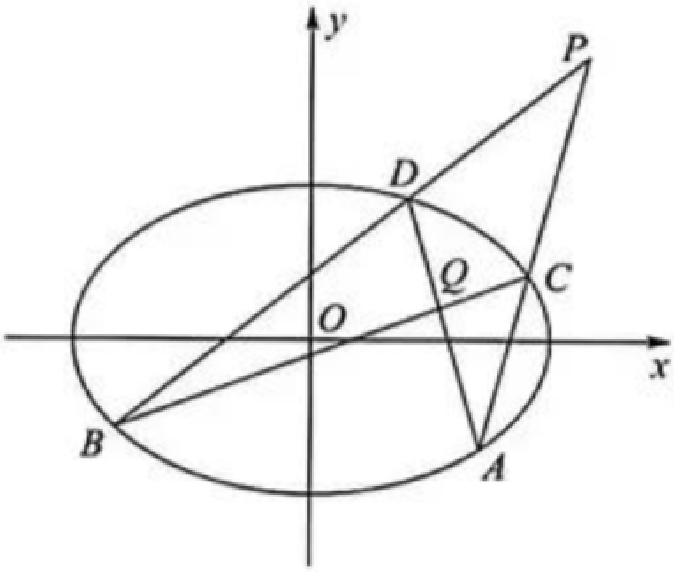
高中数学
解析几何教程

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期：2025 年 10 月 8 日



前言

本书内容全部使用 LaTeX 进行排版，作者" 还在尬黑" 是一位准大一学生，高中毕业于广东深圳中学，高三数学各次大考平均排名位于前 5%，高考应该也不例外。" 还在尬黑" 拥有知乎（同名），微信公众号（同名），小红书号（同名）等账号，头像是一个右手三叶结。以及不同名不同头像的 GitHub 账号，发表原创优质内容百余篇，且固定更新频率，堪称发文的“螺丝钉”。

“还在尬黑”对圆锥曲线的解题研究有着浓厚兴趣，并在书中将其总结成了一套完整的解析几何教程。本书适合高中解析几何解题体系未成熟的高二高三学生，以及前来自学的高一学生以及初中生，也可作为高中数学教材。笔者衷心希望本书能够帮助读者提高圆锥曲线解题速度和解题能力，并能够准确地识别班内的" 大佬" 是用什么东西来装逼的，当然，本书和市面上的某些书不同，不会直接甩给学生们根本用不明白也不懂从何而来的技巧大招，而是会侧重解析一种方法的产生过程，以及如何恰当的选择方法解决具体问题。

学习圆锥曲线（包括高考数学的一些其它内容）的过程中，最重要也最需要大家认真做的就是历年的高考题，本书内容涵盖了大部分恢复高考以来所有的高考解析几何压轴题，并且每一道题都经过了笔者的精挑细选，放到了合适的位置上，后续笔者会在书末尾出一个索引表，帮助只想刷高考题的同学快速使用本书。

除了经典而偏基础的高考题外，本书后面还有些部分为选学内容，难度较高，属于高考不怎么考的范畴，这部分留给同学们或解析几何爱好者们进行自我提高和兴趣拓展。当然，建议读者先打牢必学内容的基础，再来进行进一步的学习。

在创作本书的过程中，笔者也得到了朋友们和热心群众的帮助，在此向他们表示感谢！

十分感谢读者朋友们的支持和赞助！祝大家健康进步，高考成功！

还在尬黑

2025 年 10 月 8 日

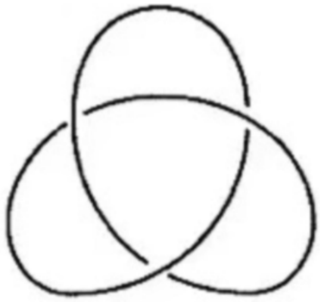


图 1: 我的头像

目录

第一章 先导课程 **1**

1.1 写在前面 1

1.2 轮换，对称 1

第二章 导数与微分 **4**

2.1 导数的定义 4

第一章 先导课程

1.1 写在前面

解析几何是高中数学的重要学习内容，在高考中分值占比较高。

不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代性的表述，这可能是因为圆锥曲线是解析几何中的重难点。但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如 3 次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈 3 种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

