

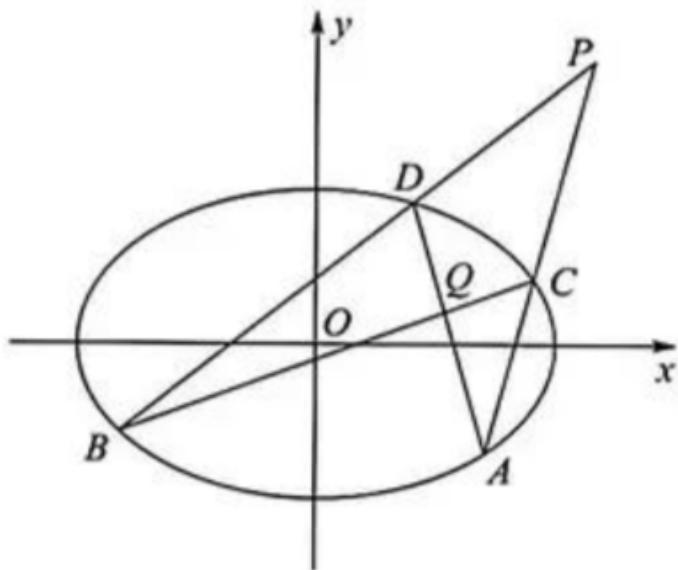
# 高中数学

# 解析几何教程

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期：2026 年 2 月 24 日



© 2025 版权所有

# 前言

本书内容全部使用  $\text{\LaTeX}$  进行排版，作者”还在尬黑”是一位准大一学生，高中毕业于广东深圳中学，高三数学各次大考平均排名位于前 5%，高考应该也不例外。”还在尬黑”拥有知乎（同名），微信公众号（同名），小红书号（同名）等账号，头像是一个右手三叶结。以及不同名不同头像的 GitHub 账号，发表原创优质内容百余篇，且固定更新频率，堪称发文的“螺丝钉”。

“还在尬黑”对圆锥曲线的解题研究有着浓厚兴趣，并在书中将其总结成了一套完整的解析几何教程。本书适合高中解析几何解题体系未成熟的高二高三学生，以及前来自学的高一学生以及初中生，也可作为高中数学教材。笔者衷心希望本书能够帮助读者提高圆锥曲线解题速度和解题能力，并能够准确地识别班内的”大佬”是用什么东西来装逼的，当然，本书和市面上的某些书不同，不会直接甩给学生们根本用不明白也不懂从何而来的技巧大招，而是会侧重解析一种方法的产生过程，以及如何恰当的选择方法解决具体问题。

学习圆锥曲线（包括高考数学的一些其它内容）的过程中，最重要也最需要大家认真做的就是历年的高考题，本书内容涵盖了大部分恢复高考以来所有的高考解析几何压轴题，并且每一道题都经过了笔者的精挑细选，放到了合适的位置上，后续笔者会在书末尾出一个索引表，帮助只想刷高考题的同学快速使用本书。

除了经典而偏基础的高考题外，本书后面还有些部分为选学内容，难度较高，属于高考不怎么考的范畴，这部分留给同学们或解析几何爱好者们进行自我提高和兴趣拓展。当然，建议读者先打牢必学内容的基础，再来进行进一步的学习。

在创作本书的过程中，笔者也得到了朋友们和热心群众的帮助，在此向他们表示感谢！

十分感谢读者朋友们的支持和赞助！祝大家健康进步，高考成功！

还在尬黑  
2026 年 2 月 24 日

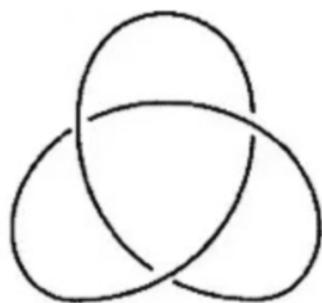


图 1: 我的头像

# 目录

<b>第一章 先导课程</b>	<b>1</b>
1.1 写在前面 . . . . .	1
1.2 轮换, 对称 . . . . .	1
<b>第二章 手稿</b>	<b>4</b>
2.1 杂题收录 . . . . .	4
<b>第三章 曲线系</b>	<b>19</b>
3.1 曲线系引入 . . . . .	19
<b>第四章 杂题</b>	<b>25</b>
4.1 数学问题 . . . . .	25
<b>第五章 抹茶题集</b>	<b>26</b>

# 第一章 先导课程

## 1.1 写在前面

解析几何是高中数学的重要学习内容，在高考中分值占比较高。

不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代性的表述，这可能是因为圆锥曲线是解析几何中的重难点。但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如3次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈3种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

首先，笔者来讲一讲怎么进行计算。这似乎是一个很简单的问题，但是谁又能保证在紧张刺激的考场环境下不会犯错误？一旦出现计算错误，检查就需要花费一定的时间，所以不如挑选合适的计算方法，从源头上减少失误。本节中，笔者会结合自己的一些实战经验，尽量告诉大家一些计算过程中减小失误，提升速度的技巧和方法，以及解析几何中计算的基本方向——整体代换。

鉴于本书的覆盖群体，笔者会尽量避免过多的公式推导和过于严谨的学术表述，而是从直观的角度出发，用一些具体的例子来说明计算的过程。希望大家能从中受益。

## 1.2 轮换，对称

在此之前，请允许我先介绍一些基本的概念，我们不妨先来看一些看起来很整齐的式子，这些式子平时很常见，大家在备考强基计划的过程中也会遇到比较多这样的式子：

### 例题 1.2.1

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$\begin{aligned} & abc \\ & a + b + c \\ & ab + bc + ca \\ & a^2 + b^2 + c^2 \\ & (a + b)(b + c)(c + a) \\ & a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \end{aligned}$$

解 1.2.1. 相信大部分同学是通过自己的直觉来归纳的，直观的感受就是这些式子很“整齐”，而且很有规律可循。那么问题来了：“整齐”是怎么体现的？更进一步地，有没有手段验证一个代数式

是“整齐”的？至于“很有规律可循”，那么规律是什么？

这些问题循序渐进，如果理清这些问题，那么读者便掌握了学习数学时地最基本的关注点：定义，性质，判定。这些式子中的  $a, b, c$  结构权重是均等的，它们地位相同，没有“特权变量”，也没有“次序”之分。

而且，眼尖的读者可以发现，这些表达式中的项往往成组出现，覆盖所有可能的组合，比如  $a + b + c$  中全为一次项，如果  $a$  出现了，不用猜也知道  $b$  和  $c$  也出现了；再比如  $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$  中， $a^2b$  出现了，其中  $a$  被平方了，那不用猜也知道在其他的项中， $b$  和  $c$  也会被平方，而且后面一定会跟着其他没有被平方的字母。它们出现的次数相同。

事实上，由于乘法和加法的交换律和结合律，我们可以发现，对于上面任意一个式子，我们都可以挑选任意两个变量交换位置，而多项式本身保持不变。大家不妨想象一下阅兵式的场景，即使我们偷偷调换两个兵的位置，你也看不出来有什么异样，这是阅兵队伍“整齐”的体现。同样地，这个代数式也可以这样操作，来验证这个代数式是“整齐”的，“规律可循”的。这样我们便可以引出对称式的概念。

### 定义 1.2.1 对称式

对于一个  $n$  元多项式  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，若对于数  $1, 2, \dots, n$  的任意一个排列  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ ，都有

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则称  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为对称式。

“对称”体现在字母地位平等，没有哪个字母是特殊的。只要式子中包含某个由特定字母组成的项（例如  $a^2b$ ），那么它一定包含由所有其他字母以同样的方式组成的项（即  $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$ ）。

这样我们就认识了对称式的概念，这样当读者听到别人说“对称式”的时候，不会至于一脸懵逼，或者一边点头，假装听懂，然后用直觉去理解这个概念（这样的情况长期发展下去，是不利于学习数学的）。当然，读者也许会发现，像“ $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ ”这样的式子其实比较长，占用了较大的空间，也显得不够简洁。因此我们不妨规定以下记号：

### 定义 1.2.2 循环和

#### 性质 1.2.1 对称式的性质

(1) 基本对称多项式的基础性：

那么下面我们乘胜追击，再来看一组式子：

**例题 1.2.2**

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$\begin{aligned} & a^2b + b^2c + c^2a \\ & a^3b + b^3c + c^3a \\ & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \end{aligned}$$

**解 1.2.2.** 和刚才的对称式不同，如果我们这里调换某两个字母的位置，那么结果也会发生变化。比如  $a^2b + b^2c + c^2a$  中，如果我们把  $a$  和  $b$  调换位置，那么结果也会发生变化，比如说新出现了  $b^2a$  项，这是原来所没有的。

但是读者会发现，这个式子看上去也是有规律可循的，比如  $a^3b + b^3c + c^3a$  中， $a^3$  项出现了，那不用猜也知道  $b^3$  和  $c^3$  也会在其它部分出现，而且出现的次数相同，但是和上文的规律不一样， $a^3$  后面只会跟着  $b$ ，却没有  $c$ ，即没有  $a^2c$  项。

**例题 1.2.3**

将  $(a+b)(b+c)(c+a)$  进行展开，并尽己所能地保证结果的每个部分都是由  $a, b, c$  三个元同时出现且地位相同的式子：

**解 1.2.3.** 先展开，再重组：

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &= (b^2 + ac + ab + bc)(a+c) \\ &= ab^2 + b^2c + a^2c + ac^2 + a^2b + abc + abc + bc^2 \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \end{aligned}$$

最后为什么

**定理 1.2.1**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

## 第二章 手稿

### 2.1 杂题收录

例题 2.1.1

已知  $x, y > 0$ , 且  $x^2 + 9y^2 = 12$ , 则  $\frac{x+2}{y+1} - 3x$  的最小值为\_\_\_\_\_.

