文章编号：1001 - 4217(2018)03 - 0030 - 09

磨光集新探

刘保乾

(西藏自治区组织编制信息管理中心，西藏　拉萨　850000)

摘　要　本文以不等式的式商及标准数据为切入点，对磨光集进行了新的探索；编写了应用程序；给出了大量的实例及不等式自动发现新结果.

关键词　不等式自动发现；agl2012 程序；磨光集；加强不等式

中图分类号　O 122.3　　**文献标志码**　A

文献[1]提出了磨光集的概念，从而得到了自动加强不等式的一种新途径. 但文献[1]中的算法要依赖于优秀机器证明软件 Bottema[2]，而且当最佳系数不可求时，磨光过程会遇到麻烦. 本文以不等式的式商及标准数据为切入点，对磨光集进行了新探讨，提出了稳定集的概念，并编写了应用程序. 大量实例表明，文中的算法和程序是实用而有效的.

以下设 ΔABC 的三边为 a,b,c，半周为 s，内切圆半径为 r，外接圆半径为 R，面积为 Δ，中线、角平分线、类似中线和高依次为 m_a,m_b,m_c、w_a,w_b,w_c、k_a,k_b,k_c 和 h_a,h_b,h_c，旁切圆半径为 r_a,r_b,r_c，用 $\sum$ 表示循环和.

1　有关概念

1.1　式差，式商

设有不等式

$$P\geq Q>0. \tag{1}$$

记 $\varepsilon=P-Q$，$\mu=\dfrac{P}{Q}$，则称 ε 为不等式(1)的式差，称 μ 为不等式(1)的式商. 不等式(1)可写为

$$\frac{P}{Q}\geq 1. \tag{2}$$

称(2)式为不等式(1)的式商形式.

收稿日期：20018 - 01 - 06

作者简介：刘保乾(1962—)，男，陕西凤翔人. E- mail：wshr987@163.com

1.2　参考数据集

不等式(1)是有强弱之分的，但这种强弱是相对的，要有个比较范围.因此，需要定义一个参考数据集.

1.2.1　标准数据

如果一个表达式满足：

i 它是一个比值的形式，且量纲为零；

ii 它关于它所含的变元的对称性相同；

iii 当它的变元满足条件 E 时，取值为 1；

iv 它的值不小于 1.

则称这个表达式为标准数据，称 E 为这个标准数据的取等号条件.

例 1 在 ΔABC 中，任何一个由三角形常见元素构成的表达式均可用其边长表示出来. 现取条件为 $E=\{b=c\}$，则表达式 $\lambda=\dfrac{m_a}{h_a}$ 就是一个标准数据，这是因为 λ 的量纲为零，且 λ 关于边长 b,c 对称，$\lambda\geq 1$，当 $b=c$ 时 $\lambda=1$.

例 2 在 ΔABC 中，取条件为 $E=\{a=b=c\}$，则表达式 $\lambda=\dfrac{\sum a^2}{4\sqrt{3}\,\Delta}$ 就是一个标准数据，这是因为 λ 的量纲为零，且 λ 关于 a,b,c 对称，$\lambda\geq 1$，当 $a=b=c$ 时 $\lambda=1$.

例 3 在 ΔABC 中，取条件为 $E=\{a=b$，或者 $b=c$，或者 $c=a\}$，则表达式 $\lambda=\dfrac{\sum am_a}{2\Delta+\sqrt{\sum bc}}$ 就是一个标准数据，这是因为 λ 的量纲为零，且 λ 关于 a,b,c 对称，由杨学枝、尹华焱的不等式[3]

$$\sum am_a\geq 2\Delta+\sqrt{\sum bc}. \tag{3}$$

知，$\lambda\geq 1$，当取等条件为 E 时 $\lambda=1$.

例 4 在 ΔABC 中，取条件为 $E=\left\{A=\dfrac{\pi}{3}\right\}$，则表达式 $\lambda=\dfrac{w_a(b+c)}{(s-a)\left(r_a+\sqrt{3}\,s\right)}$ 就是一个标准数据，这是因为 λ 的量纲为零，且 λ 关于 b,c 对称，$\lambda\geq 1$，当 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 时 $\lambda=1$.

