



华南理工大学
South China University of Technology

工科数学分析 作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 11 月 25 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 集合, 映射与函数	1
1.1 第1周作业	2
第二章 极限	5
2.1 习题 2.1	6
2.2 习题 2.3	7
2.3 习题 2.2	10
2.4 习题 2.4	12
2.5 习题 2.5	14
第三章 一元函数微分学	27
3.1 习题 3.1	27
3.2 习题 3.2	28
3.3 习题 3.3	31
3.4 习题 3.4	34
3.5 习题 3.5	35
3.6 泰勒公式	40
3.7 函数性态的研究	41
3.8 习题 3.8	44
第四章 自用	46

第一章 集合，映射与函数

1.1 第 1 周作业

例题 1.1.1 讨论下列函数的奇偶性

$$\begin{array}{lll}
 (1) y = 3x - x^3 & (2) 2 + 3x - x^3 & (3) y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} \\
 (4) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (5) y = \sqrt{x(2-x)} & (6) y = 2^{-x} \\
 (7) f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases} & (8) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})
 \end{array}$$

解 1.1.1. (1) 由于 $f(x) + f(-x) = 3x + 3(-x) - x^3 - (-x)^3 = 0$, 故为奇函数

(2) 由于 $f(x) + f(-x) = 2 + 3x + 3(-x) + 2 - x^3 - (-x)^3 = 4$, 不为奇函数; 而 $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$, 故为非奇非偶函数

(3) 由于 $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$, 故为偶函数

(4) 由于 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(-x)$, 故为偶函数

(5) 由于 $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$, 故不为偶函数, 由于 $f(x) + f(-x) = \sqrt{x(2-x)} + \sqrt{-x(2+x)} \neq 0$, 故为非奇非偶函数

(6) 由于 $\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$, 故为非奇非偶函数

(7) 由于 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) + f(-x) = x-1+(-x)+1=0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$, 故为奇函数

(8) 由于 $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln(-x^2 + (x^2 + 1)) = 0$, 故为奇函数

例题 1.1.2 研究函数的单调性

$$(1) y = ax + b \quad (2) y = ax^2 + bx + c \quad (3) y = x^3 \quad (4) y = a^x$$

解 1.1.2. (1) 若 $a \geq 0$, 则 y 单调递增; 若 $a < 0$, 则 y 单调递减; 若 $a > 0$, 则 y 严格单调递增

(2) 若 $a > 0$, 则 y 先严格单调减后严格单调增, 若 $a < 0$, 则 y 先严格单调增后严格单调减, 若 $a = 0$, 则当 $b > 0$ 时, y 单调递增, 当 $b < 0$ 时, y 单调递减; 若 $a = b = 0$, 则 y 非严格单调递增

(3) 若 $x_1 > x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) > x_1 - x_2 > 0$ 故单调递增

(4) 需限定 $a > 0$, 则当 $a > 1$ 时, y 单调递增, 当 $a < 1$ 时, y 单调递减; 若 $a = 1$, 则 $y = 1$ 非严格单调递增;

例题 1.1.3 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$$\begin{array}{lll} (1) y = \sin^2 x & (2) y = \sin x^2 & (3) y = \cos(x - 2) \\ (4) y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x & (5) y = x - [x] & (6) y = \tan |x| \end{array}$$

解 1.1.3. (1) 是周期函数，周期为 $k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)，最小正周期为 π

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{2x+T^2}{2} \neq 0$$

则这样的 T 不存在。

(3) 是周期函数，周期为 $2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$)，最小正周期为 2π .

(4) $y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\lambda x + \arctan \frac{B}{A})$ 是周期函数，周期为 $\frac{2k\pi}{\lambda}$, ($k \in \mathbb{Z}, \lambda > 0$)，最小正周期为 $\frac{2\pi}{\lambda}$, ($\lambda > 0$)

(5) 是周期函数，因为 $[x] + 1 = [x + 1]$ ，则 $x + 1 - [x + 1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x]$ ，所以 $y = x - [x]$ 是周期函数，周期为 \mathbb{Z} ，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是 π ，假设 $\tan |x|$ 也是周期函数，则存在 $T > 0$ 使得对于定义域内的任意实数 x 都有 $|x| + \pi = |x + T|$ ，代入 $x = -\pi$ 得到 $T = 3\pi$ ，代入 $x = 0$ 得到 $T = \pi$ ，矛盾！所以 $y = \tan |x|$ 不是周期函数。

例题 1.1.4 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

解 1.1.4. (1) 设 $f(x), g(x)$ 为两个奇函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(-g(-x)) = f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(g(-x)) = -f(-x)g(-x) \Leftrightarrow f(x)g(x) + f(-x)g(-x) = 0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

例题 1.1.5 证明

若函数 $f(x)$ 周期为 T ($T > 0$)，则函数 $f(-x)$ 的周期也是 T .

解 1.1.5. 设 $f(x)$ 周期为 T ，则 $f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(-x+T) = f(-x)$ ，故 $f(-x)$ 的周期也是 T .

例题 1.1.6 证明

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义域为 R 的单调函数，求证： $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数。

解 1.1.6. 由于 $f(x), g(x)$ 是定义域为 R 的单调函数, 则:

$$\forall x_1, x_2 \in R, (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0, \quad \forall x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在 $x_1 = g(x_3), x_2 = g(x_4)$, 则相乘

$$(g(x_3) - g(x_4))(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

结合 $x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0$ 就有:

$$(x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4))^2(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3 - x_4)(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

故 $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

例题 1.1.7 证明

$$(1) \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad (2) \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数 $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 + i \Rightarrow z_1 z_2 = 5 + 5i$, 则:

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由于 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 代入 $x = \arcsin x$ 即可得到:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

第二章 极限

2.1 习题 2.1

例题 2.1.1 2.1-A-3: 给出下列极限的精确定义

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

解 2.1.1. (1) 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, $|f(x)| < \varepsilon$.

(2) 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, $|(1+x)^{\frac{1}{x}} - e| < \varepsilon$.

例题 2.1.2 2.1-A-7

利用极限的精确定义证明下列函数的极限

$$\begin{array}{ll} (1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 5x) = 24 & (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2} = \frac{1}{3} & (4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2 - 4} = +\infty. \end{array}$$

解 2.1.2. (1) 要证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时, $|(x^2 + 5x) - 24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$ 。已经出现了 $|x-3|$, 所以现在只需限定 $|x+8|$, 先限定 $|x-3| < 1$, 那么 $|x+8| < 12$, 此时还需满足 $|(x+8)(x-3)| < 12|x-3| < \varepsilon$, 得 $|x-3| < \frac{\varepsilon}{12}$, 故取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{12} \right\}$, 当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, $|(x^2 + 5x) - 24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$ 。

(2) 要证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \varepsilon$ 。取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$ 。

(3) 要证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x| > \delta$ 时, $\left| \frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$, 因为 $\left| \frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{2}{3x^2} \right|$, 取 $\delta = \sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}}$, 则当 $|x| > \delta$ 时, $\left| \frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$ 。

(4) 要证对于任意 $G > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < x - 2 < \delta$ 时, $\frac{2x}{x^2 - 4} > G$, 不妨限定 $x+2 < 5$, 则 $x-2 < 1$, 则 $\frac{2x}{x^2 - 4} > \frac{4}{(x+2)(x-2)} > \frac{4}{5(x-2)} > G$ 解得 $x-2 < \frac{4}{5G}$, 所以取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{4}{5G} \right\}$, 当 $0 < x - 2 < \delta$ 时, $\frac{2x}{x^2 - 4} > G$ 。

例题 2.1.3 2.1-A-10

证明: 由 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 能推出 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$, 但反之不然。

解 2.1.3. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$, 所以由绝对值不等式得到 $|f(x) - A| > ||f(x)| - |A|| = ||f(x)| - |A|| > 0$, 故 $||f(x)| - |A|| < \varepsilon$, 所以由 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

能推出 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$ 。然后反过来, 考虑定义在实数域上的函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$, 其极限

$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 1$, 但是 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在。

例题 2.1.4 2.1-B-2(1): 利用极限的精确证明

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

解 2.1.4. 要证 $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$, 只需证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $\lim_{x \rightarrow a} |\sin x - \sin a| = 2|\cos \frac{x+a}{2}| |\sin \frac{x-a}{2}| < \varepsilon$ 。又因为 $2|\cos \frac{x+a}{2}| |\sin \frac{x-a}{2}| < 2|\sin \frac{x-a}{2}| < 2|\frac{x-a}{2}| = |x-a|$, 所以取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $\lim_{x \rightarrow a} |\sin x - \sin a| < \varepsilon$.

例题 2.1.5 2.1-B-4

利用极限的精确定义证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = +\infty$ 是错误的.

解 2.1.5. 要证明存在 $G > 0, \forall \delta > 0$ 使得当 $x > \delta$ 时, $\frac{x}{x+1} \leq G$, 则取 $G = 1$, 便可以满足 $\forall x > 0, \frac{x}{x+1} \leq 1$, 故存在 $G > 0, \forall \delta > 0$ 使得当 $x > \delta$ 时, $\frac{x}{x+1} \leq G$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = +\infty$ 是错误的. (本题本质是找到一个够大的上界)

2.2 习题 2.3

例题 2.2.1 2.3-A-2

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2); & (2) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)(1 - 2x)^2; & (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 40x^4); \\ (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5 + 21x^3); & (5) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}; & (6) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}; \\ (7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 2}; & (8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^{10} + x + 7}. \end{array}$$

解 2.2.1. (1) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} (3(2)^2 - 5(2) + 2) = 4$.

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)(1 - 2x)^2 = \lim_{x \rightarrow -1} (1 + 1)(1 - 2(-1))^2 = 18$.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 40x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4(x - 40) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 40) = +\infty$.

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5 + 21x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5(6 + \frac{21}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \lim_{x \rightarrow -\infty} (6 + \frac{21}{x^2}) = -\infty$.

(5) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

(6) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{x + \frac{2}{x^3}} = 0$.

