equals the impulse of the net external force that acted on the particle during that interval. The momentum of a particle equals the impulse that accelerated it from rest to its present speed. (See Examples 8.1–8.3.)

$$\vec{J} = \sum\vec{F}(t_2 - t_1) = \sum\vec{F}\,\Delta t \quad (8.5)$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum\vec{F}\,dt \quad (8.7)$$

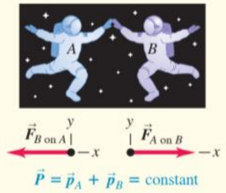
$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (8.6)$$



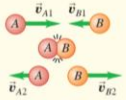
Conservation of momentum: An internal force is a force exerted by one part of a system on another. An external force is a force exerted on any part of a system by something outside the system. If the net external force on a system is zero, the total momentum of the system $\vec{P}$ (the vector sum of the momenta of the individual particles that make up the system) is constant, or conserved. Each component of total momentum is separately conserved. (See Examples 8.4–8.6.)

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \cdots = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots \quad (8.14)$$

If $\sum\vec{F} = \mathbf{0}$, then $\vec{P}$ = constant.



Collisions: In typical collisions, the initial and final total momenta are equal. In an elastic collision between two objects, the initial and final total kinetic energies are also equal, and the initial and final relative velocities have the same magnitude. In an inelastic two-object collision, the total kinetic energy is less after the collision than before. If the two objects have the same final velocity, the collision is completely inelastic. (See Examples 8.7–8.12.)

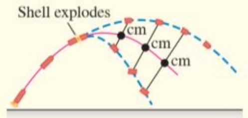


Center of mass: The position vector of the center of mass of a system of particles, $\vec{r}_{cm}$, is a weighted average of the positions $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, . . . of the individual particles. The total momentum $\vec{P}$ of a system equals the system's total mass M multiplied by the velocity of its center of mass, $\vec{v}_{cm}$. The center of mass moves as though all the mass M were concentrated at that point. If the net external force on the system is zero, the center-of-mass velocity $\vec{v}_{cm}$ is constant. If the net external force is not zero, the center of mass accelerates as though it were a particle of mass M being acted on by the same net external force. (See Examples 8.13 and 8.14.)

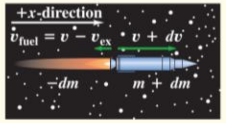
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (8.29)$$

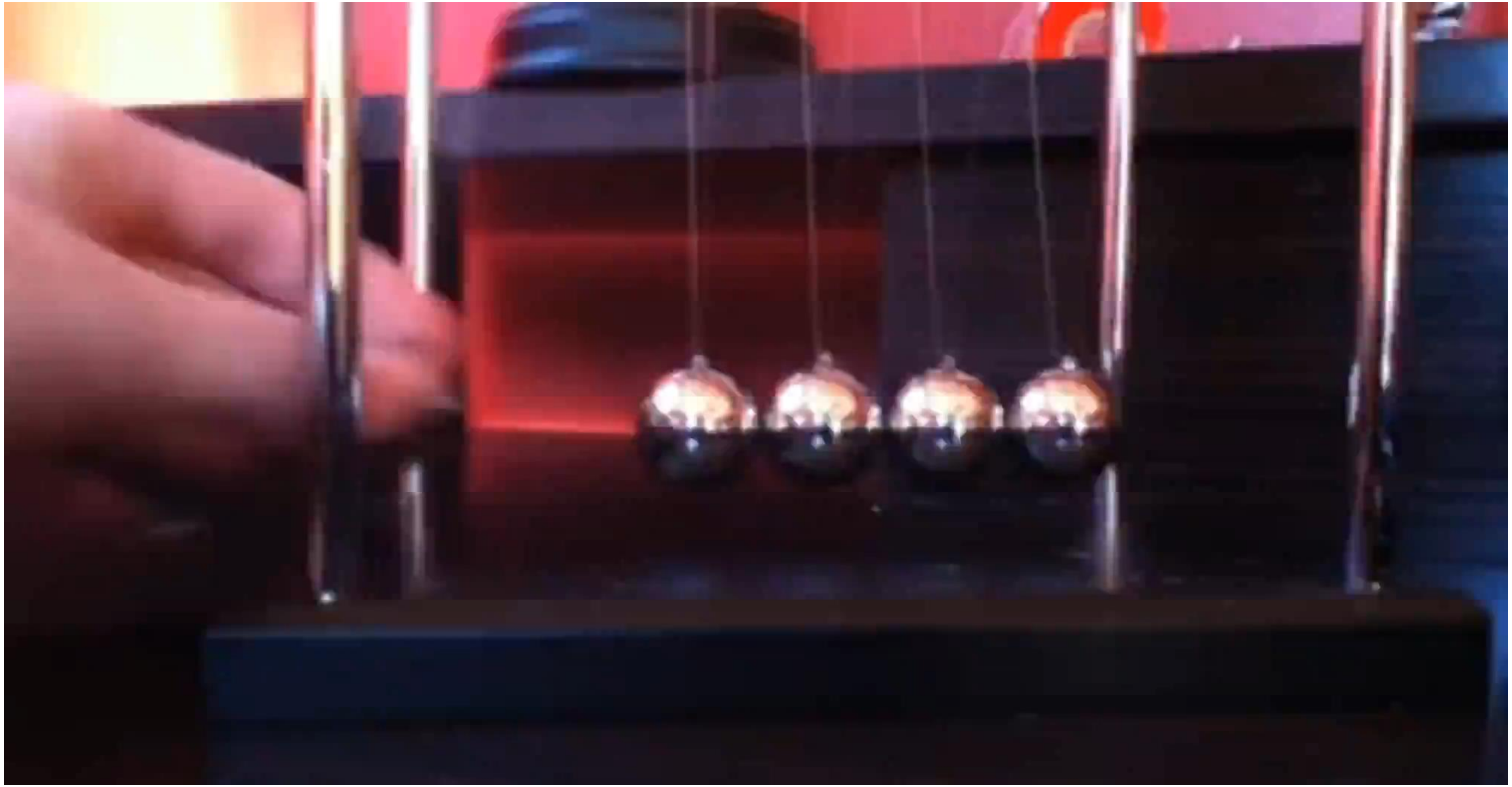
$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = M\vec{v}_{cm} \quad (8.32)$$

$$\sum\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \quad (8.34)$$



Rocket propulsion: In rocket propulsion, the mass of a rocket changes as the fuel is used up and ejected from the rocket. Analysis of the motion of the rocket must include the momentum carried away by the spent fuel as well as the momentum of the rocket itself. (See Examples 8.15 and 8.16.)





