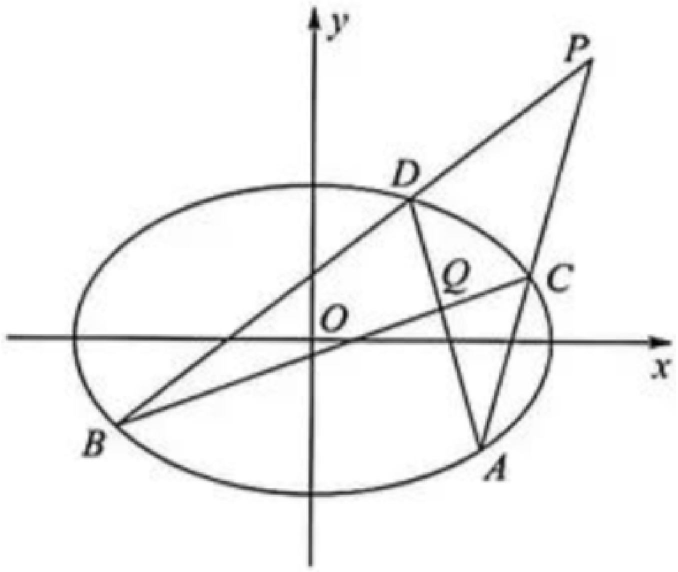
高中数学
解析几何教程

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期：2025 年 10 月 22 日



前言

本书内容全部使用 LaTeX 进行排版，作者”还在尬黑”是一位准大一学生，高中毕业于广东深圳中学，高三数学各次大考平均排名位于前 5%，高考应该也不例外。”还在尬黑”拥有知乎（同名），微信公众号（同名），小红书号（同名）等账号，头像是一个右手三叶结。以及不同名不同头像的 GitHub 账号，发表原创优质内容百余篇，且固定更新频率，堪称发文的“螺丝钉”。

“还在尬黑”对圆锥曲线的解题研究有着浓厚兴趣，并在书中将其总结成了一套完整的解析几何教程。本书适合高中解析几何解题体系未成熟的高二高三学生，以及前来自学的高一学生以及初中生，也可作为高中数学教材。笔者衷心希望本书能够帮助读者提高圆锥曲线解题速度和解题能力，并能够准确地识别班内的”大佬”是用什么东西来装逼的，当然，本书和市面上的某些书不同，不会直接甩给学生们根本用不明白也不懂从何而来的技巧大招，而是会侧重解析一种方法的产生过程，以及如何恰当的选择方法解决具体问题。

学习圆锥曲线（包括高考数学的一些其它内容）的过程中，最重要也最需要大家认真做的就是历年的高考题，本书内容涵盖了大部分恢复高考以来所有的高考解析几何压轴题，并且每一道题都经过了笔者的精挑细选，放到了合适的位置上，后续笔者会在书末尾出一个索引表，帮助只想刷高考题的同学快速使用本书。

除了经典而偏基础的高考题外，本书后面还有些部分为选学内容，难度较高，属于高考不怎么考的范畴，这部分留给同学们或解析几何爱好者们进行自我提高和兴趣拓展。当然，建议读者先打牢必学内容的基础，再来进行进一步的学习。

在创作本书的过程中，笔者也得到了朋友们和热心群众的帮助，在此向他们表示感谢！

十分感谢读者朋友们的支持和赞助！祝大家健康进步，高考成功！

还在尬黑

2025 年 10 月 22 日

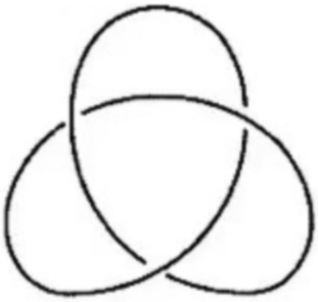


图 1: 我的头像

目录

第一章 先导课程 **1**

1.1 写在前面 1

1.2 轮换，对称 1

第二章 手稿 **4**

2.1 杂题收录 4

第三章 曲线系 **25**

3.1 曲线系引入 25

第四章 杂题 **31**

4.1 数学问题 31

第一章 先导课程

1.1 写在前面

解析几何是高中数学的重要学习内容，在高考中分值占比较高。

不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代性的表述，这可能是因为圆锥曲线是解析几何中的重难点。但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如 3 次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈 3 种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

首先，笔者来讲一讲怎么进行计算。这似乎是一个很简单的问题，但是谁又能保证在紧张刺激的考场环境下不会犯错误？一旦出现计算错误，检查就需要花费一定的时间，所以不如挑选合适的计算方法，从源头上减少失误。本节中，笔者会结合自己的一些实战经验，尽量告诉大家一些计算过程中减小失误，提升速度的技巧和方法，以及解析几何中计算的基本方向—-整体代换。

鉴于本书的覆盖群体，笔者会尽量避免过多的公式推导和过于严谨的学术表述，而是从直观的角度出发，用一些具体的例子来说明计算的过程。希望大家能从中受益。

1.2 轮换，对称

在此之前，请允许我先介绍一些基本的概念，我们不妨先来看一些看起来很整齐的式子，这些式子平时很常见，大家在备考强基计划的过程中也会遇到比较多这样的式子：

例题 1.2.1

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$abc$$

$$a+b+c$$

$$ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$$

解 1.2.1. 相信大部分同学是通过自己的直觉来归纳的，直观的感受就是这些式子很“整齐”，而且很有规律可循。那么问题来了：“整齐”是怎么体现的？更进一步地，有没有手段验证一个代数式

是“整齐”的？至于“很有规律可循”，那么规律是什么？

这些问题循序渐进，如果理清这些问题，那么读者便掌握了学习数学时地最基本的关注点：定义，性质，判定。这些式子中的 a, b, c 结构权重是均等的，它们地位相同，没有“特权变量”，也没有“次序”之分。

而且，眼尖的读者可以发现，这些表达式中的项往往成组出现，覆盖所有可能的组合，比如 $a+b+c$ 中全为一次项，如果 a 出现了，不用猜也知道 b 和 c 也出现了；再比如 $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$ 中，a^2b 出现了，其中 a 被平方了，那不用猜也知道在其他的项中，b 和 c 也会被平方，而且后面一定会跟着其他没有被平方的字母。它们出现的次数相同。

事实上，由于乘法和加法的交换律和结合律，我们可以发现，对于上面任意一个式子，我们都可以挑选任意两个变量交换位置，而多项式本身保持不变。大家不妨想象一下阅兵式的场景，即使我们偷偷调换两个兵的位置，你也看不出来有什么异样，这是阅兵队伍“整齐”的体现。同样地，这个代数式也可以这样操作，来验证这个代数式是“整齐”的，“规律可循”的。这样我们便可以引出对称式的概念。

定义 1.2.1 对称式

对于一个 n 元多项式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$，若对于数 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个排列 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$，都有

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则称 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为对称式。

“对称”体现在字母地位平等，没有哪个字母是特殊的。只要式子中包含某个由特定字母组成的项（例如 a^2b），那么它一定包含由所有其他字母以同样的方式组成的项（即 $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$）。

这样我们就认识了对称式的概念，这样当读者听到别人说“对称式”的时候，不会至于一脸懵逼，或者一边点头，假装听懂，然后用直觉去理解这个概念（这样的情况长期发展下去，是不利于学习数学的）。当然，读者也许会发现，像“$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$”这样的式子其实比较长，占用了较大的空间，也显得不够简洁。因此我们不妨规定以下记号：

定义 1.2.2 循环和

性质 1.2.1 对称式的性质

（1）基本对称多项式的基础性：

那么下面我们乘胜追击，再来看一组式子：

例题 1.2.2

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$a^2b+b^2c+c^2a$$

$$a^3b+b^3c+c^3a$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

解 1.2.2. 和刚才的对称式不同，如果我们这里调换某两个字母的位置，那么结果也会发生变化。比如 $a^2b+b^2c+c^2a$ 中，如果我们把 a 和 b 调换位置，那么结果也会发生变化，比如说新出现了 b^2a 项，这是原来所没有的。

但是读者会发现，这个式子看上去也是有规律可循的，比如 $a^3b+b^3c+c^3a$ 中，a^3 项出现了，那不用猜也知道 b^3 和 c^3 也会在其它部分出现，而且出现的次数相同，但是和上文的规律不一样，a^3 后面只会跟着 b，却没有 c，即没有 a^2c 项。

例题 1.2.3

将 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 进行展开，并尽己所能地保证结果的每个部分都是由 a,b,c 三个元同时出现且地位相同的式子：

解 1.2.3. 先展开，再重组：

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&=(b^2+ac+ab+bc)(a+c)\\&=ab^2+b^2c+a^2c+ac^2+a^2b+abc+abc+bc^2\\&=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\end{aligned}$$

最后为什么

定理 1.2.1

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

第二章 手稿

2.1 杂题收录

例题 2.1.1

已知 $x, y > 0$，且 $x^2 + 9y^2 = 12$，则 $\dfrac{x+2}{y+1} - 3x$ 的最小值为__________.

