华南理工大学
South China University of Technology

线性代数和解析几何作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2026 年 1 月 15 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 行列式

1.1 第 1 周作业

观察 $\boldsymbol{AB}$ 的结果图示：

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n) \Rightarrow \begin{pmatrix} & \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix}$$

可以看出，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每一列都被进行了相同的加权求和操作，所以整体上对行向量进行线性变换，同时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行都被进行了相同的加权求和操作，所以整体上对列向量进行线性变换

例题 1.1.1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \dots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \dots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \dots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.1. 设 $x_i = \cos\theta_i$，利用第一类切比雪夫多项式 $T_k(x)$ 满足 $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$，则行列式可视为矩阵 $\left(T_{j-1}(x_i)\right)_{i,j=1}^{n}$ 的行列式。存在上三角矩阵 C 使得 $(T_0(x), T_1(x), \dots, T_{n-1}(x)) = (1, x, \dots, x^{n-1})C$，且 C 的主对角线元素为 $c_{11} = 1, c_{22} = 1, c_{jj} = 2^{j-2}$ $(j \geq 3)$，故 $\det C = 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$。另一方面，Vandermonde 行列式 $\det\left(x_i^{j-1}\right) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$。因此

$$D = \det C \cdot \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i) = 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \prod_{1\leq i<j\leq n}(\cos\theta_j - \cos\theta_i).$$

当 $n = 1$ 时，右端理解为 1。

例题 1.1.2

$$D = \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & \sin 2\theta_1 & \dots & \sin n\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \sin 2\theta_2 & \dots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\theta_n & \sin 2\theta_n & \dots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.2. 利用恒等式 $\sin(k\theta) = \sin\theta \cdot U_{k-1}(\cos\theta)$，其中 U_{k-1} 是第二类切比雪夫多项式。设 $x_i = \cos\theta_i$，则

$$D = \left(\prod_{i=1}^{n} \sin\theta_i\right) \cdot \det\big(U_{j-1}(x_i)\big)_{i,j=1}^{n}.$$

存在上三角矩阵 D 使得 $(U_0(x), U_1(x), \ldots, U_{n-1}(x)) = (1, x, \ldots, x^{n-1})D$，且 D 的主对角线元素为 $d_{jj} = 2^{j-1}$，故 $\det D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$。而 $\det\big(x_i^{j-1}\big) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$，所以

$$\det\big(U_{j-1}(x_i)\big) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\le i<j\le n} (\cos\theta_j - \cos\theta_i).$$

因此

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^{n} \sin\theta_i\right) \prod_{1\le i<j\le n} (\cos\theta_j - \cos\theta_i).$$

当 $n = 1$ 时，右端空乘积理解为 1，指数为 0，与 $D = \sin\theta_1$ 一致。

习题一第一大题的第（1）（3）（5）问解答如下：

例题 1.1.3 (习题一第一大题)

计算行列式的值 $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

解 1.1.3. (1) 原式 $= \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1.$

(2) 由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} =&1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8 \\ &-1\times6\times8-2\times4\times9-3\times5\times7 \\ =&45+84+96-48-72-105 \\ =&225-225=0. \end{aligned}$$

实际上第三行是第二行各数的两倍减去第一行各数得到的，因此第三行是第一行和第二行的线性组合，所以矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

的行向量线性相关，行列式的值为 0.

(3) 仍然由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} &= x^3 + y^3 + y^3 - xy^2 - xy^2 - xy^2 \\ &= x^3 + 2y^3 - 3xy^2. \end{aligned}$$

实际上这个结果可以推广的，下面定理的证明运用了行列式的线性性质和递归分解的思想。

定理 1.1.1

将 n 阶行列式 D 中每个元 $a_{ij},(i,j=1,2,...,n)$ 都加上参数 t，得到新行列式 $D(t)$，则：

$$D(t)=D+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\Leftrightarrow D=D(t)-t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

证明. 将 $D(t)$ 中的第一列拆开，得到的新行列式记为 $D_1(t)$，则：

$$D_1(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(t)&=D_1(t)+\begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}=D_1(t)+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+D_1(t)=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+D_2(t) \\ &=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i3}+D_3(t) \\ &=\cdots=t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}+D. \end{aligned}$$

□

下面推广一下上面那道例题：

例题 1.1.4

求 n 阶行列式的值 $(a\neq b)$：

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.4. 原题只有第一个行列式，笔者将其进行了转置，得到第二个行列式，目的是方便进行证明，这里运用了“对偶”的思想。这样就可以轻松写出：

$$D(-a)=\begin{vmatrix} x_1-a & b-a & \cdots & b-a \\ 0 & x_2-a & \cdots & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$$

$$D(-b)=\begin{vmatrix} x_1-b & a-b & \cdots & a-b \\ 0 & x_2-b & \cdots & a-b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n-b \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)$$

因此：

$$D=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)+(-a)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)+(-b)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

容易发现，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

取决于原来的行列式本身，与引入的参数无关（因为我们是一列一列地拆出参数，而恰好在取代数余子式时避开了含有参数的列），因此上述公式构成二元一次线性方程组，由此可以解得：

$$D=\frac{a}{a-b}\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)-\frac{b}{a-b}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a).$$

例题 1.1.5

求 n 阶行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.5. 直接套结论：

$$D(-a)=\begin{vmatrix} x_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$$

则：

$$D = D(-a) + a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

其中对于 A_{ij} 而言，由于只有对角线上的数不是 0，因此如果不取对角线上的数写代数余子式，那么由于系数是 0，行列式无论是什么都不会影响结果

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \prod\limits_{k\neq i}^{n}(x_k - a) & i = j \end{cases}$$

所以：

$$D = D(-a) + a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = D(-a) + a\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a) + a\sum_{i=1}^{n}\prod_{k\neq i}^{n}(x_k - a).$$

我们再补充一个例子：

例题 1.1.6

求 n 阶行列式的值（$a \neq b$）：

$$D = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & 0 \\ a & a & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & b & b \\ 0 & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

解 1.1.6.

$$D = D(-a) + a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = D(-b) + b\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

其中：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \\ 0 & 0 & \cdots & -a & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & \cdots & b-a & b-a \\ -a & b-a & \cdots & b-a & b-a \end{vmatrix}$$

然后使用定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

就可以得到：

$$D(-a) = (-a)^{1+2+3+4+\ldots+n-1}(-a)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a^n$$

$$D(-b) = (-b)^{1+2+3+4+\ldots+n-1}(-b)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}b^n$$

当 $a \neq b$ 时，

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{ab^n - ba^n}{a-b} = (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}}(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1})$$

再补充一个例子：

例题 1.1.7 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 1.1.7. 每一列的和是 $a+(n-1)b$，可把每一行都加到第一列，提取公因式 $a+(n-1)b$：

$$\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

或者我们可以使用加边法：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & b & \cdots & b \\ 0 & b & a & b & \cdots & b \\ 0 & b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\frac{nb}{a-b} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

习题一第二大题的第（1）（2）问解答如下：

例题 1.1.8 (习题一第二大题：证明恒等式)

$$(1)\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

解 1.1.8. (1) 由于行列式阶数较低，考虑直接展开即可完成证明：

$$\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = a(d+y) - c(b+x) = ad - bc + ay - cx = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}$$

(2) 直接按列展开即可完成证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

例题 1.1.9 (习题一第三大题)

借助行列式的知识解方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

解 1.1.9. 写出各个行列式并应用克莱默法则，每一个行列式都可以由沙路法则或者对其进行行变换得出结果：

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4 - 3 - 2 + 16 = 17$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 34 + 12 + 6 - 6 + 136 = 102$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&-6&-4\\1&3&-1\\2&17&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-26&-4\\1&3&-1\\2&17&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-26&-4\\1&3&-1\\0&11&3\end{vmatrix}=34$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&2&-6\\1&2&3\\2&-1&17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&-26\\1&2&3\\2&-1&17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&-26\\1&2&3\\0&-5&11\end{vmatrix}=119$$

故解方程组：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{102}{17}=6,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{34}{17}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{119}{17}=7.$$

例题 1.1.10 (习题一第 5 大题)

若排列 $i_1,i_2,i_3,...,i_n$ 的逆序数为 m，求排列 $i_n,i_{n-1},i_{n-2},...,i_1$ 的逆序数。

解 1.1.10. 排列 $i_1,i_2,i_3,...,i_n$ 的逆序数为 m 指这个排列的逆序数对的数量为 m，而数对一共有

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

种，所以排列 $i_n,i_{n-1},i_{n-2},...,i_1$ 的逆序数为

$$\binom{n}{2}-m=\frac{n(n-1)}{2}-m.$$

例题 1.1.11 (习题一第 6 大题)

求下面各个排列的逆序数并判断排列的奇偶性：

$$(1)26538417\quad(2)n(n-1)(n-2)...1\quad(3)2n(2n-2)(2n-4)...2(2n-1)(2n-3)...1.$$

解 1.1.11. (1) 逆序数为 $1+4+3+1+3+1=13$，奇排列。(2) 逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+...+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

设 $k\in\mathbb{N}_+$ 当 $n=4k,\ 4k+1$ 时，为偶排列，当 $n=4k+2,\ 4k+3$ 时，为奇排列。(3) 逆序数为

$$(2n-1)+(2n-3)+...+1+(n-1)+(n-2)+...+1=n^2+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$$

当 $n\equiv 0(\text{mod}4)$ 或 $n\equiv 3(\text{mod}4)$ 时，为偶排列；当 $n\equiv 1(\text{mod}4)$ 或 $n\equiv 2(\text{mod}4)$ 时，为奇排列。