牛顿摆，最直观的动量变化演示

A1、动量、冲量

根据牛顿第二定律，对于单个质点，有 $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}$ 。

定义单个质点的**动量**为 $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$ ，故方程可写为 $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$ 。

即**外力等于质点动量的变化率。**

若质点在 t_1时，具有动量 $\vec{p}_1$；在 t_2时，变到 $\vec{p}_2$，可积分得：

$\vec{p}_2-\vec{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$ 即**质点动量的变化，等于力对时间的积分。**

Upper limit = final position

Scalar product (dot product) of $\vec{F}$ and displacement $d\vec{l}$

Work done on a particle by a **varying force $\vec{F}$** along a **curved path**

$$W=\int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_{P_1}^{P_2}F\cos\phi\, dl=\int_{P_1}^{P_2}F_{\parallel}\, dl$$

Lower limit = initial position

Angle between $\vec{F}$ and $d\vec{l}$

Component of $\vec{F}$ parallel to $d\vec{l}$

A2、动量定理（单个质点）

动量定理的微分形式：$\boxed{\mathrm{d}\vec{p}=\vec{F}\cdot\mathrm{d}t}$　（与牛顿第二定律等价）

如果力的作用时间从 $t_0 \to t$ ，质点动量从 $\vec{p}_0 \to \vec{p}$ ，则：

动量定理的积分形式：$\boxed{\vec{I}=\int_{t_o}^{t}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\vec{p}-\vec{p}_0=m\vec{v}-m\vec{v}_0}$

说明：

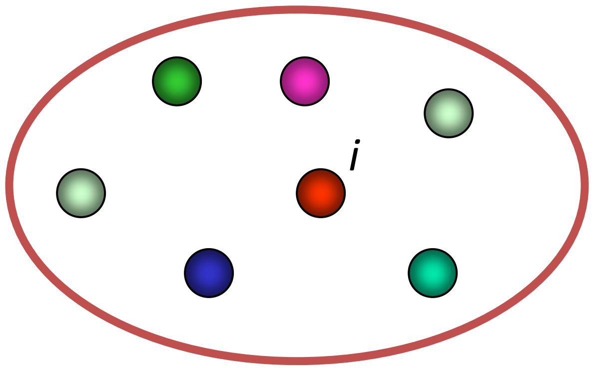
(1) 反映了力在时间上的累积作用对质点产生的效果。

(2) 动量定理中的动量和冲量都是矢量，符合矢量叠加原理。或以分量形式进行计算。

(3) 冲击、碰撞问题中估算平均冲力

(4) 适用于惯性系，在非惯性系中，只有添加惯性力的冲量后才成立

A3、动量定理（多质点系统）



设有N个质点构成一个系统，

第 i 个质点：质量 m_i

内力 $\vec{f}_i$，外力 $\vec{F}_i$，初速度 $\vec{v}_{i0}$，末速度 $\vec{v}_i$ 。

系统总动量： $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$

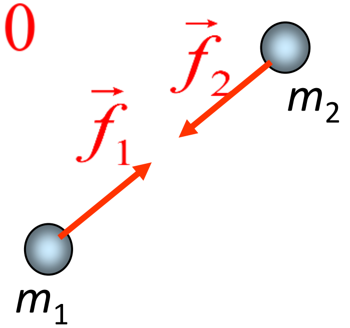
由质点动量定理：

单个质点 $\int_{t_0}^{t} \left(\vec{F}_i + \vec{f}_i\right) \mathrm{d}t = m_i \vec{v}_i - m_i \vec{v}_{i0}$

所有质点 $\int_{t_0}^{t} \left(\sum \vec{F}_i + \underbrace{\sum \vec{f}_i}_{=0}\right) \mathrm{d}t = \sum m_i \vec{v}_i - \sum m_i \vec{v}_{i0}$

根据牛顿第三定律，内力之和：

$\sum \vec{f}_i = 0$



$\therefore \quad \int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_i \mathrm{d}t = \vec{P} - \vec{P}_0 = \Delta \vec{P}$

多质点系统（即：质点系）的动量定理：系统所受合外力的冲量等于系统总动量的增量。

积分形式：$\boxed{\int_{t_0}^{t}\sum \vec{F}_i \mathrm{d}t = \vec{P} - \vec{P}_0 = \Delta\vec{P}}$ 微分形式：$\sum \vec{F}_i = \dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$

考虑合外力为零的孤立体系，
则动量保持不变：

多质点系统的**动量守恒定律**

B、动量守恒定律

动量守恒定律：系统所受合外力为零时，系统的总动量保持不变。

当 $\sum \vec{F}_i = 0$ 时， $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i =$ 常矢量。

(1) 动量守恒是指系统动量总和不变，系统内各个质点的动量是可变的, 可通过内力进行传递和交换。

(2) 当外力作用远小于内力作用时，可近似认为系统的总动量守恒。（如：碰撞、打击等）

(3）定律不仅适合宏观物体，同样也适合微观领域。（量子力学）

动量守恒定律非常普适，但在更高等的物理学中也有不适用的时候

- 来源于牛顿第三定律，要求作用力和反作用力同时产生。接触力的确是同时发生的，但对于一些非接触相互作用，则不满足，譬如：

- 电磁相互作用，作用力的传递速度是有限的（光速）。因此会在短暂的时间内，动量守恒定律“失效”。

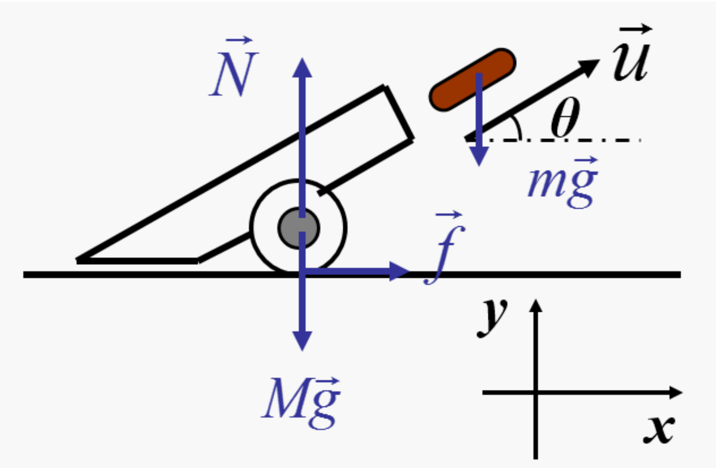
- 引力相互作用，作用力的传递速度也是有限的，动量守恒定律同样在短暂的时间内“失效”。

