欢迎来到本次章鱼杯. 本次杯赛设有 76 道题, 分别为单项选择题, 多项选择题, 填空题和解答题. 题量是新高考题量的 4 倍, 限时 3 小时 (包括队员商量, 分配和上传的时间). 难度比新高考略难. 试题不涉及以及不允许使用高中课本 (以部编版四本 B 类必修, 三本 B 类选择性必修) 范围以外的知识点. 本次杯赛是小组赛, 每组不超过 4 个人. 本次允许使用离线设备和资料, 包括计算器, 编程软件以及纸质资料. 不允许上网讨论以及与其他队伍和不参赛的人员交流. 您将和您的队友自行讨论题目的分配, 最后每个队伍综合所有队员的解答并且请只上交一份答案. 最后, 选择题请注意 A、B、C、D 选项的位置,A、B 选项在同一列,C、D 选项在同一列.

队伍名:______________

队员:______________,______________,______________,______________

1 选择题

本题共 32 小题, 每小题 5 分, 共 160 分. 在每小题给出的四个选项中, 有且仅有一个是符合题目要求的.

1. 设 $\mathbb{N}$ 是自然数的集合 (包括 0),P 是质数的集合,Q 是合数的集合. 设 $A=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$,$B=\{a+b|a,b\in Q\}$. 那么 $\mathrm{card}((\complement_{\mathbb{N}}B)\cap A)$ 是

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$, 设 A 的一些子集构成的集合 $\mathcal{F}$ 满足对于任何 $B\in\mathcal{F}$, 如果 $C\subset B$, 那么 $C\in\mathcal{F}$. 这样的 $\mathcal{F}$ 的个数最接近于以下哪个数?

   A. 50　　B. 99　　C. 150　　D. 199

3. 设 a 满足方程组 $\begin{cases}3x^2-5xy-2y^2-4x+y+1=0\\ xy+ay-x^2+a^2-1=0\end{cases}$ 的解集的元素个数为 3, 那么 a 的个数是

   A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. 6

4. 设 f 是一个单调递增的 $[0,100]\to[0,100]$ 的函数, 满足 $f(x)\geq x$. 如果 f 也要满足以下的性质:(1) 如果 $f(x)=60$, 那么 $35\leq x\leq 40$.(2)$f(x)-x<30$.(3) 如果 $x>80$, 则 $f(x)>90$. 那么以下四个函数 f 中满足以上条件的是

   A. $f(x)=10\sqrt{x}$　　C. $f(x)=\frac{1}{100}x(200-x)$

   B. $f(x)=\min(\frac{5}{3}x,100)$　　D. $f(x)=100\sin(\frac{\pi x}{200})$

5. 已知**不存在**同时满足以下四个条件的 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$. 在以下四个条件中, 有且仅有一个条件是去掉这个条件以后仍然**不存在**同时满足其他三个条件的 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$. 那么这个条件是

A. $f(x)$ 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的单射和满射

B. $f(x)$ 在 $1 < x < 2$ 的时单调递增

C. $f(x) \geq -x$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立

D. $f(x)$ 是奇函数

6. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的值恒大于 1 的偶函数,$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的值域是 $(-1,1)$ 上的奇函数.$f(x), g(x)$ 都**不是**常数函数. 那么以下四个函数既**不是**奇函数也**不是**偶函数的是

A. $\frac{(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2}{(f(x)+g(x))^2+(f(x)-g(x))^2}$

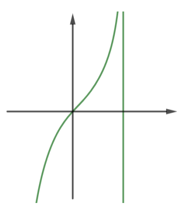
B. $f(\ln(\frac{1+g(x)}{1-g(x)}))$

C. $\frac{1+e^{f(x)\sin(x)+g(x)\cos(x)}}{e^{f(x)\sin(x)}+e^{g(x)\cos(x)}}$

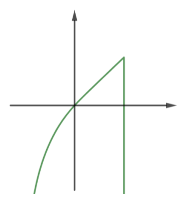
D. $\frac{\sqrt{|g(x)|}-\sqrt{f(x)}}{g(x)-f(x)}$

7. 设函数 $f(x) = \log_3(1-x) + x + x^3 + x^9 + \cdots + x^{3^{2024}}$, 那么 $f(x)$ 的图像大致是 (y 轴可能有拉伸)

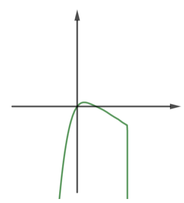
A.



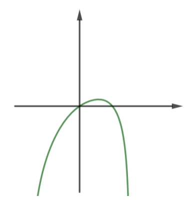
B.



C.



D.



8. 设 2023 次多项式函数 $P(x)$ 满足对于所有 $x = 0, 1, \ldots, 2023$, 都有 $P(x) = 1^x + 2^x + \cdots + 2023^x$. 那么 $P(2024)$ 除以 5 的余数是

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 同时投出两颗相同的均匀的六面骰子, 骰子的六个面均分别为 $1, 2, 3, 4, 5, 6$, 以下四个选项中两个事件**不是**独立的是

A. 第二个骰子上的数字是 4；两个骰子的数字和至少 10.

B. 两个骰子的数字至少有一个除以 3 余 2；两个骰子的数字和是 $3, 4, 5$ 之一.

C. 第一个骰子上的数字是偶数；两个骰子上的数字相除 (较大者除以较小者) 是整数.

D. 两个骰子数字之积至多三个因数；两个骰子上的数的奇偶性相同.

10. 设 $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$ 是平面上的非零向量, 满足 $|\overrightarrow{\mathbf{a}}| = 2|\overrightarrow{\mathbf{b}}|$. 下面四个结论无论 $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$ 取何值都**无法**成立的是:

A. $(\overrightarrow{\mathbf{a}} + 4\overrightarrow{\mathbf{b}}) \perp (\overrightarrow{\mathbf{a}} - 3\overrightarrow{\mathbf{b}})$

B. $|\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}| + 2|\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}}| > 7|\overrightarrow{\mathbf{b}}|$

C. $2\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = |\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}}|$

D. $(|\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}| - 3|\overrightarrow{\mathbf{b}}|)(\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}) < 0$

11. 设三角形 ABC 的外接圆圆心为 O, 其中 $A(1,0), B(-1,0)$, 满足 $(\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} + \overrightarrow{\mathbf{OC}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}}) = 0$, 并且 $\overrightarrow{\mathbf{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{BC}} \neq 0$. 那么所有 C 满足的方程是

A. $\frac{y^2}{3}-x^2=1$

B. $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}=1$

C. $x^2+\frac{y^2}{3}=1$

D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

12. 有一个圆形的钟, 中心到 12 点连线的方向垂直于地面. 钟的分针和比时针长. 设中心是 O, 分针和时针是向量, 分针的端点是 A, 时针的端点是 B. 那么在一天 24 小时的区间 (00:00 到次日 00:00) 中,$\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ 平行于地面的次数是

A. 22　　B. 24　　C. 44　　D. 48

13. 以下四个条件, 哪一个不能确定一个唯一的凸四边形 $ABCD$

A. $AB=4, BC=5, CD=6, DA=7, \angle B=90^\circ$

B. $AB=4, BC=5, CD=9, \angle B=130^\circ, \angle D=60^\circ$

C. $AB=5, BC=6, CD=7, \angle A=80^\circ, \angle D=70^\circ$

D. $AB=3, CD=7, \angle B=70^\circ, \angle C=80^\circ, \angle D=90^\circ$

14. 设 $z\neq 4+4\mathrm{i}$ 以及 $z\neq 0$. 同时满足 $\frac{z-2\mathrm{i}}{z-4-4\mathrm{i}}$ 和 $\frac{z-3-\mathrm{i}}{z}$ 都是纯虚数的复数 z 的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 无穷多

15. 设 t 是实数, 满足 $|z|^2-2=t(z^2+\bar{z}^2)$ 的复数 z 在复平面上构成一个图像. 当 t 连续不断地从 0 增大到 5 的时候, 以下对于图像的变化描述正确的是

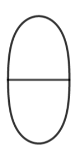
A. 圆-焦点在实轴的椭圆-两条平行直线-焦点在虚轴的双曲线

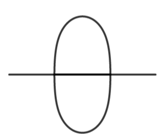
B. 圆-焦点在实轴的椭圆-两条平行直线-焦点在实轴的双曲线

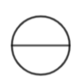
C. 圆-焦点在虚轴的椭圆-两条平行直线-焦点在实轴的双曲线

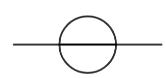
D. 圆-焦点在虚轴的椭圆-两条平行直线-焦点在虚轴的双曲线

16. 设 Z 是复数 z 的集合, 满足存在 $t\in\mathbb{R}$ 使得 $z^2+\sin(t)z+\cos(t)=0$. 那么 Z 在复平面的图像大致是

A.


