



华南理工大学

South China University of Technology

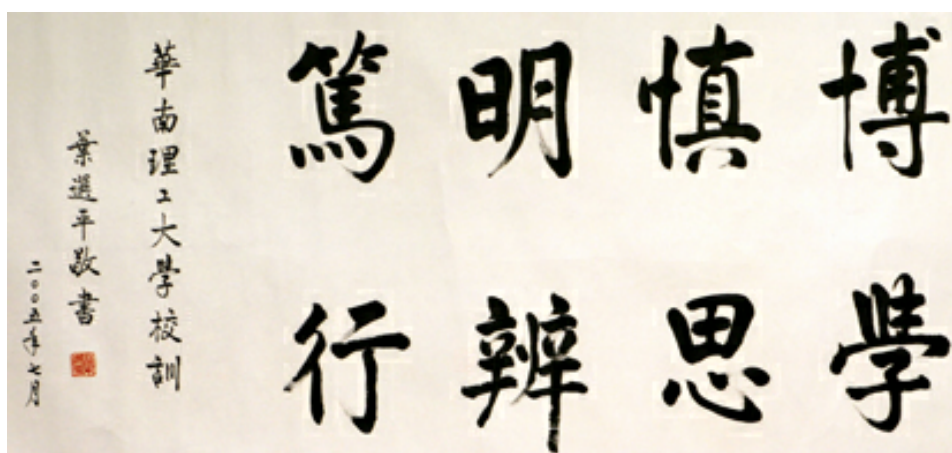
简单导数

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

参考：群友

日期：2026年2月8日



前言

收录简单导数群题，部分 CMC 非数类题型。

夏同
于华南理工大学
2026 年 2 月 8 日

目录

前言	I
第一章 微分中值定理	1

定义索引

定理索引

1.0.1 拉格朗日插值积分余项	13
----------------------------	----

例题索引

1.0.1 K 值法	2
1.0.2	3
1.0.3	4
1.0.4	5
1.0.5	6
1.0.6	7
1.0.7	8
1.0.8	8
1.0.9	9
1.0.10	10
1.0.11	11
1.0.12	12
1.0.13	14
1.0.14	15
1.0.15	16

第一章 微分中值定理

本章介绍微分中值定理的各种题型，主要介绍以埃米特插值为本质的高观点做题思路，同时以常数 K 值法为考场手段，辅以罗尔定理的多次使用，进行证明。首先介绍埃米特插值的基本形式和 K 值法的证明思路。

题目会给定基本函数 $f(x)$ 的某些性质，比如 f 的光滑性如何， f 在某些点的函数值和导数值等，然后是要证明的结论，我们通常要先构造一个插值多项式 $p(x)$ ，使得 $p(x)$ 尽可能地拟合 $f(x)$ 的行为，然后构造 $G(x) = f(x) - p(x)$ ，多次循环地利用罗尔中值定理。

先数一数原题给了多少条件，然后数一数要拟合什么点，拟合到多少阶，把所有点的要拟合阶数（包括 0 阶）相加，减去 1，就是插值多项式的次数，余项比插值多项式的次数高 1 阶。然后根据余项的阶数和原函数的光滑性条件，判断是属于什么类型。

1.0.1 例题: K 值法

$f(x) \in C^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\xi)$$

解 1.0.1. 取 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$, 则 $F(x) \in C^3[a, b]$, 且 $F'(x) = f(x)$, 所以要证明的结论等价于证明: $F(x) \in C^3[a, b]$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2 F'''(\xi)}{24}$$

插 $F(a), F(b), F\left(\frac{a+b}{2}\right), F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 一共 4 个条件, 余项 4 阶, 插值多项式 3 次, 导数不够, 属于对 $F''' = p'''$ 类型, 先写出拉格朗日插值部分, 然后根据本题最高只需拟合到 1 阶导数, 而且只有 1 个点才需要拟合到 1 阶导数, 待定 $1-1=0$ 阶多项式 r :

$$p(x) = \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} F(a) + \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-a)}{(b - \frac{a+b}{2})(b-a)} F(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)} F\left(\frac{a+b}{2}\right) + c(x-a)(x-b) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

这个式子自动满足 $p(a) = p(b) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 求导数并令 $p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{F(a)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} \left(x - \frac{a+b}{2} + x - b\right) + \frac{F(b)}{(b - \frac{a+b}{2})(b-a)} \left(x - \frac{a+b}{2} + x - a\right) \\ &\quad + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)} ((x-a) + (x-b)) \\ &\quad + c(x-a)(x-b) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x - \frac{a+b}{2}}\right) \\ &= \frac{F(a)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} \left(x - \frac{a+b}{2} + x - b\right) + \frac{F(b)}{(b - \frac{a+b}{2})(b-a)} \left(x - \frac{a+b}{2} + x - a\right) \\ &\quad + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)} (x-a+x-b) \\ &\quad + c \left((x-a)(x-b) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-a) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) \right) \\ p'\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{F(a)}{a-b} + \frac{F(b)}{b-a} - \frac{c}{4}(b-a)^2 = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{4 \left(\frac{F(b)-F(a)}{b-a} - F'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)}{(b-a)^2} \end{aligned}$$

