



华南理工大学

South China University of Technology

# 线性代数 and 解析几何 作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 12 月 27 日

厚德尚学 自强不息  
务实创新 追求卓越

# 目录

第一章	行列式	1
1.1	第 1 周作业 . . . . .	1
1.2	第 2 周作业 . . . . .	10
第二章	矩阵	16
2.1	第 1 周作业 . . . . .	17
第三章	空间向量	27
第四章	线性方程组解的结构	29
第五章	特征值和特征向量	42
第六章	二次型的标准形与规范形	55

# 第一章 行列式

## 1.1 第 1 周作业

### 例题 1.1.1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \dots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \dots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \dots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.1. 设  $x_i = \cos \theta_i$ , 利用第一类切比雪夫多项式  $T_k(x)$  满足  $T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$ , 则行列式可视为矩阵  $(T_{j-1}(x_i))_{i,j=1}^n$  的行列式。存在上三角矩阵  $C$  使得  $(T_0(x), T_1(x), \dots, T_{n-1}(x)) = (1, x, \dots, x^{n-1})C$ , 且  $C$  的主对角线元素为  $c_{11} = 1, c_{22} = 1, c_{jj} = 2^{j-2} (j \geq 3)$ , 故  $\det C = 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$ 。另一方面, Vandermonde 行列式  $\det(x_i^{j-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ 。因此

$$D = \det C \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

当  $n = 1$  时, 右端理解为 1。

### 例题 1.1.2

$$D = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \dots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \dots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \dots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.2. 利用恒等式  $\sin(k\theta) = \sin \theta \cdot U_{k-1}(\cos \theta)$ , 其中  $U_{k-1}$  是第二类切比雪夫多项式。设  $x_i = \cos \theta_i$ , 则

$$D = \left( \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \right) \cdot \det(U_{j-1}(x_i))_{i,j=1}^n.$$

存在上三角矩阵  $D$  使得  $(U_0(x), U_1(x), \dots, U_{n-1}(x)) = (1, x, \dots, x^{n-1})D$ , 且  $D$  的主对角线元素为  $d_{jj} = 2^{j-1}$ , 故  $\det D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 。而  $\det(x_i^{j-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ , 所以

$$\det(U_{j-1}(x_i)) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

因此

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \left( \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

当  $n = 1$  时, 右端空乘积理解为 1, 指数为 0, 与  $D = \sin \theta_1$  一致。

习题一第一大题的第 (1) (3) (5) 问解答如下:

### 例题 1.1.3 (习题一第一大题)

计算行列式的值  $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

解 1.1.3. (1) 原式  $= \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1$ .

(2) 由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} &= 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 \\ &\quad - 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 - 3 \times 5 \times 7 \\ &= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 \\ &= 225 - 225 = 0. \end{aligned}$$

实际上第三行是第二行各数的两倍减去第一行各数得到的, 因此第三行是第一行和第二行的线性组合, 所以矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

的行向量线性相关, 行列式的值为 0.

(3) 仍然由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} &= x^3 + y^3 + y^3 - xy^2 - xy^2 - xy^2 \\ &= x^3 + 2y^3 - 3xy^2. \end{aligned}$$

实际上这个结果可以推广的, 下面定理的证明运用了行列式的线性性质和递归分解的思想。

### 定理 1.1.1

将  $n$  阶行列式  $D$  中每个元  $a_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 都加上参数  $t$ , 得到新行列式  $D(t)$ , 则:

$$D(t) = D + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} t \Leftrightarrow D = D(t) - t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

其中  $A_{ij}$  是  $a_{ij}$  的代数余子式.

证明. 将  $D(t)$  中的第一列拆开, 得到的新行列式记为  $D_1(t)$ , 则:

$$\begin{aligned}
 D_1(t) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix} \\
 D(t) &= D_1(t) + \begin{vmatrix} t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix} = D_1(t) + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= t \sum_{i=1}^n A_{i1} + D_1(t) = t \sum_{i=1}^n A_{i1} + t \sum_{i=1}^n A_{i2} + D_2(t) \\
 &= t \sum_{i=1}^n A_{i1} + t \sum_{i=1}^n A_{i2} + t \sum_{i=1}^n A_{i3} + D_3(t) \\
 &= \cdots = t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} + D.
 \end{aligned}$$

□

下面推广一下上面那道例题:

#### 例题 1.1.4

求  $n$  阶行列式的值 ( $a \neq b$ ):

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

**解 1.1.4.** 原题只有第一个行列式, 笔者将其进行了转置, 得到第二个行列式, 目的是方便进行证明, 这里运用了“对偶”的思想。这样就可以轻松写出:

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & b - a & \cdots & b - a \\ 0 & x_2 - a & \cdots & b - a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a)$$

$$D(-b) = \begin{vmatrix} x_1 - b & a - b & \cdots & a - b \\ 0 & x_2 - b & \cdots & a - b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - b)$$

因此:

$$D = \prod_{i=1}^n (x_i - a) + (-a) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = \prod_{i=1}^n (x_i - b) + (-b) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

容易发现,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

取决于原来的行列式本身, 与引入的参数无关 (因为我们是一列一列地拆出参数, 而恰好在取代数余子式时避开了含有参数的列), 因此上述公式构成二元一次线性方程组, 由此可以解得:

$$D = \frac{a}{a-b} \prod_{i=1}^n (x_i - b) - \frac{b}{a-b} \prod_{i=1}^n (x_i - a).$$

### 例题 1.1.5

求  $n$  阶行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.5. 直接套结论:

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a)$$

则:

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

其中对于  $A_{ij}$  而言, 由于只有对角线上的数不是 0, 因此如果不取对角线上的数写代数余子式, 那么由于系数是 0, 行列式无论是什么都不会影响结果

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \prod_{k \neq i} (x_k - a) & i = j \end{cases}$$

所以：

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = D(-a) + a \sum_{i=1}^n A_{ii} = \prod_{i=1}^n (x_i - a) + a \sum_{i=1}^n \prod_{k \neq i} (x_k - a).$$

我们再补充一个例子：

### 例题 1.1.6

求  $n$  阶行列式的值 ( $a \neq b$ ):

$$D = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & 0 \\ a & a & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & b & b \\ 0 & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

解 1.1.6.

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = D(-b) + b \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

其中：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \\ 0 & 0 & \cdots & -a & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & \cdots & b-a & b-a \\ -a & b-a & \cdots & b-a & b-a \end{vmatrix}$$

然后使用定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

就可以得到：

$$D(-a) = (-a)^{1+2+3+4+\cdots+n-1} (-a)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^n$$

$$D(-b) = (-b)^{1+2+3+4+\cdots+n-1} (-b)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} b^n$$

当  $a \neq b$  时，

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{ab^n - ba^n}{a-b} = (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}} (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1})$$

再补充一个例子：

## 例题 1.1.7 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 1.1.7. 每一列的和是  $a + (n-1)b$ , 可把每一行都加到第一列, 提取公因式  $a + (n-1)b$ :

$$\begin{vmatrix} a + (n-1)b & a + (n-1)b & a + (n-1)b & \cdots & a + (n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

或者我们可以使用加边法:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & b & \cdots & b \\ 0 & b & a & b & \cdots & b \\ 0 & b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \frac{nb}{a-b} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

习题一第二大题的第 (1) (2) 问解答如下:



## 例题 1.1.8 (习题一第二大题: 证明恒等式)

$$(1) \begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

解 1.1.8. (1) 由于行列式阶数较低, 考虑直接展开即可完成证明:

$$\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = a(d+y) - c(b+x) = ad - bc + ay - cx = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}$$

(2) 直接按列展开即可完成证明:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

## 例题 1.1.9 (习题一第三大题)

借助行列式的知识解方程组:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

解 1.1.9. 写出各个行列式并应用克莱默法则, 每一个行列式都可以由沙路法则或者对其进行行变换得出结果:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4 - 3 - 2 + 16 = 17$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 34 + 12 + 6 - 6 + 136 = 102$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 34$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 119$$

故解方程组:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{102}{17} = 6, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{34}{17} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{119}{17} = 7.$$

### 例题 1.1.10 (习题一第 5 大题)

若排列  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$  的逆序数为  $m$ , 求排列  $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_1$  的逆序数。

解 1.1.10. 排列  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$  的逆序数为  $m$  指这个排列的逆序数对的数量为  $m$ , 而数对一共有

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

种, 所以排列  $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_1$  的逆序数为

$$\binom{n}{2} - m = \frac{n(n-1)}{2} - m.$$

### 例题 1.1.11 (习题一第 6 大题)

求下面各个排列的逆序数并判断排列的奇偶性:

$$(1) 26538417 \quad (2) n(n-1)(n-2)\dots 1 \quad (3) 2n(2n-2)(2n-4)\dots 2(2n-1)(2n-3)\dots 1.$$

解 1.1.11. (1) 逆序数为  $1 + 4 + 3 + 1 + 3 + 1 = 13$ , 奇排列。(2) 逆序数为

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

设  $k \in \mathbb{N}_+$  当  $n = 4k, 4k+1$  时, 为偶排列, 当  $n = 4k+2, 4k+3$  时, 为奇排列。(3) 逆序数为

$$(2n-1) + (2n-3) + \dots + 1 + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

