华南理工大学

South China University of Technology

工科数学分析

作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级： 1 班

学号： 202530451676

日期： 2025 年 10 月 23 日

厚德尚学 自强不息

务实创新 追求卓越

目录

第一章 集合，映射与函数 **1**

1.1 第 1 周作业 2

第二章 极限 **5**

2.1 第 2 周作业 6

第一章 集合，映射与函数

1.1 第 1 周作业

例题 1.1.1 讨论下列函数的奇偶性

$(1) y = 3x - x^3$ $(2) 2 + 3x - x^3$ $(3) y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$

$(4) y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(5) y = \sqrt{x(2-x)}$ $(6) y = 2^{-x}$

$(7) f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ $(8) y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

解 1.1.1. (1) 由于 $f(x) + f(-x) = 3x + 3(-x) - x^3 - (-x)^3 = 0$，故为奇函数

(2) 由于 $f(x) + f(-x) = 2 + 3x + 3(-x) + 2 - x^3 - (-x)^3 = 4$，不为奇函数；而 $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$，故为非奇非偶函数

(3) 由于 $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$，故为偶函数

(4) 由于 $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = f(-x)$，故为偶函数

(5) 由于 $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$，故不为偶函数，由于 $f(x) + f(-x) = \sqrt{x(2-x)} + \sqrt{-x(2+x)} \neq 0$，故为非奇非偶函数

(6) 由于 $\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$，故为非奇非偶函数

(7) 由于 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) + f(-x) = x - 1 + (-x) + 1 = 0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$，故为奇函数

(8) 由于 $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln(-x^2 + (x^2+1)) = 0$，故为奇函数

例题 1.1.2 研究函数的单调性

$(1) y = ax + b$ $(2) y = ax^2 + bx + c$ $(3) y = x^3$ $(4) y = a^x$

解 1.1.2. (1) 若 $a \geq 0$，则 y 单调递增；若 $a < 0$，则 y 单调递减；若 $a > 0$，则 y 严格单调递增

(2) 若 $a > 0$，则 y 先严格单调减后严格单调增，若 $a < 0$，则 y 先严格单调增后严格单调减，若 $a = 0$，则当 $b > 0$ 时，y 单调递增，当 $b < 0$ 时，y 单调递减；若 $a = b = 0$，则 y 非严格单调递增

(3) 若 $x_1 > x_2$，则 $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) > x_1 - x_2 > 0$ 故单调递增

(4) 需限定 $a > 0$，则当 $a > 1$ 时，y 单调递增，当 $a < 1$ 时，y 单调递减；若 $a = 1$，则 $y = 1$ 非严格单调递增；

例题 1.1.3 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$(1) y = \sin^2 x$ $(2) y = \sin x^2$ $(3) y = \cos(x-2)$

$(4) y = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$ $(5) y = x - [x]$ $(6) y = \tan|x|$

解 1.1.3. (1) 是周期函数，周期为 $k\pi, (k \in \mathbb{Z})$，最小正周期为 π

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{(x+T)^2-x^2}{2} = 2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{2x+T^2}{2} \neq 0$$

则这样的 T 不存在.

(3) 是周期函数，周期为 $2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$，最小正周期为 2π.

(4)$y = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\lambda x + \arctan\dfrac{B}{A})$ 是周期函数，周期为 $\frac{2k\pi}{\lambda}, (k \in \mathbb{Z}, \lambda > 0)$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{\lambda}, (\lambda > 0)$

(5) 是周期函数，因为 $[x]+1 = [x+1]$，则 $x+1-[x+1] = x+1-[x]-1 = x-[x]$，所以 $y = x - [x]$ 是周期函数，周期为 $\mathbb{Z}$，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是 π，假设 $\tan|x|$ 也是周期函数，则存在 $T > 0$ 使得对于定义域内的任意实数 x 都有 $|x| + \pi = |x+T|$，代入 $x = -\pi$ 得到 $T = 3\pi$，代入 $x = 0$ 得到 $T = \pi$，矛盾！所以 $y = \tan|x|$ 不是周期函数.

