

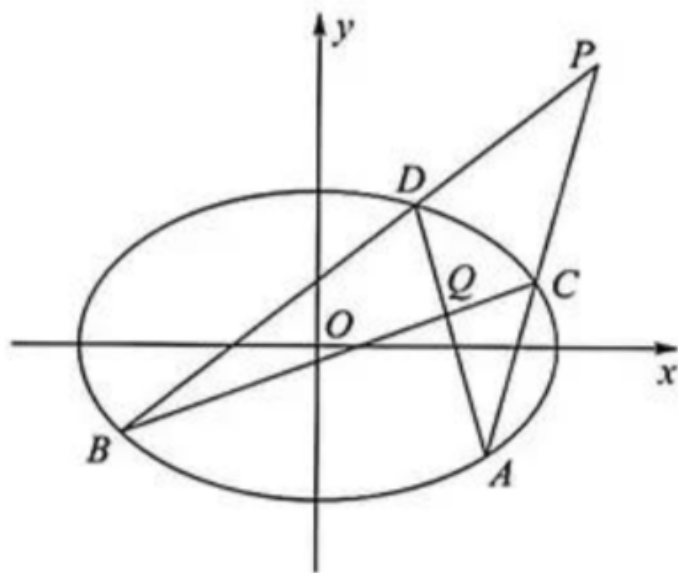
高中数学

解析几何教程

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期：2026 年 1 月 17 日



前言

本书内容全部使用 \LaTeX 进行排版，作者“还在尬黑”是一位准大一学生，高中毕业于广东深圳中学，高三数学各次大考平均排名位于前 5%，高考应该也不例外。“还在尬黑”拥有知乎（同名），微信公众号（同名），小红书号（同名）等账号，头像是一个右手三叶结。以及不同名不同头像的 GitHub 账号，发表原创优质内容百余篇，且固定更新频率，堪称发文的“螺丝钉”。

“还在尬黑”对圆锥曲线的解题研究有着浓厚兴趣，并在书中将其总结成了一套完整的解析几何教程。本书适合高中解析几何解题体系未成熟的高二高三学生，以及前来自学的高一学生以及初中生，也可作为高中数学教材。笔者衷心希望本书能够帮助读者提高圆锥曲线解题速度和解题能力，并能够准确地识别班内的“大佬”是用什么东西来装逼的，当然，本书和市面上的某些书不同，不会直接甩给学生们根本用不明白也不懂从何而来的技巧大招，而是会侧重解析一种方法的产生过程，以及如何恰当的选择方法解决具体问题。

学习圆锥曲线（包括高考数学的一些其它内容）的过程中，最重要也最需要大家认真做的就是历年的高考题，本书内容涵盖了大部分恢复高考以来所有的高考解析几何压轴题，并且每一道题都经过了笔者的精挑细选，放到了合适的位置上，后续笔者会在书末尾出一个索引表，帮助只想刷高考题的同学快速使用本书。

除了经典而偏基础的高考题外，本书后面还有些部分为选学内容，难度较高，属于高考不怎么考的范畴，这部分留给同学们或解析几何爱好者们进行自我提高和兴趣拓展。当然，建议读者先打牢必学内容的基础，再进行进一步的学习。

在创作本书的过程中，笔者也得到了朋友们和热心群众的帮助，在此向他们表示感谢！

十分感谢读者朋友们的支持和赞助！祝大家健康进步，高考成功！

还在尬黑

2026 年 1 月 17 日

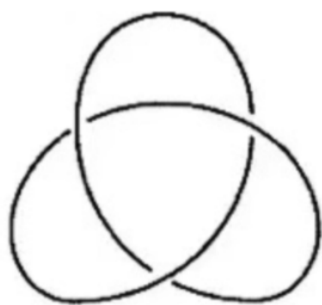


图 1: 我的头像

目录

第一章 先导课程	1
1.1 写在前面	1
1.2 轮换, 对称	1
第二章 手稿	4
2.1 杂题收录	4
第三章 曲线系	25
3.1 曲线系引入	25
第四章 杂题	31
4.1 数学问题	31

第一章 先导课程

1.1 写在前面

解析几何是高中数学的重要学习内容，在高考中分值占比较高。

不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代性的表述，这可能是因为圆锥曲线是解析几何中的重难点。但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如3次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈3种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

首先，笔者来讲一讲怎么进行计算。这似乎是一个很简单的问题，但是谁又能保证在紧张刺激的考场环境下不会犯错误？一旦出现计算错误，检查就需要花费一定的时间，所以不如挑选合适的计算方法，从源头上减少失误。本节中，笔者会结合自己的一些实战经验，尽量告诉大家一些计算过程中减小失误，提升速度的技巧和方法，以及解析几何中计算的基本方向——整体代换。

鉴于本书的覆盖群体，笔者会尽量避免过多的公式推导和过于严谨的学术表述，而是从直观的角度出发，用一些具体的例子来说明计算的过程。希望大家能从中受益。

1.2 轮换，对称

在此之前，请允许我先介绍一些基本的概念，我们不妨先来看一些看起来很整齐的式子，这些式子平时很常见，大家在备考强基计划的过程中也会遇到比较多这样的式子：

例题 1.2.1

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$abc$$

$$a + b + c$$

$$ab + bc + ca$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

解 1.2.1. 相信大部分同学是通过自己的直觉来归纳的，直观的感受就是这些式子很“整齐”，而且很有规律可循。那么问题来了：“整齐”是怎么体现的？更进一步地，有没有手段验证一个代数式

是“整齐”的？至于“很有规律可循”，那么规律是什么？

这些问题循序渐进，如果理清这些问题，那么读者便掌握了学习数学时地最基本的关注点：定义，性质，判定。这些式子中的 a, b, c 结构权重是均等的，它们地位相同，没有“特权变量”，也没有“次序”之分。

而且，眼尖的读者可以发现，这些表达式中的项往往成组出现，覆盖所有可能的组合，比如 $a + b + c$ 中全为一次项，如果 a 出现了，不用猜也知道 b 和 c 也出现了；再比如 $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ 中， a^2b 出现了，其中 a 被平方了，那不用猜也知道在其他的项中， b 和 c 也会被平方，而且后面一定会跟着其他没有被平方的字母。它们出现的次数相同。

事实上，由于乘法和加法的交换律和结合律，我们可以发现，对于上面任意一个式子，我们都可以挑选任意两个变量交换位置，而多项式本身保持不变。大家不妨想象一下阅兵式的场景，即使我们偷偷调换两个兵的位置，你也看不出来有什么异样，这是阅兵队伍“整齐”的体现。同样地，这个代数式也可以这样操作，来验证这个代数式是“整齐”的，“规律可循”的。这样我们便可以引出对称式的概念。

定义 1.2.1 对称式

对于一个 n 元多项式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，若对于数 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个排列 (i_1, i_2, \dots, i_n) ，都有

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则称 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为对称式。

“对称”体现在字母地位平等，没有哪个字母是特殊的。只要式子中包含某个由特定字母组成的项（例如 a^2b ），那么它一定包含由所有其他字母以同样的方式组成的项（即 $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$ ）。

这样我们就认识了对称式的概念，这样当读者听到别人说“对称式”的时候，不会至于一脸懵逼，或者一边点头，假装听懂，然后用直觉去理解这个概念（这样的情况长期发展下去，是不利于学习数学的）。当然，读者也许会发现，像“ $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ ”这样的式子其实比较长，占用了较大的空间，也显得不够简洁。因此我们不妨规定以下记号：

定义 1.2.2 循环和

性质 1.2.1 对称式的性质

(1) 基本对称多项式的基础性：

那么下面我们乘胜追击，再来看一组式子：

例题 1.2.2

观察以下代数式, 并尝试在心里面归纳出它们的特点:

$$a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^3b + b^3c + c^3a$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

解 1.2.2. 和刚才的对称式不同, 如果我们这里调换某两个字母的位置, 那么结果也会发生变化。比如 $a^2b + b^2c + c^2a$ 中, 如果我们把 a 和 b 调换位置, 那么结果也会发生变化, 比如说新出现了 b^2a 项, 这是原来所没有的。

但是读者会发现, 这个式子看上去也是有规律可循的, 比如 $a^3b + b^3c + c^3a$ 中, a^3 项出现了, 那不用猜也知道 b^3 和 c^3 也会在其它部分出现, 而且出现的次数相同, 但是和上文的规律不一样, a^3 后面只会跟着 b , 却没有 c , 即没有 a^2c 项。

例题 1.2.3

将 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 进行展开, 并尽己所能地保证结果的每个部分都是由 a, b, c 三个元同时出现且地位相同的式子:

解 1.2.3. 先展开, 再重组:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (b^2 + ac + ab + bc)(a+c) \\ &= ab^2 + b^2c + a^2c + ac^2 + a^2b + abc + abc + bc^2 \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc\end{aligned}$$

最后为什么

定理 1.2.1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

第二章 手稿

2.1 杂题收录

例题 2.1.1

已知 $x, y > 0$ ，且 $x^2 + 9y^2 = 12$ ，则 $\frac{x+2}{y+1} - 3x$ 的最小值为_____.

解 2.1.1.

