设$0<a<1, f(x)=x^2e^{a-x}-a^2lnx-a$有且仅有两个极值点$x_4, x_5(0<x_4<1<x_5<2)$,
求证：$f(x_4)+f(x_5)>0$.

$f'(x)=x(2-x)e^{a-x}-\dfrac{a^2}{x}$
由$f(x)=x^2e^{a-x}-a^2lnx-a$有且仅有两个极值点x_4, x_5
$f'(x)$有且仅有两个零点x_4, x_5
设$g(x)=x^2(2-x)e^{-x}-a^2e^{-a}(0<x<2)$,
则$g(x)$有且仅有两个零点x_4, x_5

即$\begin{cases}2lnx_4+\ln(2-x_4)-x_4=2lna-a\\2lnx_5+\ln(2-x_5)-x_5=2lna-a\end{cases}$

$g'(x)=x(x-1)(x-4)e^{-x}$
故$g(x)$在$(0,1)$单调递增,在$(1,2)$单调递减
$f(x_4)+f(x_5)={x_4}^2e^{a-x_4}+{x_5}^2e^{a-x_5}-a^2lnx_4x_5-2a$

$$=\frac{a^2}{2-x_4}+\frac{a^2}{2-x_5}-a^2lnx_4x_5-2a>0$$

等价于$\frac{1}{2-x_4}+\frac{1}{2-x_5}-lnx_4x_5-\frac{2}{a}>0$

注意到存在$a=0.1$,使得$g(1.96)=0.01e^{-0.1}(4\times1.96^2e^{-1.86}-1)>0, x_5>1.96$

$\frac{1}{2-x_4}+\frac{1}{2-x_5}-lnx_4x_5-\frac{2}{a}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2-1.96}-ln2-\frac{2}{0.1}>0$

假设$\exists a\in(0,1), \frac{1}{2-x_4}+\frac{1}{2-x_5}-lnx_4x_5-\frac{2}{a}\leq0$

则$\frac{1}{2-x_4}+\frac{1}{2-x_5}-lnx_4x_5-\frac{2}{a}$作为关于$a$的函数在$(0,1)$存在零点

即$x_4x_5lnx_4x_5+\frac{2}{a}x_4x_5-2=(x_4+x_5-2)(\frac{4}{a}+2lnx_4x_5-1)$

故为推翻假设，证明原命题成立，只需证明

$$\begin{cases}2lnx_4+\ln(2-x_4)-x_4=2lna-a\\2lnx_5+\ln(2-x_5)-x_5=2lna-a\\x_4x_5lnx_4x_5+\dfrac{2}{a}x_4x_5-2=(x_4+x_5-2)(\dfrac{4}{a}+2lnx_4x_5-1)\end{cases}$$

在$a\in(0,1), 0<x_4<1<x_5<2$时无解
当存在$a\in(0,1), 0<x_4<1<x_5<2$满足且仅需满足

$\begin{cases}2lnx_4+\ln(2-x_4)-x_4=2lna-a\\2lnx_5+\ln(2-x_5)-x_5=2lna-a\\x_4x_5lnx_4x_5+\frac{2}{a}x_4x_5-2=(x_4+x_5-2)(\frac{4}{a}+2lnx_4x_5-1)\end{cases}$时：

设$G(x)=g(1-x)-g(1+x)(0<x<1)$
$G(x)=e^{x-1}(1-x)(1+x)(1-x-(1+x)e^{-2x})$

$$<e^{x-1}(1-x)(1+x)\left(1-x-(1+x)\frac{2-2x}{2+2x}\right)=0$$

故$G(1-x_4)=g(x_4)-g(2-x_4)<0$
即$g(2-x_4)>g(x_4)=g(x_5)$
又$2-x_4, x_5\in(1,2), g(x)$在$(1,2)$单调递减
故$2-x_4<x_5$,即$x_4+x_5>2$

设$H(x)=g(x)-g(\frac{1}{x})(\frac{1}{2}<x<1)$

$H(x)=x^2(2-x)e^{-x}(1-e^{x-\frac{1}{x}}\frac{2-\frac{1}{x}}{x^4(2-x)})$

设$h(x)=1-e^{x-\frac{1}{x}}\frac{2-\frac{1}{x}}{x^4(2-x)}(\frac{1}{2}<x\leq 1)$

$h'(x)=e^{x-\frac{1}{x}}\frac{(1-x)^2(2x^2-11x+2)}{x^7(2-x)^2}\leq 0$

故$h(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$单调递减

故$\forall x\in\left(\frac{1}{2},1\right),h(x)>h(1)=0,H(x)>0$

若$x_4\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,则$H(x_4)>0$,即$g\left(\frac{1}{x_4}\right)<\ g(x_4)=g(x_5)$

