



华南理工大学

South China University of Technology

线性代数 and 解析几何 作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 11 月 4 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章	行列式	1
1.1	第 1 周作业	1
1.2	第 2 周作业	9
第二章	矩阵	15
2.1	第 1 周作业	16
第三章	第三章作业	25
第四章	第四章作业	27

第一章 行列式

1.1 第 1 周作业

习题一第一大题的第 (1) (3) (5) 问解答如下:

例题 1.1.1 (习题一第一大题)

计算行列式的值 $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

解 1.1.1. (1) 原式 $= \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1$.

(2) 由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} &= 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 \\ &\quad - 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 - 3 \times 5 \times 7 \\ &= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 \\ &= 225 - 225 = 0. \end{aligned}$$

实际上第三行是第二行各数的两倍减去第一行各数得到的, 因此第三行是第一行和第二行的线性组合, 所以矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

的行向量线性相关, 行列式的值为 0.

(3) 仍然由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} &= x^3 + y^3 + y^3 - xy^2 - xy^2 - xy^2 \\ &= x^3 + 2y^3 - 3xy^2. \end{aligned}$$

实际上这个结果可以推广的, 下面定理的证明运用了行列式的线性性质和递归分解的思想。

定理 1.1.1

将 n 阶行列式 D 中每个元 $a_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 都加上参数 t , 得到新行列式 $D(t)$, 则:

$$D(t) = D + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} t \Leftrightarrow D = D(t) - t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

证明. 将 $D(t)$ 中的第一列拆开, 得到的新行列式记为 $D_1(t)$, 则:

$$D_1(t) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(t) &= D_1(t) + \begin{vmatrix} t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix} = D_1(t) + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= t \sum_{i=1}^n A_{i1} + D_1(t) = t \sum_{i=1}^n A_{i1} + t \sum_{i=1}^n A_{i2} + D_2(t) \\ &= t \sum_{i=1}^n A_{i1} + t \sum_{i=1}^n A_{i2} + t \sum_{i=1}^n A_{i3} + D_3(t) \\ &= \cdots = t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} + D. \end{aligned}$$

□

下面推广一下上面那道例题:

例题 1.1.2

求 n 阶行列式的值 ($a \neq b$):

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.2. 原题只有第一个行列式，笔者将其进行了转置，得到第二个行列式，目的是方便进行证明，这里运用了“对偶”的思想。这样就可以轻松写出：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & b - a & \cdots & b - a \\ 0 & x_2 - a & \cdots & b - a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a)$$

$$D(-b) = \begin{vmatrix} x_1 - b & a - b & \cdots & a - b \\ 0 & x_2 - b & \cdots & a - b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - b)$$

因此：

$$D = \prod_{i=1}^n (x_i - a) + (-a) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = \prod_{i=1}^n (x_i - b) + (-b) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

容易发现，

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

取决于原来的行列式本身，与引入的参数无关（因为我们是一列一列地拆出参数，而恰好在取代数余子式时避开了含有参数的列），因此上述公式构成二元一次线性方程组，由此可以解得：

$$D = \frac{a}{a-b} \prod_{i=1}^n (x_i - b) - \frac{b}{a-b} \prod_{i=1}^n (x_i - a).$$

例题 1.1.3

求 n 阶行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.3. 直接套结论：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a)$$

则：

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

其中对于 A_{ij} 而言，由于只有对角线上的数不是 0，因此如果不取对角线上的数写代数余子式，那么由于系数是 0，行列式无论是什么都不会影响结果

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \prod_{k \neq i} (x_k - a) & i = j \end{cases}$$

所以：

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = D(-a) + a \sum_{i=1}^n A_{ii} = \prod_{i=1}^n (x_i - a) + a \sum_{i=1}^n \prod_{k \neq i} (x_k - a).$$

我们再补充一个例子：

例题 1.1.4

求 n 阶行列式的值 ($a \neq b$):

$$D = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & 0 \\ a & a & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & b & b \\ 0 & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

解 1.1.4.

