

# Neuman平均关于算术和调和平均的精确不等式

王君丽<sup>1</sup>,徐会作<sup>2,3\*</sup>,李少云<sup>2</sup>

(1. 台州科技职业学院 成人教育学院,浙江 台州 318020;  
2. 温州广播电视台 教师教学发展中心,浙江 温州 325013;  
3. 温州广播电视台 终身教育指导中心,浙江 温州 325013)

**摘要:**算术、几何、二次以及调和等二元平均都是不同阶的幂平均。Schwab-Borchardt 平均是一类重要的二元平均,由 Schwab-Borchardt 复合不同阶的幂平均可派生出一些重要平均,如 Serffert 平均、对数平均、Yang 平均等。研究 Schwab-Borchardt 平均及其派生平均与不同阶幂平均的凸组合或各种特殊组合的序关系,可得到一些有价值的平均值不等式。Neuman 平均是由 Schwab-Borchardt 平均衍生出的二元平均。本文运用实分析的方法,研究了 Neuman 平均与算术平均和调和平均的凸组合以及特殊组合的序关系,得到两个关于 Neuman 平均的精确双向不等式。

**关键词:**Neuman 平均;第二类 Yang 平均;调和平均;算术平均      **DOI:**10.13757/j.cnki.cn34-1328/n.2020.01.008  
**中图分类号:**O178      **文章标识码:**A      **文章编号:**1007-4260(2020)01-0044-05

## Sharp Inequalities for Neuman Mean in Terms of Arithmetic and Harmonic Means

WANG Junli<sup>1</sup>, XU Huizuo<sup>2,3</sup>, LI Shaoyun<sup>2</sup>

(1.School of Adult Education, Taizhou Vocational College of Science & Technology, Taizhou 318020, China;  
2. Teachers' Teaching Development Center, Wenzhou Broadcast and TV University, Wenzhou 325013, China;  
3. Lifelong Education Guidance Center, Wenzhou Broadcast and TV University, Wenzhou 325013, China)

**Abstract:** The bivariate means of arithmetic, geometry, quadratic, and harmonics are power means of different orders. Schwab-Borchardt mean composing power means of different orders can be used to derive some important bivariate means, such as Serffert mean, logarithmic mean and Yang mean, etc. Studying the order relations of the Schwab-Borchardt mean and its derived means with convex combinations or various special combinations of the different order power means can get some valuable means inequalities. The Neuman mean is the bivariate mean derived from Schwab-Borchardt mean. In this paper, the method of real analysis is used, the order relations of the Neuman mean with the convex or special combination of arithmetic and harmonic means is studied, and two optimal bidirectional inequalities for Neuman mean are found.

**Key words:** Neuman mean; second Yang mean; harmonic mean; arithmetic mean

对于  $p \in \mathbb{R}$  和  $a, b > 0$  且  $a \neq b$ , 则  $p$  阶幂平均<sup>[1]</sup>  $M_p(a, b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}$ , ( $p \neq 0$ ),  $M_0(a, b) = \sqrt{ab}$ 。  
 $M_p(a, b)$  对于固定  $a, b > 0$  和  $a \neq b$  关于  $p \in \mathbb{R}$  是连续且严格单调上升的。调和平均、几何平均、算术平均

收稿日期:2019-01-20

基金项目:浙江广播电视台“312人才培养工程”培养项目,浙江省教育厅2017年度高校访问学者‘教师专业发展项目’(FX2017084)和浙江省现代远程教育学会2018年度课题研究成果(DES-18Z04)

作者简介:王君丽(1972—),女,浙江台州人,硕士,台州科技职业学院成人教育学院副教授,研究方向为解析不等式。

E-mail:761741696@qq.com

通信作者:徐会作(1978—),男,浙江温州人,硕士,温州广播电视台教师教学发展中心副教授,研究方向为平均值不等式理论。

E-mail:huizuoxu@163.com

和二次平均是幂平均的特殊情形:

$$H(a,b) = 2ab/(a+b) = M_{-1}(a,b), G(a,b) = \sqrt{ab} = M_0(a,b), \quad (1)$$

$$A(a,b) = (a+b)/2 = M_1(a,b), Q(a,b) = \sqrt{(a^2+b^2)/2} = M_2(a,b), \quad (2)$$