又$\frac{1}{x_4},x_5\in(1,2),g(x)$在$(1,2)$单调递减

故$\frac{1}{x_4}>x_5$,即$x_4x_5<1$

若$x_4\in(0,\frac{1}{2}],x_4x_5<\frac{1}{2}\cdot 2=1$

故$x_4x_5<1$

由$\begin{cases}2lnx_4+\ln(2-x_4)-x_4=2lna-a\\2lnx_5+\ln(2-x_5)-x_5=2lna-a\end{cases}$两式相加得

$2lnx_4x_5+\ln(2-x_4)(2-x_5)-(x_4+x_5)=4lna-2a$

令$u=x_4+x_5,v=x_4x_5$,则

$x_4x_5lnx_4x_5+\frac{2}{a}x_4x_5-2=(x_4+x_5-2)\left(\frac{4}{a}+2lnx_4x_5-1\right)$等价于

$vlnv+\frac{2}{a}v-2=(u-2)(\frac{4}{a}+2lnv-1)$

$2lnx_4x_5+\ln(2-x_4)(2-x_5)-(x_4+x_5)=4lna-2a$等价于

$2lnv+\ln(v-2u+4)-u=4lna-2a$

$x_4+x_5>2$ 等价于$u>2$

$x_4x_5<1$ 等价于$v<1$

也就是说，若存在$a\in(0,1),0<x_4<1<x_5<2$满足且仅需满足

$$\begin{cases}2lnx_4+\ln(2-x_4)-x_4=2lna-a\\2lnx_5+\ln(2-x_5)-x_5=2lna-a\\x_4x_5lnx_4x_5+\frac{2}{a}x_4x_5-2=(x_4+x_5-2)(\frac{4}{a}+2lnx_4x_5-1)\end{cases},$$

则存在$a\in(0,1),u>2,v<1$满足且仅需满足

$$\begin{cases}vlnv+\frac{2}{a}v-2=(u-2)(\frac{4}{a}+2lnv-1)\\2lnv+\ln(v-2u+4)-u=4lna-2a\end{cases}$$

由$vlnv+\frac{2}{a}v-2=(u-2)\left(\frac{4}{a}+2lnv-1\right)$

$$a=\frac{2(v-2u+4)}{4-u+(2u-4-v)lnv}$$

令$1-v=s\in(0,1),2u+s-4=t\in(s,1)$,则

$$a=\frac{4(1-t)}{4-t+s+2(1-t)ln(\frac{1}{1-s})}<\frac{4(1-t)}{4-t+s+2(1-t)s}=\frac{4(1-t)}{4-t+3s-2ts}$$

$$<\frac{4(1-t)}{4-t+3s-6\sqrt{ts}}<\frac{4(1-t)}{4-t+3s-3(t+s)}=1$$

$$4lna-2a=2lnv+\ln(v-2u+4)-u=2\ln(1-s)+\ln(1-t)-\frac{t-s+4}{2}$$

设$p(x)=4lnx-2x(x\in(0,1))$

$$p'(x)=\frac{4}{x}-2>0$$

故$p(x)$在$(0,1)$单调递增

故$2\ln(1-s)+\ln(1-t)-\frac{t-s+4}{2}=p(a)<p(\frac{4(1-t)}{4-t+3s-2ts})$

设$q(t)=2\ln(1-s)+\ln(1-t)-\frac{t-s+4}{2}-p(\frac{4(1-t)}{4-t+3s-2ts})$

$$q'(t)=-(4s+12)\left(2\left(\frac{1}{4-t+3s-2ts}\right)^2-\frac{1}{(4-t+3s-2ts)(1-t)}\right)-\frac{1}{1-t}-\frac{1}{2}$$

由$\frac{1}{4+3s}<\frac{1}{4-t+3s-2ts}<\frac{1}{4(1-t)}$

$$q'(t)>-(4s+12)\left(2\left(\frac{1}{4+3s}\right)^2-\frac{1}{(4+3s)(1-t)}\right)-\frac{1}{1-t}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{s+8}{(4+3s)(1-t)}-2(4s+12)\left(\frac{1}{4+3s}\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$>\frac{s+8}{4+3s}-2(4s+12)\left(\frac{1}{4+3s}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{s(16-3s)}{2(4+3s)^2}>0$$

故$q(t)$在$(s,1)$单调递增，$q(t)>q(s)=3\ln(1-s)-2-p(\frac{2(1-s)}{(s+1)(2-s)})$

设$r(s)=3\ln(1-s)-2-p(\frac{2(1-s)}{(s+1)(2-s)})$

$$r'(s)=\frac{s(-7s^3+22s^2-15s+4)}{\left((s+1)(2-s)\right)^2(1-s)}>\frac{s(15s^2-15s+4)}{\left((s+1)(2-s)\right)^2(1-s)}>0$$

故$r(s)$在$(0,1)$单调递增，$q(t)>r(s)>r(0)=0$

这与$2\ln(1-s)+\ln(1-t)-\frac{t-s+4}{2}<p(\frac{4(1-t)}{4-t+3s-2ts})$矛盾

故假设不成立，原命题成立。