例题 2.1.2 (高考题改编)

(单选) 设代数式 $T = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{200}{199}$, 则 ()

A. $14 < T < 16$ B. $16 < T < 18$ C. $18 < T < 20$ D. $20 < T < 22$

解 2.1.2. 出题背景是大名鼎鼎的 Wallis 公式:

$$\begin{aligned}
 I(n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d(-\cos x) \\
 &= (-\cos x \sin^{n-1} x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \, d \sin^{n-1} x \\
 &= (-\cos x \sin^{n-1} x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 x)(n-1) \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \, dx = (n-1)I(n-2) - (n-1)I(n) \\
 \Rightarrow I(n) &= \frac{n-1}{n} I(n-2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{I(2n+1)}{I(2n-1)} = \frac{2n}{2n+1} \\ \frac{I(2n)}{I(2n-2)} = \frac{2n-1}{2n} \end{cases}
 \end{aligned}$$

所以累乘有:

$$\begin{aligned}
 \frac{I(3)}{I(1)} \cdot \frac{I(5)}{I(3)} \cdots \frac{I(2n+1)}{I(2n-1)} &= \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1} \times \frac{2 \times 2}{2 \times 2 + 1} \times \cdots \times \frac{2n}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\
 \frac{I(2)}{I(0)} \cdot \frac{I(4)}{I(2)} \cdots \frac{I(2n)}{I(2n-2)} &= \frac{2 \times 1 - 1}{2 \times 1} \times \frac{2 \times 2 - 1}{2 \times 2} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}
 \end{aligned}$$

又因为:

$$\begin{aligned}
 I(2k+1) < I(2k) < I(2k-1) &\Rightarrow \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} < \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2k+1} \cdot \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right]^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2k} \cdot \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right]^2 \\
 \Rightarrow \frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \right) = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \right) \cdot \left(\frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \right) \cdots
 \end{aligned}$$

所以:

$$T^2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \approx \frac{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}}{\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \right) \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}} \frac{\pi}{2}$$

则 $T^2 \approx \frac{(2n+1)\pi}{2}$, 简单计算得知原题选 B.

方法二是使用放缩，先平方然后用糖水不等式，这个方法很套路，稍微一放就排除了 A 选项：

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{200}{199} \\ &> \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{201}{200} \\ &= 268 > 16^2 \end{aligned}$$

但是另一边就有点难度了，首先我们可以根据应试技巧，由“下界比较松”推测出来“上界比较紧”，所以在找上界的时候要放得仔细一点，当然严格说来这个推测逻辑缺乏依据。或者我们根据“仍有 BCD 选项需要分辨”的现状，可以考虑多保留几项再放缩，提高一下精度：

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{22}{21} \cdot \frac{22}{21} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{24}{23} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{200}{199} \\ &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{22}{21} \cdot \frac{22}{21} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{24}{23} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{200}{199} \\ &\Rightarrow T \leq \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{20}{19} \cdot \sqrt{\frac{200}{20}} = \frac{512 \times 512}{(15-4)(15-2)(15+2)(15+4)} \sqrt{10} \\ &= \frac{262144}{46189} \sqrt{10} < 3.1623 \times 5.68 < 18 \end{aligned}$$

熟知 $\sqrt{10} = 3.16227766... < 3.1623$ ，计算得到 $\frac{262144}{46189} < 5.68$ 这样得知本题选 B。

对于考试来说，把题目的答案改成 $17 < T < 19$ 或许是更好的选择。

例题 2.1.3 （高考题改编）

（单选）数列 a_n 各项为正整数且递增， $a_{n+2} = C_{a_{n+1}}^{a_n}$ ，则（ ）

A. $a_n < a_{n-1} + 1$ B. a_1, a_2, a_3 可能成等比数列

C. $a_3 a_4 < a_5$ D. a_3, a_4, a_5 可能成等比数列

解 2.1.3. 由于 a_n 递增，则 A 显然错误；下面考虑选项 BD：

$$a_n a_{n+2} = a_n C_{a_{n+1}}^{a_n} = a_{n+1} C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} = a_{n+1}^2 \Rightarrow a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}$$

当 $a_n = 1$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^0 = 1 = a_n$ ，与数列递增矛盾；

当 $a_n = 2$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^1 = a_{n+1} - 1 < a_{n+1}$ ，矛盾；

当 $a_n > 2$ 时，易得 $a_{n+1} - 1 > 2$ ，代入表达式得到

$$a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} \geq C_{a_{n+1}-1}^2 = \frac{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}{2}$$

解方程发现无整数解，而且由于 $C_{a_{n+1}-1}^1 = a_{n+1} - 1$ 是小于 a_{n+1} 的最大整数，且有

$$C_{a_{n+1}-1}^1 < C_{a_{n+1}-1}^2, C_{a_{n+1}-1}^2 \neq a_{n+1}$$

只可能是 $C_{a_{n+1}-1}^2 > a_{n+1}$.

雪上加霜的是, $C_{a_{n+1}-1}^2$ 和 $C_{a_{n+1}-1}^1$ 中间没有数可以等于 $C_{a_{n+1}-1}^m$, 所以 BD 错误;

考虑 C, 易得 $a_1 \neq 1, a_2 \geq 4, a_3 \geq 6, a_4 = C_{a_3}^{a_2} > 2a_3 + 1$, 由

$$a_5 = C_{a_4}^{a_3} > a_3 a_4 \Rightarrow a_3^2 < C_{a_4-1}^{a_3-1} < C_{2a_3}^{a_3-1}$$

转化为 $a_3^3 + a_3 < C_{2a_3}^{a_3}$ 这是显然成立的, 故本题目选 C

例题 2.1.4

已知 $\triangle ABC$ 中, $A = 3B = 9C$, 则 $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 2.1.4. 解得 $A = \frac{9\pi}{13}, B = \frac{3\pi}{13}, C = \frac{\pi}{13}$ 考虑积化和差:

$$\begin{aligned} & \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \\ &= \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B) + \cos(B+C) + \cos(B-C) + \cos(A+C) + \cos(A-C)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos \frac{12\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13}) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{13}} \sin \frac{\pi}{13} (\cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{12\pi}{13}) \\ &= \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{13}} (\sin \frac{\pi}{13} - \sin \frac{3\pi}{13} + \sin \frac{3\pi}{13} - \sin \frac{5\pi}{13} + \sin \frac{5\pi}{13} - \sin \frac{7\pi}{13} \\ &\quad + \sin \frac{7\pi}{13} - \sin \frac{9\pi}{13} + \sin \frac{9\pi}{13} - \sin \frac{11\pi}{13} + \sin \frac{11\pi}{13} - \sin \frac{13\pi}{13}) \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

定理 2.1.1 阿贝尔求和

设 B_n 是数列 b_n 的前 n 项和, 当 $n \geq 2$ 时, 有:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i$$

证明 2.1.1. 当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_i b_i &= a_1 b_1 + \sum_{i=2}^n a_i (B_i - B_{i-1}) \\ &= a_1 b_1 + \sum_{i=2}^n a_i B_i - \sum_{i=2}^n a_i B_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i B_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} B_i \\ &= a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i\end{aligned}$$

例题 2.1.5 (来自 Fiddie)

设数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数, 且当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} + a_{n-1} = |a_n|$. 证明:

- (1) 存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m \leq 0$
- (2) 存在正整数 m 使得 $a_m \leq 0, a_{m+1} \leq 0$
- (3) $a_n = a_{n+9}$

解 2.1.5. (1) 当 $n \geq 2$ 时, 由

$$\begin{cases} a_{n+1} + a_{n-1} = |a_n| \\ a_{n+2} + a_n = |a_{n+1}| \end{cases} \Rightarrow a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = |a_n| + |a_{n+1}|$$

$$\Rightarrow a_{n+2} + a_{n-1} = |a_n| - a_n + |a_{n+1}| - a_{n+1} \geq 0$$

若 $n \geq 2$ 时 $a_n > 0$, 上式化为 $a_{n+2} + a_{n-1} = 0$, 矛盾, 故存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m \leq 0$

(2) 已证存在大于 1 的整数 m 使得 $a_m \leq 0$, 现假设不存在正整数 k 使得 $a_k \leq 0, a_{k+1} \leq 0$, 则不妨设 a_m 为首个小于等于 0 的项, 由假设得 $a_1, a_2, \dots, a_{m-1} > 0, a_m \leq 0, a_{m+1} > 0$, 可以通过不断消元推出矛盾:

$$\begin{aligned}a_{m+1} + a_{m-1} &= |a_m| = -a_m \Rightarrow a_{m+1} = -a_m - a_{m-1} \\ a_{m+2} + a_m &= |a_{m+1}| = a_{m+1} \Rightarrow a_{m+2} = a_{m+1} - a_m > 0 + 0 = 0 \\ a_{m+3} + a_{m+1} &= |a_{m+2}| = a_{m+2} \Rightarrow a_{m+3} = a_{m+2} - a_{m+1} = a_{m+1} - a_m - a_{m+1} = -a_m \geq 0 \\ a_{m+4} + a_{m+2} &= |a_{m+3}| = -a_m \Rightarrow a_{m+4} = -a_m - a_{m+2} = -a_{m+1} < 0 \\ a_{m+5} + a_{m+3} &= |a_{m+4}| = a_{m+1} \Rightarrow a_{m+5} = a_{m+1} - a_{m+3} = a_m + a_{m+1} = -a_{m-1} < 0\end{aligned}$$

由 $a_{m+4} < 0, a_{m+5} < 0$ 知矛盾, 故存在正整数 k 使得 $a_k \leq 0, a_{k+1} \leq 0$.

