



华南理工大学  
South China University of Technology

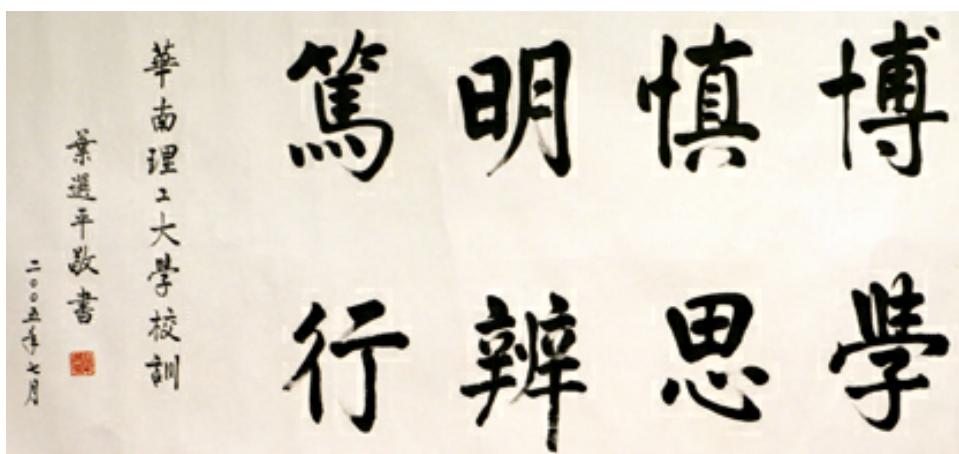
# 简单导数

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

参考：群友

日期：2026年2月8日



# 前言

收录简单导数群题，部分 CMC 非数类题型。

夏同  
于华南理工大学  
2026 年 2 月 8 日

# 目录

前言

I

第一章 微分中值定理

1

# 定义索引

# 定理索引

1.0.1 拉格朗日插值积分余项 . . . . .	13
----------------------------	----

# 例题索引

1.0.1 K 值法 . . . . .	2
1.0.2 . . . . .	3
1.0.3 . . . . .	4
1.0.4 . . . . .	5
1.0.5 . . . . .	6
1.0.6 . . . . .	7
1.0.7 . . . . .	8
1.0.8 . . . . .	8
1.0.9 . . . . .	9
1.0.10 . . . . .	10
1.0.11 . . . . .	11
1.0.12 . . . . .	12
1.0.13 . . . . .	14
1.0.14 . . . . .	15
1.0.15 . . . . .	16

# 第一章 微分中值定理

本章介绍微分中值定理的各种题型，主要介绍以埃米特插值为本质的高观点做题思路，同时以常数 K 值法为考场手段，辅以罗尔定理的多次使用，进行证明。首先介绍埃米特插值的基本形式和 K 值法的证明思路。

题目会给出基本函数  $f(x)$  的某些性质，比如  $f$  的光滑性如何， $f$  在某些点的函数值和导数值等，然后是要证明的结论，我们通常要先构造一个插值多项式  $p(x)$ ，使得  $p(x)$  尽可能地拟合  $f(x)$  的行为，然后构造  $G(x) = f(x) - p(x)$ ，多次循环地利用罗尔中值定理。

先数一数原题给了多少条件，然后数一数要拟合什么点，拟合到多少阶，把所有点的要拟合阶数（包括 0 阶）相加，减去 1，就是插值多项式的次数，余项比插值多项式的次数高 1 阶。然后根据余项的阶数和原函数的光滑性条件，判断是属于什么类型。

### 1.0.1 例题: K 值法

$f(x) \in C^2[a, b]$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\xi)$$

解 1.0.1. 取  $f(x)$  的原函数  $F(x)$ , 则  $F(x) \in C^3[a, b]$ , 且  $F'(x) = f(x)$ , 所以要证明的结论等价于证明:  $F(x) \in C^3[a, b]$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2 F'''(\xi)}{24}$$

插  $F(a), F(b), F\left(\frac{a+b}{2}\right), F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ , 一共 4 个条件, 余项 4 阶, 插值多项式 3 次, 导数不够, 属于对  $F''' = p'''$  类型, 先写出拉格朗日插值部分, 然后根据本题最高只需拟合到 1 阶导数, 而且只有 1 个点才需要拟合到 1 阶导数, 待定  $1-1=0$  阶多项式  $r$ :

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} F(a) + \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-a)}{(b - \frac{a+b}{2})(b-a)} F(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)} F\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\quad + c(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

这个式子自动满足  $p(a) = p(b) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)$  求导数并令  $p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ :

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{F(a)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} \left( x - \frac{a+b}{2} + x - b \right) + \frac{F(b)}{(b - \frac{a+b}{2})(b-a)} \left( x - \frac{a+b}{2} + x - a \right) \\ &\quad + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)} ((x-a)+(x-b)) \\ &\quad + c(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x - \frac{a+b}{2}}\right) \\ &= \frac{F(a)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} \left( x - \frac{a+b}{2} + x - b \right) + \frac{F(b)}{(b - \frac{a+b}{2})(b-a)} \left( x - \frac{a+b}{2} + x - a \right) \\ &\quad + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)} (x-a+x-b) \\ &\quad + c \left( (x-a)(x-b) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-a) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) \right) \\ p'\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{F(a)}{a-b} + \frac{F(b)}{b-a} - \frac{c}{4}(b-a)^2 = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{4\left(\frac{F(b)-F(a)}{b-a} - F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(b-a)^2} \end{aligned}$$

