邪帝导数闯关训练

A组

新手区，考试难度

【例1】已知函数$f(x)=(1-x)e^{x}+a\ln x$.

（1）当$a=0$时，求$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）若$f(x)$存在大于1的零点x_0，设$f(x)$的极值点为x_1；

（I）求a的取值范围；

（II）证明：$3x_1>2x_0$.

【例2】已知函数$f(x)=a\tan x-e^{\frac{x}{a}}-\ln(x+1)+1$，$x\in(-1,\dfrac{\pi}{2})$.

（1）求曲线$f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）若$f(x)\geq 0$，求a的值.

【例3】已知函数$f(x)=e^x-x\ln(x+a)-ae^2x$（$x\geq 0$，$a\geq 1$），$f(x)$的导函数为$g(x)$.

（1）若$g(x)$存在极值点，求a的取值范围；

（2）设$f(x)$的最小值为m，$g(x)$的最小值为n，证明：$m<n$.

【例4】已知函数$f(x)=\dfrac{x^a}{a^x}+\dfrac{a^x}{x^a}$，其中$x>0$，$a>0$.

（1）当$a=1$时，求曲线$f(x)$在$(2,f(2))$处的切线方程；

（2）讨论$f(x)$的极值点个数.

【例5】已知函数$f(x)=x^a-x+\dfrac{1}{a}$（$x>0$，$a>0$）存在唯一极值点x_0.

（1）证明：x_0随着a的增大而增大；

（2）对任意$x\in(1,+\infty)$均有$\dfrac{f(x)}{\ln x}+\ln x>2$，求$a$的取值范围.

【例6】已知函数$f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}+\sin x-1$.

（1）当$a=0$时，求曲线$f(x)$在$(0,-1)$处的切线方程；

（2）当$a=1$时，判断函数$f(x)$在区间$(-\pi,\pi)$内的零点个数，并说明理由.

【例7】已知函数$f(x)=\tan x-ae^{x}$，$g(x)=f(x)-\ln(x+1)$.

（1）当$x\in(-1,\dfrac{\pi}{2})$时，若$g(x)\geq 0$，求实数a的取值范围；

（2）当$x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$时，证明：$e^{x}+\ln(x+1)\leq 2\tan x+1$.

【例8】已知函数$f(x)=\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{4}-a)}{a}-(x+1)^{2}+a^{2}$，其中$a\in(0,1)$.

（1）当$a=\dfrac{\pi}{4}$时，证明：$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内单调递减；

（2）若$f(x)\leq 1$，求实数a的取值范围.

【例9】已知函数$f(x)=xe^{a-x}+(a-x)e^{x}$，$g(x)=e(ax+1-x^{2})$.

（1）$a=1$时，讨论函数$y=f(x)$的单调性；

（2）令$h(x)=g(x)-f(x)$，函数$y=h(x)$有三个极值点x_1,x_2,x_3（$x_1<x_2<x_3$）；

（i）求a的取值范围；

（ii）当$a<1$时，若$x_1x_2+x_3\geq e^{\sin a}+ka$，求$k$的值.

【例10】已知函数$f(x)=ax^{2}e^{1-x}-\ln(ax)-1$（$a>0$）有三个零点$x_1,x_2,x_3$（$x_1<x_2<x_3$）.

（1）求a的取值范围；

（2）证明：$ae^{x_1x_3}>e$；

（3）记$f(x)$较大的极值点为x_4，当$\dfrac{x_4}{x_2}>a$时，证明：$f(x_1x_2x_3)+f(ax_2)>0$.

B组

提升训练

【例1】已知函数$f(x)=\dfrac{x-a}{\ln x}$，$g(x)=(x+a)^2+a$，其中$a\in R$.

（1）当$a=0$时，若曲线$f(x)$与直线$y=k$有一个交点，求实数k的取值范围；

（2）设函数$h(x)=f(x)+g(x)$，讨论$h(x)$的零点个数.

【例2】已知函数$f(x)=(1-ax)e^{\frac{x}{2}}+x^2\ln(ax)$，其中$a>0$，$x>0$.

（1）证明：存在a，使得$x=\dfrac{1}{a}$是$f(x)$的极小值点；

（2）判断a的个数，使得$f(x)$有且仅有两个零点.

【例3】已知函数$f(x)=ae^{x}\sin(ax)+x^{2}-\pi x$.

（1）当$x\leq 0$时，$f(x)\geq 0$，求实数a的取值范围；

（2）当$x\in[0,\pi]$时，讨论$f(x)$的零点个数.

【例4】已知函数$f(x)=e^{ax}+x\ln x-ax^{2}-x$，其中$x>0$，$a>0$，设函数$f(x)$的导函数为$g(x)$.