(3) 抓住上面第二小问的提示就可以得到:

$$a_{m+6} + a_{m+4} = |a_{m+5}| = a_{m-1} \Rightarrow a_{m+6} = a_{m-1} - a_{m+4} = a_{m-1} + a_{m+1} = -a_m$$

$$a_{m+7} + a_{m+5} = |a_{m+6}| = -a_m \Rightarrow a_{m+7} = -a_m - a_{m+5} = a_{m-1} - a_m$$

$$a_{m+8} + a_{m+6} = |a_{m+7}| = a_{m-1} - a_m \Rightarrow a_{m+8} = a_{m-1} - a_m - a_{m+6} = a_{m-1}$$

$$a_{m+9} + a_{m+7} = |a_{m+8}| = a_{m-1} \Rightarrow a_{m+9} = a_{m-1} - a_{m+7} = a_{m-1} - a_{m-1} + a_m = a_m$$

所以设 $T = 9$, 有

$$\begin{cases} a_m = a_{m+nT}, n \in N \\ a_{m-1} = a_{m-1+nT}, n \in N \end{cases}$$

然后由于

$$a_{m-2+nT} = |a_{m-1+nT}| - a_{m+nT} = |a_{m-1}| - a_m = a_{m-2}$$

以此类推, 则有

$$a_k = a_{k+nT}, k \in N_+, k \leq m$$

取合适的 m 使得 m 大于 T , 则数列 $\{a_n\}$ 为周期数列, 其中一个周期为 9

例题 2.1.6 (南通 9 调 14 题)

已知 x, y 满足 $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+4}-y) = 2$, 则 $4^x + 2^{y-1}$ 的最小值为_____.

解 2.1.6. 套路题, 先换元:

$$\begin{cases} m = \sqrt{x^2+1} - x \Rightarrow x = \frac{1}{2m} - \frac{2}{m} \\ n = \sqrt{y^2+4} - y \Rightarrow y = \frac{2}{n} - \frac{n}{2} \end{cases}$$

再代入 $mn = 2 \Rightarrow n = \frac{2}{m}$:

$$y = \frac{2}{n} - \frac{n}{2} = m - \frac{1}{m} \Rightarrow y = -2x$$

所以:

$$4^x + 2^{y-1} = 4^x + \frac{1}{2 \times 4^x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

当 $x = \frac{1}{4}$ 时取得等号

例题 2.1.7 (深圳中学 2025 届二轮一阶)

$\triangle ABC$ 中, 若

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AE} = \frac{\mu}{\mu+1} \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

则连接 BD, CE 得到交点 Q , 任取 $\triangle ABC$ 所在平面内某一点 P , 那么有:

$$PQ^2 = \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} - \frac{\lambda \mu BC^2 + \lambda AC^2 + \mu AB^2}{(1 + \lambda + \mu)^2}$$

解 2.1.7. 设

$$\begin{cases} \overrightarrow{AQ} = x \overrightarrow{AD} + (1-x) \overrightarrow{AB} = x \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{AC} + (1-x) \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} = y \overrightarrow{AE} + (1-y) \overrightarrow{AC} = y \frac{\mu}{1+\mu} \overrightarrow{AB} + (1-y) \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda+1}{1+\lambda+\mu} \\ y = \frac{\mu+1}{1+\lambda+\mu} \end{cases}$$

化为形如 $x \overrightarrow{QA} + y \overrightarrow{QB} + z \overrightarrow{QC} = \vec{0}$ 的方程:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{AC} + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QC}) + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}) \\ &= \frac{\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{AQ} + \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{QC} + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{QB} \\ \Rightarrow \overrightarrow{QA} + \lambda \overrightarrow{QC} + \mu \overrightarrow{QB} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PQ} + \lambda (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PQ}) + \mu (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}) &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \lambda \overrightarrow{PC} + \mu \overrightarrow{PB} &= (1+\lambda+\mu) \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

平方得:

$$PA^2 + \lambda^2 PC^2 + \mu^2 PB^2 + 2\lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} + 2\mu \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 2\lambda\mu \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = (1+\lambda+\mu)^2 PQ^2$$

分别代入

$$\begin{cases} 2\lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \lambda \left(PA^2 + PC^2 - (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC})^2 \right) = \lambda (PA^2 + PC^2 - AC^2) \\ 2\mu \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \mu \left(PA^2 + PB^2 - (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB})^2 \right) = \mu (PA^2 + PB^2 - AB^2) \\ 2\lambda\mu \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = \lambda\mu \left(PC^2 + PB^2 - (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB})^2 \right) = \lambda\mu (PC^2 + PB^2 - BC^2) \end{cases}$$

变形即可得到:

$$PQ^2 = \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} - \frac{\lambda \mu BC^2 + \lambda AC^2 + \mu AB^2}{(1 + \lambda + \mu)^2}$$

因此有结论：

结论 2.1.1 结论

平面内给定 $\triangle ABC$ ，若点 Q 满足

$$\overrightarrow{QA} + \lambda \overrightarrow{QC} + \mu \overrightarrow{QB} = \vec{0}$$

则任取 $\triangle ABC$ 所在平面内某一点 P ，有

$$PQ^2 = \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} - \frac{\lambda \mu BC^2 + \lambda AC^2 + \mu AB^2}{(1 + \lambda + \mu)^2}$$

例题 2.1.8 奔驰定理

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$ ，以及平面内任意一点 P ，则有：

$$\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{PA} + \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{PB} + \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

这等价于

$$S_{\triangle PBC} \overrightarrow{PA} + S_{\triangle PAC} \overrightarrow{PB} + S_{\triangle PAB} \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

这里的三角形面积是有向面积，我们必须在计算三角形面积时按照字母顺序看一下方向（顺时针或逆时针），然后将与其他两个方向不同的三角形的对应面积取负值。

解 2.1.8.

例题 2.1.9 外心向量关系

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$ ，则其外心满足关系式：

解 2.1.9.

例题 2.1.10 三角形外心坐标

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$ ，则其外心的坐标为

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} OA^2 & y_A & 1 \\ OB^2 & y_B & 1 \\ OC^2 & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_A & OA^2 & 1 \\ x_B & OB^2 & 1 \\ x_C & OC^2 & 1 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}} \right)$$

解 2.1.10.

例题 2.1.11 三角形垂心坐标已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$, 则其垂心的坐标为

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} x_B x_C + y_B y_C & y_A & 1 \\ x_A x_C + y_A y_C & y_B & 1 \\ x_A x_B + y_A y_B & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_B x_C + y_B y_C & 1 \\ x_B & x_A x_C + y_A y_C & 1 \\ x_C & x_A x_B + y_A y_B & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}} \right)$$

解 2.1.11.

例题 2.1.12 三角形的内心坐标已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$, 则其内心的坐标为

$$\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c} \right)$$

解 2.1.12.

例题 2.1.13 容斥原理练习

某学校举办比赛, 有 20 个参赛名额, 现在分给 4 个不同的班, 保证至少有一个班的名额为 4 个, 且每一个班都有名额, 则共有_____种分法。

解 2.1.13. 设四个班的名额为 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in N_+$, 则分法数就是集合 $A_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_i = 4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20\}$ 的元素个数, 又因为

$$|A_1| = \{(x_1, x_3, x_4) | x_2 + x_3 + x_4 = 16, x_2, x_3, x_4 > 0\} = C_{15}^2$$

$$|A_1 \cap A_2| = \{(x_3, x_4) | x_3 + x_4 = 12, x_3, x_4 > 0\} = C_{11}^1$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= C_4^1 |A_1| - C_4^2 |A_1 \cap A_2| + C_4^3 |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= C_4^1 C_{15}^2 - C_4^2 C_{11}^1 + C_4^3 = 358 \end{aligned}$$

例题 2.1.14 求和

计算 $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k$, 其中 $k < n-1, k \in N_+$

解 2.1.14. 定义函数并对其求 k 阶导数:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i x^{i+1} = x \sum_{i=0}^{n-1} (-x)^i C_{n-1}^i \\ &= x(1-x)^{n-1} = (x-1+1)(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-1} - (1-x)^n \\ \Rightarrow f(1) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i = 0 \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i A_{i+1}^k x^{i+1-k} \Rightarrow f^{(k)}(1) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i A_{i+1}^k \end{aligned}$$

现已很接近原式, 问题在于沟通 A_{i+1}^k 和 $(i+1)^k$, 我们假想这样一个情境: 有 k 个不同的球等待放进 $i+1$ 个不同的盒子里面, 放置过程中允许空盒的存在, 所以放法是 $(i+1)^k$, 然后我们换一种方式, 考虑分为恰好有 $0, 1, 2, 3, 4, \dots, k$ 个非空盒子的情况, 那么求和就是

$$\sum_{r=0}^k S(k, r) r! C_{i+1}^r = \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r$$

其中 $S(k, r)$ 表示 k 个有标号的球放到 r 个同样的盒子里面的方法数, C_{i+1}^r 表示从 $i+1$ 个不同的盒子无序地挑出 r 个盒子来放球, 再对其进行全排列使得挑出来的 r 个盒子有编号, 则:

$$(i+1)^k = \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r$$

那么代入到 $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k$ 中就有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k &= \sum_{i=0}^{n-1} \left((-1)^i C_{n-1}^i \left(\sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r (-1)^i C_{n-1}^i \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{i=0}^{n-1} S(k, r) A_{i+1}^r (-1)^i C_{n-1}^i = \sum_{r=0}^k S(k, r) f^{(r)}(1) \end{aligned}$$