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = D(-b) + b \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

其中：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \\ 0 & 0 & \cdots & -a & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & \cdots & b-a & b-a \\ -a & b-a & \cdots & b-a & b-a \end{vmatrix}$$

然后使用定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

就可以得到:

$$D(-a) = (-a)^{1+2+3+4+\dots+n-1}(-a)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^n$$

$$D(-b) = (-b)^{1+2+3+4+\dots+n-1}(-b)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} b^n$$

当 $a \neq b$ 时,

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{ab^n - ba^n}{a-b} = (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}} (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1})$$

再补充一个例子:

例题 1.1.5 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 1.1.5. 每一列的和是 $a + (n-1)b$, 可把每一行都加到第一列, 提取公因式 $a + (n-1)b$:

$$\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

或者我们可以使用加边法:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & b & \cdots & b \\ 0 & b & a & b & \cdots & b \\ 0 & b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \frac{nb}{a-b} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

习题一第二大题的第 (1) (2) 问解答如下:

例题 1.1.6 (习题一第二大题: 证明恒等式)

$$(1) \begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

解 1.1.6. (1) 由于行列式阶数较低, 考虑直接展开即可完成证明:

$$\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = a(d+y) - c(b+x) = ad - bc + ay - cx = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}$$

(2) 直接按列展开即可完成证明:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

例题 1.1.7 (习题一第三大题)

借助行列式的知识解方程组:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

解 1.1.7. 写出各个行列式并应用克莱默法则, 每一个行列式都可以由沙路法则或者对其进行行变换得出结果:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4 - 3 - 2 + 16 = 17$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 34 + 12 + 6 - 6 + 136 = 102$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 34$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 119$$

故解方程组：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{102}{17} = 6, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{34}{17} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{119}{17} = 7.$$

例题 1.1.8 (习题一第 5 大题)

若排列 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ 的逆序数为 m ，求排列 $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_1$ 的逆序数。

解 1.1.8. 排列 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ 的逆序数为 m 指这个排列的逆序数对的数量为 m ，而数对一共有

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

种，所以排列 $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_1$ 的逆序数为

$$\binom{n}{2} - m = \frac{n(n-1)}{2} - m.$$

例题 1.1.9 (习题一第 6 大题)

求下面各个排列的逆序数并判断排列的奇偶性：

$$(1) 26538417 \quad (2) n(n-1)(n-2)\dots 1 \quad (3) 2n(2n-2)(2n-4)\dots 2(2n-1)(2n-3)\dots 1.$$

解 1.1.9. (1) 逆序数为 $1+4+3+1+3+1=13$ ，奇排列。(2) 逆序数为

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

设 $k \in \mathbb{N}_+$ 当 $n = 4k, 4k+1$ 时，为偶排列，当 $n = 4k+2, 4k+3$ 时，为奇排列。(3) 逆序数为

$$(2n-1) + (2n-3) + \dots + 1 + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

当 $n \equiv 0(\text{mod}4)$ 或 $n \equiv 3(\text{mod}4)$ 时，为偶排列；当 $n \equiv 1(\text{mod}4)$ 或 $n \equiv 2(\text{mod}4)$ 时，为奇排列。

例题 1.1.10 (习题一第 10 大题)

用行列式的定义计算：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 1.1.10. (1) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\tau(2143)abde + \tau(4123)abce = abde - abce = abe(d - c)$$

(2) 我们自上而下地按每一列来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D &= \tau(1n(n-1)(n-2)\dots 2)a_{11}a_{2n}a_{3,n-1}\dots a_{n-1,n-1}, a_{n,2} \\ &= a_{11}(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_{2n} \cdots a_{n2} \end{aligned}$$

(3) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D &= \tau(n123\dots(n-1))a_n \\ &= (-1)^{(n-1)}a_n \end{aligned}$$

1.2 第 2 周作业

例题 1.2.1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n, \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n$$