首先，笔者来讲一讲怎么进行计算。这似乎是一个很简单的问题，但是谁又能保证在紧张刺激的考场环境下不会犯错误？一旦出现计算错误，检查就需要花费一定的时间，所以不如挑选合适的计算方法，从源头上减少失误。本节中，笔者会结合自己的一些实战经验，尽量告诉大家一些计算过程中减小失误，提升速度的技巧和方法，以及解析几何中计算的基本方向—-整体代换。

鉴于本书的覆盖群体，笔者会尽量避免过多的公式推导和过于严谨的学术表述，而是从直观的角度出发，用一些具体的例子来说明计算的过程。希望大家能从中受益。

1.2 轮换，对称

在此之前，请允许我先介绍一些基本的概念，我们不妨先来看一些看起来很整齐的式子，这些式子平时很常见，大家在备考强基计划的过程中也会遇到比较多这样的式子：

例题 1.2.1

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$abc$$

$$a+b+c$$

$$ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$$

解 1.2.1. 相信大部分同学是通过自己的直觉来归纳的，直观的感受就是这些式子很“整齐”，而且很有规律可循。那么问题来了：“整齐”是怎么体现的？更进一步地，有没有手段验证一个代数式

是“整齐”的？至于“很有规律可循”，那么规律是什么？

这些问题循序渐进，如果理清这些问题，那么读者便掌握了学习数学时地最基本的关注点：定义，性质，判定。这些式子中的 a, b, c 结构权重是均等的，它们地位相同，没有“特权变量”，也没有“次序”之分。

而且，眼尖的读者可以发现，这些表达式中的项往往成组出现，覆盖所有可能的组合，比如 $a+b+c$ 中全为一次项，如果 a 出现了，不用猜也知道 b 和 c 也出现了；再比如 $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$ 中，a^2b 出现了，其中 a 被平方了，那不用猜也知道在其他的项中，b 和 c 也会被平方，而且后面一定会跟着其他没有被平方的字母。它们出现的次数相同。

事实上，由于乘法和加法的交换律和结合律，我们可以发现，对于上面任意一个式子，我们都可以挑选任意两个变量交换位置，而多项式本身保持不变。大家不妨想象一下阅兵式的场景，即使我们偷偷调换两个兵的位置，你也看不出来有什么异样，这是阅兵队伍“整齐”的体现。同样地，这个代数式也可以这样操作，来验证这个代数式是“整齐”的，“规律可循”的。这样我们便可以引出对称式的概念。

定义 1.2.1: 对称式

对于一个 n 元多项式 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，若对于数 $1, 2, \ldots, n$ 的任意一个排列 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$，都有

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

则称 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 为对称式。

“对称”体现在字母地位平等，没有哪个字母是特殊的。只要式子中包含某个由特定字母组成的项（例如 a^2b），那么它一定包含由所有其他字母以同样的方式组成的项（即 $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$）。

这样我们就认识了对称式的概念，这样当读者听到别人说“对称式”的时候，不会至于一脸懵逼，或者一边点头，假装听懂，然后用直觉去理解这个概念（这样的情况长期发展下去，是不利于学习数学的）。当然，读者也许会发现，像“$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$”这样的式子其实比较长，占用了较大的空间，也显得不够简洁。因此我们不妨规定以下记号：

定义 1.2.2: 循环和

性质 1.2.1: 对称式的性质

（1）基本对称多项式的基础性 ：

那么下面我们乘胜追击，再来看一组式子：

例题 1.2.2

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$a^2b+b^2c+c^2a$$

$$a^3b+b^3c+c^3a$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

解 1.2.2. 和刚才的对称式不同，如果我们这里调换某两个字母的位置，那么结果也会发生变化。比如 $a^2b+b^2c+c^2a$ 中，如果我们把 a 和 b 调换位置，那么结果也会发生变化，比如说新出现了 b^2a 项，这是原来所没有的。