对 $(1-x)^{n-1} - (1-x)^n$ 求导易得 $f(x)$ 只有第 $n-1$ 和 n 阶导数在 $x=1$ 处的值不是 0, 即:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k = 0$$

例题 2.1.15 证明

- $$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A + \cos B} - \frac{\sin A + \cos B}{\sin B - \cos A} = 2 \tan(A + B) \\
 (2) \quad & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A - \cos B} - \frac{\sin A - \cos B}{\sin B - \cos A} = \frac{\cos B + \sin A}{\cos A + \sin B} - \frac{\cos A + \sin B}{\cos B + \sin A} = 2 \tan(A - B) \\
 (3) \quad & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} = 2 \cot(A + B) \\
 (4) \quad & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} - \frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = \frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = 2 \cot(A - B)
 \end{aligned}$$

解 2.1.15. 第一种方法就是通分, 拿一个式子举例

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A - \cos B} - \frac{\sin A - \cos B}{\sin B - \cos A} \\
 &= \frac{(\sin B - \cos A)^2 - (\sin A - \cos B)^2}{(\sin B - \cos A)(\sin A - \cos B)} \\
 &= \frac{\sin^2 B - 2 \sin B \cos A + \cos^2 A - \sin^2 A + 2 \sin A \cos B - \cos^2 B}{\sin B \sin A - \sin A \cos A - \sin B \cos B + \cos B \cos A} \\
 &= \frac{\cos 2A - \cos 2B + 2(\sin A \cos B - \sin B \cos A)}{\cos(A - B) - \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B)} \\
 &= \frac{-2 \sin(A + B) \sin(A - B) + 2 \sin(A - B)}{\cos(A - B) - \sin(A + B) \cos(A - B)} = \frac{2[1 - \sin(A + B)] \sin(A - B)}{[1 - \sin(A + B)] \cos(A - B)} \\
 &= \frac{2 \sin(A - B)}{\cos(A - B)} = 2 \tan(A - B).
 \end{aligned}$$

再写一个:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} \\
 &= \frac{(\cos A - \cos B)^2 - (\sin A - \sin B)^2}{(\cos A - \cos B)(\sin A - \sin B)} \\
 &= \frac{\cos^2 A - 2 \cos A \cos B + \cos^2 B - \sin^2 A + 2 \sin A \sin B - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin A \cos B - \sin B \cos A + \sin B \cos B} \\
 &= \frac{(\cos^2 A - \sin^2 A) + (\cos^2 B - \sin^2 B) - 2 \cos A \cos B + 2 \sin A \sin B}{\sin A \cos A + \sin B \cos B - (\sin A \cos B + \sin B \cos A)} \\
 &= \frac{\cos 2A + \cos 2B - 2 \cos(A + B)}{\frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B) - \sin(A + B)} = \frac{2 \cos(A + B) \cos(A - B) - 2 \cos(A + B)}{\sin(A + B) \cos(A - B) - \sin(A + B)} \\
 &= \frac{2 \cos(A + B)[\cos(A - B) - 1]}{\sin(A + B)[\cos(A - B) - 1]} = \frac{2 \cos(A + B)}{\sin(A + B)} = 2 \cot(A + B).
 \end{aligned}$$

第二种方法就是按部就班地和差化积，拿一个式子举例

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A - \cos B} - \frac{\sin A - \cos B}{\sin B - \cos A} \\
 &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \cos A}{\sin A - \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} - \frac{\sin A - \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \cos A} \\
 &= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)} \\
 &= -2\frac{\cos\left[2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\right]}{\sin\left[2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\right]} = -2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + A - B\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + A - B\right)} \\
 &= -2\frac{-\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = 2\tan(A-B).
 \end{aligned}$$

再写一个：

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} \\
 &= -\frac{\cos\left[2 \cdot \frac{A+B}{2}\right]}{\frac{1}{2}\sin\left[2 \cdot \frac{A+B}{2}\right]} = -\frac{\cos(A+B)}{\frac{1}{2}\sin(A+B)} \\
 &= -2\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = 2\cot(A+B).
 \end{aligned}$$

例题 2.1.16 (2008 年江西浸泡压轴题)

已知 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{\frac{ax}{ax+8}}, x \in (0, +\infty)$

(1) 当 $a = 8$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 对于任意正数 a , 求证 $1 < f(x) < 2$.

解 2.1.16. (1) 当 $a = 8$ 时, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, 观察式子不难想到换元 $x = \tan^2 \theta$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} + \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1}} = \cos \theta + \frac{1}{3} + \sin \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{3}$$

由 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 这道题难就难在题目给了函数, 似乎是暗示学生走求导的路子, 但求导异常难做, 反而看成是不等式问题却能找到方向. 由于函数结构不对称, 我们引入第三个变元就可以将本题条件化为对称形式: 令 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \sqrt{\frac{xy}{xy+8}}, x, y \in (0, +\infty)$:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \in (0, 1) \\ b = \frac{1}{\sqrt{1+y}} \in (0, 1) \\ c = \sqrt{\frac{xy}{xy+8}} \in (0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{1+x}, x = \frac{1}{a^2} - 1 \\ b^2 = \frac{1}{1+y}, y = \frac{1}{b^2} - 1 \\ c^2 = \frac{ax}{ax+8} = 1 - \frac{8}{ax+8} \end{cases}$$

现在要找到三个元之间的关系式, 消元法就够了:

$$c^2 = 1 - \frac{8}{ax+8} = 1 - \frac{8}{(\frac{1}{a^2} - 1)(\frac{1}{b^2} - 1) + 8} \Rightarrow (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) = 8a^2b^2c^2$$

先假设 $a+b+c \geq 2$, 列出已知条件:

$$\begin{cases} a, b, c \in (0, 1), & a+b+c \geq 2 \\ (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) = 8a^2b^2c^2 \end{cases}$$

我们现在要证明的是“同时满足这几个条件的题目是一个错题”。其中最后一个条件看似很强, 给出了三元关系, 但是如果不拿来消元的话很难用上, 而消元又回到了原题的情形, 这就很尴尬了. 那我们不妨尝试删除 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) = 8a^2b^2c^2$ 并尝试通过剩余条件导出 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) \neq 8a^2b^2c^2$, 即 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) > 8a^2b^2c^2$ 或 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) < 8a^2b^2c^2$. 而这个式子是对称的, 我们不妨拆成 $(1-a^2) > 2bc$ 或 $(1-a^2) < 2bc$ 来证明, 虽然这个转换之后的式子是原来式子成立的充分而非必要条件, 但确实是可以尝试的方向, 是不是可以叫“充分性探路”呢?

$$\begin{cases} 1-a^2 = (1-a)(1+a) < 2(1-a) = 2(b+c-1) \\ (1-b)(1-c) \in (0, 1) \Rightarrow bc+1 < b+c \end{cases} \Rightarrow 1-a^2 < 2bc$$

这样同理得到 $1 - b^2 < 2ac, 1 - c^2 < 2ab$, 这样就有 $(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2) < 8a^2b^2c^2$, 矛盾, 所以 $a + b + c < 2$. 然后我们紧接着设 $a + b + c \leq 1$, 同样列出已知条件:

$$\begin{cases} a, b, c \in (0, 1), & a + b + c \leq 1 \\ (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2) = 8a^2b^2c^2 \end{cases}$$

同样的套路, 我们依然考虑证明 $(1 - a^2) > 2bc$ 或 $(1 - a^2) < 2bc$, 由

$$\begin{cases} 1 - a^2 = (1 - a)(1 + a) > 1 - a \geq b + c \\ (1 - b)(1 - c) \in (0, 1) \Rightarrow bc < b + c \end{cases} \Rightarrow 1 - a^2 > 2bc$$

这样同理得到 $1 - b^2 > 2ac, 1 - c^2 > 2ab$, 这样就有 $(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2) > 8a^2b^2c^2$, 矛盾. 所以只能是 $1 < a + b + c < 2$.

(3) 当然本题解法不唯一, 比如说我们根据

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \sqrt{\frac{xy}{xy+8}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{8}{xy}}}$$

来换元 $z = \frac{8}{xy}$, 则有 $xyz = 8$ 要证明 $1 < \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} < 2$, 已知条件是 $x, y, z > 0$, 那么 $(x-2)(y-2)(z-2) < 8$, 不妨假设数量关系 $x \leq y \leq z$, 就有

$$\begin{cases} 2 \leq z \\ xyz = 8 \end{cases} \Rightarrow xy \leq 4$$

然后运用对偶式的思想证明出:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} > \frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{1}{1+\frac{y}{2}} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{1}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

由 $z \geq 2$ 得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} < \frac{1}{1+\frac{z}{8}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{xy}}} = \frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}$$

以及

$$(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}})(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y}}) > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+y)}} < 1 + \frac{1}{1+\sqrt{xy}}$$

合起来就是:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} < 1 + \frac{1}{1+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}} = 2$$

这个 $\frac{1}{\sqrt{1+z}} < \frac{1}{1+\frac{z}{8}}$ 是事后诸葛, 高考生不必深究。

例题 2.1.17 (2008 年江西导数压轴)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{ax}}}$. 证明: $1 < f(x) < 2$.

