

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

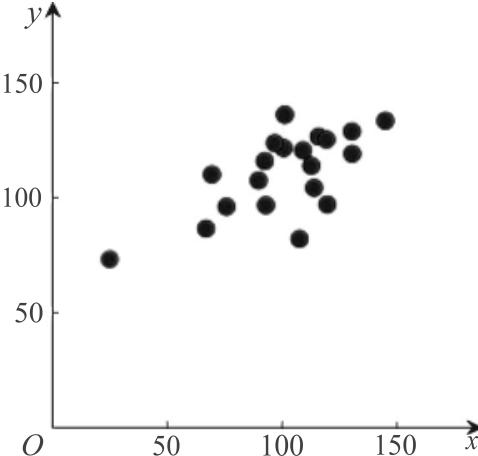
1. 若集合 $M=\emptyset$, $N=\{\emptyset\}$, 则下列说法错误的是

A. $M \in N$	B. $M \subseteq N$	C. $M \cup N = N$	D. $\complement_N M = M$
--------------	--------------------	-------------------	--------------------------
2. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 \bar{z}_2 = 1+i$, 则 $\bar{z}_1 z_2 =$

A. $1+i$	B. $1-i$	C. $-1+i$	D. $-1-i$
----------	----------	-----------	-----------
3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 则 “ $\forall a \in \{x|x \in I \text{ 且 } -x \in I\}, f(a) + f(-a) = 0$ ” 是 “ $f(x)$ 是奇函数”的

A. 充分必要条件	B. 既不充分也不必要条件
C. 充分不必要条件	D. 必要不充分条件
4. 为研究英语成绩与语文成绩之间的相关关系, 某同学收集班里几名同学某次考试的语文成绩和英语成绩, 以英语成绩为自变量 x , 以语文成绩为因变量 y , 绘制出散点图如图所示, 并得到回归直线方程 $\hat{y} = 0.4x + 70$. 若该同学又以语文成绩为自变量 x , 以英语成绩为因变量 y , 得到下列选项中的一个回归直线方程, 则该选项是

A. $\hat{y} = 0.2x + 78$	B. $\hat{y} = 0.4x + 56$	C. $\hat{y} = 1.1x - 21$	D. $\hat{y} = 2.5x - 175$
--------------------------	--------------------------	--------------------------	---------------------------



参考公式：对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 斜率和

$$\text{截距的最小二乘估计为: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

$$\text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

5. 若函数 $f(x)$ 的图象关于过原点的直线 l 对称, 且当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = |\sin x|$, 则 l 倾斜角的最大值为
 A. $\frac{1}{2}\pi$ B. $\frac{5}{8}\pi$ C. $\frac{3}{4}\pi$ D. $\frac{7}{8}\pi$
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $2S_n = a_n^2 + a_n$, 则 a_3 所有可能取值的和是
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
7. 给定 $\triangle ABC$, P 为空间内一动点, 满足 $\angle PAB = \angle PAC$, $\angle ABC = \angle PBC$. 若一半径为 $|AB|$ 的圆与点 P 的轨迹有且仅有 4 个公共点, 则 $\angle C$ 的取值范围是
 A. $(0, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(0, \pi)$ D. $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$
8. 设 m 是大于 1 的整数, 离散型随机变量 X 的可能取值为 $1, 2, \dots, m$, 满足对任意一个正整数 $k \leq m-1$, $4^{P(X=k)} - 4^{P(X=k+1)} = P(X=k)$. 若 $P(X=1) > a$ 一定成立, 则 a 的最大值是
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{e}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$, $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$, $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} , \mathbf{b} 与 \mathbf{c} , \mathbf{c} 与 \mathbf{a} 中共线的可能有且仅有
 A. 1 组 B. 1 组 C. 2 组 D. 3 组
10. 已知四面体 $ABCD$ 的外接球球心为 O_1 , 内切球球心为 O_2 , 满足 $AB \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$, P 是线段 AC 上的动点, 实数 μ, λ 满足 $\vec{PO}_1 = \mu\vec{PA} + \lambda\vec{PD}$, 实数 a, b, c, d 满足 $a\vec{O_2A} + b\vec{O_2B} + c\vec{O_2C} + d\vec{O_2D} = \mathbf{0}$, 则下列说法正确的是
 A. $\mu = \lambda = \frac{1}{2}$ B. $b > a, c > d$
 C. 若 $PB \perp PD$, 则 $PB \perp AD$ D. 若 $PO_1 \perp AB$, 则 $PO_1 \parallel$ 平面 BCD
11. 已知 F 是抛物线 $C: y = x^2$ 的焦点, 动点 P 满足从点 P 可以向 C 引两条夹角为 60° 的切线, 切点分别为 A, B , 过点 F 作直线 AB 的垂线, 垂足为 Q , 则
 A. C 的准线为 $y = -\frac{1}{4}$ B. 点 P 的轨迹为双曲线
 C. 存在定椭圆总与直线 AB 相切 D. 点 Q 的轨迹为圆