例题 1.1.4 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

解 1.1.4. (1) 设 $f(x), g(x)$ 为两个奇函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(-g(-x)) = f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设 $f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(g(-x)) = -f(-x)g(-x) \Leftrightarrow f(x)g(x) + f(-x)g(-x) = 0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数.

例题 1.1.5 证明

若函数 $f(x)$ 周期为 $T(T > 0)$，则函数 $f(-x)$ 的周期也是 T.

解 1.1.5. 设 $f(x)$ 周期为 T，则 $f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(-x+T) = f(-x)$，故 $f(-x)$ 的周期也是 T.

例题 1.1.6 证明

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义域为 R 的单调函数，求证：$f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

解 1.1.6. 由于 $f(x), g(x)$ 是定义域为 R 的单调函数，则：

$$\forall x_1, x_2 \in R,\ (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0,\ \ \forall x_3, x_4 \in R,\ (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在 $x_1 = g(x_3), x_2 = g(x_4)$，则相乘

$$(g(x_3) - g(x_4))(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

结合 $x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0$ 就有：

$$(x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4))^2(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3 - x_4)(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

故 $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

例题 1.1.7 证明

$$(1)\ \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad (2)\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数 $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 + i \Rightarrow z_1 z_2 = 5 + 5i$，则：

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由于 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，代入 $x = \arcsin x$ 即可得到：

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

第二章 极限

2.1 第 2 周作业

例题 2.1.1 2.1-A-3：给出下列极限的精确定义

（1）$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

解 2.1.1.（1）对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时，$|f(x)| < \varepsilon$.

（2）对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时，$|(1+x)^{\frac{1}{x}} - e| < \varepsilon$.

例题 2.1.2 2.1-A-7

利用极限的精确定义证明下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5x) = 24$ （2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$ （4）$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x}{x^2-4} = +\infty.$

解 2.1.2.（1）要证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x-3| < \delta$ 时，$|(x^2+5x)-24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$。已经出现了 $|x-3|$，所以现在只需限定 $|x+8|$，先限定 $|x-3| < 1$，那么 $|x+8| < 12$，此时还需满足 $|(x+8)(x-3)| < 12|x-3| < \varepsilon$，得 $|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{12}$，故取 $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{12}\right\}$，当 $0 < |x-3| < \delta$ 时，$|(x^2+5x)-24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$。

（2）要证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x-1| < \varepsilon$。取 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$。

（3）要证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x| > \delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2} - \dfrac{1}{3}\right| < \varepsilon$, 因为 $\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2} - \dfrac{1}{3}\right| = \left|\dfrac{2}{3x^2}\right|$，取 $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{3\varepsilon}}$，则当 $|x| > \delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2} - \dfrac{1}{3}\right| < \varepsilon$。

（4）要证对于任意 $G > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < x-2 < \delta$ 时，$\dfrac{2x}{x^2-4} > G$，不妨限定 $x+2 < 5$，则 $x-2 < 1$，则 $\dfrac{2x}{x^2-4} > \dfrac{4}{(x+2)(x-2)} > \dfrac{4}{5(x-2)} > G$ 解得 $x-2 < \dfrac{4}{5G}$，所以取 $\delta = \min\left\{1, \dfrac{4}{5G}\right\}$，当 $0 < x-2 < \delta$ 时，$\dfrac{2x}{x^2-4} > G$。

例题 2.1.3 2.1-A-10

证明：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |A|$，但反之不然。

解 2.1.3. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x)-A| =< \varepsilon$，所以由绝对值不等式得到 $|f(x)-A| > ||f(x)-|-A|| = ||f(x)|-|A|| > 0$，故 $||f(x)|-|A|| < \varepsilon$，所以由 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |A|$. 然后反过来，考虑定义在实数域上的函数 $f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ -1, x \notin Q \end{cases}$，其极限

$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=1$，但是 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在。

例题 2.1.4 2.1-B-2(1)：利用极限的精确证明

$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

解 2.1.4. 要证 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$，只需证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|=2|\cos\dfrac{x+a}{2}||\sin\dfrac{x-a}{2}|<\varepsilon$。又因为 $2|\cos\dfrac{x+a}{2}||\sin\dfrac{x-a}{2}|<2|\sin\dfrac{x-a}{2}|<2|\dfrac{x-a}{2}|=|x-a|$，所以取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|<\varepsilon$.

