若存在直线l与$A(x)$和$A'(x)$同时相切，则称l为函数$A(x)$的特征直线。
已知函数$f(x)=\sin x$，$[x]$表示对实数x取整，其值为不大于x的最大整数，如$[5.2]=5$，回答下列问题：

(1) 证明$f(x)$的特征直线有无数条；

(2) 记$f(x)$的特征直线中，其斜率所有可能值中最大的两个值为k_1，k_2 ($k_1>k_2>0$)。根据附录所给数据，求$[100k_1+100k_2]$的值。

(3) 记$h(x)=e^x f(x)$ ($0\le x\le \frac{3\pi}{4}$)，已知$h(x)$有且仅有一条特征直线，记为l_0。l_0与$h(x)$、$h'(x)$的交点的横坐标分别为a，b，证明：

(i) $a-b>\frac{\pi}{4}$

(ii) $a+b>\frac{5\pi}{8}$

附录

三角函数表(节选)

※ x为弧度　　$\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$

度数	tanx − x	cosx
60.1	0.6901	0.4984
60.2	0.6954	0.4969
60.3	0.7004	0.4954
60.4	0.7061	0.4939
60.5	0.7115	0.4926
60.6	0.7170	0.4909
60.7	0.7225	0.4893
60.8	0.7281	0.4878
60.9	0.7337	0.4863
61.0	0.7393	0.4848
61.1	0.7451	0.4832
61.2	0.7508	0.4817
61.3	0.7566	0.4802
61.4	0.7624	0.4786
61.5	0.7683	0.4771
61.6	0.7743	0.4756
61.7	0.7803	0.4740
61.8	0.7863	0.4725
61.9	0.7924	0.4710
62.0	0.7986	0.4694

角度	tanx − x	cosx
74.1	2.2172	0.2739
74.2	2.2388	~~0.7~~ 0.2722
74.3	2.2608	0.2706
74.4	2.2830	0.2689
74.5	2.3056	0.2672
74.6	2.3284	0.2655
74.7	2.3516	0.2638
74.8	2.3751	0.2621
74.9	2.3989	0.2605
75.0	2.4230	0.2588
75.1	2.4475	0.2571
75.2	2.4723	0.2554
75.3	2.4975	0.2537
75.4	2.5230	0.2520
75.5	2.5489	0.2503
75.6	2.5752	0.2486
75.7	2.6019	0.2469
75.8	2.6290	0.2453
75.9	2.6564	0.2436
76.0	2.6843	0.2419

(1) 证明：$f(x)=\sin x$

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

记 l 在 $f(x)$ 上的切点为 $(m, f(m))$

在 $f'(x)$ 上的切点为 $(n, f'(n))$

则有 $k=-\sin n=\cos m=\dfrac{\sin m-\cos n}{m-n}$

$\cos m=-\sin n=\cos(n+\frac{\pi}{2})$

若 $m=n+\frac{\pi}{2}+2N\pi$，$N\in Z$

则 $k=0$ 此时 l 为 $y=\pm 1$

若 $m=-n-\frac{\pi}{2}+2N\pi$，$N\in Z$

则 $k=\dfrac{\sin m-\cos n}{m-n}=\dfrac{\sin m}{m+\frac{\pi}{4}-N\pi}=\cos m$

得 $\tan m=m+\frac{\pi}{4}-N\pi$

不妨设 $m\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

令 $S(m)=\tan m-m$

$S'(m)=\dfrac{1}{\cos^2 m}-1\geq 0$

故 $S(m)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 单调递增

又当 $m=0$ 时，$S(m)=0$

$m\to+\infty$ 时，$S(m)\to+\infty$

则对于每个不同的 N，都有唯一不同的 m 与之对应，故 $f(x)$ 的特征直线有无数多条。

也可以：

令 $N=0$，$\tan x=x+\frac{\pi}{4}$

有无数多个解，对应无数多个切点，即无数多条特征直线。

(2)

根据 $f(x)$ 的对称性和周期性，结合(1)中所述，可设：

$k_1=\dfrac{\sin x_1}{x_1+\frac{\pi}{4}+N_1\pi}=\cos x_1$　　$N_1,N_2\in Z$

$k_2=\dfrac{\sin x_2}{x_2+\frac{\pi}{4}+N_2\pi}=\cos x_2$　　$x_1,x_2\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan x_i-x_i=\frac{\pi}{4}+N_i\pi$，$i=1,2$

