浙江理工大学学报，2021，45(2)：242-248
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673－3851(n).2021.02.012

双参数广义三角函数与双曲函数的几个均值不等式

钟根红[a]，**韦露淑**[b]，**贺建辉**[a]，**马晓艳**[b]
（浙江理工大学，a.科技与艺术学院；b.理学院，杭州 310018）

摘　要：双参数广义三角函数对于解决微分方程理论中的一些问题有着重要作用。文章通过初等解析方法与均值理论，研究了带有两个参数的广义三角函数与双曲函数的均值不等式性质，获得了广义正切函数与广义双曲正切函数的算术平均、调和平均以及几何平均的均值不等式；同时得到了广义三角函数的 Cusa-Huygens 型均值不等式。所得结果推广和改进了原有不等式性质。

关键词：广义三角函数；广义双曲函数；均值不等式；Cusa-Huygens 型均值不等式
中图分类号：O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2021) 03-0242-07

Several mean inequalities for generalized trigonometric and hyperbolic functions with two parameters

ZHONG Genhong[a]，*WEI Lushu*[b]，*HE Jianhui*[a]，*MA Xiaoyan*[b]
(a. Keyi College; b. School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Generalized trigonometric functions with two parameters play an important role in solving some problems in the theory of differential equations. The properties of mean inequalities for generalized trigonometric and hyperbolic functions with two parameters are explored by using elementary and analytic methods and the theory of means. Several new mean inequalities for generalized tangent functions and generalized hyperbolic tangent functions are obtained, such as arithmetic mean, harmonic mean and geometric mean inequalities. At the same time, Cusa-Huygens type mean inequalities for generalized trigonometric functions are obtained. The results expand and improve the properties of the original inequalities.

Key words: generalized trigonometric function; generalized hyperbolic function; mean inequality; Cusa-Huygens type mean inequality

0　引　言

对于 $0<x<\pi/2$，Huygens[1]给出了三角函数的下列不等式：

$$2\sin x+\tan x>3x \tag{1}$$

对于 $x>0$，Neuman 等[2]给出了双曲函数的 Huygens 型不等式：

$$2\sinh x+\tanh x>3x \tag{2}$$

不等式(1)—(2)分别可以表示为：

收稿日期：2020－10－23　　网络出版日期：2021－02－03
基金项目：国家自然科学基金项目(11671360)；浙江省自然科学基金项目(LQ17A010010)；浙江省教育厅一般科研项目(Y201840023)；浙江理工大学科技与艺术学院科研项目(2011KY002)
作者简介：钟根红(1980－　)，男，安徽桐城人，讲师，硕士，主要从事函数空间、拟共形特殊函数方面的研究。
通信作者：马晓艳，E-mail：mxy@zstu.edu.cn

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{3\cos x}{1+2\cos x}, x \in (0, \pi/2) \tag{3}$$

以及

$$\frac{\sinh x}{x} > \frac{3\cosh x}{1+2\cosh x}, x \in (0, \infty) \tag{4}$$

如果 a, b 为两个正数，以下均值：

$$A = A(a, b) = \frac{a+b}{2}, \qquad G = G(a, b) = \sqrt{ab},$$

$$H = H(a, b) = \frac{2}{1/a + 1/b}, \quad L = L(a, b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$$

分别为两正数 a, b 的算术平均、几何平均、调和平均以及对数平均。Seiffert 平均[3]定义为：

$$P = P(a, b) = \frac{a-b}{2\arcsin((a-b)/(a+b))}, a \neq b, P(a, a) = a。$$

对于两正数的算数平均、几何平均、调和平均以及对数平均之间，其基本关系[4-7]为：

$$H < G < L < A \tag{5}$$

以及

$$\sqrt[3]{G^2 A} < L < \frac{2G+A}{3} \tag{6}$$

$$\sqrt[3]{A^2 G} < P < \frac{2A+G}{3} \tag{7}$$

如果 $x \neq 0$，有：

$$L(e^x, e^{-x}) = \frac{\sinh x}{x}, G(e^x, e^{-x}) = 1, A(e^x, e^{-x}) = \cosh x,$$

$$P(1+\sin x, 1-\sin x) = \frac{\sin x}{x}, G(1+\sin x, 1-\sin x) = \cos x, A(1+\sin x, 1-\sin x) = 1.$$