当  $n \equiv 0(\text{mod } 4)$  或  $n \equiv 3(\text{mod } 4)$  时, 为偶排列; 当  $n \equiv 1(\text{mod } 4)$  或  $n \equiv 2(\text{mod } 4)$  时, 为奇排列。

### 例题 1.1.12 (习题一第 10 大题)

用行列式的定义计算:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 1.1.12. (1) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\tau(2143)abde + \tau(4123)abce = abde - abce = abe(d - c)$$

(2) 我们自上而下地按每一列来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D &= \tau(1n(n-1)(n-2)\dots 2)a_{11}a_{2n}a_{3,n-1}\dots a_{n-1,n-1}, a_{n,2} \\ &= a_{11}(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_{2n} \cdots a_{n2} \end{aligned}$$

(3) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D &= \tau(n123\dots(n-1))a_n \\ &= (-1)^{(n-1)}a_n \end{aligned}$$

## 1.2 第 2 周作业

## 例题 1.2.1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n, \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n$$

解 1.2.1. (1) 进行行列式的行变换, 再按行展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = 68$$

(2) 观察到所有列的元素和相同, 所以同时相减:

$$\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & x-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & x-a \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}_n$$

$$= \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a+(n-1)x \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a+(n-1)x) (a-x)^{n-1}$$

(3) 一样的道理, 当  $a \neq 0$  时, 将前  $n-1$  列的元素乘以  $-\frac{x}{a}$  加到最后一列上, 再利用定义计算:

$$D = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a-(n-1)\frac{x^2}{a} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a^n - (n-1)x^2 a^{n-2}).$$

当  $a = 0$  时, 显然

$$D = \begin{cases} x, & n = 1 \\ x^2, & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

### 例题 1.2.2 证明等式

$$(1) \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ z_1 + x_1 & z_2 + x_2 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = \left[ a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \right] (a-1)^{n-1}$$

解 1.2.2. (1) 先转置, 再一点点拆出来:

$$\begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ z_1 + x_1 & z_2 + x_2 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 + y_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix}$$

然后把最后一列数加到第一行, 再减去第二列数:

$$= \begin{vmatrix} 2x_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ 2x_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ 2x_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix}$$

然后将第三列数减去第一列数, 再乘以  $-1$  加到第二列数上:

$$= 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 + z_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 + z_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 + z_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(2) 套路式地将第二行, 第三行... 第  $n$  行分别减去第一行:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

再将第 2 列到第  $n$  列地数依次加到第一列上：

$$= \begin{vmatrix} a + \frac{(n+2)(n-1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = \left( a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \right) (a-1)^{n-1}$$

### 例题 1.2.3 计算行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & 49 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n, \quad (3) \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n$$

解 1.2.3. (1) 直接计算即可：

$$\begin{vmatrix} 7 & 49 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 7 & 49 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ = 20 \begin{vmatrix} 0 & -6 & 8 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 0 & -6 & 8 \\ 0 & 3.5 & 3.5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -40 \begin{vmatrix} -6 & 8 \\ 3.5 & 3.5 \end{vmatrix} = 1960.$$

(2) 使用分割法，分别构造上三角行列式和下三角行列式，则

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \end{vmatrix}_{n-1} \\ = x^n + (-1)^{n+1} y^n = x^n - (-y)^n$$

当然这题也可以用行变换先行处理, 将第  $k$  行乘以  $-\frac{y}{x}$  再添加到第  $k+1$  行:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & y(-\frac{y}{x}) \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & y(-\frac{y}{x})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y(\frac{y}{x})^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x + y(-\frac{y}{x})^{n-1} \end{vmatrix} = x^{n-1} \left( x + y(-\frac{y}{x})^{n-1} \right) = x^n - (-y)^n$$

(3) 这题可以递推法来做:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = x \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - y \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= x \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - yz \begin{vmatrix} x & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-2} = xD_{n-1} - yzD_{n-2} \end{aligned}$$

而  $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$ , 列出特征方程:  $r^2 - xr + yz = 0$ , 则分类:

当判别式为 0 时, 根为  $\frac{x}{2}$ , 则  $D_n = (A + Bn)(\frac{x}{2})^n$ , 代入  $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz = \frac{3}{4}x^2$  得到

$$D_n = (n+1) \left( \frac{x}{2} \right)^n$$

当判别式不为 0 时, 根为  $r_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}, r_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}$ , 则  $D_n = Ar_1^n + Br_2^n$ , 代入  $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$  得到

$$\begin{cases} A = \frac{\sqrt{x^2 - 4yz} + x}{2\sqrt{x^2 - 4yz}} \\ B = \frac{\sqrt{x^2 - 4yz} - x}{2\sqrt{x^2 - 4yz}} \end{cases} \Rightarrow D_n = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2 - 4yz}}$$

综上:

$$D_n = \begin{cases} (n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n & , x^2 = 4yz \\ \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2 - 4yz}} & , x^2 \neq 4yz \end{cases}$$

### 例题 1.2.4 求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

解 1.2.4. 分别计算可得:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ 18 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 39$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 13$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -14 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 14 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 8 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



所以解为:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}, x_4 = 0$$

例题 1.2.5 如果齐次线性方程组有非零解, 求  $\lambda$  的取值

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ \lambda^2 x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

解 1.2.5. 考虑系数行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-2\lambda \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda)(1-\lambda) = 0$$

所以  $\lambda = \frac{1}{2}$  或 1.

## 第二章 矩阵

## 2.1 第 1 周作业

## 例题 2.1.1

求  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$

解 2.1.1. 因为

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \sin n\alpha & -\sin \alpha \cos n\alpha - \cos \alpha \sin n\alpha \\ \sin \alpha \cos n\alpha + \cos \alpha \sin n\alpha & \cos \alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \sin n\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以答案是  $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

## 例题 2.1.2

令  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 计算

(1)  $A^2, A^3$  和  $f(A)$ , 其中  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$ ;

解 2.1.2.  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $2 = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

## 例题 2.1.3

求与  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  可交换的所有矩阵.

解 2.1.3. 设所求矩阵为  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a-2b & a+2b \\ 3c-2d & c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b=3a+c \\ a+2b=-2a+2c \\ 3c-2d=3b+d \\ c+2d=-2b+2d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$$

#### 例题 2.1.4

证明: 与任意  $n$  阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵, 即  $\mathbf{A} = k\mathbf{E}$

解 2.1.4. 考虑一个特殊的矩阵  $\mathbf{E}_{ij}$ , 这个矩阵的第  $i$  行  $j$  列的元素是 1, 其余元素全为 0。并设矩阵  $\mathbf{A}$  与任意  $n$  阶矩阵都可交换, 那么它显然为  $n$  阶矩阵。那么  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$  满足第  $j$  列的元素为  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ , 其余元素全为 0, 而  $n$  阶矩阵  $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$  满足第  $i$  行的元素为  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ , 其余元素全为 0。因此由于  $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$ , 那么对于任意  $i \neq j, a_{ij} = 0$ , 所以矩阵  $\mathbf{A}$  只有对角线上的元素不是 0, 其余元素全为 0。然后由于  $\mathbf{E}_{ij}$  中的 1 元素的位置任意, 所以矩阵  $\mathbf{A}$  对角线上的元素必须互相相同, 故与任意  $n$  阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵, 即  $\mathbf{A} = k\mathbf{E}$

#### 例题 2.1.5

证明: 若  $\mathbf{A}$  为实对称矩阵且  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ , 则  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 。

解 2.1.5. 设  $\mathbf{A}$  的行向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , 列向量为  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ 。考虑到  $\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{A}$ , 则  $\mathbf{0}$  的第  $i$  行  $j$  列的元素是  $\alpha_i \cdot \beta_j$ , 故任意  $i, j$  均有  $\alpha_i \cdot \beta_j = 0$ 。又因为  $\mathbf{A}$  为实对称矩阵, 所以  $\beta_j = \alpha_j$ , 所以考虑当  $i = j$  时,  $\alpha_i^2 = 0$ , 则  $\alpha_i$  的元素均为 0, 故  $\mathbf{A}$  为  $\mathbf{0}$ 。

#### 例题 2.1.6

证明: 任一方阵可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和

解 2.1.6. 设  $\mathbf{A}$  为任意  $n \times n$  方阵。定义两个矩阵:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \quad (2.2)$$

首先, 验证  $S$  是对称矩阵:

$$S^T = \left( \frac{1}{2}(A + A^T) \right)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = S$$

因此,  $S$  是对称矩阵。

其次, 验证  $K$  是反对称矩阵:

$$K^T = \left( \frac{1}{2}(A - A^T) \right)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -K$$

因此,  $K$  是反对称矩阵。

最后, 验证  $A = S + K$ :

$$S + K = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}(2A) = A$$

故任一方阵  $A$  可分解为对称矩阵  $S$  和反对称矩阵  $K$  的和, 即  $A = S + K$ 。证明完毕。

### 例题 2.1.7

将  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$  化为阶梯形矩阵.

解 2.1.7. 第 2 行减去 2 倍第 1 行, 第 3 行减去 5 倍第 1 行, 第 4 行减去 7 倍第 1 行, 得到:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix}$$

第 3 行减去 2 倍第 2 行, 第 4 行减去 2 倍第 2 行, 交换第 3 行和第 4 行得到:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 例题 2.1.8

已知  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 用分块矩阵的方法求  $A^2$ .

