和积$x-\ln x=m$偏移问题的终极处理

Titus, T7 UNION　武汉市导学猫教育导数教研中心
2024年2月21日

设问：函数$L(x)=x-\ln x-m$有两个零点x_1,x_2（$x_1<x_2$）

一. 和积等价命题的代证式互推

问题总体上分为两类，

$$\text{证明：}x_1+x_2\sim A\text{或}x_1x_2\sim B;$$

（~表示>或<，A,B为由a构成的函数，即代证式）

1. 记$x_1+x_2\sim A_1$的等价命题为$x_1x_2\sim B_1$，则有

$$x_1+x_2=\ln x_1+m+\ln x_2+m\sim A_1,$$

$$\therefore \ln x_1x_2\sim A_1-2m,\ x_1x_2\sim e^{A_1-2m}=B_1,$$

故$x_1+x_2\sim A_1$的等价命题为$x_1x_2\sim e^{A_1-2m}$.

2. 同理$x_1x_2\sim B_2$的等价命题为$x_1+x_2\sim \ln B_2+2m$.

二. 代证式与待定结构

1. 若要证明$x_1+x_2\sim A$，同乘(x_2-x_1)即

$$x_2^2-x_1^2\sim Ax_2-Ax_1,$$

即

$$x_2^2-Ax_2\sim x_1^2-Ax_1,$$

得到待定结构$F(x)=x^2-Ax$，在$F(x)$后加上函数$h(m)$，使得$F(x)$单调，即可证明代证式.

2. 若要证明$x_1x_2\sim B$，同乘(x_2-x_1)即

$$x_1x_2(x_2-x_1)\sim B(x_2-x_1),$$

$$(x_2 - x_1) \sim \frac{B(x_2 - x_1)}{x_1 x_2},$$

$$x_1 + \frac{B}{x_1} \sim x_2 + \frac{B}{x_2},$$

得到待定结构$F(x) = x + \dfrac{B}{x}$，在$F(x)$后加上函数$h(m)$，使得$F(x)$单调，即可证明代证式.

三. 基于待定结构与等价命题的异号函数通项公式

1. 对于命题$x_1 + x_2 \sim A_1$得出其等价命题$x_1 x_2 \sim e^{A_1 - 2m}$

- 对命题$x_1 + x_2 \sim A_1$，其待定结构为$F(x) = x^2 - A_1 x + h_1(a)$；
- 对命题$x_1 x_2 \sim B_1 = e^{A_1 - 2m}$，其待定结构为$H(x) = x + \dfrac{B_1}{x} + h_2(a) = \dfrac{1}{x}(x^2 + h_2(a)x + B_1)$；

令$h_1(a) = B_1$，$h_2(a) = A_1$即得到异号函数通项公式

$$F(x) = x^2 - A\,x + e^{A_1 - 2m}.$$

2. 对于命题$x_1 x_2 \sim B_2$得出其等价命题$x_1 + x_2 \sim \ln B_2 + 2m$

同理于1.得出其异号函数通项公式

$$F(x) = x + \frac{B_2}{x} - (\ln B_2 + 2m)$$

注 在分析$F(x)$性质时将m全部用x表示。

从此，这类问题再无关精度、无关方法、无关待定方式、无关泰勒、无关拟合、无关单调性调整，

有手就行！不信的话我们把目前所有的命题都做一遍：

（精度越高，$F(x)$性质说明越麻烦，本文仅展现此方法的通用性，至于实用性，见仁见智，因为此法麻烦时，对称构造也麻烦，其余各种二级结论和大招更是无法解决，但对于高考题，我个人认为此方法为最佳方案）

例1 证明：$x_1 x_2 < 1$.

解析 令$F(x) = x + \dfrac{1}{x} - 2(x - \ln x)$，$F'(x) < 0$，$F(x)$单调递减，$F(x_1) > F(x_2)$，

$$x_1 + \frac{1}{x_1} - 2m > x_2 + \frac{1}{x_2} - 2m,$$

因式分解得$x_1x_2<1$.

例2 证明：$x_1+x_2>2$.

解析 令$F(x)=x^2-2x+e^{2-2(x-\ln x)}$，求导分析$F(x)$可得

$$\begin{cases} F(x)\geqslant 0, & x\geqslant 1 \\ F(x)<0, & x<1 \end{cases},$$

故$F(x_1)<F(x_2)$，

$$x_1^2-2x_1+e^{2-2m}<x_2^2-2x_2+e^{2-2m},$$

因式分解得$x_1+x_2>2$.

例3 证明：$x_1+x_2>1+m$.

解析 令$F(x)=x^2-(1+x-\ln x)x+e^{1-x+\ln x}$，求导分析$F(x)$可得

$$\begin{cases} F(x)\geqslant 0, & x\geqslant 1 \\ F(x)<0, & x<1 \end{cases},$$

故$F(x_1)<F(x_2)$，

$$x_1^2-(1+m)x_1+e^{1-m}<x_2^2-(1+m)x_2+e^{1-m},$$

因式分解得$x_1+x_2>1+m$.

例4 证明：$x_1+x_2<\dfrac{4m+2}{3}$.