解 2.1.17. 将 a 视作参数, 直接暴力求导:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2(1+\frac{8}{ax})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{8}{ax^2} \\
 &= -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{64a(1+x)^3 - x(ax+8)^3}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}} [8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}]} \\
 &= \frac{-a^3x^4 - 24a^2x^3 + 64ax^3 + 192ax + 64a - 512x}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}} [8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}]} \\
 &= \frac{-a(a^2x^4 + (24a-64)x^3 - 8(24-\frac{64}{a})x - 64)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}} [8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}]} \\
 &= \frac{-a \left((ax^2-8)(ax^2+8) + (24-\frac{64}{a})(ax^3-8x) \right)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}} [8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}]} \\
 &= \frac{(ax^2-8)(-x^2a^2-24xa-8a+64x)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}} [8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}]} \\
 &= \frac{(\sqrt{ax}-2\sqrt{2})(\sqrt{ax}+2\sqrt{2})(-a^2x^2+(64-24a)x-8a)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(ax+8)^{\frac{3}{2}} [8\sqrt{a}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}(ax+8)^{\frac{3}{2}}]}
 \end{aligned}$$

这个分子有理化(目的是提取恒正的项)肯定是套路式的, 但是这个因式分解, 笔者认为有点小技巧, 我们提取 a 使得常数项真正地为常数, 然后由于二次项为 0, 以及一次项和三次项之间有倍数关系, 采取凑平方差, 分解成了两个二次函数, 由于分母大于 0, 现在要对分子的正负性进行讨论, 方便起见, 我们看一下后面那个丑陋的二次函数的判别式长什么样:

$$\Delta = (64-24a)^2 - 32a^3 = 32(-a^3 + 18a^2 - 96a + 128) = 32(2-a)(a-8)^2$$

所以如果限定 $a \geq 2$ 那么 $\Delta \leq 0$, 再加上二次项为负数, 所以这个二次函数小于 0, 但是我们能不能做这样的限定呢? 其实是可以的, 因为 $f(x)$ 根号的下面主要有 $a, x, \frac{8}{ax}$, 这三个东西乘起来是 8, 是对称的三个变元, 我们显然可以给它们规定大小顺序, 所以想一想不难知道规定 $a \geq 2$ 是合理的, 那么规定另外两个大于等于 2 行不行呢? 也行, 但是会导致解题变得更加复杂, 所以不推荐。

现在, 我们只需关注 $\sqrt{ax}-2\sqrt{2}$ 的正负性了, 这东西是一次函数, 容易知道 $f'(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{8}{a}})$ 大于 0, 在 $(\sqrt{\frac{8}{a}}, +\infty)$ 小于 0, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{8}{a}})$ 单调递增, 在 $(\sqrt{\frac{8}{a}}, +\infty)$ 单调递减。所以 $f(x)$

的最大值是

$$f\left(\sqrt{\frac{8}{a}}\right) = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{a}}}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}}$$

下面考虑最小值, 发现当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}}$, 所以

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}} < f(x) < \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{a}}}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}}$$

此时 $1 < f(x)$ 已经得证, 下面只需证明

$$g(a) = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{a}}}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}} < 2$$

再次求导:

$$\begin{aligned} g'(a) &= -\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{-2\sqrt{2}}{2a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2(1+a)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{8(1+a)^3 - (a+2\sqrt{2a})^3}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\left[2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]} \\ &= \frac{(a-2\sqrt{2a}+2)\left[4(1+a)^2 + 2(1+a)(a+2\sqrt{2a}) + (a+2\sqrt{2a})^2\right]}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\left[2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2\left[4(1+a)^2 + 2(1+a)(a+2\sqrt{2a}) + (a+2\sqrt{2a})^2\right]}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\left[2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]} \geq 0 \end{aligned}$$

所以原函数 $g(a)$ 单调递增, 考虑到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(a) = 0 + 2 = 2$$

所以 $f(x) < 2$ 也得证。

例题 2.1.18 (抹茶奶绿供题)

平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{a^2} = 1, (a > 4)$, 椭圆的弦 AB 过点 $D(-2, 0)$, 连接 OA, OB , 线段 OB 交圆 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ 于 C , 若 DC 平行于 OA , 求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 2.1.18. 设 $B(x_1, y_1), A(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 比值换元 $-\lambda = \frac{x_1+2}{x_2+2} = \frac{y_1}{y_2}$, 则:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1 & \Rightarrow \frac{x_1^2 - \lambda^2 x_2^2}{16} + \frac{y_1^2 - \lambda^2 y_2^2}{a^2} = 1 - \lambda^2 \\ \frac{\lambda^2 x_2^2}{16} + \frac{\lambda^2 y_2^2}{a^2} = \lambda^2 & \Rightarrow \frac{(x_1 + \lambda x_2)(x_1 - \lambda x_2)}{16(1+\lambda)(1-\lambda)} + \frac{(y_1 + \lambda y_2)(y_1 - \lambda y_2)}{a^2(1+\lambda)(1-\lambda)} = 1 \end{cases}$$

代入 $x_1 + \lambda x_2 = (-2)(1+\lambda), y_1 + \lambda y_2 = 0$ 得

$$\begin{aligned} \frac{-(x_1 - \lambda x_2)}{8(1-\lambda)} = 1 & \Rightarrow \lambda = \frac{x_1 + 8}{x_2 + 8} \Rightarrow -\lambda = \frac{x_1 + 2}{x_2 + 2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 + 8}{-x_2 - 8} \\ & \Rightarrow y_2 = \frac{-3y_1}{x_1 + 5}, \quad x_2 = \frac{-3(x_1 + 2)}{x_1 + 5} - 2 = \frac{-5x_1 - 16}{x_1 + 5} \end{aligned}$$

设 $y_1 = kx_1$, 则代入 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 得 $\frac{x_1^2}{16} + \frac{k^2 x_1^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm \frac{4}{\sqrt{a^2 + 16k^2}} \\ y_1 = \pm \frac{4k}{\sqrt{a^2 + 16k^2}} \end{cases}$

再代入圆方程得到 $(x+1)^2 + k^2 x^2 = 4 \Rightarrow (k^2 + 1)x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{-1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1} \\ y_3 = \frac{-k \pm k\sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1} \end{cases}$.

我们不妨先带着正负号一起计算, 注意下面的正负号一起取正或取负

$$k_{AO} = \frac{3y_1}{5x_1 + 16} = \frac{\frac{\pm 12k}{\sqrt{a^2 + 16k^2}}}{\pm \frac{20}{\sqrt{a^2 + 16k^2}} + 16} = \frac{\pm 3k}{4\sqrt{a^2 + 16k^2} \pm 5}$$

$$k_{DC} = \frac{\frac{-k \pm k\sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1}}{\frac{-1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1} + 2} = \frac{-k \pm k\sqrt{3k^2 + 4}}{2k^2 + 1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}$$

由 $k_{AO} = k_{CD}$ 得到 $\frac{-1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}{2k^2 + 1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}} = \frac{\pm 3}{4\sqrt{a^2 + 16k^2} \pm 5}$, 提取常数并变形得到:

$$\pm 1 = \frac{1}{\sqrt{3k^2 + 4}} - \frac{2\sqrt{a^2 + 16k^2}}{3k^2 + 4} \pm 2\sqrt{\frac{a^2 + 16k^2}{3k^2 + 4}}$$

所以若要求此式成立且 a 为常数, 必有 $\frac{a^2 + 16k^2}{3k^2 + 4}$ 为常数, 则计算得到 $a = \frac{8}{\sqrt{3}} > 4$, 反向代入验证充分性即可得到答案为 $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

例题 2.1.19 (杭二模拟)

已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 设其左焦点为 $F(-1, 0)$

- (1) 若椭圆上的两点 M, N 满足直线 MF, NF 关于 x 轴对称, 且直线 MN 斜率存在, 证明直线 MN 过定点.
- (2) 若过 $B(-2, 2)$ 的一条直线交椭圆于 M, N , $A(2, 0)$, 连接直线 AM, AN 交直线 OB 于 P, Q , 求 $\frac{|OP|}{|OQ|}$ 的值.

解 2.1.19. (1) 注意到直线 MF, NF 关于 x 轴对称, 那么直线 MF, NF 一定关于 y 轴对称, 又因为直线 MN 斜率存在, 所以 M, N 在 x 轴同侧, 且 $k_{MF} + k_{NF} = 0$. 首先这个题用不联立是非常简单的, 但是联立也很好做, 这里用同解方程做法:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x+1+ty)(x+1-ty) = 0 \\ x = my + n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + n \end{cases} \\ (m^2 - t^2)y^2 + 2m(n+1)y + (n+1)^2 &= 0 = (3m^2 + 4)y^2 + 6mny + 3n^2 - 12 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} (3m^2 + 4)(m^2 - t^2)y^2 + 2m(n+1)(3m^2 + 4)y + (n+1)^2(3m^2 + 4) = 0 \\ (m^2 - t^2)(3m^2 + 4)y^2 + 6mn(m^2 - t^2)y + (3n^2 - 12)(m^2 - t^2) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2m(n+1)(3m^2 + 4) = 6mn(m^2 - t^2) \\ (n+1)^2(3m^2 + 4) = (3n^2 - 12)(m^2 - t^2) \end{cases} &\Rightarrow n = -4 \end{aligned}$$

最后是两式作比得到的, 当然, 直接比较 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 可以直接得到 $(-4, 0)$.