解 2.1.1.

例题 2.1.2 （高考题改编）

（单选）设代数式 $T=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{200}{199}$，则（ ）

A.$14<T<16$ B.$16<T<18$ C.$18<T<20$ D.$20<T<22$

解 2.1.2. 出题背景是大名鼎鼎的 Wallis 公式：

$$
\begin{aligned}
I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(-\cos x)&\\
&=(-\cos x\sin^{n-1}x)|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,\mathrm{d}\sin^{n-1}x\\
&=(-\cos x\sin^{n-1}x)|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^2 x)(n-1)\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)\,\mathrm{d}x=(n-1)I(n-2)-(n-1)I(n)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow I(n)=\frac{n-1}{n}I(n-2)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{I(2n+1)}{I(2n-1)}=\dfrac{2n}{2n+1}\\[2mm]\dfrac{I(2n)}{I(2n-2)}=\dfrac{2n-1}{2n}\end{cases}
$$

所以累乘有：

$$
\begin{aligned}
\frac{I(3)}{I(1)}\cdot\frac{I(5)}{I(3)}\cdots\frac{I(2n+1)}{I(2n-1)}&=\frac{2\times1}{2\times1+1}\times\frac{2\times2}{2\times2+1}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\
\frac{I(2)}{I(0)}\cdot\frac{I(4)}{I(2)}\cdots\frac{I(2n)}{I(2n-2)}&=\frac{2\times1-1}{2\times1}\times\frac{2\times2-1}{2\times2}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}
\end{aligned}
$$

又因为：

$$
\begin{aligned}
I(2k+1)<I(2k)<I(2k-1)&\Rightarrow\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}<\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\\
&\Rightarrow\frac{1}{2k+1}\cdot[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}]^2<\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2k}\cdot[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}]^2
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}=\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n-1})=(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7})(\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9})
$$

所以：

$$
T^2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\approx\frac{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}}{(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7})\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}}\frac{\pi}{2}
$$

则 $T^2\approx\frac{(2n+1)\pi}{2}$，简单计算得知原题选 B.

方法二是使用放缩，先平方然后用糖水不等式，这个方法很套路，稍微一放就排除了 A 选项：

$$\begin{aligned}T^2&=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{200}{199}\cdot\frac{200}{199}\\&>\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{200}{199}\cdot\frac{201}{200}\\&=268>16^2\end{aligned}$$

但是另一边就有点难度了，首先我们可以根据应试技巧，由“下界比较松”推测出来“上界比较紧”，所以在找上界的时候要放得仔细一点，当然严格说来这个推测逻辑缺乏依据。或者我们根据“仍有 BCD 选项需要分辨”的现状，可以考虑多保留几项再放缩，提高一下精度：

$$\begin{aligned}T^2&=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\cdot\frac{20}{19}\cdot\frac{22}{21}\cdot\frac{22}{21}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{24}{23}\cdots\frac{200}{199}\cdot\frac{200}{199}\\&=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\cdot\frac{20}{19}\cdot\frac{22}{21}\cdot\boxed{\frac{22}{21}}\cdot\frac{24}{23}\cdot\boxed{\frac{23}{22}}\cdots\frac{200}{199}\cdot\boxed{\frac{199}{198}}\\\Rightarrow T&\leq\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{20}{19}\cdot\sqrt{\frac{200}{20}}=\frac{512\times512}{(15-4)(15-2)(15+2)(15+4)}\sqrt{10}\\&=\frac{262144}{46189}\sqrt{10}<3.1623\times5.68<18\end{aligned}$$

熟知 $\sqrt{10}=3.16227766...<3.1623$，计算得到 $\frac{262144}{46189}<5.68$ 这样得知本题选 B.
对于考试来说，把题目的答案改成 $17<T<19$ 或许是更好的选择.

例题 2.1.3 （高考题改编）

（单选）数列 a_n 各项为正整数且递增，$a_{n+2}=C_{a_{n+1}}^{a_n}$，则（　　）

A.$a_n<a_{n-1}+1$　　B.a_1,a_2,a_3 可能成等比数列

C.$a_3a_4<a_5$　　D.a_3,a_4,a_5 可能成等比数列

解 2.1.3. 由于 a_n 递增，则 A 显然错误；下面考虑选项 BD：

$$a_na_{n+2}=a_nC_{a_{n+1}}^{a_n}=a_{n+1}C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}=a_{n+1}^2\Rightarrow a_{n+1}=C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}$$

当 $a_n=1$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1}=C_{a_{n+1}-1}^0=1=a_n$，与数列递增矛盾；
当 $a_n=2$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1}=C_{a_{n+1}-1}^1=a_{n+1}-1<a_{n+1}$，矛盾；
当 $a_n>2$ 时，易得 $a_{n+1}-1>2$，代入表达式得到

$$a_{n+1}=C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}\geq C_{a_{n+1}-1}^2=\frac{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}{2}$$

解方程发现无整数解，而且由于 $C_{a_{n+1}-1}^1=a_{n+1}-1$ 是小于 a_{n+1} 的最大整数，且有

$$C_{a_{n+1}-1}^1<C_{a_{n+1}-1}^2,\ C_{a_{n+1}-1}^2\neq a_{n+1}$$

只可能是 $C_{a_{n+1}-1}^{2}>a_{n+1}$.
雪上加霜的是，$C_{a_{n+1}-1}^{2}$ 和 $C_{a_{n+1}-1}^{1}$ 中间没有数可以等于 $C_{a_{n+1}-1}^{m}$，所以 BD 错误；
考虑 C，易得 $a_1\neq 1,a_2\geq 4,a_3\geq 6,a_4=C_{a_3}^{a_2}>2a_3+1$，由

$$a_5=C_{a_4}^{a_3}>a_3a_4\Rightarrow a_3^2<C_{a_4-1}^{a_3-1}<C_{2a_3}^{a_3-1}$$

转化为 $a_3^3+a_3<C_{2a_3}^{a_3}$ 这是显然成立的，故本题目选 C

例题 2.1.4

已知 $\triangle ABC$ 中，$A=3B=9C$，则 $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A=$_____.

解 2.1.4. 解得 $A=\dfrac{9\pi}{13},B=\dfrac{3\pi}{13},C=\dfrac{\pi}{13}$ 考虑积化和差：

$$\begin{aligned}
&\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\\
&=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B)+\cos(B+C)+\cos(B-C)+\cos(A+C)+\cos(A+C))\\
&=\frac{1}{2}(\cos\frac{12\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13})\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\sin\frac{\pi}{13}(\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13})\\
&=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{13}}(\sin\frac{\pi}{13}-\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}-\sin\frac{5\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{7\pi}{13}\\
&\qquad+\sin\frac{7\pi}{13}-\sin\frac{9\pi}{13}+\sin\frac{9\pi}{13}-\sin\frac{11\pi}{13}+\sin\frac{11\pi}{13}-\sin\frac{13\pi}{13})\\
&=-\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

定理 2.1.1 阿贝尔求和

设 B_n 是数列 b_n 的前 n 项和，当 $n\geq 2$ 时，有：

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_nB_n-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B_n$$

证明 2.1.1. 当 $n\geq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i &=a_1b_1+\sum_{i=2}^{n}a_i(B_i-B_{i-1})\\ &=a_1b_1+\sum_{i=2}^{n}a_iB_i-\sum_{i=2}^{n}a_iB_{i-1}\\ &=\sum_{i=1}^{n}a_iB_i-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i+1}B_i\\ &=a_nB_n-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B_n\end{aligned}$$

例题 2.1.5 （来自 Fiddie）

设数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数，且当 $n\geq 2$ 时，$a_{n+1}+a_{n-1}=|a_n|$. 证明：

（1）存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m\leq 0$

（2）存在正整数 m 使得 $a_m\leq 0$, $a_{m+1}\leq 0$

（3）$a_n=a_{n+9}$

解 2.1.5. (1) 当 $n\geq 2$ 时，由

$$\begin{cases}a_{n+1}+a_{n-1}=|a_n|\\ a_{n+2}+a_n=|a_{n+1}|\end{cases}\Rightarrow a_{n+2}+a_{n+1}+a_n+a_{n-1}=|a_n|+|a_{n+1}|$$

$$\Rightarrow a_{n+2}+a_{n-1}=|a_n|-a_n+|a_{n+1}|-a_{n+1}\geq 0$$

若 $n\geq 2$ 时 $a_n>0$, 上式化为 $a_{n+2}+a_{n-1}=0$，矛盾，故存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m\leq 0$

(2) 已证存在大于 1 的整数 m 使得 $a_m\leq 0$，现假设不存在正整数 k 使得 $a_k\leq 0$, $a_{k+1}\leq 0$，则不妨设 a_m 为首个小于等于 0 的项，由假设得 $a_1,a_2,...a_{m-1}>0,a_m\leq 0,a_{m+1}>0$，可以通过不断消元推出矛盾：

$$\begin{aligned}&a_{m+1}+a_{m-1}=|a_m|=-a_m\Rightarrow a_{m+1}=-a_m-a_{m-1}\\ &a_{m+2}+a_m=|a_{m+1}|=a_{m+1}\Rightarrow a_{m+2}=a_{m+1}-a_m>0+0=0\\ &a_{m+3}+a_{m+1}=|a_{m+2}|=a_{m+2}\Rightarrow a_{m+3}=a_{m+2}-a_{m+1}=a_{m+1}-a_m-a_{m+1}=-a_m\geq 0\\ &a_{m+4}+a_{m+2}=|a_{m+3}|=-a_m\Rightarrow a_{m+4}=-a_m-a_{m+2}=-a_{m+1}<0\\ &a_{m+5}+a_{m+3}=|a_{m+4}|=a_{m+1}\Rightarrow a_{m+5}=a_{m+1}-a_{m+3}=a_m+a_{m+1}=-a_{m-1}<0\end{aligned}$$

由 $a_{m+4}<0,a_{m+5}<0$ 知矛盾，故存在正整数 k 使得 $a_k\leq 0$, $a_{k+1}\leq 0$.