并且有不等式  $H(a,b) = M_{-1}(a,b) < G(a,b) = M_0(a,b) < A(a,b) = M_1(a,b) < Q(a,b) = M_2(a,b)$  对所有  $a,b > 0$  且  $a \neq b$  成立。Schwab - Borchardt 平均<sup>[2-3]</sup>:  $SB(a,b) = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\cos^{-1}(a/b)}$ , ( $a < b$ ),  $SB(a,b) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\cosh^{-1}(a/b)}$ , ( $a > b$ )。 $SB(a,b)$  关于  $a$  和  $b$  是严格单调上升、非对称和一阶齐次的, 它复合不同阶幂函数衍生出如下重要二元平均:

$$\begin{aligned} P(a,b) &= \frac{a-b}{2\sin^{-1}[(a-b)/(a+b)]} = SB[G(a,b), A(a,b)], \\ NS(a,b) &= \frac{a-b}{2\sinh^{-1}[(a-b)/(a+b)]} = SB[Q(a,b), A(a,b)], \\ T(a,b) &= \frac{a-b}{2\tan^{-1}[(a-b)/(a+b)]} = SB[A(a,b), Q(a,b)], \\ L(a,b) &= \frac{a-b}{2\tanh^{-1}[(a-b)/(a+b)]} = SB[A(a,b), G(a,b)], \\ U(a,b) &= (a-b)/[\sqrt{2}\tan^{-1}((a-b)/\sqrt{2ab})] = SB[G(a,b), Q(a,b)], \\ V(a,b) &= (a-b)/[\sqrt{2}\sinh^{-1}((a-b)/\sqrt{2ab})] = SB[Q(a,b), G(a,b)], \end{aligned} \quad (3)$$

分别是第一类 Seiffert 平均、Neuman-Sndor 平均、第二类 Seiffert 平均、对数平均、第一类 Yang 平均和第二类 Yang 平均<sup>[4]</sup>, 并且有不等式  $L(a,b) < V(a,b) < P(a,b) < U(a,b) < NS(a,b) < T(a,b)$  对所有  $a,b > 0$  且  $a \neq b$  成立。

近年来, Schwab-Borchardt 平均及其派生平均与不同阶幂平均的凸组合或各种特殊组合的序关系研究, 得到国内外数学研究者的关注, 有关 Schwab-Borchardt 平均的新派生平均被提出, 一些重要平均值不等式被发现, Neuman 平均就是其中一种。

Neuman<sup>[5]</sup>从 Schwab-Borchardt 平均衍生出一个新的二元平均:  $N(a,b) = [a + b^2/SB(a,b)]/2$ 。设  $N_{QG}(a,b) = N[Q(a,b), G(a,b)]$  和  $N_{GQ}(a,b) = N[G(a,b), Q(a,b)]$ , 则可推得:

$$N_{QG}(a,b) = [Q(a,b) + G^2(a,b)/V(a,b)]/2, N_{GQ}(a,b) = G(a,b) + [Q^2(a,b)/U(a,b)]/2。$$

沈林昌等<sup>[6]</sup>证明了双向不等式

$$\begin{cases} \alpha_1 Q(a,b) + (1-\alpha_1)G(a,b) < N_{QG}(a,b) < \beta_1 Q(a,b) + (1-\beta_1)G(a,b) \\ \alpha_2 Q(a,b) + (1-\alpha_2)G(a,b) < N_{GQ}(a,b) < \beta_2 Q(a,b) + (1-\beta_2)G(a,b) \\ \alpha_3 Q(a,b) + (1-\alpha_3)V(a,b) < N_{QG}(a,b) < \beta_3 Q(a,b) + (1-\beta_3)V(a,b), \\ \alpha_4 Q(a,b) + (1-\alpha_4)U(a,b) < N_{GQ}(a,b) < \beta_4 Q(a,b) + (1-\beta_4)U(a,b) \end{cases}, \quad (4)$$

