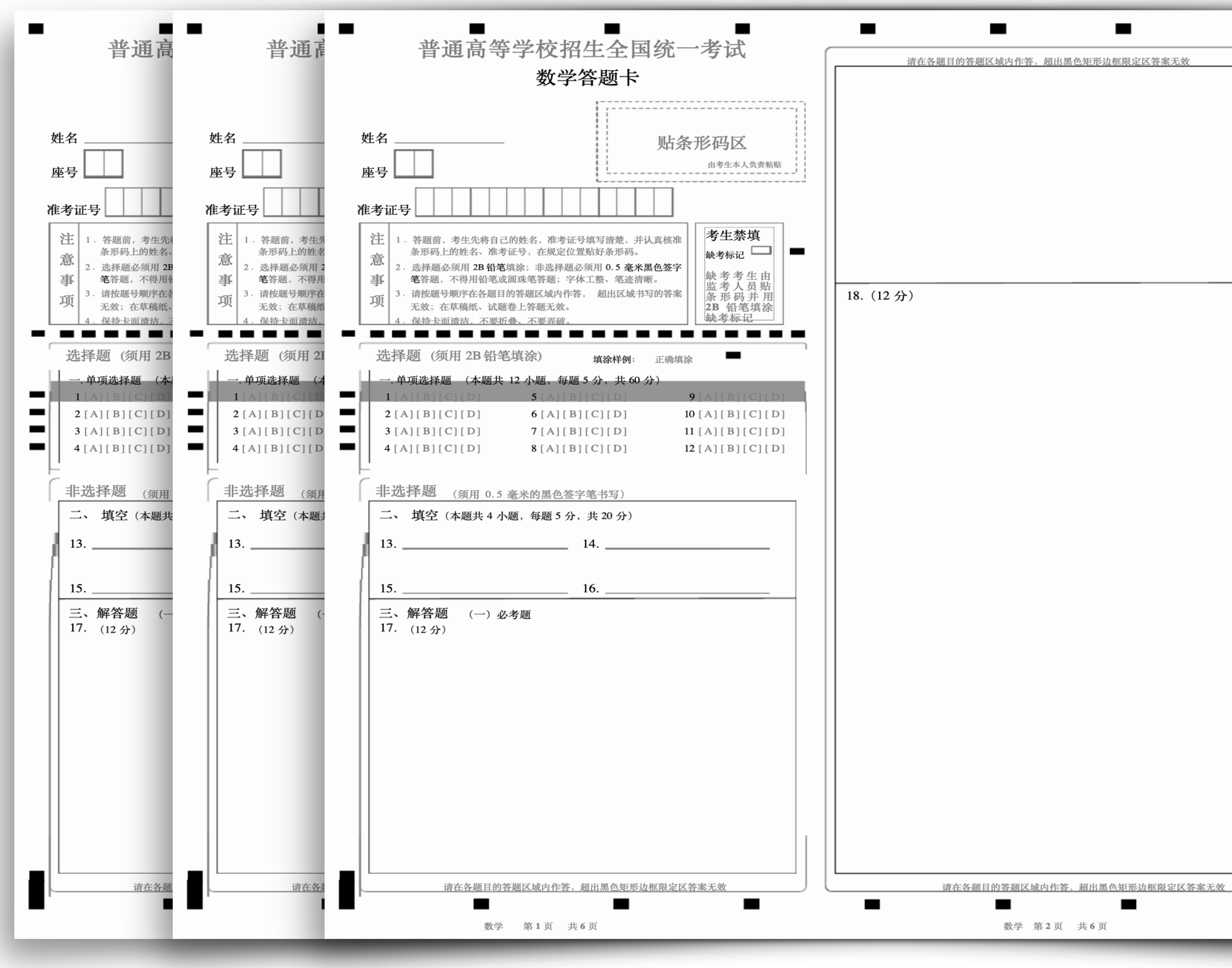
抖音

Final Strike

直击高考



TutorCat

今日压轴，今日秒解。

由 导学猫教育教研团队 实时更新

抖音搜索高考专题首批受邀创作者

直击高考

TutorCat特别出品

2025高考压轴题 实时解析专栏

考场风云，唯快不破。

高考题刚落地，**我们已上线。**

《直击高考》由导学猫教育出品，专注**实时更新全国各地高考压轴题解析**

- **当日更新｜高考当天即更压轴题解**
- **题目原文+逐步推理｜秒懂高分思路**

新高考I卷

第19题 三角压轴

万题千法，一眼识真

题目 函数$f(x) = 5\cos x - \cos 5x$.