B.


C.


D.


17. 设某个多面体在 xOy, yOz, zOx 平面上面的投影都是对角线和坐标轴平行的边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形. 那么这个多面体的体积的最大可能值是

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

18. 以下四个立体, 表面积 (单位为平方厘米) 和体积 (单位为立方厘米) 从数值上相同. 那么其中体积第二大的是

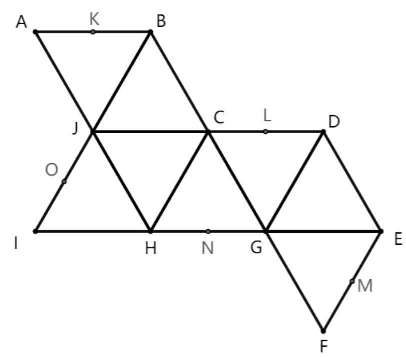
A. 长宽高之比为 $1:1:4$ 的长方体

B. 正四面体

C. 底面半径和高相等的直圆锥体

D. 高是底面半径的 10 倍的直圆柱体

19. 以下是一个正八面体的展开图, 展开以后是一个多边形 $ABCDEFGIJ$. 设 AB, CD, EF, GH, IJ 的中点分别为 K, L, M, N, O.



现在将其折叠成正八面体, 点和线段的位置会和上图中不同, 而且一部分点和线段会重合, 例如 A 和 I 重合,O 和 AJ 的中点会重合. 在折叠后, 以下四组线段**不垂直**的是

A. BM 和 CK　　B. EL 和 GJ　　C. FJ 和 LO　　D. JL 和 KN

20. 以下四个圆锥曲线, 焦点到准线的距离和另外三个**不同**的是

A. 设 $A(-\sqrt{3},-1)$ 和 $B(\sqrt{3},1)$,CA 的斜率和 CB 的斜率乘积为 1 的点 C 构成的曲线

B. $f''(x)$ 恒等于 -1 的二次函数 $f(x)$ 的图像

C. 设 D 和 E 是距离为 $\frac{2}{3}$ 的两点, 所有满足 $DF+EF=\frac{4}{3}$ 的点 F 构成的曲线.

D. 将单位圆的点横坐标不变, 纵坐标变成原来的两倍所得的曲线.

21. 设一条直线上四个点 A, B, C, D, 两两不重合, 假设六个线段比 $a=\frac{|AB|}{|CD|}, b=\frac{|AC|}{|BD|}, c=\frac{|AD|}{|BC|}, d=\frac{|BC|}{|AD|}, e=\frac{|BD|}{|AC|}, f=\frac{|CD|}{|AB|}$ 两两不相等. 那么这六个数可能的排序的总数的个数是

A. 12　　B. 24　　C. 36　　D. 48

22. 对每一个数 $t=0,1,\ldots,n-1$, 设 $P(n,t)$ 是 $a\cdot b-t$ 被 n 整除的 (a,b) 的个数, 其中 $1\le a\le n, 1\le b\le n$. 记 $M(n)$ 是 $P(n,0), P(n,1),\ldots,P(n,n-1)$ 的最大者,$m(n)$ 是 $P(n,0), P(n,1),\ldots,P(n,n-1)$ 的最小者. 设 $f(n)=\frac{M(n)}{m(n)}$. 那么以下四个可能的 n 值中,$f(n)$ 第二大的是

A. 420　　B. 900　　C. 100000　　D. 2^{40}

23. 我们设一组数 $b_1, \ldots, b_n$ 的种类是 $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, 其中 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_r$. 对于所有 $k > 0$, 如果有 t 个数恰好在 $b_1, \ldots, b_n$ 恰好出现 k 次, 那么 $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ 就有 t 个 k. 例如,3, 4, 6, 6, 2, 6, 4 的种类是 $(1, 1, 2, 3)$, 因为 2, 3 两个数各有一个,4 这一个数有两个,6 这一个数有三个, 于是种类就有 2 个 1,1 个 2,1 个 3. 我们设对于 n 有以下论断:

均匀地, 独立地从 $1, 2, \ldots, n$ 中抽样, 一共抽 $M = \frac{n(n+1)}{2}$ 次, 得到数据 $a_1, a_2, \ldots, a_M$. 在所有可能的种类中, 这组数的种类是 $(1, 2, \ldots, n)$ 的概率最大.

满足以上论断的最大的 n 的值是

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

24. 某公司有甲, 乙, 丙三人. 这三个人并不天天到公司. 三个人到公司的概率均为 $\frac{2}{3}$, 给定这三个人的其中任何一个人, 另外任何一个人到公司的条件概率均为 $\frac{3}{4}$. 那么如果给定其中两个人都到了公司, 第三个人也到了公司的条件概率的取值范围是

A. $[\frac{2}{3}, 1]$　　B. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$　　C. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$　　D. $[\frac{1}{2}, 1]$

25. 两个离散随机变量 X, Y 关于离散随机变量 Z 条件独立, 如果给定任何 X, Y, Z 的取值 x, y, z, 都满足对于 $P(X = x|Z = z) = P(X = x|Y = y \cap Z = z)$. 设 W, X, Y, Z 都是离散型随机变量. 两个个离散型随机变量 A, B 的联合分布是二元数对 (a, b) 上的分布, 其概率是 $P(A = a \cap B = b)$. 那么下面说法正确的是

A. 如果 X 和 (Y, Z) 的联合分布独立, 那么 X 和 Y 关于 Z 条件独立.

B. 如果 X 和 Y 关于 Z 条件独立,X 和 Z 关于 Y 条件独立, 那么 X 和 (Y, Z) 的联合分布条件独立.

C. 如果 X 和 Y 关于 Z 条件独立,X 和 Y 关于 W 条件独立, 那么 X 和 Y 关于 (Z, W) 的联合分布条件独立.

D. 如果 X 和 Y 独立,Y 和 Z 独立,Z 和 X 独立, 那么 X 和 Y 关于 Z 条件独立.

26. 假设硬币是均匀的, 六面骰子的六个面的点数是 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 且是均匀的, 人的生日是一年 365 天均匀分布的 (不考虑闰年), 以下四个概率中第三大的是

A. 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 落在 $(\mu - \sigma, \mu + 2\sigma)$ 的概率

B. 任意选 12 个人, 他们的生日都不一样的概率

C. 独立地投硬币 7 次, 至少投出两次正面的条件下, 投出至少三次正面的条件概率

D. 独立地投骰子 3 次, 总和落在闭区间 $[7, 14]$ 的概率

27. 设某鱼塘有 100 条鱼, 其中 10 条是有花纹的, 另外 90 只是没有花纹的. 一渔户打算估计鱼塘里面鱼的花纹的条数大小. 一种方式是有放回地抓取 10 次, 每次一只, 抓到有花纹的鱼的次数是 X_1. 一种方式是直接抓取 10 只, 抓到有花纹的鱼的条数是 X_2. 记 V_1, V_2 为 X_1, X_2 的方差. 那么 $\frac{V_2}{V_1}$ 的值是

A. $\frac{10}{9}$　　B. $\frac{11}{10}$　　C. $\frac{9}{10}$　　D. $\frac{10}{11}$

28. 下表是某高中学生身体机能测试的数据.