解 1.2.1. (1) 进行行列式的行变换, 再按行展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = 68$$

(2) 观察到所有列的元素和相同, 所以同时相减:

$$\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & x-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & x-a \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a+(n-1)x \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n$$

使用定义法计算可得答案为:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a + (n-1)x)(a-x)^{n-1}$$

(3) 一样的道理, 当 $a \neq 0$ 时, 将前 $n-1$ 列的元素乘以 $-\frac{x}{a}$ 加到最后一列上, 再利用定义计算:

$$D = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a - (n-1)\frac{x^2}{a} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a^n - (n-1)x^2 a^{n-2}).$$

当 $a = 0$ 时, 显然

$$D = \begin{cases} x, & n=1 \\ x^2, & n=2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

例题 1.2.2 证明等式

$$(1) \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ z_1 + x_1 & z_2 + x_2 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = \left[a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \right] (a-1)^{n-1}$$

解 1.2.2. (1) 先转置，再一点点拆出来：

$$\begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ z_1 + x_1 & z_2 + x_2 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 + y_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix}$$

然后把最后一列数加到第一行，再减去第二列数：

$$= \begin{vmatrix} 2x_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ 2x_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ 2x_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix}$$

然后将第三列数减去第一列数，再乘以 -1 加到第二列数上：

$$= 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 + z_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 + z_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 + z_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(2) 套路式地将第二行，第三行... 第 n 行分别减去第一行：

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

再将第 2 列到第 n 列地数依次加到第一列上：

$$= \begin{vmatrix} a + \frac{(n+2)(n-1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = \left(a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \right) (a-1)^{n-1}$$

例题 1.2.3 计算行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & 49 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n, \quad (3) \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n$$

解 1.2.3. (1) 直接计算即可:

$$\begin{vmatrix} 7 & 49 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 7 & 49 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ = 20 \begin{vmatrix} 0 & -6 & 8 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 0 & -6 & 8 \\ 0 & 3.5 & 3.5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -40 \begin{vmatrix} -6 & 8 \\ 3.5 & 3.5 \end{vmatrix} = 1960.$$

(2) 使用分割法, 分别构造上三角行列式和下三角行列式, 则

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \end{vmatrix}_{n-1} \\ = x^n + (-1)^{n+1} y^n = x^n - (-y)^n$$

当然这题也可以用行变换先行处理, 将第 k 行乘以 $-\frac{y}{x}$ 再添加到第 $k+1$ 行:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & y(-\frac{y}{x}) \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & y(-\frac{y}{x})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y(\frac{y}{x})^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x + y(-\frac{y}{x})^{n-1} \end{vmatrix} = x^{n-1} \left(x + y(-\frac{y}{x})^{n-1} \right) = x^n - (-y)^n$$

(3) 这题可以递推法来做:

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = x \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - y \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} \\
 &= x \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - yz \begin{vmatrix} x & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-2} = xD_{n-1} - yzD_{n-2}
 \end{aligned}$$

而 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$, 列出特征方程: $r^2 - xr + yz = 0$, 则分类:

当判别式为 0 时, 根为 $\frac{x}{2}$, 则 $D_n = (A + Bn)(\frac{x}{2})^n$, 代入 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz = \frac{3}{4}x^2$ 得到

$$D_n = (n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

当判别式不为 0 时, 根为 $r_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}, r_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}$, 则 $D_n = Ar_1^n + Br_2^n$, 代入 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$ 得到

$$\begin{cases} A = \frac{\sqrt{x^2 - 4yz} + x}{2\sqrt{x^2 - 4yz}} \\ B = \frac{\sqrt{x^2 - 4yz} - x}{2\sqrt{x^2 - 4yz}} \end{cases} \Rightarrow D_n = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2 - 4yz}}$$

综上:

$$D_n = \begin{cases} (n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n, & x^2 = 4yz \\ \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2 - 4yz}}, & x^2 \neq 4yz \end{cases}$$

例题 1.2.4 求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

解 1.2.4. 分别计算可得:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ 18 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 39$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 13$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -14 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 14 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 8 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

所以解为:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}, x_4 = 0$$

例题 1.2.5 如果齐次线性方程组有非零解，求 λ 的取值

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ \lambda^2 x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

解 1.2.5. 考虑系数行列式：

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-2\lambda \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda)(1-\lambda) = 0$$

所以 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 1.

