华南理工大学

South China University of Technology

工科数学分析

作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级： 1 班

学号： 202530451676

日期： 2025 年 10 月 16 日

厚德尚学 自强不息

务实创新 追求卓越

目录

第一章 集合，映射与函数

1.1 第 1 周作业

例题 1.1.1 讨论下列函数的奇偶性

$(1)y = 3x - x^3$ $(2)2 + 3x - x^3$ $(3)y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$

$(4)y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(5)y = \sqrt{x(2-x)}$ $(6)y = 2^{-x}$

$(7)f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ $(8)y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

解 1.1.1. (1) 由于 $f(x) + f(-x) = 3x + 3(-x) - x^3 - (-x)^3 = 0$，故为奇函数

(2) 由于 $f(x) + f(-x) = 2 + 3x + 3(-x) + 2 - x^3 - (-x)^3 = 4$，不为奇函数；而 $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$，故为非奇非偶函数

(3) 由于 $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$，故为偶函数

(4) 由于 $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = f(-x)$，故为偶函数

(5) 由于 $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$，故不为偶函数，由于 $f(x) + f(-x) = \sqrt{x(2-x)} + \sqrt{-x(2+x)} \neq 0$，故为非奇非偶函数

(6) 由于 $\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$，故为非奇非偶函数

(7) 由于 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) + f(-x) = x - 1 + (-x) + 1 = 0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$，故为奇函数

(8) 由于 $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln(-x^2 + (x^2+1)) = 0$，故为奇函数

例题 1.1.2 研究函数的单调性

$(1)y = ax + b$ $(2)y = ax^2 + bx + c$ $(3)y = x^3$ $(4)y = a^x$

解 1.1.2. (1) 若 $a \geq 0$，则 y 单调递增；若 $a < 0$，则 y 单调递减；若 $a > 0$，则 y 严格单调递增

(2) 若 $a > 0$，则 y 先严格单调减后严格单调增，若 $a < 0$，则 y 先严格单调增后严格单调减，若 $a = 0$，则当 $b > 0$ 时，y 单调递增，当 $b < 0$ 时，y 单调递减；若 $a = b = 0$，则 y 非严格单调递增

(3) 若 $x_1 > x_2$，则 $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) > x_1 - x_2 > 0$ 故单调递增

(4) 需限定 $a > 0$，则当 $a > 1$ 时，y 单调递增，当 $a < 1$ 时，y 单调递减；若 $a = 1$，则 $y = 1$ 非严格单调递增；

例题 1.1.3 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$(1) y=\sin^2 x \qquad (2) y=\sin x^2 \qquad (3) y=\cos(x-2)$

$(4) y=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x \qquad (5) y=x-[x] \qquad (6) y=\tan|x|$

解 1.1.3. (1) 是周期函数，周期为 $k\pi, (k\in\mathbb{Z})$，最小正周期为 π

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2-\sin x^2=2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{(x+T)^2-x^2}{2}=2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{2x+T^2}{2}\neq 0$$

则这样的 T 不存在.

(3) 是周期函数，周期为 $2k\pi, (k\in\mathbb{Z})$，最小正周期为 2π.

(4)$y=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\lambda x+\arctan\dfrac{B}{A})$ 是周期函数，周期为 $\frac{2k\pi}{\lambda}, (k\in\mathbb{Z},\lambda>0)$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{\lambda}, (\lambda>0)$

(5) 是周期函数，因为 $[x]+1=[x+1]$，则 $x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]$，所以 $y=x-[x]$ 是周期函数，周期为 $\mathbb{Z}$，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是 π，假设 $\tan|x|$ 也是周期函数，则存在 $T>0$ 使得对于定义域内的任意实数 x 都有 $|x|+\pi=|x+T|$，代入 $x=-\pi$ 得到 $T=3\pi$，代入 $x=0$ 得到 $T=\pi$，矛盾！所以 $y=\tan|x|$ 不是周期函数.

例题 1.1.4 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

解 1.1.4. (1) 设 $f(x),g(x)$ 为两个奇函数，则

$$f(x)g(x)=(-f(-x))(-g(-x))=f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设 $f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)g(x)=(-f(-x))(g(-x))=-f(-x)g(-x)\Leftrightarrow f(x)g(x)+f(-x)g(-x)=0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数.

例题 1.1.5 证明

若函数 $f(x)$ 周期为 $T(T>0)$，则函数 $f(-x)$ 的周期也是 T.

解 1.1.5. 设 $f(x)$ 周期为 T，则 $f(x+T)=f(x)\Rightarrow f(-x+T)=f(-x)$，故 $f(-x)$ 的周期也是 T.