(3) 抓住上面第二小问的提示就可以得到：

$$a_{m+6}+a_{m+4}=|a_{m+5}|=a_{m-1}\Rightarrow a_{m+6}=a_{m-1}-a_{m+4}=a_{m-1}+a_{m+1}=-a_m$$
$$a_{m+7}+a_{m+5}=|a_{m+6}|=-a_m\Rightarrow a_{m+7}=-a_m-a_{m+5}=a_{m-1}-a_m$$
$$a_{m+8}+a_{m+6}=|a_{m+7}|=a_{m-1}-a_m\Rightarrow a_{m+8}=a_{m-1}-a_m-a_{m+6}=a_{m-1}$$
$$a_{m+9}+a_{m+7}=|a_{m+8}|=a_{m-1}\Rightarrow a_{m+9}=a_{m-1}-a_{m+7}=a_{m-1}-a_{m-1}+a_m=a_m$$

所以设 $T=9$，有
$$\begin{cases}a_m=a_{m+nT},n\in N\\a_{m-1}=a_{m-1+nT},n\in N\end{cases}$$

然后由于
$$a_{m-2+nT}=|a_{m-1+nT}|-a_{m+nT}=|a_{m-1}|-a_m=a_{m-2}$$

以此类推，则有
$$a_k=a_{k+nT},k\in N_+,k\le m$$

取合适的 m 使得 m 大于 T，则数列 $\{a_n\}$ 为周期数列，其中一个周期为 9

例题 2.1.6 （南通 9 调 14 题）

已知 x,y 满足 $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+4}-y)=2$，则 4^x+2^{y-1} 的最小值为_____.

解 2.1.6. 套路题，先换元：
$$\begin{cases}m=\sqrt{x^2+1}-x\Rightarrow x=\dfrac{1}{2m}-\dfrac{2}{m}\\n=\sqrt{y^2+4}-y\Rightarrow y=\dfrac{2}{n}-\dfrac{n}{2}\end{cases}$$

再代入 $mn=2\Rightarrow n=\dfrac{2}{m}$：
$$y=\frac{2}{n}-\frac{n}{2}=m-\frac{1}{m}\Rightarrow y=-2x$$

所以：
$$4^x+2^{y-1}=4^x+\frac{1}{2\times4^x}\ge2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

当 $x=\frac{1}{4}$ 时取得等号

例题 2.1.7 （深圳中学 2025 届二轮一阶）

$\triangle ABC$ 中，若

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AE}=\dfrac{\mu}{\mu+1}\overrightarrow{AB}\end{cases}$$

则连接 BD,CE 得到交点 Q，任取 $\triangle ABC$ 所在平面内某一点 P，那么有：

$$PQ^2=\frac{PA^2+\mu PB^2+\lambda PC^2}{1+\lambda+\mu}-\frac{\lambda\mu BC^2+\lambda AC^2+\mu AB^2}{(1+\lambda+\mu)^2}$$

解 2.1.7. 设

$$\begin{cases}\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}+(1-x)\overrightarrow{AB}=x\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}+(1-x)\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AQ}=y\overrightarrow{AE}+(1-y)\overrightarrow{AC}=y\dfrac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AB}+(1-y)\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\lambda+1}{1+\lambda+\mu}\\ y=\dfrac{\mu+1}{1+\lambda+\mu}\end{cases}$$

化为形如 $x\overrightarrow{QA}+y\overrightarrow{QB}+z\overrightarrow{QC}=0$ 的方程:

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\overrightarrow{AQ}=\frac{\lambda}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{AC}+\frac{\mu}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}\\ &\quad=\frac{\lambda}{1+\lambda+\mu}(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QC})+\frac{\mu}{1+\lambda+\mu}(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QB})\\ &\quad=\frac{\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{AQ}+\frac{\lambda}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{QC}+\frac{\mu}{1+\lambda+\mu}\overrightarrow{QB}\\ &\Rightarrow\overrightarrow{QA}+\lambda\overrightarrow{QC}+\mu\overrightarrow{QB}=\vec{0}\\ &\Rightarrow\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PQ}+\lambda(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PQ})+\mu(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PQ})=\vec{0}\\ &\Rightarrow\overrightarrow{PA}+\lambda\overrightarrow{PC}+\mu\overrightarrow{PB}=(1+\lambda+\mu)\overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

平方得:

$$PA^2+\lambda^2PC^2+\mu^2PB^2+2\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}+2\mu\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+2\lambda\mu\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=(1+\lambda+\mu)^2PQ^2$$

分别代入

$$\begin{cases}2\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\lambda\left(PA^2+PC^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})\right)^2=\lambda(PA^2+PC^2-AC^2)\\ 2\mu\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\mu\left(PA^2+PB^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})\right)^2=\mu(PA^2+PB^2-AB^2)\\ 2\lambda\mu\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=\lambda\mu\left(PC^2+PB^2-(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})\right)^2=\lambda\mu(PC^2+PB^2-BC^2)\end{cases}$$

变形即可得到:

$$PQ^2=\frac{PA^2+\mu PB^2+\lambda PC^2}{1+\lambda+\mu}-\frac{\lambda\mu BC^2+\lambda AC^2+\mu AB^2}{(1+\lambda+\mu)^2}$$

因此有结论：

结论 2.1.1 结论

平面内给定 $\triangle ABC$，若点 Q 满足

$$\overrightarrow{QA}+\lambda\overrightarrow{QC}+\mu\overrightarrow{QB}=\vec{0}$$

则任取 $\triangle ABC$ 所在平面内某一点 P，有

$$PQ^2=\frac{PA^2+\mu PB^2+\lambda PC^2}{1+\lambda+\mu}-\frac{\lambda\mu BC^2+\lambda AC^2+\mu AB^2}{(1+\lambda+\mu)^2}$$

例题 2.1.8 奔驰定理

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，以及平面内任意一点 P，则有：

$$\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\\ x_P & y_P & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{PA}+\begin{vmatrix} x_C & y_C & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_P & y_P & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{PB}+\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_P & y_P & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

这等价于

$$S_{\triangle PBC}\overrightarrow{PA}+S_{\triangle PAC}\overrightarrow{PB}+S_{\triangle PAB}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

这里的三角形面积是有向面积，我们必须在计算三角形面积时按照字母顺序看一下方向（顺时针或逆时针），然后将与其他两个方向不同的三角形的对应面积取负值。

解 2.1.8.

例题 2.1.9 外心向量关系

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，则其外心满足关系式：

解 2.1.9.

例题 2.1.10 三角形外心坐标

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，则其外心的坐标为

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} OA^2 & y_A & 1\\ OB^2 & y_B & 1\\ OC^2 & y_C & 1\end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}},\frac{\begin{vmatrix} x_A & OA^2 & 1\\ x_B & OB^2 & 1\\ x_C & OC^2 & 1\end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}}\right)$$

解 2.1.10.

例题 2.1.11 三角形垂心坐标

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，则其垂心的坐标为

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} x_Bx_C+y_By_C & y_A & 1\\ x_Ax_C+y_Ay_C & y_B & 1\\ x_Ax_B+y_Ay_B & y_C & 1\end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_Bx_C+y_By_C & 1\\ x_B & x_Ax_C+y_Ay_C & 1\\ x_C & x_Ax_B+y_Ay_B & 1\end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}}\right)$$

解 2.1.11.

例题 2.1.12 三角形的内心坐标

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$，则其内心的坐标为

$$\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}, \frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$$

解 2.1.12.

