



华南理工大学

South China University of Technology

# 工科数学分析 作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 10 月 21 日

厚德尚学 自强不息  
务实创新 追求卓越

# 目录

第一章 集合，映射与函数	1
1.1 第 1 周作业 . . . . .	2
第二章 极限	5
2.1 第 2 周作业 . . . . .	6

# 第一章 集合，映射与函数

## 1.1 第 1 周作业

## 例题 1.1.1 讨论下列函数的奇偶性

(1)  $y = 3x - x^3$

(2)  $2 + 3x - x^3$

(3)  $y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$

(4)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(5)  $y = \sqrt{x(2-x)}$

(6)  $y = 2^{-x}$

(7)  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$

(8)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

解 1.1.1. (1) 由于  $f(x) + f(-x) = 3x + 3(-x) - x^3 - (-x)^3 = 0$ , 故为奇函数

(2) 由于  $f(x) + f(-x) = 2 + 3x + 3(-x) + 2 - x^3 - (-x)^3 = 4$ , 不为奇函数; 而  $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$ , 故为非奇非偶函数

(3) 由于  $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$ , 故为偶函数

(4) 由于  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(-x)$ , 故为偶函数

(5) 由于  $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$ , 故不为偶函数, 由于  $f(x) + f(-x) = \sqrt{x(2-x)} + \sqrt{-x(2+x)} \neq 0$ , 故为非奇非偶函数

(6) 由于  $\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$ , 故为非奇非偶函数

(7) 由于  $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) + f(-x) = x-1 + (-x)+1 = 0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$ , 故为奇函数

(8) 由于  $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln(-x^2 + (x^2 + 1)) = 0$ , 故为奇函数

## 例题 1.1.2 研究函数的单调性

(1)  $y = ax + b$  (2)  $y = ax^2 + bx + c$  (3)  $y = x^3$  (4)  $y = a^x$

解 1.1.2. (1) 若  $a \geq 0$ , 则  $y$  单调递增; 若  $a < 0$ , 则  $y$  单调递减; 若  $a > 0$ , 则  $y$  严格单调递增

(2) 若  $a > 0$ , 则  $y$  先严格单调减后严格单调增, 若  $a < 0$ , 则  $y$  先严格单调增后严格单调减, 若  $a = 0$ , 则当  $b > 0$  时,  $y$  单调递增, 当  $b < 0$  时,  $y$  单调递减; 若  $a = b = 0$ , 则  $y$  非严格单调递增

(3) 若  $x_1 > x_2$ , 则  $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) > x_1 - x_2 > 0$  故单调递增

(4) 需限定  $a > 0$ , 则当  $a > 1$  时,  $y$  单调递增, 当  $a < 1$  时,  $y$  单调递减; 若  $a = 1$ , 则  $y = 1$  非严格单调递增;

**例题 1.1.3** 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$$(1)y = \sin^2 x$$

$$(2)y = \sin x^2$$

$$(3)y = \cos(x-2)$$

$$(4)y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$(5)y = x - [x]$$

$$(6)y = \tan |x|$$

**解 1.1.3.** (1) 是周期函数，周期为  $k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ )，最小正周期为  $\pi$

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{2x+T^2}{2} \neq 0$$

则这样的  $T$  不存在.

(3) 是周期函数，周期为  $2k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ )，最小正周期为  $2\pi$ .

(4)  $y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\lambda x + \arctan \frac{B}{A})$  是周期函数，周期为  $\frac{2k\pi}{\lambda}$ , ( $k \in \mathbb{Z}, \lambda > 0$ )，最小正周期为  $\frac{2\pi}{\lambda}$ , ( $\lambda > 0$ )

(5) 是周期函数，因为  $[x] + 1 = [x+1]$ ，则  $x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 = x - [x]$ ，所以  $y = x - [x]$  是周期函数，周期为  $\mathbb{Z}$ ，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是  $\pi$ ，假设  $\tan |x|$  也是周期函数，则存在  $T > 0$  使得对于定义域内的任意实数  $x$  都有  $|x| + \pi = |x+T|$ ，代入  $x = -\pi$  得到  $T = 3\pi$ ，代入  $x = 0$  得到  $T = \pi$ ，矛盾！所以  $y = \tan |x|$  不是周期函数.