(8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^{10} + x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5}{x^7} + \frac{2}{x^{10}}}{1 + \frac{1}{x^9} + \frac{7}{x^{10}}} = 0$;

例题 2.2.2 2.3-A-4

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{3x} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{9x^2 + x + 3}}{6x} \right)$$

解 2.2.2. (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \right) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{3}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{9x} + \frac{1}{9x^2}} = \frac{2}{3}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{9x^2 + x + 3}}{6x} \right) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{1}{36x} + \frac{3}{6x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

例题 2.2.3 2.3-A-8

$$(1) y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} \quad (2) y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

解 2.2.3. (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x + x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = -1$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y = x - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - \frac{1}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - \frac{1}{x}) = -\infty$$

故该函数在 $x = 1$ 处的渐近线为 $x = 1$.

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(1 - \frac{1}{x})^2} = 2$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(1 - \frac{1}{x})^2} = +\infty$$

故该函数在 $x = 2$ 处的渐近线为 $x = 2$.

例题 2.2.4 习题 2.3-B 组-1

已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 讨论下列极限的状态:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

解 2.2.4. (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$ 不确定, 比如当 $f(x) = x$ 时, 假如 $g(x) = 2x$, 那么 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$,

但当 $g(x) = \frac{x}{2}$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, 当 $f(x) = g(x)$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$.

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不确定, 比如当 $f(x) = x$ 时, 假如 $g(x) = 2x$, 那么 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$, 但当 $g(x) = \sqrt{x}$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$, 又当 $g(x) = x^2$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

例题 2.2.5 习题 2.3-B 组-4

设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 求 a 和 b .

解 2.2.5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1 - ax^2 - ax - bx - b}{x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + 1 - b}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left((1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x} \right)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1-a)x - (a+b) = 0 \end{aligned}$$

必须有 $a = 1, b = -1$.

例题 2.2.6 习题 2.3-B 组-5

设 a, b, c 是常数, $a \neq 0$, 证明 $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$ 的图形有斜渐近线, 并求出渐近线方程.

解 2.2.6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = a \neq 0$$

由此可知, $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$ 的图形有斜渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1} - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b - a)x + c}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b - a + \frac{c}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = b - a$$

则渐近线方程为 $y = ax + b - a$.

2.3 习题 2.2

例题 2.3.1 习题 2.2-A-2

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) = 0 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5n+1} = \frac{3}{5}$$

解 2.3.1. (1) 要证明对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时有 $|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$.

$$|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| = \left| \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \right| < \left| \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \right| < \varepsilon$$

因此取 $N = \left[2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \right]$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 $n \geq N$ 时, 有 $|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$.

(2) 要证明对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $n \geq N$ 时, $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \varepsilon$, 限定 $n > 9$, 则 $2^n > n^3$, 则有 $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \left| \frac{n^2}{n^3} \right| = 2 \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$, 则取 $N = \max \left\{ 9, \left[1 + \frac{2}{\varepsilon} \right] \right\}$, 任意 $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \varepsilon$.

(3) 要证明对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时, $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$, 则取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 任意 $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

(4) 要证明对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时, $\left| \frac{3n}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5} \left| \frac{1}{5n+1} \right| < \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$, 则取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right]$, 任意 $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{3n}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon$.

例题 2.3.2 习题 2.2-A-4

证明: 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$ 能推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 但反过来不可以.

解 2.3.2. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时, $\|x_n - a\| < |x_n - a| < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 但是考虑数列 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, 但是去掉绝对值后, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在, 所以不能反过来.

例题 2.3.3 习题 2.2-B-1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \infty \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 1} = \frac{1}{2} \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. (a > 1)$$

解 2.3.3. (1) 要证明任意 $G > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时有 $\left| \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} \right| = \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} > G$, 由

$$\frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^2+1} > \frac{(n-1)(n^2+1)}{n^2+1} = n-1$$

所以取 $N = G + 2$, 则任意 $G > 0$, $\left| \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} \right| > G$.

(2) 要证明对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时, $\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n < \varepsilon$, 则取 $N = [\tan \frac{\pi}{2} - \varepsilon] + 1$, 任意 $\varepsilon > 0$, $\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$.

(3) 要证明对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时, $\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(2\sqrt{n}+1)}$, 取 $N = \left[1 + \left(\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$, 任意 $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

(4) 要证明对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时, $\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$, 由

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \frac{a}{2} \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{[a]} \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{[a]}}{[a]!} \frac{a}{n}$$

所以取 $N = \left[\frac{a^{[a+1]}}{[a]! \varepsilon} + 1 \right]$, 则任意 $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{a^n}{n!} \right| < \varepsilon$.

例题 2.3.4 2.3-A-3

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right]$$

解 2.3.4. (1) 代数变形:

$$\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{(-2)^{-1} + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}}}{1 + \left(-\frac{3}{2} \right)^{n+1}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2} \right)^{n+1}}{1 + \left(-\frac{3}{2} \right)^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{5}{6 \left(1 + \left(-\frac{3}{2} \right)^{n+1} \right)}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6 \left(1 + \left(-\frac{3}{2} \right)^{n+1} \right)} \right) = \frac{1}{3}.$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

(4) 用裂项 $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{2}$$

2.4 习题 2.4

例题 2.4.1 2.4-A-5

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x}$$

$$(5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta}$$

$$(6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h}$$

$$(7) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$$

解 2.4.1. 这里只使用基本极限公式:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}. \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{5 \cdot 3x} = \frac{3}{5}. \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}.$$

$$(5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \theta = 0. \quad (6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h^2} h = 0.$$

$$(7) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 \theta}{2}}{2 \left(\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}. \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\sin^3 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 4x = 2.$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\sin x}{x} = 4.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = -\sin a.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin a}{\cos a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a) \cos a \cos(x-a)} = \sec^2 a, \text{ 其中 } a \neq$$

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

例题 2.4.2 2.4-A-6

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/2} & (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x} & (3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} (x \neq 0) \\ (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{1/x} & (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x} \end{array}$$

解 2.4.2. (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/3}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{-1}{x}\right)^{\frac{-1}{x}}\right)^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$(3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} (x \neq 0) = \lim_{\frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right) = e$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^a = \lim_{\frac{1}{ax} \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{ax}}}\right]^a = e^a$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-4} = e^{-4}.$$

例题 2.4.3 2.4-B-4

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} & (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \tan 3x & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} \\ (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} & (5) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} \end{array}$$

解 2.4.3. (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x} - 5}{\frac{1}{x^3} \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x^3}{\sin x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2} \frac{3x^2 - 5x}{3x^2} = 3.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \tan 3x = \lim_{x \rightarrow 0} -\sin x \tan(3x + \frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x}{\tan x} = \frac{1}{3}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \frac{1}{2} = 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x + 1}{\tan x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x(1 - \tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x} = 2.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left((1+\frac{1}{x})x\right)^{-1} = \frac{1}{e}.$$

2.5 习题 2.5

例题 2.5.1 2.5-A-2

证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$ 收敛，并求其极限值.

解 2.5.1. 先证数列 $\{a_n\}$ 有界，数列满足 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, 由于 $a_1 = \sqrt{2} < 2$, 假设 $a_k < 2$, ($k \geq 2$), 则有 $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{4} = 2$, 所以归纳得到 $a_k < 2$, 因此数列 $\{a_n\}$ 有界.

再证明数列 $\{a_n\}$ 单调递增，作商得到 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调递增.

由单调有界收敛定理得到 $\{a_n\}$ 收敛，极限存在，所以设极限为 A , 对 $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ 两边取极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}} \Rightarrow A = 2$$

所以数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

进一步地，设 $b_n = a_n - 2$, 所以

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = \sqrt{2a_n} - 2 = \sqrt{2(2 + b_n)} - 2 = \sqrt{4 + 2b_n} - 2$$

泰勒展开得到

$$\sqrt{4 + 2b_n} = 2\sqrt{1 + \frac{b_n}{2}} = 2 \left(1 + \frac{b_n}{4} - \frac{b_n^2}{32} + O(b_n^3) \right) \Rightarrow b_{n+1} = \frac{b_n}{2} - \frac{b_n^2}{16} + O(b_n^3)$$

对于大的 n , 有 $b_n \rightarrow 0$, 主导项为 $\frac{b_n}{2}$, 因此 $b_{n+1} \sim \frac{1}{2}b_n$, 这意味着 b_n 以指数速率衰减，即 $b_n \sim C(\frac{1}{2})^{n-1}$, 其中 $C = b_1 = \sqrt{2} - 2$. 因此 $b_n^2 \sim C^2(\frac{1}{4})^{n-1}$, 因此误差项为 $O((\frac{1}{4})^n)$

$$a_n = 2 + (\sqrt{2} - 2) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + o \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

例题 2.5.2 2.5-A-3

设 $a > 0, 0 < x_1 < \frac{1}{a}, x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), n = 1, 2, 3, \dots$ 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

解 2.5.2. 先证明数列 $\{x_n\}$ 有界，已知 $0 < x_1 < \frac{1}{a}$, 则假设 $x_k \in (0, \frac{1}{a}), k \in \mathbb{N}_+$, 则 $ax_k \in (0, 1)$, 而 $x_k(2 - ax_k)$ 是 x_k 的二次函数，在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单增，在 $(\frac{1}{a}, \frac{2}{a})$ 上单减，所以 $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k) > 0$, 且 $x_{k+1} < \frac{1}{a}(2 - a\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$, 所以 $x_n \in (0, \frac{1}{a})$, 数列 $\{x_n\}$ 有界. 再证明数列 $\{x_n\}$ 单调递增，作商得到 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - ax_n > 1$, 所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，极限存在，所以设极限为 A , 对 $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ 两边取极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(2 - a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \Leftrightarrow A = A(2 - aA) \Leftrightarrow A = \frac{1}{a}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a}$, 事实上这个数列的通项公式是 $x_n = \frac{1}{a} [1 - (1 - ax_1)^{2^{n-1}}]$

例题 2.5.3 2.5-A-4

设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$ 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$.

解 2.5.3. (1) 当 $x_1 = \sqrt{3}$ 时, 假设 $x_k = \sqrt{3}, k \in \mathbb{N}_+$, 则

$$x_{k+1} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以 $\{x_n = \sqrt{3}\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$.

