华南理工大学
South China University of Technology

线性代数和解析几何作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 10 月 17 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 行列式

1.1 第 1 周作业

习题一第一大题的第（1）（3）（5）问解答如下：

例题 1.1.1 (习题一第一大题)

计算行列式的值 $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

解 1.1.1. (1) 原式 $= \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1.$

(2) 由沙路法则: 原式

$$
\begin{aligned}
=&1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8\\
&-1\times6\times8-2\times4\times9-3\times5\times7\\
=&45+84+96-48-72-105\\
=&225-225=0.
\end{aligned}
$$

实际上第三行是第二行各数的两倍减去第一行各数得到的，因此第三行是第一行和第二行的线性组合，所以矩阵：

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}
$$

的行向量线性相关，行列式的值为 0.

(3) 仍然由沙路法则: 原式

$$
\begin{aligned}
&= x^3 + y^3 + y^3 - xy^2 - xy^2 - xy^2\\
&= x^3 + 2y^3 - 3xy^2.
\end{aligned}
$$

实际上这个结果可以推广的，下面定理的证明运用了行列式的线性性质和递归分解的思想。

定理 1.1.1

将 n 阶行列式 D 中每个元 $a_{ij},(i,j=1,2,...,n)$ 都加上参数 t，得到新行列式 $D(t)$，则：

$$D(t)=D+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\Leftrightarrow D=D(t)-t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

证明. 将 $D(t)$ 中的第一列拆开，得到的新行列式记为 $D_1(t)$，则：

$$D_1(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(t)=D_1(t)+\begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}&=D_1(t)+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+D_1(t)=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+D_2(t) \\ &=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i3}+D_3(t) \\ &=\cdots=t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}+D. \end{aligned}$$

□

下面推广一下上面那道例题：

例题 1.1.2

求 n 阶行列式的值 $(a\neq b)$：

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.2. 原题只有第一个行列式，笔者将其进行了转置，得到第二个行列式，目的是方便进行证明，这里运用了“对偶”的思想。这样就可以轻松写出：

$$D(-a)=\begin{vmatrix} x_1-a & b-a & \cdots & b-a \\ 0 & x_2-a & \cdots & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$$

$$D(-b)=\begin{vmatrix} x_1-b & a-b & \cdots & a-b \\ 0 & x_2-b & \cdots & a-b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n-b \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)$$

因此：

$$D=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)+(-a)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)+(-b)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

容易发现，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

取决于原来的行列式本身，与引入的参数无关（因为我们是一列一列地拆出参数，而恰好在取代数余子式时避开了含有参数的列），因此上述公式构成二元一次线性方程组，由此可以解得：

$$D=\frac{a}{a-b}\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)-\frac{b}{a-b}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a).$$

例题 1.1.3

求 n 阶行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.3. 直接套结论：

$$D(-a)=\begin{vmatrix} x_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$$

则：

$$D = D(-a) + a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

其中对于 A_{ij} 而言，由于只有对角线上的数不是 0，因此如果不取对角线上的数写代数余子式，那么由于系数是 0，行列式无论是什么都不会影响结果

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \prod_{k\neq i}^{n}(x_k - a) & i = j \end{cases}$$

所以：

$$D = D(-a) + a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = D(-a) + a\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a) + a\sum_{i=1}^{n}\prod_{k\neq i}^{n}(x_k - a).$$

我们再补充一个例子：

例题 1.1.4

求 n 阶行列式的值（$a \neq b$）：

$$D = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & 0 \\ a & a & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & b & b \\ 0 & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

解 1.1.4.

$$D = D(-a) + a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = D(-b) + b\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

其中：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \\ 0 & 0 & \cdots & -a & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & \cdots & b-a & b-a \\ -a & b-a & \cdots & b-a & b-a \end{vmatrix}$$

然后使用定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

就可以得到：

$$D(-a) = (-a)^{1+2+3+4+\ldots+n-1}(-a)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^n$$

$$D(-b) = (-b)^{1+2+3+4+\ldots+n-1}(-b)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} b^n$$

当 $a \neq b$ 时，

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{ab^n - ba^n}{a-b} = (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}} (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1})$$

