Chap 9

多变量函数的微分学

Chap 9 — 1

多变量函数及其连续性

9.1.2 平面上的点集

一、邻域 设$M_0\in\mathbf{R}^2$, $r>0$, 集合

$$B(M_0,r)=\{M\,|\,\rho(M,M_0)<r\}$$

称为M_0的r **圆邻域**(有时记为$B_r(M_0)$)

$$S(M_0,r)=\{M(x,y)\,||\,x-x_0\,|<r,|\,y-y_0\,|<r\}$$

称为M_0的r **方邻域.**

试一试 去心邻域$B_(M_0, r)$的定义?

定义 设$E\subset\mathbf{R}^2$, 若$\exists R>0$, 使$E\subset B(O,R)$, 则称E为

有界集, 否则称为**无界集**. E的**直径**定义为

$$\operatorname{diam}(E)=\sup_{M',M''\in E}\{\rho(M',M'')\}$$

二、内点, 外点和边界点

定义 设$M \in \mathbf{R}^2, E \subset \mathbf{R}^2$

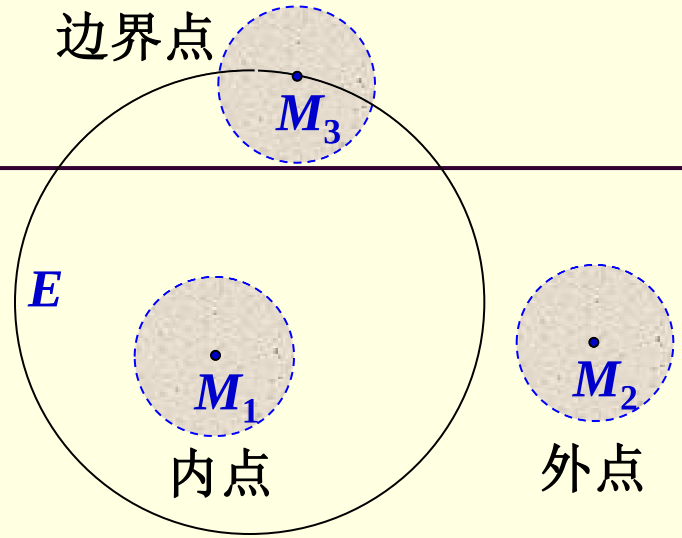
1° 若$\exists r > 0$, 使得 $B(M,r) \subset E$, 则称M是E的内点.

E全体内点的集合称为E的核, 记为E°.

2° 若$\exists r > 0$, 使$B(M,r) \cap E = \varnothing$, 则称$M$是$E$的外点.

3° 若$\forall r > 0$, $B(M,r) \cap E \neq \varnothing$且$B(M,r) \cap E^c \neq \varnothing$

则称M是E的边界点, 边界点的集合称为边界, 记为∂E.



结论 $$E^\circ \cup \partial E \cup (E^c)^\circ = \mathbb{R}^2$$

试一试 $\mathbf{R}^n$中上述名词的定义？

三、孤立点与聚点

定义 设$M \in \mathbf{R}^2, E \subset \mathbf{R}^2$, 若$\forall r > 0, B_{-}(M, r) \cap E \neq \varnothing$,

则称M是E的**聚点**. 聚点的集合称为**导集**, 记为E'.

定义 设$M \in \mathbf{R}^2, E \subset \mathbf{R}^2$, 若$\exists r > 0, B(M, r) \cap E = \{M\}$,

则称M是E的**孤立点**.

四、平面点列的极限

定义 设$\{M_n\}\subset\mathbf{R}^2$, 其中 $M_n(x_n, y_n)$, 若存在 $M_0(x_0, y_0)$

使得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(M_n, M_0)=0$$

则称$\{M_n\}$收敛于M_0, 记为$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=M_0$

结论 1° 若$\{M_n\}$收敛, 则其极限点必唯一.

$$2^\circ \lim_{n\to\infty}M_n=M_0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\text{且}\lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

定理 平面有界点列必有收敛子列.

五、开集与闭集

定义 设$E \subset \mathbf{R}^2$, 若E中的点都是E的内点, 即$E = E^\circ$, 则称E为**开集**.

定义 设$E\subset\mathbf{R}^2$, 若E的余集为开集, 则称E为**闭集**.

E与其导集E'的并集称E的**闭包**, 记为 $\overline{E}$

性质1 两个开集并和交仍为开集;

两个闭集并和交仍为闭集.

性质2 E 为开集 $\Leftrightarrow \partial E \cap E = \varnothing$

定理 下面3条等价

1° E 为闭集 $\quad 2^\circ$ $\partial E \subset E$ $\quad 3^\circ$ $E = \overline{E}$

定义 设$E \subset \mathbf{R}^2$, 若$\forall P, Q \in E$, 都存在包含于E中的**连续曲线**连接P, Q, 则称E是(**道路**)**连通的**.

