Arch. Math., Vol. 47, 422–426 (1986)

0003-889X/86/4705-0422 $ 2.50/0

Ungleichungen für Mittelwerte

Von

Horst Alzer

Das *logarithmische Mittel* L zweier positiver Zahlen x und y wird durch

$$L(x, y) := \frac{x - y}{\ln x - \ln y} \quad \text{für } x \neq y,$$

und

$$L(x, x) := x$$

definiert.

L spielt einerseits bei praktischen Problemen aus dem Bereich der Elektrostatik und der Wirtschaftswissenschaften eine Rolle (siehe [14], [15]) und ist andererseits Gegenstand zahlreicher rein-mathematischer Untersuchungen. Vor allem sind eine Vielzahl von Ungleichungen für L veröffentlicht worden. Wir verweisen auf die im Literaturverzeichnis genannten Aufsätze.

Sowohl das logarithmische Mittel als auch das *geometrische* und das *arithmetische Mittel* zweier Zahlen sind Spezialfälle des von K. B. Stolarsky [16] eingeführten *verallgemeinerten logarithmischen Mittels* L_r, das für alle reellen Zahlen $r \neq 0, 1$ durch

$$L_r(x, y) := \left[\frac{x^r - y^r}{r(x - y)}\right]^{1/(r-1)}, \quad x \neq y,$$

definiert wird. Einfache Rechnungen zeigen:

$$L_{-1}(x, y) = \sqrt{xy}, \quad \lim_{r \to 0} L_r(x, y) = L(x, y),$$

$$\lim_{r \to 1} L_r(x, y) = \frac{1}{e}(x^x/y^y)^{1/(x-y)} \quad \text{und} \quad L_2(x, y) = \frac{x + y}{2}.$$

Von E. B. Leach und M. C. Sholander [8], [9] ist für $I(x, y) := \frac{1}{e}(x^x/y^y)^{1/(x-y)}$ die Bezeichnung *identric mean* gewählt worden.

Auf Grund der Integralformel

$$L_r(x, y) = \exp \frac{1}{r - 1} \int_1^r \frac{1}{t} \ln I(x^t, y^t)\, dt$$

spielt I „a central role“ [9, S. 209] innerhalb der Familie der Mittelwerte L_r (vgl. [16]).

Stolarsky [16] hat bewiesen, daß $L_r(x, y)$ (mit $x \neq y$) eine bezüglich r in $\mathbb{R}$ streng monoton steigende Funktion ist. Somit ergeben sich insbesondere folgende Ungleichungen:

$$\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\ln x - \ln y} < \frac{1}{e}(x^x/y^y)^{1/(x-y)} < \frac{x+y}{2}, \qquad x \neq y.$$

Diese Abschätzungen für L und I lassen sich verschärfen: Wenn mit M_r das sogenannte *Potenz Mittel*

$$M_r(x, y) := \left(\frac{x^r + y^r}{2}\right)^{1/r} \qquad \text{für } r \neq 0,$$

und

$$M_0(x, y) := \sqrt{xy}$$

bezeichnet wird, dann gilt für alle positiven Zahlen x und y mit $x \neq y$:

$$M_0(x, y) < L(x, y) < M_{1/3}(x, y) \quad \text{und} \quad M_{2/3}(x, y) < I(x, y) < M_{\ln 2}(x, y). \tag{1}$$

Darüber hinaus ist in [10] bzw. [1] gezeigt worden, daß in (1) die Werte 0 und 2/3 durch keine größeren Zahlen und die Werte 1/3 und ln 2 durch keine kleineren Zahlen ersetzt werden können.

Bei $M_r(x, y)$ handelt es sich um eine bezüglich r in $\mathbb{R}$ stetige und (für $x \neq y$) streng monoton steigende Funktion (siehe [7]).

Im Folgenden bezeichnen wir mit $A(x, y)$ und $G(x, y)$ das arithmetische und das geometrische Mittel von x und y.

Im ersten Teil dieser Note wollen wir zeigen, daß sowohl $\sqrt{LI}$ als auch $\frac{1}{2}(L + I)$ zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von A und G liegen.