构造 $G(x) = f(x) - p(x)$, 则 $G(a) = G(b) = G\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 存在 $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得 $G'(\xi_2) = 0$, 加上 $G'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G''(\xi_3) = 0$, 存在 $\xi_4 \in (\frac{a+b}{2}, \xi_2)$ 使得 $G''(\xi_4) = 0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (a, b)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$, 所以 $F'''(\xi) = p'''(\xi) = 6c$, 即:

$$F'''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3} (F(b) - F(a)) - \frac{24}{(b-a)^2} F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

1.0.2 例题:

设 $f \in C^1[a, b] \cap D^3(a, b)$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(a) + f'(b)}{2} - \frac{f'''(\xi)}{12}(b - a)^2$$

解 1.0.2. 插 $f(a), f(b), f'(a), f'(b)$, 则插值多项式 3 次, 余项 4 阶, 但是条件只到 3 阶, 属于 $f''' = p'''$ 类型, 插值:

$$p(x) = \frac{x - b}{a - b}f(a) + \frac{x - a}{b - a}f(b) + (kx + m)(x - a)(x - b)$$

此时自动保证 $p(a) = f(a), p(b) = f(b)$, 参数 k, m 待定, 以期望 $p'(a) = f'(a), p'(b) = f'(b)$, 解出 k, m .

$$\begin{aligned} p'(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + (ka + m)(a - b) = f'(a) \\ p'(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + (kb + m)(a - b) = f'(b) \end{aligned}$$

相减得到

$$k = \frac{f'(b) + f'(a)}{(b - a)^2} - \frac{2(f(b) - f(a))}{(b - a)^3}$$

此时可以继续解方程得到 m , 但是没有必要了, 我们假装 m 已知, 设而不求就可以了. 设 $G(x) = f(x) - p(x)$, 则 $G(a) = G(b) = 0, G'(a) = G'(b) = 0$, 所以由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, b)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 ξ_2, ξ_3 使得 $G''(\xi_2) = 0, G''(\xi_3) = 0$, 最后由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$, 所以

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 6k = \frac{6(f'(b) + f'(a))}{(b - a)^2} - \frac{12(f(b) - f(a))}{(b - a)^3}$$

1.0.3 例题:

设 $f \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$, 满足 $f(0) = f(2) = 0, |f'(x)| \leq M, \forall x \in (0, 2)$, 证明

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq M$$

解 1.0.3. 插 $f(0), f(2)$, 插值多项式 1 次 (仅拉格朗日插值式, 用不到导数修正), 余项 2 阶, 导数不够, 属于靠近哪边对哪边插模型。所以在 $[0, 1]$ 上插 $f(0)$, 在 $[1, 2]$ 上插 $f(2)$, 则写出两段插值式。

当 $x \in [0, 1]$ 时, 对 $f(x)$ 的插值为:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(\xi(x))}{1!}(x - 0) = f'(\xi(x))x$$

这是拉格朗日中值定理的直接应用, 所以不用考场翻译。得到

$$|f(x)| \leq |f'(\theta(x))|x \leq Mx$$

当 $x \in [1, 2]$ 时, 对 $f(x)$ 的插值为:

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(\eta(x))}{1!}(x - 2) = f'(\eta(x))(x - 2)$$

同理, 得到

$$|f(x)| \leq |f'(\eta(x))||x - 2| \leq M(2 - x)$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 f(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 Mx dx + \int_1^2 M(2 - x) dx = M \end{aligned}$$

1.0.4 例题:

设 $f \in D^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $|f''(x)| \leq M$, 证明 $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}$

解 1.0.4. 要拟合 $f(0), f(1)$ 一共两个插值条件, 无导数条件需要拟合, 所以插值多项式为一次, 也不用待定多项式 r , 余项到了 2 阶导数, 符合题目所给条件, 所以根据埃米特插值, 存在 $\theta(x) \in (0, 1)$ 使得:

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1), \forall x \in [0, 1]$$

这个结论可以用 k 值法来证明, 由

$$f(x) - Kx(x-1) = 0$$

的条件 (其中 K 与 x 有关), 设

$$F(y) = f(y) - Ky(y-1)$$

则 $F(0) = F(1) = F(x) = 0$, 罗尔得到 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0, \xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, 所以存在 $\theta(x) \in (0, 1)$ 使得 $F''(\theta(x)) = 0$ 。对 $F(x)$ 求二阶导数得到

$$f''(\theta(x)) - 2K = 0 \Rightarrow K = \frac{f''(\theta(x))}{2}$$

所以

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1) dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{f''(\theta(x))}{2} \right| |x(x-1)| dx \\ &\leq \frac{M}{2} \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{M}{12} \end{aligned}$$