解 2.1.1.

## 例题 2.1.2 (高考题改编)

(单选) 设代数式  $T = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{200}{199}$ , 则 ( )

- A.  $14 < T < 16$    B.  $16 < T < 18$    C.  $18 < T < 20$    D.  $20 < T < 22$

解 2.1.2. 出题背景是大名鼎鼎的 Wallis 公式:

$$\begin{aligned} I(n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d(-\cos x) \\ &= (-\cos x \sin^{n-1} x)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \, d\sin^{n-1} x \\ &= (-\cos x \sin^{n-1} x)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 x)(n-1) \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \, dx = (n-1)I(n-2) - (n-1)I(n) \\ \Rightarrow I(n) &= \frac{n-1}{n} I(n-2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{I(2n+1)}{I(2n-1)} = \frac{2n}{2n+1} \\ \frac{I(2n)}{I(2n-2)} = \frac{2n-1}{2n} \end{cases} \end{aligned}$$

所以累乘有:

$$\begin{aligned} \frac{I(3)}{I(1)} \cdot \frac{I(5)}{I(3)} \cdots \frac{I(2n+1)}{I(2n-1)} &= \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1} \times \frac{2 \times 2}{2 \times 2 + 1} \times \cdots \times \frac{2n}{2n + 1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\ \frac{I(2)}{I(0)} \cdot \frac{I(4)}{I(2)} \cdots \frac{I(2n)}{I(2n-2)} &= \frac{2 \times 1 - 1}{2 \times 1} \times \frac{2 \times 2 - 1}{2 \times 2} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \end{aligned}$$

又因为:

$$\begin{aligned} I(2k+1) < I(2k) < I(2k-1) &\Rightarrow \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} < \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2k+1} \cdot \left[ \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right]^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2k} \cdot \left[ \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \right) = \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \left( \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \right) \left( \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \right)$$

所以:

$$T^2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \approx \frac{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}}{\left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \left( \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \right) \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}} \frac{\pi}{2}$$

则  $T^2 \approx \frac{(2n+1)\pi}{2}$ , 简单计算得知原题选 B.

方法二是使用放缩，先平方然后用糖水不等式，这个方法很套路，稍微一放就排除了 A 选项：

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{200}{199} \\ &> \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{201}{200} \\ &= 268 > 16^2 \end{aligned}$$

但是另一边就有点难度了，首先我们可以根据应试技巧，由“下界比较松”推测出来“上界比较紧”，所以在找上界的时候要放得仔细一点，当然严格说来这个推测逻辑缺乏依据。或者我们根据“仍有 BCD 选项需要分辨”的现状，可以考虑多保留几项再放缩，提高一下精度：

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{22}{21} \cdot \frac{22}{21} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{24}{23} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{200}{199} \\ &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{22}{21} \cdot \boxed{\frac{22}{21}} \cdot \frac{24}{23} \cdot \boxed{\frac{23}{22}} \cdots \frac{200}{199} \cdot \boxed{\frac{199}{198}} \\ \Rightarrow T &\leq \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{20}{19} \cdot \sqrt{\frac{200}{20}} = \frac{512 \times 512}{(15-4)(15-2)(15+2)(15+4)} \sqrt{10} \\ &= \frac{262144}{46189} \sqrt{10} < 3.1623 \times 5.68 < 18 \end{aligned}$$

熟知  $\sqrt{10} = 3.16227766\ldots < 3.1623$ ，计算得到  $\frac{262144}{46189} < 5.68$  这样得知本题选 B.

对于考试来说，把题目的答案改成  $17 < T < 19$  或许是更好的选择。

### 例题 2.1.3 (高考题改编)

(单选) 数列  $a_n$  各项为正整数且递增， $a_{n+2} = C_{a_{n+1}}^{a_n}$ ，则 ( )

- A.  $a_n < a_{n-1} + 1$
- B.  $a_1, a_2, a_3$  可能成等比数列
- C.  $a_3 a_4 < a_5$
- D.  $a_3, a_4, a_5$  可能成等比数列

解 2.1.3. 由于  $a_n$  递增，则 A 显然错误；下面考虑选项 BD:

$$a_n a_{n+2} = a_n C_{a_{n+1}}^{a_n} = a_{n+1} C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} = a_{n+1}^2 \Rightarrow a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}$$

当  $a_n = 1$  时，代入表达式得到  $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^0 = 1 = a_n$ ，与数列递增矛盾；

当  $a_n = 2$  时，代入表达式得到  $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^1 = a_{n+1} - 1 < a_{n+1}$ ，矛盾；

当  $a_n > 2$  时，易得  $a_{n+1} - 1 > 2$ ，代入表达式得到

$$a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} \geq C_{a_{n+1}-1}^2 = \frac{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}{2}$$

解方程发现无整数解，而且由于  $C_{a_{n+1}-1}^1 = a_{n+1} - 1$  是小于  $a_{n+1}$  的最大整数，且有

$$C_{a_{n+1}-1}^1 < C_{a_{n+1}-1}^2, \quad C_{a_{n+1}-1}^2 \neq a_{n+1}$$

只可能是  $C_{a_{n+1}-1}^2 > a_{n+1}$ .

雪上加霜的是,  $C_{a_{n+1}-1}^2$  和  $C_{a_{n+1}-1}^1$  中间没有数可以等于  $C_{a_{n+1}-1}^m$ , 所以 BD 错误;

考虑 C, 易得  $a_1 \neq 1, a_2 \geq 4, a_3 \geq 6, a_4 = C_{a_3}^{a_2} > 2a_3 + 1$ , 由

$$a_5 = C_{a_4}^{a_3} > a_3 a_4 \Rightarrow a_3^2 < C_{a_4-1}^{a_3-1} < C_{2a_3}^{a_3-1}$$

转化为  $a_3^3 + a_3 < C_{2a_3}^{a_3}$  这是显然成立的, 故本题目选 C

### 例题 2.1.4

已知  $\triangle ABC$  中,  $A = 3B = 9C$ , 则  $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 2.1.4. 解得  $A = \frac{9\pi}{13}, B = \frac{3\pi}{13}, C = \frac{\pi}{13}$  考虑积化和差:

$$\begin{aligned} & \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \\ &= \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B) + \cos(B+C) + \cos(B-C) + \cos(A+C) + \cos(A-C)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos \frac{12\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13}) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{13}} \sin \frac{\pi}{13} (\cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{12\pi}{13}) \\ &= \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{13}} (\sin \frac{\pi}{13} - \sin \frac{3\pi}{13} + \sin \frac{3\pi}{13} - \sin \frac{5\pi}{13} + \sin \frac{5\pi}{13} - \sin \frac{7\pi}{13} \\ &\quad + \sin \frac{7\pi}{13} - \sin \frac{9\pi}{13} + \sin \frac{9\pi}{13} - \sin \frac{11\pi}{13} + \sin \frac{11\pi}{13} - \sin \frac{13\pi}{13}) \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

### 定理 2.1.1 阿贝尔求和

设  $B_n$  是数列  $b_n$  的前  $n$  项和, 当  $n \geq 2$  时, 有:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_n$$

证明 2.1.1. 当  $n \geq 2$  时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= a_1 b_1 + \sum_{i=2}^n a_i (B_i - B_{i-1}) \\ &= a_1 b_1 + \sum_{i=2}^n a_i B_i - \sum_{i=2}^n a_i B_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i B_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} B_i \\ &= a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_n \end{aligned}$$

### 例题 2.1.5 (来自 Fiddie)

设数列  $\{a_n\}$  的各项均为实数, 且当  $n \geq 2$  时,  $a_{n+1} + a_{n-1} = |a_n|$ . 证明:

- (1) 存在大于 1 的正整数  $m$  使得  $a_m \leq 0$
- (2) 存在正整数  $m$  使得  $a_m \leq 0, a_{m+1} \leq 0$
- (3)  $a_n = a_{n+9}$