**例题 1.1.4** 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

**解 1.1.4.** (1) 设  $f(x), g(x)$  为两个奇函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(-g(-x)) = f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  为偶函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(g(-x)) = -f(-x)g(-x) \Leftrightarrow f(x)g(x) + f(-x)g(-x) = 0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数.

**例题 1.1.5** 证明

若函数  $f(x)$  周期为  $T$  ( $T > 0$ )，则函数  $f(-x)$  的周期也是  $T$ .

**解 1.1.5.** 设  $f(x)$  周期为  $T$ ，则  $f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(-x+T) = f(-x)$ ，故  $f(-x)$  的周期也是  $T$ .

**例题 1.1.6** 证明

设  $f(x)$  和  $g(x)$  都是定义域为  $R$  的单调函数，求证： $f(g(x))$  也是定义域为  $R$  的单调函数.

解 1.1.6. 由于  $f(x), g(x)$  是定义域为  $R$  的单调函数, 则:

$$\forall x_1, x_2 \in R, (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0, \quad \forall x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在  $x_1 = g(x_3), x_2 = g(x_4)$ , 则相乘

$$(g(x_3) - g(x_4))(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

结合  $x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0$  就有:

$$(x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4))^2(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3 - x_4)(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

故  $f(g(x))$  也是定义域为  $R$  的单调函数.

#### 例题 1.1.7 证明

$$(1) \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad (2) \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数  $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 + i \Rightarrow z_1 z_2 = 5 + 5i$ , 则:

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由于  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , 代入  $x = \arcsin x$  即可得到:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

## 第二章 极限

## 2.1 第 2 周作业

## 例题 2.1.1 2.1-A-3: 给出下列极限的精确定义

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

解 2.1.1. (1) 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x| < \delta$  时,  $|f(x)| < \varepsilon$ .

(2) 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x| < \delta$  时,  $|(1+x)^{\frac{1}{x}} - e| < \varepsilon$ .

## 例题 2.1.2 2.1-A-7

利用极限的精确定义证明下列函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 5x) = 24 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2} = \frac{1}{3} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2 - 4} = +\infty.$$

解 2.1.2. (1) 要证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - 3| < \delta$  时,  $|(x^2 + 5x) - 24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$ . 已经出现了  $|x-3|$ , 所以现在只需限定  $|x+8|$ , 先限定  $|x-3| < 1$ , 那么  $|x+8| < 12$ , 此时还需满足  $|(x+8)(x-3)| < 12|x-3| < \varepsilon$ , 得  $|x-3| < \frac{\varepsilon}{12}$ , 故取  $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{12}\right\}$ , 当  $0 < |x-3| < \delta$  时,  $|(x^2 + 5x) - 24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$ .

(2) 要证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - 1| < \delta$  时,  $\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = |x - 1| < \varepsilon$ . 取  $\delta = \varepsilon$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时,  $\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| < \varepsilon$ .

(3) 要证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $|x| > \delta$  时,  $\left|\frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ , 因为  $\left|\frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{2}{3x^2}\right|$ , 取  $\delta = \sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}}$ , 则当  $|x| > \delta$  时,  $\left|\frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ .

(4) 要证对于任意  $G > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < x - 2 < \delta$  时,  $\frac{2x}{x^2 - 4} > G$ , 不妨限定  $x + 2 < 5$ , 则  $x - 2 < 1$ , 则  $\frac{2x}{x^2 - 4} > \frac{4}{(x+2)(x-2)} > \frac{4}{5(x-2)} > G$  解得  $x - 2 < \frac{4}{5G}$ , 所以取  $\delta = \min\left\{1, \frac{4}{5G}\right\}$ , 当  $0 < x - 2 < \delta$  时,  $\frac{2x}{x^2 - 4} > G$ .

## 例题 2.1.3 2.1-A-10

证明: 由  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  能推出  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$ , 但反之不然.

解 2.1.3. 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时,  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 所以由绝对值不等式得到  $|f(x) - A| > ||f(x)| - |A|| = ||f(x)| - |A|| > 0$ , 故  $||f(x)| - |A|| < \varepsilon$ , 所以由  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

能推出  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$ . 然后反过来, 考虑定义在实数域上的函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$ , 其极限



$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 1$ , 但是  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  不存在。

#### 例题 2.1.4 2.1-B-2(1): 利用极限的精确证明

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

解 2.1.4. 要证  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ , 只需证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时,

$\lim_{x \rightarrow a} |\sin x - \sin a| = 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| < \varepsilon$ . 又因为  $2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| < 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| < 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|$ , 所以取  $\delta = \varepsilon$ , 当  $0 < |x-a| < \delta$  时,  $\lim_{x \rightarrow a} |\sin x - \sin a| < \varepsilon$ .