解 2.1.8. 令  $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$ , 则  $A^2 = \begin{pmatrix} B^2 & O \\ O & C^2 \end{pmatrix}$ , 其中  $O$  为零矩阵。

计算得到  $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 13 & -6 \\ 5 & 28 & -13 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $C^2 = \begin{pmatrix} 10 & -13 & 3 \\ -13 & 46 & -13 \\ 3 & -13 & 10 \end{pmatrix}$ . 故答案为

$$\begin{pmatrix} 2 & 13 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 28 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

## 例题 2.1.9

计算下列矩阵的秩, 如果矩阵为满秩, 计算出矩阵的逆:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

解 2.1.9.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix}$$

则  $\det \mathbf{A} \neq 0$  矩阵的秩为 3, 矩阵为满秩, 下求逆矩阵:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

所以

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

### 例题 2.1.10

求这个矩阵的逆, 其中  $a_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 2.1.10. 考虑矩阵将矩阵的第 1 行乘以  $\frac{1}{a_n}$ , 第二行乘以  $\frac{1}{a_1}$ , 依此类推, 得到:

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

将这个矩阵的第  $n$  行与第  $n-1$  行交换, 再将第  $n-1$  行与第  $n-2$  行交换, 依此类推, 直到第 2

行与第 1 行交换，得到：

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

将矩阵的第 1 行乘以  $\frac{1}{a_n}$ ，第二行乘以  $\frac{1}{a_1}$ ，依此类推，得到：

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{array} \right) \Rightarrow \text{逆矩阵为} \left( \begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

### 例题 2.1.11

求矩阵  $\mathbf{X}$  使得：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 2.1.11. 转化为求这个矩阵的逆：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{构造} [\mathbf{A}|\mathbf{E}] = \left( \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$



第  $k$  行减去第  $k+1$  行，即可消去第  $k$  行中第  $k+1$  列及以后的所有 1，得到：

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

等式两边右乘以  $\mathbf{A}^{-1}$ ，得：

$$\mathbf{X} = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

## 例题 2.1.12

求解线性方程组: 
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1, \\ 3x_2 - 5x_3 = -4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

解 2.1.12. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -\frac{17}{20}, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{9}{10}.$$

最后一行是由于  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$ , 则  $x_1 = -\frac{17}{20}, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{9}{10}$

## 例题 2.1.13

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{-1}B$ .

解 2.1.13. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换  $[A|E] =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & | & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -13 & 6 & | & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & \frac{29}{2} & -\frac{13}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -29 & 13 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -13 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -29 & 13 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -29 & 13 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 & 5 \\ -10 & -72 & 33 \\ -24 & -159 & 73 \end{pmatrix}$$

## 例题 2.1.14

求  $(k+l) \times (k+l)$  矩阵  $\begin{pmatrix} E_k & B \\ O & E_l \end{pmatrix}$  的逆, 其中  $E_k$  为  $k \times k$  单位矩阵,  $E_l$  为  $l \times l$  单位矩阵.

解 2.1.14. 设逆矩阵为:  $M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ , 其中  $X$  是  $k \times k$  矩阵,  $Y$  是  $k \times l$  矩阵,  $Z$  是  $l \times k$  矩阵,  $W$  是  $l \times l$  矩阵. 计算矩阵乘积:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_k & B \\ O & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_k X + BZ & E_k Y + BW \\ OX + E_l Z & OY + E_l W \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X + BZ & Y + BW \\ Z & W \end{pmatrix} \end{aligned}$$

等式成立:

$$\begin{pmatrix} X + BZ & Y + BW \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_l \end{pmatrix}$$

得到方程组:  $X + BZ = E_k$ ,  $Y + BW = O$ ,  $Z = O$ ,  $W = E_l$ , 因此, 逆矩阵为:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} E_k & -B \\ O & E_l \end{pmatrix}$$

## 例题 2.1.15

设  $A, B, C$  是同阶方阵, 其中  $A, B$  可逆, 求下列矩阵的逆:

$$D = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$$

解 2.1.15. 设逆矩阵为:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$$

其中  $X, Y, Z, W$  是与  $A$  同阶的方阵. 计算矩阵乘积:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} OX + AZ & OY + AW \\ BX + CZ & BY + CW \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此  $AZ = E, AW = O, BX + CZ = O, BY + CW = E$ , 计算得到

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

## 例题 2.1.16

若  $A^k = O$ , 证明:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

解 2.1.16. 设  $S = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ , 计算乘积:

$$\begin{aligned} (E - A)S &= E(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - A(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\ &= (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - (A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k) \\ &= E + (A - A) + (A^2 - A^2) + \cdots + (A^{k-1} - A^{k-1}) - A^k \\ &= E + O + O + \cdots + O - O = E \end{aligned}$$

## 例题 2.1.17

设  $A$  为  $n(n \geq 2)$  阶方阵, 证明  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

解 2.1.17. 由伴随矩阵的定义, 有:

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

其中  $E$  是  $n$  阶单位矩阵. 对等式  $AA^* = |A|E$  两边取行列式:

$$|AA^*| = |A||A^*| = ||A|E| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^n$$

分情况讨论: 当  $|A| \neq 0$  时可以直接得到  $|A^*| = |A|^{n-1}$ . 当  $|A| = 0$  时, 则我们可以对矩阵  $A$  进行初等变换使之变成阶梯型矩阵, 那么最后一行元素一定全为 0, 因此  $|A|$  中最多只有最后一行的元素对应的代数余子式非零, 所以  $|A^*|$  中一定有全为 0 的列, 所以  $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$ , 综上所述, 无论  $|A|$  是否为零, 都有:

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

## 第三章 空间向量

### 例题 3.0.1 16

求过点  $M_0(2, 9, -6)$  且与连接坐标原点  $O$  及点  $M_0$  的线段  $OM_0$  垂直的平面方程.

解 3.0.1. 根据题意,  $\overrightarrow{OM_0} = (2, 9, -6)$  为平面法向量, 设平面方程为  $2x + 9y - 6z + D = 0$ , 代入  $M_0 = (2, 9, -6)$ , 有  $2(2) + 9(9) - 6(-6) + D = 0$ , 即  $D = -121$ , 即  $2x + 9y - 6z - 121 = 0$  为平面方程.

### 例题 3.0.2 18

求过点  $(3, 0, -1)$  且与平面  $3x - 7y + 5z - 12 = 0$  平行的平面方程.

解 3.0.2. 设平面方程为  $3x - 7y + 5z + D = 0$ , 代入  $(3, 0, -1)$ , 有  $3(3) - 7(0) + 5(-1) + D = 0 \Rightarrow D = -4$ , 即  $3x - 7y + 5z - 4 = 0$  为平面方程.

### 例题 3.0.3 20

求过点  $(4, 0, -2)$  和点  $(5, 1, 7)$  且平行于  $x$  轴的平面方程.

解 3.0.3. 设该平面的法向量为  $\vec{n} = (0, B, C)$ , 则平面方程可以写为  $By + Cz + D = 0$ , 代入  $(4, 0, -2)$  和  $(5, 1, 7)$ , 有  $B = -\frac{9D}{2}$ ,  $C = \frac{D}{2}$ , 取  $D = -2$ ,  $B = 9$ ,  $C = -1$ , 即  $9y - z - 2 = 0$  为平面方程.

### 例题 3.0.4 22

平面  $x - 2y + 3z + D = 0$ ,  $-2x + 4y + Cz + 6 = 0$ , 分别求出当两个平面平行和重合时的  $C, D$  值.

解 3.0.4. 当两个平面重合, 则它们等价, 则  $C = -6, D = -3$ ; 若两个平面平行, 则  $C = -6, D \neq -3$ ;

### 例题 3.0.5 25

求出经过点  $P(3, 1, 2)$  且平行于平面  $x + y + z + 3 = 0$ ,  $y - z + 1 = 0$  的直线的对称式方程.

解 3.0.5. 直线的方向向量为  $\vec{n} = (a, b, c)$ , 则  $\vec{n} \cdot (1, 1, 1) = 0$ ,  $\vec{n} \cdot (0, 1, -1) = 0$  解得直线的方向向量为  $\vec{n} = (-2, 1, 1)$ , 则其对称式方程为  $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ .

## 例题 3.0.6 27

- (1) 求过直线  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$  和点  $(1, 2, -1)$  的平面方程.
- (2) 求过直线  $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$  且与平面  $x + 2z = 1$  垂直的平面方程.

解 3.0.6. (1) 该直线的方向向量为  $\vec{n}_1 = (3, 1, 2)$ , 过点  $A(2, 2, 1)$ , 设  $B(1, 2, -1)$ , 则  $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -2)$ , 设平面的法向量为  $\vec{n}$ , 那么  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ,  $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$ , 解得  $\vec{n} = (-2, 4, 1)$ , 则  $-2x + 4y + z + D = 0$  为平面方程, 代入点  $A(2, 2, 1)$  得到  $D = -5$ , 所以  $2x - 4y - z + 5 = 0$  为平面方程.

