华南理工大学
South China University of Technology

离散数学

作者：夏同
学院：计算机科学与工程学院
班级：1 班
学号：202530451676
日期：2025 年 11 月 26 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 命题逻辑

1.1 命题与命题公式

定义 1.1.1 命题

命题是用陈述句表示的一个为真或者为假，但不能同时为真又为假的判断语句

一个语句是命题，关键在于它是否在“逻辑上”具有一个确定的真值（即要么为真，要么为假），而不取决于我们是否知道或能够验证这个真值。只要一个陈述句在原则上可能为真或为假，即使我们目前无法判断（例如由于科学限制或信息不足），它仍然是一个命题。

比如“除了地球以外的其他星球有生物”，好像我们还不知道真假，但是我们知道，它有一个潜在的真值：要么其他星球上存在生物（真），要么不存在（假）。尽管我们目前无法证实或证伪这个陈述，但它的真值是客观存在的，不会同时为真又为假。

而语句“$2+x=5$”，我们从逻辑上无法认为它一定为真，或者一定为假，因为 x 是变元，有时这个式子成立，有时不成立，因此这个语句不是命题。

除此以外，问句，感叹句，祈使句表示的语义不具备真值，不是命题。比如“多漂亮的花啊！”这句话，有的人觉得好看，有的人觉得不好看，所以它没有确定的真值，不是命题。

定义 1.1.2 悖论

悖论是用陈述句表示的一个如果为真则推出为假、如果为假则推出为真，从而无法一致地分配真值的判断语句。

比如著名的理发师悖论等

定义 1.1.3 原子命题（简单命题）

原子命题是不能被分解为更简单命题的命题，它不包含任何逻辑联结词，是构成复合命题的基本单位。

原子命题（简单命题）的特点是它的真值是内在的、最基本的，不依赖于其他命题。例如：“今天是星期五。”和“雪是白的。”

定义 1.1.4 复合命题

复合命题是由一个或一个以上的原子命题（简单句）通过逻辑联结词（如“并非”、“并且”、“或者”、“如果…那么…”、“当且仅当”等连词）组合而成的命题。

复合命题 的真值则完全由其包含的原子命题的真值以及所使用的逻辑联结词的规则共同决定。例如："今天是星期五并且天气很好。"这个复合命题的真假，取决于"今天是星期五"和"天气很好"这两个原子命题的真假以及"并且"这个词的逻辑含义。

定义 1.1.5 逻辑联结词

逻辑联结词是用来连接一个或多个命题，从而构成更复杂的复合命题的逻辑运算符。它们定义了原子命题之间的逻辑关系，并决定了复合命题的真值。

1. **否定联结词**（$\neg$，读作"非"）：表示对原命题的否定。命题 $\neg P$ 为真，当且仅当命题 P 为假。
2. **合取联结词**（$\wedge$，读作"且"或"与"）：表示两个命题同时成立。命题 $P \wedge Q$ 为真，当且仅当 P 和 Q 同时为真。
3. **析取联结词**（$\vee$，读作"或"）：表示两个命题至少有一个成立。命题 $P \vee Q$ 为真，当且仅当 P 和 Q 至少有一个为真（此为"相容或"，即允许两者同时为真）。
4. **蕴涵联结词**（$\rightarrow$ 或 $\supset$，读作"如果⋯那么⋯"）：表示前一个命题是后一个命题的充分条件。命题 $P \rightarrow Q$ 为假，当且仅当 P 为真而 Q 为假；其余情况均为真。
5. **等价联结词**（$\leftrightarrow$，读作"当且仅当"）：表示两个命题互为充分必要条件。命题 $P \leftrightarrow Q$ 为真，当且仅当 P 和 Q 的真值相同（即同真或同假）。
6. **与非联结词**（$\uparrow$，读作"与非"）：表示合取的否定。命题 $P \uparrow Q$ 为真，当且仅当 P 和 Q 不同时为真。其真值等价于 $\neg(P \wedge Q)$。
7. **或非联结词**（$\downarrow$，读作"或非"）：表示析取的否定。命题 $P \downarrow Q$ 为真，当且仅当 P 和 Q 同时为假。其真值等价于 $\neg(P \vee Q)$。
8. **异或联结词**（$\oplus$，读作"异或"）：表示不相容的析取。命题 $P \oplus Q$ 为真，当且仅当 P 和 Q 的真值不同（即一真一假）。其真值等价于 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