再补充一个例子：

例题 1.1.5 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 1.1.5. 每一列的和是 $a+(n-1)b$，可把每一行都加到第一列，提取公因式 $a+(n-1)b$：

$$\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

或者我们可以使用加边法：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & b & \cdots & b \\ 0 & b & a & b & \cdots & b \\ 0 & b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 1+\frac{nb}{a-b} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}
$$

习题一第二大题的第（1）（2）问解答如下：

例题 1.1.6 (习题一第二大题：证明恒等式)

$$
(1) \begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}
$$

解 1.1.6. (1) 由于行列式阶数较低，考虑直接展开即可完成证明：

$$
\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = a(d+y) - c(b+x) = ad - bc + ay - cx = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}
$$

(2) 直接按列展开即可完成证明：

$$
\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}
$$

例题 1.1.7 (习题一第三大题)

借助行列式的知识解方程组：

$$
\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 17 \end{cases}
$$

解 1.1.7. 写出各个行列式并应用克莱默法则，每一个行列式都可以由沙路法则或者对其进行行变换得出结果：

$$
D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4 - 3 - 2 + 16 = 17
$$

$$
D_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 34 + 12 + 6 - 6 + 136 = 102
$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 34$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 119$$

故解方程组：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{102}{17} = 6, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{34}{17} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{119}{17} = 7.$$

例题 1.1.8 (习题一第 5 大题)

若排列 $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ 的逆序数为 m，求排列 $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, ..., i_1$ 的逆序数。

解 1.1.8. 排列 $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ 的逆序数为 m 指这个排列的逆序数对的数量为 m，而数对一共有

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

种，所以排列 $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, ..., i_1$ 的逆序数为

$$\binom{n}{2} - m = \frac{n(n-1)}{2} - m.$$

例题 1.1.9 (习题一第 6 大题)

求下面各个排列的逆序数并判断排列的奇偶性：

$$(1)26538417 \quad (2)n(n-1)(n-2)...1 \quad (3)2n(2n-2)(2n-4)...2(2n-1)(2n-3)...1.$$

解 1.1.9. (1) 逆序数为 $1+4+3+1+3+1=13$，奇排列。(2) 逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+...+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

设 $k \in \mathbb{N}_+$ 当 $n = 4k,\ 4k+1$ 时，为偶排列，当 $n = 4k+2,\ 4k+3$ 时，为奇排列。(3) 逆序数为

$$(2n-1)+(2n-3)+...+1+(n-1)+(n-2)+...+1 = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

当 $n \equiv 0(\mathrm{mod}4)$ 或 $n \equiv 3(\mathrm{mod}4)$ 时，为偶排列；当 $n \equiv 1(\mathrm{mod}4)$ 或 $n \equiv 2(\mathrm{mod}4)$ 时，为奇排列。

例题 1.1.10 (习题一第 10 大题)

用行列式的定义计算：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 1.1.10. (1) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\tau(2143)abde + \tau(4123)abce = abde - abce = abe(d-c)$$

(2) 我们自上而下地按每一列来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D =& \tau(1n(n-1)(n-2)...2)a_{11}a_{2n}a_{3,n-1}...a_{n-1,n-1}, a_{n,2} \\ =& a_{11}(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_{2n} \cdots a_{n2} \end{aligned}$$

(3) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D =& \tau(n123...(n-1))a_n \\ =& (-1)^{(n-1)} a_n \end{aligned}$$

1.2 第 2 周作业

例题 1.2.1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n, \quad \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n$$

解 1.2.1. (1) 进行行列式的行变换，再按行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = 68$$

(2) 观察到所有列的元素和相同，所以同时相减：

$$\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & x-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & x-a \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a+(n-1)x \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n$$

使用定义法计算可得答案为：

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Big(a+(n-1)x\Big)(a-x)^{n-1}$$

(3) 一样的道理，当 $a \neq 0$, 时，将前 $n-1$ 列的元素乘以 $-\dfrac{x}{a}$ 加到最后一列上，再利用定义计算：

$$D = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a-(n-1)\dfrac{x^2}{a} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a^n-(n-1)x^2a^{n-2}).$$

当 $a = 0$ 时，显然

$$D = \begin{cases} x & , n = 1 \\ x^2 & , n = 2 \\ 0 & , n \geq 3 \end{cases}$$

例题 1.2.2 证明等式

$$(1)\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \\ z_1+x_1 & z_2+x_2 & z_3+x_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$(2)\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = \left[a+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right](a-1)^{n-1}$$