解 2.1.5. (1) 当  $n \geq 2$  时, 由

$$\begin{cases} a_{n+1} + a_{n-1} = |a_n| \\ a_{n+2} + a_n = |a_{n+1}| \end{cases} \Rightarrow a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = |a_n| + |a_{n+1}|$$

$$\Rightarrow a_{n+2} + a_{n-1} = |a_n| - a_n + |a_{n+1}| - a_{n+1} \geq 0$$

若  $n \geq 2$  时  $a_n > 0$ , 上式化为  $a_{n+2} + a_{n-1} = 0$ , 矛盾, 故存在大于 1 的正整数  $m$  使得  $a_m \leq 0$

(2) 已证存在大于 1 的整数  $m$  使得  $a_m \leq 0$ , 现假设不存在正整数  $k$  使得  $a_k \leq 0, a_{k+1} \leq 0$ , 则不妨设  $a_m$  为首个小于等于 0 的项, 由假设得  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1} > 0, a_m \leq 0, a_{m+1} > 0$ , 可以通过不断消元推出矛盾:

$$\begin{aligned} a_{m+1} + a_{m-1} &= |a_m| = -a_m \Rightarrow a_{m+1} = -a_m - a_{m-1} \\ a_{m+2} + a_m &= |a_{m+1}| = a_{m+1} \Rightarrow a_{m+2} = a_{m+1} - a_m > 0 + 0 = 0 \\ a_{m+3} + a_{m+1} &= |a_{m+2}| = a_{m+2} \Rightarrow a_{m+3} = a_{m+2} - a_{m+1} = a_{m+1} - a_m - a_{m+1} = -a_m \geq 0 \\ a_{m+4} + a_{m+2} &= |a_{m+3}| = -a_m \Rightarrow a_{m+4} = -a_m - a_{m+2} = -a_{m+1} < 0 \\ a_{m+5} + a_{m+3} &= |a_{m+4}| = a_{m+1} \Rightarrow a_{m+5} = a_{m+1} - a_{m+3} = a_m + a_{m+1} = -a_{m-1} < 0 \end{aligned}$$

由  $a_{m+4} < 0, a_{m+5} < 0$  知矛盾, 故存在正整数  $k$  使得  $a_k \leq 0, a_{k+1} \leq 0$ .

(3) 抓住上面第二小问的提示就可以得到:

$$\begin{aligned}
 a_{m+6} + a_{m+4} &= |a_{m+5}| = a_{m-1} \Rightarrow a_{m+6} = a_{m-1} - a_{m+4} = a_{m-1} + a_{m+1} = -a_m \\
 a_{m+7} + a_{m+5} &= |a_{m+6}| = -a_m \Rightarrow a_{m+7} = -a_m - a_{m+5} = a_{m-1} - a_m \\
 a_{m+8} + a_{m+6} &= |a_{m+7}| = a_{m-1} - a_m \Rightarrow a_{m+8} = a_{m-1} - a_m - a_{m+6} = a_{m-1} \\
 a_{m+9} + a_{m+7} &= |a_{m+8}| = a_{m-1} \Rightarrow a_{m+9} = a_{m-1} - a_{m+7} = a_{m-1} - a_{m-1} + a_m = a_m
 \end{aligned}$$

所以设  $T = 9$ , 有

$$\begin{cases} a_m = a_{m+nT}, n \in N \\ a_{m-1} = a_{m-1+nT}, n \in N \end{cases}$$

然后由于

$$a_{m-2+nT} = |a_{m-1+nT}| - a_{m+nT} = |a_{m-1}| - a_m = a_{m-2}$$

以此类推, 则有

$$a_k = a_{k+nT}, k \in N_+, k \leq m$$

取合适的  $m$  使得  $m$  大于  $T$ , 则数列  $\{a_n\}$  为周期数列, 其中一个周期为 9

### 例题 2.1.6 (南通 9 调 14 题)

已知  $x, y$  满足  $(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{y^2 + 4} - y) = 2$ , 则  $4^x + 2^{y-1}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

解 2.1.6. 套路题, 先换元:

$$\begin{cases} m = \sqrt{x^2 + 1} - x \Rightarrow x = \frac{1}{2m} - \frac{2}{m} \\ n = \sqrt{y^2 + 4} - y \Rightarrow y = \frac{2}{n} - \frac{n}{2} \end{cases}$$

再代入  $mn = 2 \Rightarrow n = \frac{2}{m}$ :

$$y = \frac{2}{n} - \frac{n}{2} = m - \frac{1}{m} \Rightarrow y = -2x$$

所以:

$$4^x + 2^{y-1} = 4^x + \frac{1}{2 \times 4^x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

当  $x = \frac{1}{4}$  时取得等号

## 例题 2.1.7 (深圳中学 2025 届二轮一阶)

$\triangle ABC$  中, 若

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AE} = \frac{\mu}{\mu+1} \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

则连接  $BD, CE$  得到交点  $Q$ , 任取  $\triangle ABC$  所在平面内某一点  $P$ , 那么有:

$$PQ^2 = \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} - \frac{\lambda \mu BC^2 + \lambda AC^2 + \mu AB^2}{(1 + \lambda + \mu)^2}$$

解 2.1.7. 设

$$\begin{cases} \overrightarrow{AQ} = x \overrightarrow{AD} + (1-x) \overrightarrow{AB} = x \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{AC} + (1-x) \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} = y \overrightarrow{AE} + (1-y) \overrightarrow{AC} = y \frac{\mu}{1+\mu} \overrightarrow{AB} + (1-y) \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda+1}{1+\lambda+\mu} \\ y = \frac{\mu+1}{1+\lambda+\mu} \end{cases}$$

化为形如  $x \overrightarrow{QA} + y \overrightarrow{QB} + z \overrightarrow{QC} = 0$  的方程:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{AC} + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QC}) + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}) \\ &= \frac{\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{AQ} + \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{QC} + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{QB} \\ \Rightarrow \overrightarrow{QA} + \lambda \overrightarrow{QC} + \mu \overrightarrow{QB} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PQ} + \lambda(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PQ}) + \mu(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}) &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \lambda \overrightarrow{PC} + \mu \overrightarrow{PB} &= (1 + \lambda + \mu) \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

平方得:

$$PA^2 + \lambda^2 PC^2 + \mu^2 PB^2 + 2\lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} + 2\mu \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 2\lambda\mu \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = (1 + \lambda + \mu)^2 PQ^2$$

分别代入

$$\begin{cases} 2\lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \lambda \left( PA^2 + PC^2 - (\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}) \right)^2 = \lambda(PA^2 + PC^2 - AC^2) \\ 2\mu \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \mu \left( PA^2 + PB^2 - (\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}) \right)^2 = \mu(PA^2 + PB^2 - AB^2) \\ 2\lambda\mu \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = \lambda\mu \left( PC^2 + PB^2 - (\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB}) \right)^2 = \lambda\mu(PC^2 + PB^2 - BC^2) \end{cases}$$

变形即可得到:

$$PQ^2 = \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} - \frac{\lambda \mu BC^2 + \lambda AC^2 + \mu AB^2}{(1 + \lambda + \mu)^2}$$

因此有结论：

### 结论 2.1.1 结论

平面内给定  $\triangle ABC$ , 若点  $Q$  满足

$$\overrightarrow{QA} + \lambda \overrightarrow{QC} + \mu \overrightarrow{QB} = \vec{0}$$

则任取  $\triangle ABC$  所在平面内某一点  $P$ , 有

$$PQ^2 = \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} - \frac{\lambda \mu BC^2 + \lambda AC^2 + \mu AB^2}{(1 + \lambda + \mu)^2}$$

### 例题 2.1.8 奔驰定理

已知平面直角坐标系  $xOy$  中有一个  $\triangle ABC$ , 以及平面内任意一点  $P$ , 则有:

$$\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{PA} + \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{PB} + \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

这等价于

$$S_{\triangle PBC} \overrightarrow{PA} + S_{\triangle PAC} \overrightarrow{PB} + S_{\triangle PAB} \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

这里的三角形面积是有向面积, 我们必须在计算三角形面积时按照字母顺序看一下方向 (顺时针或逆时针), 然后将与其他两个方向不同的三角形的对应面积取负值。

### 解 2.1.8.

### 例题 2.1.9 外心向量关系

已知平面直角坐标系  $xOy$  中有一个  $\triangle ABC$ , 则其外心满足关系式:

### 解 2.1.9.

### 例题 2.1.10 三角形外心坐标

已知平面直角坐标系  $xOy$  中有一个  $\triangle ABC$ , 则其外心的坐标为

$$\left( \frac{\begin{vmatrix} OA^2 & y_A & 1 \\ OB^2 & y_B & 1 \\ OC^2 & y_C & 1 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_A & OA^2 & 1 \\ x_B & OB^2 & 1 \\ x_C & OC^2 & 1 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}} \right)$$

解 2.1.10.