例题 2.1.5 2.1-B-4

利用极限的精确定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$ 是错误的.

解 2.1.5. 要证明存在 $G>0,\forall\delta>0$ 使得当 $x>\delta$ 时，$\dfrac{x}{x+1}\leq G$，则取 $G=1$，便可以满足 $\forall x>0,\dfrac{x}{x+1}\leq 1$，故存在 $G>0,\forall\delta>0$ 使得当 $x>\delta$ 时，$\dfrac{x}{x+1}\leq G$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$ 是错误的.（本题本质是找到一个够大的上界）

例题 2.1.6 2.3-A-2

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+2)$; (2) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)(1-2x)^2$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-40x^4)$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^5+21x^3)$; (5) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}$; (6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^4+2}$; (8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+2x}{x^{10}+x+7}$.

解 2.1.6. （1）$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+2)=\lim\limits_{x\to 2}(3(2)^2-5(2)+2)=4$.

（2）$\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)(1-2x)^2=\lim\limits_{x\to-1}(1+1)(1-2(-1))^2=18$.

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-40x^4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4(x-40)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\lim\limits_{x\to+\infty}(x-40)=+\infty$.

（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^5+21x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5(6+\dfrac{21}{x^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\lim\limits_{x\to-\infty}(6+\dfrac{21}{x^2})=-\infty$.

（5）$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

（6）$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^4+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{x+\frac{2}{x^3}}=0$.

（8）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+2x}{x^{10}+x+7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}}}{1+\frac{1}{x^9}+\frac{7}{x^{10}}}=0$;

例题 2.1.7 2.3-A-4

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) \qquad (2)\ \lim_{x\to-\infty}(\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x})$$
$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x}) \qquad (4)\ \lim_{x\to-\infty}(\frac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x})$$

解 2.1.7. （1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

（2） $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{\sqrt{3x^2+x}}{x})=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}=-\sqrt{3}.$

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{9x}+\dfrac{1}{9x^2}}=\dfrac{2}{3}.$

（4） $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x})=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9}{36}+\dfrac{1}{36x}+\dfrac{3}{6x^2}}=-\dfrac{1}{2}.$

例题 2.1.8 2.3-A-8

$$(1)y=\frac{x^2-2x-2}{x-1} \qquad (2)y=\frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

解 2.1.8. （1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-2x+x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=-1$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y=x-1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0^-}(x-\frac{1}{x})=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0^+}(x-\frac{1}{x})=-\infty$$

故该函数在 $x=1$ 处的渐近线为 $x=1$.

（2）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(1-\frac{1}{x})^2}=2$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y=2$.

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2}{(1-\frac{1}{x})^2}=+\infty$$

故该函数在 $x=2$ 处的渐近线为 $x=2$.

例题 2.1.9 习题 2.3-B 组-1

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$，讨论下列极限的状态：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

解 2.1.9. （1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty+\infty=+\infty$.

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ 不确定，比如当 $f(x)=x$ 时，假如 $g(x)=2x$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=-\infty$，但当 $g(x)=\frac{x}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$，当 $f(x)=g(x)$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$.

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\cdot+\infty=+\infty$.

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不确定，比如当 $f(x)=x$ 时，假如 $g(x)=2x$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{2}$，但当 $g(x)=\sqrt{x}$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\infty$，又当 $g(x)=x^2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

例题 2.1.10 习题 2.3-B 组-4

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a 和 b.

解 2.1.10.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}}\\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}\left((1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}\right)}{1}\\
&= \lim_{x\to\infty}(1-a)x-(a+b)=0
\end{aligned}$$

必须有 $a=1, b=-1$.