但是读者会发现，这个式子看上去也是有规律可循的，比如 $a^3b+b^3c+c^3a$ 中，a^3 项出现了，那不用猜也知道 b^3 和 c^3 也会在其它部分出现，而且出现的次数相同，但是和上文的规律不一样，a^3 后面只会跟着 b，却没有 c，即没有 a^2c 项。

例题 1.2.3

将 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 进行展开，并尽己所能地保证结果的每个部分都是由 a,b,c 三个元同时出现且地位相同的式子：

解 1.2.3. 先展开，再重组：

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&=(b^2+ac+ab+bc)(a+c)\\&=ab^2+b^2c+a^2c+ac^2+a^2b+abc+abc+bc^2\\&=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\end{aligned}$$

最后为什么

定理 1.2.1

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

第二章 导数与微分

2.1 导数的定义

例题 2.1.1

已知 $x, y > 0$，且 $x^2 + 9y^2 = 12$，则 $\dfrac{x+2}{y+1} - 3x$ 的最小值为__________.

解 2.1.1.

例题 2.1.2

（单选）设代数式 $T=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{200}{199}$，则（　）

A.$14\le T\le 16$　B.$16\le T\le 18$　C.$18\le T\le 20$　D.$20\le T\le 22$

解 2.1.2. 出题背景是大名鼎鼎的 Wallis 公式：

$$\begin{aligned}I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(-\cos x)&\\ &=(-\cos x\sin^{n-1}x)|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,\mathrm{d}\sin^{n-1}x\\ &=(-\cos x\sin^{n-1}x)|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^2 x)(n-1)\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x\\ &=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)\,\mathrm{d}x=(n-1)I(n-2)-(n-1)I(n)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(n)=\frac{n-1}{n}I(n-2)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{I(2n+1)}{I(2n-1)}=\dfrac{2n}{2n+1}\\ \dfrac{I(2n)}{I(2n-2)}=\dfrac{2n-1}{2n}\end{cases}$$

所以累乘有：

$$\begin{aligned}\frac{I(3)}{I(1)}\cdot\frac{I(5)}{I(3)}\cdots\frac{I(2n+1)}{I(2n-1)}&=\frac{2\times1}{2\times1+1}\times\frac{2\times2}{2\times2+1}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\ \frac{I(2)}{I(0)}\cdot\frac{I(4)}{I(2)}\cdots\frac{I(2n)}{I(2n-2)}&=\frac{2\times1-1}{2\times1}\times\frac{2\times2-1}{2\times2}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\end{aligned}$$

又因为：

$$\begin{aligned}I(2k+1)<I(2k)<I(2k-1)&\Rightarrow\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}<\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\\ &\Rightarrow\frac{1}{2k+1}\cdot[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}]^2<\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2k}\cdot[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}]^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}=\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n-1})=(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7})(\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9})$$

所以：

$$T^2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\approx\frac{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}}{(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7})\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}}\frac{\pi}{2}$$

则 $T\approx\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$，简单计算得知原题选 B.

方法二是使用放缩，先平方然后用糖水不等式：

$$\begin{aligned}P^2 &= \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{200}{199}\cdot\frac{200}{199}\\ &> \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{200}{199}\cdot\frac{201}{200}\\ &= 268 > 16^2\end{aligned}$$

例题 2.1.3

（单选）数列 a_n 各项为正整数且递增，$a_{n+2}=C_{a_{n+1}}^{a_n}$，则（　）

A.$a_n<a_{n-1}+1$　B.a_1,a_2,a_3 可能成等比数列

C.$a_3a_4<a_5$　D.a_3,a_4,a_5 可能成等比数列

解 2.1.3. 由于 a_n 递增，则 A 显然错误；下面考虑选项 BD：

$$a_na_{n+2}=a_nC_{a_{n+1}}^{a_n}=a_{n+1}C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}=a_{n+1}^2\Rightarrow a_{n+1}=C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}$$

当 $a_n=1$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1}=C_{a_{n+1}-1}^{0}=1=a_n$，与数列递增矛盾；
当 $a_n=2$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1}=C_{a_{n+1}-1}^{1}=a_{n+1}-1<a_{n+1}$，矛盾；
当 $a_n>2$ 时，易得 $a_{n+1}-1>2$，代入表达式得到

$$a_{n+1}=C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}\geq C_{a_{n+1}-1}^{2}=\frac{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}{2}$$