(2) 设平面方程为  $x + 3y - z + \lambda(x - y + z + 1) = 0$ , 即

$$(1 + \lambda)x + (3 - \lambda)y + (\lambda - 1)z + \lambda = 0$$

法向量为  $\vec{n} = (1 + \lambda, 3 - \lambda, \lambda - 1)$ , 垂直于  $\vec{n}_1 = (1, 0, 2)$ , 解得  $\lambda = \frac{1}{3}$ , 则平面方程为  $4x + 8y - 2z + 1 = 0$

## 例题 3.0.7 28

证明下列两条直线  $l_1$  和  $l_2$  共面, 并求它们所在的平面的方程.

$$l_1: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}, \quad l_2: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = 5 + 4t. \end{cases}$$

解 3.0.7. 将  $l_1$  化为参数方程  $\begin{cases} x = 7 + 3u \\ y = 2 + 2u \\ z = 1 - 2u \end{cases}$ , 与  $l_2$  的参数方程联立得到  $t = 0, u = -2$ , 所以两条直线的交点为  $(1, -2, 5)$ , 所以两条直线  $l_1$  和  $l_2$  共面, 设出平面的法向量为  $\vec{n}$ ,  $\vec{n} \cdot (2, -3, 4) = 0$ ,  $\vec{n} \cdot (3, 2, -2) = 0$ , 解得  $\vec{n} = (2, -16, -13)$ , 则  $2x - 16y - 13z + D = 0$  为平面方程, 代入  $(1, -2, 5)$  得到  $D = 31$ , 所以  $2x - 16y - 13z + 31 = 0$  为平面方程.

## 第四章 线性方程组解的结构

易错点：进行矩阵行变换时不能将上下两行同时加到中间的那一行上（通常是心血来潮），但是往往忽略了可能导致消掉了后面某一列的 0，而前面的某一列出现非 0 的数字

## 例题 4.0.1

$$\text{解线性方程组} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 10, \\ -x_2 - 13x_3 - 2x_4 + x_5 = -14, \\ x_3 - 16x_4 + 2x_5 = -11, \\ 2x_4 + 5x_5 = 12; \end{cases}$$

解 4.0.1. 构造增广矩阵

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & -3 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

## 例题 4.0.2

设  $\beta = (1, 2, 1, 1)$ ,  $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, -1, -1)$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)$ ,  $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$ .  
试将  $\beta$  表示成向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的线性组合.

解 4.0.2. 构造增广矩阵并进行行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$



解得  $k_1 = \frac{5}{4}, k_2 = \frac{1}{4}, k_3 = -\frac{1}{4}, k_4 = -\frac{1}{4}$ , 所以

$$\beta = \frac{5}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4.$$

### 例题 4.0.3

设  $\alpha_1 = (3, -1, 1), \alpha_2 = (1, 1, 2), \alpha_3 = (1, -3, -3), \alpha_4 = (4, 0, 5)$ .

(1) 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关;

(2) 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  线性无关.

解 4.0.3. (1) 证明  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$  有非零解, 系数矩阵  $A$  与增广矩阵  $\tilde{A}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

取前三列写出行列式计算, 易得  $r(A) = r(\tilde{A})$  所以有非零解,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关.

(2) 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  线性无关, 构造系数矩阵:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix}$$

计算行列式, 得  $|A| \neq 0$ , 所以  $r(A) = 3$ , 与列数相等, 所以方程组无非零解,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  线性无关.

### 例题 4.0.4

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关. 证明: 向量组  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  也线性无关.

解 4.0.4. 即证明

$$k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + k_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

只有零解, 即

$$(k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$$

由于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

所以向量组  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  也线性无关.

## 例题 4.0.5

$\mathbb{R}^3$  中, 由基  $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (1, -1, 1), \alpha_3 = (-1, 2, 1)$  到基  $\beta_1 = (2, 0, 1), \beta_2 = (0, 1, 1), \beta_3 = (1, -1, 2)$  的过渡矩阵?

解 4.0.5. 设

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

则设过渡矩阵为  $C, AC = B$ , 则有  $C = A^{-1}B$ , 所以由

$$A^{-1}(A|B) = (A^{-1}A|A^{-1}B) = (E|A^{-1}B)$$

且左乘一个可逆矩阵相当于作一系列初等行变换或列变换, 所以我们可以写出矩阵  $(A|B)$ , 通过初等行变换得到  $A^{-1}B$ :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.625 & 0.125 & 0.125 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.125 & 0.625 & 0.375 \end{array} \right) \\ & \text{过渡矩阵为: } \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 例题 4.0.6

已知  $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 1)$  和  $\beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (2, 3, 1), \beta_3 = (3, 1, 2)$  是  $\mathbb{R}^3$  的两组基. (1) 求从基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵; (2) 分别求向量  $\alpha = (1, 0, 1)$  在这两组基下的坐标.

解 4.0.6. (1) 设  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则有  $AC = B$ , 则有  $C = A^{-1}B$ , 所以由

$$A^{-1}(A|B) = (A^{-1}A|A^{-1}B) = (E|A^{-1}B)$$

且左乘一个可逆矩阵相当于作一系列初等行变换或列变换, 所以我们可以写出矩阵  $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ , 通过初等行变换得到  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ :

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

所以过渡矩阵为:  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 构造增广矩阵并进行行变换

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

所以向量  $\alpha = (1, 0, 1)$  在基  $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 1)$  的坐标为  $(1, -1, 1)$ ;

(3) 构造增广矩阵并进行行变换

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -2 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array} \right) \end{aligned}$$

所以向量  $\alpha = (1, 0, 1)$  在基  $\beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (2, 3, 1), \beta_3 = (3, 1, 2)$  的坐标为  $(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$

#### 例题 4.0.7

在  $\mathbb{R}^3$  中求向量  $\alpha = (3, 7, 1)$  在基  $\alpha_1 = (1, 3, 5), \alpha_2 = (6, 3, 2), \alpha_3 = (3, 1, 0)$  下的坐标

解 4.0.7. 构造矩阵进行初等行变换:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & -2 \\ 0 & -28 & -15 & -14 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 \times 28 & -8 \times 28 & -2 \times 28 \\ 0 & -28 \times 15 & -15 \times 15 & -14 \times 15 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 \times 28 & -8 \times 28 & -2 \times 28 \\ 0 & 0 & -1 & -154 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -154 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & 0 & 1230 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -459 \\ 0 & -15 & 0 & 1230 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -459 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix}$$

坐标是  $(33, -82, 154)$

#### 例题 4.0.8

在  $\mathbb{R}^4$  中找一个向量  $\gamma$ , 使它在标准基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  和基  $\beta_1 = (2, 1, -1, 1), \beta_2 = (0, 3, 1, 0), \beta_3 = (5, 3, 2, 1), \beta_4 = (6, 6, 1, 3)$  下有相同的坐标.

解 4.0.8. 设  $\gamma = (k_1, k_2, k_3, k_4)$  则

$$\begin{cases} 2k_1 + 5k_3 + 6k_4 = k_1 \\ k_1 + 3k_2 + 3k_3 + 6k_4 = k_2 \\ -k_1 + k_2 + 2k_3 + k_4 = k_3 \\ k_1 + k_3 + 3k_4 = k_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 5k_3 + 6k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 6k_4 = 0 \\ -k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_3 + 2k_4 = 0 \end{cases}$$

构建增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为只需要找到一个向量, 所以取  $k_4 = -1$ , 则  $\gamma = (1, 1, 1, -1)$ .

## 例题 4.0.9

设向量组  $\xi_1 = (1, -1, 2, 4), \xi_2 = (0, 3, 1, 2), \xi_3 = (3, 0, 7, 14), \xi_4 = (1, -1, 2, 0), \xi_5 = (2, 1, 5, 6)$

(1) 证明  $\xi_1, \xi_2$  线性无关. (2) 求向量组中包含  $\xi_1, \xi_2$  的极大线性无关组.

解 4.0.9. (1) 设  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$ , 转化为方程组:

$$\begin{cases} k_1 + 0k_2 = 0 \\ -k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } k_1 = 0, k_2 = 0$$

, 因此  $\xi_1, \xi_2$  线性无关.

(2) 将向量组构成矩阵  $A$ , 其中列向量为  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ , 对  $A$  进行行化简:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3-2R_1]{R_2=R_2+R_1, R_4=R_4-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[R_4=R_4-2R_2]{R_3=R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换 } R_3, R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=-\frac{1}{4}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

行简化阶梯形的主元列在第 1、2、4 列, 对应向量  $\xi_1, \xi_2, \xi_4$ . 向量  $\xi_3$  可以由  $\xi_1$  和  $\xi_2$  线性表示,  $\xi_5$  可以由  $\xi_1, \xi_2, \xi_4$  线性表示; 因此, 包含  $\xi_1$  和  $\xi_2$  的极大线性无关组为  $\xi_1, \xi_2, \xi_4$ .

## 例题 4.0.10

设  $\alpha_1 = (2, 1, 2, 2, -4)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, -1, 0, 2)$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, 2, 1, -1)$ ,  
 $\alpha_4 = (-1, -1, -1, -1, 1)$ ,  $\alpha_5 = (1, 2, 1, 1, 1)$ , 确定向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  极大线性无关组.

