



华南理工大学
South China University of Technology

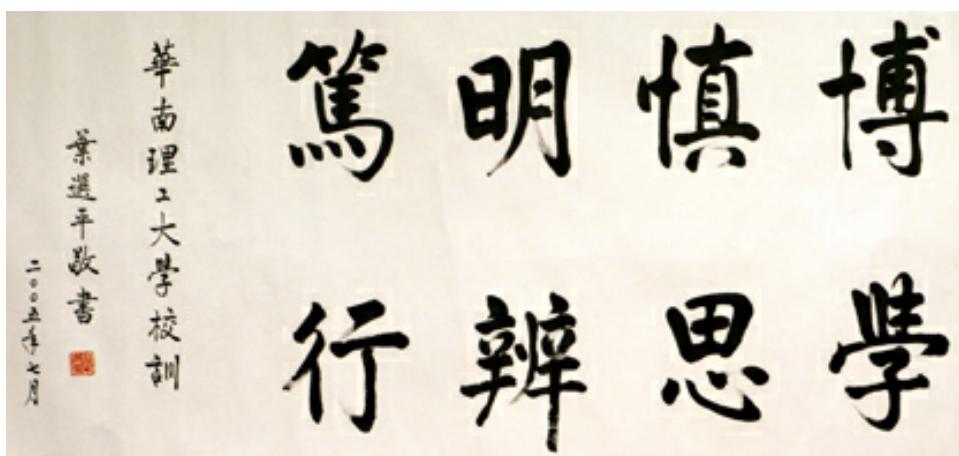
简单导数

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

参考：群友

日期：2026年2月16日



前言

收录简单导数群题，部分 CMC 非数类题型。

夏同
于华南理工大学
2026 年 2 月 16 日

目录

前言	I
第一章 微分中值定理	1
1.1 插值法	1
第二章 微分中值定理：构造函数法	19
2.1 一阶构造类	19
2.2 二阶构造类	22
2.2.1 视为关于 f' 的一阶构造类	22
2.2.2 难度在解微分方程的一类	24
2.3 多中值点问题	34
第三章 导数题	39
3.1 偏移题	39
第四章 插入中间函数	47

定义索引

定理索引

1.1.1 拉格朗日插值积分余项	13
----------------------------	----

例题索引

1.1.1 K 值法	2
1.1.2	3
1.1.3	4
1.1.4	5
1.1.5	6
1.1.6	7
1.1.7	8
1.1.8	8
1.1.9	9
1.1.10	10
1.1.11	11
1.1.12	12
1.1.13	14
1.1.14	15
1.1.15	16
1.1.16	17

1.1.17	18
2.1.1	19
2.1.2	20
2.1.3	21
2.1.4	22
2.2.1	22
2.2.2	23
2.2.3	24
2.2.4	24
2.2.5	27
2.2.6	28
2.2.7	29
2.2.8	30
2.2.9	31
2.2.10	32
2.2.11	33
2.3.1	34
2.3.2	35
2.3.3	36
2.3.4	37
2.3.5	38
3.1.1	39
3.1.2 来自群友“港”	41
3.1.3	43
3.1.4	44
3.1.5 邪帝导数题	45
3.1.6 远古偏移题, 来自陈语梦	45
3.1.7 来自 amare Donata Caesia	46
3.1.8	46

第一章 微分中值定理

本章介绍微分中值定理的各种题型，主要介绍以埃米特插值为本质的高观点做题思路，同时以常数 K 值法为考场手段，辅以罗尔定理的多次使用，进行证明。首先介绍埃米特插值的基本形式和 K 值法的证明思路。

题目会给出基本函数 $f(x)$ 的某些性质，比如 f 的光滑性如何， f 在某些点的函数值和导数值等，然后是要证明的结论，我们通常要先构造一个插值多项式 $p(x)$ ，使得 $p(x)$ 尽可能地拟合 $f(x)$ 的行为，然后构造 $G(x) = f(x) - p(x)$ ，多次循环地利用罗尔中值定理。

先数一数原题给了多少条件，然后数一数要拟合什么点，拟合到多少阶，把所有点的要拟合阶数（包括 0 阶）相加，减去 1，就是插值多项式的次数，余项比插值多项式的次数高 1 阶。然后根据余项的阶数和原函数的光滑性条件，判断是属于什么类型。

1.1 插值法

1.1.1 例题: K 值法

$f(x) \in C^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\xi)$$

解 1.1.1. 取 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$, 则 $F(x) \in C^3[a, b]$, 且 $F'(x) = f(x)$, 所以要证明的结论等价于证明: $F(x) \in C^3[a, b]$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2 F'''(\xi)}{24}$$

插 $F(a), F(b), F\left(\frac{a+b}{2}\right), F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 一共 4 个条件, 余项 4 阶, 插值多项式 3 次, 导数不够, 属于对 $F''' = p'''$ 类型, 先写出拉格朗日插值部分, 然后根据本题最高只需拟合到 1 阶导数, 而且只有 1 个点才需要拟合到 1 阶导数, 待定 $1-1=0$ 阶多项式 r :

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} F(a) + \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-a)}{(b - \frac{a+b}{2})(b-a)} F(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)} F\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\quad + c(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

这个式子自动满足 $p(a) = p(b) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 求导数并令 $p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{F(a)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} \left(x - \frac{a+b}{2} + x - b \right) + \frac{F(b)}{(b - \frac{a+b}{2})(b-a)} \left(x - \frac{a+b}{2} + x - a \right) \\ &\quad + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)} ((x-a)+(x-b)) \\ &\quad + c(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-\frac{a+b}{2}}\right) \\ &= \frac{F(a)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} \left(x - \frac{a+b}{2} + x - b \right) + \frac{F(b)}{(b - \frac{a+b}{2})(b-a)} \left(x - \frac{a+b}{2} + x - a \right) \\ &\quad + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)} (x-a+x-b) \\ &\quad + c \left((x-a)(x-b) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-a) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) \right) \\ p'\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{F(a)}{a-b} + \frac{F(b)}{b-a} - \frac{c}{4}(b-a)^2 = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{4\left(\frac{F(b)-F(a)}{b-a} - F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(b-a)^2} \end{aligned}$$

构造 $G(x) = f(x) - p(x)$, 则 $G(a) = G(b) = G\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 存在 $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得 $G'(\xi_2) = 0$, 加上 $G'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G''(\xi_3) = 0$, 存在 $\xi_4 \in (\frac{a+b}{2}, \xi_2)$ 使得 $G''(\xi_4) = 0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (a, b)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$, 所以 $F'''(\xi) = p'''(\xi) = 6c$, 即:

$$F'''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3} (F(b) - F(a)) - \frac{24}{(b-a)^2} F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

1.1.2 例题：

设 $f \in C^1[a, b] \cap D^3(a, b)$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(a) + f'(b)}{2} - \frac{f'''(\xi)}{12}(b - a)^2$$

解 1.1.2. 插 $f(a), f(b), f'(a), f'(b)$, 则插值多项式 3 次, 余项 4 阶, 但是条件只到 3 阶, 属于 $f''' = p'''$ 类型, 插值:

$$p(x) = \frac{x - b}{a - b}f(a) + \frac{x - a}{b - a}f(b) + (kx + m)(x - a)(x - b)$$

此时自动保证 $p(a) = f(a), p(b) = f(b)$, 参数 k, m 待定, 以期望 $p'(a) = f'(a), p'(b) = f'(b)$, 解出 k, m .

$$\begin{aligned} p'(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + (ka + m)(a - b) = f'(a) \\ p'(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + (kb + m)(a - b) = f'(b) \end{aligned}$$

相减得到

$$k = \frac{f'(b) + f'(a)}{(b - a)^2} - \frac{2(f(b) - f(a))}{(b - a)^3}$$

此时可以继续解方程得到 m , 但是没有必要了, 我们假装 m 已知, 设而不求就可以了设 $G(x) = f(x) - p(x)$, 则 $G(a) = G(b) = 0, G'(a) = G'(b) = 0$, 所以由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, b)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 ξ_2, ξ_3 使得 $G''(\xi_2) = 0, G''(\xi_3) = 0$, 最后由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$, 所以

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 6k = \frac{6(f'(b) + f'(a))}{(b - a)^2} - \frac{12(f(b) - f(a))}{(b - a)^3}$$

1.1.3 例题：

设 $f \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$, 满足 $f(0) = f(2) = 0, |f'(x)| \leq M, \forall x \in (0, 2)$, 证明

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq M$$

解 1.1.3. 插 $f(0), f(2)$, 插值多项式 1 次 (仅拉格朗日插值式, 用不到导数修正), 余项 2 阶, 导数不够, 属于靠近哪边对哪边插模型。所以在 $[0, 1]$ 上插 $f(0)$, 在 $[1, 2]$ 上插 $f(2)$, 则写出两段插值式。

当 $x \in [0, 1]$ 时, 对 $f(x)$ 的插值为:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(\xi(x))}{1!}(x - 0) = f'(\xi(x))x$$

这是拉格朗日中值定理的直接应用, 所以不用考场翻译。得到

$$|f(x)| \leq |f'(\theta(x))|x \leq Mx$$

当 $x \in [1, 2]$ 时, 对 $f(x)$ 的插值为:

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(\eta(x))}{1!}(x - 2) = f'(\eta(x))(x - 2)$$

同理, 得到

$$|f(x)| \leq |f'(\eta(x))|(x - 2) \leq M(2 - x)$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 f(x) dx \right| &\leq \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 Mx dx + \int_1^2 M(2 - x) dx = M \end{aligned}$$

1.1.4 例题：

设 $f \in D^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $|f''(x)| \leq M$, 证明 $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}$

解 1.1.4. 要拟合 $f(0), f(1)$ 一共两个插值条件, 无导数条件需要拟合, 所以插值多项式为一次, 也不用待定多项式 r , 余项到了 2 阶导数, 符合题目所给条件, 所以根据埃米特插值, 存在 $\theta(x) \in (0, 1)$ 使得:

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1), \forall x \in [0, 1]$$

这个结论可以用 k 值法来证明, 由

$$f(x) - Kx(x-1) = 0$$

的条件 (其中 K 与 x 有关), 设

$$F(y) = f(y) - Ky(y-1)$$

则 $F(0) = F(1) = F(x) = 0$, 罗尔得到 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, 所以存在 $\theta(x) \in (0, 1)$ 使得 $F''(\theta(x)) = 0$ 。对 $F(x)$ 求二阶导数得到

$$f''(\theta(x)) - 2K = 0 \Rightarrow K = \frac{f''(\theta(x))}{2}$$

所以

$$f(x) = \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1) dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{f''(\theta(x))}{2} \right| |x(x-1)| dx \\ &\leq \frac{M}{2} \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{M}{12} \end{aligned}$$

1.1.5 例题：

设 $f \in C^3[0, 2]$ 满足

$$f(0) = f'(0) = 0, \int_0^2 f(x)dx = 8 \int_0^1 f(x)dx$$

求证存在 $\theta \in (0, 2)$ 使得 $f'''(\theta) = 0$

解 1.1.5. 套路地，设 $F(x) = \int_0^x f(y)dy, F(x) \in C^4[0, 2], F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$ ，且 $F(2) = 8F(1)$ ，这里我们使用插值法，就是找一个多项式去尽可能的拟合 f 的行为。注意到 $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$ ，所以可以考虑插值多项式为 $p(x) = x^3(ax + b)$ ，代入 $F(2) = 8F(1)$ 得到 $a = 0$ ，所以 $p(x) = bx^3$ ，再由 $p(1) = F(1)$ 得到 $b = F(1)$ ，所以

$$p(x) = F(1)x^3$$

于是构造出

$$G(x) = F(x) - F(1)x^3$$

这个 $G(x)$ 满足

$$G(0) = G(1) = G(2) = 0, G'(0) = 0, G''(0) = 0$$

所以由罗尔中值定理，存在 $\xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in (1, 2)$ ，使得 $G'(\xi_1) = G'(xi_2) = 0$ ，搭配上 $G'(0) = 0$ ，所以又有罗尔中值定理，得知存在 θ_1, θ_2 ，使得 $G''(\theta_1) = G''(\theta_2) = 0$ ，同样的，搭配上 $G''(0) = 0$ ，又有罗尔中值定理，得知存在 $\eta_1 \in (0, 1), \eta_2 \in (1, 2)$ 使得

$$G'''(\eta_1) = G'''(\eta_2) = 0$$

所以由罗尔中值定理，得到存在 $\theta \in (0, 2)$ 使得

$$G''''(\theta) = 0$$

而求导易得

$$G''''(x) = f'''(x) - p'''(x) = 0 \Rightarrow f'''(\theta) = 0$$

1.1.6 例题：

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导，且 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{2}$, $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{3}{2}$, 求证在 $(0, 1)$ 存在 ξ 使 $f'(\xi) = 3$.

解 1.1.6. 套路式地，设

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, G(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

则有

$$F(0) = G(0) = 0, F(1) = \frac{5}{2}, G(1) = \frac{3}{2}$$

而问题要证明的结论似乎仅与 $f(x)$ (以及其导函数, 原函数) 有关, 所以要从 $G(x)$ 中分出 $F(x)$ 或者 $f(x)$ 来, 考虑分部积分:

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x dF(x) = xF(x)|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx \Rightarrow \int_0^1 F(x)dx = 1$$

则问题转化为 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上二阶可导, 且 $F(0) = 0, F(1) = \frac{5}{2}, \int_0^1 F(x)dx = 1$, 求证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $F''(\xi) = 3$ 。再取 $g(x) = \int_0^x F(x)dx$, 则 $g'(0) = 0, g'(1) = \frac{5}{2}$, 且 $g(0) = 0, g(1) = 1$, 则问题转化为 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上三阶可导, 求证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g'''(\xi) = 3$ 。4 个条件, 余项 4 阶, 插值多项式为 3 次, 导数 3 阶不够, 属于 $g''' = p'''$ 类型, 构造插值多项式:

$$p(x) = \frac{x-0}{1-0}g(1) + \frac{x-1}{0-1}g(0) + (kx+m)x(x-1) = x + (kx+m)x(x-1)$$

求导并令 $p'(0) = g'(0), p'(1) = g'(1)$:

$$p'(x) = 1 + (kx+m)(2x-1) + kx(x-1)$$

$$p'(0) = 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$p'(1) = 1 + (k+1)(1) + 0k = 1 + k + 1 = 2 + k = \frac{5}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

构造 $W(x) = g(x) - p(x)$, 则 $W(0) = W(1) = W'(0) = W'(1) = 0$, 且 $W(x)$ 在 $(0, 1)$ 上三阶可导, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, 1)$ 使得 $W'(\xi_1) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ 使得 $W''(\xi_2) = 0$, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, 1)$ 使得 $W''(\xi_3) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_2, \xi_3) \subset (0, 1)$ 使得 $W'''(\xi) = 0$, 所以

$$g'''(\xi) = p'''(\xi) = 6k = 3$$

1.1.7 例题：

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上二次可微, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$$

解 1.1.7. 拟合 $f(a), f(b), f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 设

$$G(x) = f(x) - \left[\frac{(x - \frac{a+b}{2})(x - b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a - b)} f(a) + \frac{(x - a)(x - \frac{a+b}{2})}{(b - a)(b - \frac{a+b}{2})} f(b) + \frac{(x - a)(x - b)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]$$

则 $G(a) = G(b) = G\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 存在 $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得 $G'(\xi_2) = 0$, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ 使得 $G''(\xi) = 0$, 所以 $f''(\xi) = p''(\xi)$, 求导:

$$p''(x) = 4 \frac{f(a)}{(b-a)^2} + 4 \frac{f(b)}{(b-a)^2} - 8 \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2} = \frac{4}{(b-a)^2} \left(f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

所以

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$$

1.1.8 例题：

设 $f \in C^3[-1, 1]$ 满足 $f(-1) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 1$, 证明存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使得 $f'''(\xi) = 3$

解 1.1.8. 插 $f(-1), f(1), f(0), f'(0)$, 则插值多项式为三次, 余项四阶, 导数三阶不够, 属于 $f''' = p'''$ 类型, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} f(1) + \frac{(x-1)(x-0)}{(-1-1)(-1-0)} f(-1) + \frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)} f(0) + cx(x-1)(x+1) \\ &= \frac{x(x+1)}{2} - (x^2 - 1)f(0) + c(x-1)(x+1)x \\ p'(x) &= \frac{2x+1}{2} - 2xf(0) + c((x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1)) \\ p'(0) &= \frac{1}{2} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

构造 $G(x) = f(x) - p(x)$, 则 $G(-1) = G(0) = G(1) = 0, G'(0) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (-1, 0)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 存在 $\xi_2 \in (0, 1)$ 使得 $G'(\xi_2) = 0$, 加上 $G'(0) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, 0) \subset (-1, 1)$ 使得 $G''(\xi_3) = 0$, 存在 $\xi_4 \in (0, \xi_2) \subset (-1, 1)$ 使得 $G''(\xi_4) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (-1, 1)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$, 所以

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 6c = 3$$

1.1.9 例题：

$f(x) \in C^4[0, 1]$, 三次多项式 $p(x)$ 满足 $p(0) = f(0), p(1) = f(1), p'(0) = f'(0), p'(1) = f'(1)$,

证明

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\}$$

解 1.1.9. 构造 $G(x) = f(x) - p(x)$, 则 $G(0) = G(1) = 0, G'(0) = G'(1) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, 1)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ 使得 $G''(\xi_2) = 0$, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, 1)$ 使得 $G''(\xi_3) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_2, \xi_3) \subset (0, 1)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$, 现在因为罗尔定理的迭代次数受零点个数限制。要得到四阶导数的信息, 需引入额外零点。即证

$$-\frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\} \leq G(x) \leq \frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\}$$

使用 K 值法解决, 假设存在与 x 有关的量 K , 使得 $G(x) = K \frac{x^2(x-1)^2}{4!}$, 再设函数 $H(y) = G(y) - K \frac{y^2(y-1)^2}{4!}$, 则 $H(0) = H(1) = H(x) = 0, H'(0) = H'(1) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, x), \xi_2 \in (x, 1)$ 使得 $H'(\xi_1) = H'(\xi_2) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_3 \in (0, \xi_1), \xi_4 \in (\xi_1, \xi_2), \xi_5 \in (\xi_2, 1)$ 使得 $H''(\xi_3) = H''(\xi_4) = H''(\xi_5) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_6 \in (\xi_3, \xi_4), \xi_7 \in (\xi_4, \xi_5)$ 使得 $H'''(\xi_6) = H'''(\xi_7) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_6, \xi_7) \subset (0, 1)$ 使得 $H^{(4)}(\xi) = 0$, 所以

$$f''''(\xi) - p''''(\xi) = f''''(\xi) - 0 = f''''(\xi) = G''''(\xi) = K \frac{d^4}{dy^4} \left(\frac{y^2(y-1)^2}{4!} \right)$$

而且 $\frac{y^2(y-1)^2}{4!}$ 求 4 阶导数的值是 1, 所以 $K = f''''(\xi)$, 所以

$$f(x) - p(x) = \frac{f''''(\xi)x^2(x-1)^2}{4!} \leq \frac{1}{384} f''''(\xi)$$

取绝对值得到

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{384} \max_{x \in [0,1]} \{f''''(x)\}$$

1.1.10 例题：

设 $f \in C^4[0, 1]$, 且 $\int_0^1 f(x)dx + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx$, 求证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f''''(\xi) = 0$.

解 1.1.10. 取原函数 $F(x)$, 则 $F(x) \in C^5[0, 1]$, 且 $F'(x) = f(x)$,

$$F(1) - F(0) + 3F'\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \left(F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) \right)$$

插 $F(0), F(1), F\left(\frac{1}{2}\right), F'\left(\frac{1}{2}\right), F\left(\frac{3}{4}\right), F\left(\frac{1}{4}\right)$ 一共 6 个条件, 余项 6 阶, 插值多项式为 5 次, 导数 5 阶不够, 属于 $F^{(5)} = p^{(5)}$ 类型, 插值:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})(x - 1)(x - \frac{1}{2})}{(0 - \frac{3}{4})(0 - \frac{1}{4})(0 - 1)(0 - \frac{1}{2})} F(0) + \frac{(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(1 - \frac{3}{4})(1 - \frac{1}{4})(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})} F(1) \\ &\quad + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - \frac{3}{4})(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})} F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{2})}{(\frac{3}{4} - 0)(\frac{3}{4} - 1)(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})(\frac{3}{4} - \frac{1}{4})} F\left(\frac{3}{4}\right) \\ &\quad + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{4} - 0)(\frac{1}{4} - 1)(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})} F\left(\frac{1}{4}\right) \\ s(x) &= c(x - 0)(x - 1)(x - \frac{3}{4})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}), s'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64} \\ p(x) &= L(x) + s(x) \end{aligned}$$

此时

$$p(0) = F(0), p(1) = F(1), p\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right), p'\left(\frac{1}{2}\right) = F'\left(\frac{1}{2}\right), p\left(\frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right), p\left(\frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right)$$

求导并令 $p'\left(\frac{1}{2}\right) = F'\left(\frac{1}{2}\right)$, 解得

$$c = 64 \left[F'\left(\frac{1}{2}\right) - L'\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

构造 $G(x) = F(x) - p(x)$, 则 $G(0) = G\left(\frac{1}{4}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{3}{4}\right) = G(1) = 0$, 罗尔中值定理得到 $G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = G\left(\frac{1}{2}\right) = G'(\xi_3) = G'(\xi_4) = 0$, 罗尔中值定理得到 $G''(\xi_5) = G''(\xi_6) = G''(\xi_7) = G''(\xi_8) = 0$, 罗尔中值定理得到 $G'''(\xi_9) = G'''(\xi_{10}) = G'''(\xi_{11}) = 0$, 罗尔中值定理得到 $G''''(\xi_{12}) = G''''(\xi_{13}) = 0$, 罗尔中值定理得到存在 $\xi \in (\xi_{12}, \xi_{13}) \subset (0, 1)$ 使得

$$G^{(5)}(\xi) = 0$$

所以

$$F^{(5)}(\xi) = p^{(5)}(\xi)$$

又因为 $p(x)$ 为五次多项式, 所以 $p^{(5)}(x) \equiv 0$, 所以

$$f''''(\xi) = F^{(5)}(\xi) = p^{(5)}(\xi) = 0$$

1.1.11 例题：

设 $f \in C^2[0, 1]$, 满足 $f(0) = f(1) = 0$, $\min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$, 证明 $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$

解 1.1.11. 为了利用最小值条件, 假设 $c \in (0, 1)$ 使得 $f(c) = -1$, 则插值条件为 $f(0) = f(1) = 0$, $f(c) = -1$, $f'(c) = 0$, 插值式 3 次, 余项 4 阶, 导数 4 阶差 2 阶, 属于靠近谁插谁的类型。

在区间 $[0, c]$ 上插 $f(0), f(c), f'(c)$, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{x-c}{0-c}f(0) + \frac{x-0}{c-0}f(c) + k_1(x-0)(x-c) = -\frac{x}{c} + k_1x(x-c) \\ p'_1(x) &= -\frac{1}{c} + k_1(2x-c) \quad p'_1(c) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

构造 $G_1(x) = f(x) - p_1(x)$, 则 $G_1(0) = G_1(c) = 0$, $G'_1(c) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, c)$ 使得 $G'_1(\xi_1) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_2 \in (\xi_1, c)$ 使得 $G''_1(\xi_2) = 0$, 所以 $f''(\xi_2) = p''_1(\xi_2) = \frac{2}{c^2}$.

在区间 $[c, 1]$ 上插 $f(1), f(c), f'(c)$, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{x-c}{1-c}f(1) + \frac{x-1}{c-1}f(c) + k_2(x-1)(x-c) = -\frac{x-1}{1-c} + k_2(x-1)(x-c) \\ p'_2(x) &= -\frac{1}{1-c} + k_2(2x-1-c) \quad p'_2(c) = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{(1-c)^2} \end{aligned}$$

构造 $G_2(x) = f(x) - p_2(x)$, 则 $G_2(1) = G_2(c) = 0$, $G'_2(c) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_3 \in (c, 1)$ 使得 $G'_2(\xi_3) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_4 \in (c, \xi_3)$ 使得 $G''_2(\xi_4) = 0$, 所以 $f''(\xi_4) = p''_2(\xi_4) = \frac{2}{(1-c)^2}$.

综上所述, 在区间 $(0, c)$ 和 $(c, 1)$ 上分别找到 ξ_2, ξ_4 使得 $f''(\xi_2) = \frac{2}{c^2}, f''(\xi_4) = \frac{2}{(1-c)^2}$. 下面说明 $\max \left\{ \frac{2}{c^2}, \frac{2}{(1-c)^2} \right\} \geq 8$. 分类讨论即可: 当 $c \in (0, \frac{1}{2}]$ 时, $\frac{2}{c^2} \geq 8$; 当 $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $\frac{2}{(1-c)^2} \geq 8$. 即证 $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$

1.1.12 例题：

设 $f \in D^2[-a, a]$, $a > 0$ 满足

$$f(-a) = -1, f(a) = 1, f'(-a) = f'(a) = 0, |f''(x)| \leq 1$$

证明 (1) $a \geq \sqrt{2}$ (2) $a > \sqrt{2}$.

解 1.1.12. 微分条件不足以插 4 个点, 靠近谁插谁模型. 但是没有其他约束条件, 要找一个公共点能同时出现在两边插, 只能是带入 $x = 0$.

在区间 $[-a, 0]$ 上插 $f(-a), f(0), f'(-a)$, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{x-0}{-a-0}f(-a) + \frac{x+a}{0+a}f(0) + k_1(x+a)x = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} + 1\right)f(0) + k_1(x+a)x \\ p'_1(x) &= \frac{1+f(0)}{a} + k_1(2x+a) \quad p'_1(-a) = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1+f(0)}{a^2} \\ \Rightarrow p_1(x) &= \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} + 1\right)f(0) + \frac{1+f(0)}{a^2}(x+a)x \end{aligned}$$

构造 $G_1(x) = f(x) - p_1(x)$, 则 $G_1(-a) = G_1(0) = 0, G'_1(-a) = 0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi_1 \in (-a, 0)$ 使得 $G'_1(\xi_1) = 0$, 再由罗尔定理, 存在 $\xi_2 \in (-a, \xi_1)$ 使得 $G''_1(\xi_2) = 0$, 所以 $f''(\xi_2) = p''_1(\xi_2) = \frac{2+2f(0)}{a^2}$.

在区间 $[0, a]$ 上插 $f(a), f(0), f'(a)$, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{x-0}{a-0}f(a) + \frac{x-a}{0-a}f(0) + k_2(x-a)x = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} - 1\right)f(0) + k_2(x-a)x \\ p'_2(x) &= \frac{1+f(0)}{a} + k_2(2x-a) \quad p'_2(a) = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{1+f(0)}{a^2} \\ \Rightarrow p_2(x) &= \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a} - 1\right)f(0) + \frac{1+f(0)}{a^2}(x-a)x \end{aligned}$$

构造 $G_2(x) = f(x) - p_2(x)$, 则 $G_2(a) = G_2(0) = 0, G'_2(a) = 0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi_3 \in (0, a)$ 使得 $G'_2(\xi_3) = 0$, 再由罗尔定理, 存在 $\xi_4 \in (\xi_3, a)$ 使得 $G''_2(\xi_4) = 0$, 所以 $f''(\xi_4) = p''_2(\xi_4) = \frac{2+2f(0)}{a^2}$.

由条件 $|f''(x)| \leq 1$ 得

$$|1+f(0)| \leq \frac{a^2}{2}, |f(0)-1| \leq \frac{a^2}{2} \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{2} \leq f(0) \leq -1 + \frac{a^2}{2}$$

两式同时成立要求 $1 - \frac{a^2}{2} \leq -1 + \frac{a^2}{2}$, 解得 $a^2 \geq 2$, 即 $a \geq \sqrt{2}$.

若 $a = \sqrt{2}$, 则 $0 \leq f(0) \leq 0$, 故 $f(0) = 0$, 且 $f''(\xi_2) = 1, f''(\xi_4) = -1$. 考虑积分表示:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(-a) + f'(-a)(x+a) + \int_{-a}^0 (0-t)f''(t)dt = -1 - \int_{-a}^0 tf''(t)dt \\ f(0) &= f(a) + f'(a)(0-a) + \int_a^0 (0-t)f''(t)dt = 1 - \int_0^a tf''(t)dt. \end{aligned}$$

当 $t \leq 0$ 时, 由 $f''(t) \leq 1$ 得 $tf''(t) \geq t$ (因 $t \leq 0$), 故

$$\int_{-a}^0 tf''(t)dt \geq \int_{-a}^0 t dt = -\frac{a^2}{2} = -1,$$

从而 $f(0) \leq -1 - (-1) = 0$, 等号成立仅当在 $[-a, 0]$ 上 $f''(t) \equiv 1$ 。类似地, 当 $t \geq 0$ 时, 由 $f''(t) \geq -1$ 得 $tf''(t) \geq -t$, 故

$$\int_0^a tf''(t) dt \geq - \int_0^a t dt = -\frac{a^2}{2} = -1,$$

从而 $f(0) \leq 1 - (-1) = 2$, 此上界非紧。改用 $f''(t) \leq 1$ 得 $tf''(t) \leq t$, 故

$$\int_0^a tf''(t) dt \leq \int_0^a t dt = \frac{a^2}{2} = 1,$$

从而 $f(0) \geq 1 - 1 = 0$, 等号成立仅当在 $[0, a]$ 上 $f''(t) \equiv 1$ 。于是 $f(0) = 0$ 要求 $f'' \equiv 1$ 于 $[-a, 0]$ 和 $[0, a]$, 这与 $f''(\xi_4) = -1$ 矛盾。故 $a = \sqrt{2}$ 不可能。

综上, 必有 $a > \sqrt{2}$ 。

1.1.1 定理: 拉格朗日插值积分余项

设 $f \in C^2[a, b]$, 且 f'' 在 $[a, b]$ 上可积, 则成立

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + \int_a^b f''(y)k(x, y)dy$$

其中

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(y-b), & b \geq y \geq x \geq a \\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b \geq x \geq y \geq a \end{cases}$$

考虑

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \right)$$

那么 $g(a) = g(b) = 0, g'' = f''$, 拆分积分余项即可发现:

$$\begin{aligned} \int_a^b g''(y) k(x, y) dy &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x g''(y)(a-y) dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b g''(y)(y-b) dy \\ &= \frac{b-x}{b-a} \left[(a-x)g'(x) + \int_a^x g'(y) dy \right] + \frac{x-a}{b-a} \left[-g'(x)(x-b) - \int_x^b g'(y) dy \right] \\ &= \frac{b-x}{b-a} [(a-x)g'(x) + g(x)] + \frac{x-a}{b-a} [-g'(x)(x-b) + g(x)] \\ &= g(x). \end{aligned}$$

1.1.13 例题：

设 $f \in C^2[a, b]$, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \frac{4}{b-a}$$

解 1.1.13. 由已知, $f \in C^2[a, b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$ 。对任意 $x \in [a, b]$, 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b-x}{b-a}f(x) + \frac{x-a}{b-a}f(x) \\ &= \frac{b-x}{b-a}[(a-x)f'(x) + f(x)] + \frac{x-a}{b-a}[(b-x)f'(x) + f(x)] \\ &= \frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)f'(x) + \int_a^x f'(y)dy\right] + \frac{x-a}{b-a}\left[(b-x)f'(x) + \int_b^x f'(y)dy\right] \\ &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (a-y)df'(y) + \frac{x-a}{b-a} \int_b^x (b-y)df'(y) \\ &= \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (a-y)f''(y)dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-y)f''(y)dy. \end{aligned}$$

取绝对值, 并利用 $|f''(y)| = \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| |f(y)|$, 得

$$|f(x)| \leq \frac{b-x}{b-a} \int_a^x (y-a) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| |f(y)| dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (b-y) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| |f(y)| dy.$$

设 $M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$, 则 $M > 0$ (否则 $f \equiv 0$, 不等式显然成立)。取 $c \in (a, b)$ 使 $|f(c)| = M$ 。在上式中令 $x = c$, 并注意到 $|f(y)| \leq M$, $y-a \leq c-a$ (当 $y \in [a, c]$), $b-y \leq b-c$ (当 $y \in [c, b]$), 故

$$\begin{aligned} M &\leq \frac{b-c}{b-a} \int_a^c (c-a) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| M dy + \frac{c-a}{b-a} \int_c^b (b-c) \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| M dy \\ &= M \cdot \frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \int_a^b \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| dy. \end{aligned}$$

因 $M > 0$, 两边消去 M 得

$$1 \leq \frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \int_a^b \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| dy.$$

由均值不等式,

$$\frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \leq \frac{1}{b-a} \left(\frac{(b-c)+(c-a)}{2} \right)^2 = \frac{b-a}{4},$$

代入上式即得

$$\int_a^b \left| \frac{f''(y)}{f(y)} \right| dy \geq \frac{4}{b-a}.$$

(等号成立条件可进一步讨论, 此处略。)

1.1.14 例题：

(2004 年全国 II 卷) 函数 $f(x) = x \ln x$, 求证: 对于 $a > b > 0$ 有

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) < (a-b) \ln 2$$

解 1.1.14. 设

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} f(a) + \frac{\left(x-a\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)} f(b) \\ &= \frac{(x-a)(x-b)}{-\frac{(a-b)^2}{4}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\frac{(a-b)^2}{2}} f(a) + \frac{\left(x-a\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{(a-b)^2}{2}} f(b) \\ &= \frac{2}{(a-b)^2} \left(\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)f(a) + \left(x-a\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(b) - 2(x-a)(x-b)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

构造 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(a) = h\left(\frac{a+b}{2}\right) = h(b) = 0$, 由罗尔中值定理得存在 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}), \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得 $h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$, 再由罗尔中值定理得存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得 $h''(\xi) = 0$, 所以

$$h''(\xi) = g''(\xi) = \frac{4}{(a-b)^2} \left(f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

问题转化为证明

$$\frac{(a-b)^2}{4} f''(\xi) = \frac{(a-b)^2}{4\xi} < (a-b) \ln 2 \Leftrightarrow \xi > \frac{a-b}{4 \ln 2}$$

1.1.15 例题：

设 $f \in D[a, b]$, 且 $|f'(x)| \leq M$, $\int_a^b f(x)dx = 0$, 令 $|F(x)| = \left| \int_a^x f(t)dt \right|$, 证明:

$$(1) |F(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8};$$

$$(2) \text{若 } f(a) = f(b) = 0, \text{ 则 } |F(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{16}.$$

解 1.1.15. (1) $F(x)$ 两阶可导, $|F''(x)| \leq M$, $F(b) = F(a) = 0$, 插左右端点, 微分条件足够, 用 K 值法: 设 K 与 x 有关, 使得 $F(x) = K \frac{(x-a)(x-b)}{2!}$, 构造 $G(y) = F(y) - K \frac{(y-a)(y-b)}{2!}$, 则 $G(a) = G(b) = G(x) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, x), \xi_2 \in (x, b)$ 使得 $G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\theta(x) \in (a, b)$ 使得 $G''(\theta(x)) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} f'(\theta(x)) - K &= 0 \Rightarrow K = f'(\theta(x)) \Rightarrow F(x) = f'(\theta(x)) \frac{(x-a)(x-b)}{2!} \\ |F(x)| &\leq \frac{M}{2} |(x-a)(x-b)| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{8} \end{aligned}$$

(2) $F(x)$ 两阶可导, $|F''(x)| \leq M$, $F(a) = F(b) = F'(a) = F'(b) = 0$, 插左右端点, 微分条件远远不够, 属于靠近谁插谁的类型, 不直接插左右端点和导数, 而是引入 $x_0 \in (a, b)$ 是 $|F(x)|$ 的极大值点 (若极值点是端点处, 此时结论显然成立), 在 (a, x_0) 和 (x_0, b) 区间构造插值多项式。在区间 $[a, x_0]$ 上插 $f(a), f'(a), f(x_0), f'(x_0)$, 构造插值多项式:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} F''(\xi_1) = \frac{(x-a)^2}{2!} F''(\xi_1) \\ F(x) &= F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(\xi_2) = \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(\xi_2) \end{aligned}$$

相减得到

$$F(x_0) = \frac{(x_0-a)^2}{2!} F''(\xi_1) - \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(\xi_2)$$

绝对值不等式得到

$$|F(x_0)| \leq \frac{1}{2!} \left(\frac{(x_0-a)^2}{2!} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \right) M = \frac{M}{4} ((x_0-a)^2 + (x-x_0)^2)$$

由于 $x \in (a, b)$, 所以 $(x_0-a)^2 + (x-x_0)^2 \leq (\frac{b-a}{2})^2 + (\frac{b-a}{2})^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$, 因此

$$|F(x_0)| \leq \frac{M(b-a)^2}{16}$$

最后提示一下, 要看要证明的结论是什么, 插值只是辅助手段, 比如本题结论就是 $F(x)$ 的上下界, 那么先看余项够不够微分条件用完, 如果刚好, 就是 (1), 如果差远了, 就是 (2), (2) 中引入了 $F(x)$ 取到上下界时的自变量 x_0 , 在两个区间分别插值, 最后相减得到 $F(x_0)$ 的表达式, 绝对值不等式得到 $F(x_0)$ 的上界, 再利用 $x \in (a, b)$ 得到最终结论。

1.1.16 例题：

设 $f(x) \in C^3[-1, 1]$ 满足 $f(-1) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 1$, 证明存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使得

$$f'''(\xi) = 3 + \xi$$

解 1.1.16. 插 $f(-1), f(1), f(0), f'(0)$, 则插值多项式为三次, 余项四阶, 导数差 1 阶, 所以是 $f''' = p'''$ 模型, 但是等号右边还有 ξ , 所以对 $g(x) = f(x) - \frac{x^4}{24}$ 构造插值多项式, $g(-1) = -\frac{1}{24}, g'(0) = 0, g(0) = f(0), g(1) = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$, 构造插值多项式 $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}g(-1) + \frac{(x-1)(x-(-1))}{(0-1)(0-(-1))}g(0) + \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)}g(1) + cx(x-1)(x+1) \\ &= \frac{(x-0)(x-1)}{2} \left(-\frac{1}{24} \right) + \frac{(x-1)(x+1)}{-1} g(0) + \frac{(x-0)(x+1)}{2} \left(\frac{23}{24} \right) + cx(x-1)(x+1) \\ &= \frac{-x^2+x}{48} - (x^2-1)g(0) + \frac{23x^2+23x}{48} + cx(x-1)(x+1) \\ p'(x) &= \frac{-2x+1}{48} + (-2x)g(0) + \frac{46x+23}{48} + c((x-1)(x+1) + x(x+1) + x(x-1)) \\ p'(0) &= \frac{1}{48} + 0 + \frac{23}{48} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

构造 $W(x) = g(x) - p(x)$, 则 $W(-1) = W(1) = W'(0) = W(0) = 0$, 且 $W(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上三阶可导, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (-1, 0)$ 使得 $W'(\xi_1) = 0$, 存在 $\xi_2 \in (0, 1)$ 使得 $W'(\xi_2) = 0$, 加上 $W'(0) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi_3 \in (\xi_1, 0) \subset (-1, 1)$ 使得 $W''(\xi_3) = 0$, 存在 $\xi_4 \in (0, \xi_2) \subset (-1, 1)$ 使得 $W''(\xi_4) = 0$, 再由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (-1, 1)$ 使得 $W'''(\xi) = 0$, 所以

$$g'''(\xi) = f'''(\xi) - \xi = p'''(\xi) = 6c = 3 \Leftrightarrow f'''(\xi) = 3 + \xi$$

1.1.17 例题：

设 $f \in C^1[0, 1]$, 证明存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$f'(\xi) = \int_0^1 (12x - 6) f(x) dx$$

解 1.1.17. 上来就分部积分, 将 $f(x)$ 独立出来, 总是不会错的。

$$\begin{aligned} \int_0^1 (12x - 6) f(x) dx &= \int_0^1 f(x) d(6x^2 - 6x) \\ &= f(x)(6x^2 - 6x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (6x^2 - 6x) df(x) \\ &= f(x)(6x^2 - 6x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (6x^2 - 6x) f'(x) dx \\ &= -6 \int_0^1 (x^2 - x) f'(x) dx \end{aligned}$$

即证存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$f'(\xi) + 6 \int_0^1 (x^2 - x) f'(x) dx = 0$$

由积分中值定理得:

$$\begin{aligned} 6 \int_0^1 (x^2 - x) f'(x) dx &= 6 f'(\xi) \int_0^1 (x^2 - x) dx = 6 f'(\xi) \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= f'(\xi) (2x^3 - 3x^2) \Big|_0^1 = -f'(\xi) \end{aligned}$$

于是命题得证

第二章 微分中值定理：构造函数法

2.1 一阶构造类

2.1.1 例题：

设 $f \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$ 满足

$$f(0) = f(2) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$$

则存在 $\xi \in (0, \eta)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}$$

解 2.1.1. 由极限条件得到 $f(1) = 2, f'(1) = 5$, 先解微分方程:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x - y}{x} = 2 - \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = 2 \\ \Leftrightarrow e^{\int \frac{1}{x} dx} y' + \frac{1}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} y &= 2e^{\int \frac{1}{x} dx} \Leftrightarrow (e^{\int \frac{1}{x} dx} y)' = 2e^{\int \frac{1}{x} dx} \\ \Leftrightarrow e^{\int \frac{1}{x} dx} y &= 2e^{\int \frac{1}{x} dx} + C \Leftrightarrow xy = x^2 + C \\ \Leftrightarrow y &= x + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

分离常数 C 得到 $c = x(y - x)$, 于是构造

$$c(x) = x(f(x) - x)$$

其中 $c(0) = 0, c(1) = 1, c(2) = -4$, 求导得到

$$c'(x) = x(f'(x) - 1) + f(x) - x = xf'(x) + f(x) - 2x$$

于是由拉格朗日中值定理得 $\alpha \in (0, 1), \beta \in (1, 2)$, 使得

$$c'(\alpha) = \frac{c(1) - c(0)}{1 - 0} = 1, c'(\beta) = \frac{c(1) - c(2)}{1 - 2} = -5$$

由导数介值定理知存在 $\xi \in (0, \eta)$ 使得 $c'(\xi) = 0$

$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}$$

2.1.2 例题：

设 $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ 满足 $f(0) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{\xi f(\xi)}{1 - \xi}$$

解 2.1.2. 考虑微分方程

$$\begin{aligned} y' &= \frac{xy}{1-x} = \frac{x}{1-x}y \Leftrightarrow y' + \frac{x}{x-1}y = 0 \\ &\Leftrightarrow y'e^{\int \frac{x}{x-1}dx} + \frac{x}{x-1}e^{\int \frac{x}{x-1}dx}y = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\int \frac{x}{x-1}dx}y\right)' = 0 \Leftrightarrow (e^{x+\ln(x-1)}y)' = 0 \Leftrightarrow ((x-1)e^x y)' = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)e^x y = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{(x-1)e^x} \end{aligned}$$

分离常数得到: $c = e^x(x-1)y$, 构造函数 $c(x) = e^x(x-1)f(x)$, 求导得到

$$c'(x) = e^x((x-1)f(x) + (x-1)f'(x) + f(x)) = e^x((x-1)f'(x) + xf(x))$$

即证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$, 又注意到 $c(0) = c(1) = 0$, 由罗尔定理, 命题显然成立.

2.1.3 例题：

设 $f \in C[-1, 2] \cap D(-1, 2)$ 且有 $f(-1) = f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$ 。证明对任何实数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 都存在 $\xi \in (-1, 2)$, 使得

$$f'(\xi) = \lambda \left[f(\xi) - \frac{\xi}{2} \right] + \frac{1}{2}$$

解 2.1.3. 解微分方程, 注意到这类微分方程的标准形式是 $y' + P(x)y = Q(x)$, 往这方面凑就可以:

$$\begin{aligned} y' = \lambda y - \frac{\lambda x}{2} + \frac{1}{2} &\Leftrightarrow y' - \lambda y = -\frac{\lambda}{2}x + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow y' e^{\int(-\lambda)dx} + (-\lambda)e^{\int(-\lambda)dx}y = e^{\int(-\lambda)dx} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}x \right) \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\int(-\lambda)dx}y \right)' = e^{\int(-\lambda)dx} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}x \right) \Leftrightarrow (e^{-\lambda x}y)' = e^{-\lambda x} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}x \right) \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda x}y = \int e^{-\lambda x} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}x \right) dx = \frac{1}{-2\lambda} \int e^{-\lambda x} (1 - \lambda x) d(-\lambda x) \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda x}y = \frac{1}{-2\lambda} (-\lambda x e^{-\lambda x} + c) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{-2\lambda} (-\lambda x + ce^{\lambda x}) \end{aligned}$$

分离常数 c 得到

$$c = -2\lambda e^{-\lambda x}y + \lambda x e^{-\lambda x}$$

构造

$$c(x) = -2\lambda e^{-\lambda x}f(x) + \lambda x e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x}(x - 2f(x))$$

$$c'(x) = \lambda e^{-\lambda x}(1 - 2f'(x) - \lambda(x - 2f(x)))$$

等价于证明存在 $\xi \in (-1, 2)$ 使得 $c'(\xi) = 0$, 由于 $c(-1) = 0$, $c(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}}$, $c(2) = 3\lambda e^{-2\lambda}$, 由零点定理知存在 $\xi_1 \in (\frac{1}{2}, 2)$ 使得 $c'(\xi_1) = 0$, 由罗尔定理知存在 $\xi_2 \in (-1, \xi_1) \subset (-1, 2)$ 使得 $c'(\xi_2) = 0$, 于是命题得证.

2.1.4 例题：

设 $f \in D[0, 1]$ 且 $f(0) > 0, f(1) > 0, \int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0$$

解 2.1.4. 此类构造虽然仍然是一阶构造, 但是他要把部分 f 视为已知函数来构造 (动机是保留一阶微分方程的形式), 对于本题, 即 $3f^2$ 视为已知的函数考虑 $y' + 3f^2y = 0$. 解得 $y = ce^{-\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 分离变量得构造函数 $c(x) = f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$ 注意到

$$c'(x) = e^{\int_0^x 3f^2(t)dt} [f'(x) + 3f^3(x)].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(\theta) = \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

注意到若 f 只有一个零点, 则因为 $f(0) > 0, f(1) > 0$, 我们知道 $f(x) > 0, \forall x \in [0, \theta) \cup (\theta, 1]$, 从而 $\int_0^1 f(x) dx > 0$, 这就是一个矛盾! 于是存在 $\theta_1 \neq \theta_2$, 使得 $f(\theta_1) = f(\theta_2) = 0$. 现在就有 $c(\theta_1) = c(\theta_2) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $c'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0.$$

2.2 二阶构造类

2.2.1 视为关于 f' 的一阶构造类

2.2.1 例题：

设 $f \in D^2[0, 1]$ 使得 $f(0) = f(1)$, 证明存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得

$$f''(\eta) = \frac{2f'(\eta)}{1 - \eta}$$

解 2.2.1. 解微分方程

$$\begin{aligned} y' = \frac{2}{1-x}y &\Leftrightarrow y' + \frac{2}{x-1}y = 0 \\ &\Leftrightarrow y'e^{\int \frac{2}{x-1}dx} + \frac{2}{x-1}e^{\int \frac{2}{x-1}dx}y = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\int \frac{2}{x-1}dx}y\right)' = 0 \Leftrightarrow ((x-1)^2y)' = 0 \\ &\Leftrightarrow c = (x-1)^2y \end{aligned}$$

构造 $c(x) = (x-1)^2f'(x)$, 求导得

$$c'(x) = 2(x-1)f'(x) + (x-1)^2f''(x), \quad c'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

即证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$, 由已知 $c(1) = 0$, 以及罗尔中值定理知存在 $\xi_1 \in (0, 1)$ 使得 $f'(x_{\xi_1}) = 0$, 所以对应 $c(\xi_1) = 0$, 由罗尔中值定理知存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$, 得证.

2.2.2 例题:

设 $f \in D^2[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $f(1) = \frac{\pi}{4}$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f''(\xi)(1 + \xi^2) + 2f'(\xi)\xi = 0$$

解 2.2.2. 解微分方程

$$\begin{aligned} y'(1 + x^2) + 2xy = 0 &\Leftrightarrow y' + \frac{2x}{1 + x^2}y = 0 \\ &\Leftrightarrow y'e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} + \frac{2x}{1+x^2}e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx}y = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx}y\right)' = 0 \Leftrightarrow (e^{\ln(x^2+1)}y)' = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)y = c \end{aligned}$$

构造 $c(x) = f'(x)(1 + x^2)$, 则 $c'(x) = 2xf'(x) + (1 + x^2)f''(x)$, 转化为证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$ 。注意到 $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $f(1) = \frac{\pi}{4}$, 而 $\arctan 0 = 0$, $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, 故令

$$g(x) = f(x) - \arctan x, \quad x \in [0, 1].$$

则 $g \in C^2[0, 1]$ 且 $g(0) = g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = g(1) = 0$ 。由罗尔定理, 存在 $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\xi_2 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ 使得

$$g'(\xi_1) = 0, \quad g'(\xi_2) = 0.$$

又 $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{1+x^2}$, 于是

$$c(\xi_i) = (1 + \xi_i^2)f'(\xi_i) = (1 + \xi_i^2) \cdot \frac{1}{1 + \xi_i^2} = 1, \quad i = 1, 2.$$

因此 $c(\xi_1) = c(\xi_2) = 1$ 。对 $c(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上用罗尔, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$, 即

$$f''(\xi)(1 + \xi^2) + 2f'(\xi)\xi = 0.$$

2.2.2 难度在解微分方程的一类

2.2.3 例题：

设 $f \in D^2(\mathbb{R})$, $f(0) f(\pi) < 0$, 证明存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得

$$f''(\xi) - 2f'(\xi) \cot \xi + f(\xi)(1 + 2 \cot^2 \xi) = 0.$$

解 2.2.3. 首先, 解微分方程

$$y'' - 2y' \cot x + y(1 + 2 \cot^2 x) = 0.$$

令 $y = u \sin x$, 代入可得 $u'' = 0$, 故 $u = Cx + D$, 因此通解为 $y(x) = (Cx + D) \sin x$, 其中 C, D 为常数。于是有

$$\frac{y(x)}{\sin x} = Cx + D \Rightarrow \left(\frac{y(x)}{\sin x} \right)' = 0.$$

受此启发, 构造函数

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}, \quad x \in (0, \pi).$$

计算得

$$g''(x) = \frac{f''(x) - 2 \cot x f'(x) + f(x)(1 + 2 \cot^2 x)}{\sin x}, \quad x \in (0, \pi).$$

因此, 要证存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使得原式成立, 只需证存在 ξ 使 $g''(\xi) = 0$ 。

下面证明 g'' 在 $(0, \pi)$ 内有零点。由 $f(0)f(\pi) < 0$ 知 $f(0)$ 与 $f(\pi)$ 异号且均非零。不妨设 $f(0) > 0$, 则 $f(\pi) < 0$ (若相反则同理)。考虑 $g'(x) = \frac{f'(x) \sin x - f(x) \cos x}{\sin^2 x}$ 。当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\sin x \sim x, \cos x \sim 1$, 故

$$g'(x) \sim -\frac{f(0)}{x^2} \rightarrow -\infty.$$

当 $x \rightarrow \pi^-$ 时, 令 $t = \pi - x$, 则 $\sin x \sim t, \cos x \sim -1$, 故

$$g'(x) \sim \frac{f(\pi)}{t^2} \rightarrow -\infty.$$

因此 g' 在 $(0, \pi)$ 内连续, 且两端趋于 $-\infty$, 从而 g' 在 $(0, \pi)$ 内必取得最大值 (例如, 取 $\delta > 0$ 足够小, 使在 $(0, \delta)$ 和 $(\pi - \delta, \pi)$ 上 $g'(x) < g'(\pi/2)$, 则 g' 在 $[\delta, \pi - \delta]$ 上有最大值, 该最大值即为整个区间上的最大值)。设最大值点为 $\xi \in (0, \pi)$, 则 $g'(\xi)$ 为极大值, 故 $g''(\xi) = 0$ 。若 $f(0) < 0$, 则 g' 两端趋于 $+\infty$, 同理取最小值点即得 $g''(\xi) = 0$ 。因此存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使 $g''(\xi) = 0$, 代入即得

$$f''(\xi) - 2f'(\xi) \cot \xi + f(\xi)(1 + 2 \cot^2 \xi) = 0.$$

2.2.4 例题：

设 $f \in D^2 \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], f(0) = 0$, 证明存在 $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, 使得

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2 \tan^2 \xi)$$

解 2.2.4. 首先解微分方程

$$y'' = y(1 + 2 \tan^2 x). \quad (1)$$

观察得 $y_1 = \sec x$ 是 (1) 的一个特解, 因为

$$y'_1 = \sec x \tan x, \quad y''_1 = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x = \sec x(1 + 2 \tan^2 x).$$

设另一解为 $y = u(x) \sec x$, 代入 (1):

$$y' = u' \sec x + u \sec x \tan x, \quad y'' = u'' \sec x + 2u' \sec x \tan x + u \sec x(\tan^2 x + \sec^2 x),$$

而 $\tan^2 x + \sec^2 x = 1 + 2 \tan^2 x$, 代入得

$$u'' \sec x + 2u' \sec x \tan x = 0 \implies u'' + 2u' \tan x = 0.$$

令 $v = u'$, 则 $v' = -2v \tan x$, 解得 $v = C_1 \cos^2 x$, 于是

$$u' = C_1 \cos^2 x \implies u = C_1 \int \cos^2 x dx + C_2 = \frac{C_1}{2} (x + \sin x \cos x) + C_2.$$

因此通解为

$$y(x) = \frac{C_2}{\cos x} + \frac{C_1}{2} \left(\frac{x}{\cos x} + \sin x \right).$$

求导得

$$(y(x) \cos x)' = \frac{c_2}{2}(1 + \cos 2x), \quad \left(\frac{(y \cos x)'}{1 + \cos 2x} \right)' = 0.$$

受此启发, 对给定的 f , 定义

$$g(x) = f(x) \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

则 $g \in C^2$, 且由 $f(0) = 0$ 得 $g(0) = 0$; 又 $\cos(\pm\pi/2) = 0$, 故 $g(\pm\pi/2) = 0$ 。于是 g 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上有三个零点 $-\pi/2, 0, \pi/2$ 。由罗尔定理, 存在 $\eta_1 \in (-\pi/2, 0)$ 和 $\eta_2 \in (0, \pi/2)$ 使得

$$g'(\eta_1) = g'(\eta_2) = 0.$$

现在考虑函数

$$h(x) = \frac{g'(x)}{1 + \cos 2x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

由于分母 $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x > 0$, h 在开区间内可导, 且 $h(\eta_1) = h(\eta_2) = 0$ 。再次应用罗尔定理, 存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (-\pi/2, \pi/2)$ 使得 $h'(\xi) = 0$ 。求导:

$$h'(x) = \frac{(f''(x) \cos x - 2f'(x) \sin x - f(x) \cos x) \cos^2 x - (f'(x) \cos x - f(x) \sin x) \cdot 2 \cos x (-\sin x)}{2 \cos^4 x}.$$

分子化简:

$$(f'' \cos x - 2f' \sin x - f \cos x) \cos^2 x + 2 \sin x \cos x (f' \cos x - f \sin x)$$

$$\begin{aligned}
&= f'' \cos^3 x - 2f' \sin x \cos^2 x - f \cos^3 x + 2f' \sin x \cos^2 x - 2f \sin^2 x \cos x \\
&= f'' \cos^3 x - f \cos^3 x - 2f \sin^2 x \cos x \\
&= \cos x [f'' \cos^2 x - f(\cos^2 x + 2 \sin^2 x)].
\end{aligned}$$

因此

$$h'(x) = \frac{f''(x) \cos^2 x - f(x)(\cos^2 x + 2 \sin^2 x)}{2 \cos^3 x}.$$

由于 $\cos^2 x + 2 \sin^2 x = \cos^2 x(1 + 2 \tan^2 x)$, 所以

$$h'(x) = \frac{f''(x) - f(x)(1 + 2 \tan^2 x)}{2 \cos x}.$$

由 $h'(\xi) = 0$ 且 $\cos \xi \neq 0$, 即得

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2 \tan^2 \xi).$$

证毕。

2.2.5 例题：

设 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 二阶可导， $f(0) = 0$ ，证明存在 $\zeta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，使得

$$f''(\zeta) = 3f'(\zeta) \tan \zeta + 2f(\zeta).$$

解 2.2.5. 首先考虑微分方程

$$y'' = 3y' \tan x + 2y. \quad (1)$$

直接验证可知，函数 $y_1(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ 和 $y_2(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ 均为 (1) 的解，故通解为

$$y(x) = \frac{C_1}{\cos^2 x} + C_2 \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

由此得

$$y(x) \cos^2 x = C_1 + C_2 \sin x, \quad (y(x) \cos^2 x)' = C_2 \cos x, \quad \left(\frac{(y(x) \cos^2 x)'}{\cos x} \right)' = 0. \quad (2)$$

受此启发，对给定的函数 $f(x)$ ，定义

$$g(x) = f(x) \cos^2 x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

则 g 二阶可导，且由 $\cos^2(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ 知 $g(-\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$ ，又 $f(0) = 0$ 得 $g(0) = 0$ 。因此 g 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上有三个零点 $-\pi/2, 0, \pi/2$ 。由罗尔定理，存在 $\eta_1 \in (-\pi/2, 0)$ 和 $\eta_2 \in (0, \pi/2)$ 使得

$$g'(\eta_1) = 0, \quad g'(\eta_2) = 0.$$

现在考虑函数

$$h(x) = \frac{g'(x)}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

由于分母 $\cos x > 0$ 在开区间内， h 可导，且 $h(\eta_1) = h(\eta_2) = 0$ 。再次应用罗尔定理，存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (-\pi/2, \pi/2)$ 使得 $h'(\xi) = 0$ 。计算 $h'(x)$ 。由 $g(x) = f(x) \cos^2 x$ 得

$$g'(x) = f'(x) \cos^2 x - 2f(x) \cos x \sin x,$$

$$g''(x) = f''(x) \cos^2 x - 4f'(x) \cos x \sin x - 2f(x) \cos^2 x + 2f(x) \sin^2 x.$$

于是

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g''(x) \cos x + g'(x) \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(f'' \cos^2 x - 4f' \cos x \sin x - 2f \cos^2 x + 2f \sin^2 x) \cos x + (f' \cos^2 x - 2f \cos x \sin x) \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{f'' \cos^3 x - 3f' \cos^2 x \sin x - 2f \cos^3 x}{\cos^2 x} \\ &= \cos x (f''(x) - 3f'(x) \tan x - 2f(x)). \end{aligned}$$

由 $h'(\xi) = 0$ 且 $\cos \xi \neq 0$, 即得

$$f''(\xi) - 3f'(\xi)\tan \xi - 2f(\xi) = 0,$$

亦即

$$f''(\xi) = 3f'(\xi)\tan \xi + 2f(\xi).$$

因此存在 $\zeta = \xi \in (-\pi/2, \pi/2)$ 满足要求。

2.2.6 例题:

设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 可微且 f 至少有三个零点, 证明存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得

$$f''(\xi) + 2\xi^2 f'(\xi) + (\xi^4 + 2\xi)f(\xi) = 0$$

解 2.2.6. 考虑微分方程

$$y'' + 2x^2 y' + (x^4 + 2x)y = 0. \quad (1)$$

令 $y = ue^{-x^3/3}$, 则

$$y' = e^{-x^3/3}(u' - ux^2), \quad y'' = e^{-x^3/3}(u'' - 2x^2u' + u(x^4 - 2x)).$$

代入 (1) 得

$$e^{-x^3/3}[u'' - 2x^2u' + u(x^4 - 2x) + 2x^2(u' - ux^2) + (x^4 + 2x)u] = 0,$$

化简后即为 $u'' = 0$, 故 $u = C_1 + C_2x$, 从而 (1) 的通解为

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x^3/3}.$$

由此启发, 对给定的函数 $f(x)$ (设 f 二阶可导), 构造

$$g(x) = f(x)e^{x^3/3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

计算 g 的导数:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{x^3/3} + f(x)e^{x^3/3}x^2 = e^{x^3/3}(f'(x) + x^2f(x)), \\ g''(x) &= e^{x^3/3}[f''(x) + 2x^2f'(x) + (x^4 + 2x)f(x)]. \end{aligned} \quad (2)$$

已知 f 至少有三个零点, 设它们为 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $g(x_i) = f(x_i)e^{x_i^3/3} = 0$ ($i = 1, 2, 3$)。由罗尔定理, 存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ 和 $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ 使得

$$g'(\xi_1) = 0, \quad g'(\xi_2) = 0.$$

再对 g' 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得 $g''(\xi) = 0$ 。代入 (2) 并注意到 $e^{\xi^3/3} \neq 0$, 即得

$$f''(\xi) + 2\xi^2 f'(\xi) + (\xi^4 + 2\xi)f(\xi) = 0.$$

因此存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 满足要求。

2.2.7 例题：

设 $f \in C[-2, 2] \cap D(-2, 2)$ 且

$$|f(x)| < 1, \forall x \in [-2, 2], f^2(0) + (f'(0))^2 = 4,$$

证明存在 $\theta \in (-2, 2)$ 使得

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

解 2.2.7. Method I: 首先观察微分方程 $y'' + y = 0$ 。若 y 是其解，则两边乘以 y' 得 $y'y'' + yy' = 0$ ，即 $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} ((y')^2 + y^2) = 0$ ，故 $(y')^2 + y^2$ 为常数。这表明二次型 $(y')^2 + y^2$ 是方程的一个首次积分。受此启发，对给定的函数 $f(x)$ （设其二阶可导），我们构造

$$g(x) = f^2(x) + (f'(x))^2, \quad x \in [-2, 2].$$

则 g 可导，且

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)(f(x) + f''(x)). \quad (1)$$

由已知条件 $|f(x)| < 1$ 对一切 $x \in [-2, 2]$ 成立，特别地 $|f(2)| < 1, |f(-2)| < 1, |f(0)| < 1$ 。对 f 在区间 $[0, 2]$ 和 $[-2, 0]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\theta_1 \in (0, 2)$ 和 $\theta_2 \in (-2, 0)$ 使得

$$f'(\theta_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2}, \quad f'(\theta_2) = \frac{f(-2) - f(0)}{-2}.$$

于是

$$|f'(\theta_1)| \leq \frac{|f(2)| + |f(0)|}{2} < \frac{1+1}{2} = 1, \quad |f'(\theta_2)| < 1.$$

从而

$$g(\theta_1) = f^2(\theta_1) + (f'(\theta_1))^2 < 1 + 1 = 2, \quad g(\theta_2) < 2.$$

另一方面，由已知 $f^2(0) + (f'(0))^2 = 4$ 得 $g(0) = 4 > 2$ 。因此 g 在闭区间 $[\theta_2, \theta_1]$ 上的值满足：端点值小于 2，而内部点 0 处值为 4，故最大值必在内部某点 $\theta \in (\theta_2, \theta_1) \subset (-2, 2)$ 取得（因为端点值均小于最大值）。由极值必要条件， $g'(\theta) = 0$ 。代入 (1) 得 $2f'(\theta)(f(\theta) + f''(\theta)) = 0$ 。若 $f'(\theta) = 0$ ，则 $g(\theta) = f^2(\theta) < 1$ （因为 $|f(\theta)| < 1$ ），但 $g(\theta)$ 是最大值且至少为 4（因为 $g(0) = 4$ ），矛盾。故 $f'(\theta) \neq 0$ ，从而必有

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

2.2.8 例题：

设 $f \in C[-2, 2] \cap D(-2, 2)$ 且

$$|f(x)| < 1, \forall x \in [-2, 2], f^2(0) + (f'(0))^2 = 4,$$

证明存在 $\theta \in (-2, 2)$ 使得

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

解 2.2.8. 思路：考虑微分方程 $y'' + y = 0$ 。若 y 是其解，则计算

$$\frac{d}{dx}(y \sin x + y' \cos x) = y' \sin x + y \cos x + y'' \cos x - y' \sin x = (y + y'') \cos x = 0,$$

故 $y \sin x + y' \cos x$ 为常数。这表明该线性组合是方程的一个首次积分。受此启发，对给定的函数 f （设二阶可导），我们构造

$$g(x) = f(x) \sin x + f'(x) \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

则 g 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续可导，且

$$g'(x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x + f''(x) \cos x - f'(x) \sin x = (f(x) + f''(x)) \cos x. \quad (1)$$

由已知条件 $|f(x)| < 1$ 对一切 $x \in [-2, 2]$ 成立，特别地，

$$|f(\pm \frac{\pi}{2})| < 1, \quad |f(0)| < 1.$$

又 $f^2(0) + (f'(0))^2 = 4$ ，故 $|f'(0)| = \sqrt{4 - f^2(0)} > \sqrt{3} > 1$ ，从而 $|g(0)| = |f'(0)| > 1$ ，而

$$|g(\frac{\pi}{2})| = |f(\frac{\pi}{2})| < 1, \quad |g(-\frac{\pi}{2})| = |-f(-\frac{\pi}{2})| < 1.$$

假设对一切 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 均有 $f(x) + f''(x) \neq 0$ ，则由连续性， $f(x) + f''(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内恒正或恒负。不妨设恒正（否则考虑 $-f$ ），则由于在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内 $\cos x > 0$ ，由 (1) 知 $g'(x) > 0$ ，即 g 严格递增。于是

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

但 $|g(-\frac{\pi}{2})| < 1$, $|g(\frac{\pi}{2})| < 1$, 而 $|g(0)| > 1$ ，矛盾。因此假设不成立，故存在 $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$ 。此 ξ 即为所求。

2.2.9 例题：

设 f, g 在 $[a, b]$ 上连续且在 (a, b) 内可导。若对任何 $x \in (a, b)$, 都有 $g'(x) \neq 0$. 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}$$

解 2.2.9. 首先将等式两边交叉相乘 (注意 $g'(\xi) \neq 0$ 且 $g(b) - g(\xi) \neq 0$, 后者可由 g 的严格单调性得到, 因为 $g'(x) \neq 0$ 在 (a, b) 内恒正或恒负, 从而 g 严格单调, 故当 $\xi \in (a, b)$ 时 $g(b) \neq g(\xi)$), 移项得 $f'(\xi)[g(b) - g(\xi)] - g'(\xi)[f(\xi) - f(a)] = 0$, 考虑积分:

$$\begin{aligned} & \int (f'(x)[g(b) - g(x)] - g'(x)[f(x) - f(a)]) dx \\ &= \int f'(x)(g(b) - g(x)) dx - \int g'(x)(f(x) - f(a)) dx \\ &= \int (g(b) - g(x)) df(x) - \int (f(x) - f(a)) dg(x) \\ &= [g(b) - g(x)]f(x) - \int f(x) d[g(b) - g(x)] - \left([f(x) - f(a)]g(x) - \int g(x) d[f(x) - f(a)] \right) \\ &= [g(b) - g(x)]f(x) - \int f(x)(-g'(x)) dx - [f(x) - f(a)]g(x) + \int g(x)f'(x) dx \\ &= [g(b) - g(x)]f(x) + \int f(x)g'(x) dx - [f(x) - f(a)]g(x) + \int g(x)f'(x) dx \\ &= [g(b) - g(x)]f(x) - [f(x) - f(a)]g(x) + \int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)] dx \\ &= [g(b) - g(x)]f(x) - [f(x) - f(a)]g(x) + f(x)g(x) + C \\ &= f(x)g(b) - f(x)g(x) - f(x)g(x) + f(a)g(x) + f(x)g(x) + C \\ &= f(x)g(b) + f(a)g(x) - f(x)g(x) + C \\ &= [f(x) - f(a)][g(b) - g(x)] + (f(a)g(b) + C). \end{aligned}$$

考虑 $h(x) = [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(x)]$, $x \in [a, b]$, 由于 f, g 在 $[a, b]$ 上连续且在 (a, b) 内可导, h 也在 $[a, b]$ 上连续且在 (a, b) 内可导。计算 h 在端点处的值:

$$h(a) = [f(a) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)] = 0, \quad h(b) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(b) - g(b)] = 0.$$

因此 $h(a) = h(b) = 0$ 。由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$ 。

$$h'(x) = f'(x)[g(b) - g(x)] - g'(x)[f(x) - f(a)].$$

代入 ξ 得

$$f'(\xi)[g(b) - g(\xi)] - g'(\xi)[f(\xi) - f(a)] = 0.$$

2.2.10 例题：

设 $f, g \in D^2[a, b]$, $g''(x) \neq 0$, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$. 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

解 2.2.10. 即证 $f''(\xi)g(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0$, 考虑对该表达式进行分部积分:

$$\begin{aligned} \int [f''(x)g(x) - f(x)g''(x)] dx &= \int f''(x)g(x)dx - \int f(x)g''(x)dx \\ &= \int g(x)df'(x) - \int f(x)dg'(x) \\ &= g(x)f'(x) - \int f'(x)g'(x)dx - (f(x)g'(x) - \int f'(x)g'(x)dx) \\ &= g(x)f'(x) - f(x)g'(x) \end{aligned}$$

因此, 令

$$h(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x), \quad x \in [a, b],$$

则 $h'(x) = f''(x)g(x) - f(x)g''(x)$. 由 $f, g \in D^2[a, b]$ 知 h 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导。利用已知条件 $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 计算 h 在端点处的值:

$$h(a) = f'(a)g(a) - f(a)g'(a) = 0, \quad h(b) = f'(b)g(b) - f(b)g'(b) = 0.$$

于是 $h(a) = h(b) = 0$ 。由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$, 即

$$f''(\xi)g(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0. \tag{2}$$

下证 $g(\xi) \neq 0$ 。已知 $g''(x) \neq 0$ 对一切 $x \in [a, b]$ 成立, 故 g'' 在 (a, b) 内恒正或恒负。不妨设 $g'' > 0$, 则 g 是严格凸函数。又 $g(a) = g(b) = 0$, 由凸函数的性质, 对任意 $x \in (a, b)$ 有 $g(x) < 0$ (凸函数图像位于连接两端点的弦下方, 而弦为 $y = 0$)。同理若 $g'' < 0$, 则 g 严格凹, 此时 $g(x) > 0$ 对 $x \in (a, b)$ 成立。总之, $g(x) \neq 0$ 对一切 $x \in (a, b)$ 成立, 特别地 $g(\xi) \neq 0$ 。又由条件 $g''(\xi) \neq 0$, 于是(2)式可化为

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

因此存在这样的 $\xi \in (a, b)$ 满足要求。

2.2.11 例题：

设 $f \in D^2[0, 1]$, $f(0) = 2, f'(0) = -2, f(1) = 1$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f(\xi)f'(\xi) + f''(\xi) = 0$$

解 2.2.11. 首先, 分部积分得到:

$$\int f(x)f'(x) + f''(x)dx = f'(x) + \frac{1}{2}f^2(x)$$

定义辅助函数 $g(x) = f'(x) + \frac{1}{2}f^2(x), x \in [0, 1]$, 由已知条件 $f(0) = 2, f'(0) = -2$ 得 $g(0) = 0$ 。因此, 若能在 $(0, 1]$ 内找到另一点 x_0 使得 $g(x_0) = 0$, 则对 g 在 $[0, x_0]$ 上应用罗尔定理, 即存在 $\xi \in (0, x_0) \subset (0, 1)$ 使 $g'(\xi) = 0$, 而 $g'(\xi) = f(\xi)f'(\xi) + f''(\xi)$, 命题得证。下面寻找 g 的另一个零点。考虑方程 $g(x) = 0$ 即 $f'(x) = -\frac{1}{2}f^2(x)$, 这是一阶可分离方程, 其通解为 $\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{2} + C$ 。受此启发, 构造函数

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{f(x)},$$

但此式仅在 $f(x) \neq 0$ 时有定义。计算其导数:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{\frac{1}{2}f^2(x) + f'(x)}{f^2(x)} = \frac{g(x)}{f^2(x)}.$$

因此 $\varphi'(x) = 0$ 当且仅当 $g(x) = 0$ (在 $f(x) \neq 0$ 处)。现在分两种情况讨论。

情况 1: f 在 $(0, 1)$ 内无零点。 此时 $f(x) \neq 0$ 对一切 $x \in [0, 1]$ 成立, 故 φ 在 $[0, 1]$ 上连续可导。计算端点值:

$$\varphi(0) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \varphi(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2},$$

即 $\varphi(0) = \varphi(1)$ 。由罗尔定理, 存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得 $\varphi'(\eta) = 0$, 从而 $g(\eta) = 0$ 。于是 $g(0) = g(\eta) = 0$, 再由罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, \eta)$ 使 $g'(\xi) = 0$, 得证。

情况 2: f 在 $(0, 1)$ 内有零点。 设这些零点将 $(0, 1)$ 分成若干个开区间, 在每个这样的区间上 f 不变号且不为零, 因此 φ 在该区间上连续可导。考虑其中一个区间 (α, β) , 其中 α, β 是相邻的零点或端点 (注意 $f(0) = 2 \neq 0, f(1) = 1 \neq 0$, 故端点 0, 1 不是零点)。于是 α 或 β 至少有一个是零点 (因为区间端点要么是零点要么是端点, 而端点非零点, 所以区间至少有一端是零点)。不妨设 α 是零点, 则当 $x \rightarrow \alpha^+$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 故 $|\varphi(x)| \rightarrow \infty$ (因为 $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$)。而 φ 在区间另一端 (可能是 β 是零点或 1 等) 处或趋于无穷或取有限值。因此 φ 在该区间上连续且在一端趋于无穷, 从而 φ 在区间内部必存在极值点 (例如, 若趋于 $+\infty$, 则函数有最小值; 若趋于 $-\infty$, 则有最大值)。设该极值点为 $\eta \in (\alpha, \beta)$, 则 $\varphi'(\eta) = 0$, 即 $g(\eta) = 0$ 。于是 $g(0) = g(\eta) = 0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, \eta)$ (若 $\eta > 0$) 或 $\xi \in (\eta, 1)$ (若 $\eta < 0$, 但 $\eta \in (0, 1)$ 故 $\eta > 0$) 使 $g'(\xi) = 0$, 得证。

综上所述, 无论 f 在 $(0, 1)$ 内是否有零点, 总存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$f(\xi)f'(\xi) + f''(\xi) = 0.$$

2.3 多中值点问题

2.3.1 例题：

设 $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明存在互不相同的 $\lambda, \mu \in (0, 1)$ 使得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = 2$$

解 2.3.1. 我们要证明存在两个不同的点 $\lambda, \mu \in (0, 1)$ 使得

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = 2.$$

思路是引入一个中间点 $c \in (0, 1)$, 然后分别用拉格朗日中值定理将 $f'(\lambda)$ 和 $f'(\mu)$ 用 $f(c)$ 表示出来。具体地, 对任意 $c \in (0, 1)$, 在区间 $[0, c]$ 上应用拉格朗日中值定理, 存在 $\lambda \in (0, c)$ 使得

$$f'(\lambda) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}.$$

在区间 $[c, 1]$ 上应用拉格朗日中值定理, 存在 $\mu \in (c, 1)$ 使得

$$f'(\mu) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{1 - f(c)}{1 - c}.$$

于是

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = \frac{f(c)}{c} \left(1 + \frac{1 - f(c)}{1 - c}\right) = \frac{f(c)}{c} \cdot \frac{2 - c - f(c)}{1 - c}.$$

我们希望存在某个 $c \in (0, 1)$ 使得这个乘积等于 2, 即

$$\frac{f(c)(2 - c - f(c))}{c(1 - c)} = 2 \Leftrightarrow f(c)(2 - c - f(c)) = 2c(1 - c) \Leftrightarrow (f(c) + (2c - 2))(f(c) - c) = 0$$

舍 $f(c) = c$, 取 $f(c) = 2 - 2c$, 构造函数

$$g(x) = f(x) + 2x - 2, \quad x \in [0, 1].$$

由已知 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 得

$$g(0) = 0 + 0 - 2 = -2, \quad g(1) = 1 + 2 - 2 = 1.$$

由于 g 在 $[0, 1]$ 上连续, 由介值定理, 存在 $c \in (0, 1)$ 使得 $g(c) = 0$, 即 $f(c) = 2 - 2c$.

取此 c , 则如上所得的 $\lambda \in (0, c)$ 和 $\mu \in (c, 1)$ 即为所求, 且满足

$$f'(\lambda)(1 + f'(\mu)) = 2.$$

证毕。

2.3.2 例题：

设 $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ 使得 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 正实数满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. 证明存在互不相同的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$, 使得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1$$

解 2.3.2. 思路是引入 $n - 1$ 个分点 $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = 1$, 然后在每个子区间 (y_{i-1}, y_i) 上对 f 应用拉格朗日中值定理, 得到存在 $x_i \in (y_{i-1}, y_i)$ 使得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}, i = 1, \dots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(y_i - y_{i-1})}{f(y_i) - f(y_{i-1})}. \quad (1)$$

我们希望这个和等于 1。观察发现, 如果能让每个分母 $f(y_i) - f(y_{i-1})$ 恰好等于 λ_i , 那么 (1) 式就变成 $\sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) = 1$, 这正是我们需要的。因此问题转化为: 能否在 $[0, 1]$ 内选取 $n - 1$ 个分点 y_1, \dots, y_{n-1} , 使得

$$f(y_i) - f(y_{i-1}) = \lambda_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

其中 $y_0 = 0, y_n = 1$, 且 $f(y_0) = f(0) = 0, f(y_n) = f(1) = 1$ 。注意到 $\lambda_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 因此这些等式相当于要求 $f(y_i)$ 依次取值为 $\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}$, 而最后一个自动满足因为总和为 1。即令

$$t_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

则 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < 1$ 。现在 f 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 由介值定理, 对每个 t_i , 存在 $y_i \in (0, 1)$ 使得 $f(y_i) = t_i$ 。由于 f 不一定单调, 这些 y_i 可能不按顺序排列, 但我们可以选择适当的原像来保证它们递增。事实上, 因为 t_i 递增, 我们可以先取 y_1 为某个满足 $f(y_1) = t_1$ 的点, 然后在区间 $(y_1, 1]$ 上考虑函数 f , 它仍连续且 $f(y_1) = t_1, f(1) = 1 > t_2$, 所以存在 $y_2 > y_1$ 使得 $f(y_2) = t_2$, 依此类推。这样得到一组严格递增的点 $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < 1$, 满足 $f(y_i) = t_i$ 。于是

$$f(y_i) - f(y_{i-1}) = t_i - t_{i-1} = \lambda_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

其中 $y_0 = 0, y_n = 1$ 。现在, 对每个子区间 $[y_{i-1}, y_i]$ 应用拉格朗日中值定理, 存在 $x_i \in (y_{i-1}, y_i)$ 使得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}} = \frac{\lambda_i}{y_i - y_{i-1}} \Leftrightarrow \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = y_i - y_{i-1}.$$

求得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) = y_n - y_0 = 1.$$

这样就找到了所需的 x_i , 它们互不相同 (因为分别属于不同的子区间)。

2.3.3 例题：

例题 10.22 设 $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ 使得 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得存在两两不同的 $x_1, x_2, \dots, x_N \in (0, 1)$ 满足

$$\left| \sum_{j=1}^N \frac{1}{2^j f'(x_j)} - 1 \right| < \varepsilon$$

解 2.3.3. 第一步：选取合适的 N 。因为 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$, 所以存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left| \sum_{j=1}^N \frac{1}{2^j} - 1 \right| < \varepsilon.$$

记 $S = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2^j}$, 则 $S \in (0, 1)$ 且 $|S - 1| < \varepsilon$ 。

第二步：构造一组正数 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ 满足 $\sum \lambda_i = 1$ 。令

$$\lambda_i = \frac{1/2^i}{S}, \quad i = 1, \dots, N.$$

则 $\lambda_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ 。

第三步：证明存在互异的 $x_1, \dots, x_N \in (0, 1)$ 使得 $\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1$ 。为此通过插入分点来构造。令

$$t_0 = 0, \quad t_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_i \ (i = 1, \dots, N-1), \quad t_N = 1,$$

则 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ 。由于 f 连续且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 由介值定理, 存在 $y_1 \in (0, 1)$ 使得 $f(y_1) = t_1$ 。假设已找到 $y_{i-1} \in (0, 1)$ 满足 $f(y_{i-1}) = t_{i-1}$, 则考虑区间 $[y_{i-1}, 1]$, 在该区间上 f 连续, $f(y_{i-1}) = t_{i-1}, f(1) = 1 > t_i$, 故存在 $y_i \in (y_{i-1}, 1)$ 使得 $f(y_i) = t_i$ 。如此归纳, 得到严格递增的点列

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{N-1} < y_N = 1,$$

且满足 $f(y_i) = t_i$ 对 $i = 0, 1, \dots, N$ 成立 (其中 $y_0 = 0, y_N = 1$)。于是

$$f(y_i) - f(y_{i-1}) = t_i - t_{i-1} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

现在对每个子区间 $[y_{i-1}, y_i]$ 应用拉格朗日中值定理, 存在 $x_i \in (y_{i-1}, y_i)$ 使得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}} = \frac{\lambda_i}{y_i - y_{i-1}} \Rightarrow \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = y_i - y_{i-1}.$$

求和得

$$\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^N (y_i - y_{i-1}) = y_N - y_0 = 1.$$

第四步：回到原表达式。由 $\lambda_i = \frac{1/2^i}{S}$ 知

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2^j f'(x_j)} = S \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{f'(x_j)} = S \cdot 1 = S \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^N \frac{1}{2^j f'(x_j)} - 1 \right| = |S - 1| < \varepsilon.$$

这样就找到了所需的 N 及两两不同的 $x_1, \dots, x_N \in (0, 1)$, 证毕。

2.3.4 例题：

设 $f \in C[0, 1]$ 且 $\int_0^1 f(x) dx \neq 0$, 证明存在互不相同的 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, 1]$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8} \int_0^1 f(x) dx &= \left[\frac{1}{1 + \theta_1^2} \int_0^{\theta_1} f(x) dx + f(\theta_1) \arctan \theta_1 \right] \theta_3 \\ &= \left[\frac{1}{1 + \theta_2^2} \int_0^{\theta_2} f(x) dx + f(\theta_2) \arctan \theta_2 \right] (1 - \theta_3)\end{aligned}$$

解 2.3.4. 分部积分

$$\begin{aligned}&\int \left(\frac{1}{1+x^2} \int_0^x f(y) dy + f(x) \arctan x \right) dx \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} \int_0^x f(y) dy dx + \int f(x) \arctan x dx \\ &= \int \int_0^x f(y) dy d\arctan x + \int f(x) \arctan x dx \\ &= \arctan x \int_0^x f(y) dy - \int f(x) \arctan x dx + \int f(x) \arctan x dx \\ &= \arctan x \int_0^x f(y) dy = g(x), x \in [0, 1], g(x) \in C[0, 1].\end{aligned}$$

于是要证的等式可改写为

$$\frac{\pi}{8} \int_0^1 f = g'(\theta_1) \theta_3 = g'(\theta_2) (1 - \theta_3). \quad (1)$$

又 $g(0) = 0$, $g(1) = \arctan 1 \int_0^1 f = \frac{\pi}{4} \int_0^1 f$, 所以

$$\frac{\pi}{8} \int_0^1 f = \frac{1}{2} g(1).$$

现在, 由已知 $\int_0^1 f \neq 0$ 知 $g(1) \neq 0$, 且 $g(0) = 0$, 故 $\frac{1}{2} g(1)$ 介于 0 与 $g(1)$ 之间。由连续函数的介值定理, 存在 $\theta_3 \in (0, 1)$ 使得

$$g(\theta_3) = \frac{1}{2} g(1). \quad (2)$$

接下来, 分别在区间 $[0, \theta_3]$ 和 $[\theta_3, 1]$ 上应用拉格朗日中值定理。因为 g 在 $[0, \theta_3]$ 上连续, 在 $(0, \theta_3)$ 内可导, 存在 $\theta_1 \in (0, \theta_3)$ 和 $\theta_2 \in (\theta_3, 1)$ 使得

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\theta_3) - g(0)}{\theta_3 - 0} = \frac{g(\theta_3)}{\theta_3}, \quad g'(\theta_2) = \frac{g(1) - g(\theta_3)}{1 - \theta_3}.$$

将 (2) 代入, 得

$$g'(\theta_1) = \frac{g(1)}{2\theta_3}, \quad g'(\theta_2) = \frac{g(1)}{2(1 - \theta_3)} \Rightarrow g'(\theta_1) \theta_3 = \frac{g(1)}{2}, \quad g'(\theta_2) (1 - \theta_3) = \frac{g(1)}{2}.$$

而 $\frac{g(1)}{2} = \frac{\pi}{8} \int_0^1 f$, 故 (1) 成立。显然 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 互不相同 ($\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$), 这就完成了证明。

2.3.5 例题：

设 f, g 在 $[0, 1]$ 可微且

$$\int_0^1 f(x) dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$$

证明存在 $\xi, \eta \in (0, 1), \xi \neq \eta$ 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$$

解 2.3.5. 已知 f, g 在 $[0, 1]$ 上可微，且满足

$$\int_0^1 f(x) dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx. \quad (1)$$

将左端拆开： $\int_0^1 f = \int_0^{\frac{2}{3}} f + \int_{\frac{2}{3}}^1 f$, 代入 (1) 得

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f = 2 \int_{\frac{2}{3}}^1 f. \quad (2)$$

积分中值定理，存在 $\theta \in (0, \frac{2}{3})$ 使 $\int_0^{\frac{2}{3}} f = \frac{2}{3}f(\theta)$, 存在 $\eta \in (\frac{2}{3}, 1)$ 使得 $\int_{\frac{2}{3}}^1 f = \frac{1}{3}f(\eta)$ 。代入 (2) 得

$$\frac{2}{3}f(\theta) = 2 \cdot \frac{1}{3}f(\eta) \implies f(\theta) = f(\eta). \quad (3)$$

于是我们找到了两个不同的点 $\theta \in (0, \frac{2}{3})$ 和 $\eta \in (\frac{2}{3}, 1)$ 使得 $f(\theta) = f(\eta)$ 。现在考虑要证明的结论：存在 $\xi, \eta \in (0, 1)$ 且 $\xi \neq \eta$ 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]. \quad (4)$$

将 (4) 改写为

$$f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = g'(\xi)f(\eta).$$

这启发我们将其视为关于 f 的一阶线性微分方程：若将 η 暂时固定，则方程 $y' + g'y = g'f(\eta)$ 的通解为 $y = f(\eta) + Ce^{-g(x)}$, 即 $(y - f(\eta))e^{g(x)}$ 为常数。因此，对给定的 η , 函数

$$c(x) = [f(x) - f(\eta)]e^{g(x)}$$

的导数恰好为

$$c'(x) = [f'(x) + g'(x)(f(x) - f(\eta))]e^{g(x)}. \quad (5)$$

于是 $c'(\xi) = 0$ 等价于 (4)。由 (3) 知 $f(\theta) = f(\eta)$, 故

$$c(\theta) = [f(\theta) - f(\eta)]e^{g(\theta)} = 0, \quad c(\eta) = [f(\eta) - f(\eta)]e^{g(\eta)} = 0.$$

因此 c 在 $[\theta, \eta]$ 上满足 $c(\theta) = c(\eta) = 0$ (注意 $\theta < \eta$)。由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (\theta, \eta) \subset (0, 1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$ 。代入 (5) 并注意到 $e^{g(\xi)} > 0$, 即得

$$f'(\xi) + g'(\xi)(f(\xi) - f(\eta)) = 0 \implies f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)].$$

这里 ξ 与 η 不同 (因为 $\xi \in (\theta, \eta)$ 而 η 是右端点), 故结论成立。

第三章 导数题

3.1 偏移题

3.1.1 例题:

(黎曼杯 T18 加强) $f(x) = e^x - x \ln x - kx - 1$. 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 将其分别记为 a, b .

(1) 试求 k 的取值范围;

(2) 证明:

$$k > a + \ln b + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3) 证明:

$$a + b > 1 - \frac{1}{e^{k+1}} + \ln(k+1)$$

解 3.1.1. (1) 令 $g(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x - \frac{1}{x}$, 则原方程等价于 $g(x) = k$. 求导得

$$g'(x) = \frac{(x-1)(e^x - 1)}{x^2}.$$

由于 $x > 0$ 时 $e^x - 1 > 0$, 故 $g'(x)$ 的符号由 $x-1$ 决定: 当 $0 < x < 1$ 时 $g'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时 $g'(x) > 0$. 因此 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $x = 1$ 处取得最小值 $g(1) = e - 1$. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 故对任意 $k > e - 1$, 方程 $g(x) = k$ 恰有两个不同的实根; 而当 $k \leq e - 1$ 时, 方程至多有一个实根. 因此 k 的取值范围是 $(e - 1, +\infty)$.

(2) 设 $f(x)$ 的两个零点为 α, β , 且 $0 < \alpha < 1 < \beta$. 由 $f(\alpha) = 0$ 得

$$k = \frac{e^\alpha}{\alpha} - \ln \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

要证 $k > \alpha + \ln \beta + \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即证

$$\frac{e^\alpha}{\alpha} - \ln \alpha - \frac{1}{\alpha} > \alpha + \ln \beta + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

整理得

$$\ln(\alpha\beta) < \frac{e^\alpha}{\alpha} - \alpha - \frac{1}{\alpha} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

构造函数 $G(x) = \frac{e^x}{x} - x - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($x > 0$), 求导得

$$G'(x) = \frac{(x-1)(e^x - x - 1)}{x^2}.$$

由 $e^x \geq x + 1$ (当且仅当 $x = 0$ 取等), 知当 $x > 0$ 时 $e^x - x - 1 > 0$, 故 $G'(x)$ 的符号由 $x - 1$ 决定: $0 < x < 1$ 时 $G'(x) < 0$, $x > 1$ 时 $G'(x) > 0$. 因此 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 最小值 $G(1) = e - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, 从而 $G(x) > 0$ 恒成立. 于是欲证原不等式, 只需证 $\ln(\alpha\beta) < 0$, 即 $\alpha\beta < 1$.

下证 $\alpha\beta < 1$. 考虑函数 $F(x) = I(x) - I\left(\frac{1}{x}\right)$, 其中 $I(x) = e^x - x \ln x - kx - 1$. 对 $x \geq 1$ 求导整理得

$$F'(x) = \frac{(x-1)(e^x - xe^{1/x} + x-1)}{x^2}.$$

令 $m(x) = e^x - xe^{1/x} + x - 1$, 则

$$m'(x) = e^x - e^{1/x} + \frac{e^{1/x}}{x^2} + 1 > 0 \quad (x > 1),$$

且 $m(1) = 0$, 故 $m(x) > 0$ 对 $x > 1$ 恒成立. 因此 $F'(x) > 0$ ($x > 1$), $F(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $F(1) = 0$, 从而 $F(x) \geq 0$, 即 $I(x) \geq I(1/x)$ 对 $x \geq 1$ 成立. 取 $x = \beta > 1$, 得 $I(\beta) \geq I(1/\beta)$. 由 $I(\beta) = 0$ 知 $I(1/\beta) \leq 0$.

另一方面, 由第(1)问定义的 $g(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 且 $g(\alpha) = k$, 易知 $I(x) = x(g(x) - k)$. 因为 $g(x) - k$ 在 $(0, 1)$ 上严格递减且恰有一个零点 $x = \alpha$, 所以当 $x \in (0, \alpha)$ 时 $g(x) - k > 0$, $I(x) > 0$; 当 $x \in (\alpha, 1)$ 时 $g(x) - k < 0$, $I(x) < 0$. 于是由 $I(1/\beta) \leq 0$ 及 $1/\beta \in (0, 1)$ 可得 $1/\beta \geq \alpha$, 即 $\alpha\beta \leq 1$. 若 $\alpha\beta = 1$, 则 $1/\beta = \alpha$, 代入得 $I(\alpha) = I(\beta) = 0$ 且 $\beta = 1/\alpha$, 但此时 $g(\alpha) = g(1/\alpha)$. 容易验证 $g(x) \neq g(1/x)$ 对 $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 成立 (例如由 $F(x)$ 的性质可推知), 矛盾. 因此 $\alpha\beta < 1$.

综上, $\ln(\alpha\beta) < 0$, 从而原不等式得证.

3.1.2 例题：来自群友“港”

曲线 $\Gamma : x^2 + \ln^2 y = \left(\frac{e}{e+1}\right)^2$, AB 为 Γ 的一条弦.

- (1) 求 Γ 的最高点 P , 最低点 Q 的坐标.
- (2) 若 AB 的斜率为 0, 求 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值.
- (3) 求 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值.

解 3.1.2. 记 $R = \frac{e}{e+1}$, 则方程化为 $x^2 + (\ln y)^2 = R^2$. 由此可得参数方程:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta, \\ y = e^{R \sin \theta}, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

- (1) 当 $\sin \theta = 1$ 时 y 取最大值 e^R , 此时 $x = 0$; 当 $\sin \theta = -1$ 时 y 取最小值 e^{-R} , 此时 $x = 0$. 故最高点为 $P(0, e^R)$, 最低点为 $Q(0, e^{-R})$, 即 $P\left(0, e^{\frac{e}{e+1}}\right)$, $Q\left(0, e^{-\frac{e}{e+1}}\right)$.
- (2) 由于直线 l 斜率为 0, 即水平线, 由曲线关于 y 轴对称, 可设 A 在左半平面, B 在右半平面, 且 A 与 B 关于 y 轴对称. 设 B 对应的参数为 θ ($\cos \theta > 0$), 则 $B(R \cos \theta, e^{R \sin \theta})$, $A(-R \cos \theta, e^{R \sin \theta})$. 于是 $\triangle PAB$ 的底边长 $AB = 2R \cos \theta$, 高为 $e^R - e^{R \sin \theta}$, 面积

$$S(\theta) = R \cos \theta (e^R - e^{R \sin \theta}), \quad \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

令 $t = R \sin \theta$, 则

$$S(t) = \sqrt{R^2 - t^2} (e^R - e^t).$$

为求最大值, 考虑函数 $\varphi(t) = \ln S(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2} \ln(R^2 - t^2) + \ln(e^R - e^t), \quad \varphi'(t) = -\frac{t}{R^2 - t^2} - \frac{e^t}{e^R - e^t} \\ \varphi'(t) = 0 &\Leftrightarrow t e^R + e^t (R^2 - t^2 - t) = 0 \Leftrightarrow t e^{\frac{e}{e+1}} + e^t \left(\left(\frac{e}{e+1} \right)^2 - t^2 - t \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^t - e^{-\frac{1}{e+1}}) \left(\left(\frac{e}{e+1} \right)^2 - t^2 - t \right) + e^{-\frac{1}{e+1}} \left(t + \frac{1}{e+1} \right) \left(\frac{e^2}{e+1} - t \right) = 0 \end{aligned}$$

得到驻点 $t = -\frac{1}{e+1}$, 再求二阶导:

$$\varphi''(t) = -\frac{(R^2 - t^2) - t(-2t)}{(R^2 - t^2)^2} - \frac{e^t(e^R - e^t) - e^t(-e^t)}{(e^R - e^t)^2} = -\frac{R^2 + t^2}{(R^2 - t^2)^2} - \frac{e^t e^R}{(e^R - e^t)^2} < 0$$

因此 $\varphi'(t)$ 在 $(-R, R)$ 上严格单调递减, 故方程 $\varphi'(t) = 0$ 至多有一个实根 $t = -\frac{1}{e+1}$. 由于 $S(t)$ 在端点 $t = \pm R$ 处为零, 在 $(-R, R)$ 内为正, 故该驻点即为最大值点. 此时 $c = e^t = e^{-\frac{1}{e+1}}$, 代入得

$$S_{\max} = \sqrt{R^2 - \left(-\frac{1}{e+1}\right)^2} \left(e^R - e^{-\frac{1}{e+1}}\right) = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \cdot e^{-\frac{1}{e+1}} (e-1)$$

(3) 对于一般直线 l , 设 $A(R \cos \theta_1, e^{R \sin \theta_1})$, $B(R \cos \theta_2, e^{R \sin \theta_2})$, 则 $\triangle PAB$ 面积为

$$S(\theta_1, \theta_2) = \frac{R}{2} |\cos \theta_1(e^{R \sin \theta_2} - e^R) - \cos \theta_2(e^{R \sin \theta_1} - e^R)|.$$

由面积表达式及三角不等式得

$$S \leq \frac{R}{2} (|\cos \theta_1|(e^R - e^{R \sin \theta_2}) + |\cos \theta_2|(e^R - e^{R \sin \theta_1})) \triangleq H(\theta_1, \theta_2),$$

等号成立当且仅当 $\cos \theta_1$ 与 $\cos \theta_2$ 异号。令 $u = \sin \theta_1, v = \sin \theta_2$, 则

$$H(u, v) = \frac{R}{2} \left(\sqrt{1-u^2}(e^R - e^{Rv}) + \sqrt{1-v^2}(e^R - e^{Ru}) \right).$$

求偏导数并令其为零, 得到方程组

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}(e^R - e^{Rv}) = -R\sqrt{1-v^2}e^{Ru}, \quad \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}(e^R - e^{Ru}) = -R\sqrt{1-u^2}e^{Rv}.$$

由对称性知 $u, v < 0$, 令 $a = -u > 0, b = -v > 0$, 则方程组化为

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}(e^R - e^{-Rb}) = R\sqrt{1-b^2}e^{-Ra}, \quad \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}(e^R - e^{-Ra}) = R\sqrt{1-a^2}e^{-Rb}.$$

两式相除并整理得

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e^R - e^{-Rb}}{e^R - e^{-Ra}} = e^{-R(a-b)}.$$

取对数后移项得到

$$\ln a + \ln(e^R - e^{-Ra}) + Ra = \ln b + \ln(e^R - e^{-Rb}) + Rb.$$

定义函数 $K(t) = \ln t + \ln(e^R - e^{-Rt}) + Rt = \ln t + \ln(e^{\frac{e}{e+1}} - e^{-\frac{e}{e+1}t}) + \frac{e}{e+1}t$, 则由复合函数单调性得到 $K(t)$ 严格递增, 从而 $a = b$, 即 $u = v$ 。因此极值点必满足 $u = v$, 此时

$$H(u, u) = R\sqrt{1-u^2}(e^R - e^{Ru}),$$

与(2)中形式相同, 由(2)知该函数的最大值在 $u = -\frac{1}{e}$ 处取得, 同时, 等号条件要求 $\cos \theta_1$ 与 $\cos \theta_2$ 异号, 故取 $\theta_2 = \pi - \theta_1$, 此时直线为水平线 $y = e^{Ru} = e^{-\frac{1}{e+1}}$, 且 S 达到该最大值。由于 $H(u, v)$ 在边界 $u, v = \pm 1$ 上为零, 而内点值大于零, 故该驻点即为全局最大值点。综上, $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \cdot e^{-\frac{1}{e+1}}(e-1)$

3.1.3 例题：

- (1) 若 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 判断 $2\cos^2 \theta$ 与 $(\frac{1}{n} \cos 2\theta + 1)^n$ 的大小关系, 并证明.
(2) 证明: 对于任意自然数 n , $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 有

$$\begin{aligned} & (\sin^2 \theta + \sin^3 \theta + \cdots + \sin^{2n} \theta + \sin^{2n+1} \theta) + (\cos^2 \theta + \cos^3 \theta + \cdots + \cos^{2n} \theta + \cos^{2n+1} \theta) \\ & \geq (\sqrt{2} + 2) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

解 3.1.3. (1) 取 $\theta = 0$ 探路, 显然有 $2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n$, 于是考虑证明 $2\cos^2 \theta \leq (\frac{1}{n} \cos 2\theta + 1)^n$, 即 $1 + \cos 2\theta \leq (\frac{1}{n} \cos 2\theta + 1)^n$, 取对数即 $\ln(1 + \cos 2\theta) \leq n \ln(1 + \frac{\cos 2\theta}{n})$, 改造成:

$$\begin{aligned} f(x) &= n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln(1 + x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} - \frac{1}{1 + x} = \frac{(1 + x) - (1 + \frac{x}{n})}{(1 + \frac{x}{n})(1 + x)} = \frac{x(1 - \frac{1}{n})}{(1 + \frac{x}{n})(1 + x)}. \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 从而 $f(x) \geq f(0) = 0$ 对任意 $x \in (-1, 1]$ 成立, 等号仅当 $x = 0$ 时取得。于是 $1 + \cos 2\theta \leq (1 + \frac{\cos 2\theta}{n})^n$, 即 $2\cos^2 \theta \leq (\frac{1}{n} \cos 2\theta + 1)^n$, 等号当 $\cos 2\theta = 0$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时成立。(2) 由二倍角公式, $\sin^2 \theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, 则对于任意正整数 $m \geq 2$,

$$\sin^m \theta + \cos^m \theta = 2^{-\frac{m}{2}} \left[(1 - \cos 2\theta)^{\frac{m}{2}} + (1 + \cos 2\theta)^{\frac{m}{2}} \right].$$

令 $x = \cos 2\theta \in (-1, 1)$, 则需证的和式为

$$S(\theta) = \sum_{m=2}^{2n+1} 2^{-\frac{m}{2}} \left[(1 - x)^{\frac{m}{2}} + (1 + x)^{\frac{m}{2}} \right].$$

对于每个 $k = \frac{m}{2} \in \{1, 1.5, 2, \dots, n + 0.5\}$, 考虑函数 $\varphi_k(x) = (1 - x)^k + (1 + x)^k$ 。由于 $\varphi_k(x)$ 是偶函数, 且当 $x > 0$ 时,

$$\varphi'_k(x) = -k(1 - x)^{k-1} + k(1 + x)^{k-1} = k \left[(1 + x)^{k-1} - (1 - x)^{k-1} \right] > 0,$$

所以 $\varphi_k(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 从而在 $x = 0$ 处取最小值 $\varphi_k(0) = 2$ 。因此

$$(1 - x)^{\frac{m}{2}} + (1 + x)^{\frac{m}{2}} \geq 2 \Rightarrow \sin^m \theta + \cos^m \theta \geq 2 \cdot 2^{-\frac{m}{2}} = 2^{1-\frac{m}{2}}.$$

对 m 从 2 到 $2n + 1$ 求和得

$$S(\theta) \geq \sum_{m=2}^{2n+1} 2^{1-\frac{m}{2}} = 2 \sum_{m=2}^{2n+1} 2^{-\frac{m}{2}} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = (2 + \sqrt{2}) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

等号成立当且仅当 $x = 0$, 即 $\cos 2\theta = 0$, 亦即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。因此原不等式得证。

3.1.4 例题：

证明：曲线

$$y = (x - \ln x)e^{1-x}$$

上不存在再不同的两点关于直线 $y = x$ 对称

解 3.1.4.

3.1.5 例题：邪帝导数题

已知函数 $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x}$, ($a > 1$)

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, ($x_1 < x_2 < x_3$), 证明 $f(x_1 x_2 x_3) < 1 - a$.

解 3.1.5.

3.1.6 例题：远古偏移题，来自陈语梦

已知 $x_1 - \ln(\ln x_1 + 1) = x_2 - \ln(\ln x_2 + 1) = m$ 求证

$$m + 1 < x_1 + x_2 < \frac{7}{6}m + \frac{5}{6}$$

解 3.1.6. 设函数 $f(x) = x - \ln(\ln x + 1) - 1$, 左侧化为

$$g(x) = x^2 - x(m+1) + 1 = x\ln(\ln x + 1) - x + 1, \quad x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

加强证明 $g(x)$ 单调递增, 求导得 $g'(x) = \ln(\ln x + 1) + x \cdot \frac{1}{\ln x + 1} \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(\ln x + 1) + \frac{1}{\ln x + 1} - 1$ 又因为任意 $x > 0$ 有 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$, 所以 $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 单调递增。右侧化为

$$g(x) = x^2 - x \left(\frac{7}{6}f(x) + \frac{5}{6} \right) + 1 = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{5}{6}x + \frac{7}{6}x\ln(\ln x + 1)$$

可以考虑证明函数

$$h(x) = g(x) + \frac{1}{6}f(x) + \frac{7}{72}f^2(x) = x^2 - x \left(\frac{7}{6}f(x) + \frac{5}{6} \right) + 1 + \frac{1}{6}f(x) + \frac{7}{72}f^2(x)$$

=

单调递减

3.1.7 例题: 来自 amare Donata Caesia

$$x_1 \ln x_1 = x_2 \ln x_2 = -x_3 \ln x_3, x_1 < x_2 < x_3, \text{ 证明 } x_1 + x_2 + x_3 > 2$$

解 3.1.7. 设

$$x_1 \ln x_1 = x_2 \ln x_2 = -x_3 \ln x_3 = m$$

可以考虑加强证明

$$x_1 + x_2 + x_3 > -\frac{m^2}{2} - \frac{1}{3}m + 1 + \frac{8}{3e} + \frac{4e}{135} \left(m + \frac{1}{e}\right)^2$$

设 $\varepsilon = m + \frac{1}{e}$ 这是因为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 1 + m + \frac{m^2}{2} \\ x_3 > 1 - m - \frac{m^2}{2} \end{cases}$$

上界:

$$x_1 + x_2 + x_3 < 2 + (e - 3)m - \frac{m^2}{2} - \frac{2}{3}m^3$$

3.1.8 例题:

$$x_1 \ln x_1 = x_2 \ln x_2 = m, \text{ 证明 } x_1 + x_2 > 1 + m + \frac{m^2}{2}.$$

第四章 插入中间函数