解 1.2.2. (1) 先转置，再一点点拆出来：

$$\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \\ z_1+x_1 & z_2+x_2 & z_3+x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix}$$

然后把最后一列数加到第一行，再减去第二列数：

$$= \begin{vmatrix} 2x_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ 2x_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ 2x_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix}$$

然后将第三列数减去第一列数，再乘以 -1 加到第二列数上：

$$= 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1+z_1 & z_1 \\ x_2 & y_2+z_2 & z_2 \\ x_3 & y_3+z_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(2) 套路式地将第二行，第三行... 第 n 行分别减去第一行：

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

再将第 2 列到第 n 列地数依次加到第一列上：

$$= \begin{vmatrix} a+\dfrac{(n+2)(n-1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = \left(a+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)(a-1)^{n-1}$$

例题 1.2.3 计算行列式

$$(1)\begin{vmatrix}7&49&1&1\\0&20&0&0\\-3&6&-1&5\\-2&11&-3&1\end{vmatrix},\quad (2)\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0&y\\y&x&0&\cdots&0&0\\0&y&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&0\\0&0&0&\cdots&y&x\end{vmatrix}_n,\quad (3)\begin{vmatrix}x&z&0&\cdots&0&0\\y&x&z&\cdots&0&0\\0&y&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&z\\0&0&0&\cdots&y&x\end{vmatrix}_n$$

解 1.2.3. (1) 直接计算即可：

$$\begin{vmatrix}7&49&1&1\\0&20&0&0\\-3&6&-1&5\\-2&11&-3&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&20&0&0\\7&49&1&1\\-3&6&-1&5\\-2&11&-3&1\end{vmatrix}=20\begin{vmatrix}7&1&1\\-3&-1&5\\-2&-3&1\end{vmatrix}$$

$$=20\begin{vmatrix}0&-6&8\\-3&-1&5\\-2&-3&1\end{vmatrix}=20\begin{vmatrix}0&-6&8\\0&3.5&3.5\\-2&-3&1\end{vmatrix}=-40\begin{vmatrix}-6&8\\3.5&3.5\end{vmatrix}=1960.$$

(2) 使用分割法，分别构造上三角行列式和下三角行列式，则

$$\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0&y\\y&x&0&\cdots&0&0\\0&y&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&0\\0&0&0&\cdots&y&x\end{vmatrix}_n=x\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0&0\\y&x&0&\cdots&0&0\\0&y&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&0\\0&0&0&\cdots&y&x\end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y&x&0&\cdots&0\\0&y&x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x\\0&0&0&\cdots&y\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n=x^n-(-y)^n$$

当然这题也可以用行变换先行处理，将第 k 行乘以 $-\dfrac{y}{x}$ 再加到第 $k+1$ 行：

$$\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0&y\\y&x&0&\cdots&0&0\\0&y&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&0\\0&0&0&\cdots&y&x\end{vmatrix}_n=\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0&y\\0&x&0&\cdots&0&y(-\frac{y}{x})\\0&0&x&\cdots&0&y(-\frac{y}{x})^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y(\frac{y}{x})^{n-2}\\0&0&0&\cdots&0&x+y(-\frac{y}{x})^{n-1}\end{vmatrix}=x^{n-1}\left(x+y(-\frac{y}{x})^{n-1}\right)=x^n-(-y)^n$$

(3) 这题可以递推法来做：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = x \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - y \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= x \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - yz \begin{vmatrix} x & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-2} = xD_{n-1} - yzD_{n-2}$$

而 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$，列出特征方程：$r^2 - xr + yz = 0$，则分类：
当判别式为 0 时，根为 $\frac{x}{2}$，则 $D_n = (A + Bn)(\frac{x}{2})^n$，代入 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz = \frac{3}{4}x^2$ 得到

$$D_n = (n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

当判别式不为 0 时，根为 $r_1 = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}, r_2 = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}$，则 $D_n = Ar_1^2 + Br_2^2$，代入 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$ 得到

$$\begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4yz} + x}{2\sqrt{x^2 - 4yz}} \\ B = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4yz} - x}{2\sqrt{x^2 - 4yz}} \end{cases} \Rightarrow D_n = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2 - 4yz}}$$