（1）求$f(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{4}]$的最大值；

（2）给定$\theta \in (0,\pi)$和$\alpha \in R$，证明：存在$y \in [\alpha - \theta, \alpha + \theta]$，使得$\cos y \le \cos\theta$；

（3）设$b \in R$，若存在$\varphi \in R$使得$5\cos x - \cos(5x + \varphi) \le b$对$x \in R$恒成立，求$b$的最小值.

第一问解析 （1）$f'(x) = 5\sin(5x) - 5\sin x$，当$\dfrac{\pi}{4} \ge x \ge \dfrac{\pi}{6}$时，$f'(x) \ge 0$，$f(x)$单调递增，当$\dfrac{\pi}{6} \ge x \ge 0$时，$f(x)$单调递减；$f(x) \le f(\dfrac{\pi}{6}) = 3\sqrt{3}$；

第二问解析

$\cos y$为偶函数，故原题等价于证明：

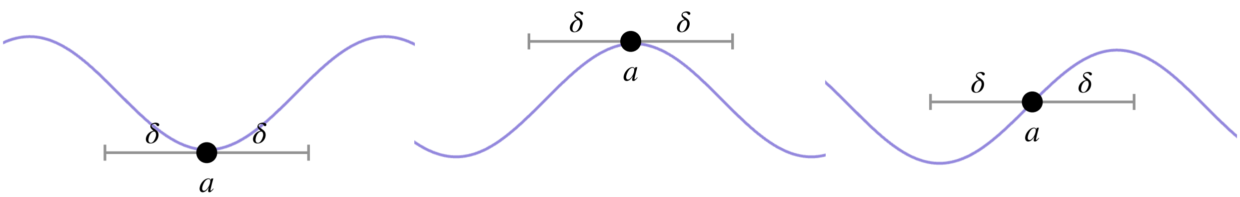
- $\alpha \geq 0$时，存在$y \in [\theta+\alpha, \theta-\alpha]$，使得$\cos y \leq \cos\theta$;
- $\alpha < 0$时，存在$y \in [\theta-\alpha, \theta+\alpha]$，使得$\cos y \leq \cos\theta$;

证明：$\alpha \geq 0$时，$\cos\theta$单调递减，故存在$y \in [\theta, \theta+\alpha]$使得$\cos y \leq \cos\theta$;

$\alpha < 0$时，$\cos\theta$单调递减，故存在$y \in [\theta, \theta-\alpha]$使得$\cos y \leq \cos\theta$.

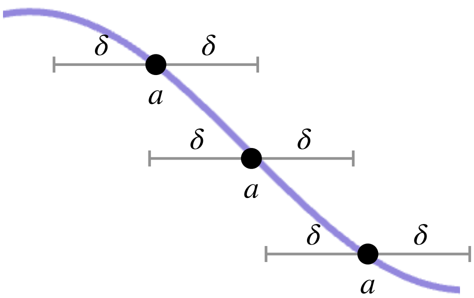
命题思路

在$y = \cos x$上取一点$(a, \cos a)$，构造以a为中点的区间



$$[a-\delta, a+\delta]$$

若a在递减的开区间上，



在a右侧一个极小的距离内，必定存在$y > a$使得$\cos y < \cos a$.

第三问解析

记$F(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$，记$F(x)$极值点为$x_n$，则

$$F'(x_n)=-5\sin x_n+5\sin(5x_n+\varphi)=0$$

$$\sin x_n=\sin(5x_n+\varphi)$$

由$\cos^2(5x_n+\varphi)+\sin^2(5x_n+\varphi)=1$得：

$$\cos^2(5x_n+\varphi)=1-\sin^2(5x_n+\varphi)=1-\sin^2 x_n=\cos^2 x_n$$

$$\cos(5x_n+\varphi)=\pm\cos x_n$$

故$F(x_n)=5\cos x_n\pm\cos x_n$，具体的

$$若x_p为极大值点，F(x_p)=6\cos x_p$$

$$若x_q为极小值点，F(x_q)=4\cos x_q$$

原题等价于求$F(x_p)$的最小值，$F(x_p)$周期为2π，记$F(x)=h(\varphi)$，$h(\varphi)$周期为2π，故只需研究

$$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)，\varphi\in(=\pi,\pi)$$

由$F'(x_n)=0$得：

$$x_{p1}=-\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}，x_{q1}=0-\frac{\varphi}{6}，x_{p2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}$$

$$x_{p3}=\frac{5}{6}\pi-\frac{\varphi}{6}，x_{q2}=\pi-\frac{\varphi}{6}，x_{p_4}\frac{7}{6}\pi-\frac{\varphi}{6}$$