构造  $G(x) = f(x) - p(x)$ , 则  $G(a) = G(b) = G\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , 由 Rolle 定理, 存在  $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$  使得  $G'(\xi_1) = 0$ , 存在  $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$  使得  $G'(\xi_2) = 0$ , 加上  $G'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , 由 Rolle 定理, 存在  $\xi_3 \in (\xi_1, \frac{a+b}{2})$  使得  $G''(\xi_3) = 0$ , 存在  $\xi_4 \in (\frac{a+b}{2}, \xi_2)$  使得  $G''(\xi_4) = 0$ , 由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (a, b)$  使得  $G'''(\xi) = 0$ , 所以  $F'''(\xi) = p'''(\xi) = 6c$ , 即:

$$F'''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3} (F(b) - F(a)) - \frac{24}{(b-a)^2} F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

## 1.0.2 例题:

设  $f \in C^1[a, b] \cap D^3(a, b)$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(a) + f'(b)}{2} - \frac{f'''(\xi)}{12}(b - a)^2$$

解 1.0.2. 插  $f(a), f(b), f'(a), f'(b)$ , 则插值多项式 3 次, 余项 4 阶, 但是条件只到 3 阶, 属于  $f''' = p'''$  类型, 插值:

$$p(x) = \frac{x - b}{a - b}f(a) + \frac{x - a}{b - a}f(b) + (kx + m)(x - a)(x - b)$$

此时自动保证  $p(a) = f(a), p(b) = f(b)$ , 参数  $k, m$  待定, 以期望  $p'(a) = f'(a), p'(b) = f'(b)$ , 解出  $k, m$ .

$$\begin{aligned} p'(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + (ka + m)(a - b) = f'(a) \\ p'(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + (kb + m)(a - b) = f'(b) \end{aligned}$$

相减得到

$$k = \frac{f'(b) + f'(a)}{(b - a)^2} - \frac{2(f(b) - f(a))}{(b - a)^3}$$

此时可以继续解方程得到  $m$ , 但是没有必要了, 我们假装  $m$  已知, 设而不求就可以了设  $G(x) = f(x) - p(x)$ , 则  $G(a) = G(b) = 0, G'(a) = G'(b) = 0$ , 所以由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (a, b)$  使得  $G'(\xi_1) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi_2, \xi_3$  使得  $G''(\xi_2) = 0, G''(\xi_3) = 0$ , 最后由罗尔中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $G'''(\xi) = 0$ , 所以

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 6k = \frac{6(f'(b) + f'(a))}{(b - a)^2} - \frac{12(f(b) - f(a))}{(b - a)^3}$$

## 1.0.3 例题:

设  $f \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$ , 满足  $f(0) = f(2) = 0, |f'(x)| \leq M, \forall x \in (0, 2)$ , 证明

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq M$$

解 1.0.3. 插  $f(0), f(2)$ , 插值多项式 1 次 (仅拉格朗日插值式, 用不到导数修正), 余项 2 阶, 导数不够, 属于靠近哪边对哪边插模型。所以在  $[0, 1]$  上插  $f(0)$ , 在  $[1, 2]$  上插  $f(2)$ , 则写出两段插值式。

当  $x \in [0, 1]$  时, 对  $f(x)$  的插值为:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(\xi(x))}{1!}(x - 0) = f'(\xi(x))x$$

这是拉格朗日中值定理的直接应用, 所以不用考场翻译。得到

$$|f(x)| \leq |f'(\theta(x))|x \leq Mx$$

当  $x \in [1, 2]$  时, 对  $f(x)$  的插值为:

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(\eta(x))}{1!}(x - 2) = f'(\eta(x))(x - 2)$$

同理, 得到

$$|f(x)| \leq |f'(\eta(x))|(x - 2) \leq M(2 - x)$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 f(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 Mx dx + \int_1^2 M(2 - x) dx = M \end{aligned}$$

## 1.0.4 例题:

设  $f \in D^2[0, 1]$ ,  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $|f''(x)| \leq M$ , 证明  $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}$

解 1.0.4. 要拟合  $f(0), f(1)$  一共两个插值条件, 无导数条件需要拟合, 所以插值多项式为一次, 也不用待定多项式  $r$ , 余项到了 2 阶导数, 符合题目所给条件, 所以根据埃米特插值, 存在  $\theta(x) \in (0, 1)$  使得:

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1), \forall x \in [0, 1]$$

这个结论可以用 k 值法来证明, 由

$$f(x) - Kx(x-1) = 0$$

的条件 (其中  $K$  与  $x$  有关), 设

$$F(y) = f(y) - Ky(y-1)$$

则  $F(0) = F(1) = F(x) = 0$ , 罗尔得到  $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ ,  $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ , 所以存在  $\theta(x) \in (0, 1)$  使得  $F''(\theta(x)) = 0$ 。对  $F(x)$  求二阶导数得到

$$f''(\theta(x)) - 2K = 0 \Rightarrow K = \frac{f''(\theta(x))}{2}$$

所以

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1) dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{f''(\theta(x))}{2} \right| |x(x-1)| dx \\ &\leq \frac{M}{2} \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{M}{12} \end{aligned}$$

## 1.0.5 例题:

设  $f \in C^3[0, 2]$  满足

$$f(0) = f'(0) = 0, \int_0^2 f(x)dx = 8 \int_0^1 f(x)dx$$

求证存在  $\theta \in (0, 2)$  使得  $f'''(\theta) = 0$

解 1.0.5. 套路地, 设  $F(x) = \int_0^x f(y)dy, F(x) \in C^4[0, 2], F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$ , 且  $F(2) = 8F(1)$ , 这里我们使用插值法, 就是找一个多项式去尽可能的拟合  $f$  的行为。注意到  $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$ , 所以可以考虑插值多项式为  $p(x) = x^3(ax + b)$ , 代入  $F(2) = 8F(1)$  得到  $a = 0$ , 所以  $p(x) = bx^3$ , 再由  $p(1) = F(1)$  得到  $b = F(1)$ , 所以

$$p(x) = F(1)x^3$$

于是构造出

$$G(x) = F(x) - F(1)x^3$$

这个  $G(x)$  满足

$$G(0) = G(1) = G(2) = 0, G'(0) = 0, G''(0) = 0$$

所以由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in (1, 2)$ , 使得  $G'(\xi_1) = G'(xi_2) = 0$ , 搭配上  $G'(0) = 0$ , 所以又有罗尔中值定理, 得知存在  $\theta_1, \theta_2$ , 使得  $G''(\theta_1) = G''(\theta_2) = 0$ , 同样的, 搭配上  $G''(0) = 0$ , 又有罗尔中值定理, 得知存在  $\eta_1 \in (0, 1), \eta_2 \in (1, 2)$  使得

$$G'''(\eta_1) = G'''(\eta_2) = 0$$

所以由罗尔中值定理, 得到存在  $\theta \in (0, 2)$  使得

$$G''''(\theta) = 0$$

而求导易得

$$G''''(x) = f'''(x) - p'''(x) = 0 \Rightarrow f'''(\theta) = 0$$

## 1.0.6 例题:

$f(x)$  在  $[0, 1]$  可导, 且  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{2}$ ,  $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{3}{2}$ , 求证在  $(0, 1)$  存在  $\xi$  使  $f'(\xi) = 3$ .

解 1.0.6. 套路式地, 设

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, G(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

则有

$$F(0) = G(0) = 0, F(1) = \frac{5}{2}, G(1) = \frac{3}{2}$$

而问题要证明的结论似乎仅与  $f(x)$  (以及其导函数, 原函数) 有关, 所以要从  $G(x)$  中分出  $F(x)$  或者  $f(x)$  来, 考虑分部积分:

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x dF(x) = xF(x)|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx \Rightarrow \int_0^1 F(x)dx = 1$$

则问题转化为  $F(x)$  在  $(0, 1)$  上二阶可导, 且  $F(0) = 0, F(1) = \frac{5}{2}, \int_0^1 F(x)dx = 1$ , 求证存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $F''(\xi) = 3$ 。再取  $g(x) = \int_0^x F(x)dx$ , 则  $g'(0) = 0, g'(1) = \frac{5}{2}$ , 且  $g(0) = 0, g(1) = 1$ , 则问题转化为  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上三阶可导, 求证存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $g'''(\xi) = 3$ 。4 个条件, 余项 4 阶, 插值多项式为 3 次, 导数 3 阶不够, 属于  $g''' = p'''$  类型, 构造插值多项式:

$$p(x) = \frac{x-0}{1-0}g(1) + \frac{x-1}{0-1}g(0) + (kx+m)x(x-1) = x + (kx+m)x(x-1)$$

求导并令  $p'(0) = g'(0), p'(1) = g'(1)$ :

$$p'(x) = 1 + (kx+m)(2x-1) + kx(x-1)$$

$$p'(0) = 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$p'(1) = 1 + (k+1)(1) + 0k = 1 + k + 1 = 2 + k = \frac{5}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

构造  $W(x) = g(x) - p(x)$ , 则  $W(0) = W(1) = W'(0) = W'(1) = 0$ , 且  $W(x)$  在  $(0, 1)$  上三阶可导, 由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (0, 1)$  使得  $W'(\xi_1) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi_2 \in (0, \xi_1)$  使得  $W''(\xi_2) = 0$ , 存在  $\xi_3 \in (\xi_1, 1)$  使得  $W''(\xi_3) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi \in (\xi_2, \xi_3) \subset (0, 1)$  使得  $W'''(\xi) = 0$ , 所以

$$g'''(\xi) = p'''(\xi) = 6k = 3$$

## 1.0.7 例题:

$f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上二次可微, 证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$$