1.0.5 例题:

设 $f \in C^3[0, 2]$ 满足

$$f(0) = f'(0) = 0, \int_0^2 f(x) dx = 8 \int_0^1 f(x) dx$$

求证存在 $\theta \in (0, 2)$ 使得 $f'''(\theta) = 0$

解 1.0.5. 套路地, 设 $F(x) = \int_0^x f(y) dy$, $F(x) \in C^4[0, 2]$, $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$, 且 $F(2) = 8F(1)$, 这里我们使用插值法, 就是找一个多项式去尽可能的拟合 f 的行为。注意到 $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$, 所以可以考虑插值多项式为 $p(x) = x^3(ax + b)$, 代入 $F(2) = 8F(1)$ 得到 $a = 0$, 所以 $p(x) = bx^3$, 再由 $p(1) = F(1)$ 得到 $b = F(1)$, 所以

$$p(x) = F(1)x^3$$

于是构造出

$$G(x) = F(x) - F(1)x^3$$

这个 $G(x)$ 满足

$$G(0) = G(1) = G(2) = 0, G'(0) = 0, G''(0) = 0$$

所以由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in (1, 2)$, 使得 $G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = 0$, 搭配上 $G'(0) = 0$, 所以又有罗尔中值定理, 得知存在 θ_1, θ_2 , 使得 $G''(\theta_1) = G''(\theta_2) = 0$, 同样的, 搭配上 $G''(0) = 0$, 又有罗尔中值定理, 得知存在 $\eta_1 \in (0, 1), \eta_2 \in (1, 2)$ 使得

$$G'''(\eta_1) = G'''(\eta_2) = 0$$

所以由罗尔中值定理, 得到存在 $\theta \in (0, 2)$ 使得

$$G''''(\theta) = 0$$

而求导易得

$$G''''(x) = f'''(x) - p''''(x) = 0 \Rightarrow f'''(\theta) = 0$$

1.0.6 例题:

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{2}$, $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{3}{2}$, 求证在 $(0, 1)$ 存在 ξ 使 $f'(\xi) = 3$.

解 1.0.6. 套路式地, 设

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, G(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

则有

$$F(0) = G(0) = 0, F(1) = \frac{5}{2}, G(1) = \frac{3}{2}$$

而问题要证明的结论似乎仅与 $f(x)$ (以及其导函数, 原函数) 有关, 所以要从 $G(x)$ 中分出 $F(x)$ 或者 $f(x)$ 来, 考虑分部积分:

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x dF(x) = xF(x)|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx \Rightarrow \int_0^1 F(x)dx = 1$$

则问题转化为 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上二阶可导, 且 $F(0) = 0, F(1) = \frac{5}{2}, \int_0^1 F(x)dx = 1$, 求证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $F''(\xi) = 3$ 。再取 $g(x) = \int_0^x F(x)dx$, 则 $g'(0) = 0, g'(1) = \frac{5}{2}$, 且 $g(0) = 0, g(1) = 1$, 则问题转化为 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上三阶可导, 求证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g'''(\xi) = 3$ 。4 个条件, 余项 4 阶, 插值多项式为 3 次, 导数 3 阶不够, 属于 $g''' = p'''$ 类型, 构造插值多项式:

$$p(x) = \frac{x-0}{1-0}g(1) + \frac{x-1}{0-1}g(0) + (kx+m)x(x-1) = x + (kx+m)x(x-1)$$

求导并令 $p'(0) = g'(0), p'(1) = g'(1)$:

$$p'(x) = 1 + (kx+m)(2x-1) + kx(x-1)$$

$$p'(0) = 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$p'(1) = 1 + (k+1)(1) + 0k = 1 + k + 1 = 2 + k = \frac{5}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

构造 $W(x) = g(x) - p(x)$, 则 $W(0) = W(1) = W'(0) = W'(1) = 0$, 且 $W(x)$ 在 $(0, 1)$ 上三阶可导, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, 1)$ 使得 $W'(\xi_1) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ 使得 $W''(\xi_2) = 0$, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, 1)$ 使得 $W''(\xi_3) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_2, \xi_3) \subset (0, 1)$ 使得 $W'''(\xi) = 0$, 所以

$$g'''(\xi) = p'''(\xi) = 6k = 3$$

1.0.7 例题:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上二次可微, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$$

解 1.0.7. 拟合 $f(a), f(b), f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 设

$$G(x) = f(x) - \left[\frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x - \frac{a+b}{2})}{(b-a)(b - \frac{a+b}{2})} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]$$