对所有  $a,b > 0$  且  $a \neq b$  成立当且仅当  $\alpha_1 \leq 1/3, \beta_1 \geq 1/2, \alpha_2 \leq 2/3, \beta_2 \geq \pi/4, \alpha_3 \leq 0, \beta_3 \geq 1/2, \alpha_4 \leq 0$  和  $\beta_4 \geq (\pi^2 - 8)/[4(\pi - 2)] = 0.4094\cdots$ 。

根据不等式(4), 可推得

$$G(a,b) < [Q(a,b) + 2G(a,b)]/3 < N_{QG}(a,b) < [Q(a,b) + G(a,b)]/2 < A(a,b) \quad (5)$$

对所有  $a,b > 0$  且  $a \neq b$  成立。

何晓红等<sup>[7]</sup>证明了  $\alpha \leq 2\log 2 / (5\log 2 - 2\log \pi) = 1.1785\cdots$  和  $\beta \geq 4/3$  是双向不等式  $M_\alpha(a,b) <$

$N_{GQ}(a,b) < M_\beta(a,b)$  对所有  $a,b > 0$  且  $a \neq b$  成立的最佳参数。受不等式(5)的启发,本文主要讨论是否存在最佳参数  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in (0,1)$  使得双向不等式

$$\begin{aligned} \alpha_1 A(a,b) + (1-\alpha_1) H(a,b) &< N_{GQ}(a,b) < \beta_1 A(a,b) + (1-\beta_1) H(a,b), \\ \sqrt{\alpha_2 A^2(a,b) + (1-\alpha_2) H^2(a,b)} &< N_{GQ}(a,b) < \sqrt{\beta_2 A^2(a,b) + (1-\beta_2) H^2(a,b)}, \end{aligned}$$

对所有  $a,b > 0$  且  $a \neq b$  成立。

为了讨论上述问题,需要先介绍下面两个引理。

引理1 设  $p \in (0,1)$  和  $f(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}\left[(2-p)x^2+2\right]}{px^4+3px^2+2} - \sinh^{-1}(x)$ , 则下面结论是真的:

- (1) 如果  $p = 5/6$ , 则对所有  $x \in (0,+\infty)$  有  $f(x) < 0$ ;
- (2) 如果  $p = \sqrt{2}/2$ , 则存在一个  $\lambda \in (0,+\infty)$  使得当  $x \in (0,\lambda)$  时有  $f(x) > 0$  和当  $x \in (\lambda,+\infty)$  时有  $f(x) < 0$ 。

证明 简单计算推导得

$$f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, f'(x) = -\frac{x^2(px^2+2)}{\sqrt{1+x^2}(px^4+3px^2+2)^2} f_1(x), \quad (6)$$

其中

$$f_1(x) = px^4 + (11p-8)x^2 + 2(6p-5). \quad (7)$$

下面分两种情形讨论:

- (1) 当  $p = 5/6$  时, (7)式变为

$$f_1(x) = \frac{1}{6}x^2(5x^2+7) > 0, \quad (8)$$

对所有  $x \in (0,+\infty)$  成立, 所以, 由(6)、(8)式得到对所有  $x \in (0,+\infty)$  有  $f(x) < 0$ 。

- (2) 当  $p = \sqrt{2}/2$  时, 则由(7)式和数值计算得到

$$6p-5 = -0.7573\dots < 0, 11p-8 = -0.2218\dots < 0, \quad (9)$$

$$f'_1(x) = 2xf_2(x), \quad (10)$$

其中

$$f_2(x) = 2px^2 + 11p - 8. \quad (11)$$

由(7)、(9)和(11)式得到

$$f_1(0) = 2(6p-5) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty, \quad (12)$$

$$f_2(0) = 11p-8 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty, f'_2(x) = 4px > 0, \quad (13)$$