例题 1.1.12 (习题一第 10 大题)

用行列式的定义计算：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 1.1.12. (1) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\tau(2143)abde + \tau(4123)abce = abde - abce = abe(d-c)$$

(2) 我们自上而下地按每一列来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D =& \tau(1n(n-1)(n-2)...2)a_{11}a_{2n}a_{3,n-1}...a_{n-1,n-1}, a_{n,2} \\ =& a_{11}(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_{2n} \cdots a_{n2} \end{aligned}$$

(3) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D =& \tau(n123...(n-1))a_n \\ =& (-1)^{(n-1)} a_n \end{aligned}$$

1.2 第 2 周作业

例题 1.2.1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n, \quad \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n$$

解 1.2.1. (1) 进行行列式的行变换，再按行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = 68$$

(2) 观察到所有列的元素和相同，所以同时相减：

$$\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & x-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & x-a \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}_n$$

$$= \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a+(n-1)x \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Big(a+(n-1)x\Big)(a-x)^{n-1}$$

(3) 一样的道理，当 $a \neq 0$, 时，将前 $n-1$ 列的元素乘以 $-\dfrac{x}{a}$ 加到最后一列上，再利用定义计算：

$$D = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a-(n-1)\dfrac{x^2}{a} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a^n-(n-1)x^2a^{n-2}).$$

当 $a=0$ 时，显然

$$D=\begin{cases}x & ,n=1\\ x^2 & ,n=2\\ 0 & ,n\geq 3\end{cases}$$

例题 1.2.2 证明等式

$$(1)\begin{vmatrix}x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3\\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3\\ z_1+x_1 & z_2+x_2 & z_3+x_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

$$(2)\begin{vmatrix}a & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1\end{vmatrix}=\left[a+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right](a-1)^{n-1}$$

解 1.2.2. (1) 先转置，再一点点拆出来：

$$\begin{vmatrix}x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3\\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3\\ z_1+x_1 & z_2+x_2 & z_3+x_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1\\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2\\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3\end{vmatrix}$$

然后把最后一列数加到第一行，再减去第二列数：

$$=\begin{vmatrix}2x_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1\\ 2x_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2\\ 2x_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1\\ x_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2\\ x_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3\end{vmatrix}$$

然后将第三列数减去第一列数，再乘以 -1 加到第二列数上：

$$=2\begin{vmatrix}x_1 & y_1+z_1 & z_1\\ x_2 & y_2+z_2 & z_2\\ x_3 & y_3+z_3 & z_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

(2) 套路式地将第二行，第三行... 第 n 行分别减去第一行：

$$\begin{vmatrix}a & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0\\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1\end{vmatrix}$$

再将第 2 列到第 n 列地数依次加到第一列上：

$$
=\begin{vmatrix} a+\dfrac{(n+2)(n-1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = \left(a+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)(a-1)^{n-1}
$$

例题 1.2.3 计算行列式

$$
(1)\begin{vmatrix} 7 & 49 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix},\quad (2)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n,\quad (3)\begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n
$$

解 1.2.3. (1) 直接计算即可：

$$
\begin{vmatrix} 7 & 49 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 7 & 49 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=20\begin{vmatrix} 0 & -6 & 8 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 0 & -6 & 8 \\ 0 & 3.5 & 3.5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -40\begin{vmatrix} -6 & 8 \\ 3.5 & 3.5 \end{vmatrix} = 1960.
$$

(2) 使用分割法，分别构造上三角行列式和下三角行列式，则

$$
\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \end{vmatrix}_{n-1}
$$

$$
=x^n+(-1)^{n+1}y^n = x^n-(-y)^n
$$

当然这题也可以用行变换先行处理，将第 k 行乘以 $-\dfrac{y}{x}$ 再加到第 $k+1$ 行：

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & y(-\frac{y}{x}) \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & y(-\frac{y}{x})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y(\frac{y}{x})^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+y(-\frac{y}{x})^{n-1} \end{vmatrix} = x^{n-1}\left(x+y(-\frac{y}{x})^{n-1}\right) = x^n-(-y)^n$$

(3) 这题可以递推法来做：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = x\begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - y\begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= x\begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - yz\begin{vmatrix} x & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-2} = xD_{n-1} - yzD_{n-2}$$

而 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$，列出特征方程：$r^2 - xr + yz = 0$，则分类：
当判别式为 0 时，根为 $\dfrac{x}{2}$，则 $D_n = (A+Bn)(\dfrac{x}{2})^n$，代入 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz = \dfrac{3}{4}x^2$ 得到

$$D_n = (n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

当判别式不为 0 时，根为 $r_1 = \dfrac{x+\sqrt{x^2-4yz}}{2}, r_2 = \dfrac{x-\sqrt{x^2-4yz}}{2}$，则 $D_n = Ar_1^2 + Br_2^2$，代入 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$ 得到

$$\begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{x^2-4yz}+x}{2\sqrt{x^2-4yz}} \\ B = \dfrac{\sqrt{x^2-4yz}-x}{2\sqrt{x^2-4yz}} \end{cases} \Rightarrow D_n = \frac{(x+\sqrt{x^2-4yz})^{n+1} + (x-\sqrt{x^2-4yz})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2-4yz}}$$

综上：

$$D_n=\begin{cases}(n+1)\left(\dfrac{x}{2}\right)^n & ,x^2=4yz\\ \dfrac{(x+\sqrt{x^2-4yz})^{n+1}+(x-\sqrt{x^2-4yz})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2-4yz}} & ,x^2\neq 4yz\end{cases}$$

例题 1.2.4 求解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=0\\ 5x_2+x_3+4x_4=1\\ 4x_1+2x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2+x_4=1\end{cases}$$

解 1.2.4. 分别计算可得：

$$D=\begin{vmatrix}3&1&2&0\\-8&1&1&0\\4&0&2&1\\-2&1&-2&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&1&2\\-8&1&1\\-2&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&2\\-8&1&1\\2&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\-8&1&1\\2&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\-8&1&1\\18&-3&0\end{vmatrix}=39$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&1&2&0\\1&5&1&4\\0&0&2&1\\1&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2&0\\1&5&1&4\\0&0&2&1\\0&-4&-1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&2&1\\4&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&-7&3\end{vmatrix}=13$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&0&2&0\\0&1&1&4\\4&0&2&1\\2&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&3&0\\1&1&0&4\\0&2&4&1\\1&0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&3&0\\0&1&-2&3\\0&2&4&1\\1&0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0\\1&-2&3\\2&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0\\-5&-14&0\\2&4&1\end{vmatrix}=-13$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&1&0&0\\0&5&1&4\\4&0&0&1\\2&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-15&5&1&4\\4&0&0&1\\-1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-15&4\\0&4&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-15&4\\0&4&1\\0&14&-3\end{vmatrix}=-26$$

$$D_4=\begin{vmatrix}3&1&2&0\\0&5&1&1\\4&0&2&0\\2&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&2&0\\-2&4&1&0\\4&0&2&0\\2&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&2\\-2&4&1\\4&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&-7&0\\-2&4&1\\8&-8&0\end{vmatrix}=0$$

所以解为：

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}, x_4 = 0$$

例题 1.2.5 如果齐次线性方程组有非零解，求 λ 的取值

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ \lambda^2 x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

解 1.2.5. 考虑系数行列式：

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-2\lambda \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda)(1-\lambda) = 0$$

所以 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 1.

第二章 矩阵

2.1 第 1 周作业

例题 2.1.1

求 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

解 2.1.1. 因为

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha & -\sin\alpha\cos n\alpha - \cos\alpha\sin n\alpha \\ \sin\alpha\cos n\alpha + \cos\alpha\sin n\alpha & \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以答案是 $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

例题 2.1.2

令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算

(1)A^2, A^3 和 $f(A)$, 其中 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$;

解 2.1.2. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $2 = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$
f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}
$$

例题 2.1.3

求与 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解 2.1.3. 设所求矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a-2b & a+2b \\ 3c-2d & c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b=3a+c \\ a+2b=-2a+2c \\ 3c-2d=3b+d \\ c+2d=-2b+2d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$$

例题 2.1.4

证明：与任意 n 阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵，即 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{E}$

解 2.1.4. 考虑一个特殊的矩阵 $\boldsymbol{E_{ij}}$，这个矩阵的第 i 行 j 列的元素是 1，其余元素全为 0。并设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与任意 n 阶矩阵都可交换，那么它显然为 n 阶矩阵。那么 n 阶矩阵 $\boldsymbol{AE_{ij}}$ 满足第 j 列的元素为 $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$，其余元素全为 0，而 n 阶矩阵 $\boldsymbol{E_{ij}A}$ 满足第 i 行的元素为 $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$，其余元素全为 0。因此由于 $\boldsymbol{E_{ij}A} = \boldsymbol{AE_{ij}}$，那么对于任意 $i \neq j, a_{ij} = 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有对角线上的元素不是 0，其余元素全为 0。然后由于 $\boldsymbol{E_{ij}}$ 中的 1 元素的位置任意，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角线上的元素必须互相相同，故与任意 n 阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵，即 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{E}$

例题 2.1.5

证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

解 2.1.5. 设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$，列向量为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$。考虑到 $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{AA}$，则 $\boldsymbol{0}$ 的第 i 行 j 列的元素是 $\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_j$，故任意 i, j 均有 $\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_j = 0$。又因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j$，所以考虑当 $i = j$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_i^2 = 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的元素均为 0，故 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{0}$。

例题 2.1.6

证明：任一方阵可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和

解 2.1.6. 设 A 为任意 $n \times n$ 方阵。定义两个矩阵：

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T) \tag{2.1}$$

$$K = \frac{1}{2}(A - A^T) \tag{2.2}$$

首先，验证 S 是对称矩阵：

$$S^T = \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = S$$

因此，S 是对称矩阵。
其次，验证 K 是反对称矩阵：

$$K^T = \left(\frac{1}{2}(A - A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -K$$

因此，K 是反对称矩阵。
最后，验证 $A = S + K$:

$$S + K = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}(2A) = A$$

故任一方阵 A 可分解为对称矩阵 S 和反对称矩阵 K 的和，即 $A = S + K$。证明完毕。

例题 2.1.7

将 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵.