(2) 当 $0 < x_1 < \sqrt{3}$ 时, 假设 $0 < x_k < \sqrt{3}, k \in \mathbb{N}_+$, 则由函数 $f(x) = \frac{3x+3}{3+x} = 3 - \frac{6}{3+x}$ 在 $(0, \sqrt{3})$ 上单增, 得到:

$$\frac{3+0}{3+0} = 1 < x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} < \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以归纳得到 $x_k \in (0, \sqrt{3})$, 且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n - 3x_n - x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} > 0$$

则 $\{x_n\}$ 单调递增, 由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛, 设极限为 A , 代入递推式得到 $A = \frac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$.

(3) 当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时, 假设 $x_k > \sqrt{3}, k \in \mathbb{N}_+$, 则由函数 $f(x) = \frac{3x+3}{3+x} = 3 - \frac{6}{3+x}$ 在 $(\sqrt{3}, \infty)$ 上单增, 得到:

$$x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} > \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 有下界, 又有:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n - 3x_n - x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减, 由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛, 设极限为 A , 代入递推式得到 $A = \frac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$.

例题 2.5.4 2.5-B-1

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}, n = 1, 2, 3, \dots$, 证明 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求极限.

解 2.5.4. 先证明数列 $\{x_n\}$ 有界, 由 $x_1 = 10 > 3$, 假设 $x_k > 3$, 那么 $x_{k+1} = \sqrt{x_k + 6} > \sqrt{9} = 3$, 所以 $\{x_n\}$ 有界; 再证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减, 作商得到

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 6} - x_n = \frac{x_n + 6 - x_n^2}{\sqrt{x_n + 6} + x_n} = \frac{(3-x_n)(x_n+2)}{\sqrt{x_n + 6} + x_n} > 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减, 由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 极限存在, 设极限为 A , 代入递推式得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

例题 2.5.5 2.5-B-2

利用柯西准则, 证明下面各数列的收敛性:

$$(1) x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n, \text{ 其中 } |a_i| \leq M \ (i = 0, 1, 2, \dots), \text{ 且 } |q| < 1;$$

$$(2) x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

解 2.5.5. (1) 设 $m > n$, 则

$$|x_m - x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_mq^m| \leq M|q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^m| < M \frac{|q^{n+1}|}{1 - |q|}$$

任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = [\log_q \frac{\varepsilon}{M} + 1]$ 使得任意 $x > N$, $M \frac{|q^{n+1}|}{1 - |q|} < M|q^{n+1}| < \varepsilon$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛. (2) 设 $m > n$, 则

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(m)}{2^m} \right| < \left| \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^m} \right| < \frac{1}{2^n}$$

所以任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = [2 - \log_2 \varepsilon]$ 使得任意 $n > N$, $|x_m - x_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例题 2.5.6 2.5-B-3

对于数列 $\{x_n\}$, 若子列 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k+1}\}$ 都收敛于 a , 试用 “ $\varepsilon - N$ ” 的语言证明数列 $\{x_n\}$ 也收敛于 a .

解 2.5.6. 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N_1, |x_{2n-1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N_2, |x_{2n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ; 那么对 $2n-1$ 代入 $n = N_1 + 1$, 对 $2n$ 代入 $n = N_2 + 1$, 可知取 $N = \max\{2N_1 + 4, 2N_2 + 4\}$, 则 $\forall n > N, |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a .

例题 2.5.7 2.5-B-4

证明: 若 $f(x)$ 为定义于 $[a, +\infty)$ 上的单调增加函数, 则极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.

解 2.5.7. 必要性: 设极限为 A , 则存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$, 故

$$|f(x)| - |A| < ||f(x)| - |A|| < |f(x_n) - A| < 1 \Rightarrow |f(x_n)| < 1 + |A|$$

所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.

充分性: 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界, 则由确界定理得到 $f(x)$ 有上确界 $\sup_{x \in [a, +\infty)} f(x)$, 由确界定义知道, $\forall \varepsilon_n = \frac{1}{n}, (n = 1, 2, \dots), \exists x_n \in [a, +\infty)$, 使得 $|f(x_n) - A| < \frac{1}{n}$, 于是得到数列 $\{x_n\}$ 满足

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, 由于 $f(x)$ 为定义于 $[a, +\infty)$ 上的单调增加函数, 所以任意 $x > x_{N+1}$, 均有 $f(x_{N+1}) \leq f(x) \leq A$, 于是 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

例题 2.5.8 2.6-B-1

证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$, $\arctan x \sim \frac{1}{4}\sin 4x$.

解 2.5.8. (1) $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim x \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}, x \rightarrow 0$.

(2) $\arctan x \sim x = \frac{4x}{4} \sim \frac{\sin 4x}{4}$, 由 $\tan x \sim x, x \rightarrow 0$ 换元 $x = \arctan y$ 可得 $y \sim \arctan x, x \rightarrow 0$.

例题 2.5.9 2.6-B-2

利用等价无穷小求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

解 2.5.9. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-n}$.

当 $m > n$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = 0$;

当 $m = n$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = 1$;

当 $m < n$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = \infty$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{2}}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - 1}{\frac{1}{2}x^2} = 1$.

例题 2.5.10 2.6-B-3

证明: (1) $2x - x^2 = O(x) (x \rightarrow 0)$; (2) $\sqrt{1+x} - 1 = o(1) (x \rightarrow 0)$;

(3) $2x^3 + 2x^2 = O(x^3) (x \rightarrow \infty)$; (4) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x) (x \rightarrow 0)$.

解 2.5.10. (1) 验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 2x) = 2$ 为非零常数, 故 $2x - x^2 = O(x) (x \rightarrow 0)$.

(2) 由定义, 验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{1+\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} = 0$, 故 $\sqrt{1+x} - 1 = o(1) (x \rightarrow 0)$.

(3) 由定义, 验证 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{2}{x}) = 2$ 为非零常数, 故 $2x^3 + 2x^2 = O(x^3) (x \rightarrow \infty)$.

(4) 验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots + x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{n(n-1)}{2}x + \dots + x^{n-1} \right) = 0$, 故

$(1+x)^n = 1 + nx + o(x) (x \rightarrow 0)$.

例题 2.5.11 2.6-B-4

设在某一极限过程中, α 和 β 都是无穷小. 证明: 如果 $\alpha \sim \beta$, 则 $\beta - \alpha = o(\alpha)$, 反之, 如果 $\beta - \alpha = o(a)$, 则 $\alpha \sim \beta$.

解 2.5.11. 如果 $\alpha \sim \beta$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 1 - 1 = 0$, 故 $\beta - \alpha = o(\alpha)$.

如果 $\beta - \alpha = o(a)$, 则 $0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} - 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 故 $\alpha \sim \beta$.

例题 2.5.12 2.6-B-5

证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:

(1) $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n), (0 < n < m)$; (2) $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}), (n, m > 0)$.

解 2.5.12. (1) 由定义得到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)o(1)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} o(1) = 0 \Rightarrow o(g(x)) = g(x)o(1)$$

考虑

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) + o(x^m)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n o(1) + x^m o(1)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} (o(1) + x^{m-n} o(1)) = \lim_{x \rightarrow 0} o(1) = 0$$

故 $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n), (0 < n < m)$; (2) 考虑

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) \cdot o(x^m)}{x^n \cdot x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n o(1) x^m o(1)}{x^n \cdot x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} (o(1) \cdot o(1)) = 0$$

由定义得到 $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}), (n, m > 0)$.

例题 2.5.13 2.7-B-2

判断 $x = 0$ 处的间断点类型 (1) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + nx^2}$.

解 2.5.13. (1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} = \frac{0+1}{0-1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{1}{1} = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 两侧的极限均存在, 但不等于 $f(0)$, 且 $f(0^-) \neq f(0^+)$, 所以是跳跃间断点.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{0 + x^2} = \frac{1}{x}$, 所以 $x = 0$ 为无穷间断点.

例题 2.5.14 2.7-B-3

设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 试找出其间断点.

解 2.5.14. 观察发现分母在 $x = 1$ 处的变化速度很快, 计算 $f(x)$ 的分段函数得到:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = -1 \\ 0, & |x| > 1 \\ 1+x, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

所以 $f(1^-), f(1), f(1^+)$ 都不等, 所以 $x = 1$ 为间断点.

例题 2.5.15 2.7-B-4

试确定 a, b 的值, 使 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x = 0$, 有可去间断点 $x = 1$.

解 2.5.15. (1) 由题意得到 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处左极限和右极限至少一个为无穷大, 假设 $a \neq 0$, 由于 $f(x)$ 为初等函数, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)} = \frac{1-b}{a}$ 为常数, 矛盾, 所以 $a = 0$; 当 $b = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$, 所以需要同时满足 $a = 0, b \neq 1$, 下证充分性, 当 $a = 0, b \neq 1$ 时

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} + \frac{e-b}{x-1} = \infty$$

(2) 要使得 $f(x)$ 有可去间断点 $x = 1$, 则 $f(1^-) = f(1^+)$, 假设 $b \neq e$, 计算发现

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e-b}{(x-1)(1-a)} = \infty$$

矛盾, 所以 $b = e$ 为必要条件, 当 $b = e$ 时, 计算极限并使用等价无穷小替换:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{1-a}$$

所以 $a \neq 1$, 下面证明充分性. 当 $a \neq 1, b = e$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{1-a} = e$, 所以此时 $f(1^-) = f(1^+) = e$, 因此 $x = 1$ 为可去间断点, 等价于 $a \neq 1, b = e$. 所以答案为 $a = 0, b \neq 1; a \neq 1, b = e$.

例题 2.5.16 2.8-A-3 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^{3 \sec x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x)^{\cos \frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(\cos^2 x + \sqrt{1-x^2})}{e^x + \sin x} + (1+x)^x \right]$$

解 2.5.16. (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^{3 \sec x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^3 = e^3$.

(2) 由于该函数为初等函数, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x)^{\cos \frac{1}{x}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \frac{\pi}{2}$.