得分	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50
人数	797	546	367	246	158	99	58	36	18	10	5

现在使用不同的函数去拟合这组数据: 假设人数 y 是身体机能数值 x 的函数, 我们有如下四个一元线性回归备选方案:$\frac{y}{x-45} = Ax + B, y = A\ln(105-x) + B, \ln y = Ax + B, \ln y = A\ln x + B$. 现在对四组数据使用最小二乘法计算 A, B, 然后再带入回模型去计算 y, 得到估计 $\hat{y}(x)$. 那么下面四个函数中平均平方误差 $\frac{1}{11}\sum_{x=0}^{10}(y(50+5x) - \hat{y}(50+5x))^2$ 最小的一个模型是

A. $\frac{y}{x-45} = Ax + B$

B. $y = A\ln(105-x) + B$

C. $\ln y = Ax + B$

D. $\ln y = A\ln x + B$

29. 等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 都不是常数列. 那么满足 $a_k = b_k$ 的 k 的个数的最大可能值是

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

30. 有甲, 乙二人玩一个取火柴棍的游戏. 一开始有 n 根火柴棍, 每次每个人都可以取 1,4,10 根火柴棍, 取得最后一根火柴棍的玩家胜利. 甲先手. 那么 n 为以下何值时乙有必胜策略?

A. 2024　　B. 2025　　C. 2026　　D. 2027

31. 设 $f(x)$ 是一个函数, 满足对于所有 x, y, z 都有 $(x-y)f(z) + (y-z)f(x) + (z-x)f(y) + (x-y)(y-z)(z-x) = 0$. 设 $f'(x)$ 是 f 的导数. 那么以下说法**错误**的是

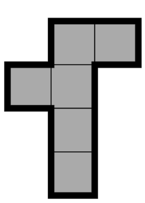
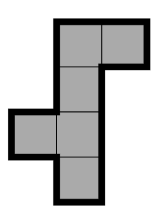
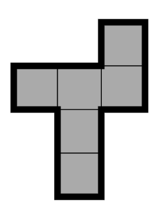
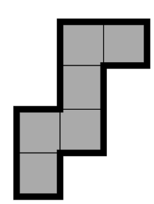
A. $f'(x)$ 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 上的一个单调递增函数

B. 如果 $f(x)$ 满足条件, 那么对于所有 $s, t, g(x) = s + f(x+t)$ 也满足条件.

C. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 有且仅有一个 f 满足 $f(0) = a$ 和 $f(1) = b$

D. 对于 $x > 0$, 有 $\frac{f(x)}{x}$ 是个单调递增的函数.

32. 现在需要从 1×1 的正方形纸片里面裁出来一个长方形的展开图, 其中边均平行于正方形的边. 现在从以下四个正方体的展开图中挑出一种, 通过调整边的长度得到一个长方体的展开图, 将其完整地画在 1×1 的正方形纸片上, 裁下来, 折成一个长方体. 这个长方体的展开图的每一条边也必须和纸片的边平行. 那么以下哪个正方体展开图能设计出来最大的可能的体积的长方体?

A. 
B. 
C. 
D. 

2 多项选择题

本题共 12 **小题, 每小题** 6 **分, 共** 72 **分. 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项是正确的. 全部选对得** 6 **分, 部分选对得部分分, 有选错的得** 0 **分.**

33. 设 f 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的一个既单又满的映射, 也就是平面上的点到平面上的点的映射. 其满足: 当且仅当 A, B, C 三点共线,$f(A), f(B), f(C)$ 三点共线. 那么以下说法正确的有

    A. 任何一个圆的像都是圆.

    B. 任何两个面积相等的三角形的像都是两个面积相等的三角形.

    C. 任何一个抛物线的像都是抛物线.

    D. 任何一个半平面 (包含半平面的边界直线) 的像都是半平面.

34. 设 $f(x) = \sin(\omega x)$ 是个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 其中 $\omega > 0$. 以下说法正确的有

    A. $(x-1)f(x)$ 的图像关于某个点中心对称, 当且仅当 $\omega = (k - \frac{1}{2})\pi$, 其中 k 是正整数.

    B. $(x-1)^2 f(x)$ 的图像关于一条垂直于 x 轴的直线轴对称, 当且仅当 $\omega = (k - \frac{1}{2})\pi$, 其中 k 是正整数.

    C. $\cos(x-1)f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有最大值, 当且仅当 $\omega = (2k + \frac{1}{2})\pi$, 其中 k 是非负整数.

    D. 如果 $(2\cos(x) + 1)f(x)$ 是周期函数, 那么他最小正周期是 2π 的整数倍.

35. 对于三维空间中的点, 直线和平面的关系, 下面说法正确的有

    A. 对于一条直线和两个点, 过两个点至多只有一个平面与已知直线平行.

    B. 对于两条异面直线, 过一个点至多只有一个平面与这两条直线均平行.

    C. 对于三条两两不平行的直线, 过一个点至多只有一个平面与三条直线的夹角相等.

    D. 对于三角形和第四个点, 过第四个点有且仅有一条直线与三角形三边均垂直.

36. 三棱锥 $ABCD$ 四个面都是直角三角形. 考虑四个直角三角形的四个直角的顶点, 以下情况**不能发生**的有

    A. A 是三个直角的顶点,B 是一个直角的顶点

    B. A 是两个直角的顶点,B 是两个直角的顶点

    C. A 是两个直角的顶点,B 和 C 各是一个直角的顶点

    D. A,B,C,D 各是一个直角的顶点

37. 有一系列椭圆 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$, 其中 $a, b > 0$. 在 a, b 满足一定关系的时候, 这一系列椭圆和某一些曲线相切. 以下说法正确的有

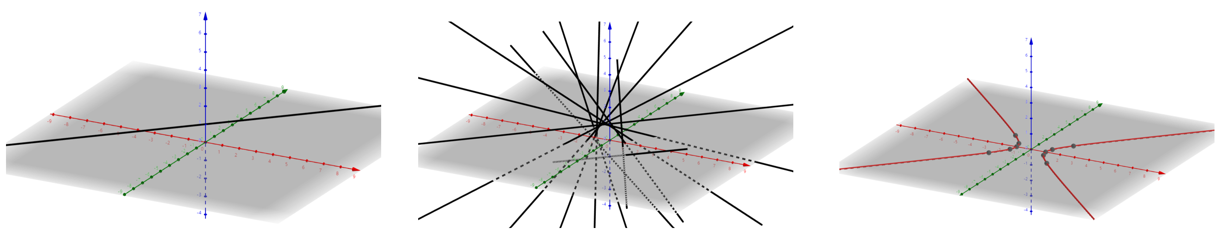
    A. 如果 $ab > 0$ 是一个定值, 那么这一个椭圆和一条固定的双曲线相切.

    B. 如果 $\frac{b}{a(1-a)} > 0$ 是一个定值而且 $\frac{1}{2} < a < 1$, 那么这一个椭圆和一条固定的抛物线相切.

C. $a+b+\frac{b}{a}=t>0$ 是一个定值, 而且 $\sqrt{t+1}-1<a<t$, 那么这一个椭圆和一条固定的双曲线相切.

D. 如果 (a,b) 在同一条圆锥曲线上并且 b 随着 a 增大而减小, 那么这一个椭圆和一条固定的圆锥曲线相切.

38. 广州塔是一个知名景点, 虽然从正面看起来是中间有个细细的小蛮腰, 但是他的外轮廓是一根根直的钢梁绕轴旋转得到的, 可谓曲中有直. 现在一个人想重现这种奇观. 如 (a) 图所示, 该人将 xOy 平面上的直线 $y=kx$ 整条往 z 轴正方向平移 t 个单位, 其中 $k>0, t>0$, 得到直线 l. 然后, 如 (b) 图, 将这条直线绕 y 轴旋转. 最后, 如 (c) 图, 观察这些直线在 xOy 平面的交点, 发现这些交点构成一个双曲线.