例题 2.1.13 容斥原理练习

某学校举办比赛，有 20 个参赛名额，现在分给 4 个不同的班，保证至少有一个班的名额为 4 个，且每一个班都有名额，则共有_____ 种分法。

解 2.1.13. 设四个班的名额为 $x_1,x_2,x_3,x_4\in N_+$，则分法数就是集合 $A_i=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_i=4,x_1+x_2+x_3+x_4=20\}$ 的元素个数，又因为

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \{(x_1,x_3,x_4)\mid x_2+x_3+x_4=16,x_2,x_3,x_4>0\}=C_{15}^2\\
|A_1\cap A_2| &= \{(x_3,x_4)\mid x_3+x_4=12,x_3,x_4>0\}=C_{11}^1\\
|A_1\cap A_2\cap A_3| &= 1\\
|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4| &= C_4^1|A_1|-C_4^2|A_1\cap A_2|+C_4^3|A_1\cap A_2\cap A_3|\\
&= C_4^1C_{15}^2-C_4^2+C_4^3C_{11}^1=358
\end{aligned}$$

例题 2.1.14 求和

计算 $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k$，其中 $k<n-1, k\in N_+$

解 2.1.14. 定义函数并对其求 k 阶导数：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^i x^{i+1} = x\sum_{i=0}^{n-1}(-x)^i C_{n-1}^i \\
&= x(1-x)^{n-1} = (x-1+1)(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-1}-(1-x)^n \\
\Rightarrow f(1) &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^i = 0 \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^i A_{i+1}^k x^{i+1-k} \Rightarrow f^{(k)}(1) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^i A_{i+1}^k
\end{aligned}
$$

现已很接近原式，问题在于沟通 A_{i+1}^k 和 $(i+1)^k$，我们假想这样一个情境：有 k 个不同的球等待放进 $i+1$ 个不同的盒子里面，放置过程中允许空盒的存在，所以放法是 $(i+1)^k$，然后我们换一种方式，考虑分为恰好有 $0,1,2,3,4,...,k$ 个非空盒子的情况，那么求和就是

$$\sum_{r=0}^{k} S(k,r)r!C_{i+1}^r = \sum_{r=0}^{k} S(k,r)A_{i+1}^r$$

其中 $S(k,r)$ 表示 k 个有标号的球放到 r 个同样的盒子里面的方法数，C_{i+1}^r 表示从 $i+1$ 个不同的盒子无序地挑出 r 个盒子来放球，再对其进行全排列使得挑出来的 r 个盒子有编号，则：

$$(i+1)^k = \sum_{r=0}^{k} S(k,r)A_{i+1}^r$$

那么代入到 $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k$ 中就有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k &= \sum_{i=0}^{n-1}\left((-1)^i C_{n-1}^i \left(\sum_{r=0}^{k} S(k,r)A_{i+1}^r\right)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{k} S(k,r)A_{i+1}^r(-1)^i C_{n-1}^i \\
&= \sum_{r=0}^{k}\sum_{i=0}^{n-1} S(k,r)A_{i+1}^r(-1)^i C_{n-1}^i = \sum_{r=0}^{k} S(k,r)f^{(r)}(1)
\end{aligned}
$$

对 $(1-x)^{n-1}-(1-x)^n$ 求导易得 $f(x)$ 只有第 $n-1$ 和 n 阶导数在 $x=1$ 处的值不是 0，即：

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k = 0$$

例题 2.1.15 证明

(1) $\dfrac{\sin B-\cos A}{\sin A+\cos B}-\dfrac{\sin A+\cos B}{\sin B-\cos A}=2\tan(A+B)$

(2) $\dfrac{\sin B-\cos A}{\sin A-\cos B}-\dfrac{\sin A-\cos B}{\sin B-\cos A}=\dfrac{\cos B+\sin A}{\cos A+\sin B}-\dfrac{\cos A+\sin B}{\cos B+\sin A}=2\tan(A-B)$

(3) $\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}-\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A-\cos B}=2\cot(A+B)$

(4) $\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}-\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}=\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}-\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=2\cot(A-B)$

解 2.1.15. 第一种方法就是通分，拿一个式子举例

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin B-\cos A}{\sin A-\cos B}-\frac{\sin A-\cos B}{\sin B-\cos A}\\
&=\frac{(\sin B-\cos A)^2-(\sin A-\cos B)^2}{(\sin B-\cos A)(\sin A-\cos B)}\\
&=\frac{\sin^2 B-2\sin B\cos A+\cos^2 A-\sin^2 A+2\sin A\cos B-\cos^2 B}{\sin B\sin A-\sin A\cos A-\sin B\cos B+\cos B\cos A}\\
&=\frac{\cos 2A-\cos 2B+2(\sin A\cos B-\sin B\cos A)}{\cos(A-B)-\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)}\\
&=\frac{-2\sin(A+B)\sin(A-B)+2\sin(A-B)}{\cos(A-B)-\sin(A+B)\cos(A-B)}=\frac{2[1-\sin(A+B)]\sin(A-B)}{[1-\sin(A+B)]\cos(A-B)}\\
&=\frac{2\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=2\tan(A-B).
\end{aligned}
$$

再写一个：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}-\frac{\sin A-\sin B}{\cos A-\cos B}\\
&=\frac{(\cos A-\cos B)^2-(\sin A-\sin B)^2}{(\cos A-\cos B)(\sin A-\sin B)}\\
&=\frac{\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B-\sin^2 A+2\sin A\sin B-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin A\cos B-\sin B\cos A+\sin B\cos B}\\
&=\frac{(\cos^2 A-\sin^2 A)+(\cos^2 B-\sin^2 B)-2\cos A\cos B+2\sin A\sin B}{\sin A\cos A+\sin B\cos B-(\sin A\cos B+\sin B\cos A)}\\
&=\frac{\cos 2A+\cos 2B-2\cos(A+B)}{\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)-\sin(A+B)}=\frac{2\cos(A+B)\cos(A-B)-2\cos(A+B)}{\sin(A+B)\cos(A-B)-\sin(A+B)}\\
&=\frac{2\cos(A+B)[\cos(A-B)-1]}{\sin(A+B)[\cos(A-B)-1]}=\frac{2\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=2\cot(A+B).
\end{aligned}
$$

第二种方法就是按部就班地和差化积，拿一个式子举例

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin B-\cos A}{\sin A-\cos B}-\frac{\sin A-\cos B}{\sin B-\cos A}\\
&=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)-\cos A}{\sin A-\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}-\frac{\sin A-\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)-\cos A}\\
&=\frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)}\\
&=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)}\\
&=-2\frac{\cos\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\right]}{\sin\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\right]}=-2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+A-B\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+A-B\right)}\\
&=-2\frac{-\sin\left(A-B\right)}{\cos\left(A-B\right)}=2\tan\left(A-B\right).
\end{aligned}
$$

再写一个：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}-\frac{\sin A-\sin B}{\cos A-\cos B}\\
&=\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}-\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}\\
&=\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}-\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}\\
&=-\frac{\cos\left[2\cdot\frac{A+B}{2}\right]}{\frac{1}{2}\sin\left[2\cdot\frac{A+B}{2}\right]}=-\frac{\cos(A+B)}{\frac{1}{2}\sin(A+B)}\\
&=-2\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=2\cot(A+B).
\end{aligned}
$$

例题 2.1.16 （2008 年江西浸泡压轴题）

已知 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\dfrac{ax}{ax+8}}, x\in(0,+\infty)$

（1）当 $a=8$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间.

（2）对于任意正数 a，求证 $1<f(x)<2$.

解 2.1.16.（1）当 $a=8$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{3}+\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$，观察式子不难想到换元 $x=\tan^2\theta$：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}+\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}}=\cos\theta+\frac{1}{3}+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{3}$$

由 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减。

（2）这道题难就难在题目给了函数，似乎是暗示学生走求导的路子，但求导异常难做，反而看成是不等式问题却能找到方向。由于函数结构不对称，我们引入第三个变元就可以将本题条件化为对称形式：令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\sqrt{\frac{xy}{xy+8}}, x,y\in(0,+\infty)$:

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\in(0,1)\\ b=\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}\in(0,1)\\ c=\sqrt{\dfrac{xy}{xy+8}}\in(0,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2=\dfrac{1}{1+x}, x=\dfrac{1}{a^2}-1\\ b^2=\dfrac{1}{1+y}, y=\dfrac{1}{b^2}-1\\ c^2=\dfrac{ax}{ax+8}=1-\dfrac{8}{ax+8}\end{cases}$$

现在要找到三个元之间的关系式，消元法就够了：

$$c^2=1-\frac{8}{ax+8}=1-\frac{8}{(\frac{1}{a^2}-1)(\frac{1}{b^2}-1)+8}\Rightarrow(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)=8a^2b^2c^2$$

先假设 $a+b+c>=2$，列出已知条件：

$$\begin{cases} a,b,c\in(0,1), \quad a+b+c\geq 2\\ (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)=8a^2b^2c^2\end{cases}$$

