华南理工大学

South China University of Technology

线性代数和解析几何作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 9 月 20 日

厚德尚学 自强不息

务实创新 追求卓越

目录

第一章 行列式

1.1 第 1 周作业

习题一第一大题的第（1）（3）（5）问解答如下：

例题 1.1.1: (习题一第一大题)

计算行列式的值 $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

解 1.1.1. (1) 原式 $= \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1$.

(2) 由沙路法则: 原式

$$
\begin{aligned}
=&1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 \\
&-1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 - 3 \times 5 \times 7 \\
=&45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 \\
=&225 - 225 = 0.\square
\end{aligned}
$$

实际上第三行是第二行各数的两倍减去第一行各数得到的，因此第三行是第一行和第二行的线性组合，所以矩阵：

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}
$$

的行向量线性相关，行列式的值为 0.

(3) 仍然由沙路法则: 原式

$$
\begin{aligned}
&= x^3 + y^3 + y^3 - xy^2 - xy^2 - xy^2 \\
&= x^3 + 2y^3 - 3xy^2.\square
\end{aligned}
$$

实际上这个结果可以推广的。

定理 1.1.1

将 n 阶行列式 D 中每个元 $a_{ij},(i,j=1,2,...,n)$ 都加上参数 t，得到的行列式记为 $D(t)$，则：

$$D(t)=D+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

证明. 将 $D(t)$ 中的第一列拆开，得到的新行列式记为 $D_1(t)$，则：

$$D_1(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(t)&=D_1(t)+\begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\, t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} \\ &=D_1(t)+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+D_1(t). \\ &=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+D_2(t). \\ &=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i3}+D_3(t). \\ &=... \\ &=t\sum_{i=1}n\sum_{j=1}^{n}A_{ij}+D. \end{aligned}$$

□

chapter 矩阵

1.2 第 1 周作业

测试