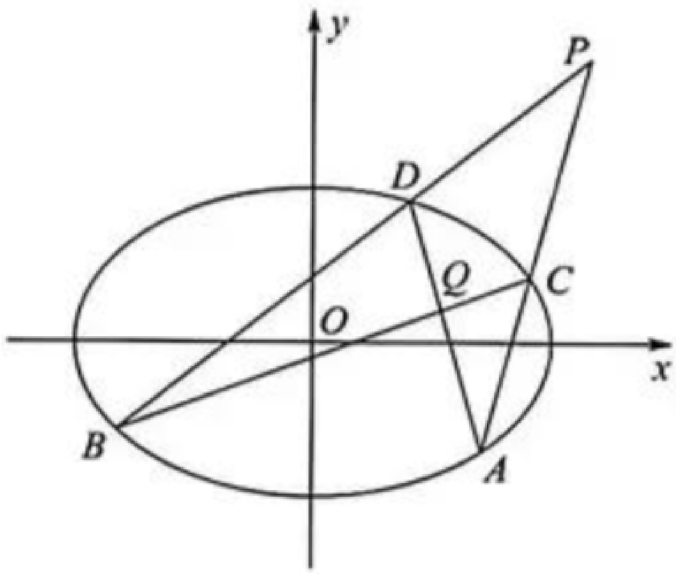
高中数学
解析几何讲义

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期：2025 年 9 月 18 日



前言

前言内容...

目录

第一章　先导课程

1.1　认识解析几何

解析几何是高中数学的重要学习内容，不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代表述，但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如 3 次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈 3 种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

定义 1.1.1: 函数的极限

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（无论多么小），总存在正数 δ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

例题 1: 证

$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3.$

解 1.1.1. 对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，

$$|(2x+1)-3|=|2x-2|=2|x-1|<2\delta=\varepsilon$$

因此，由定义可知 $\lim_{x\to 1}(2x+1)=3.$

1.2 连续函数

定义 1.2.1: 连续

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

定理 1: 连续函数的性质

果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续，则它们的和、差、积、商（分母不为零）都在点 x_0 处连续。

第二章　导数与微分

2.1　导数的定义

定义 2.1.1: 导数

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$。

例题 1: 求

数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数。

解 2.1.1. 直接求导即可

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

2.2 微分的定义

定义 2.2.1: 微分

函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义，如果函数的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，而 $A\Delta x$ 叫做函数在点 x 处相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$。