例题 1.1.6 证明

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义域为 R 的单调函数，求证：$f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

解 1.1.6. 由于 $f(x), g(x)$ 是定义域为 R 的单调函数，则：

$$\forall x_1, x_2 \in R,\ (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0,\ \ \forall x_3, x_4 \in R,\ (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在 $x_1 = g(x_3), x_2 = g(x_4)$，则相乘

$$(g(x_3) - g(x_4))(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

结合 $x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0$ 就有：

$$(x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4))^2(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3 - x_4)(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

故 $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

例题 1.1.7 证明

$$(1)\ \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad (2)\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数 $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 + i \Rightarrow z_1 z_2 = 5 + 5i$，则：

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由于 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，代入 $x = \arcsin x$ 即可得到：

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

第二章 极限

2.1 第 2 周作业

例题 2.1.1 2.1-A-3：给出下列极限的精确定义

（1）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

解 2.1.1. （1）对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时，$|f(x)|<\varepsilon$.

（2）对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时，$|(1+x)^{\frac{1}{x}}-e|<\varepsilon$.

例题 2.1.2 2.1-A-7

利用极限的精确定义证明下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5x)=24$ （2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$ （4）$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x}{x^2-4}=+\infty.$

解 2.1.2. （1）要证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-3|<\delta$ 时，$|(x^2+5x)-24|=|(x+8)(x-3)|<\varepsilon$。已经出现了 $|x-3|$，所以现在只需限定 $|x+8|$，先限定 $|x-3|<1$，那么 $|x+8|<12$，此时还需满足 $|(x+8)(x-3)|<12|x-3|<\varepsilon$，得 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{12}$，故取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{12}\right\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，$|(x^2+5x)-24|=|(x+8)(x-3)|<\varepsilon$。

（2）要证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon$。取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$。

（3）要证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|x|>\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$，因为 $\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{2}{3x^2}\right|$，取 $\delta=\sqrt{\dfrac{2}{3\varepsilon}}$，则当 $|x|>\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$。

（4）要证对于任意 $G>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<x-2<\delta$ 时，$\dfrac{2x}{x^2-4}>G$，不妨限定 $x+2<5$，则 $x-2<1$，则 $\dfrac{2x}{x^2-4}>\dfrac{4}{(x+2)(x-2)}>\dfrac{4}{5(x-2)}>G$ 解得 $x-2<\dfrac{4}{5G}$，所以取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{4}{5G}\right\}$，当 $0<x-2<\delta$ 时，$\dfrac{2x}{x^2-4}>G$。

例题 2.1.3 2.1-A-10

证明：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$，但反之不然。

解 2.1.3. 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|=<\varepsilon$，所以由绝对值不等式得到 $|f(x)-A|>||f(x)-|-A||=||f(x)|-|A||>0$，故 $||f(x)|-|A||<\varepsilon$，所以由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$. 然后反过来，考虑定义在实数域上的函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ -1, x\notin Q\end{cases}$，其极限

$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=1$，但是 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在。

例题 2.1.4 2.1-B-2(1)：利用极限的精确证明

$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

解 2.1.4. 要证 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$，只需证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|=2|\cos\dfrac{x+a}{2}||\sin\dfrac{x-a}{2}|<\varepsilon$。又因为 $2|\cos\dfrac{x+a}{2}||\sin\dfrac{x-a}{2}|<2|\sin\dfrac{x-a}{2}|<2|\dfrac{x-a}{2}|=|x-a|$，所以取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|<\varepsilon$.

例题 2.1.5 2.1-B-4

利用极限的精确定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$ 是错误的.

解 2.1.5. 要证明存在 $G>0,\forall\delta>0$ 使得当 $x>\delta$ 时，$\dfrac{x}{x+1}\le G$，则取 $G=1$，便可以满足 $\forall x>0,\dfrac{x}{x+1}\le 1$，故存在 $G>0,\forall\delta>0$ 使得当 $x>\delta$ 时，$\dfrac{x}{x+1}\le G$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$ 是错误的.（本题本质是找到一个够大的上界）

例题 2.1.6 2.3-A-2

(1) $\lim\limits_{x\to2}(3x^2-5x+2)$; (2) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)(1-2x)^2$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-40x^4)$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^5+21x^3)$; (5) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}$; (6) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^4+2}$; (8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+2x}{x^{10}+x+7}$.

解 2.1.6.（1）$\lim\limits_{x\to2}(3x^2-5x+2)=\lim\limits_{x\to2}(3(2)^2-5(2)+2)=4.$

（2）$\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)(1-2x)^2=\lim\limits_{x\to-1}(1+1)(1-2(-1))^2=18.$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-40x^4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4(x-40)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\lim\limits_{x\to+\infty}(x-40)=+\infty.$

（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^5+21x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5(6+\dfrac{21}{x^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\lim\limits_{x\to-\infty}(6+\dfrac{21}{x^2})=-\infty.$

（5）$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty.$

（6）$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty.$

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^4+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{x+\frac{2}{x^3}}=0.$

（8）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+2x}{x^{10}+x+7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}}}{1+\frac{1}{x^9}+\frac{7}{x^{10}}}=0;$

例题 2.1.7 2.3-A-4

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) \qquad (2)\ \lim_{x\to-\infty}(\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x})$$
$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x}) \quad (4)\ \lim_{x\to-\infty}(\frac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x})$$

解 2.1.7. （1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

（2） $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{\sqrt{3x^2+x}}{x})=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}=-\sqrt{3}.$

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{9x}+\dfrac{1}{9x^2}}=\dfrac{2}{3}.$

（4） $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x})=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9}{36}+\dfrac{1}{36x}+\dfrac{3}{6x^2}}=-\dfrac{1}{2}.$

例题 2.1.8 2.3-A-8

$$(1)y=\frac{x^2-2x-2}{x-1} \qquad (2)y=\frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

解 2.1.8. （1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-2x+x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=-1$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y=x-1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0^-}(x-\frac{1}{x})=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0^+}(x-\frac{1}{x})=-\infty$$

故该函数在 $x=1$ 处的渐近线为 $x=1$.