解 4.0.10. 将向量组构成矩阵  $A$ , 其中列向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ , 对  $A$  进行行简化:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换 } R_1, R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[\substack{R_2=R_2-2R_1, R_4=R_4-2R_1, R_5=R_5+4R_1 \\ R_3=R_3-2R_1}]{R_2=R_2-2R_1, R_4=R_4-2R_1, R_5=R_5+4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[\substack{R_1=R_1-R_2, R_4=R_4+2R_2, R_5=R_5-6R_2 \\ R_3=R_3+3R_2}]{R_1=R_1-R_2, R_4=R_4+2R_2, R_5=R_5-6R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 3 & -9 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[\substack{R_5=R_5+3R_3 \\ R_4=R_4-R_3}]{R_5=R_5+3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[\substack{R_1=R_1+R_3 \\ R_2=R_2-2R_3}]{R_1=R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

行最简形式的主元列在第 1、2、3 列, 对应向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。因此, 向量组的秩为 3, 且  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。其余向量可线性表示:  $\alpha_4 = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3, \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$  故向量组的极大线性无关组为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

## 例题 4.0.11

设  $A$  为  $n \times n$  矩阵, 且  $A^2 = A$ , 证明:  $r(A) + r(A - E) = n$

解 4.0.11. 假设  $AB$  为  $n \times n$  矩阵,  $AB = O$ , 首先, 方程组  $Ax = 0$  的解向量组  $x$  (显然都是列向量) 的极大线性无关组的向量个数为原方程组自由变量的个数, 即  $n - r(A)$ , 而且矩阵  $B$  恰好提供了一组列向量, 满足要求, 但是由于这组列向量一定可以被  $x$  的极大线性无关组一个个地线性表示, 所以说这组列向量的极大线性无关组的向量个数不一定等于 (小于等于) 解向量组  $x$  (显然都是列向量) 的极大线性无关组的向量个数; 所以  $r(A) + r(B) \leq n$

而且, 我们知道, 如果将  $A + B, A, B$  分别视为向量组:

$$\begin{cases} A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) \\ A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \end{cases}$$

分别列出它们的极大线性无关组 (等价于它们自身):

$$\begin{cases} A + B \Leftrightarrow M_{12} = (\alpha_{i_1} + \beta_{i_1}, \alpha_{i_2} + \beta_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r} + \beta_{i_r}) \\ A \Leftrightarrow M_1 = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}) \\ B \Leftrightarrow M_2 = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_t}) \end{cases}$$

则显然  $M_{12}$  可以由  $M_1, M_2$  线性表示, 则  $r(A) + r(B) = s + t \geq r = r(A + B)$

对于本题, 由于  $r(E) = n = r(A + E - A) \leq r(A) + r(A - E)$ , 且  $A(A - E) = O \Rightarrow r(A) + r(A - E) \leq n$ , 所以  $r(A) + r(A - E) = n$  成立。

## 例题 4.0.12

求下列齐次线性方程组的一个基础解系, 并写出通解: 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$$

解 4.0.12. 写出系数矩阵并进行行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{4}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到  $x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ , 将  $x_2 = s, x_4 = t$  看作自由未知量, 则解向量为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s + t \\ s \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = s\xi_1 + t\xi_2, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

其中  $\xi_1, \xi_2$  为基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### 例题 4.0.13

设线性方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 - x_2 + 14x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 2. \end{cases}$$

(1) 求方程组导出组的一个基础解系 (2) 用特解和导出组的基础解系表示方程组的所有解.

解 4.0.13. (1) 导出组为齐次线性方程组, 以及系数矩阵:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 9x_1 - x_2 + 14x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 0 \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 14 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 4 & 5 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行行变换, 得到行最简形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 4 & 5 & 7 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 4 & 5 & 7 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & -7 & -1 & 14 \\ 0 & -7 & -1 & 14 \\ 0 & -7 & -1 & 14 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{保留前两行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & -7 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

自由变量  $x_3 = 7s, x_4 = t$  (其中  $s, t \in \mathbb{R}$ ), 则:

$$x_1 = -11s, \quad x_2 = -s + 2t, \quad x_3 = 7s, \quad x_4 = t$$



解向量和导出组的基础解系为:

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 原方程组的增广矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 9 & -1 & 14 & 2 & | & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & | & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -6 & | & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & | & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & | & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & | & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & | & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & | & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & | & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{保留前两行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & | & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -2 & | & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{7} & 0 & | & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -2 & | & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

令自由变量  $x_3 = 7s, x_4 = t$  (其中  $s, t \in \mathbb{R}$ ), 则:

$$x_1 = \frac{1}{7} - 11s, \quad x_2 = \frac{2}{7} - s + 2t, \quad x_3 = 7s, \quad x_4 = t$$

特解为当  $s = 0, t = 0$  时:

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所有解可表示为特解加上导出组基础解系的线性组合:

$$\mathbf{X} = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

## 例题 4.0.14

已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}$$

讨论参数  $s, t$  取何值时，方程组有解，无解；有解时，试用导出组的基础解系表示通解。

解 4.0.14. 方程组的增广矩阵为：

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}]{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{R_1 \rightarrow R_1 - R_2, R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2}]{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - R_2, R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

第四行对应方程  $0 = t + 2$ ，因此当  $t \neq -2$  时，方程组无解。当  $t = -2$  时，方程组有解，且解的情况取决于参数  $p$ 。情况 1:  $p \neq -8$ ，此时增广矩阵的秩为 3，系数矩阵的秩也为 3，自由变量个数为 1。导出组的基础解系含一个向量。从行最简形式：

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

由第三行得  $(p+8)x_3 = 0$ ，因  $p \neq -8$ ，故  $x_3 = 0$ ，进而解得： $x_1 = -1 - x_4, x_2 = 1 - 2x_4$  特解和导出组的基础解系分别为：

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为：

$$\mathbf{x} = \eta + c\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

情况 2:  $p = -8$ ; 此时增广矩阵的秩为 2, 系数矩阵的秩也为 2, 自由变量个数为 2。导出组的基础解系含两个向量。从行最简形式:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

解得:  $x_1 = -1 + 4x_3 - x_4$ ,  $x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4$  特解和导出组的基础解系为分别为:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为:

$$\mathbf{x} = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

#### 例题 4.0.15

设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶方阵, 那么

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, r(\mathbf{A}) = n \\ 1, r(\mathbf{A}) = n - 1 \\ 0, r(\mathbf{A}) < n - 1 \end{cases}$$

解 4.0.15. (1) 若  $r(\mathbf{A}) = n$ , 则  $\mathbf{A}$  可逆, 所以由于  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \Rightarrow \det(\mathbf{A}^*) = \det(|\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}) \neq 0$ , 所以  $\mathbf{A}^*$  可逆, 是满秩的;

(2) 此时尽管  $|\mathbf{A}| = 0$ , 但是仍然有  $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$ , 所以将  $\mathbf{A}$  视作方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{O}$  的系数矩阵, 由于  $r(\mathbf{A}) = n - 1$ , 所以方程组自由未知量个数为 1, 所以解向量  $\mathbf{x}$  的极大线性无关组的向量个数就是 1, 而  $\mathbf{A}^*$  所提供的列向量都可以被  $\mathbf{x}$  的极大线性无关组线性表示, 所以  $r(\mathbf{A}^*) \leq 1$ , 但是又由于矩阵  $\mathbf{A}$  存在  $n - 1$  阶不为 0 的行列式, 所以  $r(\mathbf{A}^*) = 1$

(3) 若  $r(\mathbf{A}) = n - 2$ , 不存在  $n - 1$  阶不为 0 的行列式, 所以由 (2) 得到  $r(\mathbf{A}^*) = 0$

## 第五章 特征值和特征向量

## 例题 5.0.1 求特征值和特征向量

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 5.0.1. (1) 计算  $\det(A - \lambda E) = 0$ :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -2 & -2-\lambda \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)[(-2-\lambda)(-1-\lambda) - 12] - 2[(-2)(-1-\lambda) - 6] - 1[(-2)(6) - (-2-\lambda)(3)] \\ &= (3-\lambda)[(2+3\lambda+\lambda^2) - 12] - 2[2+2\lambda-6] - 1[-12+6+3\lambda] \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2+3\lambda-10) - 2(2\lambda-4) - (3\lambda-6) \\ &= (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+5) - 7(\lambda-2) = (\lambda-2)(15-7-2\lambda-\lambda^2) \\ &= (\lambda-2)(8-2\lambda-\lambda^2) = -(\lambda-2)^2(\lambda+4) = 0 \end{aligned}$$

所以特征值是  $\lambda_1 = 2$  (二重) 和  $\lambda_2 = -4$  (一重)

先计算矩阵  $A - 2E$  并进行行变换:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以选取  $x_2, x_3$  为自由变量,  $x_1 = x_3 - 2x_2$ , 则有基向量:

$$x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则特征值 2 对应的特征向量为  $k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数.

计算矩阵  $A + 4E$  并进行行变换:

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 \times 7 + 7 \times 2 & 2 \times 7 + 2 \times 2 & 2 \times 7 - 2 \times (-1) \\ 3 \times 7 - 7 \times 3 & 6 \times 7 - 2 \times 3 & 3 \times 7 + 1 \times 3 \end{pmatrix}$$

得到  $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 36 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  选取  $x_3$  为自由变量, 解得  $x_2 = -\frac{2}{3}x_3$ , 代入得  $x_1 = \frac{1}{3}x_3$  取  $x_3 = 3$ :  $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , 则特征值  $-4$  对应的特征向量为  $k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , 其中  $k_3$  为任意常数.