对所有  $x \in (0,+\infty)$ 。

由(13)式可知存在  $\lambda_0 \in (0,+\infty)$  使得当  $x \in (0,\lambda_0)$  时  $f_2(x) < 0$ , 当  $x \in (\lambda_0,+\infty)$  时  $f_2(x) > 0$ 。由(10)、(12)式可知, 当  $x \in (0,\lambda_0)$  时  $f_1(x) < 0$ ; 当  $x \in (\lambda_0,+\infty)$  时,  $f_1(x)$  在区间  $(\lambda_0,+\infty)$  内严格单调上升且  $f_1(\lambda_0) < 0$ , 易知存在  $\lambda_1 > \lambda_0$  使得当  $x \in (\lambda_0,\lambda_1)$  时  $f_1(x) < 0$ , 当  $x \in (\lambda_1,+\infty)$  时  $f_1(x) > 0$ 。综上可知, 存在当  $x \in (0,\lambda_1)$  时  $f_1(x) < 0$ ; 当  $x \in (\lambda_1,+\infty)$  时  $f_1(x) > 0$ 。

同上分析, 由(6)式并结合  $x \in (0,\lambda_1)$  时  $f_1(x) < 0$ ,  $x \in (\lambda_1,+\infty)$  时  $f_1(x) > 0$ , 易知存在  $\lambda > \lambda_1$  使得当  $x \in (0,\lambda)$  时  $f(x) > 0$ ; 当  $x \in (\lambda,+\infty)$  时  $f(x) < 0$ 。

引理2 设  $p \in (0,1)$  和  $g(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}(px^4+4x^2+4)}{px^6+5px^4+8px^2+4} - \sinh^{-1}(x)$ , 则下面结论是真的:

- (1) 如果  $p = 5/6$ , 则对所有  $x \in (0,+\infty)$  有  $g(x) < 0$ ;
- (2) 如果  $p = 1/2$ , 则存在一个  $\mu \in (0,+\infty)$  使得当  $x \in (0,\mu)$  时有  $g(x) > 0$  和当  $x \in (\mu,+\infty)$  时有  $g(x) < 0$ 。

证明 简单计算可得

$$g(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, g'(x) = -\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}(px^6+5px^4+8px^2+4)^2}g_1(x), \quad (14)$$

其中

$$g_1(x) = p^2x^{10} + p(p+8)x^8 + 4p(p+7)x^6 + 56p^2x^4 + 16(4p^2+3p-4)x^2 + 16(6p-5)。 \quad (15)$$

下面分两种情形讨论:

(1) 当  $p = 5/6$  时, 等式(15)化简为

$$g_1(x) = \frac{1}{36}x^2(25x^8 + 256x^6 + 940x^4 + 1400x^2 + 736) > 0, \quad (16)$$

对所有  $x \in (0, +\infty)$  成立。所以, 由(14)、(16)式得到对所有  $x \in (0, +\infty)$  有  $g(x) < 0$ 。

(2) 当  $p = 1/2$  时, 由(15)式可推得

$$6p - 5 = -2 < 0, 4p^2 + 3p - 4 = -1.5 < 0, \quad (17)$$

$$g_1(0) = 16(6p-5) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = +\infty, g'_1(x) = 2xg_2(x), \quad (18)$$

其中

$$g_2(x) = 5p^2x^8 + 4p(p+8)x^6 + 12p(p+7)x^4 + 112p^2x^2 + 16(4p^2+3p-4)。 \quad (19)$$

由(17)、(19)式得到

$$\begin{aligned} g_2(0) &= 16(4p^2+3p-4) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = +\infty, \\ g'_2(x) &= 8px[5px^6 + 3(p+8)x^4 + 6(p+7)x^2 + 28p] > 0, \end{aligned} \quad (20)$$

