导师沙龙

上海科技大学 数学科学研究所 孙伟

该背还得背

- 数学的学习不能靠死记硬背
- 但也不能完全不背

- 公理无需证明也不能证明
    - 最小公理体系
- 数学源远流长
    - 今天所学的数学必然是有（应）用的数学发展而来的
        - 教授的数学是严谨的，但是发展过程却并不一定（如：顺序）
        - 约定俗成的数学符号术语（如:$= \infty; f', D_x f, \dot{f}, f_x, \frac{df}{dx}$）
- 精确性（比如$\epsilon - N$语言）
    - 自然语言，直观印象的歧义性（如：大胜，大败）
        - 缺乏精确性，反证会有困难

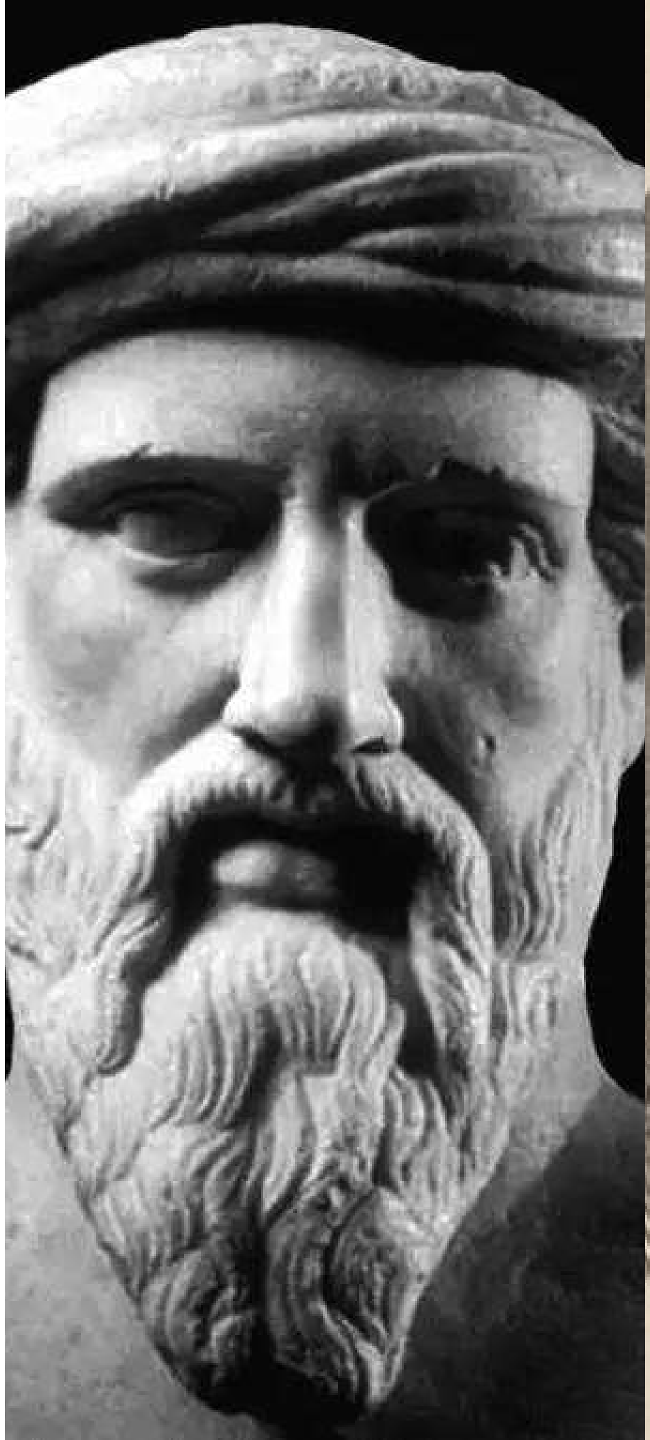
数学三大危机

1. 无理数
2. 微积分的合理性
3. 罗素悖论

无理数

Pythagoras，古希腊数学家、哲学家，在西方长期被认为是Pythagoras定理（勾股定理）的首先发现者。Pythagoras学派认为万物皆数，信仰任何量都可以表示成有理数。

Hippasus发现等腰直角三角形的斜边永远无法用整数比表示，即，$\sqrt{2}$不是有理数。被Pythagoras学派扔进海里。



微积分的合理性

- 微积分的基础是***极限理论***。
- 微积分发明后，数学家们用了两百多年才完成极限理论的严格化。（如， Cauchy, Weierstrass, Riemann 等）

Augustin Louis Cauchy(柯西) 1789~1857

罗素悖论

朴素集合论诞生后，Russell提出：

S由一切不是自身元素的集合所组成，那S属于S吗？

- **直观很有用，但是不可靠，需要公理化集合系统。**
- **对此问题我们不需要深入了解，只需要知道我们需要严格的逻辑证明和意识，避免出现这样的情况。**

- 发散思维，不同内容之间的联想能力
  - 背导数表，主要是为了积分；背泰勒展开式，主要是为了求和函数
  - 要有几个常用反例范本，来检验命题
- 教授时间有限，直接接受结论（如：实数理论）
  - 对于非分析专业的学生，几乎不会遇见相关问题（学了也会忘）；
  - 严格的实数理论繁复耗时，重创学习信心；
  - 如果以上两点理由还不足以说服您，**《数学分析III》**欢迎您。
- 速度
  - 考试时间有限（不能每次都从头推导）