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(\cos^2 x + \sqrt{1 - x^2})}{e^x + \sin x} + (1+x)^x \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 - x^2}) = 1 + \ln 2.$$

例题 2.5.17 2.8-A-5

证明下列方程在给定区间至少有一个根: $x2^x = 1, x \in [0, 1]; x^3 + px - q = 0, p > 0, x \in R$

解 2.5.17. (1) 设初等函数 $f(x) = x2^x - 1$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = -1, f(1) = 1$, 由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有至少一个根.

(2) 设初等函数 $g(x) = x^3 + px - q$ 在 R 上连续,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} - \frac{q}{x^3}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} - \frac{q}{x^3}\right) = +\infty \end{cases}$$

零点存在性定理知 $g(x)$ 在 R 上有至少一个根.

例题 2.5.18 2.8-A-6

设 $f(x) \in C[0, 1]$, 并且 $\forall x \in [0, 1], 0 < f(x) < 1$ (画-图). 求证: $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

解 2.5.18. 设连续函数 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(0) = f(0) - 0 > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$, 由零点存在性定理知 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有根 x_0 , $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

例题 2.5.19 2.8-B-2

证明: 若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 必有界.

解 2.5.19. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则任意 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $N_1 \in R$ 使得 $\forall x > N_1$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon_1$, 即 $A - \varepsilon_1 < f(x) < A + \varepsilon_1$, 说明 $f(x)$ 在 $(N_1, +\infty)$ 有上界 $A + \varepsilon_1$ 和下界 $A - \varepsilon_1$; 设 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$, 则任意 $\varepsilon_2 > 0$, 存在 $N_2 \in R$ 使得 $\forall x < N_2$, 有 $|f(x) - B| < \varepsilon_2$, 即 $B - \varepsilon_2 < f(x) < B + \varepsilon_2$, 说明 $f(x)$ 在 $(-\infty, N_2)$ 有上界 $B + \varepsilon_2$ 和下界 $B - \varepsilon_2$; 由于 $f(x)$ 在 $[N_2, N_1]$ 上连续, 所以在 $[N_2, N_1]$ 上也有上界 C_1 , 有下界 C_2 , 则取 $D_1 = \max\{C_1, A + \varepsilon_1, B + \varepsilon_2\}, D_2 = \min\{C_2, A - \varepsilon_1, B - \varepsilon_2\}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有上界 D_1 和下界 D_2 ; 证毕.

例题 2.5.20 2.8-B-3

设 $f(x) \in C(a, b)$, 且 $f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 都存在, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

解 2.5.20. 补充定义函数 $g(x) = \begin{cases} f(a^+), & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \\ f(b^-), & x = b \end{cases}$, 则 $g(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+) = g(a)$, 所以 $g(x)$ 在 a 点右连续, 同理 $g(b)$ 在 b 点左连续, 由此可知 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

例题 2.5.21 2.8-B-4

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [a, b]$, L 为常数, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

解 2.5.21. 任意 $\varepsilon > 0$, 存在仅与 ε 有关的 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, 使得 $\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$, 有 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$, 即 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

例题 2.5.22

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}$, 试求 $\{a_n\}$ 的渐进.

解 2.5.22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 则有

$$a_{n+1} = \frac{S_n}{T_n} = \frac{S_n}{a_n T_{n-1}} = \frac{S_n}{\frac{S_{n-1}}{T_{n-1}} T_{n-1}} = \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

转化为估计 S_n 的阶, 将 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 代入得到:

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_{n+1} = S_n + \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

下面估计 S_n 的主阶, 先考察它的有界性和单调性, 由

$$S_n > 0, S_{n+1} - S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} > 0 \Rightarrow S_{n+1} > S_n$$

可知 S_n 是单调递增的, 再次代入递推式有

$$S_{n+1} - S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} > 1 \Rightarrow S_{n+1} - S_n > 1 \Rightarrow S_n \geq n$$

所以 S_n 发散到正无穷, 无上界, 我们再把这个结论代入到递推公式中:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{S_n}{S_{n-1}} \Leftrightarrow \frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{1}{S_{n-1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

当 n 趋于无穷时, $S_n \sim n$, 构造 $b_n = S_n - n$ 以得到更精确的阶, 将 $S_n = n + b_n$ 代入递推公式:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{n + b_n}{n - 1 + b_{n-1}} - 1 = \frac{1 + \frac{b_n}{n}}{1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{b_{n-1}}{n}\right)} - 1$$

泰勒展开可得:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= -1 + \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) \left(1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{b_{n-1}}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -1 + \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) - \frac{b_{n-1}}{n} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{b_n - b_{n-1}}{n} + \frac{b_n(1 - b_{n-1})}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \Rightarrow b_{n+1} - b_n &\sim \frac{1}{n} \Rightarrow b_n \sim \ln n + O(1) \Rightarrow S_n = n + b_n \sim n + \ln n + O(1) \end{aligned}$$

所以 $\{S_n\}$ 的阶为 $n + \ln n + c + o(1)$, 代入 $a_n = \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}$ 得到:

$$a_n = \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} = \frac{(n-1) + \ln(n-1) + c + o(1)}{(n-2) + \ln(n-2) + c + o(1)}$$

并利用

$$\ln(n-1) = \ln n - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \ln(n-2) = \ln n - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

代入：

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= n - 1 + \ln n + c - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = n \left(1 + \frac{\ln n + c - 1}{n} - \frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ S_{n-2} &= n - 2 + \ln n + c - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = n \left(1 + \frac{\ln n + c - 2}{n} - \frac{4}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \end{aligned}$$

故技重施：

$$\frac{1}{S_{n-2}} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln n + c - 2}{n} + \frac{(\ln n + c - 2)^2 + 4}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

代入得到

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{\ln n + c - 1}{n} - \frac{3}{2n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\ln n + c - 2}{n} + \frac{(\ln n + c - 2)^2 + 4}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 - \frac{\ln n + c - 2}{n} + \frac{\ln n + c - 1}{n} + \frac{(\ln n + c - 2)^2 + 2}{n^2} \\ &\quad - \frac{(\ln n + c - 1)(\ln n + c - 2)}{n^2} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{3 - c - \ln n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

例题 2.5.23

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$, 找到一个正整数 k , 使得 $n \geq k$ 时,
 $a_n < 1 + \frac{1}{n}$.

解 2.5.23.

例题 2.5.24

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, 求 $\{a_n\}$ 的渐进.

解 2.5.24. 解微分方程

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} \Rightarrow \frac{da}{dn} = \frac{1}{a} \Rightarrow a da = dn \Rightarrow a \sim \sqrt{2n} \Rightarrow a_n^2 \sim 2n$$

设 $a_n^2 = b_n + 2n$, 代入递推公式得到

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 \Leftrightarrow 2(n+1) + b_{n+1} = 2n + b_n + 2 + \frac{1}{2n + b_n}$$

化简得到 $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2n+b_n} = b_n + \frac{\frac{1}{2n}}{1 - (-\frac{b_n}{2n})}$, 泰勒展开:

$$b_{n+1} - b_n \sim \frac{1}{2n} - \frac{b_n}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \Rightarrow b_n \sim \frac{1}{2} \ln n + c_n$$

再次代入递推公式:

例题 2.5.25

已知 k 为正整数, 求积分 $\int_0^\pi \frac{x \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx$

解 2.5.25.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = \int_{-\pi}^0 \frac{(x + \pi) \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \frac{x \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx + \pi \int_0^\pi \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + \pi \int_0^\pi \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= -I + \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= -I + 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= -I + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + \frac{\pi^2}{2} \\ \Rightarrow I &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

例题 2.5.26

给出 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$, 计算 $\int_0^1 \int_0^y \frac{\ln(1+x)}{x} dx dy$.

解 2.5.26. 根据所给式子, 得到 $0 \leq x \leq y$ (因为 x 从 0 到 y 积分), 再根据外层积分确定 $0 \leq y \leq 1$, 所以 $0 \leq x \leq y \leq 1$, 所以:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^y \frac{\ln(1+x)}{x} dx dy &= \int_0^1 \int_x^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{(1-x) \ln(1+x)}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \int_0^1 \ln(x+1) dx \\ &= \frac{\pi^2}{12} - 2 \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

例题 2.5.27

求积分 $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

解 2.5.27.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} &= \int \frac{\sec^6 x dx}{1 + \tan^6 x} = \int \frac{\sec^6(\arctan t) d \arctan t}{1 + \tan^6(\arctan t)} \\ &= \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{(t^6+1)(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{(t^2+1)(t^4-t^2+1)} \\ &= \int \frac{1+t^2}{t^4-t^2+1} dt = \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}-1} dt \\ &= \int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+1} = \arctan(t-\frac{1}{t}) + C \\ &= \arctan(\tan x - \frac{1}{\tan x}) + C = \arctan(\frac{\tan^2 x - 1}{\tan x}) \\ &= \arctan(-2 \cot 2x) + C = C - \arctan(2 \cot 2x). \end{aligned}$$

例题 2.5.28

求积分 $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x + \cos x}.$

解 2.5.28.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x + \cos x} &= \int \frac{dx}{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1)} \\ &= \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)^2} \quad (\text{令 } t = \tan x) \\ &= \int \left(\frac{1/4}{1+t} + \frac{-\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}}{1+t^2} + \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{(1+t^2)^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+t} dt + \frac{1}{4} \int \frac{1-t}{1+t^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1-t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \ln|1+t| + \frac{1}{4} \arctan t - \frac{1}{8} \ln(1+t^2) + \frac{1}{4} \cdot \frac{t+1}{1+t^2} + C \\ &= \frac{1}{4} \ln|1+\tan x| - \frac{1}{4} \ln|\sec x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(\sin x \cos x + \cos^2 x) + C \\ &= \frac{1}{4} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x + C \end{aligned}$$

例题 2.5.29

求积分 $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$.

解 2.5.29.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin x(1 + \cos x)} = \int \frac{dx}{4 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{8 \sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{dt}{4 \sin t \cos^3 t} = \int \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 dt}{4 \sin t \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{(\tan t^2 + 1)^2}{\tan t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(\tan(\arctan \theta)^2 + 1)^2}{\tan \arctan \theta} d \arctan \theta = \frac{1}{4} \int \frac{\theta^2 + 1}{\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\theta + \frac{1}{\theta} \right) d\theta = \frac{1}{8} \theta^2 + \frac{1}{4} \ln |\theta| + C \\ &= \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln |\tan \frac{x}{2}| + C \end{aligned}$$

例题 2.5.30

求积分 $\int \frac{x e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx$.