#### 例题 2.1.5 2.1-B-4

利用极限的精确定义证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = +\infty$  是错误的.

解 2.1.5. 要证明存在  $G > 0, \forall \delta > 0$  使得当  $x > \delta$  时,  $\frac{x}{x+1} \leq G$ , 则取  $G = 1$ , 便可以满足  $\forall x > 0, \frac{x}{x+1} \leq 1$ , 故存在  $G > 0, \forall \delta > 0$  使得当  $x > \delta$  时,  $\frac{x}{x+1} \leq G$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = +\infty$  是错误的. (本题本质是找到一个够大的上界)

#### 例题 2.1.6 2.3-A-2

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2)$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)(1 - 2x)^2$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 40x^4)$ ;  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5 + 21x^3)$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ ;  
 (7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 2}$ ; (8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^{10} + x + 7}$ .

解 2.1.6. (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} (3(2)^2 - 5(2) + 2) = 4$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)(1 - 2x)^2 = \lim_{x \rightarrow -1} (1 + 1)(1 - 2(-1))^2 = 18$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 40x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4(x - 40) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 40) = +\infty$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5 + 21x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5(6 + \frac{21}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \lim_{x \rightarrow -\infty} (6 + \frac{21}{x^2}) = -\infty$ .

(5)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ .

(6)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .

(7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{x + \frac{2}{x^3}} = 0$ .

(8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^{10} + x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5}{x^7} + \frac{2}{x^{10}}}{1 + \frac{1}{x^9} + \frac{7}{x^{10}}} = 0$ ;

## 例题 2.1.7 2.3-A-4

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) & \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \right) \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{3x} \right) & \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{9x^2 + x + 3}}{6x} \right) \end{aligned}$$

解 2.1.7. (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 + \frac{1}{x}} = -\sqrt{3}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{9x} + \frac{1}{9x^2}} = \frac{2}{3}.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{9x^2 + x + 3}}{6x} \right) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{1}{36x} + \frac{3}{6x^2}} = -\frac{1}{2}.$

## 例题 2.1.8 2.3-A-8

$$(1) y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} \quad (2) y = \frac{2x^2}{(1 - x)^2}$$

解 2.1.8. (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = -1$$

故该函数在无穷远处的渐近线为  $y = x - 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

故该函数在  $x = 1$  处的渐近线为  $x = 1$ .

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(1 - \frac{1}{x})^2} = 2$$

故该函数在无穷远处的渐近线为  $y = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(1 - \frac{1}{x})^2} = +\infty$$

故该函数在  $x = 2$  处的渐近线为  $x = 2$ .

## 例题 2.1.9 习题 2.3-B 组-1

已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , 讨论下列极限的状态:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

解 2.1.9. (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$  不确定, 比如当  $f(x) = x$  时, 假如  $g(x) = 2x$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$ , 但当  $g(x) = \frac{x}{2}$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ , 当  $f(x) = g(x)$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  不确定, 比如当  $f(x) = x$  时, 假如  $g(x) = 2x$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$ , 但当  $g(x) = \sqrt{x}$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$ , 又当  $g(x) = x^2$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

## 例题 2.1.10 习题 2.3-B 组-4

设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$ , 求  $a$  和  $b$ .

解 2.1.10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1 - ax^2 - ax - bx - b}{x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + 1-b}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( (1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x} \right)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1-a)x - (a+b) = 0 \end{aligned}$$

必须有  $a = 1, b = -1$ .

## 例题 2.1.11 习题 2.3-B 组-5

设  $a, b, c$  是常数,  $a \neq 0$ , 证明  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$  的图形有斜渐近线, 并求出渐近线方程.

解 2.1.11.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = a \neq 0$$

由此可知,  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$  的图形有斜渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1} - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-a)x + c}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b-a + \frac{c}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = b - a$$

则渐近线方程为  $y = ax + b - a$ .

### 例题 2.1.12 习题 2.2-A-2

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) = 0 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5n+1} = \frac{3}{5}$$

解 2.1.12. (1) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时有  $|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$ .

$$|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| = \left| \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \right| < \left| \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \right| < \varepsilon$$

因此取  $N = \left\lceil 2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \right\rceil$ , 则对于任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $n \geq N$  时, 有  $|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$ .