**例题 2.1.11 三角形垂心坐标**

已知平面直角坐标系  $xOy$  中有一个  $\triangle ABC$ , 则其垂心的坐标为

$$\left( \frac{\begin{vmatrix} x_Bx_C + y_By_C & y_A & 1 \\ x_Ax_C + y_Ay_C & y_B & 1 \\ x_Ax_B + y_Ay_B & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_Bx_C + y_By_C & 1 \\ x_B & x_Ax_C + y_Ay_C & 1 \\ x_C & x_Ax_B + y_Ay_B & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}} \right)$$

解 2.1.11.

**例题 2.1.12 三角形的内心坐标**

已知平面直角坐标系  $xOy$  中有一个  $\triangle ABC$ , 则其内心的坐标为

$$\left( \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c} \right)$$

解 2.1.12.

**例题 2.1.13 容斥原理练习**

某学校举办比赛, 有 20 个参赛名额, 现在分给 4 个不同的班, 保证至少有一个班的名额为 4 个, 且每一个班都有名额, 则共有\_\_\_\_\_种分法。

解 2.1.13. 设四个班的名额为  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in N_+$ , 则分法数就是集合  $A_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_i = 4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20\}$  的元素个数, 又因为

$$|A_1| = \{(x_1, x_3, x_4) | x_2 + x_3 + x_4 = 16, x_2, x_3, x_4 > 0\} = C_{15}^2$$

$$|A_1 \cap A_2| = \{(x_3, x_4) | x_3 + x_4 = 12, x_3, x_4 > 0\} = C_{11}^1$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= C_4^1 |A_1| - C_4^2 |A_1 \cap A_2| + C_4^3 |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= C_4^1 C_{15}^2 - C_4^2 + C_4^3 C_{11}^1 = 358 \end{aligned}$$

## 例题 2.1.14 求和

计算  $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k$ , 其中  $k < n-1, k \in N_+$

解 2.1.14. 定义函数并对其求  $k$  阶导数:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i x^{i+1} = x \sum_{i=0}^{n-1} (-x)^i C_{n-1}^i \\ &= x(1-x)^{n-1} = (x-1+1)(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-1} - (1-x)^n \\ \Rightarrow f(1) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i = 0 \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i A_{i+1}^k x^{i+1-k} \Rightarrow f^{(k)}(1) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i A_{i+1}^k \end{aligned}$$

现已很接近原式, 问题在于沟通  $A_{i+1}^k$  和  $(i+1)^k$ , 我们假想这样一个情境: 有  $k$  个不同的球等待放进  $i+1$  个不同的盒子里面, 放置过程中允许空盒的存在, 所以放法是  $(i+1)^k$ , 然后我们换一种方式, 考虑分为恰好有  $0, 1, 2, 3, 4, \dots, k$  个非空盒子的情况, 那么求和就是

$$\sum_{r=0}^k S(k, r) r! C_{i+1}^r = \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r$$

其中  $S(k, r)$  表示  $k$  个有标号的球放到  $r$  个同样的盒子里面的方法数,  $C_{i+1}^r$  表示从  $i+1$  个不同的盒子无序地挑出  $r$  个盒子来放球, 再对其进行全排列使得挑出来的  $r$  个盒子有编号, 则:

$$(i+1)^k = \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r$$

那么代入到  $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k$  中就有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( (-1)^i C_{n-1}^i \left( \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r (-1)^i C_{n-1}^i \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{i=0}^{n-1} S(k, r) A_{i+1}^r (-1)^i C_{n-1}^i = \sum_{r=0}^k S(k, r) f^{(r)}(1) \end{aligned}$$

对  $(1-x)^{n-1} - (1-x)^n$  求导易得  $f(x)$  只有第  $n-1$  和  $n$  阶导数在  $x=1$  处的值不是 0, 即:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k = 0$$

## 例题 2.1.15 证明

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A + \cos B} - \frac{\sin A + \cos B}{\sin B - \cos A} = 2 \tan(A + B) \\
 (2) \quad & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A - \cos B} - \frac{\sin A - \cos B}{\sin B - \cos A} = \frac{\cos B + \sin A}{\cos A + \sin B} - \frac{\cos A + \sin B}{\cos B + \sin A} = 2 \tan(A - B) \\
 (3) \quad & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} = 2 \cot(A + B) \\
 (4) \quad & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} - \frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = \frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = 2 \cot(A - B)
 \end{aligned}$$

解 2.1.15. 第一种方法就是通分，拿一个式子举例

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A - \cos B} - \frac{\sin A - \cos B}{\sin B - \cos A} \\
 &= \frac{(\sin B - \cos A)^2 - (\sin A - \cos B)^2}{(\sin B - \cos A)(\sin A - \cos B)} \\
 &= \frac{\sin^2 B - 2 \sin B \cos A + \cos^2 A - \sin^2 A + 2 \sin A \cos B - \cos^2 B}{\sin B \sin A - \sin A \cos A - \sin B \cos B + \cos B \cos A} \\
 &= \frac{\cos 2A - \cos 2B + 2(\sin A \cos B - \sin B \cos A)}{\cos(A - B) - \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B)} \\
 &= \frac{-2 \sin(A + B) \sin(A - B) + 2 \sin(A - B)}{\cos(A - B) - \sin(A + B) \cos(A - B)} = \frac{2[1 - \sin(A + B)] \sin(A - B)}{[1 - \sin(A + B)] \cos(A - B)} \\
 &= \frac{2 \sin(A - B)}{\cos(A - B)} = 2 \tan(A - B).
 \end{aligned}$$

再写一个：

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} \\
 &= \frac{(\cos A - \cos B)^2 - (\sin A - \sin B)^2}{(\cos A - \cos B)(\sin A - \sin B)} \\
 &= \frac{\cos^2 A - 2 \cos A \cos B + \cos^2 B - \sin^2 A + 2 \sin A \sin B - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin A \cos B - \sin B \cos A + \sin B \cos B} \\
 &= \frac{(\cos^2 A - \sin^2 A) + (\cos^2 B - \sin^2 B) - 2 \cos A \cos B + 2 \sin A \sin B}{\sin A \cos A + \sin B \cos B - (\sin A \cos B + \sin B \cos A)} \\
 &= \frac{\cos 2A + \cos 2B - 2 \cos(A + B)}{\frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B) - \sin(A + B)} = \frac{2 \cos(A + B) \cos(A - B) - 2 \cos(A + B)}{\sin(A + B) \cos(A - B) - \sin(A + B)} \\
 &= \frac{2 \cos(A + B)[\cos(A - B) - 1]}{\sin(A + B)[\cos(A - B) - 1]} = \frac{2 \cos(A + B)}{\sin(A + B)} = 2 \cot(A + B).
 \end{aligned}$$

第二种方法就是按部就班地和差化积，拿一个式子举例

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A - \cos B} - \frac{\sin A - \cos B}{\sin B - \cos A} \\
 &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \cos A}{\sin A - \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} - \frac{\sin A - \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \cos A} \\
 &= \frac{-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) \sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) \sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)} \\
 &= -2 \frac{\cos\left[2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\right]}{\sin\left[2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\right]} = -2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + A - B\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + A - B\right)} \\
 &= -2 \frac{-\sin(A - B)}{\cos(A - B)} = 2 \tan(A - B).
 \end{aligned}$$

再写一个：

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} \\
 &= -\frac{\cos\left[2 \cdot \frac{A+B}{2}\right]}{\frac{1}{2} \sin\left[2 \cdot \frac{A+B}{2}\right]} = -\frac{\cos(A+B)}{\frac{1}{2} \sin(A+B)} \\
 &= -2 \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = 2 \cot(A+B).
 \end{aligned}$$

## 例题 2.1.16 (抹茶奶绿供题)

平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{a^2} = 1, (a > 4)$ , 椭圆的弦  $AB$  过点  $D(-2, 0)$ , 连接  $OA, OB$ , 线段  $OB$  交圆  $(x+1)^2 + y^2 = 4$  于  $C$ , 若  $DC$  平行于  $OA$ , 求  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 2.1.16. 设  $B(x_1, y_1), A(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ , 比值换元  $-\lambda = \frac{x_1 + 2}{x_2 + 2} = \frac{y_1}{y_2}$ , 则:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1 \\ \frac{\lambda^2 x_2^2}{16} + \frac{\lambda^2 y_2^2}{a^2} = \lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1^2 - \lambda^2 x_2^2}{16} + \frac{y_1^2 - \lambda^2 y_2^2}{a^2} = 1 - \lambda^2 \Rightarrow \frac{(x_1 + \lambda x_2)(x_1 - \lambda x_2)}{16(1+\lambda)(1-\lambda)} + \frac{(y_1 + \lambda y_2)(y_1 - \lambda y_2)}{a^2(1+\lambda)(1-\lambda)} = 1$$