Satz 1. *Für alle positiven Zahlen x und y mit $x \neq y$ gilt:*

$$\begin{aligned} \sqrt{A(x, y)\, G(x, y)} &< \sqrt{L(x, y)\, I(x, y)} \\ &< \tfrac{1}{2}(L(x, y) + I(x, y)) < \tfrac{1}{2}(A(x, y) + G(x, y)). \end{aligned} \tag{2}$$

Beweis. Wir werden für $t \neq 0$ die beiden Ungleichungen

$$L(e^t, e^{-t}) + I(e^t, e^{-t}) < A(e^t, e^{-t}) + G(e^t, e^{-t}) \tag{3}$$

und

$$A(e^t, e^{-t})\, G(e^t, e^{-t}) < L(e^t, e^{-t})\, I(e^t, e^{-t}) \tag{4}$$

beweisen. Wenn wir in (3) bzw. (4) t durch $\frac{1}{2}\ln(x/y)$ $(x \neq y)$ ersetzen und anschließend beide Seiten von (3) mit $\sqrt{xy}$ bzw. beide Seiten von (4) mit xy multiplizieren, dann erhalten wir nach elementaren Umformungen die Ungleichungen (2).

Wir beginnen mit dem Beweis von (3).

Auf Grund von

$$I(e^t, e^{-t}) = e^{t \coth t - 1}, \quad L(e^t, e^{-t}) = \frac{\sinh t}{t},$$

$$G(e^t, e^{-t}) = 1 \quad \text{und} \quad A(e^t, e^{-t}) = \cosh t$$

genügt es zu zeigen, daß die Funktion

$$f(t) := \ln(\cosh t + 1 - \sinh t/t) - t \coth t + 1$$

für $t > 0$ nur positive Werte annimmt.

Differentiation von f ergibt:

$$\begin{aligned}
&(\cosh t + 1 - \sinh t/t)(\sinh t)^2 f'(t) \\
&= \frac{1}{4t^2}\sinh(3t) - \left(2 + \frac{3}{4t^2}\right)\sinh t + t - \frac{1}{2}\sinh(2t) + t\cosh t \\
&= \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{3}{4}(9^{n+1} - 1) - 2(n+1)(2n+3)(4^n - 2n + 1)\right]\frac{t^{2n+1}}{(2n+3)!}.
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion beweist man:

$$\tfrac{3}{4}(9^{n+1} - 1) - 2(n+1)(2n+3)(4^n - 2n + 1) > 0 \quad \text{für } n \geqq 3.$$

Folglich gilt für $t > 0$:

$$f'(t) > 0 \quad \text{und somit} \quad f(t) > \lim_{t \to 0} f(t) = 0.$$

Die Ungleichung (4) erhalten wir, wenn wir in der für $z \neq 1$ gültigen Abschätzung

$$z < e^{z-1}$$

für z den Wert $t \coth t$ $(t \neq 0)$ einsetzen:

$$\begin{aligned}
A(e^t, e^{-t})\, G(e^t, e^{-t}) = \cosh t &< \frac{\sinh t}{t}\exp(t \coth t - 1) \\
&= L(e^t, e^{-t})\, I(e^t, e^{-t}). \quad \square
\end{aligned}$$

Im zweiten Teil dieser Arbeit wollen wir nun der Frage nachgehen, wie sich das geometrische und das arithmetische Mittel von L und I durch M_r bestmöglich abschätzen lassen.

Satz 2. *Für alle positiven Zahlen x und y mit $x \neq y$ gilt:*

$$M_0(x, y) < \sqrt{L(x, y)\, I(x, y)} < M_{1/2}(x, y). \tag{5}$$

In (5) kann weder 0 durch einen größeren noch 1/2 durch einen kleineren Wert ersetzt werden.

Beweis. Auf Grund der Identität

$$M_{1/2}(x, y) = \tfrac{1}{2}(A(x, y) + G(x, y))$$

folgt die Doppelungleichung (5) unmittelbar aus (2).

Somit haben wir noch zu zeigen, daß die Abschätzungen für $\sqrt{LI}$ durch M_r nicht verschärft werden können.

Wir nehmen an, es gibt eine Zahl $r > 0$, so daß für alle positiven x und y mit $x \neq y$ gilt:

$$M_r(x, y) < \sqrt{L(x, y)\, I(x, y)}. \tag{6}$$

Wenn wir in (6) y durch $x + 1$ ersetzen und dann x gegen 0 streben lassen, so ergibt sich: $2^{-1/r} \leqq 0$; d. h. (6) ist nur dann für alle positiven Zahlen x und y $(x \neq y)$ erfüllt, wenn $r \leqq 0$.

