2024年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M=\varnothing$，$N=\{\varnothing\}$，则下列说法错误的是

A. $M\in N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M\cup N=N$　　D. $\complement_N M=M$

2. 若复数 z_1，z_2 满足$z_1\bar{z}_2=1+\mathrm{i}$，则$\bar{z}_1z_2=$

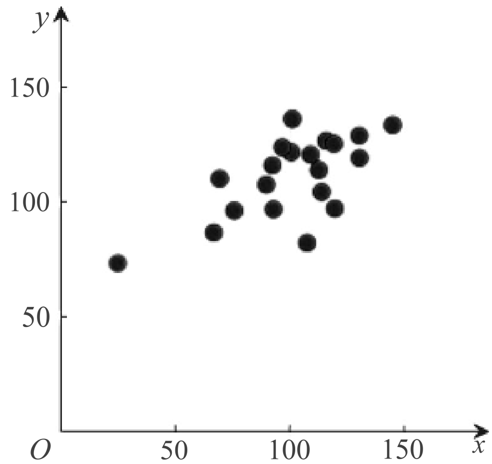
A. $1+\mathrm{i}$　　B. $1-\mathrm{i}$　　C. $-1+\mathrm{i}$　　D. $-1-\mathrm{i}$

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，则“$\forall a\in\{x|x\in I$ 且$-x\in I\}$，$f(a)+f(-a)=0$”是“$f(x)$是奇函数”的

A. 充分必要条件　　B. 既不充分也不必要条件

C. 充分不必要条件　　D. 必要不充分条件

4. 为研究英语成绩与语文成绩之间的相关关系，某同学收集班里几名同学某次考试的语文成绩和英语成绩，以英语成绩为自变量 x，以语文成绩为因变量 y，绘制出散点图如图所示，并得到回归直线方程$\hat{y}=0.4x+70$. 若该同学又以语文成绩为自变量 x，以英语成绩为因变量 y，得到下列选项中的一个回归直线方程，则该选项是



A. $\hat{y}=0.2x+78$　　B. $\hat{y}=0.4x+56$　　C. $\hat{y}=1.1x-21$　　D. $\hat{y}=2.5x-175$

参考公式：对于一组数据$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，…，$(x_n，y_n)$，其回归直线$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$斜率和截距的最小二乘估计为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

相关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$.

5. 若函数 $f(x)$ 的图象关于过原点的直线 l 对称，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=|\sin x|$，则 l 倾斜角的最大值为

A. $\frac{1}{2}\pi$　　B. $\frac{5}{8}\pi$　　C. $\frac{3}{4}\pi$　　D. $\frac{7}{8}\pi$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $2S_n=a_n^2+a_n$，则 a_3 所有可能取值的和是

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 给定△ABC，P 为空间内一动点，满足∠PAB＝∠PAC，∠ABC＝∠PBC. 若一半径为 AB 的圆与点 P 的轨迹有且仅有 4 个公共点，则∠C 的取值范围是

A. $(0,\frac{\pi}{2})$　　B. $(\frac{\pi}{2},\pi)$　　C. $(0,\pi)$　　D. $(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$

8. 设 m 是大于 1 的整数，离散型随机变量 X 的可能取值为 1，2，…，m，满足对任意一个正整数 $k\leqslant m-1$，$4^{P(X=k)}-4^{P(X=k+1)}=P(X=k)$. 若 $P(X=1)>a$ 一定成立，则 a 的最大值是

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{e}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 中共线的可能有且仅有

A. 0 组　　B. 1 组　　C. 2 组　　D. 3 组

10. 已知四面体 $ABCD$ 的外接球球心为 O_1，内切球球心为 O_2，满足 $AB\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，P 是线段 AC 上的动点，实数 μ，λ 满足 $\overrightarrow{PO_1}=\mu\overrightarrow{PA}+\lambda\overrightarrow{PD}$，实数 a，b，c，d 满足 $a\overrightarrow{O_2A}+b\overrightarrow{O_2B}+c\overrightarrow{O_2C}+d\overrightarrow{O_2D}=\mathbf{0}$，则下列说法正确的是