解 2.1.7. 第 2 行减去 2 倍第 1 行，第 3 行减去 5 倍第 1 行，第 4 行减去 7 倍第 1 行，得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix}$$

第 3 行减去 2 倍第 2 行，第 4 行减去 2 倍第 2 行，交换第 3 行和第 4 行得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.8

已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&0&0&0\\3&4&-2&0&0&0\\5&-3&1&0&0&0\\0&0&0&3&2&0\\0&0&0&1&4&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}$,用分块矩阵的方法求$\boldsymbol{A}^2$.

解 2.1.8. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{O}$ 为零矩阵。

计算得到 $\boldsymbol{B^2}=\begin{pmatrix}2&13&-6\\5&28&-13\\1&5&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C^2}=\begin{pmatrix}10&-13&3\\-13&46&-13\\3&-13&10\end{pmatrix}$. 故答案为

$$\begin{pmatrix}2&13&-6&0&0&0\\5&28&-13&0&0&0\\1&-5&2&0&0&0\\0&0&0&11&14&0\\0&0&0&7&18&0\\0&0&0&0&0&9\end{pmatrix}$$

例题 2.1.9

计算下列矩阵的秩，如果矩阵为满秩，计算出矩阵的逆：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&-1\\0&3&5\end{pmatrix}$$

解 2.1.9.

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&-1\\0&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&-1\\0&0&6.5\end{pmatrix}$$

则 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ 矩阵的秩为 3，矩阵为满秩，下求逆矩阵：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

例题 2.1.10

求这个矩阵的逆，其中 $a_i \neq 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 2.1.10. 考虑矩阵将矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{a_n}$，第二行乘以 $\frac{1}{a_1}$，依此类推，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

将这个矩阵的第 n 行与第 $n-1$ 行交换，再将第 $n-1$ 行与第 $n-2$ 行交换，依此类推，直到第 2

行与第 1 行交换，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

将矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{a_n}$，第二行乘以 $\frac{1}{a_1}$，依此类推，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{array}\right) \Rightarrow \text{逆矩阵为} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{pmatrix}$$

例题 2.1.11

求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 2.1.11. 转化为求这个矩阵的逆：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{构造}[A|E] = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第 k 行减去第 $k+1$ 行，即可消去第 k 行中第 k+1 列及以后的所有 1，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

等式两边右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得：

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.12

求解线性方程组：$\begin{cases} 2x_1+3x_3=1, \\ 3x_2-5x_3=-4, \\ -2x_1+3x_2+2x_3=4; \end{cases}$

解 2.1.12. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow x_1=-\frac{17}{20}, x_2=\frac{1}{6}, x_3=\frac{9}{10}.$$

最后一行是由于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$，则 $x_1=-\dfrac{17}{20}, x_2=\dfrac{1}{6}, x_3=\dfrac{9}{10}$

例题 2.1.13

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

解 2.1.13. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换 $[A|E]=$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -13 & 6 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & -\frac{13}{2} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -29 & 13 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -29 & 13 & -2 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -29 & 13 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -11 & 5 \\ -10 & -72 & 33 \\ -24 & -159 & 73 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.14

求 $(k+l)\times(k+l)$ 矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}$ 的逆，其中 $\boldsymbol{E}_k$ 为 $k\times k$ 单位矩阵，$\boldsymbol{E}_l$ 为 $l\times l$ 单位矩阵.

解 2.1.14. 设逆矩阵为：$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{X}$ 是 $k\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{Y}$ 是 $k\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{Z}$ 是 $l\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{W}$ 是 $l\times l$ 矩阵。计算矩阵乘积：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{Z} & 0\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{W} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix}$$

等式成立：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}$$

得到方程组：$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{E}_k,\quad \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{W} = \boldsymbol{E}_l$，因此，逆矩阵为：

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}$$

例题 2.1.15

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是同阶方阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，求下列矩阵的逆：

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

解 2.1.15. 设逆矩阵为：

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的方阵。计算矩阵乘积：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{O}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{W} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{E}$，计算得到

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

例题 2.1.16

若 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，证明：

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$$

解 2.1.16. 设 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$，计算乘积：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})\\&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\cdots+\boldsymbol{A}^{k})\\&=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^2)+\cdots+(\boldsymbol{A}^{k-1}-\boldsymbol{A}^{k-1})-\boldsymbol{A}^k\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{O}+\boldsymbol{O}+\cdots+\boldsymbol{O}-\boldsymbol{O}=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

例题 2.1.17

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶方阵，证明 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

解 2.1.17. 由伴随矩阵的定义，有：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵。对等式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 两边取行列式：

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}|\boldsymbol{A}|&0&0&\cdots&0&0\\0&|\boldsymbol{A}|&0&\cdots&0&0\\0&0&|\boldsymbol{A}|&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&|\boldsymbol{A}|&0\\0&0&0&\cdots&0&|\boldsymbol{A}|\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|^n$$

分情况讨论：当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时可以直接得到 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，则我们可以对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换使之变成阶梯型矩阵，那么最后一行元素一定全为 0，因此 $|\boldsymbol{A}|$ 中最多只有最后一行的元素对应的代数余子式非零，所以 $|\boldsymbol{A}^*|$ 中一定有全为 0 的列，所以 $|\boldsymbol{A}^*|=0=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，综上所述，无论 $|\boldsymbol{A}|$ 是否为零，都有：

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$$

第三章 空间向量

例题 3.0.1 16

求过点$M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点O 及点M_0 的线段OM_0 垂直的平面方程.

解 3.0.1. 根据题意，$\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$ 为平面法向量，设平面方程为 $2x+9y-6z+D=0$，代入 $M_0=(2,9,-6)$，有 $2(2)+9(9)-6(-6)+D=0$，即 $D=-121$，即 $2x+9y-6z-121=0$ 为平面方程.

例题 3.0.2 18

求过点$(3,0,-1)$ 且与平面$3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解 3.0.2. 设平面方程为 $3x-7y+5z+D=0$，代入 $(3,0,-1)$，有 $3(3)-7(0)+5(-1)+D=0 \Rightarrow D=-4$，即 $3x-7y+5z-4=0$ 为平面方程.

例题 3.0.3 20

求过点$(4,0,-2)$ 和点$(5,1,7)$ 且平行于x 轴的平面方程.

解 3.0.3. 设该平面的法向量为 $\overrightarrow{n}=(0,B,C)$，则平面方程可以写为 $By+Cz+D=0$，代入 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$，有 $B=-\dfrac{9D}{2}$，$C=\dfrac{D}{2}$，取 $D=-2,B=9,C=-1$，即 $9y-z-2=0$ 为平面方程.

例题 3.0.4 22

平面 $x-2y+3z+D=0,-2x+4y+Cz+6=0$，分别求出当两个平面平行和重合时的 C,D 值.

解 3.0.4. 当两个平面重合，则它们等价，则 $C=-6,D=-3$；若两个平面平行，则 $C=-6,D\neq-3$；

例题 3.0.5 25

求出经过点 $P(3,1,2)$ 且平行于平面 $x+y+z+3=0,y-z+1=0$ 的直线的对称式方程.

解 3.0.5. 直线的方向向量为 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$，则 $\overrightarrow{n}\cdot(1,1,1)=0,\overrightarrow{n}\cdot(0,1,-1)=0$ 解得直线的方向向量为 $\overrightarrow{n}=(-2,1,1)$，则其对称式方程为 $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

例题 3.0.6 27

（1）求过直线 $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases}$ 和点 $(1,2,-1)$ 的平面方程.

（2）求过直线 $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 且与平面 $x+2z=1$ 垂直的平面方程.

解 3.0.6.（1）该直线的方向向量为 $\overrightarrow{n_1} = (3,1,2)$，过点 $A(2,2,1)$，设 $B(1,2,-1)$，则 $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-2)$，设平面的法向量为 $\overrightarrow{n}$，那么 $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{0}$，解得 $n = (-2,4,1)$，则 $-2x+4y+z+D=0$ 为平面方程，代入点 $A(2,2,1)$ 得到 $D=-5$，所以 $2x-4y-z+5=0$ 为平面方程.
（2）设平面方程为 $x+3y-z+\lambda(x-y+z+1)=0$，即

$$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(\lambda-1)z+\lambda=0$$

法向量为 $\overrightarrow{n} = (1+\lambda, 3-\lambda, \lambda-1)$，垂直于 $\overrightarrow{n_1} = (1,0,2)$，解得 $\lambda = \frac{1}{3}$，则平面方程为 $4x+8y-2z+1=0$

例题 3.0.7 28

证明下列两条直线 l_1 和 l_2 共面，并求它们所在的平面的方程.

$$l_1 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}, \quad l_2 : \begin{cases} x = 1+2t, \\ y = -2-3t, \\ z = 5+4t. \end{cases}$$

解 3.0.7. 将 l_1 化为参数方程 $\begin{cases} x = 7+3u \\ y = 2+2u \\ z = 1-2u \end{cases}$，与 l_2 的参数方程联立得到 $t=0, u=-2$，所以两条直线的交点为 $(1,-2,5)$，所以两条直线 l_1 和 l_2 共面，设出平面的法向量为 $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n} \cdot (2,-3,4) = 0, \overrightarrow{n} \cdot (3,2,-2) = 0$，解得 $\overrightarrow{n} = (2,-16,-13)$，则 $2x-16y-13z+D=0$ 为平面方程，代入 $(1,-2,5)$ 得到 $D=31$，所以 $2x-16y-13z+31=0$ 为平面方程.