(2) 计算  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 + 0 - 1 \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)^2 [(-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot 1] - (\lambda^2 - 1) = \lambda^2(\lambda^2 - 1) - (\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

特征值:  $\lambda = 1$  (二重根),  $\lambda = -1$  (二重根), 对于  $\lambda = 1$ , 构造矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{E}$  进行初等行变换:

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_4 \end{cases}$$

$$\text{基向量: } x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以特征值  $\lambda_1 = 1$  对应的特征向量为  $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数.

对于  $\lambda = -1$ , 构造矩阵  $\mathbf{A} + \mathbf{E}$  进行初等行变换:

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_4 \end{cases}$$

$$\text{基向量: } x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以特征值  $\lambda_1 = -1$  对应的特征向量为  $k_3\boldsymbol{\xi}_3 + k_4\boldsymbol{\xi}_4$ , 其中  $k_3, k_4$  为任意常数.

例题 5.0.2 求该  $n$  阶矩阵的特征值和特征向量

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

解 5.0.2. 计算  $\det(A - \lambda E) = 0$ :

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1-\lambda & n-1-\lambda & n-1-\lambda & \cdots & n-1-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (n-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = (n-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (n-1-\lambda)(-\lambda-1)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = n-1, \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

特征值为  $\lambda_1 = n-1$  (一重) 和  $\lambda_2 = -1$  ( $n-1$  重)

对于特征值  $\lambda_1 = n-1$ , 我们根据相同的行变换过程发现此时每一列的和为 0, 因此此时这个矩阵的所有行向量线性相关, 所以只有一个有效方程, 而且  $x_1, x_2, \dots, x_n$  应该相等, 严谨的说明过程则需要写出:

$$\begin{cases} -(n-1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 - (n-1)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 - (n-1)x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots - (n-1)x_n = 0 \end{cases}$$

设  $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ , 则第  $i$  个方程为:

$$-(n-1)x_i + (S - x_i) = 0 \Rightarrow S = nx_i$$

这对所有  $i = 1, 2, \dots, n$  成立, 因此:

$$nx_1 = nx_2 = \cdots = nx_n \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

故特征向量为  $\xi = k(1, 1, \dots, 1)^T$ ,  $k \neq 0$ .

下面考虑另一个特征向量  $\lambda_2 = -1$ , 将刚才进行的行变换作用于矩阵:

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} n-1-\lambda & n-1-\lambda & n-1-\lambda & \cdots & n-1-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

代入  $\lambda = -1$ , 则可得到  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ , 一组基可以取为:

$$\xi_1 = (1, -1, 0, 0, \dots, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, -1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \xi_{n-1} = (1, 0, 0, \dots, 0, -1)^T$$

故特征向量为:

$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_{n-1} \xi_{n-1}, \quad k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \text{ 为任意常数}$$

### 例题 5.0.3

设  $\lambda$  是  $n$  阶可逆矩阵  $A$  的一个特征值,  $\alpha$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的一个特征向量, 证明  $\frac{|A|}{\lambda}$  是  $A^*$  的一个特征值,  $\alpha$  也是  $A^*$  属于此特征值的一个特征向量.

解 5.0.3. 由于矩阵  $A$  可逆, 所以  $AA^* = |A|E$ , 设列向量  $\alpha$  满足  $A\alpha = \lambda\alpha$ , 则  $A^*A\alpha = \lambda A^*\alpha$ , 即  $|A|E\alpha = |A|\alpha = \lambda A^*\alpha$ , 即  $\frac{|A|}{\lambda}\alpha = A^*\alpha$ , 所以  $\frac{|A|}{\lambda}$  是  $A^*$  的一个特征值,  $\alpha$  也是  $A^*$  属于此特征值的一个特征向量.

### 例题 5.0.4

设  $\lambda_1, \lambda_2$  是矩阵  $A$  的两个不同的特征值,  $\alpha_1, \alpha_2$  分别是属于  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量. 试证:  $\alpha_1 + \alpha_2$  一定不是  $A$  的特征向量

解 5.0.4. 由定义得到  $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$ , 相加有  $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ , 假如  $\alpha_1 + \alpha_2$  是  $A$  的特征向量, 即  $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_3(\alpha_1 + \alpha_2)$ , 与  $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$  联立得到  $(\lambda_3 - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$ , 由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 得到  $\lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2$ , 但是  $\lambda_1, \lambda_2$  是矩阵  $A$  的两个不同的特征值, 因此矛盾,  $\alpha_1 + \alpha_2$  一定不是  $A$  的特征向量.



## 例题 5.0.5

矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & a & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$  与矩阵  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  相似, 试求  $a, b$  的值.

**解 5.0.5.** 由于矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  相似, 它们具有相同的特征值。矩阵  $\mathbf{B}$  是对角矩阵, 其特征值即为对角线元素:  $-4$ 、 $b$  和  $2$ 。因此,  $\mathbf{A}$  的特征值也应为  $-4$ 、 $b$  和  $2$ , 而且由相似矩阵的迹相等得到  $3 + a + (-1) = a + 2 = -4 + b + 2 = b - 2 \Rightarrow b = a + 4$ , 由特征多项式韦达定理得到  $\mathbf{A}$  的所有特征值的积为  $|\mathbf{A}| = -4 \times b \times 2 = -8b$ , 下面计算行列式 (按行展开):

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & a \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (a \cdot (-1) - 2 \cdot 6) - 2 \cdot ((-2) \cdot (-1) - 2 \cdot 3) - 1 \cdot ((-2) \cdot 6 - a \cdot 3) \\ &= 3 \cdot (-a - 12) - 2 \cdot (2 - 6) - 1 \cdot (-12 - 3a) \\ &= -3a - 36 + 8 + 12 + 3a = -16 \end{aligned}$$

所以  $b = 2, a = 2 - 4 = -2$

## 例题 5.0.6

已知  $\lambda = 1$  是矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & t+1 \end{pmatrix}$  的二重特征值, 求  $t$  的值, 并求是否存在可逆矩阵  $\mathbf{T}$  使得  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$  为对角矩阵

**解 5.0.6.** 由于已知  $\lambda = 1$  是矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & t+1 \end{pmatrix}$  的二重特征值, 所以直接计算  $|\mathbf{A} - \mathbf{E}|$  的值:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & t \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & t \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (1 \cdot t - t \cdot t) - 1 \cdot (1 \cdot t - t \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot t - 1 \cdot 1) \\ &= (t - t^2) - 0 + (t - 1) = -t^2 + 2t - 1 = -(t - 1)^2 \end{aligned}$$

必要条件是  $\det(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 0$ , 即  $t = 1$ , 当  $t = 1$  时, 矩阵为:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

计算特征多项式:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (4-\lambda) \left[ \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
 &= (4-\lambda) [(2-\lambda)^2 - 1 - ((2-\lambda) - 1) + (1 - (2-\lambda))] \\
 &= (4-\lambda) [\lambda^2 - 4\lambda + 3 - (1-\lambda) + (\lambda-1)] \\
 &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 2\lambda - 2) = (4-\lambda)(\lambda-1)^2
 \end{aligned}$$

因此特征值为  $\lambda = 1$  (二重) 和  $\lambda = 4$ , 验证了  $\lambda = 1$  是二重特征值。接下来算出  $\mathbf{T}$ , 对于特征值  $\lambda = 1$ , 解方程组  $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到方程  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 。选择两个线性无关的解:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此  $\lambda_1$  的代数重数和几何重数相等, 对于特征值  $\lambda = 4$ , 解方程组  $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到方程  $x_1 = x_3, x_2 = x_3$ 。取一个特解:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } \mathbf{T} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 且 } \det(\mathbf{T}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \text{ 可逆, 满足:}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

结果的三个对角线上的元素不用具体计算, 因为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ .

## 例题 5.0.7

求出能使下列矩阵  $\mathbf{A}$  相似于对角矩阵的正交矩阵  $\mathbf{T}$  :

$$(1)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}; (2)\mathbf{A} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

解 5.0.7. (1) 对于矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ , 特征多项式为:

$$|\lambda E - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 4 - 2\lambda & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 11) = 0$$

得特征值:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  (二重),  $\lambda_3 = 11$ , 对于  $\lambda = 2$ , 解  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{O}$ :

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行化简}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系:  $\alpha_1 = (-1, 2, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 2, -1)^T$ , 对于  $\lambda = 11$ , 解  $(\mathbf{A} - 11\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{O}$ :

$$\mathbf{A} - 11\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

此时已经很容易解得特征向量为:  $\alpha_3 = (2, 1, 2)^T$ 。对  $\lambda = 2$  对应的特征向量进行正交化: 取  $\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, 0)^T$ :

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (0, 2, -1)^T - \frac{4}{5}(-1, 2, 0)^T = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -1\right)^T$$

取  $\beta_2 = (-4, -2, 5)^T$  (乘以 5 简化) 单位化并构造正交矩阵:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(2) 对于矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ , 下面证明一个引理: 如果矩阵  $\mathbf{A}$  的每一行元素之和都等

于同一个常数  $c$ ，那么  $c$  是  $A$  的一个特征值。设  $A = (a_{ij})$  是一个  $n \times n$  矩阵，且满足：

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = c \quad \text{对于所有 } i = 1, 2, \dots, n$$

考虑向量  $v = (1, 1, \dots, 1)^T$  (全 1 向量)。计算矩阵乘积  $Av$  的第  $i$  个分量：

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot v_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 = \sum_{j=1}^n a_{ij} = c$$