对所有  $x \in (0, +\infty)$ 。

由(20)式可知存在  $\mu_0 \in (0, +\infty)$  使得当  $x \in (0, \mu_0)$  时  $g_2(x) < 0$ , 当  $x \in (\mu_0, +\infty)$  时  $g_2(x) > 0$ 。由(18)式可知, 当  $x \in (0, \mu_0)$  时  $g_1(x) < 0$ ; 当  $x \in (\mu_0, +\infty)$  时,  $g_1(x)$  在区间  $(\mu_0, +\infty)$  内严格单调上升且  $g_1(\mu_0) < 0$ , 易知存在  $\mu_1 > \mu_0$  使得当  $x \in (\mu_0, \mu_1)$  时  $g_1(x) < 0$ , 当  $x \in (\mu_1, +\infty)$  时  $g_1(x) > 0$ 。综上可知, 当  $x \in (0, \mu_1)$  时  $g_1(x) < 0$ ; 当  $x \in (\mu_1, +\infty)$  时  $g_1(x) > 0$ 。

同上分析, 由(18)和(19)式, 结合  $x \in (0, \mu_1)$  时  $g_1(x) < 0$ ,  $x \in (\mu_1, +\infty)$  时  $g_1(x) > 0$ , 易知存在  $\mu > \mu_1$  使得当  $x \in (0, \mu)$  时  $g(x) > 0$ ; 当  $x \in (\mu, +\infty)$  时  $g(x) < 0$ 。

下面给出本文的主要结论及证明。

**定理 1** 双向不等式  $\alpha_1 A(a, b) + (1 - \alpha_1) H(a, b) < N_{QG}(a, b) < \beta_1 A(a, b) + (1 - \beta_1) H(a, b)$  对所有  $a, b > 0$  且  $a \neq b$  成立当且仅当  $\alpha_1 \leq \sqrt{2}/2 = 0.7071 \dots, \beta_1 \geq 5/6$ 。

**证明** 根据调和平均  $H(a, b)$ , 算术平均  $A(a, b)$  和 Neuman 平均  $N_{QG}(a, b)$  是对称且一阶齐次的, 不失一般性, 假设  $a > b > 0$ , 设  $p \in (0, 1)$  和  $x = (a - b)/\sqrt{2ab} \in (0, +\infty)$ , 则由(1)~(4)式得到

$$H(a, b) = \frac{G(a, b)}{\sqrt{1+x^2/2}}, A(a, b) = G(a, b) \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}, N_{QG} = \frac{1}{2}G(a, b) \left[ \sqrt{1+x^2} + \frac{\sinh^{-1}(x)}{x} \right]。 \quad (21)$$

由(21)式可得

$$\begin{aligned} \ln N_{QG}(a, b) - \ln [pA(a, b) + (1-p)H(a, b)] &= \\ \ln \left[ \sqrt{1+x^2} + \frac{\sinh^{-1}(x)}{x} \right] + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \ln [p(x^2 + 2) + 2(1-p)] - \frac{1}{2} \ln 2。 \end{aligned} \quad (22)$$

设

$$F(x) = \ln \left[ \sqrt{1+x^2} + \frac{\sinh^{-1}(x)}{x} \right] + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \ln [p(x^2 + 2) + 2(1-p)] - \frac{1}{2} \ln 2, \quad (23)$$

简单计算可得

$$F(0^+) = 0, \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\frac{1}{2} \ln 2 - \ln p, \quad (25)$$

$$F'(x) = \frac{2(px^4 + 3px^2 + 2)}{x(x^2 + 2)(px^2 + 2)[x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1}(x)]} f(x),$$

其中  $f(x)$  同引理 1 中定义。

下面分 4 种情形证明。

(1) 如果  $p = 5/6$ , 由(22)~(24)式和引理 1(1) 可知  $N_{QG}(a, b) < \frac{5}{6}A(a, b) + \frac{1}{6}H(a, b)$  对所有  $a, b > 0$  且  $a \neq b$  成立。

(2) 如果  $p = \sqrt{2}/2$ , 则由(25)式和引理 1(2) 的结果可得存在一个  $\lambda \in (0, +\infty)$  使得函数  $F(x)$  在  $x \in (0, \lambda)$  内严格单调上升和在  $x \in (\lambda, +\infty)$  内严格单调下降。注意到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ , 所以, 由(22)~(24) 式和协同函数  $F(x)$  的分段单调性可知  $N_{QG}(a, b) > \sqrt{2}A(a, b)/2 + (1 - \sqrt{2}/2)H(a, b)$  对所有  $a, b > 0$  且  $a \neq b$  成立。

