Quiz 2.

1. 给出二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处收敛的 Cauchy 准则的完整描述：

$\forall\ \varepsilon>0$，对于任意点列 $\{M_n\}$，$M_n=(x_n,y_n)$，$\lim_{n\to\infty} M_n=(x_0,y_0)$，$\exists N$. s.t. $\forall\ m,n>N$, $|f(M_m)-f(M_n)|\le\varepsilon$

2. 求极限 $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$（极限可能不存在）

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{1+\frac{1}{2}xy-1}=2$$

3. 求极限 $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$（极限可能不存在）

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}\Rightarrow \text{不存在.}$$

4. 求 $f(x,y)=e^x cosy$ 在 $(0,0)$ 点带 Peano 余项的 Taylor 展开式至三阶项。

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\quad \cos y=1-\frac{1}{2}y^2+o(y^2).$$

$$f(x,y)=e^x\cos y=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(1-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}y^2+x-\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

1. 设 $u=u(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ 以及条件 $u(x,2x)=x, u_x'(x,2x)=x^2$，求 $u_{xx}''(x,2x), u_{xy}''(x,2x)$ 和 $u_{yy}''(x,2x)$.（其中二阶偏导数均连续）

$$1=\frac{\partial u(x,2x)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=u_x'(x,2x)+2u_y'(x,2x)$$

$$\Rightarrow u_y'(x,2x)=\frac{1}{2}(1-x^2).$$

$$2x=\frac{\partial u_x'(x,2x)}{\partial x}=u_{xx}''(x,2x)+2u_{xy}''(x,2x)$$
$$-x=\frac{\partial u_y'(x,2x)}{\partial x}=u_{yx}''(x,2x)+2u_{yy}''(x,2x)$$

其中 $u_{xx}''=u_{yy}''$, $u_{yx}''=u_{xy}''$

$$\Rightarrow\begin{cases}u_{xx}''(x,2x)=u_{yy}''(x,2x)=-\frac{4}{3}x\\ u_{xy}''(x,2x)=\frac{5}{3}x\end{cases}$$

2. 求以下曲面在 (θ_0, ϕ_0) 处的切平面与法线方程。$x = asin\theta cos\phi, y = bsin\theta sin\phi, z = ccos\theta$。

$x_0 = a\sin\theta_0 \cos\phi_0 \quad y_0 = b\sin\theta_0 \sin\phi_0 \quad z_0 = c\cdot\cos\theta_0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ 切平面为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$

法线 $\begin{cases} x = x_0 + \frac{x_0}{a^2} t \\ y = y_0 + \frac{y_0}{b^2} t \\ z = z_0 + \frac{z_0}{c^2} t \end{cases}$

3. 求曲线 C: $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$ 在点 $M(1, -2, 1)$ 处的切线及法平面方程。

$\vec{n_1} = (2, -4, 2). \quad \vec{n_2} = (1, 1, 1).$

$\vec{t} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (-6, 0, 6).$

故切线为 $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -2 \\ z = 1 + 6t \end{cases}$

$-6(x-1) + 6(z-1) = 0.$

$\Rightarrow x - z = 0.$

4. 求函数 $u = x^2 - y^2 + 2xy$ 在单位圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 内的最大、最小值

令 $x = r\cos\theta \quad y = r\cdot\sin\theta \quad r \in [0, 1]. \theta \in [0, 2\pi]$

$u = r^2\cos^2\theta - r^2\sin\theta + 2r^2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$= r^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta) = \sqrt{2} r^2 \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}).$

$u_{max} = \sqrt{2} \quad u_{min} = -\sqrt{2}$

1. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，$x=x(u,v), y=y(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 处连续，用 $\epsilon-\delta$ 语言证明复合函数 $f(x(u,v),y(u,v))$ 在 (u_0,v_0) 处连续。

$$|f(x(u,v),y(u,v)) - f(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))| \le |f(x(u,v),y(u,v)) - f(x(u,v),y(u_0,v_0))|$$
$$+|f(x(u,v),y(u_0,v_0)) - f(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))| \quad ①$$

由于 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1$, s.t. $\forall x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$，$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. ②

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_2$, s.t. $\forall y\in(y_0-\delta_2, y_0+\delta_2)$，$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. ③

由于 $x=x(u,v)$ 在 $M(u_0,v_0)$ 处连续，所以

$\forall \varepsilon_1>0$，$\exists \delta_3>0$, s.t. $\forall (u,v)\in B_r(M,\delta_3)$, s.t. $|x(u,v)-x(u_0,v_0)|<\varepsilon_1$ ④

由于 $y=y(u,v)$ 在 $M(u_0,v_0)$ 处连续，所以

$\forall \varepsilon_2>0$，$\exists \delta_4>0$, s.t. $\forall (u,v)\in B_r(M,\delta_4)$, s.t. $|y(u,v)-y(u_0,v_0)|<\varepsilon_2$ ⑤.

令 ④⑤中的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，分别等于 $\varepsilon_1=\delta_1$，$\varepsilon_2=\delta_2$

所以 $|f(x(u,v),y(u,v)) - f(x(u,v),y(u_0,v_0))|<\varepsilon$.

$|f(x(u,v),y(u,v)) - f(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))|<\varepsilon$.

综上，$\forall\varepsilon>0$，$\exists \delta=\min\{\delta_3,\delta_4\}$, s.t. $\forall (u,v)\in B_r(M,\delta)$, s.t.

$|f(x(u,v),y(u,v)) - f(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0))|<2\varepsilon$.

所以复合函数在 (u_0,v_0) 处连续

2. 证明：函数 $u=\frac{1}{\sqrt{t^3}}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$ 满足热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{t^3}}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2} = -\frac{3}{2}\frac{u}{t}+\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2}u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u\cdot\left(-\frac{x}{2t}\right) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = u\cdot\left(-\frac{y}{2t}\right) \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = u\cdot\left(-\frac{z}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{u}{2t} + \left(-\frac{x}{2t}\right)\cdot u\cdot\left(-\frac{x}{2t}\right) = -\frac{u}{2t}+\frac{x^2}{4t^2}u$$

$$\Rightarrow. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{u}{2t}+\frac{y^2}{4t^2}u \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{u}{2t}+\frac{z^2}{4t^2}u.$$

$$\Rightarrow. \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

3.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

求证：在 $(0,0)$ 处，$f(x,y)$ 连续但不可微。

$$\lim_{x\to0,y\to0}|f(x,y)-f(0,0)|=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\le\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{4}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=0.$$

$\Rightarrow$ 连续.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{|f(x,y)-f(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$ 令 $y=kx$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\\forall k}}\frac{k^2}{(1+k^2)^2}$$ 故极限不存在.

4. 证明：函数 $z=f(x,y)=(1+e^y)cosx-ye^y$ 有无穷多个极大值，但无极小值。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0 \Rightarrow x_0=k\pi.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^y\cos x-e^y-ye^y=e^y(\cos x-1-y)=0\Rightarrow y_0=\cos x-1=(-1)^{k-1}-1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^y(\cos x-1-y-1)=e^y(\cos x-y-2).$$

当 $k=2n$ 时，$y_0=0$. $\Delta=-2\cdot(-1)=2>0$. 故存在极大值.

$k=2n-1$ 时，$y_0=-2$ $\Delta=-(1+e^{-2})(-1)\cdot e^{-2}(-1+2-2)=-6<0$

故不取极值

故存在无穷多个极大值.