因此，对于所有  $i = 1, 2, \dots, n$ ，都有  $(Av)_i = c$ ，这意味着： $Av = cv$ ，根据特征值和特征向量的定义，上式  $Av = cv$  表明  $c$  是  $A$  的特征值， $v$  是对应的特征向量。

而矩阵  $A$  的每一行元素之和均为：

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} = 4 + (-1) + (-1) + 1 = 3 \quad \text{对于所有 } i = 1, 2, 3, 4$$

因此， $\lambda = 3$  是  $A$  的一个特征值，对应的特征向量为  $v = (1, 1, 1, 1)^T$ 。将  $A$  分解为： $A = 3E + C$ ，其中  $E$  是  $4 \times 4$  单位矩阵， $C = A - 3E$ 。计算  $C$ ：

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

显然， $\text{rank}(C) = 1$ ，即  $C$  是秩 1 矩阵。一个非零特征值： $\lambda_C = \text{tr}(C) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ ，三个零特征值：0, 0, 0，由于  $A = 3E + C$ ，且矩阵加法保持特征向量的对应关系，有： $\lambda_A = 3 + \lambda_C$ ；因此：当  $\lambda_C = 4$  时， $\lambda_A = 3 + 4 = 7$ ，当  $\lambda_C = 0$  时， $\lambda_A = 3 + 0 = 3$ ；由于  $C$  有一个非零特征值和三个零特征值， $A$  对应地有一个特征值 7 和三个特征值 3。

对于  $\lambda = 3$ ，解  $(A - 3E)x = Cx = 0$ ：得基础解系： $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ ， $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)^T$ ， $\alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)^T$ ；对于  $\lambda = 7$ ，解  $(A - 7E)x = 0$ ，得特征向量： $\alpha_4 = (-1, 1, 1, -1)^T$  对  $\lambda = 3$  对应的特征向量进行正交化：取  $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0, 0)^T$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (1, 0, 1, 0)^T - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)^T$$

取  $\beta_2 = (1, -1, 2, 0)^T$  (乘以 2 简化)

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

计算得  $\beta_3 = (-1, 1, 1, 3)^T$ ，构造正交矩阵

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## 例题 5.0.8

试证明：设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵，且  $A^2 = A$ ，则存在正交矩阵  $T$ ，使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

其中  $r$  为秩， $E_r$  为  $r$  阶单位矩阵。

解 5.0.8. 由于  $A$  是实对称矩阵，根据实对称矩阵的正交相似对角化定理，存在正交矩阵  $T$ ，使得

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的特征值。又已知  $A^2 = A$ ，考虑正交相似变换：

$$(T^{-1}AT)^2 = T^{-1}A^2T = T^{-1}AT \Leftrightarrow \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

因此，对于每个  $i$ ，有  $\lambda_i^2 = \lambda_i$ ，解得  $\lambda_i = 0$  或  $\lambda_i = 1$ 。由于  $A$  的秩为  $r$ ，而实对称矩阵的秩等于其非零特征值的个数，故特征值 1 的个数为  $r$ 。通过适当排列正交矩阵  $T$  的列向量（即特征向量的顺序），可以使特征值 1 位于前  $r$  个位置，于是

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

## 例题 5.0.9

设  $A$  为  $n$  阶方阵，且  $A^2 = A$ ，证明若  $\lambda$  为  $A$  的一个特征值，则  $\lambda = 0$  或 1。

解 5.0.9. 设  $\lambda$  为  $A$  的任意一个特征值，对应的特征向量为  $\alpha \neq \mathbf{0}$ ，即

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A^2\alpha = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$$

由于  $A^2 = A$ ，有  $A^2\alpha = A\alpha = \lambda\alpha$ ，因此

$$\lambda^2\alpha = \lambda\alpha.$$

因为  $\alpha \neq \mathbf{0}$ ，所以  $\lambda^2 = \lambda$ ，即  $\lambda(\lambda - 1) = 0$ ，解得  $\lambda = 0$  或  $\lambda = 1$ 。由于  $\lambda$  是  $A$  的任意特征值，故  $A$  的所有特征值都是 0 或 1。

## 例题 5.0.10

设  $A$  为  $2 \times 2$  矩阵，若  $\text{tr}(A) = 8$  且  $|A| = 12$ ，求  $A$  的特征值。

解 5.0.10. 用定义，设  $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (ad - bc) - \lambda(a + d) + \lambda^2$ ，则代入数据得到  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$ ，因此  $A$  的特征值为 2 或 6。

## 例题 5.0.11

设  $A, B$  为两个  $n$  阶方阵, 证明:

- (1) 若  $\lambda$  为  $AB$  的一个非零特征值, 则它也是  $BA$  的一个特征值;  
 (2) 若  $\lambda = 0$  为  $AB$  的一个特征值, 则  $\lambda = 0$  也是  $BA$  的一个特征值

解 5.0.11. (1) 设  $\lambda \neq 0$  为  $AB$  的一个特征值, 则存在非零向量  $\alpha$  使得  $AB\alpha = \lambda\alpha$ , 由于  $\lambda \neq 0$  且  $\alpha \neq 0$ , 有  $AB\alpha \neq 0$ . 假设  $B\alpha = 0$ , 则  $AB\alpha = A(B\alpha) = A0 = 0$ , 与  $\lambda\alpha \neq 0$  矛盾. 因此  $B\alpha \neq 0$ . 将等式两边左乘  $B$ , 得

$$B(AB\alpha) = B(\lambda\alpha) \implies BA(B\alpha) = \lambda(B\alpha).$$

由于  $B\alpha \neq 0$ , 上式表明  $\lambda$  是  $BA$  的一个特征值, 对应的特征向量为  $B\alpha$ .

(2) 若  $\lambda = 0$  为  $AB$  的一个特征值, 则  $AB$  是奇异矩阵, 即  $\det(AB) = 0$ . 由于  $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$ , 因此  $\det(BA) = 0$ , 即  $BA$  也是奇异矩阵. 故  $\lambda = 0$  是  $BA$  的一个特征值。

## 例题 5.0.12

试证对于可逆矩阵  $A, B$ , 有  $AB \sim BA$ .

解 5.0.12. 矩阵  $A$  和  $B$  可逆, 考虑相似变换  $P = A$ . 由于  $A$  可逆,  $P$  可逆, 且  $P^{-1} = A^{-1}$ . 则

$$P^{-1}(AB)P = A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = IBA = BA.$$

因此,  $AB$  相似于  $BA$ 。

## 例题 5.0.13

设  $A, B$  为两个  $n$  阶方阵, 证明若存在同一个可逆矩阵  $P$  同时对角化  $A$  和  $B$ , 则有  $AB = BA$ .

解 5.0.13. 设矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 矩阵  $B$  的特征值为  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , 且存在同一个可逆矩阵  $P$  同时对角化  $A$  和  $B$ , 根据定义:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad P^{-1}BP = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

因此

$$P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}ABP = \text{diag}(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \dots, \lambda_n\mu_n)$$

同理

$$P^{-1}BPP^{-1}A = P^{-1}BAP = \text{diag}(\mu_1\lambda_1, \mu_2\lambda_2, \dots, \mu_n\lambda_n)$$

所以  $P^{-1}ABP = P^{-1}BAP$ , 同时左乘  $P$ , 右乘  $P^{-1}$ , 得到  $AB = BA$ .

## 例题 5.0.14

设  $A$  是  $n(n \geq 3)$  阶矩阵, 如果  $A \neq 0$ , 但  $A^3 = 0$ , 试证明  $A$  不可对角化.

解 5.0.14. 假设  $A$  可对角化. 由于  $A^3 = 0$ , 则  $A$  是幂零矩阵, 其特征值均为零. 这是因为若  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则  $\lambda^3$  是  $A^3$  的特征值, 而  $A^3 = 0$  的特征值全为零, 故  $\lambda^3 = 0$ , 即  $\lambda = 0$ . 由于  $A$  可对角化, 存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda,$$

其中  $\Lambda$  是对角矩阵, 其对角线元素为  $A$  的特征值, 即全为零. 因此  $\Lambda = 0$ , 于是

$$A = P0P^{-1} = 0,$$

与已知  $A \neq 0$  矛盾. 故假设不成立,  $A$  不可对角化.

## 例题 5.0.15

若  $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$ , 证明存在  $X$  使得  $ABX = A$ .

解 5.0.15. 对于  $AB = C$ , 固定  $A$  的某一行, 我们发现  $C$  的对应的那一行的每一个元素, 都是由  $B$  的每一列的各个元素, 乘以  $A$  那一行各个元素所提供的“比例权重”, 再求和得到的, 遍历每一列操作都一样, 于是  $A, B$  相乘等价于对  $B$  进行行变换. 固定  $B$  的某一列, 对于  $C$  的对应的那一列的各个元素, 都是由  $A$  的每一行的元素乘以  $B$  那一列各个元素所提供的“比例权重”, 再求和得到的, 遍历每一行操作都一样, 于是  $A, B$  相乘等价于对  $A$  进行初等列变换.