代入  $x_1 + \lambda x_2 = (-2)(1 + \lambda), y_1 + \lambda y_2 = 0$  得

$$\begin{aligned} \frac{-(x_1 - \lambda x_2)}{8(1-\lambda)} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{x_1 + 8}{x_2 + 8} \Rightarrow -\lambda = \frac{x_1 + 2}{x_2 + 2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 + 8}{-x_2 - 8} \\ \Rightarrow y_2 = \frac{-3y_1}{x_1 + 5}, \quad x_2 = \frac{-3(x_1 + 2)}{x_1 + 5} - 2 = \frac{-5x_1 - 16}{x_1 + 5} \end{aligned}$$

$$\text{设 } y_1 = kx_1, \text{ 则代入 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ 得 } \frac{x_1^2}{16} + \frac{k^2 x_1^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm \frac{4}{\sqrt{a^2 + 16k^2}} \\ y_1 = \pm \frac{4k}{\sqrt{a^2 + 16k^2}} \end{cases}$$

$$\text{再代入圆方程得到 } (x+1)^2 + k^2 x^2 = 4 \Rightarrow (k^2 + 1)x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{-1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1} \\ y_3 = \frac{-k \pm k\sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1} \end{cases}.$$

我们不妨先带着正负号一起计算, 注意下面的正负号一起取正或取负

$$k_{AO} = \frac{3y_1}{5x_1 + 16} = \frac{\frac{\pm 12k}{\sqrt{a^2 + 16k^2}}}{\frac{\pm 20}{\sqrt{a^2 + 16k^2}} + 16} = \frac{\pm 3k}{4\sqrt{a^2 + 16k^2} \pm 5}$$

$$k_{DC} = \frac{\frac{-k \pm k\sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1}}{\frac{-1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1} + 2} = \frac{-k \pm k\sqrt{3k^2 + 4}}{2k^2 + 1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}$$

由  $k_{AO} = k_{CD}$  得到  $\frac{-1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}{2k^2 + 1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}} = \frac{\pm 3}{4\sqrt{a^2 + 16k^2} \pm 5}$ , 提取常数并变形得到:

$$\pm 1 = \frac{1}{\sqrt{3k^2 + 4}} - \frac{2\sqrt{a^2 + 16k^2}}{3k^2 + 4} \pm 2\sqrt{\frac{a^2 + 16k^2}{3k^2 + 4}}$$

所以若要求此式成立且  $a$  为常数, 必有  $\frac{a^2 + 16k^2}{3k^2 + 4}$  为常数, 则计算得到  $a = \frac{8}{\sqrt{3}} > 4$ , 反向代入验证充分性即可得到答案为  $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$ .

## 例题 2.1.17 (杭二模拟)

已知椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 设其左焦点为  $F(-1, 0)$

- (1) 若椭圆上的两点  $M, N$  满足直线  $MF, NF$  关于  $x$  轴对称, 且直线  $MN$  斜率存在, 证明直线  $MN$  过定点.
- (2) 若过  $B(-2, 2)$  的一条直线交椭圆于  $M, N$ ,  $A(2, 0)$ , 连接直线  $AM, AN$  交直线  $OB$  于  $P, Q$ , 求  $\frac{|OP|}{|OQ|}$  的值.

解 2.1.17. (1) 注意到直线  $MF, NF$  关于  $x$  轴对称, 那么直线  $MF, NF$  一定关于  $y$  轴对称, 又因为直线  $MN$  斜率存在, 所以  $M, N$  在  $x$  轴同侧, 且  $k_{MF} + k_{NF} = 0$ . 首先这个题用不联立是非常简单的, 但是联立也很好做, 这里用同解方程做法:

$$\begin{cases} (x+1+ty)(x+1-ty) = 0 \\ x = my + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + n \end{cases}$$

$$(m^2 - t^2)y^2 + 2m(n+1)y + (n+1)^2 = 0 = (3m^2 + 4)y^2 + 6mny + 3n^2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3m^2 + 4)(m^2 - t^2)y^2 + 2m(n+1)(3m^2 + 4)y + (n+1)^2(3m^2 + 4) = 0 \\ (m^2 - t^2)(3m^2 + 4)y^2 + 6mn(m^2 - t^2)y + (3n^2 - 12)(m^2 - t^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m(n+1)(3m^2 + 4) = 6mn(m^2 - t^2) \\ (n+1)^2(3m^2 + 4) = (3n^2 - 12)(m^2 - t^2) \end{cases} \Rightarrow n = -4$$

最后是两式作比得到的, 当然, 直接比较  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  可以直接得到  $(-4, 0)$ .

(2) 设  $M\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2}, \frac{2\sqrt{3}t_1}{1+t_1^2}\right), N\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2}, \frac{2\sqrt{3}t_2}{1+t_2^2}\right)$ , 则

$$MA : x = \frac{x_1 - 2}{y_1}y + 2 = \frac{\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2} - 2}{\frac{2\sqrt{3}t_1}{1+t_1^2}}y + 2 = -\frac{2t_1}{\sqrt{3}}y + 2 \quad NA : x = -\frac{2t_2}{\sqrt{3}}y + 2$$

由直线  $MA, NA$  与  $y = -x$  联立得到

$$y_P = \frac{2\sqrt{3}}{2t_1 - \sqrt{3}}, y_Q = \frac{2\sqrt{3}}{2t_2 - \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|OP|}{|OQ|} = -\frac{2t_2 - \sqrt{3}}{2t_1 - \sqrt{3}}$$

写出半代入形式的直线两点式

$$\frac{-2}{2} \frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2} = 1 \Rightarrow t_1 + t_2 = \sqrt{3}$$

得到  $\frac{|OP|}{|OQ|} = 1$ .

## 结论 2.1.2 比值代换法

椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上两点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  与非椭圆上点  $P(x_0, y_0)$  满足  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ , 则

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2} = \frac{y_1 - y_0}{y_0 - y_2} = -\frac{\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} - 1}{\frac{x_0 x_2}{a^2} + \frac{y_0 y_2}{b^2} - 1} \\ (1 + \lambda)^2 \left( \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right) = 2\lambda \left( \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1 \right) \end{cases}$$

证明 2.1.2.

## 结论 2.1.3 参数方程

过椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上两点  $A \left( a \frac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2}, b \frac{2t_1}{1 + t_1^2} \right), B \left( a \frac{1 - t_2^2}{1 + t_2^2}, b \frac{2t_2}{1 + t_2^2} \right)$  的直线方程为

$$\frac{x(1 - t_1 t_2)}{a(1 + t_1 t_2)} + \frac{y(t_1 + t_2)}{b(1 + t_1 t_2)} = 1$$

## 第三章 曲线系

### 3.1 曲线系引入

例题 3.1.1 (椭圆上的中点弦直线)

设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  内有一点  $P(x_0, y_0)$ , 求以  $P$  为弦中点的直线方程.

解 3.1.1. 构造两个椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(2x_0 - x)^2}{a^2} + \frac{(2y_0 - y)^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

相减得到答案

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

例题 3.1.2 (椭圆上的直线两点式)

设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上有两点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 求  $AB$  方程.

解 3.1.2. 构造以  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  为直径的相似椭圆

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{a^2} + \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{b^2} = 1$$

则与原来的椭圆方程相减

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)^2}{b^2}$$

就可以得到  $AB$  的方程为

$$\frac{x_1 + x_2}{a^2} x + \frac{y_1 + y_2}{b^2} y = 1 + \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2}$$

再对这个方程使用万能代换便可以得到参数方程直线两点式的形式

例题 3.1.3 (抛物线上的直线两点式)

设  $y^2 = 2px$  上有两点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 求  $AB$  方程.

解 3.1.3. 构造直线系  $(y - y_1)(y - y_2) = 0$ , 与  $y^2 = 2px$  相减得到

$$y^2 - (y - y_1)(y - y_2) = 2px \Leftrightarrow 2px - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2 = 0$$

## 例题 3.1.4 (利用梯形构造四点共圆)

二次函数  $y = x^2 + (a+1)x + a - 2$  与坐标轴交于  $A, B, C$  三点, 求  $\triangle ABC$  的外接圆的方程, 并验证圆心是否在定直线上, 以及外接圆是否过定点.

解 3.1.4. 构造直线系  $(y-0)(y-(a-2)) = y(y-a+2)$  再与抛物线  $x^2 + (a+1)x - y + a - 2 = 0$  相加得到:

$$x^2 + y^2 + (a+1)x - y - ay + 2y + a - 2 = x^2 + y^2 + (a+1)x + (1-a)y + a - 2 = 0$$

圆心  $\left(\frac{a+1}{-2}, \frac{1-a}{-2}\right)$  一定在定直线上。将方程改写为

$$a(x-y+1) + x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$$

发现当  $x=0, y=1$  和  $x=-2, y=-1$  符合要求, 这样就得到定点  $(0, 1), (-2, -1)$

## 例题 3.1.5 (2025 八省联考)

椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ ,  $A(-3, 0), B(2, 0)$ , 过  $B$  的弦  $MN$  与点  $A$  形成的三角形  $AMN$  外心为  $D$ , 证明  $k_{MN}k_{OD}$  为定值.