我们现在要证明的是“同时满足这几个条件的题目是一个错题”。其中最后一个条件看似很强，给出了三元关系，但是如果不拿来消元的话很难用上，而消元又回到了原题的情形，这就很尴尬了。那我们不妨尝试删除 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)=8a^2b^2c^2$ 并尝试通过剩余条件导出 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\neq 8a^2b^2c^2$，即 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)>8a^2b^2c^2$ 或 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)<8a^2b^2c^2$。而这个式子是对称的，我们不妨拆成 $(1-a^2)>2bc$ 或 $(1-a^2)<2bc$ 来证明，虽然这个转换之后的式子是原来式子成立的充分而非必要条件，但确实是可以尝试的方向，是不是可以叫“充分性探路”呢？

$$\begin{cases} 1-a^2=(1-a)(1+a)<2(1-a)=2(b+c-1)\\ (1-b)(1-c)\in(0,1)\Rightarrow bc+1<b+c\end{cases}\Rightarrow 1-a^2<2bc$$

这样同理得到 $1-b^2<2ac, 1-c^2<2ab$，这样就有 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)<8a^2b^2c^2$，矛盾，所以 $a+b+c<2$。然后我们紧接着设 $a+b+c\le 1$，同样列出已知条件：

$$\begin{cases} a,b,c\in(0,1), \quad a+b+c<=1 \\ (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)=8a^2b^2c^2 \end{cases}$$

同样的套路，我们依然考虑证明 $(1-a^2)>2bc$ 或 $(1-a^2)<2bc$，由

$$\begin{cases} 1-a^2=(1-a)(1+a)>1-a\ge b+c \\ (1-b)(1-c)\in(0,1)\Rightarrow bc<b+c \end{cases} \Rightarrow 1-a^2>2bc$$

这样同理得到 $1-b^2>2ac, 1-c^2>2ab$，这样就有 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)>8a^2b^2c^2$，矛盾。所以只能是 $1<a+b+c<2$.

（3）当然本题解法不唯一，比如说我们根据

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\sqrt{\frac{xy}{xy+8}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{8}{xy}}}$$

来换元 $z=\dfrac{8}{xy}$，则有 $xyz=8$ 要证明 $1<\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}<2$，已知条件是 $x,y,z>0$，那么 $(x-2)(y-2)(z-2)<8$，不妨假设数量关系 $x\le y\le z$，就有

$$\begin{cases} 2\le z \\ xyz=8 \end{cases} \Rightarrow xy\le 4$$

然后运用对偶式的思想证明出：

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}>\frac{1}{1+\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+\frac{y}{2}}\ge\frac{1}{1+\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=1$$

由 $z\ge 2$ 得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}}<\frac{1}{1+\frac{z}{8}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{xy}}}=\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}$$

以及

$$(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}})(1-\frac{1}{\sqrt{1+y}})>0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}<1+\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+y)}}<1+\frac{1}{1+\sqrt{xy}}$$

合起来就是：

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}<1+\frac{1}{1+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}=2$$

这个 $\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}<\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{8}}$ 是事后诸葛，高考生不必深究。

例题 2.1.17 （2008 年江西导数压轴）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{ax}}}$. 证明：$1<f(x)<2$.

解 2.1.17. 将 a 视作参数，直接暴力求导：

$$\begin{aligned}
f'(x)&=-\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2(1+\frac{8}{ax})^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{8}{ax^2}\\
&=-\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}+\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}}=\frac{8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{64a(1+x)^3-x(ax+8)^3}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\right]}\\
&=\frac{-a^3x^4-24a^2x^3+64ax^3+192ax+64a-512x}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\right]}\\
&=\frac{-a(a^2x^4+(24a-64)x^3-8(24-\frac{64}{a})x-64)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\right]}\\
&=\frac{-a\Big((ax^2-8)(ax^2+8)+(24-\frac{64}{a})(ax^3-8x)\Big)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\right]}\\
&=\frac{(ax^2-8)\left(-x^2a^2-24xa-8a+64x\right)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\right]}\\
&=\frac{(\sqrt{a}x-2\sqrt{2})(\sqrt{a}x+2\sqrt{2})(-a^2x^2+(64-24a)x-8a)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}\right]}
\end{aligned}$$

这个分子有理化（目的是提取恒正的项）肯定是套路式的，但是这个因式分解，笔者认为有点小技巧，我们提取 a 使得常数项真正地为常数，然后由于二次项为 0，以及一次项和三次项之间有倍数关系，采取凑平方差，分解成了两个二次函数，由于分母大于 0，现在要对分子的正负性进行讨论，方便起见，我们看一下后面那个丑陋的二次函数的判别式长什么样：

$$\Delta=(64-24a)^2-32a^3=32(-a^3+18a^2-96a+128)=32(2-a)(a-8)^2$$

所以如果限定 $a\geq 2$ 那么 $\Delta\leq 0$，再加上二次项为负数，所以这个二次函数小于 0，但是我们能不能做这样的限定呢？其实是可以的，因为 $f(x)$ 根号的下面主要有 $a,x,\frac{8}{ax}$，这三个东西乘起来是 8，是对称的三个变元，我们显然可以给它们规定大小顺序，所以想一想不难知道规定 $a\geq 2$ 是合理的，那么规定另外两个大于等于 2 行不行呢？也行，但是会导致解题变得更加复杂，所以不推荐。

现在，我们只需关注 $\sqrt{a}x-2\sqrt{2}$ 的正负性了，这东西是一次函数，容易知道 $f'(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{8}{a}})$ 大于 0，在 $(\sqrt{\frac{8}{a}},+\infty)$ 小于 0，所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{8}{a}})$ 单调递增，在 $(\sqrt{\frac{8}{a}},+\infty)$ 单调递减。所以 $f(x)$

的最大值是

$$f(\sqrt{\frac{8}{a}}) = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{a}}}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}}$$

下面考虑最小值，发现当 $x \to 0$ 时，$f(x) \to 1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}}$，当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to 1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}}$，所以

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}} < f(x) < \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{a}}}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}}$$

此时 $1 < f(x)$ 已经得证，下面只需证明

$$g(a) = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{a}}}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}} < 2$$

再次求导：

$$\begin{aligned}
g'(a) &= -\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{-2\sqrt{2}}{2a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2(1+a)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{8(1+a)^3 - \left(a+2\sqrt{2a}\right)^3}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\left[2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]} \\
&= \frac{(a-2\sqrt{2a}+2)\left[4(1+a)^2 + 2(1+a)(a+2\sqrt{2a}) + (a+2\sqrt{2a})^2\right]}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\left[2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]} \\
&= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2\left[4(1+a)^2 + 2(1+a)(a+2\sqrt{2a}) + (a+2\sqrt{2a})^2\right]}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\left[2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]} \geq 0
\end{aligned}$$

所以原函数 $g(a)$ 单调递增，考虑到

$$\lim_{x \to +\infty} g(a) = 0 + 2 = 2$$

所以 $f(x) < 2$ 也得证。

例题 2.1.18 （抹茶奶绿供题）

平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{a^2}=1,(a>4)$，椭圆的弦 AB 过点 $D(-2,0)$，连接 OA,OB，线段 OB 交圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 于 C，若 DC 平行于 OA，求 $a=$______.

解 2.1.18. 设 $B(x_1,y_1),A(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，比值换元 $-\lambda=\dfrac{x_1+2}{x_2+2}=\dfrac{y_1}{y_2}$，则:

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{16}+\dfrac{y_1^2}{a^2}=1 & \Rightarrow \dfrac{x_1^2-\lambda^2x_2^2}{16}+\dfrac{y_1^2-\lambda^2y_2^2}{a^2}=1-\lambda^2\\ \dfrac{\lambda^2x_2^2}{16}+\dfrac{\lambda^2y_2^2}{a^2}=\lambda^2 & \Rightarrow \dfrac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{16(1+\lambda)(1-\lambda)}+\dfrac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{a^2(1+\lambda)(1-\lambda)}=1\end{cases}$$

代入 $x_1+\lambda x_2=(-2)(1+\lambda),y_1+\lambda y_2=0$ 得

$$\frac{-(x_1-\lambda x_2)}{8(1-\lambda)}=1\Rightarrow\lambda=\frac{x_1+8}{x_2+8}\Rightarrow-\lambda=\frac{x_1+2}{x_2+2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1+8}{-x_2-8}$$

$$\Rightarrow y_2=\frac{-3y_1}{x_1+5},\quad x_2=\frac{-3(x_1+2)}{x_1+5}-2=\frac{-5x_1-16}{x_1+5}$$

设 $y_1=kx_1$，则代入 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 得 $\dfrac{x_1^2}{16}+\dfrac{k^2x_1^2}{a^2}=1\Rightarrow\begin{cases}x_1=\pm\dfrac{4}{\sqrt{a^2+16k^2}}\\ y_1=\pm\dfrac{4k}{\sqrt{a^2+16k^2}}\end{cases}$

再代入圆方程得到 $(x+1)^2+k^2x^2=4\Rightarrow(k^2+1)x^2+2x-3=0\Rightarrow\begin{cases}x_3=\dfrac{-1\pm\sqrt{3k^2+4}}{k^2+1}\\ y_3=\dfrac{-k\pm k\sqrt{3k^2+4}}{k^2+1}\end{cases}$.