第四章 线性方程组解的结构

易错点：进行矩阵行变换时不能将上下两行同时加到中间的那一行上（通常是心血来潮），但是往往忽略了可能导致消掉了后面某一列的0，而前面的某一列出现非0的数字

例题 4.0.1

解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+4x_4+x_5 &= 4, \\ 3x_1+7x_2-x_3-3x_4+2x_5 &= 10, \\ -x_2-13x_3-2x_4+x_5 &= -14, \\ x_3-16x_4+2x_5 &= -11, \\ 2x_4+5x_5 &= 12; \end{cases}$.

解 4.0.1. 构造增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & -3 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

例题 4.0.2

设 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,1,-1)$,$\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,-1,1)$. 试将 $\boldsymbol{\beta}$ 表示成向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

解 4.0.2. 构造增广矩阵并进行行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

解得 $k_1=\dfrac{5}{4},k_2=\dfrac{1}{4},k_3=-\dfrac{1}{4},k_4=-\dfrac{1}{4}$，所以

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{5}{4}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

例题 4.0.3

设 $\boldsymbol{\alpha_1}=(3,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,-3),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,0,5)$.
(1) 证明：$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；
(2) 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

解 4.0.3. （1）证明 $k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$ 有非零解，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\-1&1&-3&0\\1&2&-3&5\end{pmatrix},\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}3&1&1&4&0\\-1&1&-3&0&0\\1&2&-3&5&0\end{pmatrix}$$

取前三列写出行列式计算，易得 $r(\boldsymbol{A})=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})$ 所以有非零解，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.
（2）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，构造系数矩阵:

$$\begin{pmatrix}3&1&4\\-1&1&0\\1&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&1&0\\3&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&5\\0&3&5\\0&-5&-11\end{pmatrix}$$

计算行列式，得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A})=3$，与列数相等，所以方程组无非零解，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关.

例题 4.0.4

设向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$ 线性无关. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}$ 也线性无关.

解 4.0.4. 即证明

$$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2})+k_3(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3})=\mathbf{0}$$

只有零解，即

$$(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha_1}+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha_2}+k_3\boldsymbol{\alpha_3}=\mathbf{0}$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_2+k_3=0\\k_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}$ 也线性无关.

例题 4.0.5

$\mathbb{R}^3$ 中，由基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,-1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,2,1)$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2,0,1), \boldsymbol{\beta}_2 = (0,1,1), \boldsymbol{\beta}_3 = (1,-1,2)$ 的过渡矩阵？

解 4.0.5. 设

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

则设过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$，则有 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，所以由

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

且左乘一个可逆矩阵相当于作一系列初等行变换或列变换，所以我们可以写出矩阵 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$，通过初等行变换得到 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.625 & 0.125 & 0.125 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.125 & 0.625 & 0.375 \end{array}\right)$$

过渡矩阵为：$\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

例题 4.0.6

已知 $\boldsymbol{\alpha_1} = (1,0,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1)$ 和 $\boldsymbol{\beta_1} = (1,2,3), \boldsymbol{\beta}_2 = (2,3,1), \boldsymbol{\beta}_3 = (3,1,2)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基. (1) 求从基 $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ 到基 $\boldsymbol{\beta_1, \beta_2, \beta_3}$ 的过渡矩阵；(2) 分别求向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,1)$ 在这两组基下的坐标.

解 4.0.6.（1）设 $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$，则有 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，所以由

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

且左乘一个可逆矩阵相当于作一系列初等行变换或列变换，所以我们可以写出矩阵 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$，通过初等行变换得到 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$：

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&2&3&1\\0&0&1&3&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1&2\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&3&1&2\end{array}\right)$$

所以过渡矩阵为：$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\3&1&2\end{pmatrix}$

（2）构造增广矩阵并进行行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

所以向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha_1}=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$ 的坐标为 $(1,-1,1)$;

（3）构造增广矩阵并进行行变换

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&3&1&0\\3&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-5&-2\\3&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-5&-2\\0&-5&-7&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-7&-3\\0&1&5&2\\0&-5&-7&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-7&-3\\0&1&5&2\\0&0&18&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-7&-3\\0&1&5&2\\0&0&1&\frac{4}{9}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-7&-3\\0&1&0&-\frac{2}{9}\\0&0&1&\frac{4}{9}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{9}\\0&1&0&-\frac{2}{9}\\0&0&1&\frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

所以向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)$ 在基 $\boldsymbol{\beta_1}=(1,2,3),\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,1),\boldsymbol{\beta}_3=(3,1,2)$ 的坐标为 $\left(\frac{1}{9},-\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right)$

例题 4.0.7

在 $\mathbb{R}^3$ 中求向量 $\alpha=(3,7,1)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5),\boldsymbol{\alpha}_2=(6,3,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,0)$ 下的坐标

解 4.0.7. 构造矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&6&3&3\\3&3&1&7\\5&2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&6&3&3\\0&-15&-8&-2\\0&-28&-15&-14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&6&3&3\\0&-15\times28&-8\times28&-2\times28\\0&-28\times15&-15\times15&-14\times15\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&6&3&3\\0&-15\times28&-8\times28&-2\times28\\0&0&-1&-154\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&6&3&3\\0&-15&-8&-2\\0&0&-1&-154\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&6&3&3\\0&-15&0&1230\\0&0&1&154\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -459 \\ 0 & -15 & 0 & 1230 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -459 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix}$$

坐标是 $(33, -82, 154)$

例题 4.0.8

在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 γ, 使它在标准基 $\boldsymbol{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4}$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 1, -1, 1), \boldsymbol{\beta}_2 = (0, 3, 1, 0), \boldsymbol{\beta}_3 = (5, 3, 2, 1), \boldsymbol{\beta}_4 = (6, 6, 1, 3)$ 下有相同的坐标.

解 4.0.8. 设 $\gamma = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ 则

$$\begin{cases} 2k_1 + 5k_3 + 6k_4 = k_1 \\ k_1 + 3k_2 + 3k_3 + 6k_4 = k_2 \\ -k_1 + k_2 + 2k_3 + k_4 = k_3 \\ k_1 + k_3 + 3k_4 = k_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 5k_3 + 6k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 6k_4 = 0 \\ -k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_3 + 2k_4 = 0 \end{cases}$$

构建增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为只需要找到一个向量，所以取 $k_4 = -1$, 则 $\gamma = (1, 1, 1, -1)$.

例题 4.0.9

设向量组 $\boldsymbol{\xi_1}=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\xi_2}=(0,3,1,2),\boldsymbol{\xi_3}=(3,0,7,14),\boldsymbol{\xi_4}=(1,-1,2,0),\boldsymbol{\xi_5}=(2,1,5,6)$（1）证明 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2}$ 线性无关.（2）求向量组中包含 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2}$ 的极大线性无关组.

解 4.0.9.（1）设 $k_1\boldsymbol{\xi_1}+k_2\boldsymbol{\xi_2}=\mathbf{0}$，转化为方程组：

$$\begin{cases} k_1+0k_2=0 \\ -k_1+3k_2=0 \\ 2k_1+k_2=0 \\ 4k_1+2k_2=0 \end{cases}，解得 k_1=0,k_2=0$$

，因此 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2}$ 线性无关.

（2）将向量组构成矩阵 A，其中列向量为 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\boldsymbol{\xi_3},\boldsymbol{\xi_4},\boldsymbol{\xi_5}$，对 A 进行行化简：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3-2R_1]{R_2=R_2+R_1,\,R_4=R_4-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4=R_4-2R_2]{R_3=R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换}R_3,R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=-\frac{1}{4}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯形的主元列在第 1、2、4 列，对应向量 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\boldsymbol{\xi_4}$。向量 $\boldsymbol{\xi_3}$ 可以由 $\boldsymbol{\xi_1}$ 和 $\boldsymbol{\xi_2}$ 线性表示，$\boldsymbol{\xi_5}$ 可以由 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\boldsymbol{\xi_4}$ 线性表示；因此，包含 $\boldsymbol{\xi_1}$ 和 $\boldsymbol{\xi_2}$ 的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},\boldsymbol{\xi_4}$.

例题 4.0.10

设 $\boldsymbol{\alpha_1}=(2,1,2,2,-4),\boldsymbol{\alpha_2}=(1,1,-1,0,2),\boldsymbol{\alpha_3}=(0,1,2,1,-1),$
$\boldsymbol{\alpha_4}=(-1,-1,-1,-1,1),\boldsymbol{\alpha_5}=(1,2,1,1,1)$，确定向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4},\boldsymbol{\alpha_5}$ 极大线性无关组.