例题 2.1.11 习题 2.3-B 组-5

设a,b,c 是常数, $a\neq0$, 证明$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$的图形有斜渐近线, 并求出渐近线方程.

解 2.1.11.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=a\neq0$$

由此可知，$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$ 的图形有斜渐近线.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x+1}-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-a)x+c}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{b-a+\frac{c}{x}}{1+\frac{1}{x}}=b-a$$

则渐近线方程为 $y=ax+b-a$.

例题 2.1.12 习题 2.2-A-2

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{5n+1}=\dfrac{3}{5}$

解 2.1.12. (1) 要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时有 $|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$.

$$|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|=\left|\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right|<\left|\frac{1}{2\sqrt{n-1}}\right|<\varepsilon$$

因此取 $N=\left[2+\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$，则对于任意 $\varepsilon>0$，当 $n\geq N$ 时，有 $|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$.

(2) 要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\varepsilon$，限定 $n>9$，则 $2^n>n^3$，则有 $\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\left|\dfrac{n^2}{n^3}\right|=2\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\max\left\{9,\left[1+\dfrac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\varepsilon$.

(3) 要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{n+1}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

(4) 要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{3n}{5n+1}-\dfrac{3}{5}\right|=\dfrac{3}{5}\left|\dfrac{1}{5n+1}\right|<\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{3n}{5n+1}-\dfrac{3}{5}\right|<\varepsilon$.

例题 2.1.13 习题 2.2-A-4

证明：由 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$ 能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，但反过来不可以.

解 2.1.13. 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$||x_n|-|a||<|x_n-a|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，但是考虑数列 $a_n=(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$，但是去掉绝对值后，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在，所以不能反过来.

例题 2.1.14 习题 2.2-B-1

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{n^2+1}=\infty$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}=\dfrac{1}{2}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.(a>1)$

解 2.1.14.（1）要证明任意 $G>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时有 $\left|\dfrac{n^3-1}{n^2+1}\right|=\dfrac{n^3-1}{n^2+1}>G$，由

$$\frac{n^3-1}{n^2+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^2+1}>\frac{(n-1)(n^2+1)}{n^2+1}=n-1$$

所以取 $N=G+2$，则任意 $G>0$，$\left|\dfrac{n^3-1}{n^2+1}\right|>G.$

（2）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\arctan n-\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}-\arctan n<\varepsilon$，则取 $N=[\tan\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\arctan n-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.$

（3）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2\sqrt{n}+1)}$，取 $N=\left[1+\left(\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon.$

（4）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|=\dfrac{a^n}{n!}<\varepsilon$，由

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\frac{a}{2}\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{[a]}\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}<\frac{a^{[a]}}{[a]!}\frac{a}{n}$$

所以取 $N=\left[\dfrac{a^{[a+1]}}{[a]!\varepsilon}+1\right]$，则任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|<\varepsilon.$

例题 2.1.15 2.3-A-3

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$

解 2.1.15.（1）代数变形：

$$\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{(-2)^{-1}+\dfrac{3^n}{(-2)^{n+1}}}{1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}=\frac{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}{1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{5}{6\left(1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}\right)}$$

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6\left(1+(-\frac{3}{2})^{n+1}\right)}\right)=\frac{1}{3}.$

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

（3）

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

（4）用裂项 $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{k+1-1}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{2}$$

例题 2.1.16 2.4-A-5

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ (3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin 3x}$ (5) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta}$ (6) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\tan^2 h}{h}$

(7) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ (8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ (9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ (11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ (12) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$ (14) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$

解 2.1.16. 这里只使用基本极限公式：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}$. （2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=2.$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{5}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{3}{5}$. （4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{3}\dfrac{3x}{\sin 3x}=\dfrac{2}{3}$.

（5）$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\theta=0.$ （6）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\tan^2 h}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\tan^2 h}{h^2}h=0.$

（7）$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$. （8）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=1.$

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec x}{(1+\cos x)}=\dfrac{1}{2}$.