解析 令$F(x)=x^2-\dfrac{4(x-\ln x)+2}{3}x+e^{\frac{2}{3}(1-(x-\ln x))}$，求导分析$F(x)$可得

$$\begin{cases} F(x)\leq 0, & x\geqslant 1 \\ F(x)>0, & x<1 \end{cases},$$

故$F(x_1)>F(x_2)$，

$$x_1^2-\frac{4m+2}{3}x_1+e^{\frac{2}{3}(1-m)}>x_2^2-\frac{4m+2}{3}x_2+e^{\frac{2}{3}(1-m)}$$

因式分解得$x_1+x_2<\dfrac{4m+2}{3}$.

例5 证明：$x_1+x_2<m+\dfrac{m-1}{\ln m}$.

解析 令$F(x)=x^2-((x-\ln x)+\dfrac{(x-\ln x)-1}{\ln(x-\ln x)})x+e^{(x-\ln x)+\frac{(x-\ln x)-1}{\ln(x-\ln x)}-2(x-\ln x)}$，求导分析$F(x)$可得

$$\begin{cases} F(x) \leq 0, & x \geqslant 1 \\ F(x) > 0, & x < 1 \end{cases},$$

故$F(x_1) > F(x_2)$，消m，因式分解得$x_1 + x_2 < m + \dfrac{m-1}{\ln m}$.

例6 证明：$x_1 + x_2 < m + \sqrt{m}$.

解析 令$F(x) = x^2 - (x - \ln x + \sqrt{x - \ln x})x + e^{\sqrt{x-\ln x} - x + \ln x}$，求导分析$F(x)$可得

$$\begin{cases} F(x) \leq 0, & x \geqslant 1 \\ F(x) > 0, & x < 1 \end{cases},$$

故$F(x_1) > F(x_2)$，消m，因式分解得$x_1 + x_2 < m + \sqrt{m}$.

例7 证明：$x_1 + x_2 > \dfrac{2}{3}m + \dfrac{4}{3}\sqrt{m}$.

解析 令$F(x) = x^2 - (\dfrac{2}{3}(x - \ln x) + \dfrac{4}{3}\sqrt{x - \ln x})x + e^{\frac{4}{3}(\sqrt{x-\ln x} - (x - \ln x))}$，求导分析$F(x)$可得

$$\begin{cases} F(x) \geqslant 0, & x \geqslant 1 \\ F(x) < 0, & x < 1 \end{cases},$$

故$F(x_1) < F(x_2)$，消m，因式分解得$x_1 + x_2 > \dfrac{2}{3}m + \dfrac{4}{3}\sqrt{m}$.

例8 证明：$x_1 + x_2 < m + \dfrac{m \ln m}{m-1}$.

解析 令$F(x) = x^2 - ((x - \ln x) + \dfrac{(x - \ln x)\ln(x - \ln x)}{(x - \ln x) - 1})x + e^{\frac{(x-\ln x)\ln(x-\ln x)}{(x-\ln x)-1} - (x - \ln x)}$，求导分析$F(x)$可得

$$\begin{cases} F(x) \leq 0, & x \geqslant 1 \\ F(x) > 0, & x < 1 \end{cases},$$

故$F(x_1) > F(x_2)$，消m，因式分解得$x_1 + x_2 < m + \dfrac{m \ln m}{m-1}$.

例9 证明：$x_1 + x_2 > m + \dfrac{1}{m} + \ln m$.

解析 令$F(x) = x^2 - ((x - \ln x) + \dfrac{1}{(x - \ln x)} + \ln(x - \ln x))x + e^{\frac{1}{(x-\ln x)} + \ln(x - \ln x) - (x - \ln x)}$，求导分析$F(x)$可得

$$\begin{cases} F(x) \geqslant 0, & x \geqslant 1 \\ F(x) < 0, & x < 1 \end{cases},$$

故$F(x_1)<F(x_2)$，消m，因式分解得$x_1+x_2>m+\dfrac{1}{m}+\ln m$.

例10 证明：$x_1+x_2-\dfrac{2}{x_1+x_2}>m+\ln m$.

解析 即证$(x_1+x_2)^2-(m+\ln m)(x_1+x_2)-2>0$，即证

$$x_1+x_2>\frac{1}{2}(m+\ln m+\sqrt{(m+\ln m)^2+8}),$$

记$s(x)=\dfrac{1}{2}(x-\ln x+\ln(x-\ln x)+\sqrt{(x-\ln x+\ln(x-\ln x)^2+8}})$，令

$$F(x)=x^2-s(x)x+e^{s(x)-2(x-\ln x)},$$

求导分析$F(x)$可得

$$\begin{cases}F(x)\le 0, & x\geqslant 1\\ F(x)>0, & x<1\end{cases},$$

故$F(x_1)<F(x_2)$，因式分解得$x_1+x_2>\dfrac{1}{2}(m+\ln m+\sqrt{(m+\ln m)^2+8})$.

此类方法的关键在于对$F(x)$单调性质的说明，鉴于写此文章的目的时说明此方法的通用性，本文并为细致的把每个$F(x)$的单调性都完整证明，有兴趣的读者可以自行证明；本方法对于精度低的题，可以大大降低运算成本，但对于精度高的题，与另一通法对称构造的计算量不分伯仲。

特别声明：请老唐说题MST等团队不要抄袭本文，或将本文内容用于己方产品冠以夸张标题进行盈利，如需引用，请注明出处！

湖北省武汉市导学猫教育有限咨询公司

柳曰