A. $\mu=\lambda=\frac{1}{2}$　　B. $b>a$，$c>d$

C. 若 $PB\perp PD$，则 $PB\perp AD$　　D. 若 $PO_1\perp AB$，则 PO_1∥平面 BCD

11. 已知 F 是抛物线 $C:y=x^2$ 的焦点，动点 P 满足从点 P 可以向 C 引两条夹角为 60° 的切线，切点分别为 A,B，过点 F 作直线 AB 的垂线，垂足为 Q，则

A. C 的准线为 $y=-\frac{1}{4}$　　B. 点 P 的轨迹为双曲线

C. 存在定椭圆总与直线 AB 相切　　D. 点 Q 的轨迹为圆

12. 已知函数 $f(x)=a^x\sin x-kx\,(a>1,k>0,|x|<\pi)$ 有且仅有三个零点 x_1，x_2，x_3，则

A. $x_1+x_2+x_3>0$

B. $f'(\frac{x_1+x_2+x_3}{2})>0$

C. $x_1+x_2+x_3$ 关于 k 的导数为正

D. $x_1+x_2+x_3$ 关于 a 的导数为正

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(1+x-x^2)^2$ 各项系数的绝对值之和为_______.

14. 若实数 a，b 满足 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}=2$，则 a^2+4b^2 的最大值为_______.

15. 已知四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 侧棱长相等，则 $\dfrac{\angle ABC_1+\angle ADC_1}{\angle B_1CD_1}$ 的取值范围是_______.

16. 已知 O 为坐标原点，F_1，F_2 分别是双曲线 C：$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点，P 为 C 上的点，直线 PF_1 交 C 于另一点 A，直线 PF_2 交 C 于另一点 B，过点 P 作 C 的切线交△PAB 的外接圆于另一点 Q. 则直线 PQ，OQ 的斜率之积为_______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

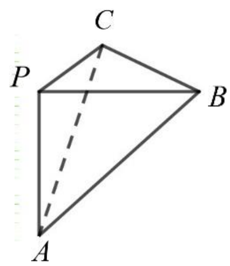
已知四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交，请从①$\angle CAD=2\angle CBD$，②$\angle ACD=2\angle ABD$，③$\angle BDA=\angle BDC$，④$\angle ACB+\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}$中任选两个作为条件，说明能否推出另外两个.

18.（12 分）

如图所示，正三棱锥 $P-ABC$ 的三个侧面两两垂直.

（1）证明：正三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两垂直；

（2）求二面角 $P-AB-C$ 平面角的余弦值.



19.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项积为 T_n，满足 $a_1=4$，$a_{n+1}+\dfrac{1}{T_n^2}=1$.

（1）证明：$T_{n+1}^2>T_n^2-2$；

（2）求最小正整数 k，使得 $T_k<2$.

20.（12 分）

下雨天，有 $m(m\geqslant 3)$ 人在食堂内用餐，在门口都各放有自己的一把伞，陆续用餐完毕拿伞离开。第一个拿伞的人不记得自己的伞是哪一把，于是从门口的 m 把伞中随便拿了一把；之后拿伞的人优先拿自己的伞，如果发现自己的伞已经被别人拿了，就从剩下的伞中随便拿一把.

（1）求最后一个拿伞的人拿到自己伞的概率；

（2）证明：拿到自己伞的人所占比例的期望随 m 的增大而增大.

21.（12 分）

已知动点 P 在椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，过 C 的右焦点 $F(1，0)$ 作 C 的弦 AB. 当 AB 与 x 轴垂直时，$|AB|=3$.

（1）求 C 的方程；

（2）求直线 PA, PB 斜率之差绝对值的最小值.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=x-\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：曲线 $y=f(x)e^{1-x}$ 上不存在不同的两点关于直线 $y=x$ 对称.