小结 1（源自数学分析，高等数学参考）

- 重要概念：
  - 数列收敛（发散）
  - 数列发散到无穷大
  - 基本列（Cauchy列）****************************
  - 确界的定义及其否定（$\epsilon - N$语言）
    - 极大化序列（上确界），极小化序列（下确界）

- 收敛数列的性质：
  - 几何意义
  - 有界性
  - 保序性 （不严格）
  - 四则运算

- 证明数列收敛的方法:
  - 不等式放缩 + 定义
  - 不等式放缩 + 夹挤原理
    - 比较原理
  - Cauchy收敛准则 ******************************
  - 单调有界 $_{必}$ 收敛

- 证明数列不收敛的方法：
  - 不等式放缩 + 定义
  - Cauchy收敛准则 ***************************
  - 子列不收敛或两子列极限不同
  - 反证法

- 数列极限的计算方法：
    - 四则运算
    - Stolz定理
        - 化简
    - 等价无穷大、无穷小替换（仅在商形式中应用，非商形式要处理）
- 常用的极限表达式：
    - $\lim_{n\to\infty} q^n = 0, (|q| < 1)$
    - $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n := e$
    - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, (a > 0)$
    - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

小结 2

- 重要概念：
  - 函数的基本概念（定义域是函数构成的一部分）
  - 函数极限存在/为无穷大量的$\epsilon - \delta$语言及其否定
  - Cauchy收敛的$\epsilon - \delta$语言及其否定
  - 初等函数：I L A T E
- 函数极限的性质：
  - 局部有界性
  - 局部保序性
  - 四则运算；复合

- 证明函数极限存在的方法：
    - 不等式放缩 + 定义
    - 不等式放缩 + 夹挤定理
        - 比较定理
    - Cauchy收敛准则 ************************
- 证明函数极限不存在的方法：
    - 不等式放缩 + 定义
    - Cauchy收敛准则
    - 左右极限不存在或不相等
        - 子列极限发散（Heine归结原理）

- 函数极限的计算方法：
  - 四则运算
  - 变量替换 + 函数复合
  - 无穷大、小量的等价替换 （仅在商形式中应用，非商形式要处理）
- 常用极限表达式
  - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
  - $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

记住这个无穷大的比较顺序

当$n \to +\infty$时，有

$$\ln n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

(其中$k > 0, a > 1$)

小结 3

- 重要概念：
  - 连续的定义（连续和极限存在的区别）
  - 间断点的分类 (如：$\sin\frac{1}{x}$)
- 连续函数的基本性质：
  - 四则运算
  - 复合
  - 反函数
  - 局部有界
  - 局部保号

- 证明函数连续的方法：
  - 定义
  - 左连续+右连续
  - 初等函数均连续（自然定义域内）
- 证明函数不连续的方法：
  - 定义
  - 左右极限或者子列极限

小结 4

- 重要概念：
  - 一致连续
- 闭区间上连续函数的性质：
  - 零点定理
  - 介值定理
  - 最值定理
  - 一致连续性

- 证明一致连续的方法：
  - 定义
  - 闭区间上连续
- 证明不一致连续的方法：
  - 定义
  - 反证
- 一致连续函数的性质

小结 5

- 重要概念：
    - （左、右）导数的定义
    - 初等函数的导函数
    - 高阶导数
- 求导数的方法
    - 定义
    - 四则运算、链式法则、反函数（估值中的后操作的先求导）
    - 隐式求导
    - Leibniz法则

- 证明不可导的方法
  - 定义
  - 左右导数不存在或者不相等
  - 不连续
- 强调：注意区分在一点处的左右导数与导函数在一点处的左右极限
  - $x^2 \sin \frac{1}{x}$

小结 6

- 重要概念：
  - 可微的定义
- 微分的计算：
  - 四则运算
  - 复合函数的微分
- 微分的性质
  - 可微当且仅当可导（仅在一元成立）

小结 7

- 重要概念：
  - 极值
  - 最值
  - 驻点
- 重要定理：
  - Fermat定理
  - Rolle定理
  - Langrange中值定理
  - Cauchy中值定理

- 导函数的性质：
    - 无第一类间断点
    - 介值性质
- 常用方法
    - 构造辅助函数

卷面要整洁

- 要合理安排版面
    - 不一定一次就写完整
- 因果关系用连接词，不用三个点
    - 看不清、容易误解
- 正确识别书写字母（写得舒展丰满）
    - 不够用
    - 不要指望角标（手写看不清）
    - 希腊字母

大写	小写	英文名		大写	小写	英文名		大写	小写	英文名
A	α	alpha		I	ι	iota		P	ρ	rho
B	β	beta		K	κ	kappa		Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma		Λ	λ	lambda		T	τ	tau
Δ	δ	delta		M	μ	mu		Υ	υ	upsilon
E	ϵ	epsilon		N	ν	nu		Φ	ϕ ,φ	phi
Z	ζ	zeta		Ξ	ξ	xi		X	χ	chi
H	η	eta		O	o	omicron		Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta		Π	π	pi		Ω	ω	omega

- 化简
    - 中间步
    - L'Hospital法则