则 $G(a) = G(b) = G\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 存在 $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得 $G'(\xi_2) = 0$, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ 使得 $G''(\xi) = 0$, 所以 $f''(\xi) = p''(\xi)$, 求导:

$$p''(x) = 4 \frac{f(a)}{(b-a)^2} + 4 \frac{f(b)}{(b-a)^2} - 8 \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2} = \frac{4}{(b-a)^2} \left(f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

所以

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$$

1.0.8 例题:

设 $f \in C^3[-1, 1]$ 满足 $f(-1) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 1$, 证明存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使得 $f'''(\xi) = 3$

解 1.0.8. 插 $f(-1), f(1), f(0), f'(0)$, 则插值多项式为三次, 余项四阶, 导数三阶不够, 属于 $f''' = p'''$ 类型, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} f(1) + \frac{(x-1)(x-0)}{(-1-1)(-1-0)} f(-1) + \frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)} f(0) + cx(x-1)(x+1) \\ &= \frac{x(x+1)}{2} - (x^2-1)f(0) + c(x-1)(x+1)x \end{aligned}$$

$$p'(x) = \frac{2x+1}{2} - 2xf(0) + c((x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1))$$

$$p'(0) = \frac{1}{2} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

构造 $G(x) = f(x) - p(x)$, 则 $G(-1) = G(0) = G(1) = 0, G'(0) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (-1, 0)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 存在 $\xi_2 \in (0, 1)$ 使得 $G'(\xi_2) = 0$, 加上 $G'(0) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, 0) \subset (-1, 1)$ 使得 $G''(\xi_3) = 0$, 存在 $\xi_4 \in (0, \xi_2) \subset (-1, 1)$ 使得 $G''(\xi_4) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (-1, 1)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$, 所以

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 6c = 3$$

1.0.9 例题:

$f(x) \in C^4[0,1]$, 三次多项式 $p(x)$ 满足 $p(0) = f(0), p(1) = f(1), p'(0) = f'(0), p'(1) = f'(1)$, 证明

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\}$$

解 1.0.9. 构造 $G(x) = f(x) - p(x)$, 则 $G(0) = G(1) = 0, G'(0) = G'(1) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0,1)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ 使得 $G''(\xi_2) = 0$, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, 1)$ 使得 $G''(\xi_3) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_2, \xi_3) \subset (0,1)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$, 现在因为罗尔定理的迭代次数受零点个数限制。要得到四阶导数的信息, 需引入额外零点。即证

$$-\frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\} \leq G(x) \leq \frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\}$$

使用 K 值法解决, 假设存在与 x 有关的量 K , 使得 $G(x) = K \frac{x^2(x-1)^2}{4!}$, 再设函数 $H(y) = G(y) - K \frac{y^2(y-1)^2}{4!}$, 则 $H(0) = H(1) = H(x) = 0, H'(0) = H'(1) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, x), \xi_2 \in (x, 1)$ 使得 $H'(\xi_1) = H'(\xi_2) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_3 \in (0, \xi_1), \xi_4 \in (\xi_1, \xi_2), \xi_5 \in (\xi_2, 1)$ 使得 $H''(\xi_3) = H''(\xi_4) = H''(\xi_5) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_6 \in (\xi_3, \xi_4), \xi_7 \in (\xi_4, \xi_5)$ 使得 $H'''(\xi_6) = H'''(\xi_7) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_6, \xi_7) \subset (0,1)$ 使得 $H^{(4)}(\xi) = 0$, 所以

$$f''''(\xi) - p''''(\xi) = f''''(\xi) - 0 = f''''(\xi) = G''''(\xi) = K \frac{d^4}{dy^4} \left(\frac{y^2(y-1)^2}{4!} \right)$$

而且 $\frac{y^2(y-1)^2}{4!}$ 求 4 阶导数的值是 1, 所以 $K = f''''(\xi)$, 所以

$$f(x) - p(x) = \frac{f''''(\xi)x^2(x-1)^2}{4!} \leq \frac{1}{384} f''''(\xi)$$

取绝对值得到

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\}$$

1.0.10 例题:

设 $f \in C^4[0, 1]$, 且 $\int_0^1 f(x)dx + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx$, 求证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f''''(\xi) = 0$.