Wir definieren für $r \neq 0$:

$$g_r(t) := \ln\ln t - \ln(t-1) - \ln t - \frac{\ln t}{t-1} + \frac{2}{r}\ln\frac{t^r+1}{2} + 1 \qquad \text{für } t > 1,$$

und

$$g_r(1) := \lim_{t\to 1} g_r(t) = 0.$$

Eine kleine Rechnung zeigt: $g_r'(1) = 0$ und $g_r''(1) = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{2})$. Für $r < 1/2$ ist $g_r''(1)$ negativ und somit existiert eine positive Zahl δ, so daß für $t \in (1, 1 + \delta)$ gilt: $g_r'(t) < g_r'(1)$. Folglich fällt g_r im Intervall $(1, 1 + \delta)$ streng monoton und wir erhalten:

$$(7) \qquad g_r(t) < g_r(1) = 0 \quad \text{für } 1 < t < 1 + \delta.$$

Setzen wir in (7) $t = x/y$ mit $y < x < (1 + \delta)\, y$, dann folgt:

$$M_r(x, y) < \sqrt{L(x, y)\, I(x, y)}.$$

Die rechte Ungleichung von (5) läßt sich also nicht verschärfen. □

Nach Satz 2 folgt, daß in der (nach Satz 1) für alle x und y mit $x \neq y$ gültigen Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}(L(x, y) + I(x, y)) < M_{1/2}(x, y)$$

der Parameter 1/2 durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Die Frage, wie sich $\frac{1}{2}(L + I)$ nach unten hin durch M_r optimal abschätzen läßt, bleibt noch unbeantwortet. Zahlreiche durchgerechnete Beispiele haben zu folgender V e r m u t u n g geführt:

Für alle positiven Zahlen x und y mit $x \neq y$ gilt:

$$(8) \qquad M_{\ln 2/(1+\ln 2)}(x, y) < \tfrac{1}{2}(L(x, y) + I(x, y)).$$

Zumindest können wir zeigen, daß in (8) für den Wert $\ln 2/(1 + \ln 2)$ keine größere Zahl eingesetzt werden darf:

Lassen wir in

$$M_r(x, x+1) < \tfrac{1}{2}(L(x, x+1) + I(x, x+1)), \qquad x > 0,\ r > 0,$$

x gegen 0 streben, so folgt: $r \leqq \ln 2/(1 + \ln 2)$.

Literaturverzeichnis

[1] H. ALZER, Ungleichungen für $(e/a)^a (b/e)^b$. Elem. Math. **40**, 120–123 (1985).

[2] H. ALZER, Über Mittelwerte, die zwischen dem geometrischen und dem logarithmischen Mittel zweier Zahlen liegen. Erscheint im Anzeiger der Österr. Akad. Wiss.

[3] F. BURK, By all means. Amer. Math. Monthly **92**, 50 (1985).

[4] B. C. CARLSON, Some inequalities for hypergeometric functions. Proc. Amer. Math. Soc. **17**, 32–39 (1966).

[5] B. C. CARLSON, The logarithmic mean. Amer. Math. Monthly **79**, 615–618 (1972).

[6] E. L. DODD, Some generalizations of the logarithmic mean and of similar means of two variates which become indeterminate when the two variates are equal. Ann. Math. Stat. **12**, 422–428 (1971).
[7] N. D. KAZARINOFF, Analytic inequalities. New York 1961.
[8] E. B. LEACH and M. C. SHOLANDER, Extended mean values. Amer. Math. Monthly **85**, 84–90 (1978).
[9] E. B. LEACH and M. C. SHOLANDER, Extended mean values II. J. Math. Anal. Appl. **92**, 207–223 (1983).
[10] T. P. LIN, The power mean and the logarithmic mean. Amer. Math. Monthly **81**, 879–883 (1974).
[11] D. S. MITRINOVIĆ, Analytic inequalities. Berlin-Heidelberg-New York 1970.
[12] B. OSTLE and H. L. TERWILLIGER, A comparison of two means. Proc. Montana Acad. Sci. **17**, 69–70 (1957).
[13] A. O. PITTENGER, Inequalities between arithmetic and logarithmic means. Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. **680**, 15–18 (1980).
[14] A. O. PITTENGER, The logarithmic mean in n variables. Amer. Math. Monthly **92**, 99–104 (1985).
[15] G. POLYÁ and G. SZEGÖ, Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Princeton 1951.
[16] K. B. STOLARSKY, Generalizations of the logarithmic mean. Math. Mag. **48**, 87–92 (1975).
[17] G. SZÉKELY, A classification of means. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **18**, 129–133 (1975).

Eingegangen am 25. 8. 1985*)

Anschrift des Autors:

Horst Alzer
Morsbacherstr. 10
D-5220 Waldbröl

*) Eine Neufassung ging am 25. 2. 1986 ein.