解方程发现无整数解，而且由于 $C_{a_{n+1}-1}^{1}=a_{n+1}-1$ 是小于 a_{n+1} 的最大整数，且有

$$C_{a_{n+1}-1}^{1}<C_{a_{n+1}-1}^{2},\quad C_{a_{n+1}-1}^{2}\neq a_{n+1}$$

只可能是 $C_{a_{n+1}-1}^{2}>a_{n+1}$.
雪上加霜的是，$C_{a_{n+1}-1}^{2}$ 和 $C_{a_{n+1}-1}^{1}$ 中间没有数可以等于 $C_{a_{n+1}-1}^{m}$，所以 BD 错误；
考虑 C，易得 $a_1\neq 1,a_2\geq 4,a_3\geq 6,a_4=C_{a_3}^{a_2}>2a_3+1$，由

$$a_5=C_{a_4}^{a_3}>a_3a_4\Rightarrow a_3^2<C_{a_4-1}^{a_3-1}<C_{2a_3}^{a_3-1}$$

转化为 $a_3^3+a_3<C_{2a_3}^{a_3}$ 这是显然成立的，故本题目选 C

例题 2.1.4

已知 $\triangle ABC$ 中，$A=3B=9C$，则 $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A=$_____.

解 2.1.4. 解得 $A=\frac{9\pi}{13},B=\frac{3\pi}{13},C=\frac{\pi}{13}$ 考虑积化和差：

$$\begin{aligned}
&\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\\
&=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B)+\cos(B+C)+\cos(B-C)+\cos(A+C)+\cos(A+C))\\
&=\frac{1}{2}(\cos\frac{12\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13})\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\sin\frac{\pi}{13}(\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13})\\
&=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{13}}(\sin\frac{\pi}{13}-\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}-\sin\frac{5\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{7\pi}{13}\\
&\qquad+\sin\frac{7\pi}{13}-\sin\frac{9\pi}{13}+\sin\frac{9\pi}{13}-\sin\frac{11\pi}{13}+\sin\frac{11\pi}{13}-\sin\frac{13\pi}{13})\\
&=-\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

定理 2.1.1: 阿贝尔求和

设 B_n 是数列 b_n 的前 n 项和，当 $n\geq 2$ 时，有:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_nB_n-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B_n$$

证明 2.1.1. 当 $n\geq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}a_ib_i&=a_1b_1+\sum_{i=2}^{n}a_i(B_i-B_{i-1})\\
&=a_1b_1+\sum_{i=2}^{n}a_iB_i-\sum_{i=2}^{n}a_iB_{i-1}\\
&=\sum_{i=1}^{n}a_iB_i-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i+1}B_i\\
&=a_nB_n-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B_n
\end{aligned}$$

例题 2.1.5:（来自 Fiddie）

设数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数，且当 $n\geq 2$ 时，$a_{n+1}+a_{n-1}=|a_n|$. 证明：

（1）存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m\leq 0$

（2）存在正整数 m 使得 $a_m\leq 0$，$a_{m+1}\leq 0$

（3）$a_n=a_{n+9}$

解 2.1.5. (1) 当 $n \geq 2$ 时，由

$$\begin{cases} a_{n+1}+a_{n-1}=|a_n| \\ a_{n+2}+a_n=|a_{n+1}| \end{cases} \Rightarrow a_{n+2}+a_{n+1}+a_n+a_{n-1}=|a_n|+|a_{n+1}|$$

$$\Rightarrow a_{n+2}+a_{n-1}=|a_n|-a_n+|a_{n+1}|-a_{n+1}\geq 0$$

若 $n \geq 2$ 时 $a_n>0$, 上式化为 $a_{n+2}+a_{n-1}=0$，矛盾，故存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m \leq 0$
(2) 已证存在大于 1 的整数 m 使得 $a_m \leq 0$，现假设不存在正整数 k 使得 $a_k \leq 0,\ a_{k+1}\leq 0$，则不妨设 a_m 为首个小于等于 0 的项，由假设得 $a_1,a_2,...a_{m-1}>0, a_m\leq 0, a_{m+1}>0$，可以通过不断消元推出矛盾：