由式(6)和式(7)，分别得到：

$$\sqrt[3]{\cosh x} < \frac{\sinh x}{x} < \frac{2+\cosh x}{3}, x \in (0, \infty) \tag{8}$$

$$\sqrt[3]{\cos x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{2+\cos x}{3}, x \in (0, \pi/2) \tag{9}$$

式(8)和式(9)的右端不等式即为双曲函数以及三角函数的 Cusa-Huygens 型不等式[2]。

在过去几十年里，这些均值函数成为研究的焦点[8-11]。Sándor[10] 利用均值理论，改进了三角函数以及双曲函数的 Huygens 型不等式。Sándor[11] 研究了带有一个参数 p 的广义三角函数以及双曲函数的对数平均、Neuman-Sándor 平均以及 Seiffert 平均等均值性质，同时建立了双参数广义三角函数的双向不等式的均值性质。

本文受这些研究成果的启发，研究了微分方程理论中 Dirchlet 边值问题的解中出现带有双参数广义三角函数与双曲函数的均值不等式性质，给出了双参数广义正切函数及双曲正切函数的算数平均不等式、几何平均不等式、调和平均不等式性质，同时得到了双参数广义三角函数的 Cusa-Huygens 型不等式性质。

1　定义

对于 $1 < p, q < \infty$，单调递增广义反正弦函数 $\arcsin_{p,q}(x): [0,1] \to \left[0, \frac{\pi_{p,q}}{2}\right]$ 定义为：

$$\arcsin_{p,q}(x) = \int_0^x (1-t^q)^{-1/p} \mathrm{d}t.$$

这里 $\frac{\pi_{p,q}}{2} = \arcsin_{p,q}(1) = \int_0^1 (1-t^q)^{-1/p} \mathrm{d}t$，在 $\left[0, \frac{\pi_{p,q}}{2}\right]$ 上 $\arcsin_{p,q}(x)$ 的反函数 $\sin_{p,q}(x)$ 称为广义正弦函

数。自然地广义余弦函数$\cos_{p,q}(x):\left[0,\frac{\pi_{p,q}}{2}\right]\to[0,1]$与正切函数$\tan_{p,q}(x):\left(0,\frac{\pi_{p,q}}{2}\right)\to(0,\infty)$定义为:

$$\cos_{p,q}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin_{p,q}(x),\tan_{p,q}(x)=\frac{\sin_{p,q}(x)}{\cos_{p,q}(x)}.$$

类似地,对于 $x\in(0,\infty)$,广义双曲正弦函数$\sinh_{p,q}x$ 的反函数反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh}_{p,q}x$ 定义为:

$$\operatorname{arcsinh}_{p,q}(x)=\int_0^x(1+t^q)^{-1/p}\mathrm{d}t,$$

其他双曲函数定义为:

$$\cosh_{p,q}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh_{p,q}(x),\tanh_{p,q}(x)=\frac{\sinh_{p,q}(x)}{\cosh_{p,q}(x)}.$$

以上定义表明以下恒等式成立:

$$\sin_{p,q}^q(x)+\cos_{p,q}^p(x)=1,x\in\left[0,\frac{\pi_{p,q}}{2}\right] \tag{10}$$

$$|\cosh_{p,q}(x)|^p-|\sinh_{p,q}(x)|^q=1,x\in[0,\infty) \tag{11}$$

这些结果可以参看文献[12-13]。

这些函数在微分方程理论所出现的一些问题中起着重要的作用,如 Drábek 等[14]所讨论的 Dirichlet 边值问题:对于 $T,\lambda>0,p,q>1$,

$$(\Phi_p(u'(t)))'+\lambda\Phi_q(u(t))=0,\quad t\in(0,T),$$
$$u(0)=u(T)=0,$$

其中 $\Phi_p(s)=|s|^{m-2}(s\neq 0)$,$\Phi_p(0)=0$,他们发现这个问题的解中包含$(p,q)$广义三角函数,引起了国内外学者对双参数三角函数的研究兴趣。当 $p=q$ 时,这些函数即退化成 Lindqvist 所定义的依赖一个参数 p 的广义三角函数及广义双曲函数[15];当 $p=q=2$ 时,即退化为常见的三角函数及双曲函数。

2 引 理

为论证主要结果需要引理 1—引理 4。其中:引理 1 见文献[16]引理 1 和文献[17]命题 3.1;引理 2 和引理 3 见文献[18]引理 4 和引理 3;引理 4 见文献[19]定理 1.25。