解 1.0.10. 取原函数 $F(x)$, 则 $F(x) \in C^5[0, 1]$, 且 $F'(x) = f(x)$,

$$F(1) - F(0) + 3F'\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

插 $F(0), F(1), F\left(\frac{1}{2}\right), F'\left(\frac{1}{2}\right), F\left(\frac{3}{4}\right), F\left(\frac{1}{4}\right)$ 一共 6 个条件, 余项 6 阶, 插值多项式为 5 次, 导数 5 阶不够, 属于 $F^{(5)} = p^{(5)}$ 类型, 插值:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})(x - 1)(x - \frac{1}{2})}{(0 - \frac{3}{4})(0 - \frac{1}{4})(0 - 1)(0 - \frac{1}{2})}F(0) + \frac{(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(1 - \frac{3}{4})(1 - \frac{1}{4})(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})}F(1) \\ &\quad + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - \frac{3}{4})(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})}F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{2})}{(\frac{3}{4} - 0)(\frac{3}{4} - 1)(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})(\frac{3}{4} - \frac{1}{4})}F\left(\frac{3}{4}\right) \\ &\quad + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{4} - 0)(\frac{1}{4} - 1)(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})}F\left(\frac{1}{4}\right) \\ s(x) &= c(x - 0)(x - 1)(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}), s'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

$$p(x) = L(x) + s(x)$$

此时

$$p(0) = F(0), p(1) = F(1), p\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right), p'\left(\frac{1}{2}\right) = F'\left(\frac{1}{2}\right), p\left(\frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right), p\left(\frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right)$$

求导并令 $p'\left(\frac{1}{2}\right) = F'\left(\frac{1}{2}\right)$, 解得

$$c = 64 \left[F'\left(\frac{1}{2}\right) - L'\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

构造 $G(x) = F(x) - p(x)$, 则 $G(0) = G\left(\frac{1}{4}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{3}{4}\right) = G(1) = 0$, 罗尔中值定理得到 $G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = G'(\xi_3) = G'(\xi_4) = 0$, 罗尔中值定理得到 $G''(\xi_5) = G''(\xi_6) = G''(\xi_7) = G''(\xi_8) = 0$, 罗尔中值定理得到 $G'''(\xi_9) = G'''(\xi_{10}) = G'''(\xi_{11}) = 0$, 罗尔中值定理得到 $G''''(\xi_{12}) = G''''(\xi_{13}) = 0$, 罗尔中值定理得到存在 $\xi \in (\xi_{12}, \xi_{13}) \subset (0, 1)$ 使得

$$G^{(5)}(\xi) = 0$$

所以

$$F^{(5)}(\xi) = p^{(5)}(\xi)$$

又因为 $p(x)$ 为五次多项式, 所以 $p^{(5)}(x) \equiv 0$, 所以

$$f''''(\xi) = F^{(5)}(\xi) = p^{(5)}(\xi) = 0$$

1.0.11 例题:

设 $f \in C^2[0, 1]$, 满足 $f(0) = f(1) = 0$, $\min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$, 证明 $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$

解 1.0.11. 为了利用最小值条件, 假设 $c \in (0, 1)$ 使得 $f(c) = -1$, 则插值条件为 $f(0) = f(1) = 0, f(c) = -1, f'(c) = 0$, 插值式 3 次, 余项 4 阶, 导数 4 阶差 2 阶, 属于靠近谁插谁的类型。

在区间 $[0, c]$ 上插 $f(0), f(c), f'(c)$, 构造插值多项式:

$$p_1(x) = \frac{x-c}{0-c}f(0) + \frac{x-0}{c-0}f(c) + k_1(x-0)(x-c) = -\frac{x}{c} + k_1x(x-c)$$

$$p_1'(x) = -\frac{1}{c} + k_1(2x-c) \quad p_1'(c) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{c^2}$$

构造 $G_1(x) = f(x) - p_1(x)$, 则 $G_1(0) = G_1(c) = 0, G_1'(c) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, c)$ 使得 $G_1'(\xi_1) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_2 \in (\xi_1, c)$ 使得 $G_1''(\xi_2) = 0$, 所以 $f''(\xi_2) = p_1''(\xi_2) = \frac{2}{c^2}$.

在区间 $[c, 1]$ 上插 $f(1), f(c), f'(c)$, 构造插值多项式:

$$p_2(x) = \frac{x-c}{1-c}f(1) + \frac{x-1}{c-1}f(c) + k_2(x-1)(x-c) = -\frac{x-1}{1-c} + k_2(x-1)(x-c)$$

$$p_2'(x) = -\frac{1}{1-c} + k_2(2x-1-c) \quad p_2'(c) = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{(1-c)^2}$$

构造 $G_2(x) = f(x) - p_2(x)$, 则 $G_2(1) = G_2(c) = 0, G_2'(c) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_3 \in (c, 1)$ 使得 $G_2'(\xi_3) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_4 \in (c, \xi_3)$ 使得 $G_2''(\xi_4) = 0$, 所以 $f''(\xi_4) = p_2''(\xi_4) = \frac{2}{(1-c)^2}$.

