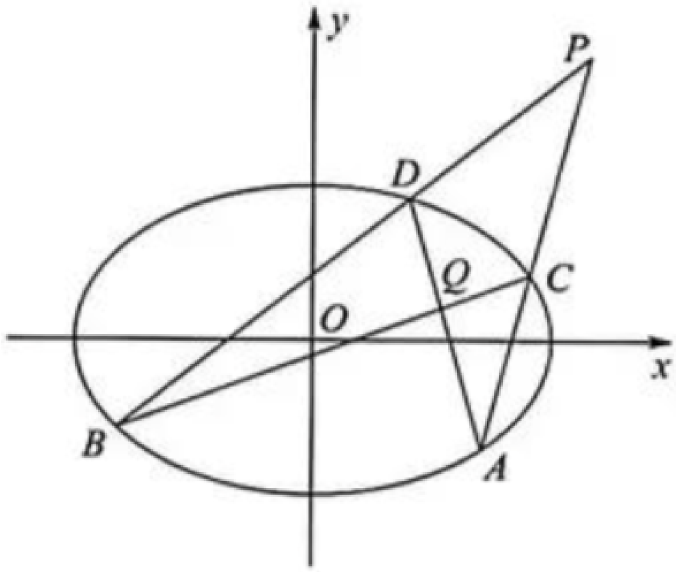
高中数学

解析几何教程

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期：2025 年 9 月 30 日



前言

本书内容全部使用 LaTeX 进行排版，作者”还在尬黑”是一位准大一学生，高中毕业于广东深圳中学，高三数学各次大考平均排名位于前 5%，高考应该也不例外。”还在尬黑”拥有知乎（同名），微信公众号（同名），小红书号（同名）等账号，头像是一个右手三叶结。以及不同名不同头像的 GitHub 账号，发表原创优质内容百余篇，且固定更新频率，堪称发文的“螺丝钉”。

“还在尬黑”对圆锥曲线的解题研究有着浓厚兴趣，并在书中将其总结成了一套完整的解析几何教程。本书适合高中解析几何解题体系未成熟的高二高三学生，以及前来自学的高一学生以及初中生，也可作为高中数学教材。笔者衷心希望本书能够帮助读者提高圆锥曲线解题速度和解题能力，并能够准确地识别班内的”大佬”是用什么东西来装逼的，当然，本书和市面上的某些书不同，不会直接甩给学生们根本用不明白也不懂从何而来的技巧大招，而是会侧重解析一种方法的产生过程，以及如何恰当的选择方法解决具体问题。

学习圆锥曲线（包括高考数学的一些其它内容）的过程中，最重要也最需要大家认真做的就是历年的高考题，本书内容涵盖了大部分恢复高考以来所有的高考解析几何压轴题，并且每一道题都经过了笔者的精挑细选，放到了合适的位置上，后续笔者会在书末尾出一个索引表，帮助只想刷高考题的同学快速使用本书。

除了经典而偏基础的高考题外，本书后面还有些部分为选学内容，难度较高，属于高考不怎么考的范畴，这部分留给同学们或解析几何爱好者们进行自我提高和兴趣拓展。当然，建议读者先打牢必学内容的基础，再来进行进一步的学习。

在创作本书的过程中，笔者也得到了朋友们和热心群众的帮助，在此向他们表示感谢！

十分感谢读者朋友们的支持和赞助！祝大家健康进步，高考成功！

还在尬黑

2025 年 9 月 30 日

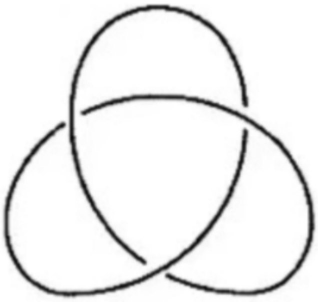


图 1: 我的头像

目录

第一章 先导课程

1.1 写在前面

解析几何是高中数学的重要学习内容，在高考中分值占比较高。

不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代性的表述，这可能是因为圆锥曲线是解析几何中的重难点。但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如 3 次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈 3 种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