综上：

$$D_n = \begin{cases} (n+1)\left(\dfrac{x}{2}\right)^n & , x^2 = 4yz \\ \dfrac{(x + \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2 - 4yz}} & , x^2 \neq 4yz \end{cases}$$

例题 1.2.4 求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=0 \\ 5x_2+x_3+4x_4=1 \\ 4x_1+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_4=1 \end{cases}$$

解 1.2.4. 分别计算可得：

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ 18 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 39$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 13$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -14 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 14 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 8 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

所以解为：

$$x_1=\frac{1}{3}, x_2=-\frac{1}{3}, x_3=-\frac{2}{3}, x_4=0$$

例题 1.2.5 如果齐次线性方程组有非零解，求 λ 的取值

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ \lambda^2 x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

解 1.2.5. 考虑系数行列式：

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-2\lambda \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda)(1-\lambda) = 0$$

所以 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 1.

第二章 矩阵

2.1 第 1 周作业

例题 2.1.1

求 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

解 2.1.1. 因为

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha & -\sin\alpha\cos n\alpha - \cos\alpha\sin n\alpha \\ \sin\alpha\cos n\alpha + \cos\alpha\sin n\alpha & \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以答案是 $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

例题 2.1.2

令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算

(1)A^2, A^3 和 $f(A)$, 其中 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$;

解 2.1.2. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, 2 = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$
f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}
$$

例题 2.1.3

求与 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解 2.1.3. 设所求矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a-2b & a+2b \\ 3c-2d & c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b = 3a+c \\ a+2b = -2a+2c \\ 3c-2d = 3b+d \\ c+2d = -2b+2d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$$

例题 2.1.4

证明：与任意 n 阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵，即 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{E}$

解 2.1.4. 考虑一个特殊的矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$，这个矩阵的第 i 行 j 列的元素是 1，其余元素全为 0。并设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与任意 n 阶矩阵都可交换，那么它显然为 n 阶矩阵。那么 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$ 满足第 j 列的元素为 $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$，其余元素全为 0，而 n 阶矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ 满足第 i 行的元素为 $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$，其余元素全为 0。因此由于 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$，那么对于任意 $i \neq j, a_{ij} = 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有对角线上的元素不是 0，其余元素全为 0。然后由于 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 中的 1 元素的位置任意，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角线上的元素必须互相相同，故与任意 n 阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵，即 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{E}$

例题 2.1.5

证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

解 2.1.5. 设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$，列向量为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$。考虑到 $0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$，则 0 的第 i 行 j 列的元素是 $\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_j$，故任意 i, j 均有 $\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_j = 0$。又因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j$，所以考虑当 $i = j$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_i^2 = 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的元素均为 0，故 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{0}$。

例题 2.1.6

证明：任一方阵可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和

解 2.1.6. 设 A 为任意 $n \times n$ 方阵。定义两个矩阵：

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T) \tag{2.1}$$

$$K = \frac{1}{2}(A - A^T) \tag{2.2}$$

首先，验证 S 是对称矩阵：

$$S^T = \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = S$$

因此，S 是对称矩阵。

其次，验证 K 是反对称矩阵：

$$K^T = \left(\frac{1}{2}(A - A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -K$$

因此，K 是反对称矩阵。

最后，验证 $A = S + K$:

$$S + K = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}(2A) = A$$

故任一方阵 A 可分解为对称矩阵 S 和反对称矩阵 K 的和，即 $A = S + K$。证明完毕。

例题 2.1.7

将 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵.

解 2.1.7. 第 2 行减去 2 倍第 1 行，第 3 行减去 5 倍第 1 行，第 4 行减去 7 倍第 1 行，得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix}$$

第 3 行减去 2 倍第 2 行，第 4 行减去 2 倍第 2 行，交换第 3 行和第 4 行得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.8

已知$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,用分块矩阵的方法求$\boldsymbol{A}^2$.

解 2.1.8. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{O}$ 为零矩阵。

计算得到 $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}2 & 13 & -6\\ 5 & 28 & -13\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}^2=\begin{pmatrix}10 & -13 & 3\\ -13 & 46 & -13\\ 3 & -13 & 10\end{pmatrix}$. 故答案为

$$\begin{pmatrix}2 & 13 & -6 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 28 & -13 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 11 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 18 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

例题 2.1.9

计算下列矩阵的秩，如果矩阵为满秩，计算出矩阵的逆：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

解 2.1.9.