综上所述, 在区间 $(0, c)$ 和 $(c, 1)$ 上分别找到 ξ_2, ξ_4 使得 $f''(\xi_2) = \frac{2}{c^2}, f''(\xi_4) = \frac{2}{(1-c)^2}$. 下面说明 $\max_{x \in [0, 1]} \left\{ \frac{2}{c^2}, \frac{2}{(1-c)^2} \right\} \geq 8$. 分类讨论即可: 当 $c \in (0, \frac{1}{2}]$ 时, $\frac{2}{c^2} \geq 8$; 当 $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $\frac{2}{(1-c)^2} \geq 8$. 即证 $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$

1.0.12 例题:

设 $f \in D^2[-a, a]$, $a > 0$ 满足

$$f(-a) = -1, f(a) = 1, f'(-a) = f'(a) = 0, |f''(x)| \leq 1$$

证明 (1) $a \geq \sqrt{2}$ (2) $a > \sqrt{2}$.

解 1.0.12. 微分条件不足以插 4 个点, 靠近谁插谁模型. 但是没有其他约束条件, 要找一个公共点能同时出现在两边插, 只能是带入 $x = 0$.

在区间 $[-a, 0]$ 上插 $f(-a), f(0), f'(-a)$, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{x-0}{-a-0}f(-a) + \frac{x+a}{0+a}f(0) + k_1(x+a)x = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} + 1\right)f(0) + k_1(x+a)x \\ p'_1(x) &= \frac{1+f(0)}{a} + k_1(2x+a) \quad p'_1(-a) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1+f(0)}{a^2} \\ \Rightarrow p_1(x) &= \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} + 1\right)f(0) + \frac{1+f(0)}{a^2}(x+a)x \end{aligned}$$

构造 $G_1(x) = f(x) - p_1(x)$, 则 $G_1(-a) = G_1(0) = 0, G'_1(-a) = 0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi_1 \in (-a, 0)$ 使得 $G'_1(\xi_1) = 0$, 再由罗尔定理, 存在 $\xi_2 \in (-a, \xi_1)$ 使得 $G''_1(\xi_2) = 0$, 所以 $f''(\xi_2) = p''_1(\xi_2) = \frac{2+2f(0)}{a^2}$.

在区间 $[0, a]$ 上插 $f(a), f(0), f'(a)$, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{x-0}{a-0}f(a) + \frac{x-a}{0-a}f(0) + k_2(x-a)x = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} - 1\right)f(0) + k_2(x-a)x \\ p'_2(x) &= \frac{1+f(0)}{a} + k_2(2x-a) \quad p'_2(a) = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{1+f(0)}{a^2} \\ \Rightarrow p_2(x) &= \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} - 1\right)f(0) + \frac{1+f(0)}{a^2}(x-a)x \end{aligned}$$

构造 $G_2(x) = f(x) - p_2(x)$, 则 $G_2(a) = G_2(0) = 0, G'_2(a) = 0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi_3 \in (0, a)$ 使得 $G'_2(\xi_3) = 0$, 再由罗尔定理, 存在 $\xi_4 \in (\xi_3, a)$ 使得 $G''_2(\xi_4) = 0$, 所以 $f''(\xi_4) = p''_2(\xi_4) = \frac{2+2f(0)}{a^2}$.

由条件 $|f''(x)| \leq 1$ 得

$$|1+f(0)| \leq \frac{a^2}{2}, |f(0)-1| \leq \frac{a^2}{2} \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{2} \leq f(0) \leq -1 + \frac{a^2}{2}$$

两式同时成立要求 $1 - \frac{a^2}{2} \leq -1 + \frac{a^2}{2}$, 解得 $a^2 \geq 2$, 即 $a \geq \sqrt{2}$.

若 $a = \sqrt{2}$, 则 $0 \leq f(0) \leq 0$, 故 $f(0) = 0$, 且 $f''(\xi_2) = 1, f''(\xi_4) = -1$. 考虑积分表示:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(-a) + f'(-a)(x+a) + \int_{-a}^0 (0-t)f''(t)dt = -1 - \int_{-a}^0 tf''(t)dt \\ f(0) &= f(a) + f'(a)(0-a) + \int_a^0 (0-t)f''(t)dt = 1 - \int_0^a tf''(t)dt. \end{aligned}$$