又$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$时，$F(x_p)>0$，$x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$时，$F(x_p)<0$，故

$$F(x_{p1}),F(x_{p2})>F(x_{q2})>0>F(x_{q2})>F(x_{p3}),F(x_{p4})$$

故只需考虑$F(x_{p1}),F(x_{p2})$，即$6\cos(-\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6})$与$6\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6})$，

记$m=-\frac{\varphi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$，即

$$\cos(m-\frac{\pi}{6})与\cos(m+\frac{\pi}{6})$$

以m为自变量，根据对称性：

当$m\in(0,\frac{\pi}{6})$时，记m为m_1，$\cos(m_1-\frac{\pi}{6})>\cos(m_1+\frac{\pi}{6})$，此时

$$F(x_p)的最小值在x=m_1+\frac{\pi}{6}处取得$$

当$m \in (-\frac{\pi}{6},0)$时，记m为m_2，$\cos(m_2-\frac{\pi}{6}) < \cos(m_2+\frac{\pi}{6})$，

$$F(x_p)\text{的最小值在}x=m_2-\frac{\pi}{6}\text{处取得}$$

以m为自变量，根据单调性：

$$m \in (0,\frac{\pi}{6})\text{时，}\cos(-\frac{\pi}{6}) > \cos(m_1+\frac{\pi}{6})$$

$$m \in (-\frac{\pi}{6},0)\text{时，}\cos(-\frac{\pi}{6}) > \cos(m_2-\frac{\pi}{6})$$

故$F(x_p)$的最小值在$m=0$，$x=\pm\frac{\pi}{6}$处取得

$$F_{\min}(x_p)=6\cos(\pm\frac{\pi}{6})=3\sqrt{3}.$$

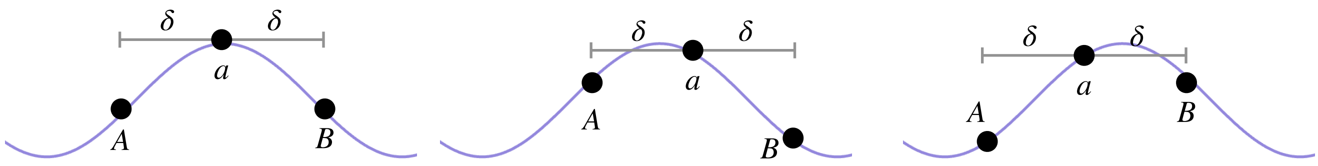
命题思路

1. 极值点坐标轨迹

若$f(x)$极值点为x_1，利用$f(x_1)=f'(x_1)=0$解出$a=h(x_1)$，则$(x_1,f(x_1))$的轨迹为

$$y=f(x,h(x))\text{（将}f(x)\text{中的}a\text{替换为}h(x)\text{）}$$

2. 第二问的推论



$y_A = y_B$　　　$y_A > y_B$　　　$y_A < y_B$

新高考I卷

第14题 统计压轴

指示变量法，锋利暴击

一个箱子里有5个球，分别以$1\sim5$标号，若有放回取三次，记至少取出一次的球的个数X，则$E(X)=$__________.

第一步：定义指示变量

我们定义 I_k 表示 第 k 个球是否出现过：

$$I_k=\begin{cases}1 & \text{如果球 } k \text{ 在3次抽取中至少出现过一次}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

显然，X就是这5个指标变量之和：

$$X=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5$$

第二步：利用期望的线性

$$E(X)=E(I_1)+E(I_2)+E(I_3)+E(I_4)+E(I_5)$$

这就转化为：计算**每个球在3次抽取中至少出现一次的概率**。

由于抽球是**均匀独立随机**，每个球被抽到的概率是一样的，所以：

$$E(I_k)=P(\text{第 } k \text{ 个球至少出现一次})$$

第三步：计算单个球出现的概率

$$P(\text{球 } k \text{ 从未出现}) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

因此，球 k 至少出现一次的概率为：

$$E(I_k) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$$

第四步：求E(X)

因为每个球独立，且都有相同的出现概率，所以：

$$E(X) = 5 \cdot \frac{61}{125} = \frac{61}{25}.$$

新高考I卷

第18题 送分圆锥

还没开始就结束了

设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），记$A$为椭圆下端点，$B$为右端点，

$|AB|=\sqrt{10}$，且椭圆C的离心率为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

（1）求椭圆的标准方程；

（2）设点$P(m,n)$，设R是射线AP上一点，$|AR|\cdot|AP|=3$，

（i）求R的坐标（用m，n表示）；

（ii）设直线OR的斜率为k_1，直线OP的斜率为k_2，若$k_1=3k_2$，Q为椭圆上一点，求$|PQ|$的最大值.

