姓名________ 座位号________________

(在此卷上答题无效)

绝密 ★ 启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试

数学(理科)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$,集合M满足$\complement_U M=\{1,3\}$,则

A. $2\in M$　　B. $3\in M$　　C. $4\notin M$　　D. $5\notin M$

2. 已知$z=1-2\mathrm{i}$,且$z+a\overline{z}+b=0$,其中a,b为实数,则

A. $a=1$,$b=-2$　　B. $a=-1$,$b=2$

C. $a=1$,$b=2$　　D. $a=-1$,$b=-2$

3. 已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后,继续进行深空探测,成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星. 为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值,用到数列$\{b_n\}$:

$b_1=1+\dfrac{1}{\alpha_1}$,$b_2=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2}}$,$b_3=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3}}}$,…,依此类推,其中

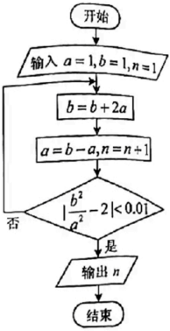
$\alpha_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$. 则

A. $b_1<b_5$　　B. $b_3<b_8$　　C. $b_6<b_2$　　D. $b_4<b_7$

5. 设F为抛物线$C:y^2=4x$的焦点,点A在C上,点$B(3,0)$,若$|AF|=|BF|$,则$|AB|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

6. 执行右边的程序框图，输出的 $n=$



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB，BC 的中点，则

A. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1　　　B. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1AC　　　D. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1C_1D

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前3项和为168，$a_2-a_5=42$，则 $a_6=$

A. 14　　　B. 12　　　C. 6　　　D. 3

9. 已知球 O 的半径为1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为

A. $\frac{1}{3}$　　　B. $\frac{1}{2}$　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立. 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1，p_2，p_3，且 $p_3>p_2>p_1>0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p，则

A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

B. 该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大

D. 该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

19.（12分）

某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山．为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了10棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单位：m^3），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$，$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$，$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$．

（1）估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到0.01）；

（3）现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 $186\,m^2$．已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比．利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值．

附：相关系数 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$，$\sqrt{1.896} \approx 1.377$．

20.（12分）

已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2)$，$B(\frac{3}{2},-1)$ 两点．

（1）求 E 的方程；

（2）设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$．证明：直线 HN 过定点．

21.（12分）

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 各恰有一个零点，求 a 的取值范围．

11、双曲线C的两个焦点为F_1，F_2，以C的实轴为直径的圆记为D，过F_1作D的切线与C交于M，N两点，且$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则$C$的离心率为

A、$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B、$\frac{3}{2}$　　C、$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D、$\frac{\sqrt{17}}{2}$

12、已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，且$f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$．若$y=g(x)$的图像关于直线$x=2$对称，$g(2)=4$，则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$

A、-21　　B、-22　　C、-23　　D、-24

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13、从甲、乙等5名同学中随机选3名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为__________.

14、过四点$(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$中的三点的一个圆的方程为__________.

15、记函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$的最小正周期为$T$．若$f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$为$f(x)$的零点，则$\omega$的最小值为__________.

16、已知$x=x_1$和$x=x_2$分别是函数$f(x)=2a^x-ex^2\ (a>0$且$a\neq1)$的极小值点和极大值点．若$x_1<x_2$，则a的取值范围是__________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知

$$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A).$$

（1）证明：$2a^2=b^2+c^2$；

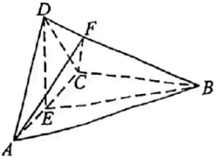
（2）若$a=5$，$\cos A=\frac{25}{31}$，求$\triangle ABC$的周长．

18.（12分）

如图，四面体$ABCD$中，$AD\perp CD$，$AD=CD$，$\angle ADB=\angle BDC$，E为AC的中点．

（1）证明：平面$BED\perp$平面ACD；

（2）设$AB=BD=2$，$\angle ACB=60°$，点F在BD上，当$\triangle AFC$的面积最小时，求CF与平面ABD所成的角的正弦值．



（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos 2t, \\ y=2\sin t \end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{3})+m=0$．

（1）写出 l 的直角坐标方程；

（2）若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围．

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知 a，b，c 都是正数，且 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

（1）$abc\leqslant\frac{1}{9}$；

（2）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{abc}}$．