(a) 图 (b) 图 (c) 图

设这个双曲线的方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 以下说法正确的有

A. k 增大的时候, 双曲线的离心率增大, 而双曲线的离心率和 t 无关.

B. 如果直线 l 绕 y 轴旋转到直线 m 与 xOy 平面交于 A 点, 那么双曲线在 A 点的切线是 m 在 xOy 平面的投影.

C. 如果在 (b) 图中直线 l 绕的是 x 轴旋转而不是绕 y 轴旋转, 那么双曲线的方程是 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

D. 当直线 l 绕 y 轴旋转 α 角度, 其中 $\tan\alpha=\frac{1}{k}$ 时, 其与 xOy 平面交点的 x 轴的坐标等于双曲线其中一个焦点的 x 轴的坐标.

39. 对于一个正整数 $n\geq 2$, 每次操作我们可以选择 “加一之后除以 2” , “除以 2” , “减一以后除以 2” 三个中的一个, 使得操作之后的数也是正整数. 设 $2^t\leq n<2^{t+1}$, 设 a_n 是利用 t 步将 n 操作到 1 的方法数,b_n 是利用 t 步将 n 操作到 2 的方法数. 例如, 将 5 操作 2 步, 可以得到 $5\to 3\to 2$,$5\to 2\to 1$,$5\to 3\to 1$ 三种可能, 于是 $a_5=2, b_5=1$. 对正整数 k, 设 0 和 k 的最大公约数是 k. 那么以下说法正确的有

A. 对于所有正整数 $n\geq 2$,a_n 和 b_n 的最大公约数是 1

B. 对于所有正整数 n, 如果 $2^t\leq n<2^{t+1}$, 那么 $a_n+b_n\geq t+1$.

C. 对于所有正整数 t,$a_2+a_3+\cdots+a_{2^t}=\frac{3^t-1+2t}{4}$

D. 对于所有正整数 n,$a_n+b_n\leq n$.

40. KL 散度是统计和机器学习中常用的统计量. 对于两个离散在 $1,2,\ldots,n$ 上分布的随机变量 X, Y, 假设对于 $t=1,\ldots,n$, 均有 $P(X=t)>0, P(Y=t)>0$, 那么我们定义 $D_{\mathrm{KL}}(X||Y)=\sum_{t=1}^{n}P(X=$

$t)\ln\frac{P(X=t)}{P(Y=t)}$. 那么对于在 $1,\dots,n$ 上分布的随机变量 X,Y,Z, 并且假设 $t=1,\dots,n$, 均有 $P(X=t)>0, P(Y=t)>0, P(Z=t)>0$, 以下四个结论**错误**的有

A. $D_{\mathrm{KL}}(X||Y)\ge 0$ 恒成立.

B. $D_{\mathrm{KL}}(X||Y)=D_{\mathrm{KL}}(Y||X)$ 恒成立.

C. $D_{\mathrm{KL}}(X||Y)+D_{\mathrm{KL}}(Y||Z)\ge D_{\mathrm{KL}}(X||Z)$ 恒成立.

D. $D_{\mathrm{KL}}(X||Y)\le\sum_{t=1}^{n}\frac{(P(X=t)-P(Y=t))^2}{P(Y=t)}$ 恒成立.

41. 孙子算经卷上第五条曰: 黄金方寸重一斤. 白金方寸重一十四两. 玉方寸重一十二两. 铜方寸重七两半. 铅方寸重九两半. 铁方寸重六两. 石方寸重三两. 如今这条所提到的各种金属的密度如下:

金属	黄金	铂金	铜	铅	铁
x: 孙子算经中的密度 (单位: 两/方寸)	(1 斤/1 两)=10	14	7.5	9.5	6
y: 现代公制密度 (单位:g/cm^3)	19.32	21.45	8.9	11.34	7.84

某研究者根据上述的五个数据做线性回归 $y=\hat{b}x+\hat{a}$, 其中 y 是现代公制密度,x 是孙子算经中的密度. 利用现在的五个数据, 其得到了 $\hat{a},\hat{b}$ 的值. 最后得到 $\hat{a}$ 约等于 -3.6, 而按照常理, 这个值应该接近 0. 这位研究者的古代文学素养不足, 遂犯了两个错误: 其一是该研究者根据现在的计量单位, 认为一斤等于 10 两, 而古时候是 16 两. 其二是该研究者错误地认为古时候的“白金”和现在所指的“白金”(和“铂金”) 是一个物质. 为了纠正这个错误, 现在有以下两个修正策略:(1) 将黄金在孙子算经中的密度改成 16,(2) 将白金 (铂金) 的数据点去掉. 那么修正以后会发生的是

A. 如果只修正 (2), 那么 $\hat{b}$ 会减小.

B. 修正 (1) 和 (2) 计算得出的 $\hat{b}$ 比只修正 (1) 得出的 $\hat{b}$ 要小.

C. 如果只修正 (2), 其线性相关系数会增大.

D. 如果修正了 (1)(2), 其线性相关系数会至少是 0.99.

42. 定义一个数列 $\{a_n\}$ 是“等差等比”数列, 如果 a_n 的通项公式满足存在 a,d 和 $q\neq 0$ 使得 $a_n=(a+dn)q^n$. 当 $q=1$ 时, 这个数列是等差数列, 当 $d=0$ 时, 这个数列是等比数列. 那么以下说法正确的是

A. 一个等比数列的前 n 项和 S_n 是一个等差等比数列.

B. 等差等比数列相邻两项的差 a_n-a_{n-1} 是一个等差等比数列.

C. 如果数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是等差等比数列, 那么他们的乘积 $\{a_nb_n\}$ 是等差等比数列当且仅当 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中其中一个是等比数列.

D. 等差等比数列满足一个二阶线性递推关系: 存在 c_1,c_2, 对于 $n\ge 3$ 满足 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$.

43. 设 a,b,c 是非零的常数. 以下四个函数 $f(x)$ 中, 存在常数 u,v 满足 $f''(x)+uf'(x)+vf(x)=0$ 的有

A. $f(x) = e^{ax+b} + c$

B. $f(x) = ax^2 + bx + c$

C. $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$

D. $f(x) = a \cdot \ln(bx + c)$

44. 设函数 f 和 g 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 上的函数, 并且 f 和 g 三阶导数都有定义. 那么以下说法正确的是

A. 如果 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取到极值, 那么 $f(x)^2$ 也在 $x = x_0$ 处取到极值.

B. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $x = x_0$ 处取到极值, 那么 $f(x) + g(x)$ 也在 $x = x_0$ 处取到极值.

C. 如果对于所有实数 $x < y$ 均有 $f(x) + f(y) > 2f(\frac{x+y}{2})$, 那么 $f(x)$ 有且仅有一个极值点.

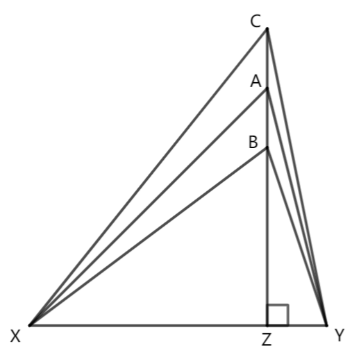
D. 如果 $f''(x) > 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 成立且 $f'(x_0) = 0$, 那么对于 $h > 0$,$f(x) = f(x_0) + h$ 恰好有两个根.

3 填空题

本题共 12 **小题**, **每小题** 5 **分**, **共** 60 **分**.

45. 多项式 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{2024})$ 展开后 $x^{2049290}$ 的系数是____________.

46. 如下图 (图为示意图, 比例可能不准确), 一个人想测量东西向的河流 XY 的宽度. 他测得 A 与 XY 的夹角 $\angle XAY = 60°$. 他从 A 往南走了 1 米之后, 到达了 B 点, 测得 B 与 XY 的夹角 $\angle XBY = 60.59°$. 他从 A 往北走了 1 米之后, 到达了 C 点, 测得 C 与 XY 的夹角 $\angle XCY = 59.42°$.BC 和 XY 垂直. 那么 A 到 XY 的距离 AZ 是____________米 (四舍五入到最近的整数).



47. 设直角梯形 $ABCD$ 中 $\angle ABC = \angle BCD = 90°$.$AC = 27.3$ 厘米,$BD = 17.5$ 厘米, 设 AC 和 BD 的交点为 E,E 到 BC 的距离是 9 厘米, 那么 BC 的长度是____________厘米.

48. 对于除了有限个 t 以外的所有实数 t, 连接 $(t,0)$ 和 $(t^2,1)$ 的所有直线和一个定圆锥曲线相切, 则这个圆锥曲线的两个焦点之间的距离是____________.

