

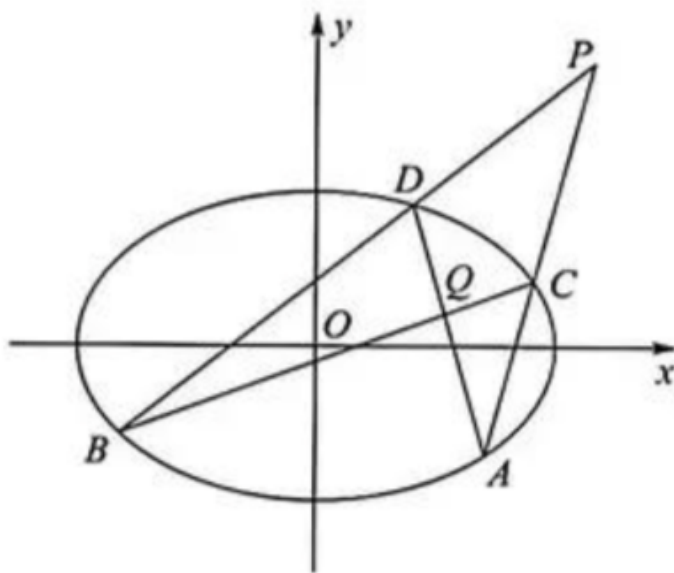
高中数学

解析几何教程

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期：2025 年 9 月 24 日



© 2025 版权所有

前言

本书内容全部使用 \LaTeX 进行排版，作者“还在尬黑”是一位准大一学生，高中毕业于广东深圳中学，高三数学各次大考平均排名位于前 5%，高考应该也不例外。“还在尬黑”拥有知乎（同名），微信公众号（同名），小红书号（同名）等账号，头像是一个右手三叶结。以及不同名不同头像的 GitHub 账号，发表原创优质内容百余篇，且固定更新频率，堪称发文的“螺丝钉”。

“还在尬黑”对圆锥曲线的解题研究有着浓厚兴趣，并在书中将其总结成了一套完整的解析几何教程。本书适合高中解析几何解题体系未成熟的高二高三学生，以及前来自学的高一学生以及初中生，也可作为高中数学教材。笔者衷心希望本书能够帮助读者提高圆锥曲线解题速度和解题能力，并能够准确地识别班内的“大佬”是用什么东西来装逼的，当然，本书和市面上的某些书不同，不会直接甩给学生们根本用不明白也不懂从何而来的技巧大招，而是会侧重解析一种方法的产生过程，以及如何恰当的选择方法解决具体问题。

学习圆锥曲线（包括高考数学的一些其它内容）的过程中，最重要也最需要大家认真做的就是历年的高考题，本书内容涵盖了大部分恢复高考以来所有的高考解析几何压轴题，并且每一道题都经过了笔者的精挑细选，放到了合适的位置上，后续笔者会在书末尾出一个索引表，帮助只想刷高考题的同学快速使用本书。

除了经典而偏基础的高考题外，本书后面还有些部分为选学内容，难度较高，属于高考不怎么考的范畴，这部分留给同学们或解析几何爱好者们进行自我提高和兴趣拓展。当然，建议读者先打牢必学内容的基础，再进行进一步的学习。

在创作本书的过程中，笔者也得到了朋友们和热心群众的帮助，在此向他们表示感谢！

十分感谢读者朋友们的支持和赞助！祝大家健康进步，高考成功！

还在尬黑

2025 年 9 月 24 日

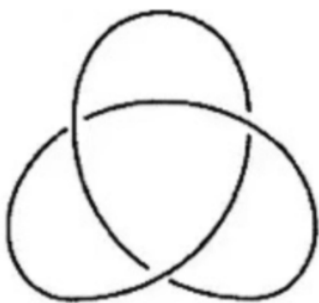


图 1: 我的头像

目录

第一章	先导课程	1
1.1	写在前面	1
1.2	轮换, 对称	1
第二章	导数与微分	4
2.1	导数的定义	4

第一章 先导课程

1.1 写在前面

解析几何是高中数学的重要学习内容，在高考中分值占比较高。

不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代性的表述，这可能是因为圆锥曲线是解析几何中的重难点。但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如3次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈3种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

首先，笔者来讲一讲怎么进行计算。这似乎是一个很简单的问题，但是谁又能保证在紧张刺激的考场环境下不会犯错误？一旦出现计算错误，检查就需要花费一定的时间，所以不如挑选合适的计算方法，从源头上减少失误。本节中，笔者会结合自己的一些实战经验，尽量告诉大家一些计算过程中减小失误，提升速度的技巧和方法，以及解析几何中计算的基本方向——整体代换。

