题目

设正实数x_1,x_2满足$\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}\left(x_1<x_2\right)$， 若$\left(x_1+\lambda\right)\left(x_2+\lambda\right)>\left(e+\lambda\right)^2$恒成立, 求$\lambda$的取值范围。

解答

先证明$\lambda=-1$满足条件，即$x_1x_2+2e>e^2+x_1+x_2\Leftrightarrow x_1>\dfrac{x_2+e^2-2e}{x_2-1}$

显然有$1<x_1<e<x_2$。结合函数$f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$的单调性知

$\Leftrightarrow f\left(x\right)>f\left(\dfrac{x+e^2-2e}{x-1}\right)$对$\forall x\in\left(e,+\infty\right)$恒成立

$\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x}>\dfrac{\ln\dfrac{x+e^2-2e}{x-1}}{\dfrac{x+e^2-2e}{x-1}}\Leftrightarrow\ln\dfrac{x+e^2-2e}{x-1}<\dfrac{x+e^2-2e}{x^2-x}\ln x$恒成立

令$g\left(x\right)=\ln\dfrac{x+e^2-2e}{x-1}-\dfrac{x+e^2-2e}{x^2-x}\ln x$，则

$$g'\left(x\right)=\frac{\left(x^2+2\left(e-2\right)ex-\left(e-2\right)e\right)\ln x-\dfrac{\left(x-1\right)\left(\left(e-2\right)^2e^2+2\left(e-2\right)ex+\left(2+\left(e-2\right)e\right)x^2\right)}{\left(e-2\right)e+x}}{\left(x-1\right)^2x^2}$$

考虑分子的正负情况：令$h\left(x\right)=\ln x-\dfrac{\left(x-1\right)\left(\left(e-2\right)^2e^2+2\left(e-2\right)ex+\left(2+\left(e-2\right)e\right)x^2\right)}{\left(\left(e-2\right)e+x\right)\left(\left(2-e\right)e+2\left(e-2\right)ex+x^2\right)}$则

$$h'\left(x\right)=\left(e-x\right)\left(x-2+e\right)\left(x\left(\left(-2+e\right)e+x\right)^2\left(-\left(-2+e\right)e+2\left(-2+e\right)ex+x^2\right)^2\right)^{-1}\bullet$$
$$\left(\left(e-2\right)^3e^3-\left(e-2\right)^2e^2\left(1+5\left(-2+e\right)e\right)x+\left(e-2\right)e\left(-1+\left(e-2\right)e\right)\left(1+4\left(e-2\right)e\right)x^2+\left(e-2\right)e\left(-1+3\left(e-2\right)e\right)x^3-x^4\right)$$

由于$\left(e-x\right)\left(x-2+e\right)<0$，故只需考虑分子的四次函数部分，记为$p\left(x\right)$

$$p\left(x\right)=\left(e-2\right)^3e^3-\left(e-2\right)^2e^2\left(1+5\left(-2+e\right)e\right)x+\left(e-2\right)e\left(\left(e-2\right)e-1\right)\left(1+4\left(e-2\right)e\right)x^2+\left(e-2\right)e\left(3\left(e-2\right)e-1\right)x^3-x^4$$

$$p'\left(x\right)=-\left(e-2\right)^2e^2\left(1+5\left(e-2\right)e\right)+2\left(e-2\right)e\left(\left(e-2\right)e-1\right)\left(1+4\left(e-2\right)e\right)x+3\left(e-2\right)e\left(3\left(e-2\right)e-1\right)x^2-4x$$

$p''(x)=2(e-2)e((e-2)e-1)(1+4(e-2)e)+6(e-2)e(3(e-2)e-1)x-12x^2$

令 $p''(x)=0$ 得

$$x_0=\frac{1}{24}(6(e-2)\mathrm{e}(3(e-2)e-1)+\sqrt{192e-1104e^2-336e^3+6948e^4-11376e^5+7944e^6-2592e^7+324e^8}$$

注意另一根为负，且 $p''(x)$ 为开口向下的二次函数

故 $p'(x)$ 在 (e,x_0) 上递增，$(x_0,+\infty)$ 递减，显然 $x_0\in(5,6)$

注意到 $p'(e)=4(-1+e)^3e^3(-5+2e)>0$，$p'(8)<0,p'(7)>0$

故 $p'(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上有唯一零点 $m\in(7,8)$

所以 $p(x)$ 在 (e,m) 上递增，$(m,+\infty)$ 上递减

由于 $p(e)=2(-1+\mathrm{e})^4\mathrm{e}^3(-5+2\mathrm{e})>0$，$p(100)<0$

故 $p(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上有唯一零点 n，而 $(e-x)(x-2+e)<0$

所以当 $x\in(e,n)$ 时 $h'(x)<0$，$h(x)$ 递减，$x\in(n,+\infty)$ 时 $h'(x)>0$，$h(x)$ 递增

因为 $h(e)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=+\infty$，所以 $h(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上有唯一零点 p

所以 $x\in(e,p)$ 时 $h(x)<0\Rightarrow g'(x)<0$，$g(x)$ 递减

$x\in(p,+\infty)$ 时 $h(x)<0\Rightarrow g'(x)>0$，$g(x)$ 递增

显然 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=g(e)=0$，所以 $g(x)<0$ 在 $(e,+\infty)$ 恒成立

当 $\lambda>-1$ 时，由 $x_1+x_2>2e$ 并结合前面已证 $x_1x_2+2e>e^2+x_1+x_2$

知 $\lambda(x_1+x_2-2e)>2e-x_1-x_2>e^2-x_1x_2$，故 $\lambda\geq-1$ 满足要求

再证明 $\lambda<-1$ 不满足要求

由 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$，设 $x_2=kx_1(k>1)$，代入解得 $x_1=k^{\frac{1}{k-1}},x_2=k^{\frac{k}{k-1}}$

已知条件即 $\lambda>\dfrac{e^2-x_1x_2}{x_1+x_2-2e}=\dfrac{\mathrm{e}^2-k^{\frac{1}{-1+k}+\frac{k}{-1+k}}}{-2\mathrm{e}+k^{\frac{1}{-1+k}}+k^{\frac{k}{-1+k}}}$ 恒成立

可以计算出$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{e^{2}-k^{\frac{1}{-1+k}+\frac{k}{-1+k}}}{-2e+k^{\frac{1}{-1+k}}+k^{\frac{k}{-1+k}}}=-1,\lim\limits_{k\to 1}\dfrac{e^{2}-k^{\frac{1}{-1+k}+\frac{k}{-1+k}}}{-2e+k^{\frac{1}{-1+k}}+k^{\frac{k}{-1+k}}}=-\dfrac{2e}{5}$

故$\lambda<-1$不满足要求，证毕。