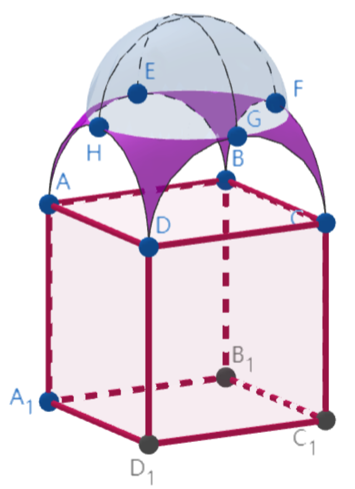
49. 设复数 $z^2 - 2\mathrm{i}z - 2 \neq 0$. 同时满足以下两个不等式 $\begin{cases} |z|^2 \leq 2(z+\bar{z}) + 2 \\ \frac{3\pi}{4} \leq \arg(\frac{z-\mathrm{i}+1}{z-\mathrm{i}-1}) \leq \frac{7\pi}{4} \end{cases}$ 的复数 z 的集合在复平面的面积是____________. 其中 arg 表示的是复数的辐角主值.

50. 设 F_1, F_2 是椭圆的两个焦点,P 是椭圆上一个动点,G 是 $\triangle PF_1F_2$ 三条中线的交点,I 是 $\triangle PF_1F_2$ 三条角平分线的交点. 在 P 运动的时候, 如果 G 的轨迹和 I 的轨迹没有交点, 那么椭圆的离心率的取值范围是____________.

51. 设平面上的原点是 O, 两个点集 A, B 的闵可夫斯基和是集合 C, 满足 $C = \{Z|\overrightarrow{\mathbf{OZ}} = \overrightarrow{\mathbf{OX}} + \overrightarrow{\mathbf{OY}}, X \in A, Y \in B\}$. 设 A 是边和坐标轴平行的边长为 2 正方形的边和内部的点的集合,B 是一个方向任意的边长为 2 的正三角形和内部的点的集合, 那么 A 和 B 的闵可夫斯基和的面积的取值范围是____________.

52. 如下图, 为了过渡方形的建筑和球形的拱顶, 在各式各样的建筑中会用到一种结构叫做帆拱. 最上方的半球形拱顶半径为 1, 而底下需要承接的是一个边长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$. 为此, 可以需要用一个半径为 $\sqrt{2}$ 的球面的一部分作为过渡. 先构造一个以正方形 $ABCD$ 的中心的为中心的半径为 $\sqrt{2}$ 的球, 然后以平面 ABB_1A_1 去掉在这个平面外的部分得到一个半圆形切面 $\widehat{AEB}$, 对另外三个面也如法炮制. 最后去掉与这四个半圆弧相切的一部分并且盖上半径为 1 的球面穹顶即可. 那么这个帆拱 (粉色部分) 的表面积是____________.

注: 球面被一个平面所截后的部分叫做球冠. 截得的圆面是底, 垂直于底面的直径被截得的部分是高. 如果球冠来自于半径为 R 的球, 其高是 h, 那么这个球冠的面积是 $2\pi Rh$.



53. 有 A,B,C 三个人, 他们每个人都投了个骰子, 结果为 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 之一. 他们知道自己骰子的点数, 并且知道另外两个人的骰子的点数之和, 但是不知道具体是多少. 已知他们的推理能力足够强. 在他们之间, 发生了如下的对话.

A 说: 我不知道你们分别是多少, 但是我知道你们也都不知道我是多少.

B 说: 本来我确实不知道的,A 说完之后我知道你们是多少了.

C 说: 本来听了 A 说完之后我也不知道你们分别是多少, 但是我得知 B 知道了的话, 我也知道你们分别是多少了.

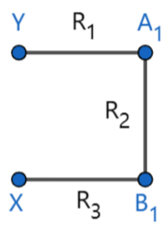
设使得 A 说出这句话的三个点数的组合的可能的个数是 P 种,B 听了 A 之后说出这句话的可能的组合的个数是 Q 种,C 听了 A,B 之后说出这句话的可能的组合的个数是 R 种, 那么 $P \times Q \times R$ 的

值是______________.

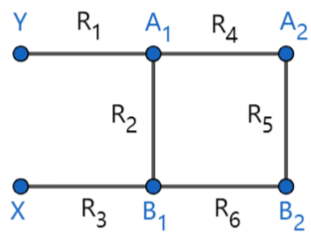
54. 一个人要用五个均匀的正四面体的骰子玩快艇骰子, 骰子的面均为 $1,2,3,4$. 他一共要投三次骰子, 然后想要投到五个朝下的面相同. 在每一次投掷之后, 他会固定所有的骰子中朝下的面数字最多的点数 (之一) 的骰子, 然后重新投其他所有的骰子. 例如第一次他投了 $1,1,2,2,3$, 他会固定两个 1, 然后重骰其他的三个. 如果第二次骰的结果是 $1,1,4,4,4$, 其中三个 4 来自于第二次投的, 两个 1 来自于上一次固定的, 他会重投之前固定的两个底面为 1 的骰子. 如果结果是 $1,1,1,1,3$, 他会重投底面为 3 的骰子. 他投到五个点数相同或者一共投了三次骰子后停止. 最后他能成功投出五个同一点数的概率是______________.

55. 有一组数据是互不相同的整数, 最小的是 0, 最大的是 1000. 已知这些数的平均数是一个整数, 并且不出现在这一组数据之中. 那么这一组数据的平均数的最大可能值是______________.

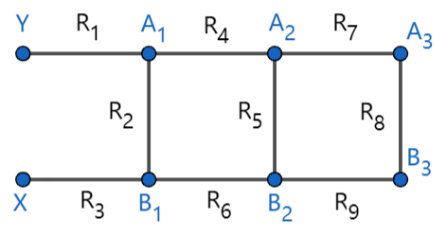
56. 如下图所示是一个电阻网络:(a),(b),(c) 三个图分别是 1 阶,2 阶,3 阶的阶梯电阻. 一般的,n 阶的电阻网络是 X,Y 之间的电阻, 有端点 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 以及 $B_1,B_2,\ldots,B_n$.



(a) 图



(b) 图



(c) 图

我们设 Y,A_1 中的电阻 $R_1=1\Omega$,A_1,B_1 中的电阻 $R_2=1\Omega$,X,B_1 中的电阻 $R_3=1\Omega$. 一般的, 对于 $i\geq 2$,A_{i-1},A_i 的电阻 R_{3i-2} 的阻值是 $2^{i-1}\Omega$,A_i,B_i 的电阻 R_{3i-1} 的阻值是 $2^{i-1}\Omega$,B_{i-1},B_i 的电阻 R_{3i} 的阻值是 $2^{i-1}\Omega$. 设 n 阶的电阻网络中 X,Y 中的阻值是 $a_n\Omega$, 例如 $a_1=3$,$a_2=\frac{20}{7}$. 那么 a_n 的通项公式是______________.

4 解答题

57. (13 points) 设四面体 $ABCD$ 满足 $AB=BC=CD=DA=AC$. 记 α 是二面角 $B-AC-D$,β 是二面角 $A-BD-C$. 设 $x=\cos(\alpha)$,$y=\cos(\beta)$.
    (a) (7 points) 求 $y-x$ 的取值范围.
    (b) (6 points) 点 (x,y) 在一条圆锥曲线上, 请写出这个圆锥曲线的方程以及找到这条圆锥曲线上所有的两个坐标都是整数的点.

58. (13 points) 有 n 个人 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 围成一圈玩游戏. 首先 P_1 拿到了一个球. 每一次传球的时候, 如果此时 P_i 拿到了球, 他就会以各 $1/2$ 的概率传给相邻的玩家 P_{i-1} 和 P_{i+1}, 其中设 $P_0=P_n,P_{n+1}=P_1$. 现在规定, 如果某个玩家 P_i 第一次拿到了球而此时其他玩家都拿到过球, 则游戏结束,P_i 是游戏的赢家. 例如在 $n=3$ 的时候, 如果 P_1 传给 P_2,P_2 传给 P_1,P_1 传给 P_3, 此时 P_3 是最后一个拿到球的, 则游戏停止,P_3 是赢家. 记 p_i 是 P_i 获得游戏胜利的概率.

我们先说明游戏以概率 1 会停止.