鉴于本书的覆盖群体，笔者会尽量避免过多的公式推导和过于严谨的学术表述，而是从直观的角度出发，用一些具体的例子来说明计算的过程。希望大家能从中受益。

1.2 轮换，对称

在此之前，请允许我先介绍一些基本的概念，我们不妨先来看一些看起来很整齐的式子，这些式子平时很常见，大家在备考强基计划的过程中也会遇到比较多这样的式子：

例题 1.2.1

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$abc$$

$$a + b + c$$

$$ab + bc + ca$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

解 1.2.1. 相信大部分同学是通过自己的直觉来归纳的，直观的感受就是这些式子很“整齐”，而且很有规律可循。那么问题来了：“整齐”是怎么体现的？更进一步地，有没有手段验证一个代数式

是“整齐”的？至于“很有规律可循”，那么规律是什么？

这些问题循序渐进，如果理清这些问题，那么读者便掌握了学习数学时地最基本的关注点：定义，性质，判定。这些式子中的 a, b, c 结构权重是均等的，它们地位相同，没有“特权变量”，也没有“次序”之分。

而且，眼尖的读者可以发现，这些表达式中的项往往成组出现，覆盖所有可能的组合，比如 $a + b + c$ 中全为一次项，如果 a 出现了，不用猜也知道 b 和 c 也出现了；再比如 $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ 中， a^2b 出现了，其中 a 被平方了，那不用猜也知道在其他的项中， b 和 c 也会被平方，而且后面一定会跟着其他没有被平方的字母。它们出现的次数相同。

事实上，由于乘法和加法的交换律和结合律，我们可以发现，对于上面任意一个式子，我们都可以挑选任意两个变量交换位置，而多项式本身保持不变。大家不妨想象一下阅兵式的场景，即使我们偷偷调换两个兵的位置，你也看不出来有什么异样，这是阅兵队伍“整齐”的体现。同样地，这个代数式也可以这样操作，来验证这个代数式是“整齐”的，“规律可循”的。这样我们便可以引出对称式的概念。

定义 1.2.1: 对称式

对于一个 n 元多项式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，若对于数 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个排列 (i_1, i_2, \dots, i_n) ，都有

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则称 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为对称式。

“对称”体现在字母地位平等，没有哪个字母是特殊的。只要式子中包含某个由特定字母组成的项（例如 a^2b ），那么它一定包含由所有其他字母以同样的方式组成的项（即 $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$ ）。

这样我们就认识了对称式的概念，这样当读者听到别人说“对称式”的时候，不会至于一脸懵逼，或者一边点头，假装听懂，然后用直觉去理解这个概念（这样的情况长期发展下去，是不利于学习数学的）。当然，读者也许会发现，像“ $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ ”这样的式子其实比较长，占用了较大的空间，也显得不够简洁。因此我们不妨规定以下记号：

定义 1.2.2: 循环和

性质 1.2.1: 对称式的性质

(1) 基本对称多项式的基础性：

那么下面我们乘胜追击，再来看一组式子：

例题 1.2.2

观察以下代数式, 并尝试在心里面归纳出它们的特点:

$$a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^3b + b^3c + c^3a$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

解 1.2.2. 和刚才的对称式不同, 如果我们这里调换某两个字母的位置, 那么结果也会发生变化。比如 $a^2b + b^2c + c^2a$ 中, 如果我们把 a 和 b 调换位置, 那么结果也会发生变化, 比如说新出现了 b^2a 项, 这是原来所没有的。

但是读者会发现, 这个式子看上去也是有规律可循的, 比如 $a^3b + b^3c + c^3a$ 中, a^3 项出现了, 那不用猜也知道 b^3 和 c^3 也会在其它部分出现, 而且出现的次数相同, 但是和上文的规律不一样, a^3 后面只会跟着 b , 却没有 c , 即没有 a^2c 项。

例题 1.2.3

将 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 进行展开, 并尽己所能地保证结果的每个部分都是由 a, b, c 三个元同时出现且地位相同的式子:

解 1.2.3. 先展开, 再重组:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (b^2 + ac + ab + bc)(a+c) \\ &= ab^2 + b^2c + a^2c + ac^2 + a^2b + abc + abc + bc^2 \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc\end{aligned}$$

最后为什么

定理 1.2.1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

第二章 导数与微分

2.1 导数的定义

例题 2.1.1

已知 $x, y > 0$ ，且 $x^2 + 9y^2 = 12$ ，则 $\frac{x+2}{y+1} - 3x$ 的最小值为_____.

例题 2.1.2

本题认为地球绕日轨道为正圆。现有一个半径是日地距离的一万分之一，且整个行星可以看成均匀球体。在该行星上诞生了两个文明：分别是在南极的冻成狗文明和在赤道的热成狗文明。两个文明之间为了友好往来，决定在它们的首都（分别在南极和赤道上）之间挖一条地下光滑隧道：摩擦力可以忽略的球形地铁可以纯粹在行星的引力的作用下从隧道一端滑行至另一端。两个文明的工程师们进行了详细的计算和规划，使得地铁往返于两个首都之间的时间达到最短。

问：地铁每次单程运行时间是几个小时？（结果保留 5 位有效数字）

提示：欧拉-拉格朗日方程；忽略行星自转；地球公转周期取 365 天

d