解 3.1.5. 由斜率相反出共圆的结论, 可以构造直线系  $(x-ty-2)(x-ty+3) = 0$ , 然后与椭圆联立:

$$\begin{cases} (x-ty-2)(x-ty+3) = 0 \\ 8x^2 + 9y^2 - 72 = 0 \end{cases}$$

然后待定  $x^2, y^2$  系数相等得到椭圆的系数是  $(t^2 + 1)$ , 所以相加得到:

$$\begin{aligned} & (t^2 + 1)(8x^2 + 9y^2 - 72) + (x-ty-2)(x+ty+3) = 0 \\ & \Leftrightarrow (8t^2 + 9)x^2 + (8t^2 + 9)y^2 + x - 5ty - 72t^2 - 78 = 0 \end{aligned}$$

则  $k_{OD} = -5t, k_{MN} = \frac{1}{t}$ , 定值为  $-5$ .

## 例题 3.1.6 (直径圆的构造)

已知抛物线  $y^2 = 2px$  和弦  $AB$  所在的直线  $x = ty + m$ , 求  $A, B$  的直径圆方程.

解 3.1.6. 消去  $x$  得到

$$y^2 = 2p(ty+m) = 2pty + 2pm \Rightarrow y^2 - 2pty - 2pm = 0$$

消去  $y$  得到

$$t^2y^2 = (x-m)^2 = 2p^2t^2x \Rightarrow x^2 - (2m + 2p^2t^2)x + m^2 = 0$$

加起来就可以得到直径圆方程

$$x^2 + y^2 - (2m + 2p^2 t^2)x - 2pty + m^2 - 2pm = 0$$

原因是消去  $x, y$  得到的式子都可以变为  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$  和  $(y - y_1)(y - y_2) = 0$  的形式，而  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  是弦  $AB$  的两端点，所以直径圆的方程就是这两个直线的交点的方程。

**例题 3.1.7 (过两点的圆系方程例题)**

已知  $C : y^2 = 4x, l : y = x + 1$  交于  $A, B$  两点，求经过  $A, B$  且与  $x = -1$  相切的圆的方程。

解 3.1.7. 联立有：

$$\begin{cases} y^2 = 4(y - 1) \\ (x + 1)^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

相加就有：

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$

这是直径圆，接下来配凑圆系方程：

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 + \lambda(x - y - 1) = 0$$

代入  $x = -1$ ，得到

$$y^2 - 4y + 4 + \lambda(-2 - y) = 0$$

并让  $\Delta = 0$ ，得到：

$$\Delta = (4 + \lambda)^2 - 4(4 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -16$$

所以圆方程有两个： $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$  和  $x^2 + y^2 - 18x + 12y + 21 = 0$ ，本题目是易错题，容易漏解。

**例题 3.1.8 (直径圆习题)**

已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，弦  $AB$  过定点  $(m, 0)$ ，其直径圆与椭圆交于点  $C, D$ ，证明直线  $CD$  过定点。

解 3.1.8. 设  $AB : x = ty + m$ ，其中  $m$  已知，联立韦达：

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \\ x = ty + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3t^2 + 4)y^2 + 6tmy + 3m^2 - 12 = 0 \\ (3t^2 + 4)x^2 - 8mx + 4m^2 - 12t^2 = 0 \end{cases}$$

两式相加得到：

$$(3t^2 + 4)x^2 + (3t^2 + 4)y^2 - 8mx + 6tmy + 7m^2 - 12 - 12t^2 = 0$$

引入  $\lambda(3x^2 + 4y^2 = 12) = 0$  并配凑  $(x + ty + \dots)(x - ty + \dots)$  结构，就有

$$-(t^2 + 1)(3x^2 + 4y^2 - 12) + (3t^2 + 4)(x^2 + y^2) - 8mx + 6tmy + 7m^2 - 12 - 12t^2 = 0$$

因式分解成

$$(x - ty - m)(x + ty - 7m) = 0$$

，所以  $CD$  过定点  $(7m, 0)$ .

### 例题 3.1.9 (角平分线)

知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，弦  $AB$  过定点  $P(1, 0)$ ,  $C(4, 0)$ ，证明  $x$  轴平分  $\angle ACB$

解 3.1.9. 由  $AB : x = ty + 1$ ，由对称性可以设  $A'B' : x = -ty + 1$ ，得到退化二次曲线

$$(x - ty - 1)(x + ty - 1) = 0$$

待定  $\lambda(3x^2 + 4y^2 - 12) = 0$ ，再根据要配凑的结构

$$(x - ?y - 4)(x + ?y - 4) = 0$$

中的常数项，得到  $\lambda = -\frac{1}{4}$

$$-(3x^2 + 4y^2 - 12) + 4(x - ty - 1)(x + ty - 1) = 0$$

得到  $(x - 4)^2 = (4 + t^2)y^2$ ，这等价于

$$(x + \sqrt{4 + t^2}y - 4)(x - \sqrt{4 + t^2}y - 4) = 0$$

这个方程的根显然为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，所以斜率相反，角平分线得证.

## 例题 3.1.10 (抹茶奶绿)

椭圆  $x^2 + 4y^2 = 4$  的右焦点为  $(\sqrt{3}, 0)$ , 点  $M, N$  在  $x$  轴上方的椭圆上, 且  $\triangle MNF$  的外心  $D$  在  $x$  轴上,  $\sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN|$ , 求  $S_{\triangle MNF}$

解 3.1.10. 设直线方程  $MN : y = kx + m \Leftrightarrow kx = y - m$ , 并联立

$$\begin{cases} (1) : (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0 \\ (2) : (4k^2 + 1)y^2 - 2my + m^2 - 4k^2 = 0 \\ (3) : y - kx - m = 0 \end{cases}$$

由 (1) + (2) + 2m(3) 相加得到过  $A, B$  两点, 且圆心在  $x$  轴上的圆

$$(4k^2 + 1)(x^2 + y^2) + 6kmx + 3m^2 - 4k^2 - 4 = 0$$

代入  $F(\sqrt{3}, 0)$ , 得到直线  $MN$  到焦点  $(\sqrt{3}, 0)$  的距离:  $d$  (后面要根据这个式子求斜率) :

$$8k^2 + 6\sqrt{3}km + 3m^2 = 1 \Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{3}k + m}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

此时设圆半径为  $R$ , 并由等面积法推算得:

$$\begin{cases} S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2}|FM||FN|\sin\angle MFN = \frac{1}{2}|MN|d = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}|MN| \\ \sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN| \end{cases} \Rightarrow \sin\angle MFN = \frac{1}{2}$$

于是设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$  由向量公式得到

$$\begin{aligned} \cos\angle MFN &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}}{|FM||FN|} = \frac{(x_1 - \sqrt{3})(x_2 - \sqrt{3}) + y_1y_2}{(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1)(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2)} = \frac{\frac{3}{4}(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_1)(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_2)}{12k^2 + 8\sqrt{3}km + 5m^2 - 1} \\ &= \frac{4}{3} \frac{12k^2 + 8\sqrt{3}km + 4m^2 - 1 + m^2 - 4k^2}{(4k^2 + 1)\frac{16}{3} + \frac{32}{\sqrt{3}}km + 4m^2 - 4} = \frac{8k^2 + 8\sqrt{3}km + 5m^2 - 1}{16k^2 + 8\sqrt{3}km + 3m^2 + 1} \\ &= \frac{8k^2 + 8\sqrt{3}km + 5m^2 - (8k^2 + 6\sqrt{3}km + 3m^2)}{16k^2 + 8\sqrt{3}km + 3m^2 + 8k^2 + 6\sqrt{3}km + 3m^2} = \frac{\sqrt{3}km + m^2}{12k^2 + 7\sqrt{3}km + 3m^2} \end{aligned}$$

齐次化后, 设  $t = \frac{m}{k}$ , 得到  $(3\sqrt{3} - 2)t^2 + (21 - 2\sqrt{3})t + 12\sqrt{3} = 0$  解得横截距, 另一个根舍去:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3} - 21 - 2\sqrt{3} - 3}{2(3\sqrt{3} - 2)} = \frac{12}{2 - 3\sqrt{3}}, t_1^2 = \frac{144}{31 - 12\sqrt{3}}, t_2 = -\sqrt{3}$$

然后根据前面求出的距离, 利用斜率的定义计算:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{d^2}{(-\frac{m}{k} - \sqrt{3})^2 - d^2} = \frac{1}{3(\frac{3+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2})^2 - 1} = \frac{31 - 12\sqrt{3}}{3(3 + 2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3} - 2)^2} = \frac{1}{16} \frac{31 - 12\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \\ m^2 &= k^2 \frac{m^2}{k^2} = \frac{1}{16} \frac{31 - 12\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \frac{144}{31 - 12\sqrt{3}} = \frac{9}{2 + 3\sqrt{3}}, km = \frac{3}{4} \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