（1）证明：$f(x)\geq 0$；

（2）讨论$g(x)$的零点个数；

（3）若函数$g(x)$存在两个极值点x_1,x_2（$x_1<x_2$），证明：$f(x_1)<f(x_2)$.

【例5】已知函数$f(x)=a e^{x}-2x+\ln\frac{x}{a}(a>0)$有三个零点$x_1,x_2,x_3$（$x_1<x_2<x_3$）.

（1）求a的取值范围;

（2）记$f(x)$的极值点为x_4,x_5（$x_4<x_5$），证明：$(x_4-x_2)f(x_5)<(x_5-x_2)f(x_4)$.

【例6】$f(x)=x^2(2-x)e^{1-x}$，$f(x_1)=f(x_2)=a$（$0<x_1<x_2,a>\frac{1}{2}$），$g(x)=\frac{1}{x}(\frac{1}{2-x}+\ln\frac{f(x)}{x})$.

证明：$g(x_1)+g(x_2)<0$.

【例7】已知函数$f(x)=a e^{x}+(x^{2}-1)(x+1)$有两个零点$x_1, x_2$（$-1<x_1<x_2<1$）.

（1）求a的取值范围；

（2）若$t a \ln a<x_1+x_2<t(a-1)$，求t的值.

C组

黑色系列

【例1】已知函数$f(x)=a\,e^{x}+(x^{2}-1)(x+1)$有两个零点$x_1,x_2$（$-1<x_1<x_2<1$）.

（1）求a的取值范围；

（2）证明：$\dfrac{2a\ln a}{a^{e}-1}-\dfrac{2a}{e}<\dfrac{27}{4}(x_1+x_2)<-\sqrt{a}\ln a$.

【例2】已知函数$f(x)=a\,e^{x-1}-2x+\ln x+e^{1-a}$（$a>\dfrac{1}{2}$），证明：$f(x)+xf(\dfrac{2}{(2-\ln a)x})>0$.

【例3】已知函数$f(x)=ae^{x-1}-2x+\ln x+e^{1-a}$有三个零点$x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$.

（1）求a的取值范围；

（2）若$a>\dfrac{1}{2}$，记$f(x)$的极值点为$x_4,x_5(x_4<x_5)$，证明：

i. $x_1x_2x_3<(\dfrac{2}{1+e^{1-a}})^{\frac{1}{3}}$；

ii. $x_1+x_2>2x_4$，$x_2+x_3<2x_5$；

iii. $x_1+x_3>x_4+x_5>2x_2$；

iv. $x_2>x_4x_5>x_1x_3$；

v. $x_1+2x_2+x_3>2x_4+2x_5$；

vi. $(x_1-x_2)f(x_5)<(x_3-x_2)f(x_4)$；

vii. $(x_2-x_5)f(x_4)<(x_2-x_4)f(x_5)$；

viii. $(x_1+x_2-2x_4)f(x_4)<(x_2+x_3-2x_5)f(x_5)$；

ix. $f(x_4)\ln x_1<f(x_5)\ln x_3$；

x. $(x_4+x_5)[f(x_4)-f(x_5)]+(x_1+x_3)f(x_5)<2x_2f(x_4)$.

【例4】已知函数$f(x)=x-4\ln x-\dfrac{3}{x}+2+a$（$a<\dfrac{1}{2e}$）有三个零点$x_1,x_2,x_3$（$x_1<x_2<x_3$）.

（1）求a的取值范围；

（2）证明：$f(x_1x_2)+f(x_1x_2x_3)>2a$.

【例5】已知函数$f(x)=x^2e^{a-x}-a^2\ln x-a$（$a>\dfrac{1}{2}$），$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$（$x_1<x_2<x_3$），$f'(x_4)=f'(x_5)=0$（$x_4<x_5$）.

（1）证明：$x_4f(x_5)+x_5f(x_4)<0$；

（2）证明：$(x_2+x_3+x_4)f(x_1x_2x_3)+(2x_1+x_5)f(x_2x_3)>0$.

【例6】记函数$f_n(x)=(a+n-1)^x+(a+n)^x-(a+n+1)^x$（$a>0$，$n>0$，$n\in N^*$）的零点为$x_n$，设数列$\{x_n\}$的前$n$项和为$S_n$；记$\begin{cases} S_n+S_{3n}+S_{8n}+S_{12n}-S_{4n}-S_{9n}-S_{11n}=m \\ S_{2n}+S_{4n}+S_{7n}+S_{11n}-S_n-S_{5n}-S_{8n}-S_{10n}=s \\ S_{3n}+S_{5n}+S_{10n}-S_{2n}-S_{7n}-S_{9n}=r \end{cases}$，证明：$s^2<mr$.