当 $t \leq 0$ 时, 由 $f''(t) \leq 1$ 得 $tf''(t) \geq t$ (因 $t \leq 0$), 故

$$\int_{-a}^0 tf''(t)dt \geq \int_{-a}^0 tdt = -\frac{a^2}{2} = -1,$$

从而 $f(0) \leq -1 - (-1) = 0$, 等号成立仅当在 $[-a, 0]$ 上 $f''(t) \equiv 1$ 。类似地, 当 $t \geq 0$ 时, 由 $f''(t) \geq -1$ 得 $tf''(t) \geq -t$, 故

$$\int_0^a tf''(t) dt \geq -\int_0^a t dt = -\frac{a^2}{2} = -1,$$

从而 $f(0) \leq 1 - (-1) = 2$, 此上界非紧。改用 $f''(t) \leq 1$ 得 $tf''(t) \leq t$, 故

$$\int_0^a tf''(t) dt \leq \int_0^a t dt = \frac{a^2}{2} = 1,$$

从而 $f(0) \geq 1 - 1 = 0$, 等号成立仅当在 $[0, a]$ 上 $f''(t) \equiv 1$ 。于是 $f(0) = 0$ 要求 $f'' \equiv 1$ 于 $[-a, 0]$ 和 $[0, a]$, 这与 $f''(\xi_4) = -1$ 矛盾。故 $a = \sqrt{2}$ 不可能。

综上, 必有 $a > \sqrt{2}$ 。

1.0.1 定理: 拉格朗日插值积分余项

设 $f \in C^2[a, b]$, 且 f'' 在 $[a, b]$ 上可积, 则成立

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + \int_a^b f''(y)k(x, y)dy$$

其中

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(y-b), & b \geq y \geq x \geq a \\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b \geq x \geq y \geq a \end{cases}$$

考虑

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \right)$$

那么 $g(a) = g(b) = 0, g'' = f''$, 拆分积分余项即可发现:

$$\begin{aligned} \int_a^b g''(y)k(x, y)dy &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x g''(y)(a-y)dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b g''(y)(y-b)dy \\ &= \frac{b-x}{b-a} \left[(a-x)g'(x) + \int_a^x g'(y)dy \right] + \frac{x-a}{b-a} \left[-g'(x)(x-b) - \int_x^b g'(y)dy \right] \\ &= \frac{b-x}{b-a} [(a-x)g'(x) + g(x)] + \frac{x-a}{b-a} [-g'(x)(x-b) + g(x)] \\ &= g(x). \end{aligned}$$

1.0.13 例题:

设 $f \in C^2[a, b]$, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \frac{4}{b-a}$$

解 1.0.13. 由已知, $f \in C^2[a, b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$. 对任意 $x \in [a, b]$, 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b-x}{b-a} f(x) + \frac{x-a}{b-a} f(x) \\ &= \frac{b-x}{b-a} [(a-x)f'(x) + f(x)] + \frac{x-a}{b-a} [(b-x)f'(x) + f(x)] \\ &= \frac{b-x}{b-a} \left[(a-x)f'(x) + \int_a^x f'(y) dy \right] + \frac{x-a}{b-a} \left[(b-x)f'(x) + \int_b^x f'(y) dy \right] \\ &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (a-y) df'(y) + \frac{x-a}{b-a} \int_b^x (b-y) df'(y) \\ &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (a-y) f''(y) dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-y) f''(y) dy. \end{aligned}$$

取绝对值, 并利用 $|f''(y)| = \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| |f(y)|$, 得

$$|f(x)| \leq \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (y-a) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| |f(y)| dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-y) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| |f(y)| dy.$$

设 $M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$, 则 $M > 0$ (否则 $f \equiv 0$, 不等式显然成立). 取 $c \in (a, b)$ 使 $|f(c)| = M$. 在上式中令 $x = c$, 并注意到 $|f(y)| \leq M$, $y-a \leq c-a$ (当 $y \in [a, c]$), $b-y \leq b-c$ (当 $y \in [c, b]$), 故

$$\begin{aligned} M &\leq \frac{b-c}{b-a} \int_a^c (c-a) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| M dy + \frac{c-a}{b-a} \int_c^b (b-c) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| M dy \\ &= M \cdot \frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \int_a^b \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| dy. \end{aligned}$$

因 $M > 0$, 两边消去 M 得

$$1 \leq \frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \int_a^b \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| dy.$$

由均值不等式,

$$\frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \leq \frac{1}{b-a} \left(\frac{(b-c) + (c-a)}{2} \right)^2 = \frac{b-a}{4},$$

代入上式即得

$$\int_a^b \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| dy \geq \frac{4}{b-a}.$$

(等号成立条件可进一步讨论, 此处略.)