解 1.0.7. 拟合  $f(a), f(b), f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ , 设

$$G(x) = f(x) - \left[ \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x - b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a - b)} f(a) + \frac{(x - a)(x - \frac{a+b}{2})}{(b - a)(b - \frac{a+b}{2})} f(b) + \frac{(x - a)(x - b)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]$$

则  $G(a) = G(b) = G\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , 由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$  使得  $G'(\xi_1) = 0$ , 存在  $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$  使得  $G'(\xi_2) = 0$ , 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$  使得  $G''(\xi) = 0$ , 所以  $f''(\xi) = p''(\xi)$ , 求导:

$$p''(x) = 4 \frac{f(a)}{(b-a)^2} + 4 \frac{f(b)}{(b-a)^2} - 8 \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2} = \frac{4}{(b-a)^2} \left( f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

所以

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$$

## 1.0.8 例题:

设  $f \in C^3[-1, 1]$  满足  $f(-1) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 1$ , 证明存在  $\xi \in (-1, 1)$  使得  $f'''(\xi) = 3$

解 1.0.8. 插  $f(-1), f(1), f(0), f'(0)$ , 则插值多项式为三次, 余项四阶, 导数三阶不够, 属于  $f''' = p'''$  类型, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} f(1) + \frac{(x-1)(x-0)}{(-1-1)(-1-0)} f(-1) + \frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)} f(0) + cx(x-1)(x+1) \\ &= \frac{x(x+1)}{2} - (x^2 - 1)f(0) + c(x-1)(x+1)x \\ p'(x) &= \frac{2x+1}{2} - 2xf(0) + c((x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1)) \\ p'(0) &= \frac{1}{2} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

构造  $G(x) = f(x) - p(x)$ , 则  $G(-1) = G(0) = G(1) = 0, G'(0) = 0$ , 由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (-1, 0)$  使得  $G'(\xi_1) = 0$ , 存在  $\xi_2 \in (0, 1)$  使得  $G'(\xi_2) = 0$ , 加上  $G'(0) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi_3 \in (\xi_1, 0) \subset (-1, 1)$  使得  $G''(\xi_3) = 0$ , 存在  $\xi_4 \in (0, \xi_2) \subset (-1, 1)$  使得  $G''(\xi_4) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (-1, 1)$  使得  $G'''(\xi) = 0$ , 所以

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 6c = 3$$

## 1.0.9 例题:

$f(x) \in C^4[0, 1]$ , 三次多项式  $p(x)$  满足  $p(0) = f(0), p(1) = f(1), p'(0) = f'(0), p'(1) = f'(1)$ ,

证明

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\}$$

解 1.0.9. 构造  $G(x) = f(x) - p(x)$ , 则  $G(0) = G(1) = 0, G'(0) = G'(1) = 0$ , 由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (0, 1)$  使得  $G'(\xi_1) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi_2 \in (0, \xi_1)$  使得  $G''(\xi_2) = 0$ , 存在  $\xi_3 \in (\xi_1, 1)$  使得  $G''(\xi_3) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi \in (\xi_2, \xi_3) \subset (0, 1)$  使得  $G'''(\xi) = 0$ , 现在因为罗尔定理的迭代次数受零点个数限制。要得到四阶导数的信息, 需引入额外零点。即证

$$-\frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\} \leq G(x) \leq \frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\}$$

使用 K 值法解决, 假设存在与  $x$  有关的量  $K$ , 使得  $G(x) = K \frac{x^2(x-1)^2}{4!}$ , 再设函数  $H(y) = G(y) - K \frac{y^2(y-1)^2}{4!}$ , 则  $H(0) = H(1) = H(x) = 0, H'(0) = H'(1) = 0$ , 由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (0, x), \xi_2 \in (x, 1)$  使得  $H'(\xi_1) = H'(\xi_2) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi_3 \in (0, \xi_1), \xi_4 \in (\xi_1, \xi_2), \xi_5 \in (\xi_2, 1)$  使得  $H''(\xi_3) = H''(\xi_4) = H''(\xi_5) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi_6 \in (\xi_3, \xi_4), \xi_7 \in (\xi_4, \xi_5)$  使得  $H'''(\xi_6) = H'''(\xi_7) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi \in (\xi_6, \xi_7) \subset (0, 1)$  使得  $H^{(4)}(\xi) = 0$ , 所以

$$f''''(\xi) - p''''(\xi) = f''''(\xi) - 0 = f''''(\xi) = G''''(\xi) = K \frac{d^4}{dy^4} \left( \frac{y^2(y-1)^2}{4!} \right)$$

而且  $\frac{y^2(y-1)^2}{4!}$  求 4 阶导数的值是 1, 所以  $K = f''''(\xi)$ , 所以

$$f(x) - p(x) = \frac{f''''(\xi)x^2(x-1)^2}{4!} \leq \frac{1}{384} f''''(\xi)$$

取绝对值得到

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\}$$

## 1.0.10 例题:

设  $f \in C^4[0, 1]$ , 且  $\int_0^1 f(x)dx + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx$ , 求证存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f''''(\xi) = 0$ .