第二章 矩阵

2.1 第 1 周作业

例题 2.1.1

求 $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$

解 2.1.1. 因为

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \sin n\alpha & -\sin \alpha \cos n\alpha - \cos \alpha \sin n\alpha \\ \sin \alpha \cos n\alpha + \cos \alpha \sin n\alpha & \cos \alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \sin n\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以答案是 $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

例题 2.1.2

令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算

(1) A^2, A^3 和 $f(A)$, 其中 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$;

解 2.1.2. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, 2 = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.3

求与 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解 2.1.3. 设所求矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a-2b & a+2b \\ 3c-2d & c+2d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b=3a+c \\ a+2b=-2a+2c \\ 3c-2d=3b+d \\ c+2d=-2b+2d \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

例题 2.1.4

证明：与任意 n 阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵，即 $\mathbf{A} = k\mathbf{E}$

解 2.1.4. 考虑一个特殊的矩阵 \mathbf{E}_{ij} , 这个矩阵的第 i 行 j 列的元素是 1, 其余元素全为 0。并设矩阵 \mathbf{A} 与任意 n 阶矩阵都可交换, 那么它显然为 n 阶矩阵。那么 n 阶矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$ 满足第 j 列的元素为 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, 其余元素全为 0, 而 n 阶矩阵 $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$ 满足第 i 行的元素为 $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$, 其余元素全为 0。因此由于 $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$, 那么对于任意 $i \neq j, a_{ij} = 0$, 所以矩阵 \mathbf{A} 只有对角线上的元素不是 0, 其余元素全为 0。然后由于 \mathbf{E}_{ij} 中的 1 元素的位置任意, 所以矩阵 \mathbf{A} 对角线上的元素必须互相相同, 故与任意 n 阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵, 即 $\mathbf{A} = k\mathbf{E}$

例题 2.1.5

证明：若 \mathbf{A} 为实对称矩阵且 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 。

解 2.1.5. 设 \mathbf{A} 的行向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, 列向量为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ 。考虑到 $\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{A}$, 则 $\mathbf{0}$ 的第 i 行 j 列的元素是 $\alpha_i \cdot \beta_j$, 故任意 i, j 均有 $\alpha_i \cdot \beta_j = 0$ 。又因为 \mathbf{A} 为实对称矩阵, 所以 $\beta_j = \alpha_j$, 所以考虑当 $i = j$ 时, $\alpha_i^2 = 0$, 则 α_i 的元素均为 0, 故 \mathbf{A} 为 $\mathbf{0}$ 。

例题 2.1.6

证明：任一方阵可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和

解 2.1.6. 设 \mathbf{A} 为任意 $n \times n$ 方阵。定义两个矩阵：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \quad (2.2)$$

首先, 验证 S 是对称矩阵:

$$S^T = \left(\frac{1}{2}(A + A^T) \right)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = S$$

因此, S 是对称矩阵。

其次, 验证 K 是反对称矩阵:

$$K^T = \left(\frac{1}{2}(A - A^T) \right)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -K$$

因此, K 是反对称矩阵。

最后, 验证 $A = S + K$:

$$S + K = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}(2A) = A$$

故任一方阵 A 可分解为对称矩阵 S 和反对称矩阵 K 的和, 即 $A = S + K$ 。证明完毕。

例题 2.1.7

将 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵。

解 2.1.7. 第 2 行减去 2 倍第 1 行, 第 3 行减去 5 倍第 1 行, 第 4 行减去 7 倍第 1 行, 得到:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix}$$