（2）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(1-\frac{1}{x})^2}=2$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y=2$.

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2}{(1-\frac{1}{x})^2}=+\infty$$

故该函数在 $x=2$ 处的渐近线为 $x=2$.

例题 2.1.9　习题 2.3-B 组-1

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$，讨论下列极限的状态：

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) \quad (2)\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$$
$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}f(x)g(x) \quad (4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

解 2.1.9. （1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty+\infty=+\infty.$

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ 不确定，比如当 $f(x)=x$ 时，假如 $g(x)=2x$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=-\infty$，但当 $g(x)=\frac{x}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$，当 $f(x)=g(x)$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0.$

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\cdot+\infty=+\infty.$

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不确定，比如当 $f(x)=x$ 时，假如 $g(x)=2x$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{2}$，但当 $g(x)=\sqrt{x}$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\infty$，又当 $g(x)=x^2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

例题 2.1.10　习题 2.3-B 组-4

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a 和 b.

解 2.1.10.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}}\\&=\frac{\lim_{x\to\infty}\left((1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}\right)}{1}\\&=\lim_{x\to\infty}(1-a)x-(a+b)=0\end{aligned}$$

必须有 $a=1,b=-1.$

例题 2.1.11　习题 2.3-B 组-5

设a,b,c 是常数, $a\neq0$, 证明$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$的图形有斜渐近线, 并求出渐近线方程.

解 2.1.11.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=a\neq0$$

由此可知，$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$ 的图形有斜渐近线.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x+1}-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-a)x+c}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{b-a+\frac{c}{x}}{1+\frac{1}{x}}=b-a$$

则渐近线方程为 $y=ax+b-a$.

例题 2.1.12 习题 2.2-A-2

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{5n+1}=\dfrac{3}{5}$

解 2.1.12. （1）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时有 $|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$。

$$|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|=\left|\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right|<\left|\frac{1}{2\sqrt{n-1}}\right|<\varepsilon$$

因此取 $N=\left[2+\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$，则对于任意 $\varepsilon>0$，当 $n\geq N$ 时，有 $|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$.

（2）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\varepsilon$，限定 $n>9$，则 $2^n>n^3$，则有 $\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\left|\dfrac{n^2}{n^3}\right|=2\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\max\left\{9,\left[1+\dfrac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\varepsilon$.

（3）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{n+1}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

（4）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{3n}{5n+1}-\dfrac{3}{5}\right|=\dfrac{3}{5}\left|\dfrac{1}{5n+1}\right|<\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{3n}{5n+1}-\dfrac{3}{5}\right|<\varepsilon$.

例题 2.1.13 习题 2.2-A-4

证明：由 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$ 能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，但反过来不可以.

解 2.1.13. 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$||x_n|-|a||<|x_n-a|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，但是考虑数列 $a_n=(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$，但是去掉绝对值后，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在，所以不能反过来.

例题 2.1.14 习题 2.2-B-1

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{n^2+1}=\infty$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}=\dfrac{1}{2}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.(a>1)$

解 2.1.14.（1）要证明任意 $G>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时有 $\left|\dfrac{n^3-1}{n^2+1}\right|=\dfrac{n^3-1}{n^2+1}>G$，由

$$\frac{n^3-1}{n^2+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^2+1}>\frac{(n-1)(n^2+1)}{n^2+1}=n-1$$

所以取 $N=G+2$，则任意 $G>0$，$\left|\dfrac{n^3-1}{n^2+1}\right|>G.$

（2）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\arctan n-\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}-\arctan n<\varepsilon$，则取 $N=[\tan\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\arctan n-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.$

（3）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2\sqrt{n}+1)}$，取 $N=\left[1+\left(\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon.$

（4）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|=\dfrac{a^n}{n!}<\varepsilon$，由

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\frac{a}{2}\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{[a]}\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}<\frac{a^{[a]}}{[a]!}\frac{a}{n}$$

所以取 $N=\left[\dfrac{a^{[a+1]}}{[a]!\varepsilon}+1\right]$，则任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|<\varepsilon.$

例题 2.1.15 2.3-A-3

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}\right]$

解 2.1.15.（1）代数变形：

$$\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{(-2)^{-1}+\dfrac{3^n}{(-2)^{n+1}}}{1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}=\frac{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}{1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{5}{6\left(1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}\right)}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{6\left(1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}\right)}\right)=\dfrac{1}{3}.$

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

（3）

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

（4）用裂项 $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{k+1-1}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{2}$$