最后得到面积:

$$\begin{aligned} S_{\triangle MNF} &= \frac{1}{2} \sin\angle MFN |FM||FN| = \frac{1}{4} |FM||FN| = \frac{16k^2 + 8\sqrt{3}km + 3m^2 + 1}{4k^2 + 1} \\ &= \frac{(31 - 12\sqrt{3}) + 6\sqrt{3}(2 - 3\sqrt{3}) + 27 + 2 + 3\sqrt{3}}{\frac{1}{4}(31 - 12\sqrt{3}) + 2 + 3\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{13} \end{aligned}$$

## 例题 3.1.11 (抹茶奶绿)

椭圆  $x^2 + 4y^2 = 4$  的右焦点为  $(\sqrt{3}, 0)$ , 点  $M, N$  在  $x$  轴上方的椭圆上, 且  $\triangle MNF$  的外心  $D$  在  $x$  轴上,  $\sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN|$ , 求  $S_{\triangle MNF}$

解 3.1.11. 由于本题中圆和椭圆都能削掉半边变成“函数”, 所以我们可以直接联立它们:

$$\begin{cases} (x - m)^2 + y^2 = r^2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 - 2mx + 2\sqrt{3}m - 2 = 0$$

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 由  $\sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN|$  得到:

$$\begin{aligned} |MN| &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 \right) \left( 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \left( \frac{4}{\sqrt{3}} - x_1 \right) \left( \frac{4}{\sqrt{3}} - x_2 \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{4}{3} \left( \frac{3}{4} - \frac{8m}{\sqrt{3}} + 2m - 2 \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}m \right) = \sqrt{3} - m \end{aligned}$$

由于圆经过椭圆焦点, 有

$$(\sqrt{3} - m)^2 = r^2 \Rightarrow \sqrt{3} - m = |MN| = r = \frac{\sqrt{3}}{2}|FM||FN|$$

设圆心为  $D$ , 有等边三角形  $MDN$ , 圆周角定理得到  $\angle MFN = \frac{\pi}{6}$ , 所求面积为

$$S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} \sin \angle MFN |FM||FN| = \frac{1}{4} |FM||FN| = \frac{\sqrt{3}}{6}r$$

我们要求出  $r$ , 所以还少一个方程, 利用三角形  $MNF$  余弦定理:

$$|MF|^2 + |NF|^2 - \sqrt{3}|MF||NF| = |MF|^2 + |NF|^2 - 2r = |MN|^2 = r^2 \Rightarrow |MF|^2 + |NF|^2 = r^2 + 2r$$

为了引入  $m$ , 利用恒等式  $|MF|^2 + |NF|^2 + 2|MF||NF| = (|MF| + |NF|)^2$ , 韦达定理得:

$$|MF| + |NF| = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2) = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{3}m = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}m$$

那么

$$|MF|^2 + |NF|^2 = (|MF| + |NF|)^2 - 2|MF||NF| = (4 - \frac{4}{\sqrt{3}}m)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}r = r^2 + 2r$$

代入  $\sqrt{3} - m = r$  得到

$$\left( 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - r) \right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}r = r^2 + 2r \Rightarrow r = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{13}$$

得到  $S_{\triangle MNF} = \frac{\sqrt{3}}{6}r = \frac{2 + \sqrt{3}}{13}$

## 第四章 杂题

### 4.1 数学问题

#### 例题 4.1.1 新曲线

已知曲线  $\Gamma : 12x^3 + 12xy^2 + 3x^2 + 4y^2 = 0$ 。过原点  $O$  作两条互相垂直的直线，分别交曲线  $\Gamma$  于异于原点的两点  $A, B$ 。求证：无论直线如何转动， $\triangle OAB$  的外接圆恒过一个异于原点的定点，并求出该定点坐标。

#### 例题 4.1.2

(多选) 已知非零复数  $z_1, z_2$  满足  $z\bar{z} = z + \bar{z}$ 。设复数  $z_3$  满足  $\frac{2}{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ 。下列关于  $z_1, z_2, z_3$  的结论中，正确的有（ ）

- A. 复数  $z_3$  必定满足方程  $z\bar{z} = z + \bar{z}$
- B.  $\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1|} = \frac{|z_2 - z_3|}{|z_2|}$
- C.  $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} \geq \frac{2}{|z_3|}$
- D.  $\frac{1}{|z_1|^2} + \frac{1}{|z_2|^2} \leq \frac{2}{|z_3|^2}$

## 第五章 抹茶题集

### 例题 5.0.1 抹茶 T1

椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$  ( $m > 1$ ) 上 3 点  $A, B, P(0, 1)$  满足  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ , 求  $|x_B|$  的最大值

解 5.0.1. 由于我们将证明: 一旦  $m$  固定, 符合题意的弦最多只有一对对称解,  $|x_B|$  此时是一个确定的定值。因此“求最大值”必然是指随着参数  $m$  在允许范围 ( $m > 1$ ) 内变化时, 绝对值  $|x_B|$  能达到的全局上界。设点  $A(x_A, y_A)$ , 点  $B(x_B, y_B)$ 。已知定点  $P(0, 1)$ 。有

$$\overrightarrow{AP} = (0 - x_A, 1 - y_A) = (-x_A, 1 - y_A), \overrightarrow{PB} = (x_B - 0, y_B - 1) = (x_B, y_B - 1)$$

由于  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ , 代入条件:

$$\begin{cases} -x_A = 2x_B \\ 1 - y_A = 2(y_B - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_A = -2\mathbf{x}_B \\ \mathbf{y}_A = 3 - 2\mathbf{y}_B \end{cases}$$

已知  $A$  和  $B$  都在椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$  上。分别代入

$$\frac{x_B^2}{4} + y_B^2 = m, \frac{(-2x_B)^2}{4} + (3 - 2y_B)^2 = m$$

消去  $x_B$  得到:

$$\frac{x_B^2}{4} + y_B^2 = x_B^2 + 4y_B^2 - 12y_B + 9 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\right)x_B^2 + (4 - 1)y_B^2 - 12y_B + 9 = 0$$

整理得到椭圆轨迹  $E_B: \frac{x^2}{4} + (y - 2)^2 = 1$ , 将  $x_B^2$  反代, 找出参数  $m$  和  $y_B$  的对应关系为  $m = 4y_B - 3$ ,  
由条件  $m > 1$ :

$$4y_B - 3 > 1 \Rightarrow 4y_B > 4 \Rightarrow y_B > 1$$

, 因此, 满足条件的点  $B$  的充分且必要集合为: 椭圆  $\frac{x_B^2}{4} + (y_B - 2)^2 = 1$  上满足  $y_B > 1$  的所有点。  
由于点  $B$  在  $\frac{x_B^2}{4} + (y_B - 2)^2 = 1$  上, 且任意实数的平方非负  $(y_B - 2)^2 \geq 0$ :

$$\frac{x_B^2}{4} = 1 - (y_B - 2)^2 \leq 1 \Rightarrow x_B^2 \leq 4 \Rightarrow |\mathbf{x}_B| \leq 2$$

当且仅当  $y_B = 2$  时取得等号, 此时完美符合约束  $y_B > 1$ , 且对应的  $m = 4(2) - 3 = 5$  同样符合  $m > 1$ 。

## 例题 5.0.2 抹茶 T2

椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的右焦点为  $F$ , 过点  $F$  的直线交椭圆于  $A, B$  两点, 若  $|OA|^2 = |AB|$ , 求点  $A$  的坐标.

解 5.0.2. 点  $A$  的焦半径为:  $r_A = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_A$ , 凡是过焦点的弦被焦点分成的两段  $r_A$  和  $r_B$ , 必然满足经典的调和性质:  $\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} = \frac{2a}{b^2}$ , 将  $a = 2, b = 1$  代入:

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} = \frac{4}{1} = 4$$

消去  $r_B$ :

$$\frac{1}{r_B} = 4 - \frac{1}{r_A} = \frac{4r_A - 1}{r_A} \Rightarrow r_B = \frac{r_A}{4r_A - 1}$$

弦长  $|AB| = r_A + r_B = r_A + \frac{r_A}{4r_A - 1} = \frac{4r_A^2}{4r_A - 1}$  将  $r_A = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_A$  代入:

$$|AB| = \frac{4(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_A)^2}{4(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_A) - 1} = \frac{4(4 - 2\sqrt{3}x_A + \frac{3}{4}x_A^2)}{8 - 2\sqrt{3}x_A - 1} = \frac{3x_A^2 - 8\sqrt{3}x_A + 16}{7 - 2\sqrt{3}x_A}$$

然后将  $|OA|^2$  同样转化为关于  $x_A$  的表达式

$$|OA|^2 = x_A^2 + y_A^2 = x_A^2 + 1 - \frac{x_A^2}{4} = 1 + \frac{3}{4}x_A^2 = \frac{3x_A^2 + 4}{4}$$

联立  $\frac{3x_A^2 + 4}{4} = \frac{3x_A^2 - 8\sqrt{3}x_A + 16}{7 - 2\sqrt{3}x_A}$  得到

$$2\sqrt{3}x_A^3 - 3x_A^2 - 8\sqrt{3}x_A + 12 = 0$$

分解得

$$(x_A^2 - 4)(2\sqrt{3}x_A - 3) = 0$$

当  $x_A^2 - 4 = 0$  解得  $x_A = 2$  或  $x_A = -2$ 。即  $(2, 0)$  和  $(-2, 0)$ 。当  $2\sqrt{3}x_A - 3 = 0$  解得  $x_A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。即  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{4})$  和  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{4})$ 。

## 例题 5.0.3 抹茶 T3

抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 过焦点的直线交抛物线于  $A, B$  两点, 点  $M$  在抛物线上, 满足  $MA \perp MB, FM \parallel AB$ , 求  $\triangle ABM$  的面积.