连通开集称为**开区域**, 开区域的闭包称为**闭区域**

9.1.2 多变量函数

定义 设$D\subset \mathbf{R}^n$, 映射

$$f: D \to \mathbb{R},$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$$

称为n元函数, 记为 $u = f(\boldsymbol{x})$, 其中D称为定义域.

值域 $f(D)=\{u \mid u = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\in D\}$

等高(值)线 $L_c =\{(x,y) \mid f(x,y)=c, c\in f(D)\}$

例1 考察函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

定义 设$D \subset \mathbf{R}^n$, 映射

$$f: D \to \mathbb{R}^m,$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

称为**m维n元向量值函数**, 记为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

- 坐标形式

$$\boldsymbol{f}: (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

其中$\boldsymbol{f}$ 的分量

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

9.1.3 多变量函数的极限

定义 设 $D \subset \mathbf{R}^2$, f 在 D 上定义, $M_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点.

若 $\exists\, a \in \mathbf{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M \in B_{-}(M_0, \delta) \cap D:$

$$|f(M) - a| < \varepsilon$$

则称当 $M \to M_0$ 时 $f(M)$ 的(二重)极限为 a, 记为

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = a}$$

- 坐标形式

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = a$$

注意

$$M(x,y)\in B_{-}(M_0,\delta)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-x_0|,|y-y_0|<\delta_1,(x,y)\neq(x_0,y_0)$$

问题 $\xleftrightarrow{?} \quad 0<|x-x_0|,|y-y_0|<\delta_1$

➢ 与单变量函数相似点

1. 当$(x, y) \to (x_0, y_0)$时, $f(x, y)$ 的变化趋势.

2. 有类似的性质和运算法则.

➢ 与单变量函数区别

平面上$M \to M_0$有无穷多方向, 且采取的路径也是任意的, 既可取直线, 也可取曲线. 无论沿何种方向或何种路径, 只要$\rho(M, M_0)$充分小, 就有

$$|f(M) - a| < \varepsilon.$$

例2 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$

例3 判断 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 的存在性.

例4 判断

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

在(0,0)点极限的存在性.

■ 累次极限

定义 设 $I\times J\subset\mathbf{R}^2$, x_0, y_0分别为I, J的聚点. 固定$x\in I$ $(x\neq x_0)$. 若存在首次极限 $\varphi(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 且

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=a$$

则称$f(x,y)$在(x_0,y_0)处先y后x的累次(二次)极限为a,记为

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=a}$$

试一试 先x后y的累次极限的定义？

例6 考察

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0 \end{cases}$$

在(0,0)处二重极限和累次极限的存在性.

思考 若

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0 \end{cases}$$

结论如何?

例7 考察

$$f(x,y)=\frac{y}{x}\quad (x\neq 0)$$

在(0,0)处二重极限和累次极限的存在性.

问题 二重极限与累次极限的关系?

想一想 向量值函数极限 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}$ 的定义?

9.1.4 多变量函数的连续性

定义 设 $f:B(M_0, r)\to\mathbf{R}$. 若

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall M\in B(M_0,\delta):\ |f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$$

或者
$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$$

则称 $f(M)$在M_0连续.

- D上的连续函数类$C(D)$的定义？

例8 证明 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ 在$\mathbf{R}^2$上连续.

命题 若 $f(x,y)$在(x_0,y_0)连续, 则 $f(x,y_0)$在$x=x_0$处连续,

$f(x_0,y)$在$y=y_0$处连续.

问题 若 $f(x,y)$满足: $f(x,y_0)$在$x=x_0$处连续, $f(x_0,y)$

在$y=y_0$处连续, 是否有 $f(x,y)$在(x_0,y_0)连续?

例9 考察 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$处情况.

■ 一致连续性

定义 设 $D \subset \mathbf{R}^2, f: D \to \mathbf{R}$. 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M', M'' \in D, \rho(M', M'') < \delta:$$

$$| f(M') - f(M'') | < \varepsilon$$

则称 f 在D上一致连续, 记为 $f \in U.C.(D)$

结论 f 在D上不一致连续的肯定叙述:

$$\boxed{\begin{gathered}\exists \varepsilon_0 > 0, \exists \{M_n'\}, \{M_n''\} \subset D: \lim_{n\to\infty} \rho(M_n', M_n'') = 0 \\ | f(M_n') - f(M_n'') | \geq \varepsilon_0\end{gathered}}$$

例10 说明$f(x,y)=\sin xy$在$\mathbf{R}^2$不一致连续.

■ 多变量连续函数的性质

- 与单变量连续函数类似, 有局部有界性, 局部保号性, 四则运算, 复合运算等等.
- 连通有界闭集上的多变量连续函数还有:

定理 设$D\subset\mathbf{R}^2$为连通有界闭集, $f\in C(D)$, 则f在D上有

- 有界性 ● 最值性 ● 一致连续性 —— D无需连通
- 介值性 ● 零值性 (思考：额外条件?)