- 因此需要将作用场的动量考虑进来，动量守恒定律依然能够成立。

上述情况属于拓展介绍。在一般情况下，动量守恒定律是可以完全放心使用的。

例题

炮车的质量为M，炮弹的质量为m。若炮车与地面有摩擦，摩擦系数为μ，炮弹相对炮身的速度为u， 求炮身相对地面的反冲速度 v 。



解：选取炮车和炮弹组成系统进行内、外力分析。
水平的动量是否守恒？

运用质点系的动量定理：

$$\int_0^\tau (M\vec{g}+m\vec{g}+\vec{N}+\vec{f})\mathrm{dt}=M\vec{v}+m(\vec{v}+\vec{u})-0$$

分量形式：x方向：$\int_0^\tau \mathrm{fdt}=-Mv+m(-v+u\cos\theta)$ —— (1)

f, N – 变力 v.s. 常力？

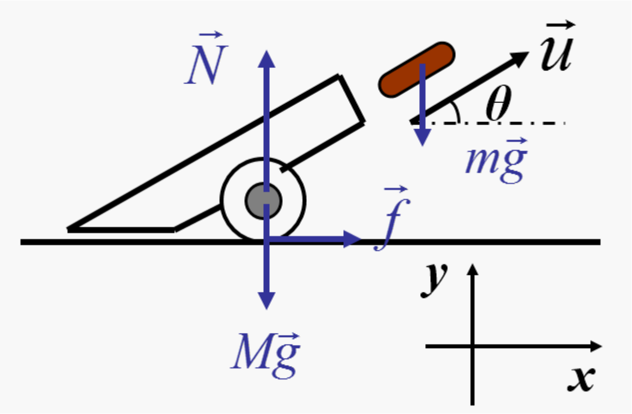
分量形式：y方向：$\int_0^\tau (N-Mg-mg)\mathrm{dt}=mu\sin\theta$ —— (2)

例题

$$\int_0^\tau f\mathrm{d}t = -Mv + m(-v + u\cos\theta) — (1)$$

$$\int_0^\tau (N - Mg - mg)\mathrm{d}t = mu\sin\theta — (2)$$

$$f = \mu N — (3)$$



$\because \tau$ 很短，$N >> (Mg + mg)$ $\int_0^\tau N\mathrm{d}t = mu\sin\theta — (2')$

$$-(M+m)v + mu\cos\theta = \mu mu\sin\theta$$

$$v = \frac{mu(\cos\theta - \mu\sin\theta)}{M+m}$$

自锁现象，即 $v=0$ 时 $\cot\theta = \mu$

C、质心、质心运动定理

C1、质心位矢：

Position vector of **center of mass** of a system of particles

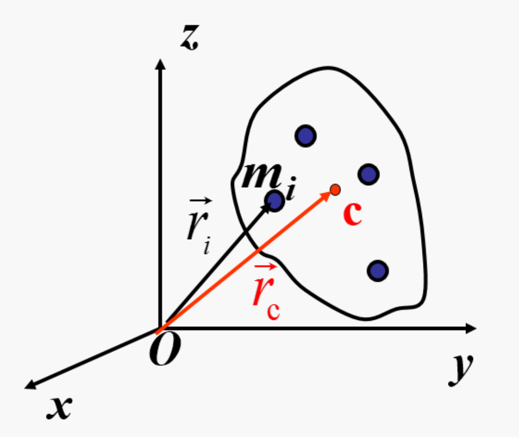
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Position vectors of individual particles

Masses of individual particles

质心是与质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。$M = m_1 + m_2 + \ldots$ 为系统的总质量。

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i$$



质量连续分布物体的质心：

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}}$$

C2、质心运动

质心速度:
$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{v_i}$$

总动量和质心的关系:

Total mass of a system of particles

Momenta of individual particles

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = \vec{P}$$

Velocity of center of mass

Total momentum of system

系统的总动量，即系统内各质点的动量的矢量和，等于系统的总质量M乘上质心的速度。

C3、质心运动定理

由多质点体系的动量定理：$$\int_{t_0}^{t}\sum_i \vec{F}_i \mathrm{d}t=\sum_i m_i\vec{v}_i-\sum_i m_i\vec{v}_{i0}=\boldsymbol{M}\vec{v}_{\mathrm{c}}-\boldsymbol{M}\vec{v}_{\mathrm{c}0}$$

微分形式：$$\sum_{i=1}\vec{F}_i\mathrm{d}t=\boldsymbol{M}\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{c}} \Longrightarrow \boxed{\sum_i \vec{F}_i=\boldsymbol{M}\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}\vec{a}_{\mathrm{c}}}$$