我们不妨先带着正负号一起计算，注意下面的正负号一起取正或取负

$$k_{AO}=\frac{3y_1}{5x_1+16}=\frac{\dfrac{\pm12k}{\sqrt{a^2+16k^2}}}{\pm\dfrac{20}{\sqrt{a^2+16k^2}}+16}=\frac{\pm3k}{4\sqrt{a^2+16k^2}\pm5}$$

$$k_{DC}=\frac{\dfrac{-k\pm k\sqrt{3k^2+4}}{k^2+1}}{\dfrac{-1\pm\sqrt{3k^2+4}}{k^2+1}+2}=\frac{-k\pm k\sqrt{3k^2+4}}{2k^2+1\pm\sqrt{3k^2+4}}$$

由 $k_{AO}=k_{CD}$ 得到 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3k^2+4}}{2k^2+1\pm\sqrt{3k^2+4}}=\dfrac{\pm3}{4\sqrt{a^2+16k^2}\pm5}$，提取常数并变形得到:

$$\pm1=\frac{1}{\sqrt{3k^2+4}}-\frac{2\sqrt{a^2+16k^2}}{3k^2+4}\pm2\sqrt{\frac{a^2+16k^2}{3k^2+4}}$$

所以若要求此式成立且 a 为常数，必有 $\dfrac{a^2+16k^2}{3k^2+4}$ 为常数，则计算得到 $a=\dfrac{8}{\sqrt3}>4$，反向代入验证充分性即可得到答案为 $a=\dfrac{8}{\sqrt3}$.

例题 2.1.19 （杭二模拟）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，设其左焦点为 $F(-1,0)$

（1）若椭圆上的两点 M,N 满足直线 MF,NF 关于 x 轴对称，且直线 MN 斜率存在，证明直线 MN 过定点.

（2）若过 $B(-2,2)$ 的一条直线交椭圆于 M,N，$A(2,0)$，连接直线 AM,AN 交直线 OB 于 P,Q，求 $\dfrac{|OP|}{|OQ|}$ 的值.

解 2.1.19. （1）注意到直线 MF,NF 关于 x 轴对称，那么直线 MF,NF 一定关于 y 轴对称，又因为直线 MN 斜率存在，所以 M,N 在 x 轴同侧，且 $k_{MF}+k_{NF}=0$. 首先这个题用不联立是非常简单的，但是联立也很好做，这里用同解方程做法：

$$\begin{cases}(x+1+ty)(x+1-ty)=0\\ x=my+n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my+n\end{cases}$$

$$(m^2-t^2)y^2+2m(n+1)y+(n+1)^2=0=(3m^2+4)y^2+6mny+3n^2-12=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(3m^2+4)(m^2-t^2)y^2+2m(n+1)(3m^2+4)y+(n+1)^2(3m^2+4)=0\\ (m^2-t^2)(3m^2+4)y^2+6mn(m^2-t^2)y+(3n^2-12)(m^2-t^2)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2m(n+1)(3m^2+4)=6mn(m^2-t^2)\\ (n+1)^2(3m^2+4)=(3n^2-12)(m^2-t^2)\end{cases}\Rightarrow n=-4$$

最后是两式作比得到的，当然，直接比较 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ 可以直接得到 $(-4,0)$.

（2）设 $M\left(\dfrac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\dfrac{2\sqrt{3}t_1}{1+t_1^2}\right),N\left(\dfrac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\dfrac{2\sqrt{3}t_2}{1+t_2^2}\right)$，则

$$MA:x=\frac{x_1-2}{y_1}y+2=\frac{\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2}-2}{\frac{2\sqrt{3}t_1}{1+t_1^2}}y+2=-\frac{2t_1}{\sqrt{3}}y+2\qquad NA:x=-\frac{2t_2}{\sqrt{3}}y+2$$

由直线 MA,NA 与 $y=-x$ 联立得到

$$y_P=\frac{2\sqrt{3}}{2t_1-\sqrt{3}},y_Q=\frac{2\sqrt{3}}{2t_2-\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{|OP|}{|OQ|}=-\frac{2t_2-\sqrt{3}}{2t_1-\sqrt{3}}$$

写出半代入形式的直线两点式

$$\frac{-2}{2}\frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2}=1\Rightarrow t_1+t_2=\sqrt{3}$$

得到 $\dfrac{|OP|}{|OQ|}=1$.

例题 2.1.20 （群友供题）

已知 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1>x_2$，求证 $x_1+x_2>1$.

解 2.1.20. 本题对称化构造已经有解法了，笔者补一个构造函数的做法。首先转化为证明

$$g(x)=(x-\frac{1}{2})^2, g(x_1)=(x_1-\frac{1}{2})^2>(x_2-\frac{1}{2})^2=g(x_2)$$

进行观察，我们发现如果 x_1 稍微大一点，比如当 $x_1>1$ 就已经有 $x_1+x_2>1$，所以本题的关键是在 $x=\dfrac{1}{2}$ 附近证明这个结论，由此不难想到级数展开，我们首先求导得到：

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}, f'(\frac{1}{2})=\sqrt{\mathrm{e}}-2, f''(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2}, f''(\frac{1}{2})=\sqrt{\mathrm{e}}+4,\ldots$$

这样不难得到 $f(x)$ 先减再增，极值点不好求，并列出 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 附近的级数形式：

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+(\sqrt{\mathrm{e}}-2)(x-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}+4}{2!}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{e}+8}{3!}(x-\frac{1}{2})^3+\cdots$$

我们要构造在 $x=\dfrac{1}{2}$ 左右侧正负性相反的函数 $\varphi(x)=h_1(g(x))+h_2(f(x))$，同时规定 $h_1(x)$ 单调递增，$h_2(x)$ 在 $f(x)$ 值域内单调，这样我们就可以转化证明

$$g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow h_1(g(x_1))>h_1(g(x_2))\Leftrightarrow\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$$

但是显然我们不必大费周章地考虑 $h_2(x)$，除非你想优雅地解题。此处我们可以直接取 $\varphi(x)=h_1(g(x))-f(x)$，直观一点来说，只需要找到 $(x-\dfrac{1}{2})^2$ 的某个复合函数穿过 $\left(\dfrac{1}{2},f(\dfrac{1}{2})\right)$ 这个点，且在该点左侧比 $f(x)$“矮”，右侧比 $f(x)$“高”，那么就能证明 $g(x_1)>g(x_2)$。那既然要求右侧比 $f(x)$“高”，我们初步考虑 $h_1(x)=e^{g(x)}$，由

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\Rightarrow e^{(x-\frac{1}{2})^2}=1+(x-\frac{1}{2})^2+\frac{(x-\frac{1}{2})^4}{2!}+\frac{(x-\frac{1}{2})^6}{3!}+\cdots$$

所以消去偶数次项得到 $\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}+4}{2}e^{g(x)}-f(x)-2+\ln 2+\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$，即

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}+4}{2}e^{(x-\frac{1}{2})^2}-\mathrm{e}^x+\ln x-2+\ln 2+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$$
$$\varphi'(x)=(\sqrt{\mathrm{e}}+4)(x-\frac{1}{2})\mathrm{e}^{(x-\frac{1}{2})^2}-\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}$$

由刚才分析可知，$\varphi''(x)$ 显然单增，且满足 $\varphi''(\dfrac{1}{2})=0$，故 $\varphi'(x)\geq\varphi'(\dfrac{1}{2})>0$，所以 $\varphi(x)$ 单增，$\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$，原题得证。

例题 2.1.21 （2019 年浙江导数）

对任意 $x \geq \frac{1}{e^2}$ 均有 $f(x) = a\ln x + \sqrt{1+x} - \frac{\sqrt{x}}{2a} \leq 0$，求 a 的取值范围.

解 2.1.21. 必要性探路，什么极点效应，内点效应啥的，都是一个函数与 x 轴相切的不同情形，所以我们可以直接研究 $f(x)$ 与 x 轴的相切问题，从而规避使用端点效应带来的潜在风险。

$$\begin{cases} f(x) = a\ln x + \sqrt{1+x} - \dfrac{\sqrt{x}}{2a} = 0 \\ f'(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{4a\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ln x + \sqrt{1+x} - \dfrac{\sqrt{x}}{2a} = 0 \\ \dfrac{1}{x_0}a^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0+1}}a - \dfrac{1}{4\sqrt{x_0}} = 0 \end{cases}$$

我们虽然难以直接解出第一个方程，但是却可以从第二个方程解出 a，利用求根公式得到：

$$a = \sqrt{\left(\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}\right)^2 + \frac{\sqrt{x_0}}{4}} - \frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}} > 0$$

代入第一个方程得到一个很浸泡的式子：

$$\ln x_0 = \frac{x_0}{2\left(\sqrt{\left(\frac{x_0}{4\sqrt{x_0}+1}\right)^2 + \frac{\sqrt{x_0}}{4}} - \frac{x_0}{4\sqrt{x_0}+1}\right)^2} - \frac{\sqrt{1+x_0}}{\left(\sqrt{\left(\frac{x_0}{4\sqrt{x_0}+1}\right)^2 + \frac{\sqrt{x_0}}{4}} - \frac{x_0}{4\sqrt{x_0}+1}\right)}$$