$$\begin{aligned}
a_{m+1}+a_{m-1}&=|a_m|=-a_m \Rightarrow a_{m+1}=-a_m-a_{m-1}\\
a_{m+2}+a_m&=|a_{m+1}|=a_{m+1}\Rightarrow a_{m+2}=a_{m+1}-a_m>0+0=0\\
a_{m+3}+a_{m+1}&=|a_{m+2}|=a_{m+2}\Rightarrow a_{m+3}=a_{m+2}-a_{m+1}=a_{m+1}-a_m-a_{m+1}=-a_m\geq 0\\
a_{m+4}+a_{m+2}&=|a_{m+3}|=-a_m\Rightarrow a_{m+4}=-a_m-a_{m+2}=-a_{m+1}<0\\
a_{m+5}+a_{m+3}&=|a_{m+4}|=a_{m+1}\Rightarrow a_{m+5}=a_{m+1}-a_{m+3}=a_m+a_{m+1}=-a_{m-1}<0
\end{aligned}$$

由 $a_{m+4}<0, a_{m+5}<0$ 知矛盾，故存在正整数 k 使得 $a_k\leq 0,\ a_{k+1}\leq 0$.
(3) 抓住上面第二小问的提示就可以得到：

$$\begin{aligned}
a_{m+6}+a_{m+4}&=|a_{m+5}|=a_{m-1}\Rightarrow a_{m+6}=a_{m-1}-a_{m+4}=a_{m-1}+a_{m+1}=-a_m\\
a_{m+7}+a_{m+5}&=|a_{m+6}|=-a_m\Rightarrow a_{m+7}=-a_m-a_{m+5}=a_{m-1}-a_m\\
a_{m+8}+a_{m+6}&=|a_{m+7}|=a_{m-1}-a_m\Rightarrow a_{m+8}=a_{m-1}-a_m-a_{m+6}=a_{m-1}\\
a_{m+9}+a_{m+7}&=|a_{m+8}|=a_{m-1}\Rightarrow a_{m+9}=a_{m-1}-a_{m+7}=a_{m-1}-a_{m-1}+a_m=a_m
\end{aligned}$$

所以设 $T=9$，有

$$\begin{cases} a_m=a_{m+nT}, n\in N \\ a_{m-1}=a_{m-1+nT}, n\in N \end{cases}$$

然后由于

$$a_{m-2+nT}=|a_{m-1+nT}|-a_{m+nT}=|a_{m-1}|-a_m=a_{m-2}$$

以此类推，则有

$$a_k=a_{k+nT}, k\in N_+, k\leq m$$

取合适的 m 使得 m 大于 T，则数列 $\{a_n\}$ 为周期数列，其中一个周期为 9

例题 2.1.6:（南通 9 调 14 题）

已知 x,y 满足 $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+4}-y)=2$，则 4^x+2^{y-1} 的最小值为_____.

解 2.1.6. 套路题，先换元：

$$\begin{cases} m=\sqrt{x^2+1}-x \Rightarrow x=\dfrac{1}{2m}-\dfrac{2}{m} \\ n=\sqrt{y^2+4}-y \Rightarrow y=\dfrac{2}{n}-\dfrac{n}{2} \end{cases}$$

再代入 $mn=2 \Rightarrow n=\dfrac{2}{m}$：

$$y=\frac{2}{n}-\frac{n}{2}=m-\frac{1}{m} \Rightarrow y=-2x$$

所以：

$$4^x+2^{y-1}=4^x+\frac{1}{2\times 4^x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

当 $x=\frac{1}{4}$ 时取得等号

例题 2.1.7:（深圳中学 2025 届二轮一阶）

$\triangle ABC$ 中，若

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AE}=\dfrac{\mu}{\mu+1}\overrightarrow{AB}\end{cases}$$

则连接 BD,CE 得到交点 Q，任取 $\triangle ABC$ 所在平面内某一点 P，那么有：

$$PQ^2=\frac{PA^2+\mu PB^2+\lambda PC^2}{1+\lambda+\mu}-\frac{\lambda\mu BC^2+\lambda AC^2+\mu AB^2}{(1+\lambda+\mu)^2}$$

