再证偏移题

（偏移 35）已知 $x-\ln x=m$ 的两解分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

求证：$\dfrac{\ln^2 x_1}{\ln^2 x_2}>\dfrac{x_2-1}{1-x_1}$；（2022-01-02-湖南长沙胡晓昊）

证明：易知 $x_1<1<x_2$，则 $\dfrac{\ln^2 x_1}{\ln^2 x_2}>\dfrac{x_2-1}{1-x_1}\Leftrightarrow(1-x_1)\ln^2 x_1>(x_2-1)\ln^2 x_2$

$\Leftrightarrow(x_1-1)\ln^2 x_1+(x_2-1)\ln^2 x_2<0$，因为 $(x_1-1)\ln^2 x_1-(x_2-1)\ln^2 x_2<0$

故 $(x_1-1)\ln^2 x_1+(x_2-1)\ln^2 x_2<0$

$\Leftrightarrow[(x_1-1)\ln^2 x_1+(x_2-1)\ln^2 x_2][(x_1-1)\ln^2 x_1-(x_2-1)\ln^2 x_2]>0$

$\Leftrightarrow(x_1-1)^2\ln^4 x_1>(x_2-1)^2\ln^4 x_2$，只需证 $y=(x-1)^2\ln^4 x$ 递减即可，但又显然不递减，故需要调配，考虑到 $y=(x-1)^2\ln^4 x\geq 0$，且先减后增，故需找一个类似的函数 $g(x)$ 也满足 $g(x)\geq 0=g(1)$，且 $g(x)$ 在 $x=1$ 的两侧单调性相反，联想到 $g(x)=x-\ln x-1$，但阶数又明显不够，尝试构造函数 $f(x)=(x-1)^2\ln^4 x-a(x-\ln x-1)^k$，通过等比法放缩可得 $a=8,k=3$ 符合题意，故只需证 $f(x)=(x-1)^2\ln^4 x-8(x-\ln x-1)^3$ 递减即可，证明如下

$f'(x)=2(x-1)\ \ \ln^4 x+\dfrac{2(x-1)\ln^3 x-12(x-\ln x-1)^2}{x}$ ，要证 $f'(x)\leq 0$，只需证明

$g(x)=\ln^4 x+\dfrac{2(x-1)\ln^3 x-12(x-\ln x-1)^2}{x}$ 在 $(0,1)$ 为正，$(1,+\infty)$ 为负即可，注意到 $g(1)=0$，故只需证明 $g(x)\downarrow$ 即可，

即证 $g'(x)=\dfrac{2\left((2x+1)\ln^3 x+(3x+3)\ln^2 x-6(x-1)^2\right)}{x^2}\leq 0$

$\Leftrightarrow h(x)=(2x+1)\ln^3 x+(3x+3)\ln^2 x-6(x-1)^2\leq 0$

$h'(x)=2\ln^3 x+\dfrac{3\left((3x+1)\ln^2 x+2(x+1)\ln x-4x(x-1)\right)}{x}$，而 $h'(1)=0$，故只需证 $h'(x)\downarrow$

即证 $h\ \ (x)=\dfrac{3((2x-1)\ln^2 x+6x\ln x-4x^2+2x+2)}{x^2}\leq 0$

$\Leftrightarrow p(x)=(2x-1)\ln^2 x+6x\ln x-4x^2+2x+2$

$p'(x)=2\ln^2 x+\dfrac{2(5x-1)\ln x}{x}-8x+8$，而 $p'(1)=0$，故只需证 $p'(x)\downarrow$

即证 $p\ \ (x)=\dfrac{4x+2}{x^2}\cdot(\ln x-\dfrac{(4x-1)(x-1)}{2x+1})\leq 0$

令 $\Leftrightarrow q(x)=\ln x-\dfrac{(4x-1)(x-1)}{2x+1}\leq 0$，而 $q'(x)=-\dfrac{(x-1)(8x^2+12x+1)}{x(2x+1)^2}$

故 $q(x)$ 在 $(0,1)\quad ,(1,\quad)$ ，则 $q(x)\leq q(1)=0$，故 $f(x)=(x-1)^2\ln^4 x-8(x-\ln x-1)^3$

递减得证，则 $(x_1-1)^2\ln^4 x_1-8(x_1-\ln x_1-1)^3>(x_2-1)^2\ln^4 x_2-8(x_2-\ln x_2-1)^3$ 成立

故 $(x_1-1)^2\ln^4 x_1>(x_2-1)^2\ln^4 x_2$，则原题得证！

类似的题还有

（偏移 36）已知 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2=m,(x_1<x_2)$，

（1）求证：$x_2^{\frac{2}{3}}\quad \dfrac{x_2-1}{1-x_1}\quad x_1^{-\frac{2}{3}}$；

（2）求证：$(\dfrac{x_2}{x_1})^{\frac{1}{3}}\leq\dfrac{x_2-1}{1-x_1}$；

（3）求证：$\dfrac{x_2-1}{x_1-1}\geq\dfrac{\ln^2 x_1-6\ln x_1}{\ln^2 x_2-6\ln x_2}$；（2022-01-02-湖南长沙胡晓昊）

（4）求证：$\dfrac{x_2-1}{1-x_1}\geq\dfrac{122\ln x_1-x_1^2-359}{122\ln x_2-x_2^2-359}$；

要编这样的题很容易，但形式丑的没有做的必要，比如下面的这些题

（网题）已知 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}-m$ 有两个零点 x_1,x_2，

（1）求证：$x_1+x_2<\dfrac{86m^2}{135e}+\dfrac{278m}{135}-\dfrac{94e}{135}$；

（2）求证：$x_1+x_2>-\dfrac{1882m^3}{8505e^2}+\dfrac{3688m^2}{2835e}+\dfrac{3956m}{2835}-\dfrac{808e}{1701}$；

(3)求证：$x_1+x_2>-\dfrac{13085098m^5}{189448875e^4}+\dfrac{17376748m^4}{37889775e^3}-\dfrac{51721106m^3}{37889775e^2}+\dfrac{101210216m^2}{37889775e}$

$+\dfrac{22620242m}{37889775}-\dfrac{55447652m}{189448875}$；

这些题就是典型的“垃圾偏移题”，因为 m 足够大时，左右两边拟合度为 0，只在 $m=e$ 时，拟合精度高而已，要编这样的题，右边写个 10000 项都行，

将其优化下，得到至少可看的形式如下

（偏移 37）已知 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}-m$ 有两个零点 x_1,x_2，（2022-01-02-湖南长沙胡晓昊）

（1）求证：$x_1+x_2>\dfrac{10m}{3}-\dfrac{4e}{3}$；

(2)$x_1+x_2>m(1+\ln m)$；

(3)$x_1+x_2>m(\ln m+\dfrac{1}{\ln m}+\ln(\ln m))$；