显然这里只能取 $x = 1$ 得到 $a \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$，这样就转化为证明充分性:

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow -2\ln x - \frac{2\sqrt{x+1}}{a} + \frac{\sqrt{x}}{a^2} \geq 0$$

直接上求根公式好了，懒得讨论了：

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}} \Rightarrow 2\sqrt{2} \geq \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2} - \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2 \geq 1 + \frac{1}{x} + \frac{2\ln x}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \ln x \leq 4\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\sqrt{x+1}$$

换元 $t = x^2, t \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$，转化为证明 $\ln t \leq 2t - \sqrt{2}\sqrt{t^2+1}$，并利用飘带放缩：即 $\forall x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right]$

$$g(x) = 2x - \sqrt{2x^2+2} - \ln x = \frac{\sqrt{2}(x-1)(x+1)}{\sqrt{2}x + \sqrt{1+x^2}} - \ln x \geq \frac{\sqrt{2}(x-1)(x+1)}{\sqrt{2}x + \sqrt{1+x^2}} - 2\frac{x-1}{x+1} \geq 0$$

最后一个不等号成立，要求 $\frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}x + \sqrt{1+x^2}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$，成立！因此我们知道充分性也成立，而条件 $x \geq \frac{1}{e^2}$ 并没有用上，所以任意 $x \in (0,1]$，都有 $a \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$ 满足要求.

例题 2.1.22

已知正数 a,b,c 满足 $abc=1$，证明：

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\leqslant\sqrt{2}\,(a+b+c)$$

解 2.1.22.

结论 2.1.2 比值代换法

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 与非椭圆上点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{x_1-x_0}{x_0-x_2}=\dfrac{y_1-y_0}{y_0-y_2}=\dfrac{\dfrac{x_0x_1}{a^2}+\dfrac{y_0y_1}{b^2}-1}{\dfrac{x_0x_2}{a^2}+\dfrac{y_0y_2}{b^2}-1}\\(1+\lambda)^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}-1\right)=2\lambda\left(\dfrac{x_1x_2}{a^2}+\dfrac{y_1y_2}{b^2}-1\right)\end{cases}$$

证明 2.1.2.

结论 2.1.3 参数方程

过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上两点 $A\left(a\dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2},b\dfrac{2t_1}{1+t_1^2}\right),B\left(a\dfrac{1-t_2^2}{1+t_2^2},b\dfrac{2t_2}{1+t_2^2}\right)$ 的直线方程为

$$\frac{x(1-t_1t_2)}{a(1+t_1t_2)}+\frac{y(t_1+t_2)}{b(1+t_1t_2)}=1$$

第三章 曲线系

3.1 曲线系引入

例题 3.1.1 （椭圆上的中点弦直线）

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内有一点 $P(x_0,y_0)$，求以 P 为弦中点的直线方程.

解 3.1.1. 构造两个椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{(2x_0-x)^2}{a^2}+\dfrac{(2y_0-y)^2}{b^2}=1\end{cases}$$

相减得到答案

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$$

例题 3.1.2 （椭圆上的直线两点式）

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上有两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，求 AB 方程.

解 3.1.2. 构造以 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 为直径的相似椭圆

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{a^2}+\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{b^2}=1$$

则与原来的椭圆方程相减

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(x_1+x_2)^2}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)^2}{b^2}$$

就可以得到 AB 的方程为

$$\frac{x_1+x_2}{a^2}x+\frac{y_1+y_2}{b^2}y=1+\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}$$

再对这个方程使用万能代换便可以得到参数方程直线两点式的形式

例题 3.1.3 （抛物线上的直线两点式）

设 $y^2=2px$ 上有两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，求 AB 方程.

解 3.1.3. 构造直线系 $(y-y_1)(y-y_2)=0$，与 $y^2=2px$ 相减得到

$$y^2-(y-y_1)(y-y_2)=2px\Leftrightarrow 2px-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$$

例题 3.1.4 （利用梯形构造四点共圆）

二次函数 $y=x^2+(a+1)x+a-2$ 与坐标轴交于 A,B,C 三点，求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程，并验证圆心是否在定直线上，以及外接圆是否过定点.

解 3.1.4. 构造直线系 $(y-0)(y-(a-2))=y(y-a+2)$ 再与抛物线 $x^2+(a+1)x-y+a-2=0$ 相加得到：

$$x^2+y^2+(a+1)x-y-ay+2y+a-2=x^2+y^2+(a+1)x+(1-a)y+a-2=0$$

圆心 $\left(\dfrac{a+1}{-2},\dfrac{1-a}{-2}\right)$ 一定在定直线上。将方程改写为

$$a(x-y+1)+x^2+y^2+x+y-2=0$$

发现当 $x=0,y=1$ 和 $x=-2,y=-1$ 符合要求，这样就得到定点 $(0,1),(-2,-1)$

例题 3.1.5 （2025 八省联考）

椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$，$A(-3,0),B(2,0)$，过 B 的弦 MN 与点 A 形成的三角形 AMN 外心为 D，证明 $k_{MN}k_{OD}$ 为定值.

解 3.1.5. 由斜率相反出共圆的结论，可以构造直线系 $(x-ty-2)(x-ty+3)=0$，然后与椭圆联立：

$$\begin{cases}(x-ty-2)(x-ty+3)=0\\ 8x^2+9y^2-72=0\end{cases}$$

然后待定 x^2,y^2 系数相等得到椭圆的系数是 (t^2+1)，所以相加得到：

$$\begin{aligned}&(t^2+1)(8x^2+9y^2-72)+(x-ty-2)(x+ty+3)=0\\ \Leftrightarrow\ &(8t^2+9)x^2+(8t^2+9)y^2+x-5ty-72t^2-78=0\end{aligned}$$

则 $k_{OD}=-5t,k_{MN}=\dfrac{1}{t}$，定值为 -5.

例题 3.1.6 （直径圆的构造）

已知抛物线 $y^2=2px$ 和弦 AB 所在的直线 $x=ty+m$，求 A,B 的直径圆方程.

解 3.1.6. 消去 x 得到

$$y^2=2p(ty+m)=2pty+2pm\Rightarrow y^2-2pty-2pm=0$$

消去 y 得到

$$t^2y^2=(x-m)^2=2p^2t^2x\Rightarrow x^2-(2m+2p^2t^2)x+m^2=0$$

加起来就可以得到直径圆方程

$$x^2+y^2-(2m+2p^2t^2)x-2pty+m^2-2pm=0$$

原因是消去 x,y 得到的式子都可以变为 $(x-x_1)(x-x_2)=0$ 和 $(y-y_1)(y-y_2)=0$ 的形式，而 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是弦 AB 的两端点，所以直径圆的方程就是这两个直线的交点的方程。

例题 3.1.7 （过两点的圆系方程例题）

已知 $C:y^2=4x,l:y=x+1$ 交于 A,B 两点，求经过 A,B 且与 $x=-1$ 相切的圆的方程.

解 3.1.7. 联立有：

$$\begin{cases} y^2=4(y-1) \\ (x+1)^2=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-4y+4=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$$

相加就有：

$$x^2+y^2-2x-4y+5=0$$

这是直径圆，接下来配凑圆系方程：

$$x^2+y^2-6x-4y-3+\lambda(x-y-1)=0$$

代入 $x=-1$，得到

$$y^2-4y+4+\lambda(-2-y)=0$$

并让 $\Delta=0$，得到：

$$\Delta=(4+\lambda)^2-4(4-2\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=-16$$

所以圆方程有两个：$x^2+y^2-2x-4y+5=0$ 和 $x^2+y^2-18x+12y+21=0$，本题目是易错题，容易漏解.

例题 3.1.8 （直径圆习题）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，弦 AB 过定点 $(m,0)$，其直径圆与椭圆交于点 C,D，证明直线 CD 过定点.

解 3.1.8. 设 $AB:x=ty+m$，其中 m 已知，联立韦达：

$$\begin{cases} 3x^2+4y^2-12=0 \\ x=ty+m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3t^2+4)y^2+6tmy+3m^2-12=0 \\ (3t^2+4)x^2-8mx+4m^2-12t^2=0 \end{cases}$$

两式相加得到:

$$(3t^2+4)x^2+(3t^2+4)y^2-8mx+6tmy+7m^2-12-12t^2=0$$

引入 $\lambda(3x^2+4y^2=12)=0$ 并配凑 $(x+ty+...)(x-ty+...)$ 结构，就有

$$-(t^2+1)(3x^2+4y^2-12)+(3t^2+4)(x^2+y^2)-8mx+6tmy+7m^2-12-12t^2=0$$

因式分解成

$$(x-ty-m)(x+ty-7m)=0$$

，所以 CD 过定点 $(7m,0)$.