解 2.5.30.

$$\begin{aligned} \int \frac{x e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx &= \int \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \int \frac{e^{\ln t} \ln t}{(e^{\ln t} + 1)^2} d \ln t = \int \frac{\ln t}{(t + 1)^2} dt \\ &= \int \ln t d \left(-\frac{1}{1+t} \right) = -\frac{\ln t}{t+1} + \int \frac{1}{1+t} d \ln t \\ &= -\frac{\ln t}{t+1} + \int \frac{1}{t(t+1)} dt = -\frac{\ln t}{t+1} + \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= -\frac{\ln t}{t+1} + \ln t - \ln(t+1) + C = -\frac{x}{e^x + 1} + x - \ln(e^x + 1) + C \end{aligned}$$

第三章 一元函数微分学

3.1 习题 3.1

例题 3.1.1 3.1-A-3

下列各式可否成为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数的定义？请说明理由。

- (1) $y = f(x)$ 在 (a, b) 内定义, $x_0 \in (a, b)$, 若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$ 存在, 则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数。
- (2) $y = f(x)$ 在 (a, b) 内定义, $x_0 \in (a, b)$, 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数。
- (3) $y = f(x)$ 在 (a, b) 内定义, $x_0 \in (a, b)$, 若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$ 存在, 则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数。

解 3.1.1. (1) 可以, 因为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = f'(x_0)$$

(2) 可以, 因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

(3) 不可以, 当 $f'(x_0)$ 存在时, 该极限等于 $f'(x_0)$, 这是因为

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \frac{1}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2}f'(x_0) = f'(x_0) \end{aligned}$$

但是当 $f'(x_0)$ 不存在, 而左右导数存在时, 该极限推出的是左导数和右导数的平均值, 并非 $f'(x_0)$, 比如当 $f(x) = |x|, x = 0$ 导数不存在, 但是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x| - |-\Delta x|}{2\Delta x} = 0$$

矛盾, 所以不可以用作导数的定义。

例题 3.1.2 3.1-A-9

利用定义求函数在 $x = 0$ 处的导数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

解 3.1.2. 利用定义, 有

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

例题 3.1.3 3.1-B-3

求证: 偶函数的导数是奇函数, 奇函数的导数是偶函数;

解 3.1.3. 设 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(x) - f(-x) = 0$, 两边求导得到 $f'(x) + f'(-x) = 0$, 所以偶函数的导数是奇函数; 设 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x) + f(-x) = 0$, 两边求导得到 $f'(x) - f'(-x) = 0$, 所以奇函数的导数是偶函数

我们也可以考虑定义: 设 $f(x)$ 是偶函数, 所以

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-(-h)} = -f'(-x)$$

所以偶函数的导数是奇函数; 设 $f(x)$ 是奇函数, 所以

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(-x-h)}{-(-h)} = f'(-x)$$

所以奇函数的导数是偶函数。

例题 3.1.4 3.1-B-4

求证: 周期函数的导数仍然是周期函数

解 3.1.4. 设 $f(x)$ 是周期函数, T 是周期, $f(x+T) = f(x)$, 则两边求导得到 $f'(x+T) = f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 也是周期函数, 也可以从定义考虑:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = f'(x+T)$$

所以 $f'(x)$ 是周期函数.

3.2 习题 3.2

例题 3.2.1 3.2-A-2

求导 (1) $y = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; (2) $y = \frac{1}{x^3 + 2x + 1}$; (3) $y = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$.

解 3.2.1. (1) $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$; (2) $y' = \frac{-3x^2 - 2}{(x^3 + 2x + 1)^2}$; (3) $y' = -\frac{1 + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2}$

例题 3.2.2 3.2-A-4

求导 (1) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; (2) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; (3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

解 3.2.2. (1) $y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$;

(2) $y' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{(\sqrt{a^2 - x^2})^2} = \frac{a^2}{(\sqrt{a^2 - x^2})^3}$;

(3) $y' = \frac{1 + \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$.

例题 3.2.3 3.2-B-1

设 $y = f(x)$ 为严格递增的可导函数, $x = \varphi(y)$ 是它的反函数. 证明:

(1) 当 $h \neq 0$ 时, $f(x+h) - f(x) = k \neq 0$, 若记 $f(x+h) = y+k$, 则 $\varphi(y+k) = x+h$.

(2) 当 $k \rightarrow 0$ 时, $\frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k} = \frac{h}{k} = \frac{h}{y+k-y} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)}$ 趋于 $\frac{1}{f'(x)}$.

解 3.2.3. (1) 由 $x = \varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$, 以及 $y = f(x)$ 为严格递增的可导函数, 所以 $\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} > 0$, 所以 $x = \varphi(y)$ 为严格递增的可导函数, 所以

$$f(x+h) = y+k \Rightarrow \varphi(f(x+h)) = x+h = \varphi(y+k)$$

(2) $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}$, 这里 $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow k \rightarrow 0$.

例题 3.2.4 3.2-B-2

设 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, 用 φ 表示 f 的反函数. 求证: $f(1) = 7$, $\varphi(7) = 1$. 并计算 $\varphi'(7)$.

解 3.2.4. 代入得到 $f(1) = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$, 所以 $\varphi(7) = 1$, 由 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ 可得 $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$, 所以 $\varphi'(7) = \frac{1}{f'(\varphi(7))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{10}$.

例题 3.2.5 3.2-B-3

设 $y = (\arcsin x)^2$, 证明 $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

解 3.2.5. 两边求导数得到 $y' = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\cos \arcsin x} = 2 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 所以 $\sqrt{1-x^2}y' = 2 \arcsin x$, 再次两边求导得到 $\sqrt{1-x^2}y'' + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, 等价变形就有 $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

例题 3.2.6 3.2-B-4

求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$: (1) $y = \frac{1}{1-x^2}$; (2) $y = \sin^2 x$.

解 3.2.6. (1) 裂项有 $y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$, 所以 $y^{(n)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1+x} \right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(n)} \right]$, 求 n 阶导数有 $y^{(n)} = \frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right]$
 (2) $y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $y^{(n)} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right]^{(n)} = -2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right)$, 诱导公式得到
 $y^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2} \right)$

3.3 习题 3.3

例题 3.3.1 3.3-A-2

方程 $e^y + xy + y = 2$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 $y'(x)'$.

解 3.3.1. 两边求导得到 $y'e^y + y + xy' + y' = 0$ 解得 $y' = -\frac{y}{e^y + x + 1}$

例题 3.3.2 3.3-A-3

- (1) $e^x - e^y + xy = 0$
- (2) $x^2 + y^2 - \arcsin y = 0$
- (3) $x^y = y^x$
- (4) $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
- (5) $x^2 - 2xy + y^2 = 2x$
- (6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
- (7) $xy^2 + e^y = \cos(x + y^2)$
- (8) $\ln y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

解 3.3.2. (1) 两边求导得 $e^x - y'e^y + y + xy' = 0$ 解得 $y' = \frac{e^x + y}{e^y - x}$

(2) 两边求导得 $2x + 2yy' - \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ 解得 $y' = \frac{2x\sqrt{1-y^2}}{1-2y\sqrt{1-y^2}}$

(3) 变换得到 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$, 两边求导得到 $y' = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$

(4) 两边求导得 $\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$ 解得 $y' = \frac{x+y}{x-y}$

(5) 两边求导得 $2x - 2y - 2xy' + 2yy' = 2$ 解得 $y' = \frac{x-y-1}{x-y}$

(6) 两边求导得 $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0$, 解得 $y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$

(7) 两边求导得 $y^2 + 2xyy' + e^y y' = -(1+2yy') \sin(x+y^2)$, 解得 $y' = -\frac{y^2 + \sin(x+y^2)}{e^y + 2xy + 2y \sin(x+y^2)}$.

(8) 两边求导得 $\frac{y'}{y} = \frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$, 解得 $y' = -\frac{y}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

例题 3.3.3 3.3-A-4 求下列由参数方程表示的函数的导数:

- 1) $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$;
- (2) $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t$, 求 $\frac{dy}{dx}$;
- (3) $x = 1+t^3, y = e^{2t}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2}$;
- (4) $x = 1+t^2, y = \cos t$, 求 $\frac{dy}{dx}$;
- (5) $x = e^t \sin t, y = e^{-t} \cos t$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 3.3.3. 使用链式法则, 分别求导得:

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{t}}{2\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}} \frac{\frac{2}{3}(1-\sqrt{t})^{\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[3]{t^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$$

$$(2) x + y = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1. \quad (3) \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{2e^{2t}}{3t^2}, \text{ 代入 } x = 2, t = 1 \text{ 得到 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \frac{2}{3} e^2.$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{-\sin t}{2t}. \quad (5) \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{e^{-t}(-\sin t - \cos t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = -e^{2t}.$$

例题 3.3.4 3.3-A-5: 用对数求导法求导数

$$(1) y = x^{\sin x}, (x > 0); (2) y = (\sqrt{x})^{\ln x}, (x > 0); (3) y = a^{\sin x}, (a > 0);$$

$$(4) y = (1+x)^{\frac{1}{x}}, (x > 0); (5) y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}; (6) y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

解 3.3.4. (1) $\ln y = (\sin x) \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\sin x}{x} + (\cos x) \ln x \Rightarrow y' = x^{\sin x} \left((\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$

(2) $\ln y = \frac{1}{2} \ln^2 x \Rightarrow \frac{d \ln y}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} 2 \ln x \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \ln x}{x}$

(3) $\ln y = \sin x \ln a \Rightarrow \frac{d \ln y}{dy} \frac{dy}{dx} = \cos x \ln a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^{\sin x} \cos x \ln a$

(4) $\ln y = \frac{\ln(x+1)}{x} \Rightarrow \frac{d \ln y}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ 解得:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right)$$