已知  $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$ , 这意味着矩阵  $AB$  的列空间与矩阵  $A$  的列空间相同, 即  $\text{col}(AB) = \text{col}(A)$ . 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 其列向量为  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 由于  $\text{col}(AB) = \text{col}(A)$ , 对于每个列向量  $a_j$ , 存在向量  $x_j$  使得

$$ABx_j = a_j.$$

构造矩阵  $X$  为  $p \times n$  矩阵 (其中  $p$  是  $B$  的列数), 其第  $j$  列为  $x_j$ , 即  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ . 则

$$ABX = AB[x_1, x_2, \dots, x_n] = [ABx_1, ABx_2, \dots, ABx_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n] = A.$$

因此, 存在矩阵  $X$  使得  $ABX = A$ .

另解: 设可逆矩阵  $P, Q$  使得  $A = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ , 则

$$\text{rank}(AB) = \text{rank} \left( P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB \right) = \text{rank}(A) = \text{rank} \left( \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB \right)$$

记  $QB = \begin{pmatrix} B_r \\ B_s \end{pmatrix}$ , 其中  $B_r$  为  $r$  行矩阵, 则

$$\text{rank}(AB) = \text{rank} \left( \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r \\ B_s \end{pmatrix} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} B_r \\ 0 \end{pmatrix} = \text{rank}(B_r)$$

所以  $B_r$  行满秩, 此时, 构造满足要求的矩阵  $X$  就变得非常直观: 我们需要一个矩阵, 当之右乘  $QB = \begin{pmatrix} B_r \\ B_s \end{pmatrix}$  时, 能“筛选”出左上角的  $E_r$ , 而忽略掉其他部分。取矩阵  $C$  使得  $B_r C = E_r$ , 取  $X = (C|O)$ , 矩阵  $X = \begin{pmatrix} C & O \end{pmatrix}$  正是为此目的而设计的:

$$\begin{aligned} ABX &= P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB(C|O) \\ &= P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r \\ B_s \end{pmatrix} (C|O) = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ B_s C & 0 \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = A \end{aligned}$$

所以  $ABX = A$

#### 例题 5.0.16

$$\operatorname{tr}(A^*A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

解 5.0.16.



## 第六章 二次型的标准形与规范形

### 例题 6.0.1

用配方法把下列二次型化成标准形:  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4$

解 6.0.1. 先用平方差公式代换, 让式子中出现平方项, 再根据系数配平方: 设  $2y_1 = x_1 + x_2, 2y_2 = x_1 - x_2$ , 则有:

$$\begin{aligned}x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 &= \frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4} + \frac{y_1 + y_2}{2}x_3 + y_1x_4 \\&= \frac{y_1^2}{4} + y_1\left(\frac{x_3}{2} + x_4\right) - \frac{y_2^2}{4} + \frac{x_3y_2}{2} \\&= \left(\frac{y_1}{2} + \frac{x_3}{2} + x_4\right)^2 - \left(\frac{x_3}{2} + x_4\right)^2 - \left(\frac{y_2}{2} - \frac{x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{2}\right)^2 \\&= z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2\end{aligned}$$

其中  $z_1 = \frac{y_1}{2} + \frac{x_3}{2} + x_4, z_2 = \frac{x_3}{2} + x_4, z_3 = \frac{y_2}{2} - \frac{x_3}{2}, z_4 = \frac{x_3}{2}$ .

### 例题 6.0.2

用正交变换把下列实二次型化成标准形, 并写出所作的正交变换:  $2x_1x_3 + x_2^2$

解 6.0.2. 将该二次型简写成矩阵乘积的形式:

$$2x_1x_3 + x_2^2 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T$$

设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 - \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

得到特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ , 令  $\lambda = 1$ , 则

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 \text{ 为自由变量} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  为基础解系, 显然  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$ . 令  $\lambda = -1$ , 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则  $\mathbf{v}_3$  为基础解系, 则将  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  单位化, 写出矩阵  $\mathbf{P} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_3 \right)$ , 令  $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$  得到规范型:  $-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

### 例题 6.0.3

求下列实二次型的正、负惯性指数:  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ ;

解 6.0.3. 将该二次型化成标准形:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T \\ &= (x_1, x_2, x_3) \mathbf{A} (x_1, x_2, x_3)^T \\ |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda+1 & -\lambda^2+4\lambda-2 \\ 0 & -1-\lambda & 2\lambda-5 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda^2-6\lambda+7) \end{aligned}$$

特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3 + \sqrt{2}, \lambda_3 = 3 - \sqrt{2}$ . 由于  $3 + \sqrt{2} > 0$  和  $3 - \sqrt{2} > 0$ , 正特征值个数为 2, 负特征值个数为 1. 因此, 二次型的标准形可通过正交变换化为:

$$-1 \cdot y_1^2 + (3 + \sqrt{2})y_2^2 + (3 - \sqrt{2})y_3^2$$

正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1.

### 例题 6.0.4

判断下列实二次型是不是正定二次型, 或在何种条件下是正定二次型:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

解 6.0.4. 给定二次型:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

对应的对称矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

二次型正定的充要条件是对称矩阵  $A$  的所有顺序主子式大于零。

1. 第一顺序主子式:  $\Delta_1 = 1 > 0$  恒成立。

2. 第二顺序主子式:  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$ , 要求  $\Delta_2 > 0$ , 即:  $1 - \lambda^2 > 0 \Rightarrow -1 < \lambda < 1$

3. 第三顺序主子式 (矩阵行列式):

$$\begin{aligned} \Delta_3 = \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 - 4) - \lambda \cdot (5\lambda + 2) - (2\lambda + 1) \\ &= 1 - 5\lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda - 1 = -5\lambda^2 - 4\lambda \end{aligned}$$

要求  $\Delta_3 > 0$ , 即:

$$-5\lambda^2 - 4\lambda > 0 \Rightarrow 5\lambda^2 + 4\lambda < 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} < \lambda < 0$$

因此, 当且仅当  $\lambda \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$  时, 该二次型为正定二次型。

#### 例题 6.0.5

设有二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ , 问

(1) 当  $a$  取何值时,  $f(x_1, x_2, x_3)$  正定?

(2) 当  $a$  取何值时,  $f(x_1, x_2, x_3)$  负定?

解 6.0.5. 该二次型对应的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

(1) 第一, 二阶顺序子式大于 0, 即  $\begin{cases} \Delta_1 = a > 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow a > 1$

第三阶顺序子式:  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a-2)(a+1)^2 > 0 \Rightarrow a > 2$  因此, 当  $a > 2$  时, 二次型正定。

(2) 二次型  $f$  负定当且仅当  $-f$  正定。 $-f$  对应的矩阵为  $-\mathbf{A}$ :

$$-\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ -1 & -a & 1 \\ -1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

第一顺序主子式:  $\Delta'_1 = -a > 0 \Rightarrow a < 0$

第二顺序主子式:  $\Delta'_2 = \begin{vmatrix} -a & -1 \\ -1 & -a \end{vmatrix} = a^2 - 1 > 0 \Rightarrow a < -1 \quad \text{或} \quad a > 1$

第三顺序主子式:

$$\begin{aligned} \Delta'_3 &= \begin{vmatrix} -a & -1 & -1 \\ -1 & -a & 1 \\ -1 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a \cdot \begin{vmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -a \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -a(a^2 - 1) + 1(a + 1) - 1(-1 - a) = -a^3 + a + a + 1 + 1 + a \\ &= -a^3 + 3a + 2 = -(a - 2)(a + 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

综合三个条件:  $a < 0$ ,  $a < -1$ ,  $a < 2$ , 取交集, 因此, 当  $a < -1$  时,  $-\mathbf{A}$  正定, 即原二次型负定。

#### 例题 6.0.6

设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为两个  $n$  阶正定矩阵, 证明:  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  也是正定矩阵。

解 6.0.6. 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为两个  $n \times n$  的正定矩阵, 显然由于定义,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  都是实对称阵, 则验证定义  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , 所以  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  也是实对称阵。则任意矩阵  $\mathbf{X} \neq 0$ ,  $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T > 0$ ,  $\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{X}^T > 0$ , 则  $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T + \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{X}^T = \mathbf{X}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{X}^T > 0$ , 即  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  也是正定矩阵。

#### 例题 6.0.7

设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶正定矩阵, 证明:

(1)  $\mathbf{A}^T$  也是正定矩阵;

(2)  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵  $\mathbf{A}^*$  也是正定矩阵。

解 6.0.7. (1) 设  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  的正定矩阵, 则  $\mathbf{A}^T$  也是实对称阵, 则任意矩阵  $\mathbf{X} \neq 0$ , 有  $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T > 0$ , 则  $\mathbf{X}\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T = (\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T)^T > 0$ , 即  $\mathbf{A}^T$  也是正定矩阵。

(2) 由于  $\mathbf{A}$  为正定矩阵, 则  $|\mathbf{A}| > 0$ , 则  $\mathbf{A}$  可逆, 即  $\mathbf{A}^{-1}$  存在, 且满足  $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 。又由于存在可逆矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$ , 那么  $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)^{-1} = |\mathbf{A}|(\mathbf{P}^T)^{-1}\mathbf{P}^{-1} = |\mathbf{A}|(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{P}^{-1}$ , 即  $\mathbf{A}^{-1}$  也是正定矩阵。所以其各项特征值均大于 0, 因此  $\mathbf{A}^*$  各项特征值也大于 0, 所以  $\mathbf{A}^*$  也是正定矩阵。