(2) 设 $M\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2}, \frac{2\sqrt{3}t_1}{1+t_1^2}\right), N\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2}, \frac{2\sqrt{3}t_2}{1+t_2^2}\right)$, 则

$$MA: x = \frac{x_1 - 2}{y_1}y + 2 = \frac{\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2} - 2}{\frac{2\sqrt{3}t_1}{1+t_1^2}}y + 2 = -\frac{2t_1}{\sqrt{3}}y + 2 \quad NA: x = -\frac{2t_2}{\sqrt{3}}y + 2$$

由直线 MA, NA 与 $y = -x$ 联立得到

$$y_P = \frac{2\sqrt{3}}{2t_1 - \sqrt{3}}, y_Q = \frac{2\sqrt{3}}{2t_2 - \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|OP|}{|OQ|} = -\frac{2t_2 - \sqrt{3}}{2t_1 - \sqrt{3}}$$

写出半代入形式的直线两点式

$$\frac{-2}{2} \frac{1 - t_1 t_2}{1 + t_1 t_2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2} = 1 \Rightarrow t_1 + t_2 = \sqrt{3}$$

得到 $\frac{|OP|}{|OQ|} = 1$.

例题 2.1.20 (群友供题)

已知 $f(x) = e^x - \ln x$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 > x_2$, 求证 $x_1 + x_2 > 1$.

解 2.1.20. 本题对称化构造已经有解法了, 笔者补一个构造函数的做法。首先转化为证明

$$g(x) = (x - \frac{1}{2})^2, g(x_1) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 > (x_2 - \frac{1}{2})^2 = g(x_2)$$

进行观察, 我们发现如果 x_1 稍微大一点, 比如当 $x_1 > 1$ 就已经有 $x_1 + x_2 > 1$, 所以本题的关键是在 $x = \frac{1}{2}$ 附近证明这个结论, 由此不难想到级数展开, 我们首先求导得到:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}, f'(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2, f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}, f''(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} + 4, \dots$$

这样不难得到 $f(x)$ 先减再增, 极值点不好求, 并列出 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 附近的级数形式:

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + (\sqrt{e} - 2)(x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{e} + 4}{2!}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{\sqrt{e} + 8}{3!}(x - \frac{1}{2})^3 + \dots$$

我们要构造在 $x = \frac{1}{2}$ 左右侧正负性相反的函数 $\varphi(x) = h_1(g(x)) + h_2(f(x))$, 同时规定 $h_1(x)$ 单调递增, $h_2(x)$ 在 $f(x)$ 值域内单调, 这样我们就可以转化证明

$$g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow h_1(g(x_1)) > h_1(g(x_2)) \Leftrightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$$

但是显然我们不必大费周章地考虑 $h_2(x)$, 除非你想优雅地解题。此处我们可以直接取 $\varphi(x) = h_1(g(x)) - f(x)$, 直观一点来说, 只需要找到 $(x - \frac{1}{2})^2$ 的某个复合函数穿过 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 这个点, 且在该点左侧比 $f(x)$ “矮”, 右侧比 $f(x)$ “高”, 那么就能证明 $g(x_1) > g(x_2)$ 。那既然要求右侧比 $f(x)$ “高”, 我们初步考虑 $h_1(x) = e^{g(x)}$, 由

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{(x - \frac{1}{2})^2} = 1 + (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{(x - \frac{1}{2})^4}{2!} + \frac{(x - \frac{1}{2})^6}{3!} + \dots$$

所以消去偶数次项得到 $\varphi(x) = \frac{\sqrt{e} + 4}{2}e^{g(x)} - f(x) - 2 + \ln 2 + \frac{\sqrt{e}}{2}$, 即

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{e} + 4}{2}e^{(x - \frac{1}{2})^2} - e^x + \ln x - 2 + \ln 2 + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\varphi'(x) = (\sqrt{e} + 4)(x - \frac{1}{2})e^{(x - \frac{1}{2})^2} - e^x + \frac{1}{x}$$

由刚才分析可知, $\varphi''(x)$ 显然单增, 且满足 $\varphi''(\frac{1}{2}) = 0$, 故 $\varphi'(x) \geq \varphi'(\frac{1}{2}) > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 单增, $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$, 原题得证。

例题 2.1.21 (2019 年浙江导数)

对任意 $x \geq \frac{1}{e^2}$ 均有 $f(x) = a \ln x + \sqrt{1+x} - \frac{\sqrt{x}}{2a} \leq 0$, 求 a 的取值范围.

解 2.1.21. 必要性探路, 什么极点效应, 内点效应啥的, 都是一个函数与 x 轴相切的不同情形, 所以我们可以直接研究 $f(x)$ 与 x 轴的相切问题, 从而规避使用端点效应带来的潜在风险.

$$\begin{cases} f(x) = a \ln x + \sqrt{1+x} - \frac{\sqrt{x}}{2a} = 0 \\ f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{4a\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ln x + \sqrt{1+x} - \frac{\sqrt{x}}{2a} = 0 \\ \frac{1}{x_0} a^2 + \frac{1}{2\sqrt{x_0+1}} a - \frac{1}{4\sqrt{x_0}} = 0 \end{cases}$$

我们虽然难以直接解出第一个方程, 但是却可以从第二个方程解出 a , 利用求根公式得到:

$$a = \sqrt{\left(\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}\right)^2 + \frac{\sqrt{x_0}}{4} - \frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}} > 0$$

代入第一个方程得到一个很浸泡的式子:

$$\ln x_0 = \frac{x_0}{2 \left(\sqrt{\left(\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}\right)^2 + \frac{\sqrt{x_0}}{4} - \frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}} \right)^2} - \frac{\sqrt{1+x_0}}{\left(\sqrt{\left(\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}\right)^2 + \frac{\sqrt{x_0}}{4} - \frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}} \right)}$$

显然这里只能取 $x = 1$ 得到 $a \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$, 这样就转化为证明充分性:

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow -2 \ln x - \frac{2\sqrt{x+1}}{a} + \frac{\sqrt{x}}{a^2} \geq 0$$

直接上求根公式好了, 懒得讨论了:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{a} &\geq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2 \ln x}{\sqrt{x}}} \Rightarrow 2\sqrt{2} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2 \ln x}{\sqrt{x}}} \\ \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)^2 &\geq 1 + \frac{1}{x} + \frac{2 \ln x}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \ln x \leq 4\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

换元 $t = x^2, t \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 转化为证明 $\ln t \leq 2t - \sqrt{2}\sqrt{t^2+1}$, 并利用飘带放缩: 即 $\forall x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right]$

$$g(x) = 2x - \sqrt{2x^2+2} - \ln x = \frac{\sqrt{2}(x-1)(x+1)}{\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2}} - \ln x \geq \frac{\sqrt{2}(x-1)(x+1)}{\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2}} - 2\frac{x-1}{x+1} \geq 0$$

最后一个不等号成立, 要求 $\frac{(x+1)^2}{\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$, 成立! 因此我们知道充分性也成立, 而条件 $x \geq \frac{1}{e^2}$ 并没有用上, 所以任意 $x \in (0, 1]$, 都有 $a \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$ 满足要求.

例题 2.1.22

已知正数 a, b, c 满足 $abc = 1$, 证明:

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2}(a + b + c)$$

解 2.1.22.

结论 2.1.2 比值代换法

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 与非椭圆上点 $P(x_0, y_0)$ 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 则

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2} = \frac{y_1 - y_0}{y_0 - y_2} = -\frac{\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} - 1}{\frac{x_0 x_2}{a^2} + \frac{y_0 y_2}{b^2} - 1} \\ (1 + \lambda)^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right) = 2\lambda \left(\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1 \right) \end{cases}$$

证明 2.1.2.

结论 2.1.3 参数方程

过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两点 $A\left(a \frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}, b \frac{2t_1}{1+t_1^2}\right), B\left(a \frac{1-t_2^2}{1+t_2^2}, b \frac{2t_2}{1+t_2^2}\right)$ 的直线方程为

$$\frac{x(1-t_1 t_2)}{a(1+t_1 t_2)} + \frac{y(t_1 + t_2)}{b(1+t_1 t_2)} = 1$$

第三章 曲线系

3.1 曲线系引入

例题 3.1.1 (椭圆上的中点弦直线)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内有一点 $P(x_0, y_0)$, 求以 P 为弦中点的直线方程.

解 3.1.1. 构造两个椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(2x_0 - x)^2}{a^2} + \frac{(2y_0 - y)^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

相减得到答案

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

例题 3.1.2 (椭圆上的直线两点式)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上有两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求 AB 方程.

解 3.1.2. 构造以 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 为直径的相似椭圆

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{a^2} + \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{b^2} = 1$$

则与原来的椭圆方程相减

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)^2}{b^2}$$

就可以得到 AB 的方程为

$$\frac{x_1 + x_2}{a^2}x + \frac{y_1 + y_2}{b^2}y = 1 + \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2}$$

再对这个方程使用万能代换便可以得到参数方程直线两点式的形式

例题 3.1.3 (抛物线上的直线两点式)

设 $y^2 = 2px$ 上有两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求 AB 方程.