首先，笔者来讲一讲怎么进行计算。这似乎是一个很简单的问题，但是谁又能保证在紧张刺激的考场环境下不会犯错误？一旦出现计算错误，检查就需要花费一定的时间，所以不如挑选合适的计算方法，从源头上减少失误。本节中，笔者会结合自己的一些实战经验，尽量告诉大家一些计算过程中减小失误，提升速度的技巧和方法，以及解析几何中计算的基本方向—-整体代换。

鉴于本书的覆盖群体，笔者会尽量避免过多的公式推导和过于严谨的学术表述，而是从直观的角度出发，用一些具体的例子来说明计算的过程。希望大家能从中受益。

1.2 轮换，对称

在此之前，请允许我先介绍一些基本的概念，我们不妨先来看一些看起来很整齐的式子，这些式子平时很常见，大家在备考强基计划的过程中也会遇到比较多这样的式子：

例题 1.2.1

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$abc$$

$$a+b+c$$

$$ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$$

解 1.2.1. 相信大部分同学是通过自己的直觉来归纳的，直观的感受就是这些式子很“整齐”，而且很有规律可循。那么问题来了：“整齐”是怎么体现的？更进一步地，有没有手段验证一个代数式

是“整齐”的？至于“很有规律可循”，那么规律是什么？

这些问题循序渐进，如果理清这些问题，那么读者便掌握了学习数学时地最基本的关注点：定义，性质，判定。这些式子中的 a, b, c 结构权重是均等的，它们地位相同，没有“特权变量”，也没有“次序”之分。

而且，眼尖的读者可以发现，这些表达式中的项往往成组出现，覆盖所有可能的组合，比如 $a+b+c$ 中全为一次项，如果 a 出现了，不用猜也知道 b 和 c 也出现了；再比如 $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$ 中，a^2b 出现了，其中 a 被平方了，那不用猜也知道在其他的项中，b 和 c 也会被平方，而且后面一定会跟着其他没有被平方的字母。它们出现的次数相同。

事实上，由于乘法和加法的交换律和结合律，我们可以发现，对于上面任意一个式子，我们都可以挑选任意两个变量交换位置，而多项式本身保持不变。大家不妨想象一下阅兵式的场景，即使我们偷偷调换两个兵的位置，你也看不出来有什么异样，这是阅兵队伍“整齐”的体现。同样地，这个代数式也可以这样操作，来验证这个代数式是“整齐”的，“规律可循”的。这样我们便可以引出对称式的概念。

定义 1.2.1: 对称式

对于一个 n 元多项式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$，若对于数 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个排列 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$，都有

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则称 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为对称式。

“对称”体现在字母地位平等，没有哪个字母是特殊的。只要式子中包含某个由特定字母组成的项（例如 a^2b），那么它一定包含由所有其他字母以同样的方式组成的项（即 $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$）。

这样我们就认识了对称式的概念，这样当读者听到别人说“对称式”的时候，不会至于一脸懵逼，或者一边点头，假装听懂，然后用直觉去理解这个概念（这样的情况长期发展下去，是不利于学习数学的）。当然，读者也许会发现，像“$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$”这样的式子其实比较长，占用了较大的空间，也显得不够简洁。因此我们不妨规定以下记号：

定义 1.2.2: 循环和

性质 1.2.1: 对称式的性质

（1）基本对称多项式的基础性：

那么下面我们乘胜追击，再来看一组式子：

例题 1.2.2

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$a^2b+b^2c+c^2a$$

$$a^3b+b^3c+c^3a$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

解 1.2.2. 和刚才的对称式不同，如果我们这里调换某两个字母的位置，那么结果也会发生变化。比如 $a^2b+b^2c+c^2a$ 中，如果我们把 a 和 b 调换位置，那么结果也会发生变化，比如说新出现了 b^2a 项，这是原来所没有的。

但是读者会发现，这个式子看上去也是有规律可循的，比如 $a^3b+b^3c+c^3a$ 中，a^3 项出现了，那不用猜也知道 b^3 和 c^3 也会在其它部分出现，而且出现的次数相同，但是和上文的规律不一样，a^3 后面只会跟着 b，却没有 c，即没有 a^2c 项。

例题 1.2.3

将 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 进行展开，并尽己所能地保证结果的每个部分都是由 a,b,c 三个元同时出现且地位相同的式子：

解 1.2.3. 先展开，再重组：

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&=(b^2+ac+ab+bc)(a+c)\\&=ab^2+b^2c+a^2c+ac^2+a^2b+abc+abc+bc^2\\&=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\end{aligned}$$

最后为什么

定理 1.2.1

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

第二章 导数与微分

2.1 导数的定义

例题 2.1.1

已知 $x, y > 0$，且 $x^2 + 9y^2 = 12$，则 $\dfrac{x+2}{y+1} - 3x$ 的最小值为__________.

解 2.1.1.

例题 2.1.2

（单选）数列 a_n 各项为正整数且递增，$a_{n+2} = C_{a_{n+1}}^{a_n}$，则（　　）

A.$a_n < a_{n-1} + 1$　B.a_1, a_2, a_3 可能成等比数列

C.$a_3 a_4 < a_5$　　D.a_3, a_4, a_5 可能成等比数列

解 2.1.2. 由于 a_n 递增，则 A 显然错误；下面考虑选项 BD：

$$a_n a_{n+2} = a_n C_{a_{n+1}}^{a_n} = a_{n+1} C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} = a_{n+1}^2 \Rightarrow a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}$$

当 $a_n = 1$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{0} = 1 = a_n$，与数列递增矛盾；
当 $a_n = 2$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{1} = a_{n+1} - 1 < a_{n+1}$，矛盾；
当 $a_n > 2$ 时，易得 $a_{n+1} - 1 > 2$，代入表达式得到

$$a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} \geq C_{a_{n+1}-1}^{2} = \frac{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}{2}$$

解方程发现无整数解，而且由于 $C_{a_{n+1}-1}^{1} = a_{n+1} - 1$ 是小于 a_{n+1} 的最大整数，且有

$$C_{a_{n+1}-1}^{1} < C_{a_{n+1}-1}^{2}，\ C_{a_{n+1}-1}^{2} \neq a_{n+1}$$

只可能是 $C_{a_{n+1}-1}^{2} > a_{n+1}$.
雪上加霜的是，$C_{a_{n+1}-1}^{2}$ 和 $C_{a_{n+1}-1}^{1}$ 中间没有数可以等于 $C_{a_{n+1}-1}^{m}$，所以 BD 错误；
考虑 C，易得 $a_1 \neq 1, a_2 \geq 4, a_3 \geq 6, a_4 = C_{a_3}^{a_2} > 2a_3 + 1$，由

$$a_5 = C_{a_4}^{a_3} > a_3 a_4 \Rightarrow a_3^2 < C_{a_4-1}^{a_3-1} < C_{2a_3}^{a_3-1}$$

转化为 $a_3^3 + a_3 < C_{2a_3}^{a_3}$ 这是显然成立的，故本题目选 C

例题 2.1.3

已知 $\triangle ABC$ 中，$A=3B=9C$，则 $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A=$_____.

解 2.1.3. 解得 $A=\frac{9\pi}{13},B=\frac{3\pi}{13},C=\frac{\pi}{13}$ 考虑积化和差：

$$\begin{aligned}
&\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\\
&=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B)+\cos(B+C)+\cos(B-C)+\cos(A+C)+\cos(A+C))\\
&=\frac{1}{2}(\cos\frac{12\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13})\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\sin\frac{\pi}{13}(\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13})\\
&=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{13}}(\sin\frac{\pi}{13}-\sin\frac{3\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}-\sin\frac{5\pi}{13}+\sin\frac{5\pi}{13}-\sin\frac{7\pi}{13}\\
&\qquad+\sin\frac{7\pi}{13}-\sin\frac{9\pi}{13}+\sin\frac{9\pi}{13}-\sin\frac{11\pi}{13}+\sin\frac{11\pi}{13}-\sin\frac{13\pi}{13})\\
&=-\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

定理 2.1.1: 阿贝尔求和

设 B_n 是数列 b_n 的前 n 项和，当 $n\geq 2$ 时，有:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_nB_n-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B_n$$

证明 2.1.1. 当 $n\geq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=&a_1b_1+\sum_{i=2}^{n}a_i(B_i-B_{i-1})\\
=&a_1b_1+\sum_{i=2}^{n}a_iB_i-\sum_{i=2}^{n}a_iB_{i-1}\\
=&\sum_{i=1}^{n}a_iB_i-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i+1}B_i\\
=&a_nB_n-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)B_n
\end{aligned}$$

例题 2.1.4:（来自 Fiddle）

设数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数，且当 $n \geq 2$ 时，$a_{n+1}+a_{n-1}=|a_n|$. 证明：

（1）存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m \leq 0$

（2）存在正整数 m 使得 $a_m \leq 0$，$a_{m+1} \leq 0$

（3）$a_n = a_{n+9}$

解 2.1.4. (1) 当 $n \geq 2$ 时，由

$$\begin{cases} a_{n+1}+a_{n-1}=|a_n| \\ a_{n+2}+a_n=|a_{n+1}| \end{cases} \Rightarrow a_{n+2}+a_{n+1}+a_n+a_{n-1}=|a_n|+|a_{n+1}|$$

$$\Rightarrow a_{n+2}+a_{n-1}=|a_n|-a_n+|a_{n+1}|-a_{n+1} \geq 0$$

若 $n \geq 2$ 时 $a_n > 0$, 上式化为 $a_{n+2}+a_{n-1}=0$，矛盾，故存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m \leq 0$

(2) 已证存在大于 1 的整数 m 使得 $a_m \leq 0$，现假设不存在正整数 k 使得 $a_k \leq 0$, $a_{k+1} \leq 0$，则不妨设 a_m 为首个小于等于 0 的项，由假设得 $a_1, a_2, ...a_{m-1} > 0, a_m \leq 0, a_{m+1} > 0$，可以通过不断消元推出矛盾：

$$a_{m+1}+a_{m-1}=|a_m|=-a_m \Rightarrow a_{m+1}=-a_m-a_{m-1}$$

$$a_{m+2}+a_m=|a_{m+1}|=a_{m+1} \Rightarrow a_{m+2}=a_{m+1}-a_m > 0+0=0$$

$$a_{m+3}+a_{m+1}=|a_{m+2}|=a_{m+2} \Rightarrow a_{m+3}=a_{m+2}-a_{m+1}=a_{m+1}-a_m-a_{m+1}=-a_m \geq 0$$

$$a_{m+4}+a_{m+2}=|a_{m+3}|=-a_m \Rightarrow a_{m+4}=-a_m-a_{m+2}=-a_{m+1} < 0$$

$$a_{m+5}+a_{m+3}=|a_{m+4}|=a_{m+1} \Rightarrow a_{m+5}=a_{m+1}-a_{m+3}=a_m+a_{m+1}=-a_{m-1} < 0$$

由 $a_{m+4} < 0, a_{m+5} < 0$ 知矛盾，故存在正整数 k 使得 $a_k \leq 0$, $a_{k+1} \leq 0$.

(3) 抓住上面第二小问的提示就可以得到：

$$a_{m+6}+a_{m+4}=|a_{m+5}|=a_{m-1} \Rightarrow a_{m+6}=a_{m-1}-a_{m+4}=a_{m-1}+a_{m+1}=-a_m$$

$$a_{m+7}+a_{m+5}=|a_{m+6}|=-a_m \Rightarrow a_{m+7}=-a_m-a_{m+5}=a_{m-1}-a_m$$

$$a_{m+8}+a_{m+6}=|a_{m+7}|=a_{m-1}-a_m \Rightarrow a_{m+8}=a_{m-1}-a_m-a_{m+6}=a_{m-1}$$

$$a_{m+9}+a_{m+7}=|a_{m+8}|=a_{m-1} \Rightarrow a_{m+9}=a_{m-1}-a_{m+7}=a_{m-1}-a_{m-1}+a_m=a_m$$

所以设 $T=9$，有

$$\begin{cases} a_m = a_{m+nT}, n \in N \\ a_{m-1} = a_{m-1+nT}, n \in N \end{cases}$$

然后由于

$$a_{m-2+nT}=|a_{m-1+nT}|-a_{m+nT}=|a_{m-1}|-a_m=a_{m-2}$$

以此类推，则有

$$a_k = a_{k+nT}, k \in N_+, k \leq m$$

取合适的 m 使得 m 大于 T，则数列 $\{a_n\}$ 为周期数列，其中一个周期为 9