一个复不等式的证明

白朗

本文欲证明一个形式简洁的不等式：

定理 1

设 $a, b \in \mathbb{C}, p \geqslant 1$，则 $|a+b|^p \geqslant |a|^p + p\,|a|^{p-2}\,\mathrm{Re}\,(\bar{a}\cdot b)$.

事实上，定理 1 可推广如下：

定理 2

设 $a, b \in \mathbb{C}, p \geqslant 2$，则

$$|a+b|^p \geqslant |a|^p + p\,|a|^{p-2}\,\mathrm{Re}\,(\bar{a}\cdot b) + c_p\,|b|^p\,.$$

其中 $c_p := \min\limits_{0<\tau<1/2}((1-\tau)^p - \tau^p + p\tau^{p-1})$.

本文不给出定理 2 的证明，读者可参考：Rupert L. Frank and Robert Seiringer (2008). Non–linear ground state representations and sharp Hardy inequalities. J. Funct. Anal. 255, 3407–3430.

为证明定理 1，先证明一个引理：

引理

设 $p \geqslant 1$，则对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 及 $a \in \mathbb{C}$，有 $|a-t|^p \geqslant (1-t)^{p-1}\left(|a|^p - t\right).$ (1)

Proof. 首先固定 $|a|$，当 $|a|^p \leqslant t$ 时，RHS$\leqslant 0 \leqslant |a-t|^p$，命题成立.
当 $|a|^p > t$ 时，$|a| > t^{1/p} \geqslant t$，于是 $|a-t|^p \geqslant (|a|-t)^p$. 考虑 $f_1(x) = \frac{(x-t)^p}{x^p - t}\left(t^{1/p} < x \leqslant 1\right)$，则

$$f_1'(x) = \frac{pt\,(x-t)^{p-1}}{(x^p-t)^2}\left(x^{p-1}-1\right) \leqslant 0.$$

因此，$f_1(x) \geqslant f_1(1) = (1-t)^{p-1}$. 此即 $|a-t|^p \geqslant (1-t)^{p-1}\left(|a|^p - t\right).$ □

今设 $a = 1 + \varepsilon b_1, t = 1 - \varepsilon a_1$，其中 $b_1 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0, a_1 > 0$. 于是 (1) 化为

$$|a_1 + b_1|^p \geqslant a_1^p + \varepsilon^{-1} a_1^{p-1}\left(|1+\varepsilon b_1|^p - 1\right).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|1+\varepsilon b_1|^p - 1}{\varepsilon} = p \cdot \mathrm{Re}\left(\bar{b}_1\right),$$

所以 $|a_1+b_1|^p \geqslant |a_1|^p + p\,|a_1|^{p-2}\,\mathrm{Re}\,(\bar{a}_1 \cdot b_1)$.

现在考虑 $a_1 \in \mathbb{C}$ 的情形，记 $a_1 = |a_1|\,e^{i\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，则

$$\left||a_1| + b_1 e^{-i\theta}\right|^p \geqslant |a_1|^p + p\,|a_1|^{p-2}\,\mathrm{Re}\left(|a_1| \cdot b_1 e^{-i\theta}\right).$$

因此，$|a_1+b_1|^p \geqslant |a_1|^p + p\,|a_1|^{p-2}\,\mathrm{Re}\,(\bar{a}_1 \cdot b_1)$，定理 1 得证!