解 3.1.3. 构造直线系 $(y - y_1)(y - y_2) = 0$, 与 $y^2 = 2px$ 相减得到

$$y^2 - (y - y_1)(y - y_2) = 2px \Leftrightarrow 2px - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2 = 0$$

例题 3.1.4 (利用梯形构造四点共圆)

二次函数 $y = x^2 + (a+1)x + a - 2$ 与坐标轴交于 A, B, C 三点, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程, 并验证圆心是否在定直线上, 以及外接圆是否过定点.

解 3.1.4. 构造直线系 $(y-0)(y-(a-2)) = y(y-a+2)$ 再与抛物线 $x^2 + (a+1)x - y + a - 2 = 0$ 相加得到:

$$x^2 + y^2 + (a+1)x - y - ay + 2y + a - 2 = x^2 + y^2 + (a+1)x + (1-a)y + a - 2 = 0$$

圆心 $\left(\frac{a+1}{-2}, \frac{1-a}{-2}\right)$ 一定在定直线上. 将方程改写为

$$a(x-y+1) + x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$$

发现当 $x=0, y=1$ 和 $x=-2, y=-1$ 符合要求, 这样就得到定点 $(0, 1), (-2, -1)$

例题 3.1.5 (2025 八省联考)

椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$, $A(-3, 0), B(2, 0)$, 过 B 的弦 MN 与点 A 形成的三角形 AMN 外心为 D , 证明 $k_{MN}k_{OD}$ 为定值.

解 3.1.5. 由斜率相反出共圆的结论, 可以构造直线系 $(x-ty-2)(x-ty+3) = 0$, 然后与椭圆联立:

$$\begin{cases} (x-ty-2)(x-ty+3) = 0 \\ 8x^2 + 9y^2 - 72 = 0 \end{cases}$$

然后待定 x^2, y^2 系数相等得到椭圆的系数是 (t^2+1) , 所以相加得到:

$$\begin{aligned} (t^2+1)(8x^2+9y^2-72) + (x-ty-2)(x+ty+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (8t^2+9)x^2 + (8t^2+9)y^2 + x - 5ty - 72t^2 - 78 &= 0 \end{aligned}$$

则 $k_{OD} = -5t, k_{MN} = \frac{1}{t}$, 定值为 -5 .

例题 3.1.6 (直径圆的构造)

已知抛物线 $y^2 = 2px$ 和弦 AB 所在的直线 $x = ty + m$, 求 A, B 的直径圆方程.

解 3.1.6. 消去 x 得到

$$y^2 = 2p(ty+m) = 2pty + 2pm \Rightarrow y^2 - 2pty - 2pm = 0$$

消去 y 得到

$$t^2y^2 = (x-m)^2 = 2p^2t^2x \Rightarrow x^2 - (2m+2p^2t^2)x + m^2 = 0$$

加起来就可以得到直径圆方程

$$x^2 + y^2 - (2m + 2p^2t^2)x - 2pty + m^2 - 2pm = 0$$

原因是消去 x, y 得到的式子都可以变为 $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ 和 $(y - y_1)(y - y_2) = 0$ 的形式, 而 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是弦 AB 的两端点, 所以直径圆的方程就是这两个直线的交点的方程。

例题 3.1.7 (过两点的圆系方程例题)

已知 $C: y^2 = 4x, l: y = x + 1$ 交于 A, B 两点, 求经过 A, B 且与 $x = -1$ 相切的圆的方程。

解 3.1.7. 联立有:

$$\begin{cases} y^2 = 4(y-1) \\ (x+1)^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

相加就有:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$

这是直径圆, 接下来配凑圆系方程:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 + \lambda(x - y - 1) = 0$$

代入 $x = -1$, 得到

$$y^2 - 4y + 4 + \lambda(-2 - y) = 0$$

并让 $\Delta = 0$, 得到:

$$\Delta = (4 + \lambda)^2 - 4(4 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -16$$

所以圆方程有两个: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ 和 $x^2 + y^2 - 18x + 12y + 21 = 0$, 本题是易错题, 容易漏解。

例题 3.1.8 (直径圆习题)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 弦 AB 过定点 $(m, 0)$, 其直径圆与椭圆交于点 C, D , 证明直线 CD 过定点。

解 3.1.8. 设 $AB: x = ty + m$, 其中 m 已知, 联立韦达:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \\ x = ty + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3t^2 + 4)y^2 + 6tmy + 3m^2 - 12 = 0 \\ (3t^2 + 4)x^2 - 8mx + 4m^2 - 12t^2 = 0 \end{cases}$$

两式相加得到:

$$(3t^2 + 4)x^2 + (3t^2 + 4)y^2 - 8mx + 6tmy + 7m^2 - 12 - 12t^2 = 0$$

引入 $\lambda(3x^2 + 4y^2 - 12) = 0$ 并配凑 $(x + ty + \dots)(x - ty + \dots)$ 结构, 就有

$$-(t^2 + 1)(3x^2 + 4y^2 - 12) + (3t^2 + 4)(x^2 + y^2) - 8mx + 6tmy + 7m^2 - 12 - 12t^2 = 0$$

因式分解成

$$(x - ty - m)(x + ty - 7m) = 0$$

, 所以 CD 过定点 $(7m, 0)$.

例题 3.1.9 (角平分线)

知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 弦 AB 过定点 $P(1, 0)$, $C(4, 0)$, 证明 x 轴平分 $\angle ACB$

解 3.1.9. 由 $AB: x = ty + 1$, 由对称性可以设 $A'B': x = -ty + 1$, 得到退化二次曲线

$$(x - ty - 1)(x + ty - 1) = 0$$

待定 $\lambda(3x^2 + 4y^2 - 12) = 0$, 再根据要配凑的结构

$$(x - ?y - 4)(x + ?y - 4) = 0$$

中的常数项, 得到 $\lambda = -\frac{1}{4}$

$$-(3x^2 + 4y^2 - 12) + 4(x - ty - 1)(x + ty - 1) = 0$$

得到 $(x - 4)^2 = (4 + t^2)y^2$, 这等价于

$$(x + \sqrt{4 + t^2}y - 4)(x - \sqrt{4 + t^2}y - 4) = 0$$

这个方程的根显然为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 所以斜率相反, 角平分线得证.

例题 3.1.10 (抹茶奶绿)

椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的右焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, 点 M, N 在 x 轴上方的椭圆上, 且 $\triangle MNF$ 的外心 D 在 x 轴上, $\sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN|$, 求 $S_{\triangle MNF}$

解 3.1.10. 设直线方程 $MN: y = kx + m \Leftrightarrow kx = y - m$, 并联立

$$\begin{cases} (1): (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0 \\ (2): (4k^2 + 1)y^2 - 2my + m^2 - 4k^2 = 0 \\ (3): y - kx - m = 0 \end{cases}$$

由 (1) + (2) + 2m(3) 相加得到过 A, B 两点, 且圆心在 x 轴上的圆

$$(4k^2 + 1)(x^2 + y^2) + 6kmx + 3m^2 - 4k^2 - 4 = 0$$

代入 $F(\sqrt{3}, 0)$, 得到直线 MN 到焦点 $(\sqrt{3}, 0)$ 的距离: d (后面要根据这个式子求斜率):

$$8k^2 + 6\sqrt{3}km + 3m^2 = 1 \Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{3}k + m}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

此时设圆半径为 R , 并由等面积法推算得:

$$\begin{cases} S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2}|FM||FN|\sin\angle MFN = \frac{1}{2}|MN|d = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}|MN| \\ \sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN| \end{cases} \Rightarrow \sin\angle MFN = \frac{1}{2}$$

于是设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 由向量公式得到

$$\begin{aligned} \cos\angle MFN &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}}{|FM||FN|} = \frac{(x_1 - \sqrt{3})(x_2 - \sqrt{3}) + y_1y_2}{(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1)(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2)} = \frac{(x_1 - \sqrt{3})(x_2 - \sqrt{3}) + y_1y_2}{\frac{3}{4}(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_1)(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_2)} \\ &= \frac{4}{3} \frac{12k^2 + 8\sqrt{3}km + 4m^2 - 1 + m^2 - 4k^2}{(4k^2 + 1)\frac{16}{3} + \frac{32}{\sqrt{3}}km + 4m^2 - 4} = \frac{8k^2 + 8\sqrt{3}km + 5m^2 - 1}{16k^2 + 8\sqrt{3}km + 3m^2 + 1} \\ &= \frac{8k^2 + 8\sqrt{3}km + 5m^2 - (8k^2 + 6\sqrt{3}km + 3m^2)}{16k^2 + 8\sqrt{3}km + 3m^2 + 8k^2 + 6\sqrt{3}km + 3m^2} = \frac{\sqrt{3}km + m^2}{12k^2 + 7\sqrt{3}km + 3m^2} \end{aligned}$$

齐次化后, 设 $t = \frac{m}{k}$, 得到 $(3\sqrt{3} - 2)t^2 + (21 - 2\sqrt{3})t + 12\sqrt{3} = 0$ 解得横截距, 另一个根舍去:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3} - 21 - 2\sqrt{3} - 3}{2(3\sqrt{3} - 2)} = \frac{12}{2 - 3\sqrt{3}}, t_1^2 = \frac{144}{31 - 12\sqrt{3}}, t_2 = -\sqrt{3}$$