（10）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}2\cos 4x=2.$

（11）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\dfrac{\sin x}{x}=4.$

（12）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$

（13）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=-\sin a.$

（14）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin a}{\cos a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos a\cos(x-a)}=\sec^2 a$，其中 $a\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbb{Z}_+$.

例题 2.1.17 2.4-A-6

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/2}$ (2) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x}$ (3) $\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}(x\neq 0)$
(4) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}$ (5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4x}$

解 2.1.17. （1） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x/3}\right)^{\frac{3}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}.$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{-1}{x}}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$

（3） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}(x\neq 0)=\lim\limits_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\left(\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right)=\mathrm{e}$

vspace0.5em （4） $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^{a}=\lim\limits_{\frac{1}{ax}\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^{a}=\mathrm{e}^{a}$

（5） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-4}=\mathrm{e}^{-4}.$

例题 2.1.18 2.4-B-4

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}}$ (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$
(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ (5) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

解 2.1.18. （1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{x}-5}{\frac{1}{x^3}\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x^3}{\sin x^2}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x^2}\dfrac{3x^2-5x}{3x^2}=3.$

（2） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x=\lim\limits_{x\to 0}-\sin x\tan(3x+\dfrac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{x}{\tan x}=\dfrac{1}{3}.$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=2\dfrac{1}{2}=1.$

（4） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\tan x+1}{1-\tan x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{x(1-\tan x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{x}=2.$

（5） $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{-1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\dfrac{1}{x})x\right)^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$

例题 2.1.19 2.5-A-2

证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$ 收敛，并求其极限值.

解 2.1.19. 先证数列 $\{a_n\}$ 有界，数列满足 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$，由于 $a_1 = \sqrt{2} < 2$，假设 $a_k < 2, (k \geq 2)$，则有 $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{4} = 2$，所以归纳得到 $a_k < 2$，因此数列 $\{a_n\}$ 有界.
再证明数列 $\{a_n\}$ 单调递增，作商得到 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > 1$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调递增.
由单调有界收敛定理得到 $\{a_n\}$ 收敛，极限存在，所以设极限为 A，对 $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ 两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \Rightarrow A^2 = 2$$

所以数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

例题 2.1.20 2.5-A-3

设 $a > 0, 0 < x_1 < \frac{1}{a}, x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), n = 1, 2, 3, \cdots$ 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

解 2.1.20. 先证明数列 $\{x_n\}$ 有界，已知 $0 < x_1 < \frac{1}{a}$，则假设 $x_k \in (0, \frac{1}{a}), k \in \mathrm{N}_+$，则 $ax_k \in (0, 1)$，而 $x_k(2 - ax_k)$ 是 x_k 的二次函数，在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单增，在 $(\frac{1}{a}, \frac{2}{a})$ 上单减，所以 $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k) > 0$，且 $x_{k+1} < \frac{1}{a}(2 - a\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$，所以 $x_n \in (0, \frac{1}{a})$, 数列 $\{x_n\}$ 有界. 再证明数列 $\{x_n\}$ 单调递增，作商得到 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - ax_n > 1$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，极限存在，所以设极限为 A，对 $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ 两边取极限得到

$$\lim_{x\to\infty} x_{n+1} = \lim_{x\to\infty} x_n(2 - a \lim_{x\to\infty} x_n) \Leftrightarrow A = A(2 - aA) \Leftrightarrow A = \frac{1}{a}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{a}$.

例题 2.1.21 2.5-A-4

设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{3(1 + x_n)}{3 + x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} = \sqrt{3}$.