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 6.5\end{pmatrix}$$

则 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$ 矩阵的秩为 3，矩阵为满秩，下求逆矩阵：

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13}\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13}\\ 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13}\end{pmatrix}$$

例题 2.1.10

求这个矩阵的逆，其中 $a_i \neq 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 2.1.10. 考虑矩阵将矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{a_n}$，第二行乘以 $\frac{1}{a_1}$，依此类推，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

将这个矩阵的第 n 行与第 $n-1$ 行交换，再将第 $n-1$ 行与第 $n-2$ 行交换，依此类推，直到第 2 行与第 1 行交换，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

将矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{a_n}$，第二行乘以 $\frac{1}{a_1}$，依此类推，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{array}\right) \Rightarrow \text{逆矩阵为} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{pmatrix}$$

例题 2.1.11

求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 2.1.11. 转化为求这个矩阵的逆：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{构造}[A|E] = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第 k 行减去第 k+1 行，即可消去第 k 行中第 k+1 列及以后的所有 1，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

等式两边右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得：

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.12

求解线性方程组：$\begin{cases} 2x_1+3x_3=1, \\ 3x_2-5x_3=-4, \\ -2x_1+3x_2+2x_3=4; \end{cases}$

解 2.1.12. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow x_1=-\frac{17}{20}, x_2=\frac{1}{6}, x_3=\frac{9}{10}.$$

最后一行是由于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$，则 $x_1=-\dfrac{17}{20}, x_2=\dfrac{1}{6}, x_3=\dfrac{9}{10}$

例题 2.1.13

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

解 2.1.13. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换

$$[A|E]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -13 & 6 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & -\frac{13}{2} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -29 & 13 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -29 & 13 & -2 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -29 & 13 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -11 & 5 \\ -10 & -72 & 33 \\ -24 & -159 & 73 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.14

求 $(k+l)\times(k+l)$ 矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}$ 的逆，其中 $\boldsymbol{E}_k$ 为 $k\times k$ 单位矩阵，$\boldsymbol{E}_l$ 为 $l\times l$ 单位矩阵.

解 2.1.14. 设逆矩阵为：$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{X}$ 是 $k\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{Y}$ 是 $k\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{Z}$ 是 $l\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{W}$ 是 $l\times l$ 矩阵。计算矩阵乘积：

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{E}_k\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{Z} & 0\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{W} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

等式成立：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}$$

得到方程组：$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{E}_k,\quad \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}_l$，因此，逆矩阵为：

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}$$

例题 2.1.15

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是同阶方阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆，求下列矩阵的逆：

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

解 2.1.15. 设逆矩阵为：

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的方阵。计算矩阵乘积：

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{O}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{W} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}$，计算得到

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

例题 2.1.16

若 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，证明：

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$$

解 2.1.16. 设 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$，计算乘积：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})\\&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\cdots+\boldsymbol{A}^k)\\&=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^2)+\cdots+(\boldsymbol{A}^{k-1}-\boldsymbol{A}^{k-1})-\boldsymbol{A}^k\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{O}+\boldsymbol{O}+\cdots+\boldsymbol{O}-\boldsymbol{O}=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

例题 2.1.17

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶方阵，证明 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

解 2.1.17. 由伴随矩阵的定义，有：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵。对等式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 两边取行列式：

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}|\boldsymbol{A}|&0&0&\cdots&0&0\\0&|\boldsymbol{A}|&0&\cdots&0&0\\0&0&|\boldsymbol{A}|&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&|\boldsymbol{A}|&0\\0&0&0&\cdots&0&|\boldsymbol{A}|\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|^n$$

分情况讨论：当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时可以直接得到 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，则我们可以对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换使之变成阶梯型矩阵，那么最后一行元素一定全为 0，因此 $|\boldsymbol{A}|$ 中最多只有最后一行的元素对应的代数余子式非零，所以 $|\boldsymbol{A}^*|$ 中一定有全为 0 的列，所以 $|\boldsymbol{A}^*|=0=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，综上所述，无论 $|\boldsymbol{A}|$ 是否为零，都有：

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$$