(3) 如果  $p < 5/6, x > 0$  和  $x \rightarrow 0$ , 则应用幂级数展开得到

$$F(x) = \frac{5-6p}{12}x^2 + O(x^2),$$

进一步由(22)、(23)式知, 存在一个充分小实数  $\delta_0 = \delta_0(p) > 0$  使得对所有  $(a-b)/\sqrt{2ab} \in (0, \delta_0)$  恒有

$$N_{QG}(a, b) > [pA(a, b) + (1-p)H(a, b)].$$

(4) 如果  $p > \sqrt{2}/2$ , 则由(25)式可得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) < 0$ , 结合(22)、(23)式意味着存在一个足够大实数  $M = M(p)$  使得对所有  $a, b > 0$  且  $(a-b)/\sqrt{2ab} \in (M, +\infty)$  恒有  $N_{QG}(a, b) < pA(a, b) + (1-p)H(a, b)$ 。

**定理 2** 双向不等式  $\sqrt{\alpha_2 A^2(a, b) + (1-\alpha_2)H^2(a, b)} < N_{QG}(a, b) < \sqrt{\beta_2 A^2(a, b) + (1-\beta_2)H^2(a, b)}$  对所有  $a, b > 0$  且  $a \neq b$  成立当且仅当  $\alpha_2 \leq 1/2, \beta_2 \geq 5/6$ 。

**证明** 不失一般性, 假设  $a > b > 0$ 。设  $p \in (0, 1)$  和  $x = (a-b)/\sqrt{2ab} \in (0, +\infty)$ , 则由(21)式得到

$$\begin{aligned} \ln N_{QG}(a, b) - \ln \sqrt{pA^2(a, b) + (1-p)H^2(a, b)} = \\ \ln \left[ \sqrt{1+x^2} + \frac{\sinh^{-1}(x)}{x} \right] + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \ln \left[ p(x^2 + 2)^2 + 4(1-p) \right] - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned} \quad (26)$$

设

$$G(x) = \ln \left[ \sqrt{1+x^2} + \frac{\sinh^{-1}(x)}{x} \right] + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \ln \left[ p(x^2 + 2)^2 + 4(1-p) \right] - \frac{1}{2} \ln 2, \quad (27)$$

简单计算可得

$$G(0^+) = 0, \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln p, \quad (29)$$

$$G'(x) = \frac{2(px^6 + 5px^4 + 8px^2 + 4)}{x(x^2 + 2)(px^4 + 4px^2 + 4)[x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1}(x)]} g(x),$$

其中  $g(x)$  如引理 2 中定义。下面分 4 种情形证明。

(1) 如果  $p = 1/2$ , 由(28)式和引理 2(2) 知存在一个  $\mu \in (0, +\infty)$  使得函数  $G(x)$  在  $x \in (0, \mu)$  内严格单调上升及在  $x \in (\mu, +\infty)$  内严格单调下降。注意到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ , 所以由(26)~(28)式和协同函数  $G(x)$  的分段单调性可知  $N_{QG}(a, b) > \sqrt{A^2(a, b)/2 + H^2(a, b)/2}$  对所有  $a, b > 0$  且  $a \neq b$  成立。

(2) 如果  $p = 5/6$ , 由(26)~(28)式和引理 2(1) 可知  $N_{QG}(a, b) < \sqrt{5A^2(a, b)/6 + H^2(a, b)/6}$  对所有  $a, b > 0$  且  $a \neq b$  成立。  
(下转第 66 页)

既要发展壮大新动能,深化推动创新创业,也要加速传统产业的转型升级,以产业促就业,以产业谋发展。通过产业内迁,增强城市吸引力,打牢中小城市的产业基础,提高城市人均收入水平,促进人口向中小城市的迁移,实现人口回流。同时,地方政府在推进户籍制度改革过程中应构建合理的改革构架,采用具有可操作性的措施,激发房地产业潜在需求,降低房地产库存。