第 3 行减去 2 倍第 2 行, 第 4 行减去 2 倍第 2 行, 交换第 3 行和第 4 行得到:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.8

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 用分块矩阵的方法求 A^2 。

解 2.1.8. 令 $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = \begin{pmatrix} B^2 & O \\ O & C^2 \end{pmatrix}$, 其中 O 为零矩阵。

计算得到 $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 13 & -6 \\ 5 & 28 & -13 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 10 & -13 & 3 \\ -13 & 46 & -13 \\ 3 & -13 & 10 \end{pmatrix}$. 故答案为

$$\begin{pmatrix} 2 & 13 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 28 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.9

计算下列矩阵的秩, 如果矩阵为满秩, 计算出矩阵的逆:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

解 2.1.9.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix}$$

则 $\det A \neq 0$ 矩阵的秩为 3, 矩阵为满秩, 下求逆矩阵:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

例题 2.1.10

求这个矩阵的逆, 其中 $a_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 2.1.10. 考虑矩阵将矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{a_n}$, 第二行乘以 $\frac{1}{a_1}$, 依此类推, 得到:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

将这个矩阵的第 n 行与第 $n-1$ 行交换, 再将第 $n-1$ 行与第 $n-2$ 行交换, 依此类推, 直到第 2 行与第 1 行交换, 得到:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

将矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{a_n}$, 第二行乘以 $\frac{1}{a_1}$, 依此类推, 得到:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{array} \right) \Rightarrow \text{逆矩阵为} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{array} \right)$$

例题 2.1.11

求矩阵 X 使得:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 2.1.11. 转化为求这个矩阵的逆:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{构造 } [A|E] = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

第 k 行减去第 $k+1$ 行, 即可消去第 k 行中第 $k+1$ 列及以后的所有 1, 得到:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

等式两边右乘以 A^{-1} , 得:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.12

$$\text{求解线性方程组: } \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1, \\ 3x_2 - 5x_3 = -4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

解 2.1.12. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -\frac{17}{20}, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{9}{10}.$$

最后一行是由于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$, 则 $x_1 = -\frac{17}{20}, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{9}{10}$

例题 2.1.13

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

解 2.1.13. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换

$$[\mathbf{A}|\mathbf{E}] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -13 & 6 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & -\frac{13}{2} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -29 & 13 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -29 & 13 & -2 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -29 & 13 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 & 5 \\ -10 & -72 & 33 \\ -24 & -159 & 73 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.14

求 $(k+l) \times (k+l)$ 矩阵 $\begin{pmatrix} E_k & B \\ O & E_l \end{pmatrix}$ 的逆, 其中 E_k 为 $k \times k$ 单位矩阵, E_l 为 $l \times l$ 单位矩阵.

解 2.1.14. 设逆矩阵为: $M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$, 其中 X 是 $k \times k$ 矩阵, Y 是 $k \times l$ 矩阵, Z 是 $l \times k$ 矩阵, W 是 $l \times l$ 矩阵. 计算矩阵乘积:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_k & B \\ O & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_k X + BZ & E_k Y + BW \\ OX + E_l Z & OY + E_l W \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X + BZ & Y + BW \\ Z & W \end{pmatrix} \end{aligned}$$

等式成立:

$$\begin{pmatrix} X + BZ & Y + BW \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_l \end{pmatrix}$$

得到方程组: $X + BZ = E_k$, $Y + BW = O$, $Z = O$, $W = E_l$, 因此, 逆矩阵为:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} E_k & -B \\ O & E_l \end{pmatrix}$$

例题 2.1.15

设 A, B, C 是同阶方阵, 其中 A, B 可逆, 求下列矩阵的逆:

$$D = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$$

解 2.1.15. 设逆矩阵为:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$$

其中 X, Y, Z, W 是与 A 同阶的方阵. 计算矩阵乘积:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} OX + AZ & OY + AW \\ BX + CZ & BY + CW \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此 $AZ = E, AW = O, BX + CZ = O, BY + CW = E$, 计算得到