(2) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \varepsilon$ , 限定  $n > 9$ , 则  $2^n > n^3$ , 则有  $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \left| \frac{n^2}{n^3} \right| = 2 \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$ , 则取  $N = \max \left\{ 9, \left\lceil 1 + \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \right\}$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \varepsilon$ .

(3) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$ , 则取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ .

(4) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{3n}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5} \left| \frac{1}{5n+1} \right| < \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$ , 则取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{3n}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon$ .

### 例题 2.1.13 习题 2.2-A-4

证明: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  能推出  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ , 但反过来不可以.

解 2.1.13. 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $||x_n| - |a|| < |x_n - a| < \varepsilon$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ , 但是考虑数列  $a_n = (-1)^n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , 但是去掉绝对值后,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  不存在, 所以不能反过来.

### 例题 2.1.14 习题 2.2-B-1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \infty \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2} \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. (a > 1)$$

解 2.1.14. (1) 要证明任意  $G > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时有  $\left| \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} \right| = \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} > G$ , 由

$$\frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \frac{(n-1)(n^2 + n + 1)}{n^2 + 1} > \frac{(n-1)(n^2 + 1)}{n^2 + 1} = n - 1$$

所以取  $N = G + 2$ , 则任意  $G > 0$ ,  $\left| \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} \right| > G$ .

(2) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n < \varepsilon$ , 则取  $N = \lceil \tan \frac{\pi}{2} - \varepsilon \rceil$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$ .

(3) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(2\sqrt{n} + 1)}$ , 取  $N = \left\lceil 1 + \left( \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right)^2 \right\rceil$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ .

(4) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$ , 由

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \frac{a}{2} \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{[a]} \frac{a}{[a] + 1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{[a]}}{[a]!} \frac{a}{n}$$

所以取  $N = \left\lceil \frac{a^{[a+1]}}{[a]! \varepsilon} + 1 \right\rceil$ , 则任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{a^n}{n!} \right| < \varepsilon$ .

### 例题 2.1.15 2.3-A-3

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} & \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] & \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right] \end{aligned}$$

解 2.1.15. (1) 代数变形:

$$\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{(-2)^{-1} + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}}}{1 + (-\frac{3}{2})^{n+1}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(-\frac{3}{2})^{n+1}}{1 + (-\frac{3}{2})^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{5}{6 \left( 1 + (-\frac{3}{2})^{n+1} \right)}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{6 \left( 1 + (-\frac{3}{2})^{n+1} \right)} \right) = \frac{1}{3}.$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

(4) 用裂项  $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ , 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{2}$$

### 例题 2.1.16 2.4-A-5

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x}$$

$$(5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta}$$

$$(6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h}$$

$$(7) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$$

解 2.1.16. 这里只使用基本极限公式:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}. \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{5 \cdot 3x} = \frac{3}{5}. \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}.$$

$$(5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \theta = 0. \quad (6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h^2} h = 0.$$

$$(7) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \left( \frac{\theta}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}. \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^3 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 4x = 2.$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\sin x}{x} = 4.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = -\sin a.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin a}{\cos a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a) \cos a \cos(x-a)} = \sec^2 a, \text{ 其中 } a \neq$$

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

## 例题 2.1.17 2.4-A-6

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/2} & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x} & (3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} (x \neq 0) \\
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{1/x} & (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x}
 \end{aligned}$$

解 2.1.17. (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/3}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{-1}{x}}\right)^{-1} = \frac{1}{e}.$

(3)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} (x \neq 0) = \lim_{\frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right) = e$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^a = \lim_{\frac{1}{ax} \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^a = e^a$

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-4} = e^{-4}.$

## 例题 2.1.18 2.4-B-4

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} & \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \tan 3x & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} & (5) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}
 \end{aligned}$$

解 2.1.18. (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x} - 5}{\frac{1}{x^3} \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x^3}{\sin x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2} \frac{3x^2 - 5x}{3x^2} = 3.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \tan 3x = \lim_{x \rightarrow 0} -\sin x \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x}{\tan x} = \frac{1}{3}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \frac{1}{2} = 1.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x(1 - \tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x} = 2.$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)x\right)^{-1} = \frac{1}{e}.$