解 4.0.10. 将向量组构成矩阵 A，其中列向量为 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4},\boldsymbol{\alpha_5}$，对 A 进行行简化：

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&-1&1\\1&1&1&-1&2\\2&-1&2&-1&1\\2&0&1&-1&1\\-4&2&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换}R_1,R_2}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\2&1&0&-1&1\\2&-1&2&-1&1\\2&0&1&-1&1\\-4&2&-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3=R_3-2R_1]{R_2=R_2-2R_1,\,R_4=R_4-2R_1,\,R_5=R_5+4R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&-1&-2&1&-3\\0&-3&0&1&-3\\0&-2&-1&1&-3\\0&6&3&-3&9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2=-R_2}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&1&2&-1&3\\0&-3&0&1&-3\\0&-2&-1&1&-3\\0&6&3&-3&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3=R_3+3R_2]{R_1=R_1-R_2,\,R_4=R_4+2R_2,\,R_5=R_5-6R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&2&-1&3\\0&0&6&-2&6\\0&0&3&-1&3\\0&0&-9&3&-9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3/2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&2&-1&3\\0&0&3&-1&3\\0&0&3&-1&3\\0&0&-9&3&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4=R_4-R_3]{R_5=R_5+3R_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&2&-1&3\\0&0&3&-1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3/3}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&2&-1&3\\0&0&1&-1/3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2=R_2-2R_3]{R_1=R_1+R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-1/3&0\\0&1&0&-1/3&1\\0&0&1&-1/3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形式的主元列在第 1、2、3 列，对应向量 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$。因此，向量组的秩为 3，且 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$ 线性无关。其余向量可线性表示：$\boldsymbol{\alpha_4}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha_1}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha_2}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_5}=\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}$ 故向量组的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$

例题 4.0.11

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明：$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$

解 4.0.11. 假设 $\boldsymbol{AB}$ 为 $n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，首先，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量组 $\boldsymbol{x}$（显然都是列向量）的极大线性无关组的向量个数为原方程组自由变量的个数，即 $n-r(\boldsymbol{A})$，而且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 恰好提供了一组列向量，满足要求，但是由于这组列向量一定可以被 $\boldsymbol{x}$ 的极大线性无关组一个个地线性表示，所以说这组列向量的极大线性无关组的向量个数不一定等于（小于等于）解向量组 $\boldsymbol{x}$（显然都是列向量）的极大线性无关组的向量个数；所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$

而且，我们知道，如果将 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别视为向量组:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\beta_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}+\boldsymbol{\beta_n})\\ \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\cdots,\boldsymbol{\beta_n})\end{cases}$$

分别列出它们的极大线性无关组（等价于它们自身）：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Leftrightarrow \boldsymbol{M_{12}}=(\boldsymbol{\alpha_{i_1}}+\boldsymbol{\beta_{i_1}},\boldsymbol{\alpha_{i_2}}+\boldsymbol{\beta_{i_2}},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{i_r}}+\boldsymbol{\beta_{i_r}})\\ \boldsymbol{A}\Leftrightarrow \boldsymbol{M_1}=(\boldsymbol{\alpha_{i_1}},\boldsymbol{\alpha_{i_2}},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{i_s}})\\ \boldsymbol{B}\Leftrightarrow \boldsymbol{M_2}=(\boldsymbol{\beta_{i_1}},\boldsymbol{\beta_{i_2}},\cdots,\boldsymbol{\beta_{i_t}})\end{cases}$$

则显然 $\boldsymbol{M_{12}}$ 可以由 $\boldsymbol{M_1},\boldsymbol{M_2}$ 线性表示，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=s+t\ge r=r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$

对于本题,由于 $r(\boldsymbol{E})=n=r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$,且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$，所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$ 成立。

例题 4.0.12

求下列齐次线性方程组的一个基础解系, 并写出通解: $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0;\end{cases}$

解 4.0.12. 写出系数矩阵并进行行变换：

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{4}R_2}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得到 $x_3=0, x_1+2x_2-x_4=0$，将 $x_2=s, x_4=t$ 看作自由未知量，则解向量为

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2s+t\\s\\0\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow \mathbf{x}=s\xi_1+t\xi_2,\quad s,t\in\mathbb{R}$$

其中 ξ_1,ξ_2 为基础解系：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

例题 4.0.13

设线性方程组为

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+2x_4=0,\\9x_1-x_2+14x_3+2x_4=1,\\3x_1+2x_2+5x_3-4x_4=1,\\4x_1+5x_2+7x_3-10x_4=2.\end{cases}$$

（1）求方程组导出组的一个基础解系（2）用特解和导出组的基础解系表示方程组的所有解.

解 4.0.13.（1）导出组为齐次线性方程组，以及系数矩阵：

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+2x_4=0\\9x_1-x_2+14x_3+2x_4=0\\3x_1+2x_2+5x_3-4x_4=0\\4x_1+5x_2+7x_3-10x_4=0\end{cases},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3&2\\9&-1&14&2\\3&2&5&-4\\4&5&7&-10\end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行行变换，得到行最简形式：

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1}\begin{pmatrix}2&-1&3&2\\1&3&2&-6\\3&2&5&-4\\4&5&7&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&3&2&-6\\2&-1&3&2\\3&2&5&-4\\4&5&7&-10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&-6\\0&-7&-1&14\\0&-7&-1&14\\0&-7&-1&14\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{保留前两行}}\begin{pmatrix}1&3&2&-6\\0&-7&-1&14\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{7}R_2}\begin{pmatrix}1&3&2&-6\\0&1&\frac{1}{7}&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{11}{7}&0\\0&1&\frac{1}{7}&-2\end{pmatrix}$$

自由变量 $x_3=7s, x_4=t$（其中 $s,t\in\mathbb{R}$)，则：

$$x_1=-11s,\quad x_2=-s+2t,\quad x_3=7s,\quad x_4=t$$

解向量和导出组的基础解系为：

$$\mathbf{x}=s\begin{pmatrix}-11\\-1\\7\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}-11\\-1\\7\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

（2）原方程组的增广矩阵为：

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&3&2&0\\9&-1&14&2&1\\3&2&5&-4&1\\4&5&7&-10&2\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&3&2&0\\1&3&2&-6&1\\3&2&5&-4&1\\4&5&7&-10&2\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&2&-6&1\\2&-1&3&2&0\\3&2&5&-4&1\\4&5&7&-10&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&2&-6&1\\0&-7&-1&14&-2\\0&-7&-1&14&-2\\0&-7&-1&14&-2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{保留前两行}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&2&-6&1\\0&-7&-1&14&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{7}R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&2&-6&1\\0&1&\frac{1}{7}&-2&\frac{2}{7}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{11}{7}&0&\frac{1}{7}\\0&1&\frac{1}{7}&-2&\frac{2}{7}\end{array}\right)$$

令自由变量 $x_3=7s,x_4=t$（其中 $s,t\in\mathbb{R}$)，则：

$$x_1=\frac{1}{7}-11s,\quad x_2=\frac{2}{7}-s+2t,\quad x_3=7s,\quad x_4=t$$

特解为当 $s=0,t=0$ 时：

$$\eta=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{2}{7}\\0\\0\end{pmatrix}$$

所有解可表示为特解加上导出组基础解系的线性组合：

$$\mathbf{X}=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{2}{7}\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-11\\-1\\7\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

例题 4.0.14

已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}$$

讨论参数 s, t 取何值时，方程组有解，无解；有解时，试用导出组的基础解系表示通解.

解 4.0.14. 方程组的增广矩阵为：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 + 2R_2]{R_1 \to R_1 - R_2,\ R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}\right)$$

第四行对应方程 $0 = t + 2$，因此当 $t \neq -2$ 时，方程组无解。当 $t = -2$ 时，方程组有解，且解的情况取决于参数 p. 情况 1: $p \neq -8$，此时增广矩阵的秩为 3，系数矩阵的秩也为 3，自由变量个数为 1。导出组的基础解系含一个向量。从行最简形式：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

由第三行得 $(p+8)x_3 = 0$，因 $p \neq -8$，故 $x_3 = 0$，进而解得：$x_1 = -1 - x_4, x_2 = 1 - 2x_4$ 特解和导出组的基础解系为分别为：

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为：

$$\mathbf{x} = \eta + c\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

情况 2: $p=-8$；此时增广矩阵的秩为 2，系数矩阵的秩也为 2，自由变量个数为 2。导出组的基础解系含两个向量。从行最简形式：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

解得：$x_1=-1+4x_3-x_4,\quad x_2=1-2x_3-2x_4$ 特解和导出组的基础解系为分别为：

$$\eta=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \xi_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为：

$$\mathbf{x}=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

例题 4.0.15

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，那么

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, r(\boldsymbol{A})=n \\ 1, r(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0, r(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$$

解 4.0.15. （1）若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以由于 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\Rightarrow \det(\boldsymbol{A}^*)=\det(|\boldsymbol{A}|A^{-1})\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，是满秩的；

（2）此时尽管 $|\boldsymbol{A}|=0$，但是仍然有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，所以将 $\boldsymbol{A}$ 视作方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的系数矩阵，由于 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以方程组自由未知量个数为 1，所以解向量 $\boldsymbol{x}$ 的极大线性无关组的向量个数就是 1，而 $\boldsymbol{A}^*$ 所提供的列向量都可以被 $\boldsymbol{x}$ 的极大线性无关组线性表示，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)\leq 1$，但是又由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在 $n-1$ 阶不为 0 的行列式，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$

（3）若 $r(\boldsymbol{A})=n-2$，不存在 $n-1$ 阶不为 0 的行列式，所以由（2）得到 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$

第五章 特征值和特征向量

例题 5.0.1 求特征值和特征向量

（1）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解 5.0.1. （1）计算 $\det(A - \lambda E) = 0$：

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & -2-\lambda \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)[(-2-\lambda)(-1-\lambda) - 12] - 2[(-2)(-1-\lambda) - 6] - 1[(-2)(6) - (-2-\lambda)(3)] \\
&= (3-\lambda)[(2+3\lambda+\lambda^2) - 12] - 2[2+2\lambda-6] - 1[-12+6+3\lambda] \\
&= (3-\lambda)(\lambda^2+3\lambda-10) - 2(2\lambda-4) - (3\lambda-6) \\
&= (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+5) - 7(\lambda-2) = (\lambda-2)(15-7-2\lambda-\lambda^2) \\
&= (\lambda-2)(8-2\lambda-\lambda^2) = -(\lambda-2)^2(\lambda+4) = 0
\end{aligned}$$

所以特征值是 $\lambda_1 = 2$（二重）和 $\lambda_2 = -4$（一重）

先计算矩阵 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 并进行行变换：

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以选取 x_2, x_3 为自由变量，$x_1 = x_3 - 2x_2$，则有基向量：

$$x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则特征值 2 对应的特征向量为 $k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2}$，其中 k_1, k_2 为任意常数.