(a) (4 points) 证明: 如果从开局开始传了 N 次球, 那么游戏还没有停止, 仍然有人没有拿到过球的概率至多 $(1-\frac{1}{2^n})^{\lfloor N/n \rfloor}$.

因为多项式函数比指数函数增长速度慢, 于是这个概率在 N 增大的时候逐渐降到 0. 那么游戏最终停止的概率是 1, 于是 $p_2+p_3+\cdots+p_n=1$ 成立.

(b) (4 points) 在 $n=4$ 的情况下求 p_2,p_3,p_4 的值.

(c) (5 points) 在一般 n 的情况下求 $p_2,p_3,\ldots,p_n$ 的值.

59. (13 points) 设 $f(x)=x^a-x^b$ 其中 $b>a>0$. 设 $f(x)$ 的极大值点是 x_0. 设 $0<x_1<x_2<1$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$.

(a) (5 points) 证明 $x_1x_2<x_0^2$

(b) (4 points) 如果 $a\geq 1$ 以及 $b\geq 2$, 证明 $x_1+x_2\leq 2x_0$.

(c) (4 points) 如果 $a\leq 1$ 以及 $b\leq 2$, 证明 $x_1+x_2\geq 2x_0$.

60. (13 points) 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1$, 而且公比为 q, 其中 $0<q<1$. 设数列 $\{b_n\}$ 满足:$b_0=1$, 对于 $n\geq 1$, 如果 $b_0a_0+b_1a_1+\cdots+b_{n-1}a_{n-1}>0$, 则 $b_n=-1$, 如果 $b_0a_0+b_1a_1+\cdots+b_{n-1}a_{n-1}\leq 0$, 则 $b_n=1$. 我们说一个数列 $\{b_n\}$ 是最终周期的, 如果存在正整数 N,T, 使得对于所有正整数 $n>N$, 都有 $b_{n+T}=b_n$.

(a) (4 points) 证明: 对于 $0<q\leq\frac{1}{2}$, 数列 $\{b_n\}$ 是最终周期的.

(b) (9 points) 是否存在有理数 $q\in(\frac{1}{2},1)$ 满足 $\{b_n\}$ 是最终周期的?

注: 本题您能够使用的一个事实是: 对于 $-1<x<1$,$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$.

61. (15 points) 端午节到了, 某商家推出了一种粽子. 这个粽子和四面体比, 内容物更充足, 更鼓, 更好吃. 这个粽子的表面是如下图的形状, 其方程是 $z^2+(x^2-y^2)z+x^2+y^2-1=0$.

(a) (4 points) 构造一个底面在 yOz 平面上的圆柱体, 使得对于所有 $t\in[-1,1]$, 这个圆柱体和粽子被平面 $z=t$ 所截面积相同. 并利用祖 gèng(该字无法显示) 原理求粽子的体积.

(b) (7 points) “对称” 一直是这个粽子的卖点. 除了 $y=0$ 和 $x=0$, 请再找出四个平面, 使得这个粽子关于这四个平面都是轴对称的, 并证明之.

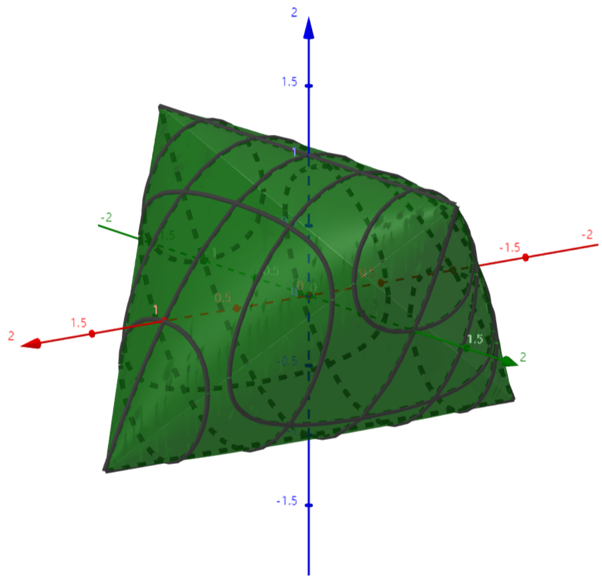
(c) (4 points) 这种三角形状的粽子自然和平面上的三角形有关. 证明: 对于任何三角形 ABC, 点 $(\frac{\cos A+\cos B}{\sqrt{2}},\frac{\cos A-\cos B}{\sqrt{2}},\cos C)$ 是粽子的表面上的点.

注: 您可以用到的一个事实是: 如果椭圆的长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$, 则其面积等于 πab.

62. (15 points) 在平面几何中, 两点决定一条直线, 两条不重合的直线至多交于一个交点. 设 n 是正整数. 设 $S=\{1,2,\ldots,n\}$. 现在有元素个数大于等于 2 的 S 的子集 $A_1,A_2,\ldots,A_r$. 已知对于任何 $1\leq i<j\leq n$ 的 i,j, 存在**至少**一个 $k,1\leq k\leq r$ 满足 $i\in A_k$ 而且 $j\in A_k$. 以下有两个命题, 本题将要探讨这两个条件之间的关系:

(1) 对于任何 $1\leq i<j\leq n$ 的 i,j, 存在**唯一**一个 $k,1\leq k\leq r$ 满足 $i\in A_k$ 而且 $j\in A_k$.

(2) 存在平面上两两不重合的直线 $l_1,l_2,\ldots,l_r$ 以及平面上两两不重合的点 $P_1,\ldots,P_n$. 设 $T=\{P_1,\ldots,P_n\}$. 这些点和直线使得 $l_i\cap T=\{P_j|j\in A_i\}$.



(a) (3 points) 证明 (2) 是 (1) 的充分条件.

然而,(2) 不一定是 (1) 的必要条件. 已知存在一个正整数 k 使得当 $n \le k$ 的时候,(2) 是 (1) 的必要条件.$n > k$ 的时候,(2) 不是 (1) 的必要条件.

(b) (5 points) 请给出 $n = k+1$ 成立 (1) 但是不成立 (2) 的例子.

(c) (7 points) 证明在 $n = k$ 的情况下,(2) 是 (1) 的必要条件.

63. (15 points) 在不等式中, 各种平均值有诸多应用. 设 $n \ge 3$, 对于正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 我们有平方平均值 $Q = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$, 代数平均值 $A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 以及调和平均值 $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$. 我们现在要探究 $\frac{Q-A}{A-H}$ 的值域.

我们目前希望将其变成简单的情形:$a_1 = a_2 \cdots = a_{n-1}$. 为了变成这个情形, 我们需要调整法. 该调整法需要以下的策略: 对于其中三个元 x, y, z, 固定 $p = x+y+z, q = yz+zx+xy$, 我们希望考虑 $r = xyz$ 在何时取到极值. 由韦达定理, 我们考虑三次函数 $F(t) = t^3 - pt^2 + qt$,r 为何值时 $F(t) = r$ 在非负实数上有三个根. 这里设 $p^2 > 3q > 0.F(t) = r$ 如果有三个非负根, 设他的三个根是 $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3$.

(a) (4 points) 证明在 $p^2 \ge 4q$ 的情况下,r 可以取到 0.

(b) (6 points) 求 $F(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的极大值 r_1 和极小值 r_0. 并且证明: 无论 p, q 关系如何,$F(t) = r_1$ 的三个根满足 $0 \le x_1 = x_2 \le x_3$, 在 $p^2 < 4q$ 的情况下,$F(t) = r_0$ 的三个根满足 $0 \le x_1 \le x_2 = x_3$.

(c) (5 points) 由上一问, 我们可以不妨设 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1$, 设 $a_n = a$, 求 $a > 0$ 的情况下 $G(a) = \frac{\sqrt{\frac{n-1+a^2}{n}} - \frac{n-1+a}{n}}{\frac{n-1+a}{n} - \frac{n}{n-1+\frac{1}{a}}}$ 的取值范围.

64. (15 points) 对于大于等于 3 的正整数 m, n, 如果存在正整数 p 满足 $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{p}$, 进行一次操作可以将 n 变成 m.