(5) 定义域为 $(-4, -2) \cup (-2, +\infty)$, 取绝对值, 然后取对数

$$\ln |y| = \ln \left(\frac{(x+5)^2|x-4|^{\frac{1}{3}}}{|x+2|^5(x+4)^{\frac{1}{2}}} \right) = 2 \ln |x+5| + \frac{1}{3} \ln |x-4| - 5 \ln |x+2| - \frac{1}{2} \ln(x+4)$$

两边对 x 微分:

$$\frac{d}{dx} \ln |y| = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x+5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-4} - 5 \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+4}$$

解得:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)} \right)$$

(6) 定义域为 $(-1, 1]$, $|y| = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln |1+x|$, 两边对 x 微分:

$$\frac{d}{dx} \ln |y| = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \right)$$

例题 3.3.5 3.3-A-6

下列参数方程给出函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$(1) x = a \cos t, y = a \sin t; \quad (2) x = 2t - t^2, y = 3t - t^3;$$

$$(3) x = \ln(1+t^2), y = \arctan t; \quad (4) x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), y = t^2.$$

$$\text{解 3.3.5. (1)} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (-\cot t) \frac{dt}{dx} = \frac{\csc^2 t}{-a \sin t} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$$

$$(2) \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2}(1+t) \right) \frac{dt}{dx} = \frac{3}{4(1-t)}$$

$$(3) \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2t} \right) \frac{dt}{dx} = -\frac{(1+t^2)}{4t^3}$$

$$(4) \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (2t\sqrt{t^2+1}) \frac{dt}{dx} = \frac{4t^2+2}{\sqrt{t^2+1}} \sqrt{t^2+1} = 4t^2 + 2.$$

例题 3.3.6 3.3-A-7 求下列隐函数的二阶导数 y''

- (1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0, (a > 0)$; (2) $y^2 + 2\ln y = x^4$; (3) $xy = e^{x+y}$; (4) $y = 1 - xe^y$

解 3.3.6. (1) 两边求导数得

$$3x^2 + 3y^2y' = 3a(y + xy') \Rightarrow (ax - y^2)y' = x^2 - ay \Rightarrow (a - 2yy')y' + (ax - y^2)y'' = 2x - ay'$$

解得

$$y'' = \frac{1}{y^2 - ax} \left[\frac{2a(ay - x^2)}{y^2 - ax} - 2y \left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \right)^2 - 2x \right]$$

(2) 两边求导数得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3 \Rightarrow (y^2 + 1)y' = 2x^3y \Rightarrow (2yy')y' + (y^2 + 1)y'' = 2(3x^2y + x^3y')$$

解得

$$y'' = \frac{2x^2y}{(1+y^2)^2} [3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)]$$

(3) 两边求导数得 $xy' + y = e^{x+y}(1+y') \Rightarrow (e^{x+y} - x)y' = y - e^{x+y} \Leftrightarrow (xy - x)y' = y - xy$, 再次在两边求导

$$(xy' + y - 1)y' + (xy - x)y'' + y = 0 \Rightarrow y'' = \frac{y}{x - xy} + \frac{(x + y - 2)(xy - y)}{(x - xy)^2} + \frac{x(xy - y^2)}{(x - xy)^3}$$

(4) 两边求导数得 $y' = -xe^y y' - e^y \Rightarrow y'(1 + xe^y) = -e^y \Rightarrow y'(y - 2) = e^y$, 再次求导有

$$y'' = e^{2y} \left[\frac{1}{(y-2)^2} - \frac{1}{(y-2)^3} \right] \Leftrightarrow y'' = \frac{2e^{2y}}{(1+xe^y)^2} - \frac{xe^{3y}}{(1+xe^y)^3}$$

例题 3.3.7 3.3-A-9

求 $\frac{dy}{dx}$: (1) $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处

(2) $r = ae^{m\theta}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 以及 $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ 为极坐标.

解 3.3.7.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr(\theta) \sin \theta}{d\theta}}{\frac{dr(\theta) \cos \theta}{d\theta}} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta}$$

(1) 参数方程为 $r^2(\theta) = 2a^2 \cos 2\theta$, $r'(\theta)r(\theta) = 2a^2(-\sin 2\theta)$, $r(\frac{\pi}{6}) = a^2$, $r(\theta) = a$, $r'(\theta) = -\sqrt{3}a$, 代入

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta} = 0$$

(2) 参数方程为 $\begin{cases} x = ae^{m\theta} \cos \theta \\ y = ae^{m\theta} \sin \theta \end{cases}$, $r(\theta) = ae^{m\theta}$, $r'(\theta) = ame^{m\theta}$, 代入就有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta} = \frac{\cos \theta + m \sin \theta}{-\sin \theta + m \cos \theta} = \tan \left(\theta + \arctan \frac{1}{m} \right)$$

例题 3.3.8 3.3-B-1

求导: $y = e^x + e^{e^x}$ $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b$ $y = 3^x \ln x$

解 3.3.8. (1) $y' = e^x + e^{e^x} e^x$;

(2) $\ln y = x \ln \left(\frac{a}{b}\right) + a \ln \left(\frac{b}{x}\right) + b \ln \left(\frac{x}{a}\right) = x \ln \left(\frac{a}{b}\right) + (b-a) \ln x$, 两边求导得

$$\frac{y'}{y} = \ln \left(\frac{a}{b}\right) + \frac{b-a}{x}, y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln \left(\frac{a}{b}\right) + \frac{b-a}{x}\right)$$

(3) $y' = 3^x \ln 3 \ln x + \frac{3^x}{x}$

3.4 习题 3.4

例题 3.4.1 3.4-A-5

利用一阶微分的形式不变性求微分: (1) $y = \arctan e^x$ (2) $y = e^{\sin x}$

解 3.4.1. (1) $dy = \frac{de^x}{1+e^{2x}} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$; (2) $dy = e^{\sin x} d \sin x = e^{\sin x} \cos x dx$

例题 3.4.2 3.4-B-1

求下列函数的二阶微分 d^2y : (1) $y = \sqrt{1+x^2}$ (2) $y = \frac{\ln x}{x}$

解 3.4.2. (1) $d^2y = d(dy) = d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx\right) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} dx^2 = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx^2$

(2) $d^2y = d(dy) = d\left(\frac{1-\ln x}{x^2} dx\right) = \frac{-x - 2x(1-\ln x)}{x^4} dx^2 = \frac{2\ln x - 3}{x^3} dx^2$

3.5 习题 3.5

例题 3.5.1 3.5-A-5

拉格朗日中值定理证明的关键是构造辅助函数，试利用下列辅助函数来证明这个定理：

- (1) $\Phi(x) = [f(x) - f(a)](b - a) - (x - a)[f(b) - f(a)];$
- (2) $\Phi(x) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)].$

解 3.5.1. (1) 过 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的直线方程对应的一次函数为 $g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ ，所以构造

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \\ &= \frac{(b - a)f(x) - (f(b) - f(a))(x - a) - (b - a)f(a)}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(x - a)}{b - a} = \frac{\Phi(x)}{b - a} \end{aligned}$$

且 $h(a) = h(b) = 0$ ，所以根据罗尔定理，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$ ，即 $f'(\xi) = g'(\xi)$ ，即

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

(2) 设 $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ ，容易发现 $\varphi'(x) = h'(x)$ ，这表明 $\varphi(x)$ 是 $h(x)$ 向上平移得到的，所以尽管此时没有 $h(a) = h(b) = 0$ ，但是 $h(a) = h(b)$ 却仍然成立，仍可利用罗尔定理得到存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\varphi'(\xi) = 0$ ，即 $f'(\xi) = g'(\xi)$ ，即

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

例题 3.5.2 3.5-A-6

- (1) 证明：如果 $\forall x \in [a, b]$, 有 $f'(x) \geq m$, m 是某常数，则有 $f(b) \geq f(a) + m(b - a)$;
- (2) 证明：如果 $\forall x \in [a, b]$, 有 $f'(x) \leq M$, M 是某常数，则有 $f(b) \leq f(a) + M(b - a)$;
- (3) 如果 $\forall x \in [a, b]$, 有 $|f'(x)| \leq M$, 试写出一个类似的定理.

解 3.5.2. (1) 根据导数存在，得知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微，符合拉格朗日定理使用条件，于是存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ，又因为 $f'(\xi) \geq m$ ，代入就有 $f(b) \geq f(a) + m(b - a)$

(2) 根据导数存在，得知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微，符合拉格朗日定理使用条件，于是存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ，又因为 $f'(\xi) \leq M$ ，代入就有 $f(b) \leq f(a) + M(b - a)$

(3) 根据导数存在，得知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微，符合拉格朗日定理使用条件，于是存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ，即 $|f'(\xi)| = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$ ，又因为 $|f'(\xi)| \leq M$ ，代入就有 $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$ ，即 $|f(b)| \leq |f(a)| + M(b - a)$

例题 3.5.3 3-5-A-7

证明: 无论 m 是什么数, 多项式函数 $f(x) = x^3 - 3x + m$ 在 $[0, 1]$ 内决不会有两个零点.

解 3.5.3. 用反证法, 假设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 存在两个零点 x_1 和 x_2 , 则由于罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 0$, 但是 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 在 $(0, 1)$ 上小于 0, 矛盾, 所以 $f(x) = x^3 - 3x + m$ 在 $[0, 1]$ 内决不会有两个零点.

例题 3.5.4 3-5-A-8

设 $f(x) \in C[0, 1]$ 且可微; 对于每个 x , $f(x)$ 的值都在 $(0, 1)$ 内; 并且 $\forall x \in (0, 1), f'(x) \neq 1$. 求证: 存在唯一的一个数 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

解 3.5.4. 构造函数 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续可微, 且 $g(0) = f(0) - 0 > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上必有零点, 假设有两个及以上个零点, 则根据罗尔定理得到必然存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$, 矛盾, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上只有一个零点, 即存在唯一的一个数 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

例题 3.5.5 3-5-A-10

证明: (1) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$; (2) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ ($a > b > 0$).