计算矩阵 $\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}$ 并进行行变换：

$$\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2\times7+7\times2 & 2\times7+2\times2 & 2\times7-2\times(-1) \\ 3\times7-7\times3 & 6\times7-2\times3 & 3\times7+1\times3 \end{pmatrix}$$

得到 $\begin{pmatrix}7 & 2 & -1\\0 & 18 & 12\\0 & 36 & 24\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}7 & 2 & -1\\0 & 3 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 选取 x_3 为自由变量，解得 $x_2 = -\frac{2}{3}x_3$，代入得 $x_1 = \frac{1}{3}x_3$ 取 $x_3 = 3$：$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，则特征值 -4 对应的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，其中 k_3 为任意常数.

（2）计算 $\det(A-\lambda E)=0$：

$$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\lambda E}| = \begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0 & 1\\0 & -\lambda & 1 & 0\\0 & 1 & -\lambda & 0\\1 & 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\1 & -\lambda & 0\\0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} - 0 + 0 - 1\begin{vmatrix}0 & -\lambda & 1\\0 & 1 & -\lambda\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)^2[(-\lambda)(-\lambda)-1\cdot 1]-(\lambda^2-1) = \lambda^2(\lambda^2-1)-(\lambda^2-1) = (\lambda^2-1)^2$$

特征值：$\lambda=1$（二重根），$\lambda=-1$（二重根），对于 $\lambda=1$，构造矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 进行初等行变换：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{cases}x_2 = x_3\\x_1 = x_4\end{cases}$$

基向量：$x_3=1, x_4=0 \Rightarrow \boldsymbol{\xi_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad x_3=0, x_4=1 \Rightarrow \boldsymbol{\xi_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

所以特征值 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi_1}+k_2\boldsymbol{\xi_2}$，其中 k_1,k_2 为任意常数。

对于 $\lambda=-1$，构造矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 进行初等行变换：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{cases}x_2 = -x_3\\x_1 = -x_4\end{cases}$$

基向量：$x_3=1, x_4=0 \Rightarrow \boldsymbol{\xi_3} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad x_3=0, x_4=1 \Rightarrow \boldsymbol{\xi_4} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

所以特征值 $\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi_3}+k_4\boldsymbol{\xi_4}$，其中 k_3,k_4 为任意常数.

例题 5.0.2 求该 n 阶矩阵的特征值和特征向量

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$$

解 5.0.2. 计算 $\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda E})=0$：

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1&\cdots&1\\1&-\lambda&1&\cdots&1\\1&1&-\lambda&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-1-\lambda&n-1-\lambda&n-1-\lambda&\cdots&n-1-\lambda\\1&-\lambda&1&\cdots&1\\1&1&-\lambda&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(n-1-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&-\lambda&1&\cdots&1\\1&1&-\lambda&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&-\lambda\end{vmatrix}=(n-1-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-\lambda-1&0&\cdots&0\\0&0&-\lambda-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(n-1-\lambda)(-\lambda-1)^{n-1}=0\Rightarrow\lambda_1=n-1,\lambda_2=-1$$

特征值为 $\lambda_1=n-1$（一重）和 $\lambda_2=-1$（$n-1$ 重）

对于特征值 $\lambda_1=n-1$，我们根据相同的行变换过程发现此时每一列的和为 0，因此此时这个矩阵的所有行向量线性相关，所以只有一个有效方程，而且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 应该相等，严谨的说明过程则需要写出：

$$\begin{cases}-(n-1)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0\\x_1-(n-1)x_2+x_3+\cdots+x_n=0\\x_1+x_2-(n-1)x_3+\cdots+x_n=0\\\cdots\\x_1+x_2+x_3+\cdots-(n-1)x_n=0\end{cases}$$

设 $S=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则第 i 个方程为：

$$-(n-1)x_i+(S-x_i)=0\Rightarrow S=nx_i$$

这对所有 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，因此：

$$nx_1=nx_2=\cdots=nx_n\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$$

故特征向量为 $\boldsymbol{\xi}=k(1,1,\dots,1)^T$，$k\neq 0$.
下面考虑另一个特征向量 $\lambda_2=-1$，将刚才进行的行变换作用于矩阵：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda E}=\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}n-1-\lambda & n-1-\lambda & n-1-\lambda & \cdots & n-1-\lambda\\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -\lambda-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -\lambda-1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda-1\end{pmatrix}$$

代入 $\lambda=-1$，则可得到 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，一组基可以取为：

$$\boldsymbol{\xi_1}=(1,-1,0,0,\dots,0)^T,\boldsymbol{\xi_2}=(1,0,-1,0,\dots,0)^T,\cdots,\boldsymbol{\xi_{n-1}}=(1,0,0,\dots,0,-1)^T$$

故特征向量为：

$$k_1\boldsymbol{\xi_1}+k_2\boldsymbol{\xi_2}+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi_{n-1}},\quad k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\text{为任意常数}$$

例题 5.0.3

设 λ 是 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值，α 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量，证明 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的一个特征值，α 也是 A^* 属于此特征值的一个特征向量.

解 5.0.3. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，设列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}$，即 $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E\alpha}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}$，即 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\alpha=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}$，所以 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}^*$ 属于此特征值的一个特征向量.

例题 5.0.4

设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2}$ 分别是属于 λ_1,λ_2 的特征向量. 试证：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 一定不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

解 5.0.4. 由定义得到 $\boldsymbol{A\alpha_1}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{A\alpha_2}=\lambda_2\boldsymbol{\alpha_2}$，相加有 $\boldsymbol{A(\alpha_1+\alpha_2)}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha_2}$，假如 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A(\alpha_1+\alpha_2)}=\lambda_3\boldsymbol{(\alpha_1+\alpha_2)}$，与 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha_2}$ 联立得到 $(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha_1}+(\lambda_3-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha_2}=0$，由 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2}$ 线性无关，得到 $\lambda_3=\lambda_1=\lambda_2$，但是 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，因此矛盾，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 一定不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

例题 5.0.5

矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&a&2\\3&6&-1\end{pmatrix}$与矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&b&0\\0&0&2\end{pmatrix}$相似, 试求$a,b$的值.

解 5.0.5. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，它们具有相同的特征值。矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵，其特征值即为对角线元素：-4、b 和 2。因此，$\boldsymbol{A}$ 的特征值也应为 -4、b 和 2，而且由相似矩阵的迹相等得到 $3+a+(-1)=a+2=-4+b+2=b-2\Rightarrow b=a+4$，由特征多项式韦达定理得到 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值的积为 $|\boldsymbol{A}|=-4\times b\times 2=-8b$，下面计算行列式（按行展开）：

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A})&=3\cdot\begin{vmatrix}a&2\\6&-1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-2&2\\3&-1\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2&a\\3&6\end{vmatrix}\\&=3\cdot(a\cdot(-1)-2\cdot 6)-2\cdot((-2)\cdot(-1)-2\cdot 3)-1\cdot((-2)\cdot 6-a\cdot 3)\\&=3\cdot(-a-12)-2\cdot(2-6)-1\cdot(-12-3a)\\&=-3a-36+8+12+3a=-16\end{aligned}$$

所以 $b=2,a=2-4=-2$

例题 5.0.6

已知 $\lambda=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&t\\1&t&t+1\end{pmatrix}$ 的二重特征值，求 t 的值，并求是否存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵

解 5.0.6. 由于已知 $\lambda=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&t\\1&t&t+1\end{pmatrix}$ 的二重特征值，所以直接计算 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$ 的值：

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&t\\1&t&t\end{vmatrix}&=1\cdot\begin{vmatrix}1&t\\t&t\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&t\\1&t\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&t\end{vmatrix}\\&=1\cdot(1\cdot t-t\cdot t)-1\cdot(1\cdot t-t\cdot 1)+1\cdot(1\cdot t-1\cdot 1)\\&=(t-t^2)-0+(t-1)=-t^2+2t-1=-(t-1)^2\end{aligned}$$

必要条件是 $\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=0$，即 $t=1$，当 $t=1$ 时，矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

计算特征多项式：

$$f(\lambda)=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&=(4-\lambda)\left[\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right]\\
&=(4-\lambda)\left[((2-\lambda)^2-1)-((2-\lambda)-1)+(1-(2-\lambda))\right]\\
&=(4-\lambda)\left[(\lambda^2-4\lambda+3)-(1-\lambda)+(\lambda-1)\right]\\
&=(4-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3+2\lambda-2)=(4-\lambda)(\lambda-1)^2
\end{aligned}$$