质心运动定理：质心的运动等同于一个质点的运动，这个质点具有质点系的总质量，它受到的外力为质点系所受的所有外力的矢量和。

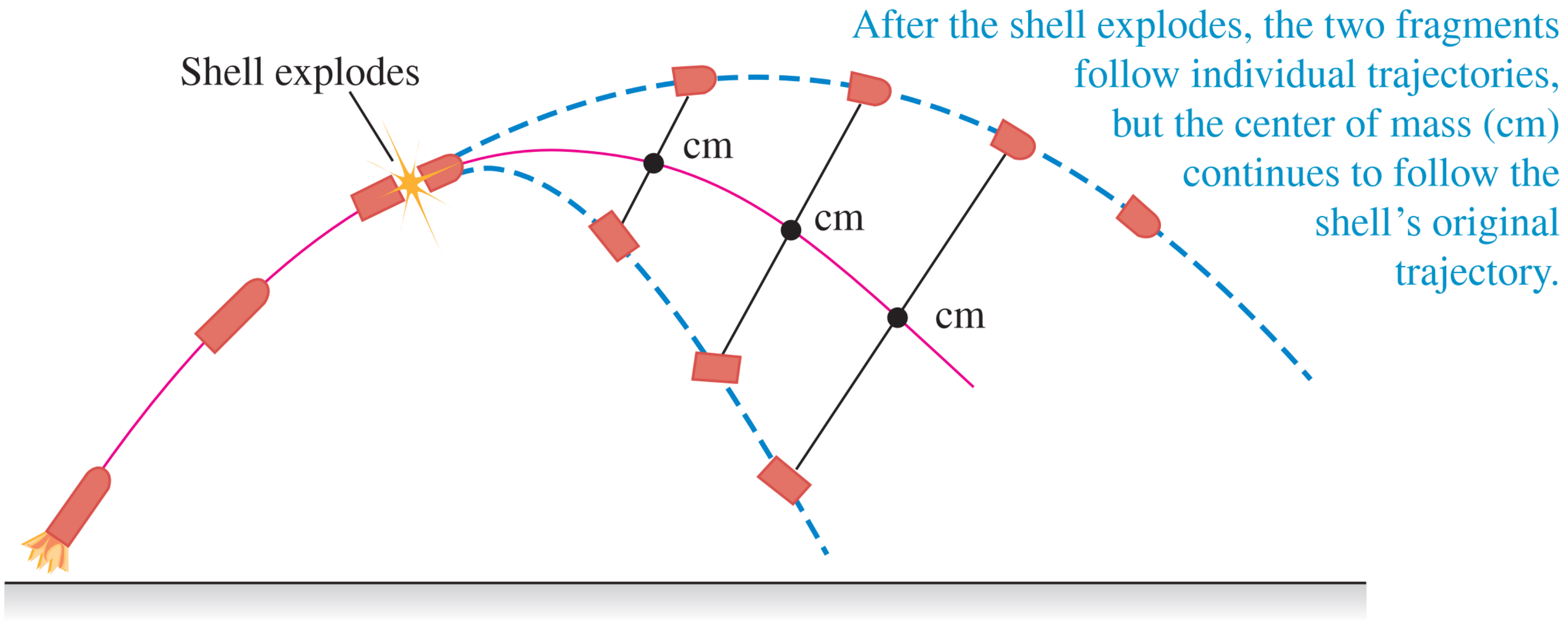
质心系可能是惯性或者非惯性系，在非惯性系考虑作用在质心上惯性力后，动量守恒（零动量），动能定理和角动量定理均成立。

Net external force on an object or a collection of particles

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

Total mass of object or collection of particles

Acceleration of center of mass



受到重力。虽然在运动中炮弹和弹壳分离，各自沿新的轨迹运动，但它们的质心仍然沿原来的抛物线运动。

质心运动定理：

$$\sum_i \vec{F}_i = M\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_{\mathrm{c}}$$

牛顿第二定律：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

几点说明：

质心运动定理是矢量方程。

质心是一个抽象的物理概念，不对应实物。

质心运动定理与牛顿第二定律适用范围相同。

对孤立体系，其质心的加速度为零，即C点的加速度为零。因此，动量守恒定律又可表述为：**孤立体系的质心作匀速直线运动或静止**，也叫做**质心定理**。

D、火箭推进原理

长征五号B运载火箭首飞成功 我国载人航天工程“第三步”任务开启

2020-05-06 06:53:30 来源：新华网 作者：

错误：火箭利用燃烧产生废气推动空气的力来增加速度。

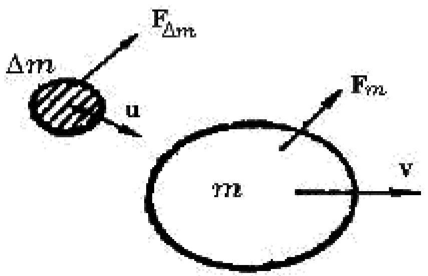
正确：火箭利用把燃烧后的废气逐渐向外喷出获取动量来增加自身的运动速度。

外太空没有空气，也就没有阻力，火箭速度增加的更快！

D1、变质量物体的运动

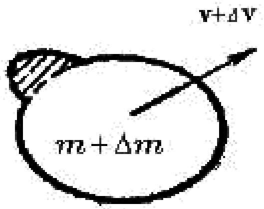
这里讨论的变质量物体指在运动过程中**不断与外界交换质量的物体**的运动。

可以把质量不断变化的物体（称为主体）和由它放出来的物体（或附着其上的物体）看成一个质点系，就可以和不变质量的质点系一样处理。



t 时刻

以增质量为例。由体系的动量定理，得：



$t+\Delta t$ 时刻

$$(m+\Delta m)(\vec{\upsilon}+\Delta\vec{\upsilon})-(m\vec{\upsilon}+\Delta m\vec{u})=\vec{F}\Delta t$$

$$\cancel{m\vec{\upsilon}}+m\Delta\vec{\upsilon}+\Delta m\vec{\upsilon}+\underbrace{\boxed{\Delta m\Delta\vec{\upsilon}}}_{\sim 0}-\cancel{m\vec{\upsilon}}-\Delta m\vec{u}=\vec{F}\Delta t$$

$$m\Delta\vec{\upsilon}=\Delta m(\vec{u}-\vec{\upsilon})+\vec{F}\Delta t$$

整理后两边除以**Δ*t***，并取极限**Δ*t*→0**，得：$m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=(\vec{u}-\vec{\upsilon})\dfrac{dm}{dt}+\vec{F}$

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=(\vec{u}-\vec{\upsilon})\frac{dm}{dt}+\vec{F}}$$

减质量时，同样可得到相同的方程。该方程称为**变质量物体的运动微分方程**。

其中**m**为主体质量。

- 在增质量时， $(\vec{u}-\vec{\upsilon})dm$ 为质量**dm**附着主体前相对于主体的动量。

  $(\vec{u}-\vec{\upsilon})\frac{dm}{dt}$ 为附着过程中主体的动量增加率，即主体受到的冲击力；

- 减质量时，**dm**为负，$(\vec{u}-\vec{\upsilon})|dm|$ 为主体给予**|dm|**的冲量，$(\vec{u}-\vec{\upsilon})|\frac{dm}{dt}|$

  为主体给予的推力，$(\vec{u}-\vec{\upsilon})\frac{dm}{dt}$ 为对主体的反冲力。

- 最后一项 $\vec{F}$ 为系统受到的合外力。由于$|dm|$ 很小，常常近似认为 $\vec{F}$ 是

  主体受到的合外力。

当 $\vec{u}=0$ 时，方程可改写为 $\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=\vec{F}$　　当 $\vec{u}=\vec{\upsilon}$ 时，方程又可改写为 $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}$