解 3.5.5. (1) 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{\sin b - \sin a}{b - a}$

且 $|f'(\xi)| = \left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| \leq 1$, 变形即可得到 $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$

(2) 等价于证明 $\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{b - a} < \frac{1}{b}$, 根据 Lagrange 中值定理, 对于函数 $f(x) = \ln x$, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{\ln a - \ln b}{b - a}$ 且由于 $\ln x$ 的导函数在 (a, b) 上单调递减, 所以 $f'(a) < f'(\xi) < f(b)$, 即 $\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{b - a} < \frac{1}{b}$.

例题 3.5.6 3-5-A-11

证明: 若 $f(x) \in C[a, b]$, 在 (a, b) 内可导, 则必存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$$

解 3.5.6. 等价于证明 $\frac{f(a) - f(b)}{a^2 - b^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$, 根据柯西中值定理, 对于 $f(x)$ 和 $g(x) = x^2$, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, 即 $\frac{f(a) - f(b)}{a^2 - b^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$.

例题 3.5.7 3-5-A-12

设 $f(x) \in C[a, b]$. 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$. 求证: 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

解 3.5.7. 等价于证明 $\frac{\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$, 对于 $f(x)$ 和 $g(x) = \frac{1}{x}$, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

例题 3.5.8 3-5-B-2

设函数 $f(x)$ 满足 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n$, $n > 1$, 通过考虑 f' 证明 f 是常数.

解 3.5.8. 变形得到 $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|^{n-1}$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in (x, y)$ 使得 $|f'(\xi)| = \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$, 则 $|f'(\xi)| < |x - y|^{n-1}$, 由于 x, y 的任意性, $|f'(\xi)| = 0$, 所以 f 是常数.

例题 3.5.9 3-5-B-10

设 $h > 0$, $f'(x)$ 在 $(a - h, a + h)$ 内存在. 求证:

$$(1) \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h) \quad (0 < \theta < 1);$$

$$(2) \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h) \quad (0 < \theta < 1).$$

解 3.5.9. (1) 由 Lagrange 中值定理得到, 若 $f'(x)$ 在 $(x, x+h)$ 内存在, 那么存在 $\xi \in (x, x+h)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, 这里可以换元, 令 $\xi = x + \theta h$, 其中 $\theta \in (0, 1)$, 则存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得 $f'(x + \theta h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, 使用这个定理就可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \\ &= f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h) \end{aligned}$$

(2) 同理, 若 $f'(x)$ 在 $(x, x+h)$ 内存在, 那么存在 $\xi \in (x, x+h)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, 这里可以换元, 令 $\xi = x + \theta h$, 其中 $\theta \in (0, 1)$, 则存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得 $f'(x + \theta h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, 使用这个定理就可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \\ &= f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h) \end{aligned}$$

例题 3.5.10 3-5-B-11

由拉格朗日中值定理知, $\ln(1+x) - 0 = x \cdot \frac{1}{1+\theta x}$ ($0 < \theta < 1$), 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$.

解 3.5.10. 解得 $\theta = \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)}$, 转化为求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)}$, 由

$$\frac{(x - \ln(x+1))'}{(x \ln(x+1))'} = \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)} = \frac{x}{x + (x+1) \ln(x+1)}$$

则由于导函数之比在 0 处的极限存在, 分母不为 0, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 分子分母趋近于 0, 所以洛必达法则有效, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + (x+1) \ln(x+1)}$$

发现分子分母趋近于 0, 对 $\frac{x}{x + (x+1) \ln(x+1)}$ 分子分母上下分别求导得到 $\frac{1}{2 + \ln(x+1)}$, 由于导函数之比在 0 处的极限存在, 分母不为 0, 则洛必达法则有效, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + (x+1) \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \ln(x+1)} = \frac{1}{2}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$

例题 3.5.11 3-5-B-12

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$, 并设 $g(0) = g'(0) = 0, g''(0) = 17$. 求 $f'(0)$.

解 3.5.11. 利用导数的定义: 已知 $f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2}$$

又因为 $g'(x), g''(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有定义, 所以使用洛必达法则得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h) - g'(0)}{h} = \frac{1}{2} g''(0) = \frac{17}{2}$$

可导一定连续, 所以 $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h)}{2} = \frac{17}{2}$

例题 3.5.12 3-5-B-14

设 $f(x)$ 一阶可导, 且 $f''(x_0)$ 存在, 求证:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

解 3.5.12. 发现分子分母都趋近于 0, 先分子分母上下分别求导得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(x_0 + 2h) - 2f'(x_0 + h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + 2h) - f'(x_0 + h)}{h}$$

, 发现此时极限仍然存在, 分母仍不是 0, 所以洛必达法则有效, 于是有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + 2h) - f'(x_0 + h)}{h}$$

再利用 $f''(x_0)$ 的存在性, 以及导数的定义, 得到

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + 2h) - f'(x_0 + h)}{h} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + 2h) - f'(x_0) - (f'(x_0 + h) - f'(x_0))}{h} \\ &= 2f''(x_0) - f''(x_0) = f''(x_0) \end{aligned}$$

即证.

3.6 泰勒公式

例题 3.6.1 3.6-A-2

按 x 的正整数幂, 写出下列函数的展开式至含有指定阶数的项 (带皮亚诺余项):

- (1) $\frac{1}{1-x}$ 到含 x^7 的项; (2) $\arctan x$ 到含 x^4 的项
- (3) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 到含 x^4 的项; (4) $\tan x$ 到含 x^4 的项.

解 3.6.1. (1) 先求 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 的在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$, 由于 $(1-x)f(x)=1$ 两边求 n 阶导数, 并利用莱布尼兹公式, 得到

$$(1-x)f^{(n)}(x) + (-1)C_n^1 f^{(n-1)}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = n f^{(n-1)}(0)$$

又 $f'(0) = 1$, 所以 $f^{(n)}(0) = n!$, 于是展开到含 x^7 的项就是:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + o(x^7)$$

(2) 令 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$, 展开得到:

$$f'(x) = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + o(x^4) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

保留到含 x^4 的项就是

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

(3) 直接使用广义二项式展开:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + C_{-\frac{1}{2}}^1 x + C_{-\frac{1}{2}}^2 x^2 + C_{-\frac{1}{2}}^3 x^3 + C_{-\frac{1}{2}}^4 x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + \frac{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{24}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

(4) 反复求导过程复杂, 可以先建立微分方程:

$$y' = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

两边求导得到:

$$\begin{aligned} y'' &= 2yy' = 2y(1+y^2) = 2y + 2y^3 \\ y''' &= 2y' + 6y^2y' = 2(1+y^2) + 6y^2(1+y^2) = 2 + 8y^2 + 6y^4 \\ y^{(4)} &= 16yy' + 24y^3y' = 16y(1+y^2) + 24y^3(1+y^2) = 16y + 40y^3 + 24y^5 \end{aligned}$$

代入 $y=0$, $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$ ($x \rightarrow 0$) 于是得到展开式:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

例题 3.6.2 3.6-A-5

求函数 $f(x) = xe^x$ 的 n 阶麦克劳林公式, 带拉格朗日余项.

解 3.6.2. 设 $f(x) = xe^x$, 其泰勒展开式展开到含 x^n 的项的式子, 都可以由 x, e^x 展开式的乘积确定:

$$\begin{aligned} f(x) = xe^x &= x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

再加上 $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}, \theta \in (0, 1)$, 即可得到

$$f(x) = xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}(\theta x + n + 1)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

例题 3.6.3 3.6-A-6

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}; &\quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}; (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{(\sin 2x)^6}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right); &(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right); \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 3.6.3. } (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \\ (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{6} \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{(\sin 2x)^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) - 1 - x^3}{64x^6} = \frac{1}{128} \\ (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2 \ln(x+1)}{2x} = 1 \\ (5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \frac{1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \\ (6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) - (1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{6}} = -3 \end{aligned}$$

3.7 函数性态的研究

例题 3.7.1 3.7-A-3

证明函数 $y = x + \sin x$ 严格上升.

解 3.7.1. $y' = 1 - \cos x \geq 0$, 故 y 严格上升.

例题 3.7.2 3.7-A-7

设 $f(x) = axe^{bx}$, 试确定常数 a, b , 使得 $f(\frac{1}{3}) = 1$, 且函数在 $x = \frac{1}{3}$ 处有极大值.

解 3.7.2. $f'(x) = ae^{bx}(bx + 1)$, $f'(\frac{1}{3}) = ae^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{1}{3}b) = 0$, $f(\frac{1}{3}) = a\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}} = 1$, 得到由必要条件引出的方程组 $a(b + \frac{1}{3}) = 0$, $ae^{\frac{1}{3}} = 3$, 由第二个方程得到 $a \neq 0$, 所以 $b = -3$, $a = 3e$

下面证明充分性, 当 $b = -3$, $a = 3e$ 时, $f(x) = 3xe \cdot e^{-3x} = 3xe^{1-3x}$, $f(\frac{1}{3}) = 1$, $f'(x) = e^{\frac{1-3x}{e^{3x}}} = 0$, 导函数的正负性取决于一次函数 $y = 1 - 3x$, 当 $x < \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) = 0$, 当 $x > \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\frac{1}{3}$ 处的极大值是 $f(\frac{1}{3}) = 1$.

例题 3.7.3 3.7-A-8

- (1) $\sin x > \frac{2}{\pi}x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$;
- (2) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \neq 0)$;
- (3) $x > \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad (x > 0)$;
- (4) $\ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x \geq 0)$.

解 3.7.3. (1) 对于 $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, y 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上为凹函数。根据凹函数的定义, 设 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \sin x$, 有:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) = f\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) = 1 - t$$

令 $x = \frac{\pi}{2}(1-t) \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则有 $\sin x > \frac{2}{\pi}x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$.

(2) 考虑函数 $f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, 则 $f(0) = 0$ 。计算导数:

$$f'(x) = -\sin x + x, \quad f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$$

因此 $f'(x)$ 单调递增, 又 $f'(0) = 0$, 故当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$ 。所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最小值 $f(0) = 0$, 且当 $x \neq 0$ 时 $f(x) > 0$, 即 $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \neq 0)$.