因此特征值为 $\lambda=1$（二重）和 $\lambda=4$，验证了 $\lambda=1$ 是二重特征值。接下来算出 $\boldsymbol{T}$，对于特征值 $\lambda=1$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得到方程 $x_1+x_2+x_3=0$。选择两个线性无关的解：

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

因此 λ_1 的代数重数和几何重数相等，对于特征值 $\lambda=4$，解方程组 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得到方程 $x_1=x_3, x_2=x_3$。取一个特解：

$$\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$。且 $\det(\boldsymbol{T})=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$ 可逆，满足：

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

结果的三个对角线上的元素不用具体计算，因为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

例题 5.0.7

求出能使下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵的正交矩阵 $\boldsymbol{T}$:

$$(1)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{pmatrix};(2)\boldsymbol{A}=A=\begin{pmatrix}4&-1&-1&1\\-1&4&1&-1\\-1&1&4&-1\\1&-1&-1&4\end{pmatrix}$$

解 5.0.7. (1) 对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{pmatrix}$，特征多项式为：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-4\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-4\\-2&\lambda-3&-2\\0&4-2\lambda&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-11)=0$$

得特征值：$\lambda_1=\lambda_2=2$（二重），$\lambda_3=11$，对于 $\lambda=2$，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$：

$$A-2E=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行化简}}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系：$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,-1)^T$，对于 $\lambda=11$，解 $(\boldsymbol{A}-11\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$：

$$\boldsymbol{A}-11\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}-5&2&4\\1&-2&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

此时已经很容易解得特征向量为：$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,2)^T$。对 $\lambda=2$ 对应的特征向量进行正交化：取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,0)^T$:

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(0,2,-1)^T-\frac{4}{5}(-1,2,0)^T=(\frac{4}{5},\frac{2}{5},-1)^T$$

取 $\boldsymbol{\beta}_2=(-4,-2,5)^T$（乘以 5 简化）单位化并构造正交矩阵：

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac23\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac13\\0&-\frac{5}{3\sqrt5}&\frac23\end{pmatrix}$$

(2) 对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-1&-1&1\\-1&4&1&-1\\-1&1&4&-1\\1&-1&-1&4\end{pmatrix}$，下面证明一个引理：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和都等

于同一个常数 c，那么 c 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，且满足：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=c \quad 对于所有i=1,2,\ldots,n$$

考虑向量 $\boldsymbol{v}=(1,1,\cdots,1)^{\boldsymbol{T}}$（全 1 向量）。计算矩阵乘积 $\boldsymbol{Av}$ 的第 i 个分量：

$$(\boldsymbol{Av})_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot v_j=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot 1=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=c$$

因此，对于所有 $i=1,2,\ldots,n$，都有 $(\boldsymbol{Av})_i=c$，这意味着：$\boldsymbol{Av}=c\boldsymbol{v}$，根据特征值和特征向量的定义，上式 $\boldsymbol{Av}=c\boldsymbol{v}$ 表明 c 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{v}$ 是对应的特征向量。
而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和均为：

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}=4+(-1)+(-1)+1=3 \quad 对于所有i=1,2,3,4$$

因此，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{v}=(1,1,1,1)^T$。将 $\boldsymbol{A}$ 分解为：$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4×4 单位矩阵，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$。计算 $\boldsymbol{C}$：

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

显然，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=1$，即 $\boldsymbol{C}$ 是秩 1 矩阵。一个非零特征值：$\lambda_C=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})=1+1+1+1=4$，三个零特征值：$0,0,0$，由于 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C}$，且矩阵加法保持特征向量的对应关系，有：$\lambda_A=3+\lambda_C$；因此：当 $\lambda_C=4$ 时，$\lambda_A=3+4=7$，当 $\lambda_C=0$ 时，$\lambda_A=3+0=3$；由于 $\boldsymbol{C}$ 有一个非零特征值和三个零特征值，$\boldsymbol{A}$ 对应地有一个特征值 7 和三个特征值 3。
对于 $\lambda=3$，解 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$：得基础解系：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0,1)^T$；对于 $\lambda=7$，解 $(\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量：$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,1,1,-1)^T$ 对 $\lambda=3$ 对应的特征向量进行正交化：取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^T$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1,0)^T-\frac{1}{2}(1,1,0,0)^T=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)^T$$

取 $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,2,0)^T$（乘以 2 简化）

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

计算得 $\boldsymbol{\beta}_3=(-1,1,1,3)^T$，构造正交矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

例题 5.0.8

试证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A^2} = \boldsymbol{A}$, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得

$$\boldsymbol{T^{-1}AT} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E_r} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

其中 r 为秩，$\boldsymbol{E_r}$ 为 r 阶单位矩阵。

解 5.0.8. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，根据实对称矩阵的正交相似对角化定理，存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。又已知 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，考虑正交相似变换：

$$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})^2 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT} \Leftrightarrow \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

因此，对于每个 i，有 $\lambda_i^2 = \lambda_i$，解得 $\lambda_i = 0$ 或 $\lambda_i = 1$。由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，而实对称矩阵的秩等于其非零特征值的个数，故特征值 1 的个数为 r。通过适当排列正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的列向量（即特征向量的顺序），可以使特征值 1 位于前 r 个位置，于是

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

例题 5.0.9

设A 为n 阶方阵, 且$A^2 = A$, 证明若λ 为A 的一个特征值, 则$\lambda = 0$ 或1.

解 5.0.9. 设 λ 为 A 的任意一个特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{A\alpha} = \lambda^2\boldsymbol{\alpha}$$

由于 $A^2 = A$，有 $A^2\boldsymbol{\alpha} = A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，因此

$$\lambda^2\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，所以 $\lambda^2 = \lambda$，即 $\lambda(\lambda - 1) = 0$，解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$。由于 λ 是 A 的任意特征值，故 A 的所有特征值都是 0 或 1。

例题 5.0.10

设A 为2×2 矩阵, 若 $\mathrm{tr}\,(A) = 8$ 且 $|A| = 12$, 求A 的特征值.

解 5.0.10. 用定义，设 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (ad - bc) - \lambda(a + d) + \lambda^2$，则代入数据得到 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$，因此 A 的特征值为 2 或 6。

例题 5.0.11

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵，证明：
(1) 若 λ 为 $\boldsymbol{AB}$ 的一个非零特征值，则它也是 $\boldsymbol{BA}$ 的一个特征值；
(2) 若 $\lambda=0$ 为 $\boldsymbol{AB}$ 的一个特征值，则 $\lambda=0$ 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的一个特征值

解 5.0.11. (1) 设 $\lambda\neq 0$ 为 $\boldsymbol{AB}$ 的一个特征值，则存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $\boldsymbol{AB\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，由于 $\lambda\neq 0$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{AB\alpha}\neq\boldsymbol{0}$。假设 $\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{AB\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha})=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$，与 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 矛盾。因此 $\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$。将等式两边左乘 $\boldsymbol{B}$，得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB\alpha})=\boldsymbol{B}(\lambda\boldsymbol{\alpha})\implies\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{B\alpha})=\lambda(\boldsymbol{B\alpha}).$$

由于 $\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，上式表明 λ 是 $\boldsymbol{BA}$ 的一个特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{B\alpha}$。
(2) 若 $\lambda=0$ 为 $\boldsymbol{AB}$ 的一个特征值，则 $\boldsymbol{AB}$ 是奇异矩阵，即 $\det(\boldsymbol{AB})=0$。由于 $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{BA})$，因此 $\det(\boldsymbol{BA})=0$，即 $\boldsymbol{BA}$ 也是奇异矩阵。故 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{BA}$ 的一个特征值。

例题 5.0.12

试证对于可逆矩阵A,B, 有$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

解 5.0.12. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可逆，考虑相似变换 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$。由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$。则

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{IBA}=\boldsymbol{BA}.$$

因此，$\boldsymbol{AB}$ 相似于 $\boldsymbol{BA}$。

例题 5.0.13

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵，证明若存在同一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 同时对角化 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

解 5.0.13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，且存在同一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 同时对角化 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，根据定义：

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\quad\boldsymbol{P^{-1}BP}=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$$

因此

$$\boldsymbol{P^{-1}APP^{-1}BP}=\boldsymbol{P^{-1}ABP}=\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\lambda_2\mu_2,\cdots,\lambda_n\mu_n)$$

同理

$$\boldsymbol{P^{-1}BPP^{-1}A}=\boldsymbol{P^{-1}BAP}=\mathrm{diag}(\mu_1\lambda_1,\mu_2\lambda_2,\cdots,\mu_n\lambda_n)$$

所以 $\boldsymbol{P^{-1}ABP}=\boldsymbol{P^{-1}BAP}$，同时左乘 $\boldsymbol{P}$，右乘 $\boldsymbol{P^{-1}}$，得到 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

例题 5.0.14

设$\boldsymbol{A}$ 是$n(n \geqslant 3)$ 阶矩阵, 如果$\boldsymbol{A} \neq 0$, 但$\boldsymbol{A}^3 = \mathbf{0}$, 试证明$\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

解 5.0.14. 假设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。由于 $\boldsymbol{A}^3 = \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵，其特征值均为零。这是因为若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ^3 是 $\boldsymbol{A}^3$ 的特征值，而 $\boldsymbol{A}^3 = \mathbf{0}$ 的特征值全为零，故 $\lambda^3 = 0$，即 $\lambda = 0$。由于 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \Lambda,$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵，其对角线元素为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即全为零。因此 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{0}$，于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}0\boldsymbol{P}^{-1} = \mathbf{0},$$

与已知 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ 矛盾。故假设不成立，$\boldsymbol{A}$ 不可对角化。

例题 5.0.15

若$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 证明存在$\boldsymbol{X}$使得$\boldsymbol{ABX} = \boldsymbol{A}$.