D2、火箭推进原理

设火箭喷出废气的相对速度为一常量 $\upsilon_r = (\vec{u} - \vec{\upsilon})$，火箭在运行中不受任何外力作用；火箭起始质量为 m_0，其中燃料质量为 m'，空火箭质量为 $m_S = m_0 - m'$；单位时间内喷出废气的质量为常数 k。求火箭能够达到的速度υ。

[解] 利用方程 $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = (\vec{u} - \vec{\upsilon})\frac{dm}{dt} + \vec{F}$，外力为零，则有

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -\upsilon_r\frac{dm}{dt} \qquad 即 \qquad \frac{d\upsilon}{\upsilon_r} = -\frac{dm}{m}$$

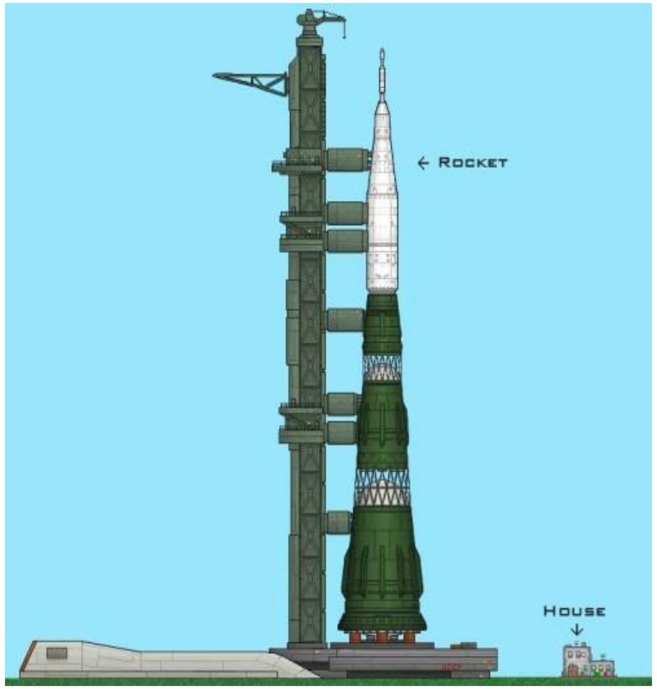
积分，并利用初始条件：$t = 0$时，$\upsilon = 0$，$m = m_0$

当燃料烧完时，火箭所具有的速度为：$\upsilon = \upsilon_r \ln\frac{m_0}{m_s} = \upsilon_r \ln(1 + \frac{m'}{m_s})$

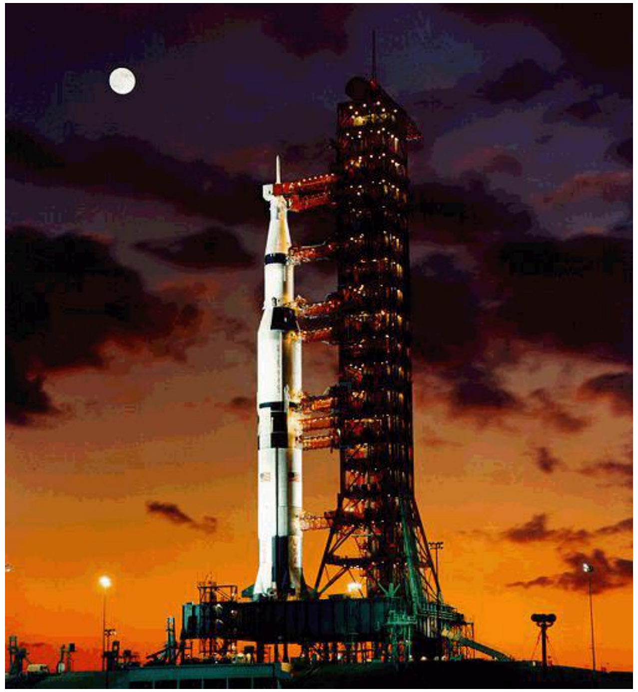
为获得大的终速度υ，应增大喷射速度υ_r，或增大燃料与空火箭质量之比（受限制），因此，通常采用多级火箭来提高终速度：$v = v_1 \ln N_1 + v_2 \ln N_2 + v_3 \ln N_3 + \cdots$， $Ni = mi/mj$

火箭发射的“沉重”代价

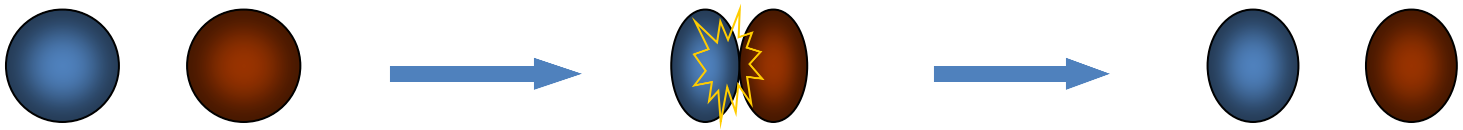
苏联N1运载火箭
火箭类型：五级重型运载火箭
直径17米，高度105 米
火箭重2735吨，低地轨道载荷：75吨



美国土星5号运载火箭
火箭类型：三级液体燃料重型运载火箭
高度110.6米,直径10.1米
质量3039吨，低地轨道载荷：119吨



E、碰撞

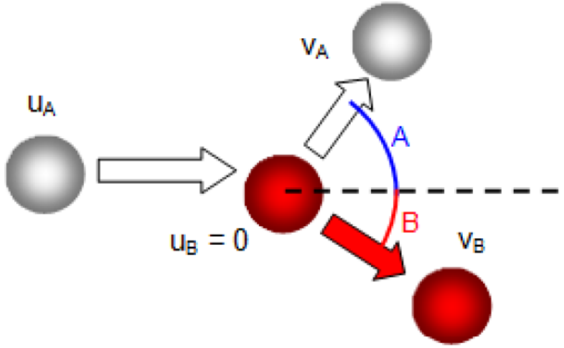


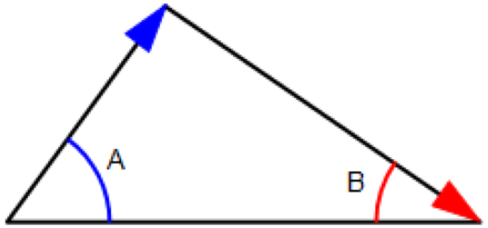
1. 压缩阶段　　2. 恢复阶段

- ❑ 弹性碰撞：碰撞没有形变或碰撞后物体的形变可以完全恢复，且碰撞前后系统的总机械能守恒。
- ❑ 非弹性碰撞：碰撞后物体的形变只有部分恢复，系统有部分机械能损失。
- ❑ 完全非弹性碰撞：碰撞后物体的形变完全不能恢复，两物体合为一体一起运动。系统有部分机械能损失。