1.0.14 例题:

设 $f \in D[a, b]$, 且 $|f'(x)| \leq M$, $\int_a^b f(x)dx = 0$, 令 $|F(x)| = \left| \int_a^x f(t)dt \right|$, 证明:

$$(1) |F(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8};$$

$$(2) \text{ 若 } f(a) = f(b) = 0, \text{ 则 } |F(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{16}.$$

解 1.0.14. (1) $F(x)$ 两阶可导, $|F''(x)| \leq M, F(b) = F(a) = 0$, 插左右端点, 微分条件足够, 用 K 值法: 设 K 与 x 有关, 使得 $F(x) = K \frac{(x-a)(x-b)}{2!}$, 构造 $G(y) = F(y) - K \frac{(y-a)(y-b)}{2!}$, 则 $G(a) = G(b) = G(x) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, x), \xi_2 \in (x, b)$ 使得 $G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\theta(x) \in (a, b)$ 使得 $G''(\theta(x)) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} f'(\theta(x)) - K &= 0 \Rightarrow K = f'(\theta(x)) \Rightarrow F(x) = f'(\theta(x)) \frac{(x-a)(x-b)}{2!} \\ |F(x)| &\leq \frac{M}{2} |(x-a)(x-b)| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{8} \end{aligned}$$

(2) $F(x)$ 两阶可导, $|F''(x)| \leq M, F(a) = F(b) = F'(a) = F'(b) = 0$, 插左右端点, 微分条件远远不够, 属于靠近谁插谁的类型, 不直接插左右端点和导数, 而是引入 $x_0 \in (a, b)$ 是 $|F(x)|$ 的极大值点 (若极值点是端点处, 此时结论显然成立), 在 (a, x_0) 和 (x_0, b) 区间构造插值多项式。在区间 $[a, x_0]$ 上插 $f(a), f'(a), f(x_0), f'(x_0)$, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} F''(\xi_1) = \frac{(x-a)^2}{2!} F''(\xi_1) \\ F(x) &= F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(\xi_2) = \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(\xi_2) \end{aligned}$$

相减得到

$$F(x_0) = \frac{(x_0-a)^2}{2!} F''(\xi_1) - \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(\xi_2)$$

绝对值不等式得到

$$|F(x_0)| \leq \frac{1}{2!} \left(\frac{(x_0-a)^2}{2!} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \right) M = \frac{M}{4} ((x_0-a)^2 + (x-x_0)^2)$$

由于 $x \in (a, b)$, 所以 $(x_0-a)^2 + (x-x_0)^2 \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$, 因此

$$|F(x_0)| \leq \frac{M(b-a)^2}{16}$$

最后提示一下, 要看要证明的结论是什么, 插值只是辅助手段, 比如本题结论就是 $F(x)$ 的上下界, 那么先看余项够不够微分条件用完, 如果刚好, 就是 (1), 如果差远了, 就是 (2), (2) 中引入了 $F(x)$ 取到上下界时的自变量 x_0 , 在两个区间分别插值, 最后相减得到 $F(x_0)$ 的表达式, 绝对值不等式得到 $F(x_0)$ 的上界, 再利用 $x \in (a, b)$ 得到最终结论。

1.0.15 例题:

设 $f(x) \in C^3[-1, 1]$ 满足 $f(-1) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 1$, 证明存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使得

$$f'''(\xi) = 3 + \xi$$

解 1.0.15. 插 $f(-1), f(1), f(0), f'(0)$, 则插值多项式为三次, 余项四阶, 导数差 1 阶, 所以是 $f''' = p'''$ 模型, 但是等号右边还有 ξ , 所以对 $g(x) = f(x) - \frac{x^4}{24}$ 构造插值多项式, $g(-1) = -\frac{1}{24}, g'(0) = 0, g(0) = f(0), g(1) = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$, 构造插值多项式 $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}g(-1) + \frac{(x-1)(x-(-1))}{(0-1)(0-(-1))}g(0) + \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)}g(1) + cx(x-1)(x+1) \\ &= \frac{(x-0)(x-1)}{2} \left(-\frac{1}{24}\right) + \frac{(x-1)(x+1)}{-1}g(0) + \frac{(x-0)(x+1)}{2} \left(\frac{23}{24}\right) + cx(x-1)(x+1) \\ &= \frac{-x^2+x}{48} - (x^2-1)g(0) + \frac{23x^2+23x}{48} + cx(x-1)(x+1) \\ p'(x) &= \frac{-2x+1}{48} + (-2x)g(0) + \frac{46x+23}{48} + c((x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1)) \\ p'(0) &= \frac{1}{48} + 0 + \frac{23}{48} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

构造 $W(x) = g(x) - p(x)$, 则 $W(-1) = W(1) = W'(0) = W(0) = 0$, 且 $W(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上三阶可导, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (-1, 0)$ 使得 $W'(\xi_1) = 0$, 存在 $\xi_2 \in (0, 1)$ 使得 $W'(\xi_2) = 0$, 加上 $W'(0) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, 0) \subset (-1, 1)$ 使得 $W''(\xi_3) = 0$, 存在 $\xi_4 \in (0, \xi_2) \subset (-1, 1)$ 使得 $W''(\xi_4) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (-1, 1)$ 使得 $W'''(\xi) = 0$, 所以

$$g'''(\xi) = f'''(\xi) - \xi = p'''(\xi) = 6c = 3 \Leftrightarrow f'''(\xi) = 3 + \xi$$