解 1.0.10. 取原函数  $F(x)$ , 则  $F(x) \in C^5[0, 1]$ , 且  $F'(x) = f(x)$ ,

$$F(1) - F(0) + 3F'\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \left( F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) \right)$$

插  $F(0), F(1), F\left(\frac{1}{2}\right), F'\left(\frac{1}{2}\right), F\left(\frac{3}{4}\right), F\left(\frac{1}{4}\right)$  一共 6 个条件, 余项 6 阶, 插值多项式为 5 次, 导数 5 阶不够, 属于  $F^{(5)} = p^{(5)}$  类型, 插值:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})(x - 1)(x - \frac{1}{2})}{(0 - \frac{3}{4})(0 - \frac{1}{4})(0 - 1)(0 - \frac{1}{2})} F(0) + \frac{(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(1 - \frac{3}{4})(1 - \frac{1}{4})(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})} F(1) \\ &\quad + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - \frac{3}{4})(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})} F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{2})}{(\frac{3}{4} - 0)(\frac{3}{4} - 1)(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})(\frac{3}{4} - \frac{1}{4})} F\left(\frac{3}{4}\right) \\ &\quad + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{4} - 0)(\frac{1}{4} - 1)(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})} F\left(\frac{1}{4}\right) \\ s(x) &= c(x - 0)(x - 1)(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}), s'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64} \\ p(x) &= L(x) + s(x) \end{aligned}$$

此时

$$p(0) = F(0), p(1) = F(1), p\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right), p'\left(\frac{1}{2}\right) = F'\left(\frac{1}{2}\right), p\left(\frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right), p\left(\frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right)$$

求导并令  $p'\left(\frac{1}{2}\right) = F'\left(\frac{1}{2}\right)$ , 解得

$$c = 64 \left[ F'\left(\frac{1}{2}\right) - L'\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

构造  $G(x) = F(x) - p(x)$ , 则  $G(0) = G\left(\frac{1}{4}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{3}{4}\right) = G(1) = 0$ , 罗尔中值定理得到  $G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = G\left(\frac{1}{2}\right) = G'(\xi_3) = G'(\xi_4) = 0$ , 罗尔中值定理得到  $G''(\xi_5) = G''(\xi_6) = G''(\xi_7) = G''(\xi_8) = 0$ , 罗尔中值定理得到  $G'''(\xi_9) = G'''(\xi_{10}) = G'''(\xi_{11}) = 0$ , 罗尔中值定理得到  $G''''(\xi_{12}) = G''''(\xi_{13}) = 0$ , 罗尔中值定理得到存在  $\xi \in (\xi_{12}, \xi_{13}) \subset (0, 1)$  使得

$$G^{(5)}(\xi) = 0$$

所以

$$F^{(5)}(\xi) = p^{(5)}(\xi)$$

又因为  $p(x)$  为五次多项式, 所以  $p^{(5)}(x) \equiv 0$ , 所以

$$f''''(\xi) = F^{(5)}(\xi) = p^{(5)}(\xi) = 0$$

## 1.0.11 例题:

设  $f \in C^2[0, 1]$ , 满足  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $\min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$ , 证明  $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$

解 1.0.11. 为了利用最小值条件, 假设  $c \in (0, 1)$  使得  $f(c) = -1$ , 则插值条件为  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f(c) = -1$ ,  $f'(c) = 0$ , 插值式 3 次, 余项 4 阶, 导数 4 阶差 2 阶, 属于靠近谁插谁的类型。

在区间  $[0, c]$  上插  $f(0), f(c), f'(c)$ , 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{x-c}{0-c}f(0) + \frac{x-0}{c-0}f(c) + k_1(x-0)(x-c) = -\frac{x}{c} + k_1x(x-c) \\ p'_1(x) &= -\frac{1}{c} + k_1(2x-c) \quad p'_1(c) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

构造  $G_1(x) = f(x) - p_1(x)$ , 则  $G_1(0) = G_1(c) = 0$ ,  $G'_1(c) = 0$ , 由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (0, c)$  使得  $G'_1(\xi_1) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi_2 \in (\xi_1, c)$  使得  $G''_1(\xi_2) = 0$ , 所以  $f''(\xi_2) = p''_1(\xi_2) = \frac{2}{c^2}$ .

在区间  $[c, 1]$  上插  $f(1), f(c), f'(c)$ , 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{x-c}{1-c}f(1) + \frac{x-1}{c-1}f(c) + k_2(x-1)(x-c) = -\frac{x-1}{1-c} + k_2(x-1)(x-c) \\ p'_2(x) &= -\frac{1}{1-c} + k_2(2x-1-c) \quad p'_2(c) = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{(1-c)^2} \end{aligned}$$

构造  $G_2(x) = f(x) - p_2(x)$ , 则  $G_2(1) = G_2(c) = 0$ ,  $G'_2(c) = 0$ , 由罗尔中值定理, 存在  $\xi_3 \in (c, 1)$  使得  $G'_2(\xi_3) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi_4 \in (c, \xi_3)$  使得  $G''_2(\xi_4) = 0$ , 所以  $f''(\xi_4) = p''_2(\xi_4) = \frac{2}{(1-c)^2}$ .

