解答一个偏移题

（简单导数群题）设实数 $a>1$，方程 $e^x-x=a$ 的两个根为 $x_1,x_2,(x_1<x_2)$

证明：$x_1^2+x_2^2>a^2+\ln^2 a-\dfrac{\ln^2 a}{(a-1)^2}$；

将上题转化下，等价于下题，称之为偏移 36

（偏移 38）设实数 $m>1$，方程 $x-\ln x=m$ 的两个根为 $x_1,x_2,(x_1<x_2)$

证明：$\ln^2 x_1+\ln^2 x_2>m^2+\ln^2 m-\dfrac{\ln^2 m}{(m-1)^2}$；（2022-01-19-湖南长沙胡晓昊）

解：$\ln^2 x_1+\ln^2 x_2>m^2+\ln^2 m-\dfrac{\ln^2 m}{(m-1)^2}$

$$\Leftrightarrow (x_1-m)^2+(x_2-m)^2>m^2+\ln^2 m-\frac{\ln^2 m}{(m-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2-m)^2-2x_1x_2-\ln^2 m+\frac{\ln^2 m}{(m-1)^2}>0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2-m)^2-2e^{x_1+x_2-2m}-\ln^2 m+\frac{\ln^2 m}{(m-1)^2}>0$$

令 $t=x_1+x_2$，即证 $f(t)=(t-m)^2-2e^{t-2m}-\ln^2 m+\dfrac{\ln^2 m}{(m-1)^2}>0$

$f'(t)=2(t-m)-2e^{t-2m}$，$f''(t)=2(1-e^{t-2m})$，易知 $m+1<t<2m$，故 $f''(t)>0$

则 $f'(t)>f'(m+1)=2-2e^{1-m}>0$，则 $f(t)\uparrow$，要证 $f(t)>0$，只需寻找到 $t=x_1+x_2$ 较为紧凑的下界即可，之前曾经证明过偏移 7，详细证明在《昊天数学公众号》有介绍

（偏移 7）已知 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2=m,(x_1<x_2)$，求证：$x_1+x_2>m+\dfrac{1}{m}+\ln m$

故 $f(t)>f(m+\dfrac{1}{m}+\ln m)=\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{2\ln m}{m}-2me^{\frac{1}{m}-m}+\dfrac{\ln^2 m}{(m-1)^2}$

只需证 $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{2\ln m}{m}-2me^{\frac{1}{m}-m}+\dfrac{\ln^2 m}{(m-1)^2}>0$ 即可；

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2}+\frac{2\ln m}{m}+\frac{\ln^2 m}{(m-1)^2}>2me^{\frac{1}{m}-m}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{m^2}+\frac{2\ln m}{m}+\frac{\ln^2 m}{(m-1)^2}\right)>\ln\left(2me^{\frac{1}{m}-m}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{m^2}+\frac{2\ln m}{m}+\frac{\ln^2 m}{(m-1)^2}\right)-\ln\left(2me^{\frac{1}{m}-m}\right)>0$$

设 $g(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln^2 x}{(x-1)^2}\right)-\ln\left(2xe^{\frac{1}{x}-x}\right),(x>1)$

则 $g'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2(x-1)(x^2\ln^2 x+2x(x-1)^2\ln x+(x-1)^2)}$，其中

$$h(x)=\left(x^5+2x^3\right)\ln^2 x-\left(4x^4+x^2\right)\ln^2 x+2x(x-1)\left(x(x-1)\left(x^2-3x+4\right)+1\right)\ln x$$
$$+\left(3x^2-3x+1\right)(x-1)^3$$

为此我们只需证明 $h(x)>0$ 即可，

易证 $x>1$ 时 $\dfrac{12(x-1)^2}{x^2+10x+1}\le\ln^2 x\le\dfrac{(x-1)^2}{x}$，且 $\ln x>\dfrac{3\left(x^2-1\right)}{x^2+4x+1}$

故

$$h(x)>\left(x^5+2x^3\right)\cdot\frac{12(x-1)^2}{x^2+10x+1}-\left(4x^4+x^2\right)\frac{(x-1)^2}{x}+2x(x-1)\left(x(x-1)\left(x^2-3x+4\right)+1\right)\frac{3\left(x^2-1\right)}{x^2+4x+1}$$
$$+\left(3x^2-3x+1\right)(x-1)^3$$
$$=\frac{(x-1)^3\left(6x^7+59x^6-69x^5+24x^4+75x^3-30x^2+6x+1\right)}{\left(x^2+10x+1\right)\left(x^2+4x+1\right)}>0$$

故原题得证！