解 5.0.3. 假设  $AB \perp x$  轴, 则直线方程为  $x = 1$ 。解得  $y^2 = 4 \Rightarrow A(1, 2), B(1, -2)$ , 此时  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1, 2) \cdot (1, -2) = 1 - 4 = -3 \neq 0$ 。矛盾! 故设直线  $AB$  的方程为  $x = ty + 1$  (其中  $t \neq 0$ )。联立得  $y^2 - 4ty - 4 = 0$ , 设点  $M$  的坐标为  $(x_0, y_0)$ , 且  $x_0 = \frac{y_0^2}{4}$ 。 $\overrightarrow{MA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (\frac{y_1^2 - y_0^2}{4}, y_1 - y_0)$ ,  $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0) = (\frac{y_2^2 - y_0^2}{4}, y_2 - y_0)$  由  $MA \perp MB$  得  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ :

$$\frac{y_1^2 - y_0^2}{4} \cdot \frac{y_2^2 - y_0^2}{4} + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0 \Leftrightarrow (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) \left[ \frac{(y_1 + y_0)(y_2 + y_0)}{16} + 1 \right] = 0$$

化简得  $(y_1 + y_0)(y_2 + y_0) + 16 = 0$ , 代入得  $-4 + y_0(4t) + y_0^2 + 16 = 0 \Rightarrow y_0^2 + 4ty_0 + 12 = 0$ , 所以  $t = \frac{-y_0^2 - 12}{4y_0}$ 。

由  $FM \perp AB$  得  $t(y_0^2 - 4) + 4y_0 = 0$ , 联立消去  $t$ :

$$\frac{-y_0^2 - 12}{4y_0} = \frac{-4y_0}{y_0^2 - 4} \Leftrightarrow (y_0^2 - 12)(y_0^2 + 4) = 0$$

解得  $M$  点的横坐标:  $x_0 = \frac{y_0^2}{4} = \frac{12}{4} = 3$ 。所以  $M(3, \pm 2\sqrt{3})$ 。 $t^2 = \left(\frac{-4(+2\sqrt{3})}{12-4}\right)^2 = (\mp\sqrt{3})^2 = 3$ 。已知  $FM \perp AB$ , 且焦点  $F$  在直线  $AB$  上, 因此点  $M$  到底边  $AB$  的距离

$$|FM| = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 0)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + 12} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

底边  $|AB|$ : 由抛物线焦点弦长公式  $|AB| = x_1 + x_2 + p$ : 由于  $x = ty + 1$ , 可得  $x_1 + x_2 = t(y_1 + y_2) + 2 = t(4t) + 2 = 4t^2 + 2$ 。因此  $|AB| = 4t^2 + 2 + p = 4(3) + 2 + 2 = 16$ 。面积  $S$ :

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times |AB| \times |FM| = \frac{1}{2} \times 16 \times 4 = 32$$

另解: 由  $\triangle AMB$  是以  $AB$  为斜边的直角三角形且  $FM \perp AB$  可知, 根据射影定理得  $|FM|^2 = |FA| \cdot |FB|$ 。建立以  $F$  为极点, 极轴沿  $x$  轴正方向的极坐标系, 抛物线方程为  $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$ 。设直线  $AB$  的倾斜角为  $\alpha$ , 则  $A, B$  的极角分别为  $\alpha$  和  $\alpha + \pi$ 。由极坐标性质可知:

$$|FA| = \frac{2}{1 - \cos\alpha}, \quad |FB| = \frac{2}{1 + \cos\alpha}$$

从而  $|FA| \cdot |FB| = \frac{4}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{4}{\sin^2\alpha}$ 。又弦长  $|AB| = |FA| + |FB| = \frac{4}{\sin^2\alpha}$ , 故由此确立几何关系:  $|FM|^2 = |AB|$ 。由于  $FM \perp AB$ , 点  $M$  的极角为  $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$ , 代入极坐标方程得  $|FM| = \frac{2}{1 \pm \sin\alpha}$ 。结合前述关系式得:

$$\left(\frac{2}{1 \pm \sin\alpha}\right)^2 = \frac{4}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{1 \pm \sin\alpha} = \frac{1}{|\sin\alpha|}$$

解得  $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}$ 。此时, 弦长  $|AB| = \frac{4}{1/4} = 16$ , 高  $|FM| = \sqrt{16} = 4$ 。因此,  $\triangle ABM$  的面积为:

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |FM| = \frac{1}{2} \times 16 \times 4 = 32$$

#### 例题 5.0.4 抹茶 T4

点  $A(0, -1)$ , 点  $P, Q$  满足点  $A, P, Q$  共线, 且  $|AP| \cdot |AQ| = 3$ , 若  $k_{OQ} = 3k_{OP}$ , 求点  $P$  的轨迹方程.

解 5.0.4. 设动点  $P$  的坐标为  $(x, y)$ , 点  $Q$  的坐标为  $(x_Q, y_Q)$ 。由题设  $k_{OQ} = 3k_{OP}$  可知, 直线  $OP$  与  $OQ$  的斜率均存在且不为零, 故点  $P$  与点  $Q$  的横坐标均满足  $x \neq 0$  且  $x_Q \neq 0$ 。由斜率公式得  $\frac{y_Q}{x_Q} = \frac{3y}{x}$ , 即  $xy_Q = 3x_Qy$ 。

由于点  $A(0, -1)$  与  $P, Q$  三点共线, 且  $P$  不在  $y$  轴上, 故向量  $\overrightarrow{AP} \neq \vec{0}$ 。设  $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}$  ( $\lambda \neq 0$ ), 则有:

$$(x_Q, y_Q + 1) = \lambda(x, y + 1) \implies x_Q = \lambda x, \quad y_Q = \lambda(y + 1) - 1$$

将上述关系代入  $xy_Q = 3x_Qy$  中, 得  $x[\lambda(y + 1) - 1] = 3\lambda xy$ 。因  $x \neq 0$ , 等式两边同除以  $x$  并整理得  $\lambda(y + 1) - 1 = 3\lambda y$ , 即  $\lambda(1 - 2y) = 1$ 。若  $y = \frac{1}{2}$ , 方程无解, 故  $y \neq \frac{1}{2}$ , 从而解得  $\lambda = \frac{1}{1-2y}$ 。

根据长度条件  $|AP| \cdot |AQ| = 3$ , 结合  $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}$  可得  $|\lambda| \cdot |AP|^2 = 3$ 。代入距离公式与  $\lambda$  的表达式, 得到关于  $P$  点坐标的方程:

$$\left| \frac{1}{1-2y} \right| \cdot [x^2 + (y+1)^2] = 3 \implies x^2 + (y+1)^2 = 3|1-2y|$$

针对  $1-2y$  的正负号进行分类讨论:

当  $1-2y > 0$ , 即  $y < \frac{1}{2}$  时, 方程化为  $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 3 - 6y$ , 整理得  $x^2 + y^2 + 8y - 2 = 0$ , 配方得标准方程  $x^2 + (y+4)^2 = 18$ 。该圆上点的纵坐标最大值为  $y_{max} = -4 + \sqrt{18} = -4 + 3\sqrt{2}$ 。由于  $3\sqrt{2} = \sqrt{18} < 4.5$ , 故  $y_{max} < 0.5$ , 即该轨迹圆上的所有点均满足  $y < \frac{1}{2}$  的前提条件。

当  $1-2y < 0$ , 即  $y > \frac{1}{2}$  时, 方程化为  $x^2 + y^2 + 2y + 1 = -(3 - 6y)$ , 整理得  $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$ , 即  $x^2 + (y-2)^2 = 0$ 。此方程的唯一实数解为点  $(0, 2)$ , 但该点横坐标  $x = 0$ , 不满足斜率存在的初始前提, 故应予以舍弃。

综上所述, 动点  $P$  的轨迹是以  $(0, -4)$  为圆心,  $\sqrt{18}$  为半径的圆, 且需除去与  $y$  轴的交点。其轨迹方程为:

$$x^2 + (y+4)^2 = 18 \quad (x \neq 0)$$

或写成一般式:  $x^2 + y^2 + 8y - 2 = 0 \quad (x \neq 0)$ 。