解 2.1.7. 设

$$\begin{cases}\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}+(1-x)\overrightarrow{AB}=x\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}+(1-x)\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AQ}=y\overrightarrow{AE}+(1-y)\overrightarrow{AC}=y\dfrac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AB}+(1-y)\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\lambda+1}{1+\lambda+\mu}\\ y=\dfrac{\mu+1}{1+\lambda+\mu}\end{cases}$$

化为形如 $x\overrightarrow{QA}+y\overrightarrow{QB}+z\overrightarrow{QC}=0$ 的方程:

$$\begin{aligned}\Rightarrow\overrightarrow{AQ}&=\frac{\lambda}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{AC}+\frac{\mu}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{\lambda}{1+\lambda+\mu}(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QC})+\frac{\mu}{1+\lambda+\mu}(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QB})\\&=\frac{\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{AQ}+\frac{\lambda}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{QC}+\frac{\mu}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{QB}\\ \Rightarrow&\ \overrightarrow{QA}+\lambda\overrightarrow{QC}+\mu\overrightarrow{QB}=\vec{0}\\ \Rightarrow&\ \overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PQ}+\lambda(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PQ})+\mu(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PQ})=\vec{0}\\ \Rightarrow&\ \overrightarrow{PA}+\lambda\overrightarrow{PC}+\mu\overrightarrow{PB}=(1+\lambda+\mu)\overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

平方得：

$$PA^2+\lambda^2PC^2+\mu^2PB^2+2\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}+2\mu\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+2\lambda\mu\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=(1+\lambda+\mu)^2PQ^2$$

分别代入

$$\begin{cases}2\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\lambda\left(PA^2+PC^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})\right)^2=\lambda(PA^2+PC^2-AC^2)\\ 2\mu\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\mu\left(PA^2+PB^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})\right)^2=\mu(PA^2+PB^2-AB^2)\\ 2\lambda\mu\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=\lambda\mu\left(PC^2+PB^2-(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})\right)^2=\lambda\mu(PC^2+PB^2-BC^2)\end{cases}$$

变形即可得到：

$$PQ^2=\frac{PA^2+\mu PB^2+\lambda PC^2}{1+\lambda+\mu}-\frac{\lambda\mu BC^2+\lambda AC^2+\mu AB^2}{(1+\lambda+\mu)^2}$$

因此有结论：

结论 2.1.1: 结论

平面内给定 $\triangle ABC$，若点 Q 满足

$$\overrightarrow{QA}+\lambda\overrightarrow{QC}+\mu\overrightarrow{QB}=\vec{0}$$

则任取 $\triangle ABC$ 所在平面内某一点 P，有

$$PQ^2=\frac{PA^2+\mu PB^2+\lambda PC^2}{1+\lambda+\mu}-\frac{\lambda\mu BC^2+\lambda AC^2+\mu AB^2}{(1+\lambda+\mu)^2}$$

例题 2.1.8: 奔驰定理

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，以及平面内任意一点 P，则有：

$$\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\\ x_P & y_P & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{PA}+\begin{vmatrix} x_C & y_C & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_P & y_P & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{PB}+\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_P & y_P & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

这等价于

$$S_{\triangle PBC}\overrightarrow{PA}+S_{\triangle PAC}\overrightarrow{PB}+S_{\triangle PAB}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

这里的三角形面积是有向面积，我们必须在计算三角形面积时按照字母顺序看一下方向（顺时针或逆时针），然后将与其他两个方向不同的三角形的对应面积取负值。

解 2.1.8.

例题 2.1.9: 外心向量关系

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，则其外心满足关系式：

解 2.1.9.

例题 2.1.10: 三角形外心坐标

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，则其外心的坐标为

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} OA^2 & y_A & 1\\ OB^2 & y_B & 1\\ OC^2 & y_C & 1\end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}},\frac{\begin{vmatrix} x_A & OA^2 & 1\\ x_B & OB^2 & 1\\ x_C & OC^2 & 1\end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}}\right)$$

解 2.1.10.

