引理一 $\ln x \sim \dfrac{2(x-1)}{x+1}$

引理二 $(\ln x)^2 \le (\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^2$

引理三 $e^x - x - 1 \ge 0$

(1)

$a>1,$证明略

(2)

令$x=\ln t,$则$g(t)=t-\ln t-a, g(t_1)=g(t)=0,$ 其中$t_1\in(0,1), t_2\in(1,+\infty)$

故即证$1-a<\ln t_1+\ln t_2<\dfrac{2}{3}(1-a)$

即证$1+a<t_1+t_2<\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}a$

先证：$t_1+t_2>1+a$

由引理一得，$t_1-\ln t_1=a>t_1-\dfrac{2(t_1-1)}{t_1+1}$

整理得$t_1{}^2-(1+a)t_1-a+2>0$ ①

同理可得$t_2{}^2-(1+a)t_2-a+2<0$ ②

②$-$①得$(t_2-t_1)(t_1+t_2-1-a)>0$

故$t_1+t_2>1+a$得证

再证：$t_1+t_2<\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}a$

记$m(t)=t^2+2t-4t\ln t+2(t-\ln t)-\dfrac{2}{3}(t-\ln t-1)^2$

$m'(t)=\dfrac{2}{3t}(t^2+4t-5-(4t+2)\ln t)$

下证：$t^2+4t-5-(4t+2)\ln t\ge 0$ ③

即证$\ln t\le\dfrac{t^2+4t-5}{4t+2}$

记$p(t)=\ln t-\dfrac{t^2+4t-5}{4t+2}$

则$p'(t)=\dfrac{-(t-1)^3}{t(2t+1)^2}$

故$p(t)\le p(1)=0$得证

则$m'(t)\ge 0, m(t)$单调增

故$m(t_2)>m(t_1)$

即$t_2{}^2+2t_2-4t_2\ln t_2+2(t_2-\ln t_2)-\dfrac{2}{3}(t_2-\ln t_2-1)^2>t_1{}^2+2t_1-4t_1\ln t_1+2(t_1-\ln t_1)-\dfrac{2}{3}(t_1-\ln t_1-1)^2$

即$t_2{}^2+2t_2-4t_2(t_2-a)+2a-\dfrac{2}{3}(a-1)^2>t_1{}^2+2t_1-4t_1(t_1-a)+2a-\dfrac{2}{3}(a-1)^2$

即$-3t_2^{\ 2}+(2+4a)t_2>-3t_1^{\ 2}+(2+4a)t_1$

即$3(t_2-t_1)(t_1+t_2-\frac{2}{3}-\frac{4a}{3})<0$

故$t_1+t_2<\frac{2}{3}+\frac{4}{3}a$

(3)

记$h(x)=x^4-(e^x-x+3)(e^x-x-1)x^2+4(e^x-x-1)^2+\frac{10}{9}(e^x-x-1)^3$

$h'(x)=-\frac{2}{3}(e^x-x-1)(3x^2e^x-5e^{2x}-2e^x+8xe^x+4x+7)$

下证:$3x^2e^x-5e^{2x}-2e^x+8xe^x+4x+7\le 0$

令$e^x=t$

即证$3t(\ln t)^2-5t^2-2t+8t\ln t+4\ln t+7\le 0$

由引理二得

$3t(\ln t)^2-5t^2-2t+(8t+4)\ln t+7\le 3t(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}})^2-5t^2-2t+8t\ln t+4\ln t+7=-2t^2-8t+10+(8t+4)\ln t$

则由③可得$-2(t^2+4t-5-(4t+2)\ln t)\le 0$

故$3t(\ln t)^2-5t^2-2t+(8t+4)\ln t+7\le 0$

又由引理三得$e^x-x-1\ge 0$

则$h'(x)\ge 0, h(x)$单调增

故有$h(x_2)>h(x_1)$

$x_2^{\ 4}-(e^{x_2}-x_2+3)(e^{x_2}-x_2-1)x_2^{\ 2}>x_1^{\ 4}-(e^{x_1}-x_1+3)(e^{x_1}-x_1-1)x_1^{\ 2}$

$x_2^{\ 4}-(a+3)(a-1)x_2^{\ 2}>x_1^{\ 4}-(a+3)(a-1)x_1^{\ 2}$

整理得$(x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2})(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}-(a+3)(a-1))>0$

由(2)得$x_1+x_2<1-a<0$

则$x_2<-x_1, x_2^{\ 2}<x_1^{\ 2}$

故$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}<(a+3)(a-1)$得证