例题 3.1.9 （角平分线）

知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，弦 AB 过定点 $P(1,0)$，$C(4,0)$，证明 x 轴平分 $\angle ACB$

解 3.1.9. 由 $AB:x=ty+1$，由对称性可以设 $A'B':x=-ty+1$，得到退化二次曲线

$$(x-ty-1)(x+ty-1)=0$$

待定 $\lambda(3x^2+4y^2-12)=0$，再根据要配凑的结构

$$(x-?y-4)(x+?y-4)=0$$

中的常数项，得到 $\lambda=-\frac{1}{4}$

$$-(3x^2+4y^2-12)+4(x-ty-1)(x+ty-1)=0$$

得到 $(x-4)^2=(4+t^2)y^2$，这等价于

$$(x+\sqrt{4+t^2}y-4)(x-\sqrt{4+t^2}y-4)=0$$

这个方程的根显然为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，所以斜率相反，角平分线得证.

例题 3.1.10 （抹茶奶绿）

椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的右焦点为 $(\sqrt{3},0)$，点 M,N 在 x 轴上方的椭圆上，且 $\triangle MNF$ 的外心 D 在 x 轴上，$\sqrt{3}|FM||FN|=2|MN|$，求 $S_{\triangle MNF}$

解 3.1.10. 设直线方程 $MN: y=kx+m \Leftrightarrow kx=y-m$，并联立

$$\begin{cases}(1):(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0\\(2):(4k^2+1)y^2-2my+m^2-4k^2=0\\(3):y-kx-m=0\end{cases}$$

由 $(1)+(2)+2m(3)$ 相加得到过 A,B 两点，且圆心在 x 轴上的圆

$$(4k^2+1)(x^2+y^2)+6kmx+3m^2-4k^2-4=0$$

代入 $F(\sqrt{3},0)$，得到直线 MN 到焦点 $(\sqrt{3},0)$ 的距离:d（后面要根据这个式子求斜率）:

$$8k^2+6\sqrt{3}km+3m^2=1 \Leftrightarrow d=\frac{\sqrt{3}k+m}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

此时设圆半径为 R，并由等面积法推算得:

$$\begin{cases}S_{\triangle MNF}=\frac{1}{2}|FM||FN|\sin\angle MFN=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}|MN|\\\sqrt{3}|FM||FN|=2|MN|\end{cases}\Rightarrow \sin\angle MFN=\frac{1}{2}$$

于是设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$ 由向量公式得到

$$\begin{aligned}\cos\angle MFN=&\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}}{|FM||FN|}=\frac{(x_1-\sqrt{3})(x_2-\sqrt{3})+y_1y_2}{(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2)}=\frac{(x_1-\sqrt{3})(x_2-\sqrt{3})+y_1y_2}{\frac{3}{4}(\frac{4}{\sqrt{3}}-x_1)(\frac{4}{\sqrt{3}}-x_2)}\\=&\frac{4}{3}\frac{12k^2+8\sqrt{3}km+4m^2-1+m^2-4k^2}{(4k^2+1)\frac{16}{3}+\frac{32}{\sqrt{3}}km+4m^2-4}=\frac{8k^2+8\sqrt{3}km+5m^2-1}{16k^2+8\sqrt{3}km+3m^2+1}\\=&\frac{8k^2+8\sqrt{3}km+5m^2-(8k^2+6\sqrt{3}km+3m^2)}{16k^2+8\sqrt{3}km+3m^2+8k^2+6\sqrt{3}km+3m^2}=\frac{\sqrt{3}km+m^2}{12k^2+7\sqrt{3}km+3m^2}\end{aligned}$$

齐次化后，设 $t=\frac{m}{k}$，得到 $(3\sqrt{3}-2)t^2+(21-2\sqrt{3})t+12\sqrt{3}=0$ 解得横截距，另一个根舍去:

$$t_1=\frac{2\sqrt{3}-21-2\sqrt{3}-3}{2(3\sqrt{3}-2)}=\frac{12}{2-3\sqrt{3}},t_1^2=\frac{144}{31-12\sqrt{3}},t_2=-\sqrt{3}$$

然后根据前面求出的距离，利用斜率的定义计算:

$$k^2=\frac{d^2}{(-\frac{m}{k}-\sqrt{3})^2-d^2}=\frac{1}{3(\frac{3+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2})^2-1}=\frac{31-12\sqrt{3}}{3(3+2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3}-2)^2}=\frac{1}{16}\frac{31-12\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}$$

$$m^2=k^2\frac{m^2}{k^2}=\frac{1}{16}\frac{31-12\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}\frac{144}{31-12\sqrt{3}}=\frac{9}{2+3\sqrt{3}},km=\frac{3}{4}\frac{2-3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}$$

最后得到面积:

$$\begin{aligned}S_{\triangle MNF}&=\frac{1}{2}\sin\angle MFN|FM||FN|=\frac{1}{4}|FM||FN|=\frac{16k^2+8\sqrt{3}km+3m^2+1}{4k^2+1}\\&=\frac{(31-12\sqrt{3})+6\sqrt{3}(2-3\sqrt{3})+27+2+3\sqrt{3}}{\frac{1}{4}(31-12\sqrt{3})+2+3\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{13}\end{aligned}$$

例题 3.1.11 （抹茶奶绿）

椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的右焦点为 $(\sqrt{3},0)$，点 M,N 在 x 轴上方的椭圆上，且 $\triangle MNF$ 的外心 D 在 x 轴上，$\sqrt{3}|FM||FN|=2|MN|$，求 $S_{\triangle MNF}$

解 3.1.11. 由于本题中圆和椭圆都能削掉半边变成“函数”，所以我们可以直接联立它们：

$$\begin{cases}(x-m)^2+y^2=r^2\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}x^2-2mx+2\sqrt{3}m-2=0$$

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由 $\sqrt{3}|FM||FN|=2|MN|$ 得到：

$$\begin{aligned}|MN|=&\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-x_1\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-x_2\right)\\=&\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\frac{16}{3}-\frac{8m}{\sqrt{3}}+2m-2\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\frac{2}{\sqrt{3}}m)=\sqrt{3}-m\end{aligned}$$

由于圆经过椭圆焦点，有

$$(\sqrt{3}-m)^2=r^2\Rightarrow\sqrt{3}-m=|MN|=r=\frac{\sqrt{3}}{2}|FM||FN|$$

设圆心为 D，有等边三角形 MDN，圆周角定理得到 $\angle MFN=\dfrac{\pi}{6}$，所求面积为

$$S_{\triangle MNF}=\frac{1}{2}\sin\angle MFN|FM||FN|=\frac{1}{4}|FM||FN|=\frac{\sqrt{3}}{6}r$$

我们要求出 r，所以还少一个方程，利用三角形 MNF 余弦定理：

$$|MF|^2+|NF|^2-\sqrt{3}|MF||NF|=|MF|^2+|NF|^2-2r=|MN|^2=r^2\Rightarrow|MF|^2+|NF|^2=r^2+2r$$

为了引入 m，利用恒等式 $|MF|^2+|NF|^2+2|MF||NF|=(|MF|+|NF|)^2$，韦达定理得：

$$|MF|+|NF|=4-\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1+x_2)=4-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{8}{3}m=4-\frac{4}{\sqrt{3}}m$$

那么

$$|MF|^2+|NF|^2=(|MF|+|NF|)^2-2|MF||NF|=(4-\frac{4}{\sqrt{3}}m)^2-\frac{4}{\sqrt{3}}r=r^2+2r$$

代入 $\sqrt{3}-m=r$ 得到

$$\left(4-\frac{4}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-r)\right)^2-\frac{4}{\sqrt{3}}r=r^2+2r\Rightarrow r=\frac{6+4\sqrt{3}}{13}$$

得到 $S_{\triangle MNF}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}r=\dfrac{2+\sqrt{3}}{13}$

第四章 杂题

4.1 数学问题

例题 4.1.1

$a,d \geq 0, b,c > 0, b+c \geq a+d$，求 $\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ 的最小值.

解 4.1.1. 观察到 b,c 在两个部分都出现了，而 a,b 在只出现了一次，如果我们固定 b,c，并分开考虑两个式子就会发现，左边式子关于 a 单调递减，右边式子关于 d 单调递减，又有 $b+c \geq a+d$，所以我们仍然固定 b,c，扩大 a,d 直到 $a+d=b+c$，此时式子会变小，因此我们研究在 $a+d=b+c$ 的条件下

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b}{c+d}+\frac{c}{b+2c-d}=\frac{1}{\frac{c}{b}+\frac{d}{b}}+\frac{\frac{c}{b}}{1+\frac{2c}{b}-\frac{d}{b}}$$

的最小值. 换元 $t=\dfrac{c}{b}, x=\dfrac{d}{b}$，则需要研究这个函数的最小值

$$\begin{aligned}
f(x) =& \frac{1}{x+t}-\frac{t}{x-2t-1}, x\in[0,t+1], t>0\\
f'(x) =& \frac{t}{(x-2t-1)^2}-\frac{1}{(x+t)^2} \quad f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t}}{2t+1-x}=\frac{1}{x+t}\\
\Rightarrow x =& \frac{2t+t\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+1}=t+\frac{t+1}{\sqrt{t}+1}
\end{aligned}$$