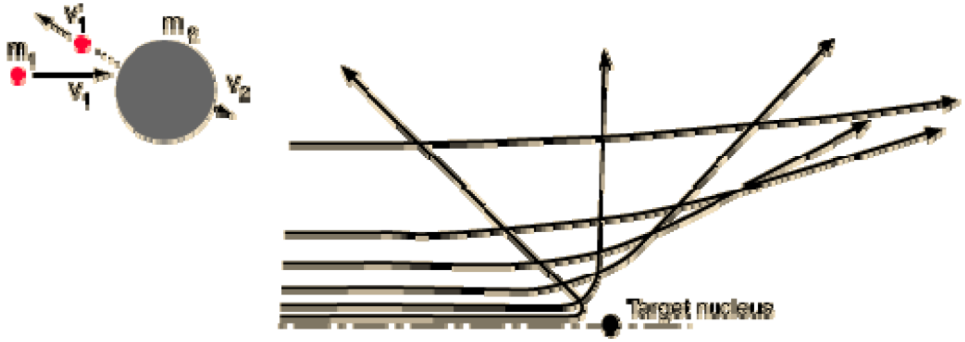
碰撞问题：应用

- 球形刚体完全弹性碰撞问题(Snooker)





- 粒子碰撞：从散射截面分布获得粒子的信息



- 恒星在星系中的运动：动力学摩擦和两体弛豫

北京正负电子对撞机

1984年10月7日，邓小平在电子对撞机国家实验室奠基典礼上为基石培上第一锹土。

一维弹性碰撞　elastic collision

动量守恒： $m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$

动能守恒： $\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_{10} + 2 m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_{20} + 2 m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{v_2 - v_1 = v_{10} - v_{20}}$$

一维弹性碰撞：讨论

1. 当m_1=m_2时， 则: $v_1 = v_{20} \quad v_2 = v_{10}$

在一维弹性碰撞中, 质量相等的两个质点在碰撞中交换彼此的速度。

2. 若v_{20}=0，且 m_2>>m_1，则: $v_1 \approx -v_{10} \quad v_2 \approx 0$

质量很小的质点与质量很大的静止质点碰撞后，调转运动方向，而质量很大的质点几乎保持不动。

3. 若v_{20}=0， 且m_2<<m_1， 则: $v_1 \approx v_{10} \quad v_2 \approx 2v_{10}$

质量很大的入射质点与质量很小的静止质点碰撞后速度几乎不变，但质量很小的质点却以近两倍的速度运动起来。

一维非弹性碰撞：inelastic collision

机械能不再守恒 (总能量还是守恒的，转化为内能等)

动量仍然守恒： $$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

因为系统不受外力！

想象一个钢球和一块橡皮泥在空中碰撞，碰撞后，钢球裹着橡皮泥球运动

一维非弹性碰撞：

动量守恒： $m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2$

极限弹性

$$\boxed{v_2-v_1=v_{10}-v_{20}}$$

极限非弹性

$$\boxed{v_2-v_1=0}$$

$$\boxed{e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}}$$

——恢复系数

弹性碰撞： $e=1$ $(v_2-v_1)=(v_{10}-v_{20})$

非弹性碰撞： $0<e<1$

完全非弹性碰撞： $e=0$ $v_2=v_1$

非弹性散射

碰后两球的速度：$v_1 = v_{10} - m_2 \dfrac{(1+e)(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$

$$v_2 = v_{20} + m_1 \frac{(1+e)(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$

机械能损失：$\Delta E_{\mathrm{k}} = -\dfrac{1}{2}(1-e^2)\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{10} - v_{20})^2$

两体二维/三维碰撞：质心参考系

1、质心系与实验室系　　在碰撞问题中质心系是惯性系

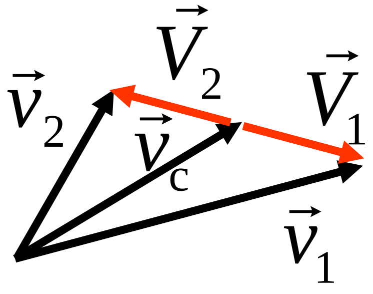
2、质心系中系统总动量恒为零　$\vec{V}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_c$　　$\vec{v}_c = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i} \qquad \sum_i m_i\vec{V}_i = \sum_i m_i\vec{v}_i - \sum_i m_i\vec{v}_c = 0$$

质心系中，在碰撞前后两质点动量始终大小相等，方向相反

$$\vec{V}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\vec{V}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$



质心参考系中研究碰撞

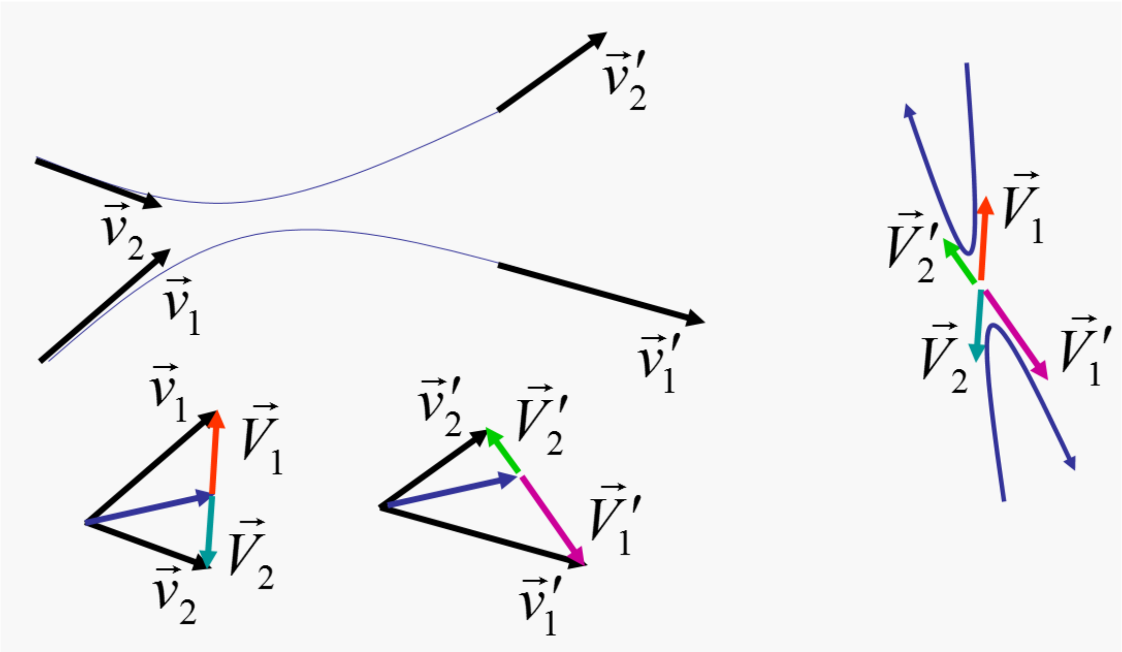
$$\vec{p}_1 = m_1\vec{V}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = \mu\vec{v}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{V}_2 = \frac{-m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = -\mu\vec{v}$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = 0$$