例 5 在 ΔABC 中，取条件为 $E=(2a=b+c)$，则表达式 $\lambda=\dfrac{R}{2r}\cos^2\dfrac{B-C}{2}$ 就是一个标准数据，这是因为 λ 的量纲为零，且 λ 关于 b,c 对称，$\lambda\geq 1$，当 $2a=b+c$ 时 $\lambda=1$.

例 2 中标准数据的取等号条件包含了例 1 中标准数据的取等号条件，我们就说这两个数据的取等号条件是兼容的，而例 4 中的标准数据则不能同它俩兼容，这是因为取等号条件 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 和 $a=b=c$ 无法统一.

1.2.2　参考数据集

由取等号条件兼容的标准数据构成的集合为参考数据集. 在一个确定的取等号条件 E 下，标准数据的全体记为 Ω_E，或简写为 Ω.

由于构造出全体是不可能的，在实际研究中，一般取由具体给出的标准数据构成参

考数据集. 随着研究的深入，可根据实际需要逐步扩充.

1.2.3 参考数据集的性质

i 如果 $q_1 \in \Omega$，$q_2 \in \Omega$ 则 $\frac{1}{2}(q_1+q_2) \in \Omega$，$\sqrt{q_1 q_2} \in \Omega$.

ii 不等式的式商构成一个标准数据，其取等号条件与不等式相同.

1.3 加强集，磨光集

1.3.1 加强集

设 S 是一个参考数据集，$S=\{q_i | q_i \in \Omega\}$，$i=1,\cdots,n,n\geq 1$，现用不等式(1)的式商 $\frac{P}{Q}$ 对 S 中的元素逐个进行比较. 如果存在 $t\geq 1$，使不等式

$$\frac{P}{Q}\geq q_i,\ i=1,\cdots,t,t\in N \tag{4}$$

成立，则称不等式

$$\frac{P}{Qq_i}\geq 1 \tag{5}$$

为不等式(1)对 q_i 的加强不等式，称集合 $\left\{\frac{P}{Qq_i}\right\}$ 为不等式(1)对集合 S 的加强集.

注意，对加强集中的元素，可在 S 中继续进行比较，从而得到更强的不等式集，而且这个过程可以一直进行下去，直到在 S 中找不到一个元素 q，使不等式 $\frac{P}{Q\prod q_i}\geq q$ 成立，此时称

$$\frac{P}{Q\prod q_i}\geq 1. \tag{6}$$

为不等式(1)在参考数据集 S 下的最佳加强不等式. 所有的最佳加强不等式的式商构成不等式(1)的最佳加强集.

1.3.2 磨光集

可以看出，加强不等式就是以参考数据集中的元素(即标准数据)为单位对不等式进行切割的过程，而且每切割一次，如果剩余的部分还足够，就可以继续切割，直到不能切割为止，最后剩下的部分就是最佳不等式. 如果一个参考数据集中的元素，均以其他元素为单位进行切割，剩余的部分再构成新的数据集，如此反复切割，这样形成的数据碎片就会越来越小，直至达到一个不能切割的水平，从而使数据集趋于一个确定的集合. 这个过程十分类似于文献[1]定义的磨光集，只不过那里是以式差(横向)的方式磨光的，而这里则是通过式商(纵向)的方式实现磨光的.

设有参考数据集 $S=\{q_i | q_i \in \Omega\}$，$i=1$，$\cdots,n,n\geq 1$，如果 q_i 对 S 的最佳加强集为 S_i，则称 $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ 为 S 的磨光集，用符号 $M(S)$ 表示，即

$$M(S)=\bigcup_{i=1}^{n} S_i. \tag{7}$$

对一个参考数据集 S，计算 $M(S)$ 的过程称为对数据集 S 进行了一次打磨.

1.3.3 稳定集

显然，还可以对磨光集继续进行打磨，并反复进行磨光.