使 $k_i=\cos x_i$ 较大，只需让 $|x_i|$ 较小

$\because S(x)=\tan x-x$ 单调递增

$\therefore$ 只需 $|\tan x_i-x_i|$ 较小

分别令 $N_1=0$，$N_2=-1$ 即可

得 $\begin{cases}\tan x_1-x_1=\frac{\pi}{4}\\ \tan x_2-x_2=-\frac{3\pi}{4}\end{cases}$

记 x_1 对应角度为 α_1，x_2 对应角度为 α_2

结合参考数据，知 $\begin{cases}61.7^\circ<\alpha_1<61.8^\circ\\ 74.7^\circ<\alpha_2<74.8^\circ\end{cases}$

$100k_1+100k_2=100\cos x_1+100\cos x_2\in(73.46, 73.78)$

故 $[100k_1+100k_2]=73$

(3) 证明: $h(x)=e^{x}\sin x$, $h'(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})e^{x}$, $h''(x)=2e^{x}\cos x$

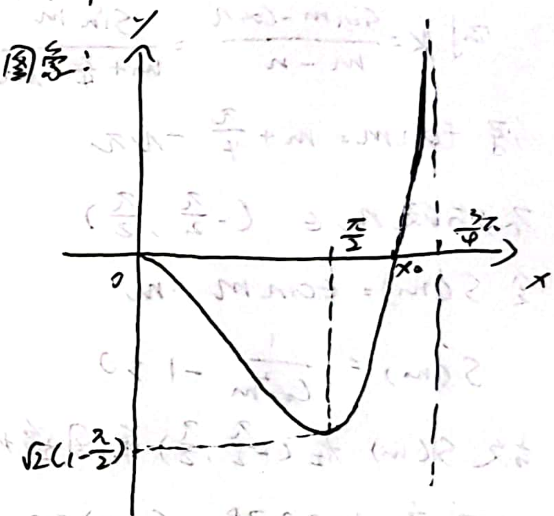
由题意可得
$$\begin{cases} k=\sqrt{2}e^{a}\sin(a+\frac{\pi}{4})=2e^{b}\cos b & \cdots ① \\ e^{a}\sin a-\sqrt{2}e^{a}a\sin(a+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{b}\sin(b+\frac{\pi}{4})-2e^{b}b\cos b & \cdots ② \end{cases}$$

令 $b+\frac{\pi}{4}=t$, ②/①, 化简得:
$$\begin{cases} e^{a}\sin(a+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}e^{t}\sin(t+\frac{\pi}{4}) \\ \frac{\sin a}{\sin(a+\frac{\pi}{4})}-\sqrt{2}a=\frac{\sin t}{\sin(t+\frac{\pi}{4})}-\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi \end{cases}$$

由 $k>0$ 得 $a\in(0,\frac{3}{4}\pi)$, $t\in(\frac{1}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi)$

令 $g(x)=\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}-\sqrt{2}x$, 即有 $g(a)=g(t)+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

$g'(x)=\frac{-\sin 2x}{\sin^{2}(x+\frac{\pi}{4})}$　画出 $g(x)$ 大致图象:



$g(\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}(1-\frac{\pi}{2})$

$g(a)=g(t)+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi>g(\frac{\pi}{2})+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi>0$

$\therefore a\in(x_0,\frac{3}{4}\pi)$

要证 $a-b>\frac{\pi}{4}$, 只需证 $a>t$

若 $t<\frac{\pi}{2}$, 显然 $a>t$

若 $t>\frac{\pi}{2}$, $g(a)>g(t)\Rightarrow a>t$

综上, $a>t=b+\frac{\pi}{4}$ (i) 得证

$\because g(\frac{5}{8}\pi)=\frac{\sin\frac{5}{8}\pi}{\sin\frac{7}{8}\pi}-\sqrt{2}\frac{5}{8}\pi=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}-\sqrt{2}\frac{5}{8}\pi<0$

$\therefore x_0>\frac{5}{8}\pi$

$\therefore a+t>\frac{\pi}{4}+x_0>\frac{\pi}{4}+\frac{5}{8}\pi$

即 $a+b>\frac{5}{8}\pi$　(ii) 得证