μ —— 折合质量

$\vec{v}$ —— 相对速度

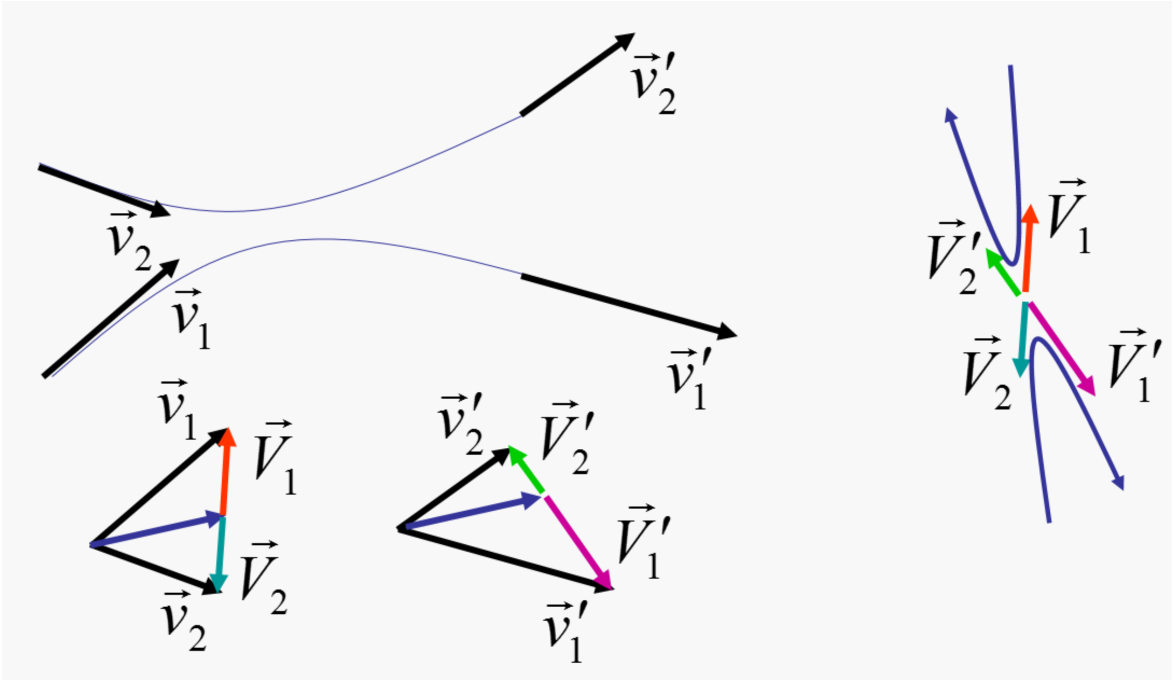


碰撞的一般处理-质心参考系

$$m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2=m_1\vec{V}_1'+m_2\vec{V}_2'=0$$

$$\begin{cases} m_1V_1=-m_2V_2 \quad m_1V_1'=-m_2V_2' \\ e=\dfrac{V_2'-V_1'}{V_1-V_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_1'=-eV_1 \quad V_2'=-eV_2$$



碰撞的一般处理

碰撞中的能量损失

$$\Delta E=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2-\left(\frac{1}{2}m_1V_1'^2+\frac{1}{2}m_2V_2'^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}m_1V_1^2\left(1-e^2\right)+\frac{1}{2}m_2V_2^2\left(1-e^2\right)$$

利用 $\vec{V}_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$ $\quad\vec{V}_2=\dfrac{-m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$