引理 1 对于 $p,q\in(1,+\infty)$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi_{p,q}}{2}\right)$时,$(p,q)-$广义三角函数求导公式为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin_{p,q}(x)=\cos_{p,q}(x) \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos_{p,q}(x)=-\frac{q}{p}\cos_{p,q}^{2-p}(x)\sin_{p,q}^{q-1}(x) \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan_{p,q}(x)=1+\frac{q}{p}\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{-p}(x) \tag{14}$$

当 $x\in(0,\infty)$时,$(p,q)-$广义双曲函数求导公式为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh_{p,q}(x)=\cosh_{p,q}(x) \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh_{p,q}(x)=\frac{q}{p}\cosh_{p,q}^{2-p}(x)\sinh_{p,q}^{q-1}(x) \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh_{p,q}(x)=1-\frac{q}{p}\sinh_{p,q}^{q}(x)\cosh_{p,q}^{-p}(x) \tag{17}$$

引理 2 当 $p\geqslant q>1$ 时,函数 $f_1(x)=\cos_{p,q}(x)\cdot\cosh_{p,q}(x)$ 从$\left(0,\frac{\pi_{p,q}}{2}\right)$到$(0,1)$上严格单调递增,对于任意 $p\geqslant q>1$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi_{p,q}}{2}\right)$时,有$\cos_{p,q}(x)\cosh_{p,q}(x)<1$。

引理 3　对于 $p \geqslant q > 2$，函数 $f_2(x) = \dfrac{\sin_{p,q}^{q-2}(x)}{\cos_{p,q}^{p-2}(x)} - \dfrac{\sinh_{p,q}^{q-2}(x)}{\cosh_{p,q}^{p-2}(x)}$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi_{p,q}}{2}\right)$ 上是严格单调递增的。

引理 4　(l'Hôpital rule) 对于 $-\infty < a < b < \infty$，设 $f, g: [a,b] \to \mathbf{R}$ 为两个实值函数，并都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可微，且 $f(a) = g(a) = 0$ 或 $f(b) = g(b) = 0$，并且在 (a,b) 上 $g'(x) \neq 0$，如果 f'/g' 在 (a,b) 上单调上升(下降)，那么函数：

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \text{ 或 } G(x) = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}$$

也在 (a,b) 上单调上升(下降)。同时若函数 f'/g' 的单调性是严格的，则函数 F 或函数 G 的单调性也是严格的。

3　主要结果

下面给出双参数广义正切函数以及广义双曲正切函数的算数平均、调和平均以及几何平均不等式性质。

定理 1　对于 $x \in \left(0, \dfrac{\pi_{p,q}}{2}\right)$，

a) 当 $p \geqslant q > 1$ 时，成立不等式：

$$A(\tan_{p,q}(x), \tanh_{p,q}(x)) > x \tag{18}$$

b) 当 $p \geqslant q \geqslant 2$ 时，成立不等式：

$$H(\tan_{p,q}(x), \tanh_{p,q}(x)) > x \tag{19}$$

推论 1　对于 $p \geqslant q \geqslant 2, x \in \left(0, \dfrac{\pi_{p,q}}{2}\right)$，成立不等式：

$$G(\tan_{p,q}(x), \tan_{p,q}(x)) > x \tag{20}$$

定理 2 给出了双参数广义三角函数的 Cusa-Huygens 型均值不等式性质。

定理 2　当 $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ 时，函数：

$$f(x) = \frac{\ln[\sin_{p,q}(x)/x]}{\ln[(q + \cos_{p,q}(x))/(q+1)]}$$

在 $\left(0, \dfrac{\pi_{p,q}}{2}\right]$ 上单调递增，并且成立不等式：

$$\left(\frac{q + \cos_{p,q}(x)}{q+1}\right)^{\alpha} < \frac{\sin_{p,q}(x)}{x} < \left(\frac{q + \cos_{p,q}(x)}{q+1}\right)^{\beta} \tag{21}$$

其中：$\alpha = \left[\ln \dfrac{2}{\pi_{p,q}}\right] / \left[\ln \dfrac{p}{p+1}\right], \beta = 1$。

4　主要结果的证明

定理 1 的证明。

a) 设函数 $g_1(x) = \tan_{p,q}(x) + \tanh_{p,q}(x) - 2x$，则 $g_1(0) = 0$。根据引理 1 求导式(14)、式(17)及恒等式(10)—(11)可得：

$$\begin{aligned} g'_1(x) &= \frac{q}{p}\left[\frac{\sin_{p,q}^{q}(x)}{\cos_{p,q}^{p}(x)} - \frac{\sinh_{p,q}^{q}(x)}{\cosh_{p,q}^{p}(x)}\right] = \frac{q}{p}\left[\frac{1 - \cos_{p,q}^{p}(x)}{\cos_{p,q}^{p}(x)} - \frac{\cosh_{p,q}^{p}(x) - 1}{\cosh_{p,q}^{p}(x)}\right] \\ &= \frac{q}{p}\left[\frac{1}{\cos_{p,q}^{p}(x)} + \frac{1}{\cosh_{p,q}^{p}(x)} - 2\right], \end{aligned}$$

由不等式(5)可知 $A(a,b) > G(a,b)$，取 $a = 1/\cos_{p,q}^{p}(x), b = 1/\cosh_{p,q}^{p}(x)$，有

$$g'_1(x) \geqslant \frac{2q}{p}\left[\sqrt{\frac{1}{\cos_{p,q}^{p}(x)\cosh_{p,q}^{p}(x)}} - 1\right],$$

根据引理 2 可知，$g'_1(x) > 0$，因此 $g_1(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi_{p,q}}{2}\right)$ 上单调递增，即 $g_1(x) > g_1(0) = 0$。因此 $\tan_{p,q}(x) +$

$\tanh_{p,q}(x)>2x$ 在 $\left(0,\frac{\pi_{p,q}}{2}\right)$ 上恒成立,由算术平均 A 的定义,即可得到双参数正切函数与双曲正切函数的算术均值不等式(18)。

b) 设函数

$$g_2(x)=x\cos_{p,q}(x)\sinh_{p,q}(x)+x\sin_{p,q}(x)\cosh_{p,q}(x)-2\sin_{p,q}(x)\sinh_{p,q}(x),$$

则 $g_2(0)=0$。根据引理1,求导可得:

$$\begin{aligned}g'_2(x)&=2x\cos_{p,q}(x)\cosh_{p,q}(x)-\sinh_{p,q}(x)\cos_{p,q}(x)-\sin_{p,q}(x)\cosh_{p,q}(x)+\\&\quad\frac{q}{p}x\left[\sin_{p,q}(x)\sinh_{p,q}^{q-1}(x)\cosh_{p,q}^{2-p}(x)-\sin_{p,q}^{q-1}(x)\sinh_{p,q}(x)\cos_{p,q}^{2-p}(x)\right]\\&=-\cos_{p,q}(x)\cosh_{p,q}(x)\left[\tanh_{p,q}(x)+\tan_{p,q}(x)-2x\right]-\\&\quad\frac{q}{p}x\sin_{p,q}(x)\sinh_{p,q}(x)\left[\frac{\sin_{p,q}^{q-2}(x)}{\cos_{p,q}^{p-2}(x)}-\frac{\sinh_{p,q}^{q-2}(x)}{\cosh_{p,q}^{p-2}(x)}\right],\end{aligned}$$

由引理3以及式(18),可得 $g'_2(x)<0$,因此当 $p\geqslant q\geqslant 2$ 时,$g_2(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi_{p,q}}{2}\right)$ 上单调递减,所以 $g_2(x)<g_2(0)=0$,即:

$$\cos_{p,q}(x)\sinh_{p,q}(x)+\sin_{p,q}(x)\cosh_{p,q}(x)<\frac{2}{x}\sin_{p,q}(x)\sinh_{p,q}(x),$$

因此 $\cot_{p,q}(x)+\coth_{p,q}(x)<\frac{2}{x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi_{p,q}}{2}\right)$ 上恒成立,由调和平均 H 的定义,即可得到双参数广义正切函数以及双曲正切函数的调和平均不等式(19)。

推论1的证明。

利用均值不等式(5)可知 $G(a,b)>H(a,b)$,以及均值不等式(19),取 $a=\tan_{p,q}(x)$, $b=\tanh_{p,q}(x)$,有:

$$G(\tan_{p,q}(x),\tanh_{p,q}(x))=\sqrt{\tan_{p,q}(x)\cdot\tanh_{p,q}(x)}>H(\tan_{p,q}(x),\tanh_{p,q}(x))>x,$$

即可得到双参数广义正切函数以及双曲正切函数的几何平均不等式(20)。

定理2的证明。

令 $h_1(x)=\ln\frac{\sin_{p,q}(x)}{x}$,$h_2(x)=\ln\frac{q+\cos_{p,q}(x)}{q+1}$,有 $h_1(0)=h_2(0)=0$。由式(12)—(13),求导可得:

$$\frac{h'_1(x)}{h'_2(x)}=\frac{p}{q}\,\frac{(\sin_{p,q}(x)-x\cos_{p,q}(x))(q+\cos_{p,q}(x))}{x\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{2-p}(x)}=\frac{p}{q}\,\frac{h_{11}(x)}{h_{22}(x)},$$

其中 $h_{11}(x)=(\sin_{p,q}(x)-x\cos_{p,q}(x))(q+\cos_{p,q}(x))$,$h_{22}(x)=x\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{2-p}(x)$,因此 $h_{11}(0)=h_{22}(0)=0$。再次求导整理可得:

$$\begin{aligned}\frac{h'_{11}(x)}{h'_{22}(x)}&=\frac{q}{p}\,\frac{qx-\sin_{p,q}(x)+2x\cos_{p,q}(x)}{\sin_{p,q}(x)+qx\cos_{p,q}(x)-[q(2-p)x\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{1-p}(x)]/p}\\&=\frac{q}{p}\left[1+\frac{-2\sin_{p,q}(x)+(2-q)x\cos_{p,q}(x)+qx+[q(2-p)x\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{1-p}(x)]/p}{\sin_{p,q}(x)+qx\cos_{p,q}(x)-[q(2-p)x\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{1-p}(x)]/p}\right]\\&=\frac{q}{p}\left[1+\frac{q+(2-q)\cos_{p,q}(x)-2\sin_{p,q}(x)/x+[q(2-p)\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{1-p}(x)]/p}{\sin_{p,q}(x)/x+q\cos_{p,q}(x)+[q(p-2)\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{1-p}(x)]/p}\right]\\&=\frac{q}{p}\left[1+\frac{h_{33}(x)}{h_{44}(x)}\right],\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}h_{33}(x)&=q+(2-q)\cos_{p,q}(x)-2\sin_{p,q}(x)/x+[q(2-p)\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{1-p}(x)]/p\\&=q-2\sin_{p,q}(x)/x+[2(q-p)\sin_{p,q}^{q}(x)+p(2-q)]/[p\cos_{p,q}^{p-1}(x)];\\h_{44}(x)&=\sin_{p,q}(x)/x+q\cos_{p,q}(x)+[q(p-2)\sin_{p,q}^{q}(x)\cos_{p,q}^{1-p}(x)]/p.\end{aligned}$$

显然当 $1<p\leqslant q\leqslant 2$ 时,函数 h_{33},h_{44} 在 $(0,\frac{\pi_{p,q}}{2}]$ 上分别单调递增以及单调递减。因此根据引理4,可得函数 h 在 $(0,\frac{\pi_{p,q}}{2}]$ 上单调递增。同时,

$$h(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{h'_1(x)}{h'_2(x)}=\frac{p}{q}\lim_{x\to 0^+}\frac{h_{11}(x)}{h_{22}(x)}=\frac{p}{q}\lim_{x\to 0^+}\frac{h'_{11}(x)}{h'_{22}(x)}=\lim_{x\to 0^+}\left[1+\frac{h_{33}(x)}{h_{44}(x)}\right]=1,$$

以及

$$h\left(\frac{\pi_{p,q}}{2}\right)=\frac{\ln\left(2\sin_{p,q}\frac{\pi_{p,q}}{2}\right)}{\pi_{p,q}}/\ln\frac{q+\cos_{p,q}\frac{\pi_{p,q}}{2}}{q+1}=\ln\frac{2}{\pi_{p,q}}/\ln\frac{q}{q+1}。$$

因此可得到不等式(21)。

5 结　论

本文得到了带有两个参数 p,q 的广义三角函数以及双曲函数的几个均值不等式，改进了已知结果，主要结论有：

a) 在定理 1 a)中，当 $p=q=2$ 时，均值不等式 $A(\tan_{p,q}(x),\tanh_{p,q}(x))>x$ 退化为 $\tan(x)+\tanh(x)>2x$，推广了文献[20]中定理 4.8 的式 4.12。

b) 在定理 1 b)中，当 $p=q=2$ 时，均值不等式 $H(\tan_{p,q}(x),\tanh_{p,q}(x))>x$ 退化为 $\cot(x)+\coth(x)<\frac{2}{x}$，推广了文献[20]中定理 4.8 的式 4.10。

c) 在推论 1 中，当 $p=q=2$ 时，均值不等式 $G(\tan_{p,q}(x),\tan_{p,q}(x))>x$ 退化为 $\tan(x)\cdot\tanh(x)>x^2$，推广了文献[20]中定理 4.8 的式 4.11。

d) 在定理 2 中，当 $p=q=2$ 时，不等式(21)即退化为

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{\ln 2-\ln\pi}{\ln 2-\ln 3}}<\frac{\sin x}{x}<\frac{2+\cos x}{3},$$

即不等式(21)推广了三角函数的 Cusa-Huygens 型不等式(9)。同时当 $p=q$ 时，此定理推广了文献[21]中的定理 3.9。

参考文献：

[1] Huygens C. Oeuvres Completes 1888-1940[M]. Gothenburg：Sociéte Hollondaise des Science，1944：759.

[2] Neuman E，Sándor J. On some inequalities involving trigonometric and hyperbolic functions with emphasis on the Cusa-Huygens，Wilker，and Huygens inequalities[J]. Mathematical Inequalities & Applications，2010，13(4)：715-723.

[3] Seiffer H J. Werte zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen[J]. Elemente der Mathematik，1987，42(4)：105-107.

[4] Wu S H. Generalization and sharpness of the power means inequality and their applications[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2005，312(2)：637-652.

[5] Sándor J. On the identric and logarithmic means[J]. Aequationes Mathematicae，1990，40(1)：261-270.

[6] Alzer H，Qiu S L. Inequalities for means in two variables[J]. Archiv Der Mathematik，2003，80(2)：201-215.

[7] Sándor J. On certain inequalities for means：Ⅲ[J]. Archiv der Mathematik，2001，76(1)：34-40.

[8] Dinh T H，Dumitru R，Franco J A. Non-linear interpolation of the harmonic-geometric-arithmetic matrix means[J]. Lobachevskii Journal of Mathematics，2019，40(1)：101-105.

[9] Lin S，Fu X H. Inequalities for the λ-weighted mixed arithmetic-geometric-harmonic means of sector matrices[J]. Operators and matrices，2020(2)：447-454.

[10] Sándor J. On Huygens′ inequalities and the theory of means[J/OL]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2012-09-11)[2020-10-23].https://doi.org/10.1155/2012/597490.

[11] Sándor J，Bhayo B A. On certain new means generated by generalized trigonometric function[EB/OL].(2012-09-11)[2020-10-23]. https://arxiv.org/abs/1805.06762.

[12] Takeuchi S. Generalized Jacobian elliptic functions and their application to bifurcation problems associated with p-Laplacian[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2012(1)，385：24-35.

[13] Jiang W D，Wang M K，Chu Y M，et al. Convexity of the generalized sine function and the generalized hyperbolic sine

function[J]. Journal of Approximation Theory, 2013, 174: 1-9.

[14] Drábek P, Manásevich R. On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with p-Laplacian[J]. Differential Integral Equations, 1999, 12(6): 773-788.

[15] Lindqvist P. Some remarkable sine and cosine functions[J]. Ricerche di Matematica, 1995, 44: 269-290.

[16] Bhayo B A, Sándor J. Inequalities connecting generalized trigonometric functions with their inverses[J]. Issues of Analysis, 2013, 20(2): 82-90.

[17] Edmunds D E, Gurka P, Lang J. Properties of generalized trigonometric functions[J]. Journal of Approximation Theory, 2012, 164(1): 47-56.

[18] Ma X Y, Si X B, Zhong G H, et al. Inequalities for the generalized trigonometric and hyperbolic functions[J/OL]. Open Mathematics, 2020, 18(1):1580-1589. https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/math-2020-0096/html.

[19] Anderson G D, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Conformal Invariants, Inequalities and Quasiconformal Maps[M]. New York: John Wiley and Sons,1997: 10.

[20] Sandor J. Trigonometric and Hyperbolic Inequalities-A note on certain inequalities for hyperbolic and trigonometric functions[EB/OL](2011-05-02)[2020-12-10]. https://arxiv.org/abs/1105. 0859.

[21] Huang L G, Yin L, Wang Y L, et al. Some wilker and cusa type inequalities for generalized trigonometric and hyperbolic functions[J/OL]. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 52(2018-03-02)[2020-10-23]. https://doi. org/10. 1186/ s13660-018-1644-8.

(责任编辑:康 锋)