(3) 先证左边不等式: 令 $f(x) = x - \ln(1+x)$, 则 $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad (x > 0)$, 故 $f'(x) > 0$, 又因为 $f(x) > f(0) = 0$, 故 $f(x) > 0$, 即 $x > \ln(1+x)$

再证右边不等式: 令 $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$, 则 $g(0) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad (x > 0)$, 故 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 又因为 $g(x) > g(0) = 0$, 故 $g(x) > 0$, 即 $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$

(4) 令 $h(x) = (1+x) \ln(1+x) - \arctan x$, 则 $h(0) = 0$ 。计算导数:

$$h'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq 0$, 且 $1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0$, 故 $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 单调递增, 因此 $h(x) \geq h(0) = 0$, 即 $(1+x) \ln(1+x) \geq \arctan x$, 亦即 $\ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x \geq 0)$.

例题 3.7.4 3.7-B-3

用函数的凹凸性证明下列不等式: (1) $\ln x \leq x - 1$ ($x > 0$);

(2) $2 \arctan \frac{a+b}{2} \geq \arctan a + \arctan b$ ($a, b \geq 0$);

(3) $1 + x^2 \leq 2^x$ ($0 \leq x \leq 1$);

(4) $\frac{x^n+y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ ($x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1$).

解 3.7.4. (1) 考虑函数 $f(x) = \ln x$, 其定义域为 $(0, +\infty)$ 。计算导数:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凹函数。根据凹函数的性质, 对于任意 $x > 0$, 有:

$$f(x) \leq f(1) + f'(1)(x - 1)$$

代入 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 得:

$$\ln x \leq 0 + 1 \cdot (x - 1) = x - 1$$

即 $\ln x \leq x - 1$ ($x > 0$).

(2) 考虑函数 $f(x) = \arctan x$, 其定义域为 $[0, +\infty)$ 。计算导数:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$$

因此 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是凹函数。根据凹函数的性质, 对于任意 $a, b \geq 0$, 有:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

即:

$$2 \arctan \frac{a+b}{2} \geq \arctan a + \arctan b \quad (a, b \geq 0)$$

(3) 考虑函数 $g(x) = 2^x - 1 - x^2$, 我们需要证明在 $[0, 1]$ 上 $g(x) \geq 0$ 。计算导数:

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 2x, \quad g''(x) = 2^x (\ln 2)^2 - 2$$

在 $[0, 1]$ 上, 由于 $2^x \leq 2$ 且 $(\ln 2)^2 < 1$, 所以 $g''(x) < 2 - 2 = 0$, 即 $g(x)$ 是凹函数。由凹函数的性质, 对于任意 $x \in [0, 1]$, 有:

$$g(x) \geq (1-x)g(0) + xg(1)$$

代入 $g(0) = 0, g(1) = 0$, 得:

$$g(x) \geq 0$$

即 $2^x - 1 - x^2 \geq 0$, 所以 $1 + x^2 \leq 2^x$ ($0 \leq x \leq 1$)。

(4) 考虑函数 $f(x) = x^n$ ($n > 1$), 其定义域为 $(0, +\infty)$ 。计算导数:

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$$

因此 $f(x)$ 是凸函数。根据凸函数的性质，对于 $x > 0, y > 0, x \neq y$, 有：

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

即：

$$\frac{x^n + y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1)$$

3.8 习题 3.8

例题 3.8.1 3.8-A-6

求从点 $M(p, p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 的最短距离。

解 3.8.1. 设函数 $f(y) = \left(\frac{y^2}{2p} - p\right)^2 + (y-p)^2, f'(y) = 2\left(\frac{y^2}{2p} - p\right)\frac{y}{p} + 2(y-p) = 0$, 导函数可以化为

$$\frac{f'(y)}{p} = 2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{p}\right)^2 - 1\right)\frac{y}{p} + 2\frac{y}{p} - 2 = \left(\frac{y}{p}\right)^3 - 2$$

单调递增，那么 $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{2}p$, 则 $f(y)$ 在 $(-\infty, \sqrt[3]{2}p)$ 单调递减，在 $(\sqrt[3]{2}p, +\infty)$ 上单调递增，最小值为 $p\sqrt{\left((2^{-\frac{1}{3}} - 1)^2 + (2^{\frac{1}{3}} - 1)^2\right)} = p(\sqrt[3]{2} - 1)\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}+2}{2}}$.

例题 3.8.2 3.8-A-7

从面积为常数 S 的一切矩形中，求其周长为最小者

解 3.8.2. 设 $ab = S$, 则 $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{S}$, 当且仅当 $a=b$, 即正方形时取等号，所以最小者为边为 \sqrt{S} 的正方形

例题 3.8.3 3.8-A-8

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中，嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形，求此矩形的边长

解 3.8.3. 设第一象限的点 $P(x, y)$, 使用基本不等式，矩形面积为 $S = 4xy \leq 2ab\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 2ab$,

解方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \end{cases}$ 当且仅当矩形的边长为 $\sqrt{2}a, \sqrt{2}b$ 时取等号

例题 3.8.4 3.8-B-5

求由 y 轴上的一个给定点 $(0, b)$ 到抛物线 $x^2 = 4y$ 上的点的最短距离。

解 3.8.4. 设距离的平方为 $f(x) = x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - b\right)^2$, 则

$$f'(x) = 2x + 2\left(\frac{x^2}{4} - b\right)\frac{x}{2} = x\left(\frac{x^2}{4} - (b-2)\right)$$

当 $b \leq 2$ 时, $f'(x)$ 在 $x \leq 0$ 时小于等于 0, 在 $x > 0$ 时大于 0, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 最小值为 $f(0) = b^2$;

当 $b > 2$ 时, $f'(x)$ 的根为 $x_1 = -2\sqrt{b-2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\sqrt{b-2}$, $f'(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 小于 0, 在 $[x_1, 0]$ 上大于等于 0, 在 $(0, x_2)$ 上小于 0, 在 $[x_2, +\infty)$ 上大于等于 0

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 单调递减, 在 $[x_1, 0]$ 上单调递增, 在 $(0, x_2)$ 上单调递减, 在 $[x_2, +\infty)$ 上单调递增, 又由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以最小值为 $f(-2\sqrt{b-2}) = f(2\sqrt{b-2}) = 4(b-1)$, 则距离的最小值为 $\begin{cases} |b|, b \leq 2 \\ 2\sqrt{b-1}, b > 2 \end{cases}$

例题 3.8.5 3.8-B-6

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分求一点 P , 使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小 (其中 $a > 0, b > 0$).

解 3.8.5. 取 $P(x, y)$, 切线斜率为 $k = -\frac{b^2x^2}{a^2y^2}$, 切线方程为 $Y - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(X - x)$, 横截距和纵截距为 $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}$, 三角形面积为 $\frac{a^2b^2}{2xy} = \frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}}$, 则设 $f(x) = x^2(a - x^2)$, $f'(x) = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2) = 0$, 又因为 $x > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{a}{\sqrt{2}})$ 大于 0, 在 $[\frac{a}{\sqrt{2}}, +\infty)$ 小于等于 0, 所以最小值为 $f(\frac{a}{\sqrt{2}})$, 所以所求的 P 坐标为 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$, 三角形的面积是 $S = \frac{a^2b^2}{2xy} = ab$

第四章 自用

例题 4.0.1

设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上三阶可导, 且 $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} = a \neq 1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$.

解 4.0.1. 首先由 $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ 得知 $f'(x), f(x)$ 均单调递增, 所以

$$f(x+h) > f(x) + f'(\xi)(x+h-x) > f(x) + f'(x)h$$

令 $h \rightarrow +\infty$, 得 $f(x) \rightarrow +\infty$, 现在对已知极限变形:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{f''(x)} \right)$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = 1 - a \neq 0$, 同样可以对所求极限变形:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right)$$

问题在于如何沟通 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = 1 - a$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right)$, 观察到它们是微分形式, 所以不妨反方向利用洛必达法则。须知, 洛必达法则在 $\frac{*}{\infty}$ 的情形中是适用的, 即若 $f \rightarrow \infty, f, g$ 在 a 的某个去心邻域内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'}{f'}$ 存在 (或为无穷大, 但分母不等于 0), 那么 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g}{f} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'}{f'}$; 相关证明可以参阅数分教材 (如陈纪修的, 卓里奇的, 等等).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f'(x)}{f''(x)}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} \end{aligned}$$

$$\text{设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = A, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right) = 1 - A, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} = 1 - a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{1 - a} \text{ 即 } \frac{1 - A}{1 - a} = A, \text{ 解得}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{1}{2 - a}$$

例题 4.0.2 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$$

解 4.0.2. 根据做差的形式不难想到拉格朗日中值定理，但是如果直接凑分母 $1 = n + 1 - n$ ，那就会导致 $\xi \in (n, n + 1)$ 的东西出现，而没有很好的利用上

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

所以先化为 e 指数，用取对数之后的差分形式作为分母 $e^f - e^g = e^\xi(f - g), \xi \in (f, g)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \left[e^{(n+1) \ln(1 + \frac{1}{n+1})} - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \left[\frac{e^{(n+1) \ln(1 + \frac{1}{n+1})} - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}}{(n+1) \ln(1 + \frac{1}{n+1}) - n \ln(1 + \frac{1}{n})} \right] \left[(n+1) \ln(1 + \frac{1}{n+1}) - n \ln(1 + \frac{1}{n}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x e^\xi \left[(n+1) \ln(1 + \frac{1}{n+1}) - n \ln(1 + \frac{1}{n}) \right] \end{aligned}$$

其中 $e^\xi \in \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right)$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\xi \rightarrow 1$, 所以:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \cdot e \left[(n+1) \ln(1 + \frac{1}{n+1}) - n \ln(1 + \frac{1}{n}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \cdot e \left[\left(1 - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \cdot e \left[-\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \cdot e \left[\frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \cdot e \left[\frac{1}{2n(n+1)} - \frac{2n+1}{3n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \cdot e \left[\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \frac{e}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{x-2} \end{aligned}$$

因此, 极限为:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x < 2 \\ \frac{e}{2} & \text{如果 } x = 2 \\ +\infty \text{ 或不存在} & \text{如果 } x > 2 \end{cases}$$