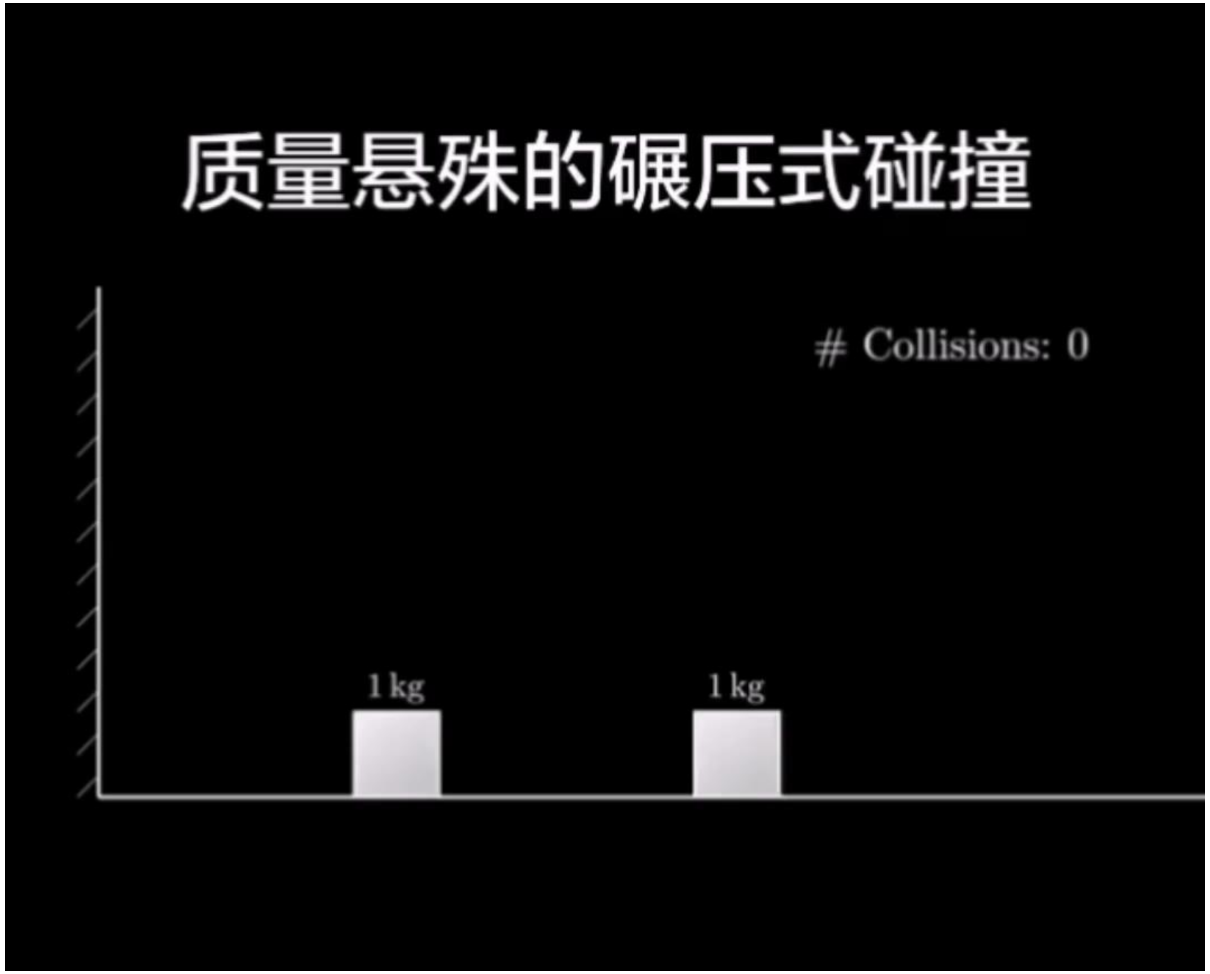
$$\Delta E=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2\left(1-e^2\right)=\frac{1}{2}\mu v^2\left(1-e^2\right)$$

相对质心的总动能

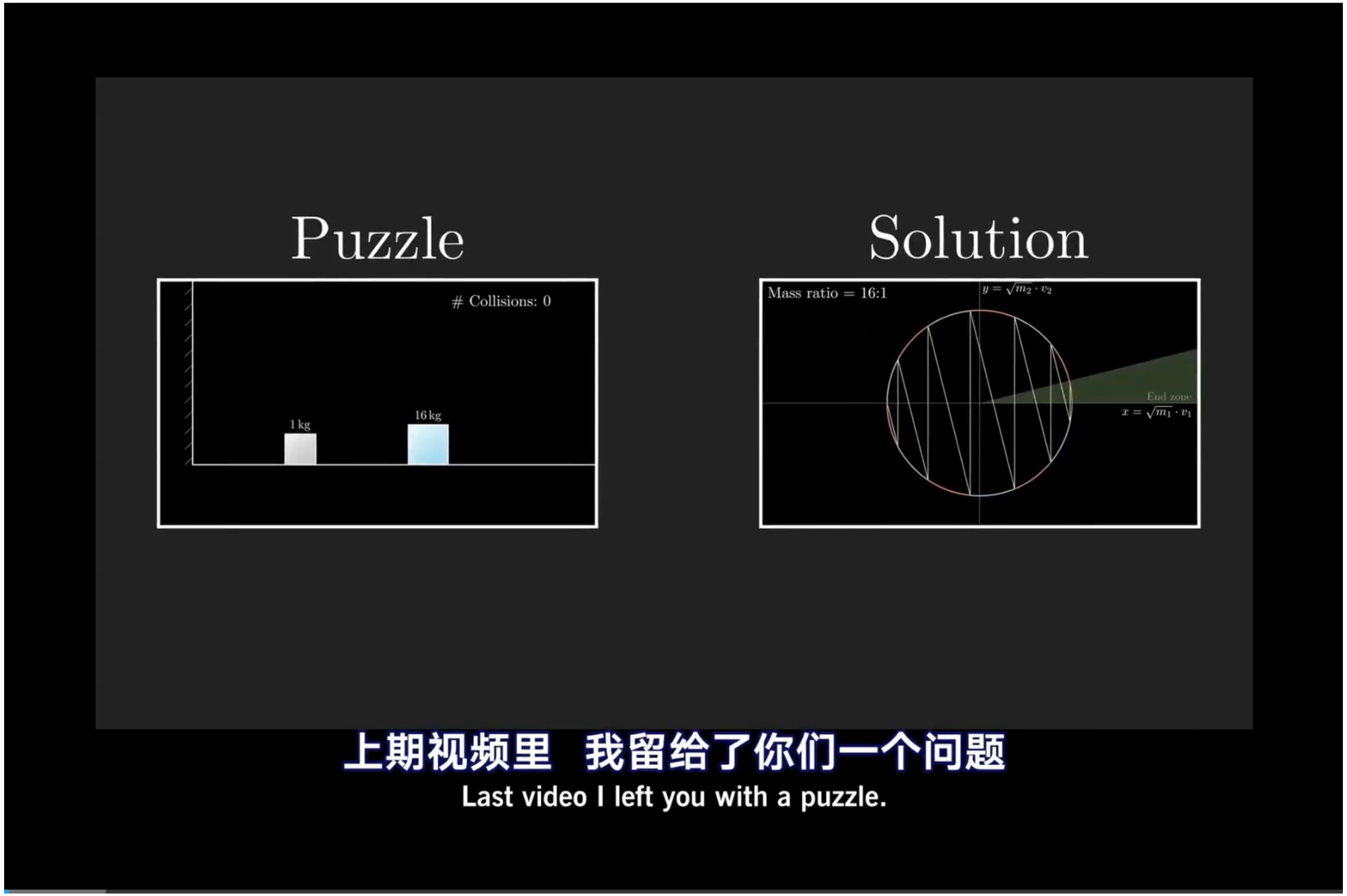
$e=1\quad\Delta E=0\qquad e=0\quad\Delta E=\dfrac{1}{2}m_1V_1^2+\dfrac{1}{2}m_2V_2^2$

∴完全非弹性碰撞后，
质点相对质心系静止

数理一家亲：用弹性碰撞可以求圆周率π！



动量守恒+能量守恒



后面全是数学了，想看全部证明的同学移步：https://www.bilibili.com/video/BV1bt41147H5