解 5.0.15. 对于 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$，固定 $\boldsymbol{A}$ 的某一行，我们发现 $\boldsymbol{C}$ 的对应的那一行的每一个元素，都是由 $\boldsymbol{B}$ 的每一列的各个元素，乘以 $\boldsymbol{A}$ 那一行各个元素所提供的“比例权重”，再求和得到的，遍历每一列操作都一样，于是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相乘等价于对 $\boldsymbol{B}$ 进行行变换。固定 $\boldsymbol{B}$ 的某一列，对于 $\boldsymbol{C}$ 的对应的那一列的各个元素，都是由 $\boldsymbol{A}$ 的每一行的元素乘以 $\boldsymbol{B}$ 那一列各个元素所提供的“比例权重”，再求和得到的，遍历每一行操作都一样，于是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相乘等价于对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换。
已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$，这意味着矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列空间与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间相同，即 $\operatorname{col}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{col}(\boldsymbol{A})$。设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，其列向量为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$。由于 $\operatorname{col}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{col}(\boldsymbol{A})$，对于每个列向量 $\boldsymbol{a}_j$，存在向量 $\boldsymbol{x}_j$ 使得

$$\boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{a}_j.$$

构造矩阵 $\boldsymbol{X}$ 为 $p \times n$ 矩阵（其中 p 是 $\boldsymbol{B}$ 的列数），其第 j 列为 $\boldsymbol{x}_j$，即 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$。则

$$\boldsymbol{ABX} = \boldsymbol{AB}[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = \boldsymbol{A}.$$

因此，存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{ABX} = \boldsymbol{A}$。
另解：设可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$，则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{QB}\right) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{QB}\right)$$

记 $\boldsymbol{QB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_r \\ \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}_r$ 为 r 行矩阵，则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_r \\ \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_r \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}_r)$$

所以 $\boldsymbol{B}_r$ 行满秩，此时，构造满足要求的矩阵 $\boldsymbol{X}$ 就变得非常直观：我们需要一个矩阵，当之右乘 $\boldsymbol{QB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_r\\\boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$ 时，能“筛选”出左上角的 $\boldsymbol{E}_r$，而忽略掉其他部分。取矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}_r$，取 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{O})$，矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 正是为此目的而设计的:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ABX}&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{QB}(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{O})\\&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_r\\\boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{O})=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & 0\\\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{C} & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{A}$

例题 5.0.16

$\mathrm{tr}(A^*A)=0\Leftrightarrow A=0$

解 5.0.16.

第六章 二次型的标准形与规范形

例题 6.0.1

用配方法把下列二次型化成标准形:$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4$

解 6.0.1. 先用平方差公式代换，让式子中出现平方项，再根据系数配平方: 设 $2y_1=x_1+x_2, 2y_2=x_1-x_2$，则有：

$$
\begin{aligned}
&x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4=\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}+\frac{y_1+y_2}{2}x_3+y_1x_4\\
=&\frac{y_1^2}{4}+y_1\left(\frac{x_3}{2}+x_4\right)-\frac{y_2^2}{4}+\frac{x_3y_2}{2}\\
=&\left(\frac{y_1}{2}+\frac{x_3}{2}+x_4\right)^2-\left(\frac{x_3}{2}+x_4\right)^2-\left(\frac{y_2}{2}-\frac{x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{2}\right)^2\\
=&z_1^2-z_2^2-z_3^2+z_4^2
\end{aligned}
$$

其中 $z_1=\frac{y_1}{2}+\frac{x_3}{2}+x_4, z_2=\frac{x_3}{2}+x_4, z_3=\frac{y_2}{2}-\frac{x_3}{2}, z_4=\frac{x_3}{2}$.

例题 6.0.2

用正交变换把下列实二次型化成标准形，并写出所作的正交变换:$2x_1x_3+x_2^2$

解 6.0.2. 将该二次型简写成矩阵乘积的形式：

$$
2x_1x_3+x_2^2=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)^T
$$

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则

$$
|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1-\lambda^2\\0&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)
$$

得到特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，令 $\lambda=1$，则

$$
\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2\text{为自由变量}\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}
$$

其中 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ 为基础解系，显然 $(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = 0$. 令 $\lambda = -1$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{v_3}$ 为基础解系，则将 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ 单位化，写出矩阵 $\boldsymbol{P} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v_3}\right)$，令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY}$ 得到规范型：$-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

例题 6.0.3

求下列实二次型的正、负惯性指数：$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

解 6.0.3. 将该二次型化成标准形：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) =& x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ =& (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T \\ =& (x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)^T \\ |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| =& \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda+1 & -\lambda^2+4\lambda-2 \\ 0 & -1-\lambda & 2\lambda-5 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ =& (\lambda+1)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) \end{aligned}$$

特征值为 $\lambda_1 = -1$,$\lambda_2 = 3 + \sqrt{2}$,$\lambda_3 = 3 - \sqrt{2}$。由于 $3 + \sqrt{2} > 0$ 和 $3 - \sqrt{2} > 0$, 正特征值个数为 2, 负特征值个数为 1。因此，二次型的标准形可通过正交变换化为：

$$-1 \cdot y_1^2 + (3 + \sqrt{2})y_2^2 + (3 - \sqrt{2})y_3^2$$

正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1。

例题 6.0.4

判断下列实二次型是不是正定二次型，或在何种条件下是正定二次型：

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

解 6.0.4. 给定二次型：

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

对应的对称矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

二次型正定的充要条件是对称矩阵 A 的所有顺序主子式大于零。

1. 第一顺序主子式：$\Delta_1 = 1 > 0$ 恒成立。
2. 第二顺序主子式：$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$，要求 $\Delta_2 > 0$，即：$1 - \lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < \lambda < 1$
3. 第三顺序主子式（矩阵行列式）：

$$\Delta_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 - 4) - \lambda \cdot (5\lambda + 2) - (2\lambda + 1)$$

$$= 1 - 5\lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda - 1 = -5\lambda^2 - 4\lambda$$

要求 $\Delta_3 > 0$，即：

$$-5\lambda^2 - 4\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad 5\lambda^2 + 4\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{5} < \lambda < 0$$

因此，当且仅当 $\lambda \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ 时，该二次型为正定二次型。

例题 6.0.5

设有二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 问

(1) 当 a 取何值时，$f(x_1, x_2, x_3)$ 正定？

(2) 当 a 取何值时，$f(x_1, x_2, x_3)$ 负定？

解 6.0.5. 该二次型对应的矩阵为：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

（1）第一，二阶顺序子式大于 0，即 $\begin{cases} \Delta_1 = a > 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow a > 1$

第三阶顺序子式：$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a-2)(a+1)^2 > 0 \Rightarrow a > 2$ 因此，当 $a > 2$ 时，二次型正定。

（2）二次型 f 负定当且仅当 $-f$ 正定。$-f$ 对应的矩阵为 $-\boldsymbol{A}$：

$$-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-a & -1 & -1\\ -1 & -a & 1\\ -1 & 1 & -a\end{pmatrix}$$

第一顺序主子式：$\Delta_1'=-a>0\Rightarrow a<0$

第二顺序主子式：$\Delta_2'=\begin{vmatrix}-a & -1\\ -1 & -a\end{vmatrix}=a^2-1>0\Rightarrow a<-1\quad 或\quad a>1$

第三顺序主子式：

$$\Delta_3'=\begin{vmatrix}-a & -1 & -1\\ -1 & -a & 1\\ -1 & 1 & -a\end{vmatrix}=-a\cdot\begin{vmatrix}-a & 1\\ 1 & -a\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & -a\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & -a\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-a(a^2-1)+1(a+1)-1(-1-a)=-a^3+a+a+1+1+a$$

$$=-a^3+3a+2=-(a-2)(a+1)^2>0$$

综合三个条件：$a<0$，$a<-1$，$a<2$，取交集，因此，当 $a<-1$ 时，$-\boldsymbol{A}$ 正定，即原二次型负定。

例题 6.0.6

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个n 阶正定矩阵, 证明:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

解 6.0.6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 $n\times n$ 的正定矩阵，显然由于定义，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称阵，则验证定义 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是实对称阵。则任意矩阵 $\boldsymbol{X}\neq 0,\boldsymbol{XAX^T}>0,\boldsymbol{XBX^T}>0$，则 $\boldsymbol{XAX^T}+\boldsymbol{XBX^T}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X^T}>0$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵。

例题 6.0.7

设 A 为 n 阶正定矩阵，证明：

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正定矩阵；

(2)$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

解 6.0.7. (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 的正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是实对称阵，则任意矩阵 $\boldsymbol{X}\neq 0$，有 $\boldsymbol{XAX^T}>0$，则 $\boldsymbol{XA^TX^T}=(\boldsymbol{XAX^T})^T>0$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正定矩阵。

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|>0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，且满足 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$。又由于存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PP^T}$，那么 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{PP^T})^{-1}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{P}^T)^{-1}\boldsymbol{P^{-1}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{P}^{-1})^T\boldsymbol{P}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A^{-1}}$ 也是正定矩阵。所以其各项特征值均大于 0，因此 $\boldsymbol{A}^*$ 各项特征值也大于 0，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵。