导数练习题

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

    (1) 若 $f(x)$ 的图像上一点 P 处的切线与 $f(x)$ 的图像有且仅有点 P 一个公共点，求点 P 横坐标的取值范围.

    (2) 记 $f(x)$ 的 k 阶导数的所有零点的平方和为 S_k，证明：$S_k<k^2$.

2. 设 $f(x)=\ln x\cdot\ln(1-x)$.

    (1) 求 $f(x)$ 的最大值.

    (2) 证明：曲线 $y=f(x)$ 可以被一个直径为 1 的圆盘覆盖.

3. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}$，其在 $x=x_1>0$ 处的切线为 l.

    (1) 证明：l 与曲线 $y=f(x)$ 有另一个公共点 $x=x_2<0$.

    (2) 求 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 的取值范围.

4. 设 $f(x)=ax^2+bx+x\ln x$，证明：$\forall a,b\in\mathbb{R},x_1,x_2\in\mathbb{R}^+,x_1\neq x_2$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_1,x_2$ 处的切线均不重合.

5. 设 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，$g(x)=2a^2\ln^2(ax)+\dfrac{1}{2a^2x^2}(a>0)$，$h(x)=\mathrm{e}^{x-1}$.

(1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像恰有两个公共点, 求 a 的值.

(2) 在 (1) 的条件下, 记这两个公共点中横坐标较大的为点 P，点 P 处 $g(x)$ 的切线与 $h(x)$ 的图像交于两点，其中横坐标较大的记为点 Q, 点 Q 处 $h(x)$ 的切线与 x 轴交于点 R, 证明：$\triangle PQR$ 为等腰三角形.

6. 设 $f(x)=a\sin 2x-2x+\tan x,x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$，若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

7. 平面内互异六点 $M,N,A_i(i=1,2,3,4)$ 满足 $|MN|=2,|A_iM|+|A_iN|=k,|A_iM|\cdot|A_iN|=1$，求四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的面积的最大值.

8. 证明：$\varphi(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 的三个拐点共线.

9. 设 $f_a(x)=ax(x-1)+\ln x$，若对给定的 k，总存在三个不同的实数 a_1,a_2,a_3，使得直线 $l:y=kx+1$ 与曲线 $f_{a_1}(x),f_{a_2}(x),f_{a_3}(x)$ 同时相切，求实数 k 的取值范围.

10. 设 $f(x)=\ln^2 x+ax^2+bx,x>0$，若 $f(x)$ 存在三个极值点 $x_1<x_2<x_3$，证明：$f(x_2)>-\dfrac{5}{4}$.

11. 矩形 $ABCD$ 中的三个顶点均在曲线 $\mathit{\Gamma}:y=x^4$ 上，证明其周长大于 $10\sqrt{2}-10$.

12. 设 $f(x)=x\ln x-\dfrac{k}{x},k>0$.

(1) 证明：$f(x)$ 恒有唯一零点.

(2) 记 (1) 中的零点为 p，当 $0<k<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，证明：$f(x)$ 的图像上存在关于点 $(p,0)$ 对称的两点.

13. 曲线 $\varGamma_1: y=\ln x+a$，$\varGamma_2: x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$ 交于两点 A,B，证明：直线 AB 的斜率大于 $\sqrt{2}$.

14. 设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像 S 上有两个极值点 P,Q，其中 $P(1,0)$，点 Q 在 $\odot K:(x-6)^2+(y-5)^2=1$ 上，求曲线 S 的切线斜率的最大值.

15. 设 $p,q>0$，且 $p+q=1$，证明：$p\mathrm{e}^{x/p}+q\mathrm{e}^{-x/q}\leqslant \mathrm{e}^{x^2/(8p^2q^2)}$.

16. 设 $f(x)=-x$，$g(x)=\dfrac{2\ln(x+1)}{x}-2$，试比较 $f(f(x))$ 与 $g(g(x))$ 的大小.

17. 设 $f(x)=(x-a)^2(x+b)\mathrm{e}^x$ ，若 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点，且 a 为定值时，设 $x_1<x_2<x_3$ 是 $f(x)$ 的 3 个极值点，判断是否存在实数 b，可找到实数 x_4，使得 x_4,x_1,x_2,x_3 成等差数列.

18. 已知曲线 $\varGamma: 2^{\sin x}+2^{\cos y}=2$ 是由无数个相同的图形组成的，记其中一个为 $\varOmega$，证明：$\varOmega$ 的面积小于 $\dfrac{\pi^3}{2}$，并且 $\varOmega$ 的内接三角形的外接圆半径可能为 $\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$.

19. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\ln x$，$g(x)=\ln x+a$，若曲线 $y=g(x)$ 的任意一条切线与曲线 $y=f(x)$ 都有且仅有一个公共点，求 a 的取值范围.

20. 设 $f(x)=x-a\sin x, x\in(0,\pi)$ 有唯一零点 p，$g(x)=x^2-1-2ax\ln x$ 的最小零点为 q，证明：$q\cdot\mathrm{e}^p<1$.

21. 双曲线 $\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右支与曲线 $y=x^3+k$ 交于点 A,B，求直线 AB 的斜率的取值范围.

22. 已知原点为 O，曲线 $\mathit{\Gamma}: x^2+y^2=\mathrm{e}^{x+y}$.

(1) 判断 $\mathit{\Gamma}$ 是否为某个函数的图像.

(2) 判断是否存在直线 l，使得 $\mathit{\Gamma}$ 始终在 l 的下方.

(3) 若 $\mathit{\Gamma}$ 上两点 A, B 处 $\mathit{\Gamma}$ 的切线平行，证明：$\triangle OAB$ 的外心 K 在定直线上.

23. 已知原点为 O，函数 $f(x)=\sqrt{2\mathrm{e}^x-x^2}$.

(1) 证明：存在实数 k，使得 $f(x)=x+k$ 至少有三个不同的解.

(2) 若 $f(x)$ 的图像上两点 P, Q 处 $f(x)$ 的切线平行，证明：$\triangle OPQ$ 的外心在定直线上.

24. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+x^2-2ax-1$，若 $f(x_0)+(a-\dfrac{1}{a})^2=0$，证明:$x_0^2+\dfrac{1}{a^2}\geqslant\dfrac{8}{27}$.

25. 设 $f(x)=\ln x+\dfrac{x^2}{2}-2x, x>0$，若存在 $x_1<x_2<x_3$ 使得 $y=f(x)$ 在 $x=x_i$ 处的切线均过点 (a,b)，证明：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}>2+\dfrac{b}{a}$.

26. 设 $f(x)=a\sqrt{x+b}, a>0$，$g(x)=\mathrm{e}^{-x}$. 若 $y=f(x), y=g(x)$ 上分别存在两点 A,C,B,D，使得四边形 $ABCD$ 为边平行于坐标轴的矩形，求 a 的取值范围.

27. 记 $F(a,b)$ 为 $f(x)=4(2\sin x+a)^2+(3\cos 2x+2\sin x+b)^2$ 的最大值，求 $F(a,b)$ 的最小值.