综上所述, 在区间  $(0, c)$  和  $(c, 1)$  上分别找到  $\xi_2, \xi_4$  使得  $f''(\xi_2) = \frac{2}{c^2}, f''(\xi_4) = \frac{2}{(1-c)^2}$ . 下面说明  $\max \left\{ \frac{2}{c^2}, \frac{2}{(1-c)^2} \right\} \geq 8$ . 分类讨论即可: 当  $c \in (0, \frac{1}{2}]$  时,  $\frac{2}{c^2} \geq 8$ ; 当  $c \in (\frac{1}{2}, 1)$  时,  $\frac{2}{(1-c)^2} \geq 8$ . 即证  $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$

## 1.0.12 例题:

设  $f \in D^2[-a, a]$ ,  $a > 0$  满足

$$f(-a) = -1, f(a) = 1, f'(-a) = f'(a) = 0, |f''(x)| \leq 1$$

证明 (1)  $a \geq \sqrt{2}$  (2)  $a > \sqrt{2}$ .

解 1.0.12. 微分条件不足以插 4 个点, 靠近谁插谁模型. 但是没有其他约束条件, 要找一个公共点能同时出现在两边插, 只能是带入  $x = 0$ .

在区间  $[-a, 0]$  上插  $f(-a), f(0), f'(-a)$ , 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{x-0}{-a-0}f(-a) + \frac{x+a}{0+a}f(0) + k_1(x+a)x = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} + 1\right)f(0) + k_1(x+a)x \\ p'_1(x) &= \frac{1+f(0)}{a} + k_1(2x+a) \quad p'_1(-a) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1+f(0)}{a^2} \\ \Rightarrow p_1(x) &= \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} + 1\right)f(0) + \frac{1+f(0)}{a^2}(x+a)x \end{aligned}$$

构造  $G_1(x) = f(x) - p_1(x)$ , 则  $G_1(-a) = G_1(0) = 0, G'_1(-a) = 0$ , 由罗尔定理, 存在  $\xi_1 \in (-a, 0)$  使得  $G'_1(\xi_1) = 0$ , 再由罗尔定理, 存在  $\xi_2 \in (-a, \xi_1)$  使得  $G''_1(\xi_2) = 0$ , 所以  $f''(\xi_2) = p''_1(\xi_2) = \frac{2+2f(0)}{a^2}$ .

在区间  $[0, a]$  上插  $f(a), f(0), f'(a)$ , 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{x-0}{a-0}f(a) + \frac{x-a}{0-a}f(0) + k_2(x-a)x = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} - 1\right)f(0) + k_2(x-a)x \\ p'_2(x) &= \frac{1+f(0)}{a} + k_2(2x-a) \quad p'_2(a) = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{1+f(0)}{a^2} \\ \Rightarrow p_2(x) &= \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} - 1\right)f(0) + \frac{1+f(0)}{a^2}(x-a)x \end{aligned}$$

构造  $G_2(x) = f(x) - p_2(x)$ , 则  $G_2(a) = G_2(0) = 0, G'_2(a) = 0$ , 由罗尔定理, 存在  $\xi_3 \in (0, a)$  使得  $G'_2(\xi_3) = 0$ , 再由罗尔定理, 存在  $\xi_4 \in (\xi_3, a)$  使得  $G''_2(\xi_4) = 0$ , 所以  $f''(\xi_4) = p''_2(\xi_4) = \frac{2+2f(0)}{a^2}$ .

由条件  $|f''(x)| \leq 1$  得

$$|1+f(0)| \leq \frac{a^2}{2}, |f(0)-1| \leq \frac{a^2}{2} \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{2} \leq f(0) \leq -1 + \frac{a^2}{2}$$

两式同时成立要求  $1 - \frac{a^2}{2} \leq -1 + \frac{a^2}{2}$ , 解得  $a^2 \geq 2$ , 即  $a \geq \sqrt{2}$ .

若  $a = \sqrt{2}$ , 则  $0 \leq f(0) \leq 0$ , 故  $f(0) = 0$ , 且  $f''(\xi_2) = 1, f''(\xi_4) = -1$ . 考虑积分表示:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(-a) + f'(-a)(x+a) + \int_{-a}^0 (0-t)f''(t)dt = -1 - \int_{-a}^0 tf''(t)dt \\ f(0) &= f(a) + f'(a)(0-a) + \int_a^0 (0-t)f''(t)dt = 1 - \int_0^a tf''(t)dt. \end{aligned}$$