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

例题 2.1.16

若 $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, 证明:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}$$

解 2.1.16. 设 $\mathbf{S} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}$, 计算乘积:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{S} &= \mathbf{E}(\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}) - \mathbf{A}(\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}) \\ &= (\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}) - (\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots + \mathbf{A}^k) \\ &= \mathbf{E} + (\mathbf{A} - \mathbf{A}) + (\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^2) + \cdots + (\mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^{k-1}) - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{E} + \mathbf{O} + \mathbf{O} + \cdots + \mathbf{O} - \mathbf{O} = \mathbf{E} \end{aligned}$$

例题 2.1.17

设 \mathbf{A} 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵, 证明 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

解 2.1.17. 由伴随矩阵的定义, 有:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$$

其中 \mathbf{E} 是 n 阶单位矩阵. 对等式 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$ 两边取行列式:

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^*| = ||\mathbf{A}|\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & |\mathbf{A}| \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|^n$$

分情况讨论: 当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时可以直接得到 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$. 当 $|\mathbf{A}| = 0$ 时, 则我们可以对矩阵 \mathbf{A} 进行初等变换使之变成阶梯型矩阵, 那么最后一行元素一定全为 0, 因此 $|\mathbf{A}|$ 中最多只有最后一行的元素对应的代数余子式非零, 所以 $|\mathbf{A}^*|$ 中一定有全为 0 的列, 所以 $|\mathbf{A}^*| = 0 = |\mathbf{A}|^{n-1}$, 综上所述, 无论 $|\mathbf{A}|$ 是否为零, 都有:

$$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$$

第三章 第三章作业

例题 3.0.1 16

求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点 O 及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 3.0.1. 根据题意, $\overrightarrow{OM_0} = (2, 9, -6)$ 为平面法向量, 设平面方程为 $2x + 9y - 6z + D = 0$, 代入 $M_0 = (2, 9, -6)$, 有 $2(2) + 9(9) - 6(-6) + D = 0$, 即 $D = -121$, 即 $2x + 9y - 6z - 121 = 0$ 为平面方程.

例题 3.0.2 18

求过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程.

解 3.0.2. 设平面方程为 $3x - 7y + 5z + D = 0$, 代入 $(3, 0, -1)$, 有 $3(3) - 7(0) + 5(-1) + D = 0 \Rightarrow D = -4$, 即 $3x - 7y + 5z - 4 = 0$ 为平面方程.

例题 3.0.3 20

求过点 $(4, 0, -2)$ 和点 $(5, 1, 7)$ 且平行于 x 轴的平面方程.

解 3.0.3. 设该平面的法向量为 $\vec{n} = (0, B, C)$, 则平面方程可以写为 $By + Cz + D = 0$, 代入 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$, 有 $B = -\frac{9D}{2}$, $C = \frac{D}{2}$, 取 $D = -2$, $B = 9$, $C = -1$, 即 $9y - z - 2 = 0$ 为平面方程.

例题 3.0.4 22

平面 $x - 2y + 3z + D = 0$, $-2x + 4y + Cz + 6 = 0$, 分别求出当两个平面平行和重合时的 C, D 值.

解 3.0.4. 当两个平面重合, 则它们等价, 则 $C = -6, D = -3$; 若两个平面平行, 则 $C = -6, D \neq -3$;

例题 3.0.5 25

求出经过点 $P(3, 1, 2)$ 且平行于平面 $x + y + z + 3 = 0, y - z + 1 = 0$ 的直线的对称式方程.

解 3.0.5. 直线的方向向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$, 则 $\vec{n} \cdot (1, 1, 1) = 0, \vec{n} \cdot (0, 1, -1) = 0$ 解得直线的方向向量为 $\vec{n} = (-2, 1, 1)$, 则其对称式方程为 $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$.

例题 3.0.6 27

$$(1) \text{ 求过直线 } \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ 和点 } (1, 2, -1) \text{ 的平面方程.}$$

$$(2) \text{ 求过直线 } \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \text{ 且与平面 } x + 2z = 1 \text{ 垂直的平面方程.}$$

解 3.0.6. (1) 该直线的方向向量为 $\vec{n}_1 = (3, 1, 2)$, 过点 $A(2, 2, 1)$, 设 $B(1, 2, -1)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -2)$, 设平面的法向量为 \vec{n} , 那么 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$, 解得 $\vec{n} = (-2, 4, 1)$, 则 $-2x + 4y + z + D = 0$ 为平面方程, 代入点 $A(2, 2, 1)$ 得到 $D = -5$, 所以 $2x - 4y - z + 5 = 0$ 为平面方程.

(2) 设平面方程为 $x + 3y - z + \lambda(x - y + z + 1) = 0$, 即

$$(1 + \lambda)x + (3 - \lambda)y + (\lambda - 1)z + \lambda = 0$$

法向量为 $\vec{n} = (1 + \lambda, 3 - \lambda, \lambda - 1)$, 垂直于 $\vec{n}_1 = (1, 0, 2)$, 解得 $\lambda = \frac{1}{3}$, 则平面方程为 $4x + 8y - 2z + 1 = 0$

例题 3.0.7 28

证明下列两条直线 l_1 和 l_2 共面, 并求它们所在的平面的方程.

$$l_1: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}, \quad l_2: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = 5 + 4t. \end{cases}$$

解 3.0.7. 将 l_1 化为参数方程 $\begin{cases} x = 7 + 3u \\ y = 2 + 2u \\ z = 1 - 2u \end{cases}$, 与 l_2 的参数方程联立得到 $t = 0, u = -2$, 所以两条直线的

交点为 $(1, -2, 5)$, 所以两条直线 l_1 和 l_2 共面, 设出平面的法向量为 \vec{n} , $\vec{n} \cdot (2, -3, 4) = 0, \vec{n} \cdot (3, 2, -2) = 0$, 解得 $\vec{n} = (2, -16, -13)$, 则 $2x - 16y - 13z + D = 0$ 为平面方程, 代入 $(1, -2, 5)$ 得到 $D = 31$, 所以 $2x - 16y - 13z + 31 = 0$ 为平面方程.

第四章 第四章作业

易错点：进行矩阵行变换时不能将上下两行同时加到中间的那一行上（通常是心血来潮），但是往往忽略了可能导致消掉了后面某一列的 0，而前面的某一列出现非 0 的数字

例题 4.0.1

$$\text{解线性方程组} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 10, \\ -x_2 - 13x_3 - 2x_4 + x_5 = -14, \\ x_3 - 16x_4 + 2x_5 = -11, \\ 2x_4 + 5x_5 = 12; \end{cases}$$

解 4.0.1. 构造增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & -3 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

例题 4.0.2

设 $\beta = (1, 2, 1, 1)$, $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, -1, -1)$, $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$. 试将 β 表示成向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合.

解 4.0.2. 构造增广矩阵并进行行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

解得 $k_1 = \frac{5}{4}, k_2 = \frac{1}{4}, k_3 = -\frac{1}{4}, k_4 = -\frac{1}{4}$, 所以

$$\beta = \frac{5}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4.$$

例题 4.0.3

设 $\alpha_1 = (3, -1, 1), \alpha_2 = (1, 1, 2), \alpha_3 = (1, -3, -3), \alpha_4 = (4, 0, 5)$.

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关;

(2) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.

解 4.0.3. (1) 证明 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$ 有非零解, 系数矩阵 A 与增广矩阵 \tilde{A} :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

取前三列写出行列式计算, 易得 $r(A) = r(\tilde{A})$ 所以有非零解, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

(2) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关, 构造系数矩阵:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix}$$

计算行列式, 得 $|A| \neq 0$, 所以 $r(A) = 3$, 与列数相等, 所以方程组无非零解, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.

例题 4.0.4

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 也线性无关.