例题 2.1.11: 三角形垂心坐标

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，则其垂心的坐标为

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} x_Bx_C+y_By_C & y_A & 1 \\ x_Ax_C+y_Ay_C & y_B & 1 \\ x_Ax_B+y_Ay_B & y_C & 1 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_Bx_C+y_By_C & 1 \\ x_B & x_Ax_C+y_Ay_C & 1 \\ x_C & x_Ax_B+y_Ay_B & 1 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}\right)$$

解 2.1.11.

例题 2.1.12: 三角形的内心坐标

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，则其内心的坐标为

$$\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}, \frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$$

解 2.1.12.

例题 2.1.13: 容斥原理练习

某学校举办比赛，有 20 个参赛名额，现在分给 4 个不同的班，保证至少有一个班的名额为 4 个，且每一个班都有名额，则共有_____ 种分法。

解 2.1.13. 设四个班的名额为 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in N_+$，则分法数就是集合 $A_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_i = 4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20\}$ 的元素个数，又因为

$$\begin{aligned} |A_1| &= \{(x_1, x_3, x_4) \mid x_2 + x_3 + x_4 = 16, x_2, x_3, x_4 > 0\} = C_{15}^2 \\ |A_1 \cap A_2| &= \{(x_3, x_4) \mid x_3 + x_4 = 12, x_3, x_4 > 0\} = C_{11}^1 \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 1 \\ |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= C_4^1|A_1| - C_4^2|A_1 \cap A_2| + C_4^3|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= C_4^1C_{15}^2 - C_4^2 + C_4^3C_{11}^1 = 358 \end{aligned}$$

例题 2.1.14: 求和

计算 $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{n-1}^i(i+1)^k$，其中 $k<n-1,k\in N_+$

解 2.1.14. 定义函数并对其求 k 阶导数：

$$\begin{aligned}
f(x)=&\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{n-1}^ix^{i+1}=x\sum_{i=0}^{n-1}(-x)^iC_{n-1}^i\\
=&x(1-x)^{n-1}=(x-1+1)(1-x)^{n-1}=(1-x)^{n-1}-(1-x)^n\\
\Rightarrow f(1)=&\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{n-1}^i=0\\
f^{(k)}(x)=&\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{n-1}^iA_{i+1}^kx^{i+1-k}\Rightarrow f^{(k)}(1)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{n-1}^iA_{i+1}^k
\end{aligned}$$

现已很接近原式，问题在于沟通 A_{i+1}^k 和 $(i+1)^k$，我们假想这样一个情境：有 k 个不同的球等待放进 $i+1$ 个不同的盒子里面，放置过程中允许空盒的存在，所以放法是 $(i+1)^k$，然后我们换一种方式，考虑分为恰好有 $0,1,2,3,4,...,k$ 个非空盒子的情况，那么求和就是

$$\sum_{r=0}^{k}S(k,r)r!C_{i+1}^r=\sum_{r=0}^{k}S(k,r)A_{i+1}^r$$

其中 $S(k,r)$ 表示 k 个有标号的球放到 r 个同样的盒子里面的方法数，C_{i+1}^r 表示从 $i+1$ 个不同的盒子无序地挑出 r 个盒子来放球，再对其进行全排列使得挑出来的 r 个盒子有编号，则：

$$(i+1)^k=\sum_{r=0}^{k}S(k,r)A_{i+1}^r$$

那么代入到 $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{n-1}^i(i+1)^k$ 中就有：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{n-1}^i(i+1)^k=&\sum_{i=0}^{n-1}\left((-1)^iC_{n-1}^i\left(\sum_{r=0}^{k}S(k,r)A_{i+1}^r\right)\right)\\
=&\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{k}S(k,r)A_{i+1}^r(-1)^iC_{n-1}^i\\
=&\sum_{r=0}^{k}\sum_{i=0}^{n-1}S(k,r)A_{i+1}^r(-1)^iC_{n-1}^i=\sum_{r=0}^{k}S(k,r)f^{(r)}(1)
\end{aligned}$$

对 $(1-x)^{n-1}-(1-x)^n$ 求导易得 $f(x)$ 只有第 $n-1$ 和 n 阶导数在 $x=1$ 处的值不是 0，即：

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{n-1}^i(i+1)^k=0$$

例题 2.1.15: 证明

(1) $\dfrac{\sin B-\cos A}{\sin A+\cos B}-\dfrac{\sin A+\cos B}{\sin B-\cos A}=2\tan(A+B)$

(2) $\dfrac{\sin B-\cos A}{\sin A-\cos B}-\dfrac{\sin A-\cos B}{\sin B-\cos A}=\dfrac{\cos B+\sin A}{\cos A+\sin B}-\dfrac{\cos A+\sin B}{\cos B+\sin A}=2\tan(A-B)$

(3) $\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}-\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A-\cos B}=2\cot(A+B)$

(4) $\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}-\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}=\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}-\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=2\cot(A-B)$

解 2.1.15. 第一种方法就是通分，拿一个式子举例

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin B-\cos A}{\sin A-\cos B}-\frac{\sin A-\cos B}{\sin B-\cos A}\\
&=\frac{(\sin B-\cos A)^2-(\sin A-\cos B)^2}{(\sin B-\cos A)(\sin A-\cos B)}\\
&=\frac{\sin^2 B-2\sin B\cos A+\cos^2 A-\sin^2 A+2\sin A\cos B-\cos^2 B}{\sin B\sin A-\sin A\cos A-\sin B\cos B+\cos B\cos A}\\
&=\frac{\cos 2A-\cos 2B+2(\sin A\cos B-\sin B\cos A)}{\cos(A-B)-\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)}\\
&=\frac{-2\sin(A+B)\sin(A-B)+2\sin(A-B)}{\cos(A-B)-\sin(A+B)\cos(A-B)}=\frac{2[1-\sin(A+B)]\sin(A-B)}{[1-\sin(A+B)]\cos(A-B)}\\
&=\frac{2\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=2\tan(A-B).
\end{aligned}$$

再写一个：

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}-\frac{\sin A-\sin B}{\cos A-\cos B}\\
&=\frac{(\cos A-\cos B)^2-(\sin A-\sin B)^2}{(\cos A-\cos B)(\sin A-\sin B)}\\
&=\frac{\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B-\sin^2 A+2\sin A\sin B-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin A\cos B-\sin B\cos A+\sin B\cos B}\\
&=\frac{(\cos^2 A-\sin^2 A)+(\cos^2 B-\sin^2 B)-2\cos A\cos B+2\sin A\sin B}{\sin A\cos A+\sin B\cos B-(\sin A\cos B+\sin B\cos A)}\\
&=\frac{\cos 2A+\cos 2B-2\cos(A+B)}{\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)-\sin(A+B)}=\frac{2\cos(A+B)\cos(A-B)-2\cos(A+B)}{\sin(A+B)\cos(A-B)-\sin(A+B)}\\
&=\frac{2\cos(A+B)[\cos(A-B)-1]}{\sin(A+B)[\cos(A-B)-1]}=\frac{2\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=2\cot(A+B).
\end{aligned}$$

第二种方法就是按部就班地和差化积，拿一个式子举例

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin B-\cos A}{\sin A-\cos B}-\frac{\sin A-\cos B}{\sin B-\cos A}\\
=&\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)-\cos A}{\sin A-\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}-\frac{\sin A-\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)-\cos A}\\
=&\frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)}\\
=&\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}\\
=&-2\frac{\cos\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\right]}{\sin\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\right]}=-2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+A-B\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+A-B\right)}\\
=&-2\frac{-\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=2\tan(A-B).
\end{aligned}
$$

再写一个：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}-\frac{\sin A-\sin B}{\cos A-\cos B}\\
=&\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}-\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}\\
=&\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}-\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}\\
=&-\frac{\cos\left[2\cdot\frac{A+B}{2}\right]}{\frac{1}{2}\sin\left[2\cdot\frac{A+B}{2}\right]}=-\frac{\cos(A+B)}{\frac{1}{2}\sin(A+B)}\\
=&-2\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=2\cot(A+B).
\end{aligned}
$$