12. 已知函数 $f(x) = a^x \sin x - kx$ ($a > 1, k > 0, |x| < \pi$) 有且仅有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 则

A. $x_1 + x_2 + x_3 > 0$

B. $f'(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}) > 0$

C. $x_1 + x_2 + x_3$ 关于 k 的导数为正

D. $x_1 + x_2 + x_3$ 关于 a 的导数为正

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(1+x-x^2)^2$ 各项系数的绝对值之和为_____.

14. 若实数 a, b 满足 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}=2$, 则 a^2+4b^2 的最大值为_____.

15. 已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 侧棱长相等, 则 $\frac{\angle ABC_1 + \angle ADC_1}{\angle B_1CD_1}$ 的取值范围是_____.

16. 已知 O 为坐标原点, F_1, F_2 分别是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点, P 为 C 上的点,

直线 PF_1 交 C 于另一点 A , 直线 PF_2 交 C 于另一点 B , 过点 P 作 C 的切线交 $\triangle PAB$ 的外接圆于另一点 Q . 则直线 PQ, OQ 的斜率之积为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

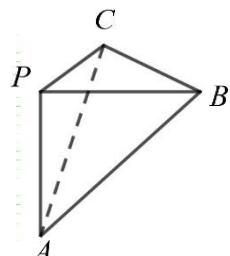
已知四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交, 请从① $\angle CAD=2\angle CBD$, ② $\angle ACD=2\angle ABD$, ③ $\angle BDA=\angle BDC$, ④ $\angle ACB+\angle ABD=\frac{\pi}{2}$ 中任选两个作为条件, 说明能否推出另外两个.

18. (12 分)

如图所示, 正三棱锥 $P-ABC$ 的三个侧面两两垂直.

(1) 证明: 正三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两垂直;

(2) 求二面角 $P-AB-C$ 平面角的余弦值.



19. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 满足 $a_1=4$, $a_{n+1} \cdot \frac{1}{T_n^2} = 1$.

(1) 证明: $T_{n+1}^2 > T_n^2 - 2$;

(2) 求最小正整数 k , 使得 $T_k < 2$.

20. (12 分)



下雨天，有 m ($m \geq 3$) 人在食堂内用餐，在门口都各放有自己的一把伞，陆续用餐完毕拿伞离开。第一个拿伞的人不记得自己的伞是哪一把，于是从门口的 m 把伞中随便拿了一把；之后拿伞的人优先拿自己的伞，如果发现自己的伞已经被别人拿了，就从剩下的伞中随便拿一把。

- (1) 求最后一个拿伞的人拿到自己伞的概率；
- (2) 证明：拿到自己伞的人所占比例的期望随 m 的增大而增大。

21. (12 分)

已知动点 P 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上，过 C 的右焦点 $F(1, 0)$ 作 C 的弦 AB . 当 AB 与 x 轴垂直时， $|AB| = 3$.

- (1) 求 C 的方程；
- (2) 求直线 PA, PB 斜率之差绝对值的最小值。

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = x - \ln x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 证明：曲线 $y = f(x) e^{1-x}$ 上不存在不同的两点关于直线 $y = x$ 对称。