当  $t \leq 0$  时, 由  $f''(t) \leq 1$  得  $tf''(t) \geq t$  (因  $t \leq 0$ ), 故

$$\int_{-a}^0 tf''(t)dt \geq \int_{-a}^0 t dt = -\frac{a^2}{2} = -1,$$

从而  $f(0) \leq -1 - (-1) = 0$ , 等号成立仅当在  $[-a, 0]$  上  $f''(t) \equiv 1$ 。类似地, 当  $t \geq 0$  时, 由  $f''(t) \geq -1$  得  $tf''(t) \geq -t$ , 故

$$\int_0^a tf''(t) dt \geq - \int_0^a t dt = -\frac{a^2}{2} = -1,$$

从而  $f(0) \leq 1 - (-1) = 2$ , 此上界非紧。改用  $f''(t) \leq 1$  得  $tf''(t) \leq t$ , 故

$$\int_0^a tf''(t) dt \leq \int_0^a t dt = \frac{a^2}{2} = 1,$$

从而  $f(0) \geq 1 - 1 = 0$ , 等号成立仅当在  $[0, a]$  上  $f''(t) \equiv 1$ 。于是  $f(0) = 0$  要求  $f'' \equiv 1$  于  $[-a, 0]$  和  $[0, a]$ , 这与  $f''(\xi_4) = -1$  矛盾。故  $a = \sqrt{2}$  不可能。

综上, 必有  $a > \sqrt{2}$ 。

### 1.0.1 定理: 拉格朗日插值积分余项

设  $f \in C^2[a, b]$ , 且  $f''$  在  $[a, b]$  上可积, 则成立

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + \int_a^b f''(y)k(x, y)dy$$

其中

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(y-b), & b \geq y \geq x \geq a \\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b \geq x \geq y \geq a \end{cases}$$

考虑

$$g(x) = f(x) - \left( \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \right)$$

那么  $g(a) = g(b) = 0, g'' = f''$ , 拆分积分余项即可发现:

$$\begin{aligned} \int_a^b g''(y)k(x, y)dy &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x g''(y)(a-y)dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b g''(y)(y-b)dy \\ &= \frac{b-x}{b-a} \left[ (a-x)g'(x) + \int_a^x g'(y)dy \right] + \frac{x-a}{b-a} \left[ -g'(x)(x-b) - \int_x^b g'(y)dy \right] \\ &= \frac{b-x}{b-a} [(a-x)g'(x) + g(x)] + \frac{x-a}{b-a} [-g'(x)(x-b) + g(x)] \\ &= g(x). \end{aligned}$$

## 1.0.13 例题:

设  $f \in C^2[a, b]$ , 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \frac{4}{b-a}$$

解 1.0.13. 由已知,  $f \in C^2[a, b]$  且  $f(a) = f(b) = 0$ 。对任意  $x \in [a, b]$ , 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b-x}{b-a}f(x) + \frac{x-a}{b-a}f(x) \\ &= \frac{b-x}{b-a}[(a-x)f'(x) + f(x)] + \frac{x-a}{b-a}[(b-x)f'(x) + f(x)] \\ &= \frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)f'(x) + \int_a^x f'(y)dy\right] + \frac{x-a}{b-a}\left[(b-x)f'(x) + \int_b^x f'(y)dy\right] \\ &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (a-y)df'(y) + \frac{x-a}{b-a} \int_b^x (b-y)df'(y) \\ &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (a-y)f''(y)dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-y)f''(y)dy. \end{aligned}$$

取绝对值, 并利用  $|f''(y)| = \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| |f(y)|$ , 得

$$|f(x)| \leq \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (y-a) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| |f(y)| dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-y) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| |f(y)| dy.$$

设  $M = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ , 则  $M > 0$  (否则  $f \equiv 0$ , 不等式显然成立)。取  $c \in (a, b)$  使  $|f(c)| = M$ 。在上式中令  $x = c$ , 并注意到  $|f(y)| \leq M$ ,  $y-a \leq c-a$  (当  $y \in [a, c]$ ),  $b-y \leq b-c$  (当  $y \in [c, b]$ ), 故

$$\begin{aligned} M &\leq \frac{b-c}{b-a} \int_a^c (c-a) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| M dy + \frac{c-a}{b-a} \int_c^b (b-c) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| M dy \\ &= M \cdot \frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \int_a^b \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| dy. \end{aligned}$$

因  $M > 0$ , 两边消去  $M$  得

$$1 \leq \frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \int_a^b \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| dy.$$

由均值不等式,

$$\frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \leq \frac{1}{b-a} \left( \frac{(b-c)+(c-a)}{2} \right)^2 = \frac{b-a}{4},$$

代入上式即得

$$\int_a^b \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| dy \geq \frac{4}{b-a}.$$

(等号成立条件可进一步讨论, 此处略。)

## 1.0.14 例题:

设  $f \in D[a, b]$ , 且  $|f'(x)| \leq M$ ,  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , 令  $|F(x)| = \left| \int_a^x f(t)dt \right|$ , 证明:

$$(1) |F(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8};$$

$$(2) \text{若 } f(a) = f(b) = 0, \text{ 则 } |F(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{16}.$$