然后根据前面求出的距离, 利用斜率的定义计算:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{d^2}{(-\frac{m}{k} - \sqrt{3})^2 - d^2} = \frac{1}{3(\frac{3+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2})^2 - 1} = \frac{31 - 12\sqrt{3}}{3(3 + 2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3} - 2)^2} = \frac{1}{16} \frac{31 - 12\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \\ m^2 &= k^2 \frac{m^2}{k^2} = \frac{1}{16} \frac{31 - 12\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \frac{144}{31 - 12\sqrt{3}} = \frac{9}{2 + 3\sqrt{3}}, km = \frac{3}{4} \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

最后得到面积:

$$\begin{aligned} S_{\triangle MNF} &= \frac{1}{2} \sin\angle MFN |FM||FN| = \frac{1}{4} |FM||FN| = \frac{16k^2 + 8\sqrt{3}km + 3m^2 + 1}{4k^2 + 1} \\ &= \frac{(31 - 12\sqrt{3}) + 6\sqrt{3}(2 - 3\sqrt{3}) + 27 + 2 + 3\sqrt{3}}{\frac{1}{4}(31 - 12\sqrt{3}) + 2 + 3\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{13} \end{aligned}$$

例题 3.1.11 (抹茶奶绿)

椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的右焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, 点 M, N 在 x 轴上方的椭圆上, 且 $\triangle MNF$ 的外心 D 在 x 轴上, $\sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN|$, 求 $S_{\triangle MNF}$

解 3.1.11. 由于本题中圆和椭圆都能削掉半边变成“函数”, 所以我们可以直接联立它们:

$$\begin{cases} (x-m)^2 + y^2 = r^2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 - 2mx + 2\sqrt{3}m - 2 = 0$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由 $\sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN|$ 得到:

$$\begin{aligned} |MN| &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right) \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_1\right) \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_2\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} \frac{16}{3} - \frac{8m}{\sqrt{3}} + 2m - 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}m\right) = \sqrt{3} - m \end{aligned}$$

由于圆经过椭圆焦点, 有

$$(\sqrt{3} - m)^2 = r^2 \Rightarrow \sqrt{3} - m = |MN| = r = \frac{\sqrt{3}}{2}|FM||FN|$$

设圆心为 D , 有等边三角形 MDN , 圆周角定理得到 $\angle MFN = \frac{\pi}{6}$, 所求面积为

$$S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} \sin \angle MFN |FM||FN| = \frac{1}{4} |FM||FN| = \frac{\sqrt{3}}{6} r$$

我们要求出 r , 所以还少一个方程, 利用三角形 MNF 余弦定理:

$$|MF|^2 + |NF|^2 - \sqrt{3}|MF||NF| = |MF|^2 + |NF|^2 - 2r = |MN|^2 = r^2 \Rightarrow |MF|^2 + |NF|^2 = r^2 + 2r$$

为了引入 m , 利用恒等式 $|MF|^2 + |NF|^2 + 2|MF||NF| = (|MF| + |NF|)^2$, 韦达定理得:

$$|MF| + |NF| = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2) = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{8}{3}m = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}m$$

那么

$$|MF|^2 + |NF|^2 = (|MF| + |NF|)^2 - 2|MF||NF| = \left(4 - \frac{4}{\sqrt{3}}m\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}r = r^2 + 2r$$

代入 $\sqrt{3} - m = r$ 得到

$$\left(4 - \frac{4}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - r)\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}r = r^2 + 2r \Rightarrow r = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{13}$$

得到 $S_{\triangle MNF} = \frac{\sqrt{3}}{6}r = \frac{2 + \sqrt{3}}{13}$

第四章 杂题

4.1 数学问题

例题 4.1.1

$a, d \geq 0, b, c > 0, b + c \geq a + d$, 求 $\frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b}$ 的最小值.

解 4.1.1. 观察到 b, c 在两个部分都出现, 而 a, d 只出现了一次, 固定 b, c , 左边关于 a 单调递减, 右边关于 d 单调递减, 又 $b + c \geq a + d$, 故不断扩大 a, d 直到 $a + d = b + c$ 使得原式变小:

$$\frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b} = \frac{b}{c+d} + \frac{c}{2b+c-d} = \frac{1}{\frac{c}{b} + \frac{d}{b}} + \frac{\frac{c}{b}}{2 + \frac{c}{b} - \frac{d}{b}}$$

换元 $t = \frac{c}{b}, x = \frac{d}{b}$, 则需要研究这个函数的最小值

$$f(x) = \frac{1}{x+t} + \frac{t}{2+t-x}, x \in [0, t+1], t > 0 \quad f'(x) = \frac{t}{(2+t-x)^2} - \frac{1}{(x+t)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t}}{2+t-x} > \frac{1}{x+t} \Rightarrow x > x_0 = \frac{2+t-t\sqrt{t}}{\sqrt{t}+1} = \frac{2+u^2-u^3}{u+1}, u^2 = t$$

且 $2+u^2-u^3=0$ 只有一根 $u_0 > 1$, $2u^3+u-1=0$ 只有一根 $u_1 < 1$, 当极值点在定义域内

$$x_0 \in (0, 1+u^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{2+u^2-u^3}{u+1} < u^2+1 \\ x_0 = \frac{2+u^2-u^3}{u+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^3+u-1 > 0 \\ 2+u^2-u^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u > u_1 \\ u < u_0 \end{cases}$$

所以此时 $f(x)$ 最小值在 $x = x_0$ 处取到

$$f_1(u_0) = \frac{1}{x_0+u^2} + \frac{u^2}{2+u^2-x_0} = g_1(u) = \frac{(1+u)^2}{2(1+u^2)}, u_1 < u < u_0$$

当极值点在定义域的右侧

$$x_0 > 1+u^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2+u^2-u^3}{u+1} > u^2+1 \\ \frac{2+u^2-u^3}{u+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^3+u-1 < 0 \\ 2+u^2-u^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_0 > u_1 > u$$

所以 $f(x)$ 单减, 在 $x = u^2+1$ 处取到最小值

$$f_2(u_0) = \frac{1}{2u^2+1} + \frac{u^2}{2+u^2-u^2-1} = u^2 + \frac{1}{2u^2+1} = g_2(u), u < u_1$$

然而还有极值点在定义域的左侧的情况, 当

$$x_0 < 0 < 1+u^2 \Leftrightarrow 2+u^2-u^3 < 0 \Leftrightarrow u > u_0$$

时有 $f(x)$ 单增, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取到最小值

$$f_3(0) = \frac{1}{0+u^2} + \frac{u^2}{2+u^2-0} = \frac{1}{u^2} + \frac{u^2}{2+u^2} = g_3(u), u > u_0$$

分别求导得到 $g_1(u) \geq g_1(u_1), g_2(u) \geq \sqrt{2} - \frac{1}{2}, g_3(u) \geq \sqrt{2 + \sqrt{2}} > 1$ 因此淘汰 $g_3(u)$, 比较前两个, 由于
$$\begin{cases} g_1(u_1) = \frac{(1+u_1)^2}{2(1+u_1^2)} > g\left(\frac{4}{7}\right) > \sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ 2u_1^3 + u_1 - 1 = 0 \Rightarrow u_1 > \frac{4}{7} \end{cases}$$
 发现成立, 得到最小值 $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

例题 4.1.2

证明 $\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \left(\frac{3}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n}{n}\right)^n > \frac{2(n-1)}{n+1}$.

解 4.1.2. 这个不等式有明显的几何意义, 首先分母都有 n , 然后分子每次自增, 长得很像一个个矩形的面积求和, 然后右边是个分式, 感觉就是积分后的结果, 所以我们根据题目中的 n 次方结构, 找到函数 $f(x) = x^n$, 然后将其积分区间 $[0, 1]$ 分成 n 等分, 并由 $f(x)$ 下凸, 将每一个曲边梯形“扩大”成直边梯形 (为什么不先放成矩形? 因为放成梯形明显更紧, 而且求和的难度不会显著变大), 根据题中的 $k = 1, 2, 3, \dots, n$:

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{k-1}{n}\right)^n + \left(\frac{k}{n}\right)^n \right) \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) > \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^n dx$$

求和得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n}\right)^n + 2\left(\frac{2}{n}\right)^n + 2\left(\frac{3}{n}\right)^n + \cdots + 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n}{n}\right)^n > n \int_0^1 x^n dx \\ \Leftrightarrow & 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{0}{n}\right)^n - \left(\frac{n}{n}\right)^n > \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{n+1} \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n > \frac{2(n-1)}{n+1} \end{aligned}$$

例题 4.1.3

证明 $f(x) = \ln x - 8 \frac{x-1}{(x^{\frac{1}{3}}+1)^3}$ 单调递增

解 4.1.3. 转化为 $F(t) = 3 \ln t - 8 \cdot \frac{t^3-1}{(t+1)^3}$ 单增, $F'(t) = \frac{3}{t} - 8 \cdot \frac{3(t^2+1)}{(t+1)^4} = \frac{3}{t} - \frac{24(t^2+1)}{(t+1)^4}$ 链式法
则 $f'(x) = \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = F'(t) \cdot \frac{1}{3t^2}$, 所以

$$f'(x) = \left(\frac{3}{t} - \frac{24(t^2+1)}{(t+1)^4} \right) \cdot \frac{1}{3t^2} = \frac{1}{t^3} - \frac{8(t^2+1)}{t^2(t+1)^4} = \frac{(t-1)^4}{t^3(t+1)^4} > 0.$$