(a) (5 points) 对于任何大于等于 3 的奇数 n, 可以经过三次操作将其变成 $n+1$

(b) (10 points) 对于任何正整数 n, 我们可以经过至多 $4\log_2 n-3$ 次操作使得 3 可以变成 n.

65. (15 points) 设有一个直圆柱, 其下底面是一个在 xOy 平面上的半径为 1 的圆, 其中心是 $A(0,1,0)$. 设圆柱上底面是 $z=a$, 其中 $a>0$ 是参数. 点 $B(0,0,a)$ 是上底面的圆周上的一点, 点 D 在下底面圆周 $x^2+(y-1)^2=1\wedge z=0$ 上运动, 过 B 做 BD 的垂直平面交 xOy 平面为一条动直线. 这条动直线和 xOy 平面上的一条圆锥曲线 C 相切.

(a) (6 points) 对参数 a, 求 C 的方程.

(b) (9 points) 当 D 在下底面圆周上运动时, 设圆锥曲线 C 上一点 E 使得 $BD\perp BE$. 求参数 a 的范围, 使得以下论断成立:DE 长度取到最小值时,D 的坐标是 $(0,2,0)$.

66. (15 points) 设 n 是 4 的倍数. 数列 $a_1,\ldots,a_n$, 满足 $a_1=1$, 并且对于任何 $1\le i,j,k\le n$, 如果 i,j,k 其中两个的和等于第三个, 那么 a_i,a_j,a_k 其中两个的和等于第三个.

(a) (6 points) 说明这样的数列必须是以下三种情况之一:

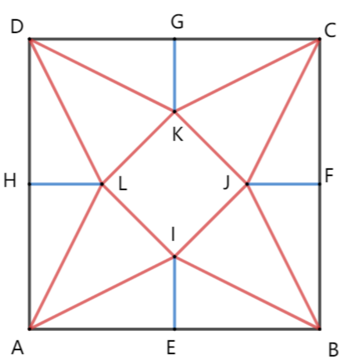
(1) 对于所有 k,$a_k=k$.

(2) 对于奇数 k,$|a_k|=1$; 对于偶数 k,$a_k=0$.

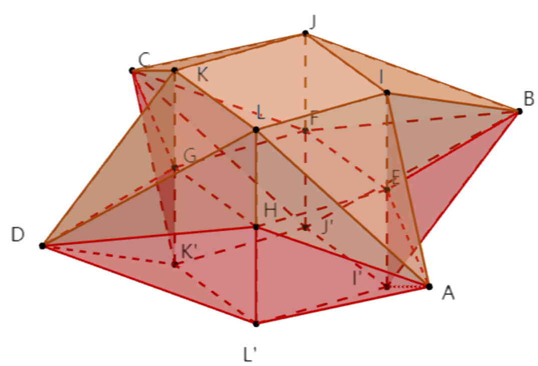
(3) 对于奇数 k,$|a_k|=1$; 对于除以 4 余 2 的正整数 k,$|a_k|=2$; 对于 4 的倍数 k,$a_k=0$.

(b) (9 points) 设 $n=4k$,b_k 是满足题目条件的数列 $a_1,\ldots,a_n$ 的个数, 求 b_k 的通项公式.

67. (15 points) 现在有两张正方形的纸片, 两张纸片叠在一起不能装下任何体积的物品. 但是以枕头和枕套为灵感, 我们可以使用折纸的方式让他装下一定的体积. 如 (a) 图所示, 将正方形 $ABCD$ 纸片每一边的中点 E,F,G,H 作边的垂线, 然后取 I,J,K,L 使得 $EI=FJ=GK=HL$. 之后, 沿着三角形的折痕 ALI,BIJ,CJK,DKL 向纸内方向折,EI,FJ,GK,LH 向纸外方向折, 使得 IE,FJ,GK,LH 均垂直于 $ABCD$ 所在平面, 这样正方形 $IJKL$ 就被顶起来了. 然后将另一个正方形纸片作同样对称的操作, 于是就得到了如 (b) 图所示的立体. 其中 (b) 立体中的每一个字母对应的是 (a) 图中的字母折叠后的位置, 然后 I',J',K',L' 是对称的另一张纸的位置.



(a) 图



(b) 图

设正方形边长为 2 以及设 $EI=t$.

(a) (4 points) 现在需要让这个立体能够容纳尽量大的长方体. 那么 t 取何值时长方体 $IJKL-I'J'K'L'$ 的体积最大? 最大值是多少?

现在需要让这个立体本身体积最大.

(b) (4 points) 请写出这个立体的体积关于 t 的关系表达式.

(c) (7 points) 尽管无法求出 t 的值使得体积最大, 我们仍然可以找到体积比较大的 t 值. 设有理数 t 可以表示成 $t = p/q$, 其中 p, q 是互质的正整数. 请找出在所有使得立体的体积是一个大于 1.4 的有理数的 t 中, 分母 q 最小的一个.

注: 您可以用到以下事实: 对于满足 $u^2 + v^2 = 2$ 上的正数 u, v,u, v 均是正有理数当且仅当存在正整数 p, q 使得 $u = \frac{p^2+2pq-q^2}{p^2+q^2}$.

68. (15 points) 设 D 是模长小于 1 的复数的集合.

(a) (6 points) 对任何 $a, z_1, z_2 \in D$, 证明:$1 + az_1 + \bar{a}z_2 + z_1z_2 \neq 0$.

(b) (9 points) 如果复数 a, b, c, d 满足对于所有 $z_1, z_2 \in D$ 均有 $a + bz_1 + cz_2 + dz_1z_2 \neq 0$, 证明: 对于任何 $z \in D$,$a + dz \neq 0$.

69. (17 points) 西克曼骰子是一对均匀的六面正方体骰子, 其中一颗上面的点数是 $1, 2, 2, 3, 3, 4$ 而另一颗是 $1, 3, 4, 5, 6, 8$. 将两颗骰子一起投出的时候, 他们的和的分布列恰好和两颗均匀的 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的骰子一起投出的和的分布列相同. 设 $n \geq 2$ 是一个正整数, 现在我们需要探究将西克曼骰子推广到 n 面骰子的情况. 我们希望造出两个均匀的 n 面骰子, 一颗写着 $p_1, \ldots, p_n$, 另一颗写着 $q_1, \ldots, q_n$, 所有写上的数字均为正整数. 将这两颗骰子一起投出的时候, 他们的和的分布列恰好和两颗均匀的 $1, \ldots, n$ 的骰子一起投出的和的分布列也相同. 说两颗均匀的 n 面骰子等价, 如果他们骰子的结果的分布列相同. 例如写着 $1, 1, 3, 4, 5, 6$ 和写着 $6, 5, 1, 4, 3, 1$ 的骰子是等价的.

(a) (4 points) 证明: 如果 n 是质数, 如果要达成上述效果, 两颗骰子只能是两颗分别写着 $1, 2, \ldots, n$ 的骰子 (以及何其等价的骰子).

(b) (7 points) 证明: 如果 n 是合数, 并且 n 有 d 个不同的因数, 那么一共至少有 $d - 1$ 种互不等价的骰子可以作为其中一颗骰子.

(c) (6 points) 设 n 有 d 个不同的因子, 求最小的 n, 使得至少有 $d + 1$ 种互不等价的骰子可以作为其中一颗骰子.

注: 您可以直接使用以下事实: 对于质数 p,$1 + x + \cdots + x^{p-1}$ 无法分解成两个非常值的整系数多项式的乘积.

70. (17 points) 给定 $n \geq 2$ 是一个正整数. 对整系数多项式 P, 假设集合 $A_i = \{m \in \mathbb{Z} | P(m) = i\}$. 设 $T = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. 如果 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 至少两个集合非空:

(a) (7 points) 求 $\mathrm{card}(T)$ 的最大可能值. 这个值和 n 有关.

(b) (10 points) 假设上一个问题的最大可能值是 k_n(是一个和 n 有关的数). 求所有的正整数 n 满足: 如果整系数多项式 P, 使得 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 至少两个集合非空且 $\mathrm{card}(T) = k_n$, 那么 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 都非空.