解析（1）$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$；

（2）（i）设$\overrightarrow{AP}=(m,n+1)$，$\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AP}=\lambda(m,n+1)$，由题$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=3$，可得

$$\lambda=\frac{3}{|AP|^2}=\frac{3}{m^2+(n+1)^2}$$

则$R[\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1]$；

（ii）由题$k_{OR}=3k_{OP}$，解得$2n=1-\dfrac{1}{\lambda}$，代入得$m^2+(n+4)^2=18$；

设圆心为$T(0,-4)$，要求$|PQ|\leq|QT|+R=|QT|+3\sqrt{2}$，设$Q(3\cos\alpha,\sin\alpha)$，则

$$|QT|^2=9\cos^2\alpha+(\sin\alpha+4)^2=-8\sin^2\alpha+8\sin\alpha+25$$

当$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$时，$|QT|_{max}=3\sqrt{3}$，故$|PQ|_{max}=3\sqrt{2}+3\sqrt{3}$.

新高考II卷

第19题 概率压轴

全国最难？其实不然

甲、乙两人乒乓球练习，每个球胜者得1分，负者得0分，设每个球甲胜概率为p（$\frac{1}{2}<p<1$），乙胜概率为q，$p+q=1$，且各球胜负独立，对正整数$k\geq 2$，记p_k为打完k个球后甲比乙至少多得2分的概率，q_k为打完k个球后乙比甲至少多得2分的概率.

（1）求p_3，p_4（用p表示）；

（2）若$\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求$p$；

（3）证明：对任意正整数m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

先证左侧

设在比赛k局后，甲比乙恰好多2分的概率为P_k

$$p_{2m+1}=(p_{2m}-P_{2m})+P_{2m}\cdot p$$

同理，设在比赛k局后，乙比甲恰好多2分的概率为Q_k

$$q_{2m+1}=(q_{2m}-Q_{2m})+Q_{2m}\cdot q$$

故$p_{2m+1}-q_{2m+1}=(p_{2m}-P_{2m})+P_{2m}\cdot p-(q_{2m}-Q_{2m})-Q_{2m}\cdot q$，即证明

$$(p_{2m}-P_{2m})+P_{2m}\cdot p-(q_{2m}-Q_{2m})-Q_{2m}\cdot q<p_{2m}-q_{2m}$$

$$P_{2m}\cdot q>Q_{2m}\cdot p$$

又$P_{2m}=C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m-1}$，$Q_{2m}=C_{2m}^{m+1}p^{m-1}q^{m+1}$，代入化简即：$p>q$，成立.

再证右侧

设在比赛k局后，甲比乙恰好多4分的概率为A_k

$$p_{2m+2} = (p_{2m} - A_{2m}) + A_{2m} \cdot p^2$$

设在比赛k局后，乙比甲恰好多4分的概率为B_k

$$Q_{2m+2} = (q_{2m} - B_{2m}) + B_{2m} \cdot q^2$$

同理只需证：$A_{2m}(p^2 - 1) > B_{2m}(q^2 - 1)$，

又$A_{2m} = C_{2m}^{m+2} p^{m+2} q^{m-2}$，$B_{2m} = C_{2m}^{m-2} p^{m-2} q^{m+2}$，代入即

$$p^4(p^2 - 1) > q^4(q^2 - 1)$$

$$p^4(p - 1)(p + 1) > q^4(q - 1)(q + 1)$$

$$p^3(p + 1) > q^3(q + 1)$$

$x^3(x + 1)$单调递增，故$p^3(p + 1) > q^3(q + 1)$，成立.

命题思路

非对称随机游走模型，其实并没有太大难度，比较老套；

假设我们在一维空间中进行非对称随机游走，定义状态为X_t，其中X_t表示在时间t时刻的位置。每次步伐的变化量ΔX_t可以取两个可能的值：

- $+1$（前进），以概率p；
- -1（后退），以概率$1 - p$，其中$p \neq 0.5$，即非对称。

在这种情况下，随机游走的递推关系可以表示为：

$$X_{t+1} = X_t + \Delta X_t$$

其中，ΔX_t是一个随机变量，它可以取值$+1$或-1，分别对应前进和后退。

- 偏移现象：非对称随机游走常常用来模拟有方向性、偏移的过程，例如股市价格变动中多头或空头市场的趋势。
- 非平衡态：由于步伐的概率不相等，非对称随机游走往往会偏向某一方向，从而形成持久的非平衡态。
- 长时间行为：在长时间尺度下，非对称随机游走通常会趋向某种稳态分布，但其偏移方向和速度受到步伐概率差异的影响。