导数闯关练习（水神原创）

1. [★★★☆☆]已知定义在 $(0,+\infty)$ 内的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

（Ⅰ）证明：$f'(x)>1+\dfrac{1}{x}$;

（Ⅱ）当 $f(1)>\mathrm{e}$ 时，证明：函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 恰有两个极值点.

2. [★★★☆☆]已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+b)^3-cx^2$ ，其中 $a,b,c\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $b=0$ 时，若 $f(x)$ 的最小值是 0，求 $a+c$ 的最大值；

（Ⅱ）当 $a=\dfrac{1}{3}$, $c=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，若 $f(x)$ 有唯一极值点，求 b 的取值范围.

注：本题结果可保留超越方程的实数根，如 b 的取值范围是 $[x_0,3]$ ，其中 x_0 是方程 $x+\ln x=0$ 的实数根.

3. [★★★☆☆]已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若关于 t 的方程 $t^{t+a}=a^{2t}\,(a>0,a\neq1)$ 恰有三个实数根 t_1,t_2,t_3 ，且 $t_1+t_3<20$ ，求 a 的取值范围.

4. [★★★★☆]已知函数 $f(x)=3x(x-1)-2\ln x+\dfrac{1}{x}-1$.

（Ⅰ）证明：$f(x)\geq 0$;

（Ⅱ）证明：$\dfrac{1}{6}f(n+1)>\dfrac{1}{\tan\frac{1}{1}}+\dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\tan\frac{1}{n}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

5. [★★★★☆]已知函数 $f(x)=(ax^2-2x+b)\mathrm{e}^{ax+c}-ax$ ，其中 $a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$, $b=3$, $c=0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有 2 个零点和 3 个极值点，证明：$ab<1+\dfrac{4}{\mathrm{e}^3}$.

6. [★★★★☆]已知函数 $f(x)=\log_2 x-\sqrt{x}$.

(Ⅰ)求不等式 $f(x)\ge 0$ 的解集;

(Ⅱ)若存在 $0<x_1<x_2$,满足 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)^2$,证明: $x_2>\dfrac{3}{2}$.

7. [★★★★☆]已知实数 $a\ne 0$,设函数 $f(x)=\ln x+x^a-\mathrm{e}^a$.

(Ⅰ)若函数 $f(x)$ 有唯一零点 x_a ,且 $x_a>1$,证明: x_a 随着 a 的增大而增大;

(Ⅱ)设 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点,若对任意满足 $f(x_1)=f(x_2)$ 的正实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,均有 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{x_0}$,求 a 的取值范围.

8. [★★★★☆]已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(Ⅰ)证明: $f(x)\ge\dfrac{x\mathrm{e}^x-x^2-x-1}{\mathrm{e}^x+1}$;

(Ⅱ)当 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1<m<0$ 时,若方程 $2f(x)=m(x+5)$ 有两个实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,证明: $\dfrac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+3}}{2}>m+1$.

9. [★★★★★]已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-a(a\in\mathbf{R})$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$.

(Ⅰ)求 a 的取值范围;

(Ⅱ)证明: $1-a<x_1+x_2<\dfrac{2}{3}(1-a)$;

(Ⅲ)证明: $x_1^2+x_2^2<(a+3)(a-1)$.

10. [★★★★★]已知实数 $a\ne 0$,设函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}-\ln^2 x$.

(Ⅰ)若函数 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,证明: $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{2(x_1-x_2)}-\mathrm{e}^2(x_1+x_2)+2\mathrm{e}>0$;

(Ⅱ)若不等式 $f(x)\ge 2a-\dfrac{x}{a}$ 对任意 $x\in[\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 恒成立,求 a 的取值范围.