解 2.1.21.（1）当 $x_1 = \sqrt{3}$ 时，假设 $x_k = \sqrt{3}, k \in \mathrm{N}_+$，则

$$x_{k+1} = \frac{3(1 + \sqrt{3})}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 3}{3 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以 $\{x_n = \sqrt{3}\}$，$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.
（2）当 $0 < x_1 < \sqrt{3}$ 时，假设 $0 < x_k < sqrt3, k \in \mathrm{N}_+$，则由函数 $f(x) = \frac{3x + 3}{3 + x} = 3 - \frac{6}{3 + x}$ 在

$(0, \sqrt{3})$ 上单增，得到：

$$\frac{3+0}{3+0} = 1 < x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} < \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以归纳得到 $x_k \in (0, \sqrt{3})$，且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n-3x_n-x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} > 0$$

则 $\{x_n\}$ 单调递增，由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，设极限为 A，代入递推式得到 $A = \dfrac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

（3）当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时，假设 $x_k > \sqrt{3}, k \in \mathrm{N}_+$，则由函数 $f(x) = \dfrac{3x+3}{3+x} = 3 - \dfrac{6}{3+x}$ 在 $(\sqrt{3}, \infty)$ 上单增，得到：

$$x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} > \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 有下界，又有：

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n-3x_n-x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，设极限为 A，代入递推式得到 $A = \dfrac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$，那么 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

例题 2.1.22 2.5-B-1

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{x_n+6}, n = 1, 2, 3, \cdots$，证明 $\{x_n\}$ 极限存在，并求极限.

解 2.1.22. 先证明数列 $\{x_n\}$ 有界，由 $x_1 = 10 > 3$，假设 $x_k > 3$，那么 $x_{k+1} = \sqrt{x_k+6} > \sqrt{9} = 3$，所以 $\{x_n\}$ 有界；再证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减，作商得到

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n+6} - x_n = \frac{x_n+6-x_n^2}{\sqrt{x_n+6}+x_n} = \frac{(3-x_n)(x_n+2)}{\sqrt{x_n+6}+x_n} > 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 极限存在，设极限为 A，代入递推式得到 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 3$.

例题 2.1.23 2.5-B-2

利用柯西准则，证明下面各数列的收敛性：

(1) $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$，其中 $|a_i| \leqslant M$（$i = 0, 1, 2, \cdots$），且 $|q| < 1$；

(2) $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$.

解 2.1.23. （1）设 $m > n$，则

$$|x_m - x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_m q^m| \leqslant M|q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^m| < M\frac{|q^{n+1}|}{1-|q|}$$

任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N = [\log_q \varepsilon]$ 使得任意 $x > N$，$\dfrac{|q^{n+1}|}{1-|q|} < |q^{n+1}| < \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛.（2）设 $m > n$，则

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(m)}{2^m}\right| < \left|\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right| < \frac{1}{2^n}$$

所以任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N = [1 - \log_2 \varepsilon]$ 使得任意 $n > N$，$|x_m - x_n| < \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例题 2.1.24 2.5-B-3

对于数列 $\{x_n\}$，若子列 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k+1}\}$ 都收敛于 a, 试用“$\varepsilon - N$”的语言证明数列 $\{x_n\}$ 也收敛于 a.

解 2.1.24. 任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N, |x_{2n-1} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N, |x_{2n} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a；那么对 $2n-1$ 代入 $n = N_1 + 1$，对 $2n$ 代入 $n = N_2 + 1$，可知取 $N = \max 2N_1 + 2, 2N_2 + 2$，则 $\forall n > N, |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

例题 2.1.25 2.5-B-4

证明：若 $f(x)$ 为定义于 $[a, +\infty)$ 上的单调增加函数，则极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.

解 2.1.25. 必要性：设极限为 A，则存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时，有 $|f(x) - A| < 1$，故

$$|f(x)| - |A| < ||f(x)| - |A|| < |f(x_n) - A| < 1 \Rightarrow |f(x_n)| < 1 + |A|$$

所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.