解 1.0.14. (1)  $F(x)$  两阶可导,  $|F''(x)| \leq M$ ,  $F(b) = F(a) = 0$ , 插左右端点, 微分条件足够, 用 K 值法: 设  $K$  与  $x$  有关, 使得  $F(x) = K \frac{(x-a)(x-b)}{2!}$ , 构造  $G(y) = F(y) - K \frac{(y-a)(y-b)}{2!}$ , 则  $G(a) = G(b) = G(x) = 0$ , 由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (a, x), \xi_2 \in (x, b)$  使得  $G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\theta(x) \in (a, b)$  使得  $G''(\theta(x)) = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} f'(\theta(x)) - K &= 0 \Rightarrow K = f'(\theta(x)) \Rightarrow F(x) = f'(\theta(x)) \frac{(x-a)(x-b)}{2!} \\ |F(x)| &\leq \frac{M}{2} |(x-a)(x-b)| \leq \frac{M}{2} \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{8} \end{aligned}$$

(2)  $F(x)$  两阶可导,  $|F''(x)| \leq M$ ,  $F(a) = F(b) = F'(a) = F'(b) = 0$ , 插左右端点, 微分条件远远不够, 属于靠近谁插谁的类型, 不直接插左右端点和导数, 而是引入  $x_0 \in (a, b)$  是  $|F(x)|$  的极大值点 (若极值点是端点处, 此时结论显然成立), 在  $(a, x_0)$  和  $(x_0, b)$  区间构造插值多项式。在区间  $[a, x_0]$  上插  $f(a), f'(a), f(x_0), f'(x_0)$ , 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} F''(\xi_1) = \frac{(x-a)^2}{2!} F''(\xi_1) \\ F(x) &= F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(\xi_2) = \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(\xi_2) \end{aligned}$$

相减得到

$$F(x_0) = \frac{(x_0-a)^2}{2!} F''(\xi_1) - \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(\xi_2)$$

绝对值不等式得到

$$|F(x_0)| \leq \frac{1}{2!} \left( \frac{(x_0-a)^2}{2!} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \right) M = \frac{M}{4} ((x_0-a)^2 + (x-x_0)^2)$$

由于  $x \in (a, b)$ , 所以  $(x_0-a)^2 + (x-x_0)^2 \leq (\frac{b-a}{2})^2 + (\frac{b-a}{2})^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$ , 因此

$$|F(x_0)| \leq \frac{M(b-a)^2}{16}$$

最后提示一下, 要看要证明的结论是什么, 插值只是辅助手段, 比如本题结论就是  $F(x)$  的上下界, 那么先看余项够不够微分条件用完, 如果刚好, 就是 (1), 如果差远了, 就是 (2), (2) 中引入了  $F(x)$  取到上下界时的自变量  $x_0$ , 在两个区间分别插值, 最后相减得到  $F(x_0)$  的表达式, 绝对值不等式得到  $F(x_0)$  的上界, 再利用  $x \in (a, b)$  得到最终结论。

## 1.0.15 例题:

设  $f(x) \in C^3[-1, 1]$  满足  $f(-1) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 1$ , 证明存在  $\xi \in (-1, 1)$  使得

$$f'''(\xi) = 3 + \xi$$

解 1.0.15. 插  $f(-1), f(1), f(0), f'(0)$ , 则插值多项式为三次, 余项四阶, 导数差 1 阶, 所以是  $f''' = p'''$  模型, 但是等号右边还有  $\xi$ , 所以对  $g(x) = f(x) - \frac{x^4}{24}$  构造插值多项式,  $g(-1) = -\frac{1}{24}, g'(0) = 0, g(0) = f(0), g(1) = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$ , 构造插值多项式  $p(x)$ :

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}g(-1) + \frac{(x-1)(x-(-1))}{(0-1)(0-(-1))}g(0) + \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)}g(1) + cx(x-1)(x+1) \\ &= \frac{(x-0)(x-1)}{2} \left( -\frac{1}{24} \right) + \frac{(x-1)(x+1)}{-1} g(0) + \frac{(x-0)(x+1)}{2} \left( \frac{23}{24} \right) + cx(x-1)(x+1) \\ &= \frac{-x^2+x}{48} - (x^2-1)g(0) + \frac{23x^2+23x}{48} + cx(x-1)(x+1) \\ p'(x) &= \frac{-2x+1}{48} + (-2x)g(0) + \frac{46x+23}{48} + c((x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1)) \\ p'(0) &= \frac{1}{48} + 0 + \frac{23}{48} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

构造  $W(x) = g(x) - p(x)$ , 则  $W(-1) = W(1) = W'(0) = W(0) = 0$ , 且  $W(x)$  在  $(-1, 1)$  上三阶可导, 由罗尔中值定理, 存在  $\xi_1 \in (-1, 0)$  使得  $W'(\xi_1) = 0$ , 存在  $\xi_2 \in (0, 1)$  使得  $W'(\xi_2) = 0$ , 加上  $W'(0) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi_3 \in (\xi_1, 0) \subset (-1, 1)$  使得  $W''(\xi_3) = 0$ , 存在  $\xi_4 \in (0, \xi_2) \subset (-1, 1)$  使得  $W''(\xi_4) = 0$ , 再由罗尔中值定理, 存在  $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (-1, 1)$  使得  $W'''(\xi) = 0$ , 所以

$$g'''(\xi) = f'''(\xi) - \xi = p'''(\xi) = 6c = 3 \Leftrightarrow f'''(\xi) = 3 + \xi$$