设有参考数据集 S，在对 S 的磨光过程中，如果某次磨光产生的磨光集 T 满足 $M(T)=T$，则称 T 为 S 的稳定集，用符号 $W(S)$ 表示，即

$$W(S)=T. \tag{8}$$

可以看出，稳定集本质上就是磨光集，只不过此时集合中的标准数据已经被“磨平”了，无法再进行切割，因此集合中元素的数目就不再变化了. 但一个参考数据集是否总有稳定集？这是需要进一步探讨的.

稳定集是磨光过程趋于稳定的产物，到底需要多少次打磨才能稳定，这取决于参考数据集中元素的性状. 所以，稳定集从一个侧面反映了参考数据集中各元素之间的制约关系和数量关系. 稳定集无疑是很重要的，但许多情况下求稳定集是比较困难的，特别是参考数据集中有太大或太小的元素时，磨光过程中会切割出许多数据碎块，往往会出现死机或运算时间超长的情况. 此时可以选用部分数据进行磨光，虽然这是无奈之举，但仍然是很实用而有效的策略.

为了与文献[1]中定义的磨光集相区别，可称本文中的磨光集为商式磨光集，而称文献[1]中定义的磨光集为差式磨光集.

2 算法和程序

由于稳定集是通过磨光集产生的，故磨光集的算法是关键. 而磨光集的算法在文献[1]的算法 BOTKMGQ 中已有详述，所不同的是，在 BOTKMGQ 中，是通过调用 Bottema 软件计算最佳系数得到的，而本文中，由于标准数据是以式商的形式出现，这样磨光时，每次只要直接测试数据大小即可，而这可以调用随机数验证程序 otf 直接实现，故这里不再详述算法. 根据最佳加强集、磨光集和稳定集的定义，再结合文献[1]中的算法 BOTKMGQ，不难编写相应的程序模块，从而得到相应的新命令，即最佳加强集命令 bsset，磨光集命令 mgyc 以及稳定集命令 wdj. 这些命令将作为 agl2012 程序的新功能，出现在以后的各种应用场合. 本文程序的运行环境是 Intel(R) Core(TM) i5-2450M CPU @2.50GHz，编程语言是 Maple15.

3 应用举例

例 6 在 ΔABC 中，由数据 a,h_a,r_a 构造对称不等式，这些不等式的式商构成一个数据集，试确定这个数据集的稳定集.

解 键入命令：

```
>d1:=glxs(ysllqj(tosgm({a, ha, ra})));
>zjbj_otfqdcs(d1, d1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1);
>d:=gldj(dy); # 注意 dy 是 zjbj_otfqdcs 命令的输出 #
```

从而得到一个数据集 D，D 中的数据满足标准数据的条件，且取等号条件是 $a=b=c$，故 D 构成一个参考数据集，具体数据是：

$$D=\left\{\begin{array}{l}\frac{4}{3}\frac{(r_a+r_b+r_c)^2}{(a+b+c)^2},\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}(r_a+r_b+r_c)}{a+b+c},\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(a+b+c)}{h_a+h_b+h_c},\\ \frac{3}{4}\frac{(a+b+c)^2}{(h_a+h_b+h_c)(r_a+r_b+r_c)},\frac{9}{16}\frac{(a+b+c)^4}{(h_a+h_b+h_c)^2(r_a+r_b+r_c)^2},\\ \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{(r_a+r_b+r_c)^3}{(a+b+c)^3},\frac{3}{8}\frac{(a+b+c)^3\sqrt{3}}{(\sum h_a)^2(\sum r_a)},\frac{32\sqrt{3}}{27}\frac{(\sum r_a)^4(\sum h_a)}{(a+b+c)^5}\end{array}\right\}$$

现求 D 的稳定集.键入命令：

＞wdj(D)；

则显示

[9，0]，0.

[11，1]，63.898

[11，2]，150.541

[8，3]，204.767

上述数字表明，对数据集 D 进行了 3 次打磨，最后得到了稳定集，且稳定集中有 8 个元素，用时 204.767s. 稳定集中的数据如下

$$W=\left\{\begin{array}{l}\frac{4}{3}\frac{(r_a+r_b+r_c)^2}{(a+b+c)^2},\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}(r_a+r_b+r_c)}{a+b+c},\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(a+b+c)}{h_a+h_b+h_c},\\ \frac{3}{4}\frac{(a+b+c)^2}{(h_a+h_b+h_c)(r_a+r_b+r_c)},\frac{9}{16}\frac{(a+b+c)^4}{(h_a+h_b+h_c)^2(r_a+r_b+r_c)^2},\\ \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{(r_a+r_b+r_c)^3}{(a+b+c)^3},\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{(a+b+c)^3}{(h_a+h_b+h_c)^2(r_a+r_b+r_c)},\\ \frac{32\sqrt{3}}{27}\frac{(r_a+r_b+r_c)^4(h_a+h_b+h_c)}{(a+b+c)^5}\end{array}\right\}$$

W 中的数据对应 8 个不等式，且这些不等式对参考数据集 D 来说是最佳的. 如有不等式

$$(r_a+r_b+r_c)^4(h_a+h_b+h_c)\geq\frac{9\sqrt{3}}{32}(a+b+c)^5. \tag{9}$$

如果在数据 a,h_a,r_a 的基础上再加入 r，即将语句改为

＞d1 :=glxs(ysllqj(tosgm({a，ha，ra，r})))；

则仿上述过程可产生一个有 24 个元素的数据集 D. 在执行 wdj(D)命令后，经过相当长时间的计算，最后显示出如下数字：

[24，0]，0.

[38，1]，1110.212

[60，2]，3540.489

[68，3]，13486.910

[53，4]，27941.729

[38，5]，36619.862

这些数字表明，对数据集 D 进行了 5 次打磨最终得到了稳定集，且稳定集中有 38 个元素，用时约 36619.862s. 稳定集中的数据此略.

例 7 为了建立关于 m_a-r 的不等式，且不等式的取等号条件为 $b=c$，键入命令

＞d0 :＝glerdcyz(qjcs(`union`(yc, {ma- r}), 2))；

＞zjbj_otfqdcs(d0, d0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)；

＞ls :＝gleq(lbqc(gldj(dy), {1}))；

可得到一个参考数据集：

$$te=\left\{\frac{2(2R-h_a)}{r_a-r},\frac{m_a-r}{h_a-r},\frac{r_br_c}{h_a^2},\frac{(2R-h_a)(h_a-2r)}{r^2},\frac{(m_a-r)^2}{(r_b-r)(r_c-r)},\frac{(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^2},2\frac{(2R-h_a)(m_a-r)}{(h_a-r)(r_a-r)}\right\}$$

在 te 中，每个标准数据取等号条件均是 $b=c$. 现求 te 的稳定集. 键入命令：

＞wdj(te)；

经过 46.64s 运算后，输出

$$out1=\left\{\frac{(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^2},\frac{r_br_c(h_a-r)^2}{h_a^2(r_b-r)(r_c-r)},\frac{(m_a-r)h_a^2(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^3r_br_c},\frac{(m_a-r)^2h_a^4(r_b-r)(r_c-r)}{r_b^2r_c^2(h_a-r)^4},2\frac{(2R-h_a)(h_a-r)^2}{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}\right\}.$$

$out1$就是 te 的稳定集. 在 $out1$ 中，与 m_a-r 有关的不等式有 2 个，为

$$\frac{(m_a-r)h_a^2(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^3r_br_c}\geq 1. \tag{10}$$

$$\frac{(m_a-r)^2h_a^4(r_b-r)(r_c-r)}{r_b^2r_c^2(h_a-r)^4}\geq 1. \tag{11}$$

上述得到不等式(10),(11)的过程可以描述为：我们对参考数据集 te 进行了若干次打磨，最后稳定于 $out1$ 那种状态——以后无论再打磨多少遍，其中的元素均保持不变.

陈计曾建立关于三角形中线的不等式

$$2a^2+bc\geq 4m_bm_c. \tag{12}$$

不等式(12)取等号的条件是 $b=c$. 由(12)式得标准数据 $\frac{2a^2+bc}{4m_bm_c}$，由于不等式(12)较强，那么对于正在打磨的参考数据集 te 来说，$\frac{2a^2+bc}{4m_bm_c}$就是一个更小的数据“刀片”. 现设想一下，这样的“刀片”放入 te 中去打磨，将会把参考数据集中的元素切割的更小，从而得到更强的不等式，事实会是如此吗？现用 wdj 命令进行验证：

加入新的更小的“刀片”后，参考数据集变成

$$tte=\left\{\frac{2(2R-h_a)}{r_a-r},\frac{m_a-r}{h_a-r},\frac{r_br_c}{h_a^2},\frac{(2R-h_a)(h_a-2r)}{r^2},\frac{(m_a-r)^2}{(r_b-r)(r_c-r)},\frac{(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^2},2\frac{(2R-h_a)(m_a-r)}{(h_a-r)(r_a-r)},\frac{2a^2+bc}{4m_bm_c}\right\}$$

键入命令：

＞wdj(tte)；

则经过 2035.891s 运算后，输出

$$out2=\left\{\begin{array}{l}\frac{r_br_c(h_a-r)^2}{h_a^2(r_b-r)(r_c-r)},\frac{(m_a-r)^2h_a^4(r_b-r)(r_c-r)}{r_b^2r_c^2(h_a-r)^4},\frac{1}{4}\frac{2a^2+bc}{m_bm_c},\\ 2\frac{(2R-h_a)(h_a-r)^2}{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)},16\frac{m_b^2m_c^2(r_b-r)(r_c-r)}{(2a^2+bc)^2(h_a-r)^2},\\ 4\frac{(m_a-r)m_bm_ch_a^2(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^3(2a^2+bc)r_br_c}\end{array}\right\}.$$

即经过一系列打磨后，得到了稳定集 $out2$. 在 $out2$ 中，有意义的不等式是

$$\begin{aligned}&4\frac{(m_a-r)m_bm_ch_a^2(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^3(2a^2+bc)r_br_c}\geq 1\\ \Leftrightarrow&\frac{(m_a-r)h_a^2(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^3r_br_c}\geq\frac{1}{4}\frac{2a^2+bc}{m_bm_c}.\end{aligned}\tag{13}$$

不等式(13)反向加强了式(12).

如果在参考数据集中加入块头比较大的数据，如 $\frac{m_a}{h_a}$，情况又会如何呢？同样可以料想到：如果放入较大块头的数据，将会切割出更多的数据碎片出来. 果真会如此吗？下面继续用 wdj 命令进行验证：

此时参考数据集变为

$$ttte=\left\{\begin{array}{l}\frac{2(2R-h_a)}{r_a-r},\frac{m_a-r}{h_a-r},\frac{r_br_c}{h_a^2},\frac{(2R-h_a)(h_a-2r)}{r^2},\frac{(m_a-r)^2}{(r_b-r)(r_c-r)},\\ \frac{(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^2},2\frac{(2R-h_a)(m_a-r)}{(h_a-r)(r_a-r)},\frac{2a^2+bc}{4m_bm_c},\frac{m_a}{h_a}\end{array}\right\}$$

键入命令：

＞wdj(ttte)；

则经过 16371.962s 运算后，输出

$$out3=\left\{\begin{array}{l}16\frac{(m_a-r)m_b^2m_c^2(r_b-r)(r_c-r)h_a}{(h_a-r)^3(2a^2+bc)^2m_a},4\frac{m_ah_am_bm_c(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^2(2a^2+bc)r_br_c},\\ 64\frac{m_b^3m_c^3(r_b-r)^2(r_c-r)^2m_ah_a}{(h_a-r)^4(2a^2+bc)^3r_br_c},4\frac{(m_a-r)m_bm_ch_a^2(r_b-r)(r_c-r)}{(h_a-r)^3(2a^2+bc)r_br_c},\\ ,\cdots,8\frac{(2R-h_a)(h_a-r)^3m_a^2m_bm_c}{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)h_a^2(m_a-r)(2a^2+bc)}\end{array}\right\}$$

注意 $ttte$ 中只有 9 个元素，而此时 $out3$ 中已经有 21 个元素(限于篇幅，这里省略了部分结果)，即当加入“大块头的”标准数据 $\frac{m_a}{h_a}$ 后，经过一系列打磨过程，磨光稳定于 21 个碎片的状态，即得到稳定集 $out3$.

$out3$ 中的每个数据对应一个最佳不等式，而且不少结果是很有意义的，因为它们是关于三角形中线的上界或下界型不等式，这里不再一一列出.

此例说明，在磨光集或稳定集的背景下，不仅强的不等式很有用的，而且平凡的不等式同样也有用，因为，当它们被不同的“刀片”切割时，产生的碎片的价值是不可预料的. 这暗示今后发现特殊取等号条件的不等式或更强的不等式的门槛和条件会更低，不等式的来源也更广泛.

例 8　为了建立关于 ΔABC 类似中线 k_a 的不等式，且不等式的取等号条件为 $b=c$ 或 $a^2=b^2+c^2$，键入命令

＞zjbj_otfqdcs(yc，yc，0，0，1，1，1，1，1)；

＞ls :=glybzjsz(lbqc(gldj(dy)，{1}))；# 过滤直角三角形时取等号的结果 #

则可得参考数据集

$$ineq=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{k_a}{h_a},\dfrac{h_a^2(k_a-r)^2}{k_a^2(h_a-r)^2},\dfrac{k_a^2(h_a-r)}{h_a^2(k_a-r)},\dfrac{(k_a-2r)(h_a-r)}{(k_a-r)(h_a-2r)},\dfrac{(k_a-r)h_a}{(h_a-r)k_a},\dfrac{(k_a-r)^2h_a}{(h_a-r)^2k_a},\\ \dfrac{(k_a-2r)(h_a-r)^2k_a}{(h_a-2r)(k_a-r)^2h_a},\dfrac{(k_a-2r)(h_a-r)k_a}{(h_a-2r)(k_a-r)h_a},\dfrac{1}{2}\dfrac{(k_a-2r)(b+c)}{(h_a-r)(s-a)}\end{array}\right\}$$

在 $ineq$ 中，每个标准数据取等号条件均是 $b=c$ 或 $a^2=b^2+c^2$，求 $ineq$ 的稳定集，易发现优美不等式

$$\frac{(r_a+k_a)^2}{2r_a+k_a}\geq\frac{1}{2}\frac{r(b+c)^2}{a(s-a)},\frac{(r_a+k_a)^3}{2r_a+k_a}\geq\frac{1}{2}\frac{(s-b)(s-c)(b+c)^3}{(s-a)a^2},$$

$$4\frac{(s-a)sa}{r(b+c)^3}\geq\frac{(2r_a+k_a)^2}{(r_a+k_a)^3},\frac{(r_a+k_a)k_a}{(2r_a+k_a)^2}\geq\frac{1}{2}\frac{(s-a)(b+c)}{s^2},$$

$$\frac{k_a(2r_a+k_a)^3}{(r_a+k_a)^3}\geq 16\frac{rs^4}{a(b+c)^3},\frac{1}{2}\frac{b+c}{h_a(s-a)}\geq\frac{r_a+k_a}{k_a^2},$$

$$\frac{k_a^3}{(r_a+k_a)(2r_a+k_a)}\geq 4\frac{(s-a)^2r}{a(b+c)},\frac{k_a}{h_a}\geq 16\frac{(am_a+bc)^4}{(c^2+4s+b^2)^4}.$$

一般来说，发现上述特殊取等号条件的不等式是十分困难的.

例 9　在 ΔABC 中，有 Panaitopol 不等式

$$\frac{R}{2r}\geq\frac{m_a}{h_a}.\tag{14}$$

试加强不等式(14).

解　注意不等式(14)的取等号条件是{$a=b=c$}，这与条件{$b=c$}有交集，故可以调用例 7 中的参考数据集进行加强. 求不等式(14)的式商 $\dfrac{Rh_a}{2rm_a}$ 对参考数据集的最佳不等式集，即键入命令：

＞bsset(eq，R*ha/(2rma))；# 这里对参考数据集进行了适当扩充 #

则输出最佳不等式集

$$out=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\dfrac{Rh_a^3(h_a-r)^2}{rm_a(h_a-2r)^2(h_a+r_a)^2},\dfrac{1}{4}\dfrac{Rh_ar_a(w_a+h_a)}{rm_a\sin\dfrac{A}{2}\left(1+\sin\dfrac{A}{2}\right)bc},\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{Rh_abc(w_a+2r_a)\sin\dfrac{A}{2}}{rm_aw_ar_a(w_a+r_a)},\dfrac{1}{2}\dfrac{Rh_a^3r_a^2(w_a+r_a)}{rm_a(w_a+2r_a)^2\sin^2\dfrac{A}{2}(h_a-r)bc}\end{array}\right\}.$$

out 中的 4 个数据元素对应不等式(14)的 4 个加强不等式，这里不再细述.

例 10　3 元 3 次 schur 不等式是

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geq 0.\tag{15}$$

试加强不等式(15).

解 首先写出不等式(15)的式商. 为此，将不等式(15)变为(1)的形式，得

$$x^3+3xyz+y^3+z^3 \geq yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y). \tag{16}$$

对于不等式(16)的式商，构造一个参考数据集(参考数据集可有多种方法预先给出)，再计算稳定集，得到一个由 5 个数据元素构成的集合，其中第 1 个元素对应的不等式链是

$$\frac{x^3+3xyz+y^3+z^3}{\sum yz(y+z)} \geq \frac{(xy^2+yz^2+x^2z)(x^2y+y^2z+z^2x)}{(xy+xz+yz)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)} \geq 1. \tag{17}$$

(17)式显然是不等式(15)的加强. 其余加强结果限于篇幅，这里不再列出.

4 结语和问题

如果说文献[1]是以式差的方式横向磨光的话，那么本文中的磨光则是以式商的方式纵向磨光的. 不论何种磨光方式，其结果都将会导致数据被切割成碎块——发现更强的不等式，而且这两种磨光方式是不可互相取代的. 从这种意义上来说，本文是文献[1]有益的补充和发展. 事实证明，稳定集将使 agl2012 程序由批量发现不等式上升为批量发现一些特殊取等号条件不等式，虽然目前的探索只是初步的，但这个途径似乎已经找到了.

稳定集，秩序图[4]和量级[5]，外加不等式自动发现与判定程序 agl2012，为系统研究和发现不等式尤其是三角形几何不等式，搭建了基本的思路和框架，绘制了一个清晰的思路. 如何补充和完善算法，扩大应用范围，值得进一步研究和探讨.

参考文献

[1] 刘保乾. 磨光集及其应用[J]. 汕头大学学报(自然科学版)，2015，30(2)：44- 55.
[2] 杨路，夏壁灿. 不等式机器证明与自动发现[M]. 北京：科学出版社，2008.
[3] 杨学枝，尹华焱. 关于三角形中线的一组不等式[J]. 中学数学，1999(3)：41- 43.
[4] 刘保乾. 不等式的秩序图再探讨[J]. 广东教育学院学报，2017，37(3)：26- 35.
[5] 用对称性和量级研究三角形中的非负对称量[C]// 杨学枝. 不等式研究(第 1 辑)，拉萨：西藏人民出版社，2000，200- 222.

New Study of Polishing Graph

LIU Baoqian
(Information Management Center, Department of Organizational Information, Lasa 850000, Xizang Autonomous District, China)

Abstract In this paper, the quotient of inequalities and standard data are used in new study of polishing graphs. Computer programs are written. Several instances and new results of automatically finding of inequalities are given.

Keywords directional graph; triangle inequalities; automatically finding of inequalities; magnitude