充分性：若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界，则由确界定理得到 $f(x)$ 有上确界 $\sup_{x\in[a,+\infty)} f(x)$，由确界定义知道，$\forall \varepsilon_n = \dfrac{1}{n}, (n = 1, 2, \cdots), \exists x_n \in [a, +\infty)$，使得 $|f(x_n) - A| < \dfrac{1}{n}$，于是得到数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$，由于 $f(x)$ 为定义于 $[a, +\infty)$ 上的单调增加函数，所以任意 $x > x_{N+1}$，均有 $f(x_{N+1}) \leq f(x) \leq A$，于是 $|f(x) - A| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

例题 2.1.26

由于 $f(x) = e^x$ 和 $g(x) = \ln x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y = x$ 对称。设点 A 和点 B 在 $f(x)$ 上，点 C 和点 D 在 $g(x)$ 上。考虑正方形 ABCD 的顶点排列，假设点 A 与点 D 关于 $y = x$ 对称，点 B 与点 C 关于 $y = x$ 对称。

设点 A 坐标为 (a, e^a)，点 B 坐标为 (b, e^b)。由对称性：

$$\text{点 D} = (e^a, a)$$
$$\text{点 C} = (e^b, b)$$

在正方形 ABCD 中：

$$\overrightarrow{AB} = (b - a, e^b - e^a)$$
$$\overrightarrow{AD} = (e^a - a, a - e^a) = (e^a - a, -(e^a - a))$$

由于 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$，点积为零：

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (b - a)(e^a - a) + (e^b - e^a)(-(e^a - a)) = 0$$

$$(e^a - a)[(b - a) - (e^b - e^a)] = 0$$

由于 $e^a - a \neq 0$（因为 $e^a > a$ 对于所有实数 a），有：

$$e^b - e^a = b - a \tag{1}$$

边 AB 和 AD 长度相等：

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b - a)^2 + (e^b - e^a)^2} = \sqrt{2(b - a)^2} = \sqrt{2}|b - a|$$
$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(e^a - a)^2 + (a - e^a)^2} = \sqrt{2(e^a - a)^2} = \sqrt{2}|e^a - a|$$

令 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$：

$$|b - a| = |e^a - a| \tag{2}$$

定义函数 $h(x) = e^x - x$，则方程 (1) 等价于 $h(b) = h(a)$。函数 $h(x)$ 的导数 $h'(x) = e^x - 1$：

- 当 $x < 0$ 时，$h'(x) < 0$，$h(x)$ 单调递减
- 当 $x > 0$ 时，$h'(x) > 0$，$h(x)$ 单调递增
- 在 $x = 0$ 处取最小值 $h(0) = 1$

对于 $a \neq b$，存在 $a < 0 < b$ 使得 $h(a) = h(b)$。由方程 (2)，$|b - a| = |e^a - a|$，由于 $a < 0 < b$，$b - a > 0$，且 $e^a - a > 0$，故：

$$b - a = e^a - a \quad \Rightarrow \quad b = e^a \tag{3}$$

代入方程 (1)：

$$e^{e^a} - e^a = e^a - a \quad \Rightarrow \quad e^{e^a} = 2e^a - a \tag{4}$$

令 $u = e^a$，则 $a = \ln u$，且由于 $a < 0$，有 $u < 1$。方程 (4) 变为：

$$e^u = 2u - \ln u$$

定义函数 $\varphi(u) = e^u - 2u + \ln u$：

- 当 $u \to 0^+$ 时，$e^u \to 1$，$\ln u \to -\infty$，故 $\varphi(u) \to -\infty$
- 当 $u = 1$ 时，$\varphi(1) = e - 2 + \ln 1 = e - 2 > 0$

由中间值定理，存在 $u \in (0,1)$ 使得 $\varphi(u) = 0$，即方程 (4) 有解。

例如，$u \approx 0.57$ 时，$a = \ln u \approx -0.562$，$b = e^a = u \approx 0.57$，满足条件。

因此，存在点 A(a, e^a)、点 B(b, e^b)、点 D(e^a, a)、点 C(e^b, b) 构成正方形，且点 A 与点 D 关于 $y = x$ 对称，点 B 与点 C 关于 $y = x$ 对称，故正方形 ABCD 关于直线 $y = x$ 对称。

若假设其他对称方式会导致矛盾，因此这是唯一可能的对称方式。