### 参考文献:

- [1] ZHENG C. The reaction of housing price to the change of hukou policy across China[D]. US: University of Michigan, 2013.
- [2] TAO L, HUI E C M, WONG F K W, et al. Housing choices of migrant workers in China: beyond the hukou perspective[J]. Habitat International, 2015, 49: 474-483.
- [3] TYNER A, REN Y. The hukou system, rural institutions, and migrant integration in China[J]. Journal of East Asian Studies, 2016, 16(3): 331-348.
- [4] LI S, LIU Y. The jobs-housing relationship and commuting in Guangzhou, China: Hukou and dual structure[J]. Journal of Transport Geography, 2016, 54: 286-294.
- [5] 顾勇菁. 户籍制度改革: 房地产政策又一“松动”信号?[J]. 商品与质量, 2012 (13): 16-16.
- [6] 王先柱, 吴义东. 我国住房市场去库存压力的区域性差异研究: 基于住房均衡价格的视角[J]. 价格理论与实践, 2016 (5): 89-92.
- [7] KOENKER R. Quantile regression[M]. London: Cambridge University Press, 2005.
- [8] 罗杰·康克. 分位回归[M]. 马令杰,译. 上海: 上海财经大学出版社, 2013.
- [9] 徐勇. 化解房地产库存的对策建议[J]. 中共石家庄市委党校学报, 2016, 18(6): 31-34.
- [10] 郭栋林, 汤惠君. 浅析我国房地产去库存存在的问题及对策[J]. 经济师, 2016(8): 29-30.
- [11] 赵艳霞, 祖海芹, 刘义. 户籍制度改革对河北省房地产业的影响[J]. 合作经济与科技, 2012(6): 19-21.

(上接第48页)

(3) 如果  $p > 1/2$ , 由(29)式可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) < 0$ , 再结合(26)、(27)式意味着存在一个充分大实数  $T = T(p)$  使得对所有  $a, b > 0$  且  $(a - b)/\sqrt{2ab} \in (T, +\infty)$  恒有  $N_{QG}(a, b) < \sqrt{pA^2(a, b) + (1-p)H^2(a, b)}$ 。

(4) 如果  $p < 5/6$ ,  $x > 0$  和  $x \rightarrow 0$ , 应用幂级数展开得到  $G(x) = \frac{5-6p}{12}x^2 + O(x^2)$ , 再由(26)、(27)式即意味着存在一个充分小实数  $\delta_1 = \delta_1(p) > 0$  使得对所有  $a, b > 0$  且  $(a - b)/\sqrt{2ab} \in (0, \delta_1)$  恒有

$$N_{QG}(a, b) > \sqrt{pA^2(a, b) + (1-p)H^2(a, b)}.$$

### 参考文献:

- [1] BULLEN P S, MITRINOVIC D S, VASIĆ P M P. Means and their inequalities[M]. Dordrecht: Springer, 1988.
- [2] NEUMAN E, SÁNDOR J. On the Schwab-Borchardt mean[J]. Mathematica Pannonica, 2003, 14(2): 253-266.
- [3] NEUMAN E, SÁNDOR J. On the Schwab-Borchardt mean[J]. Mathematica Pannonica, 2006, 17(1): 49-59.
- [4] YANG Z H. Three families of two-parameter means constructed by trigonometric functions[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013, DOI: <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-541>.
- [5] NEUMAN E. On a new bivariate mean[J]. Aequationes Mathematicae, 2014, 88: 277-289.
- [6] SHEN L CH, YANG Y Y, QIAN W M. Sharp inequalities involving Neuman means of the second kind with applications[J]. Journal of Advanced in Applied Mathematics, 2016, 1(3): 139-148.
- [7] HE X H, YANG Y Y, QIAN W M. Sharp power mean bounds for the second Neuman mean[J]. Miskolc Mathematical Notes, 2017, 18(2): 801-809.