解 4.0.4. 即证明

$$k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + k_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

只有零解, 即

$$(k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 也线性无关.

例题 4.0.5

\mathbb{R}^3 中, 由基 $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (1, -1, 1), \alpha_3 = (-1, 2, 1)$ 到基 $\beta_1 = (2, 0, 1), \beta_2 = (0, 1, 1), \beta_3 = (1, -1, 2)$ 的过渡矩阵?

解 4.0.5. 设

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

则设过渡矩阵为 $C, AC = B$, 则有 $C = A^{-1}B$, 所以由

$$A^{-1}(A|B) = (A^{-1}A|A^{-1}B) = (E|A^{-1}B)$$

且左乘一个可逆矩阵相当于作一系列初等行变换或列变换, 所以我们可以写出矩阵 $(A|B)$, 通过初等行变换得到 $A^{-1}B$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.625 & 0.125 & 0.125 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.125 & 0.625 & 0.375 \end{array} \right) \rightarrow \text{过渡矩阵为: } \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例题 4.0.6

已知 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 1)$ 和 $\beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (2, 3, 1), \beta_3 = (3, 1, 2)$ 是 \mathbb{R}^3 的两组基. (1) 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵; (2) 分别求向量 $\alpha = (1, 0, 1)$ 在这两组基下的坐标.

解 4.0.6. (1) 设 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则有 $AC = B$, 则有 $C = A^{-1}B$, 所以由

$$A^{-1}(A|B) = (A^{-1}A|A^{-1}B) = (E|A^{-1}B)$$

且左乘一个可逆矩阵相当于作一系列初等行变换或列变换，所以我们可以写出矩阵 $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ ，通过初等行变换得到 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ：

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

所以过渡矩阵为： $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 构造增广矩阵并进行行变换

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

所以向量 $\alpha = (1, 0, 1)$ 在基 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 1)$ 的坐标为 $(1, -1, 1)$;

(3) 构造增广矩阵并进行行变换

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -2 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array} \right) \end{aligned}$$

所以向量 $\alpha = (1, 0, 1)$ 在基 $\beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (2, 3, 1), \beta_3 = (3, 1, 2)$ 的坐标为 $(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$

例题 4.0.7

在 \mathbb{R}^3 中求向量 $\alpha = (3, 7, 1)$ 在基 $\alpha_1 = (1, 3, 5), \alpha_2 = (6, 3, 2), \alpha_3 = (3, 1, 0)$ 下的坐标

解 4.0.7. 构造矩阵进行初等行变换：

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & -2 \\ 0 & -28 & -15 & -14 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 \times 28 & -8 \times 28 & -2 \times 28 \\ 0 & -28 \times 15 & -15 \times 15 & -14 \times 15 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 \times 28 & -8 \times 28 & -2 \times 28 \\ 0 & 0 & -1 & -154 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -154 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & 0 & 1230 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -459 \\ 0 & -15 & 0 & 1230 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -459 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix}$$

坐标是 $(33, -82, 154)$

例题 4.0.8

在 \mathbb{R}^4 中找一个向量 γ , 使它在标准基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 和基 $\beta_1 = (2, 1, -1, 1), \beta_2 = (0, 3, 1, 0), \beta_3 = (5, 3, 2, 1), \beta_4 = (6, 6, 1, 3)$ 下有相同的坐标.

解 4.0.8. 设 $\gamma = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ 则

$$\begin{cases} 2k_1 + 5k_3 + 6k_4 = k_1 \\ k_1 + 3k_2 + 3k_3 + 6k_4 = k_2 \\ -k_1 + k_2 + 2k_3 + k_4 = k_3 \\ k_1 + k_3 + 3k_4 = k_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 5k_3 + 6k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 6k_4 = 0 \\ -k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_3 + 2k_4 = 0 \end{cases}$$

构建增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为只需要找到一个向量, 所以取 $k_4 = -1$, 则 $\gamma = (1, 1, 1, -1)$.