71. (17 points) 如果我们知道一个圆锥曲线上的有理点, 我们可以采用割线的方法找到其他所有的有理点. 例如, 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上有一个点 $A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. 我们设一条过 A 的直线斜率是 k, 那么我们就可以

通过韦达定理知道这条直线和圆的另一个交点是 $(\frac{-3-8k+3k^2}{5(1+k^2)}, \frac{4-6k-4k^2}{5(1+k^2)})$. 我们称 $x = \frac{-3-8k+3k^2}{5(1+k^2)}, y = \frac{4-6k-4k^2}{5(1+k^2)}$ 是 $x^2+y^2=1$ 对点 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 的通解.

(a) (4 points) 对点 $(0,0)$ 作割线, 求圆锥曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=0$ 的通解.

(b) (5 points) 假设某个圆锥曲线 C 对于点 P 的通解是 $x = \frac{-5+k+k^2}{2+k+k^2}, y = \frac{-4-9k-2k^2}{2+k+k^2}$. 求 C 的表达式和 P 的坐标.

(c) (8 points) 假设 $A(3,4), B(0,0), C(3,0)$, 点 D 满足 $\measuredangle ADB = \measuredangle BDC$, 其中 $\measuredangle$ 指的是有向角,$\measuredangle XYZ$ 是直线 XY 逆时针绕 Y 旋转转到直线 YZ 的最小正角度.(例如, 如果 $\triangle ABC$ 是逆时针排列的正三角形的三个顶点, 那么 $\measuredangle BAC = 60°$ 而 $\measuredangle CAB = 120°$.) 求 D 满足的方程, 并且求这个方程上的所有有理点的通解.

72. (17 points) 设 $a > 1$, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 上有动点 P, 过 $(0,0)$ 作 P 的切线的平行线交椭圆于 Q, R, 其中 Q, P, R 是在椭圆上逆时针排列. 点 P 运动的时候, 动点 $S(\tan(\frac{\angle QPR}{2}), \frac{|PQ|}{|PR|})$ 也随之运动.S 的运动的轨迹是 C, 是一个封闭图形.

(a) (12 points) 求曲线 C 的方程: 求出关于 x, y, a 的多项式 $F(x,y,a)=0$, 满足 C 是 $F(x,y,a)=0$ 上 $x, y > 0$ 的点以及 $F(x,y,a)$ 不能分解成两个非常数的多项式的乘积.

(b) (5 points) 证明:C 所围成的面积至多 $2a\ln a + 2(1-\ln 2)a$.

注: 唯一一个在本题可以用到的关于积分的事实是: 设 $a, b, c > 0$ 且 $b < c$, 那么曲线 $y = a/x, x = b, x = c, y = 0$ 所围成区域的面积等于 $a\ln(c/b)$.

73. (17 points) 设 $\theta < 2\pi/3$. 设 $u_1, \ldots, u_n$ 都是非零复数, 并且对于所有 $1 \le \mathrm{i} \le n, 1 \le j \le n$, 均有 $\arg \frac{u_i}{u_j} \in [0, \theta] \cup [2\pi-\theta, 2\pi)$. 其中 arg 表示的是复数的辐角主值. 设复数 $a_1, \ldots, a_n$, 满足对于所有 $1 \le i \le n$,$|a_i - 1| \le \frac{1}{2}$. 记 $S = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$,$T = u_1 + \cdots + u_n$.

(a) (6 points) 证明:$S \ne 0$.

现在利用上面的命题证明以下. 设 $a_{i,j}$ 是 n^2 个复数, 其中 $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$. 并且对于所有 i, j, 均有 $|a_{i,j} - 1| \le \frac{1}{2}$. 记所有 $1, 2, \ldots, n$ 的排列为 $1, 2, \ldots, n$ 各出现一次的 n 项数列 $b_1, \ldots, b_n$. 设和 $S = \sum_{(b_1,\ldots,b_n)\text{是一个排列}} a_{1,b_1}a_{2,b_2}\ldots a_{n,b_n}$.

(b) (11 points) 证明 $S \ne 0$.

注: 为了书写简洁, 本题允许使用矩阵的积和式 (Permanent) 记号写, 即使不证明 (但是需要提到) 积和式的性质也不扣分.

74. (17 points) 卡方分布是一个概率统计中常用的分布, 拥有 k 个自由度的卡方分布被称作 χ_k^2. 他的定义是 k 个独立的正态分布 $N(0,1)$ 随机变量的平方和. 现在想要做一些假设检验, 但是如果无法接触到卡方表, 那么只能推算显著水平.

现在有一系列独立的, 期望为 0 的正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 随机变量 $X_1, \ldots, X_N$. 现在需要通过计算平方和的平均值 $\overline{X^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i^2$ 检验是否这些随机变量来自于 $\mathcal{N}(0,1)$. 已知显著性水平 $0 < \alpha < 1$ 以及假设 $N > 4\ln(\frac{1}{\alpha})$.

在估算概率的时候, 人们常常结合矩母函数和马尔科夫不等式证明. 设随机变量 X, 函数 $F(t) = E(e^{tX})$.k 个自由度的卡方分布 χ_k^2 的矩母函数为 $F(t) = \frac{1}{(\sqrt{1-2t})^k}$. 马尔科夫不等式指的是如果一个非负的随机变量 X 以及正实数 t, 我们有 $P(X \ge t) \le E(X)/t$.

(a) (8 points) 证明: 如果 $\overline{X^2} < 1 - 2\sqrt{\frac{\ln(\frac{1}{\alpha})}{N}}$, 我们有 $1-\alpha$ 的把握认为这些随机变量不来自于 $N(0,1)$.

(b) (9 points) 证明: 如果 $\overline{X^2} > 1 + t$, 其中 t 是方程 $t^2 = \frac{2\ln(\frac{1}{\alpha})}{N}(2 + \frac{4}{3}t)$ 的正根, 我们也有 $1-\alpha$ 的把握认为这些随机变量不来自于 $N(0,1)$.

75. (17 points) 设严格递增数列 $\{a_n\}$ 每一项都是正整数, 并且满足对于所有 $n \geq 1$,$a_{a_n} = 3n$. 已知该数列存在且唯一.

(a) (9 points) 证明: 对于所有 n, 均有 $\frac{1}{1\cdot a_1} + \frac{1}{2\cdot a_2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot a_n} \leq \frac{44}{63} + \frac{2}{3}\ln(\frac{4}{3})$

(b) (8 points) 证明: 存在正整数 n, 使得 $\frac{1}{1\cdot a_1} + \frac{1}{2\cdot a_2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot a_n} \geq \frac{25}{36} + \frac{2}{3}\ln(\frac{4}{3})$.

76. (17 points) 给定正整数 n, 正实数 $0 < t < 1$, 有 n 个 $1+t$,n 个 $1-t$, 以及一个 X,$2n+1$ 个数学对象进行排列, 一共有 $M = (2n+1)C_{2n}^n$ 种不同的排列方式. 对于排列 $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$, 设 X 排在 a_k. 如果 $k=1$, 则记这个排列的重量是 1. 否则记这个排列的重量是乘积 $a_1a_2\ldots a_{k-1}$. 设 W_n 是所有排列的重量的平均值, 其可以表示成关于 t 的多项式 $W_n = \sum_{k=0}^{2n} w_{n,k}t^k$.

例如, 在 $n=1$ 的情况下,$1-t, 1+t, X$ 的不同的排列一共有 6 种, 分别是 $1-t, 1+t, X$,$1+t, 1-t, X$,$1-t, X, 1+t$,$1+t, X, 1-t$,$X, 1-t, 1+t$,$X, 1+t, 1-t$. 这 6 个排列的重量分别是 $(1-t)(1+t) = 1-t^2, (1+t)(1-t) = 1-t^2, 1-t, 1+t, 1, 1$, 其平均重量是 $W_1 = 1 - \frac{t^2}{3}$, 故 $w_{1,0} = 1, w_{1,1} = 0, w_{1,2} = -\frac{1}{3}$.

(a) (6 points) 在**不计算**$w_{n,k}$ 的值和 W_n 具体值的情况下, 对于所有 n, t, 证明:$W_n \leq 1$.

(b) (11 points) 写出并证明 $w_{n,k}$ 的通项公式.

图 4: 这是雷伊布, 希望可爱的雷伊布能给大家带来好心情!

预祝各位取得好成绩!