比如"登录服务器必须输入一个有效的口令"，符号化后就是：令 P: 登录服务器，Q：输入一个有效的口令，符号化：$P \rightarrow Q$，需要注意后者是必要不充分条件，因为输入口令后，可能还需要其它步骤才能登陆服务器。

有的人不理解的可能是为什么蕴含前件为假时，蕴含式总为真。这个定义源于我们对"承诺"或"规则"是否被违反的判断。逻辑学中的蕴涵式 $P \rightarrow Q$ 可以看作一个"承诺"：**如果 P 成立，则我保证 Q 也成立**。这个承诺的真假，取决于在 P 成立的情况下，我是否履行了承诺。如果 P 是假的，那么前提条件就没有被满足，这个规则或承诺就自动进入"不适用"或"未被激活"的状态。既然承诺没有被激活，那么我们自然不能说它被违反了。在逻辑上，我们便将"未被违反"的状态定义为"真"。

定义 1.1.6 逻辑联结词的运算优先级

$\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$，合取优先级大于析取优先级。

给定一个含有 n 个命题变元的命题公式，易得这 n 个命题变元共有 2^n 种不同的赋值，将命题

公式在所有赋值下的真值列成一个表，成为该命题的真值表，所以真值表有 2^n 行，真值表实际上定义了一个函数，从 2^n 种赋值映射到一个真值 (真或假)。对于每种赋值，函数的输出可以是真或假两种选择。因此，所有可能的函数数量是 2^{2^n} 个。这意味着，对于 n 个命题变元，存在 2^{2^n} 个不同的真值表。

定义 1.1.7 （最小）全功能联结词集

在命题逻辑中，一个联结词集合被称为**全功能联结词集**，当且仅当该集合中的联结词足以表达所有可能的真值函数。换句话说，使用该集合中的联结词可以构造出任意的命题公式，并能够表示所有可能的 2^{2^n} 个不同的真值表（其中 n 为命题变元的个数）。如果从一个全功能联结词集中移除任何一个联结词后，剩下的联结词集合不再是全功能的，则称该集合为**最小全功能联结词集**。

列举所有的最小全功能联结词集：$\{\neg, \wedge\}$，$\{\neg, \vee\}$，$\{\neg, \rightarrow\}$，$\{\uparrow\}$ （与非集），$\{\downarrow\}$ （或非集）。考试一般考选择题，归纳出特点就是：一定要出现否定（或者包含有），析取、合取、蕴含这三个出现一个就行，不出现时必然是单一的 $\{\uparrow\}$ （与非集），$\{\downarrow\}$ （或非集）。

特别的，异或 $\{\oplus\}$ 不是最小全功能联结词集，甚至不是全功能联结词集。事实上，命题的真值只有 0 和 1，而恰好异或运算有一个重要特性：当输入的真值变化时，输出总是以” 可预测的线性方式” 变化。具体来说，如果我们只使用异或运算，无论怎么组合，得到的结果都只能表达” 奇偶校验” 类型的关系——即计算输入中 1 的个数是奇数还是偶数。这种运算无法表达更复杂的逻辑关系，比如” 两个输入必须同时为 1”（与运算）或” 至少一个输入为 1”（或运算）。

为什么与运算和或运算更强大呢？因为它们能表达” 非线性” 的关系。与运算 $P \wedge Q$ 要求两个输入必须同时满足条件，这不是简单的奇偶关系。同样，或运算 $P \vee Q$ 允许至少一个条件满足，这也超出了异或的能力范围。

而与非运算 $\uparrow$ 和或非运算 $\downarrow$ 之所以强大，是因为它们内在包含了” 否定” 的能力。例如，单用与非运算就能表示否定：$\neg P = P \uparrow P$。一旦能够表示否定，再加上它们原有的组合能力，就可以构造出所有其他逻辑运算，包括与、或、蕴含等。

例题 1.1.1

证明 $\{\uparrow\}$ （与非集），$\{\downarrow\}$ （或非集）是最小全功能联结词集

解 1.1.1.

$$\neg P \Leftrightarrow P \uparrow P \qquad P \wedge Q \Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \qquad P \rightarrow Q \Leftrightarrow P \uparrow (Q \uparrow Q)$$

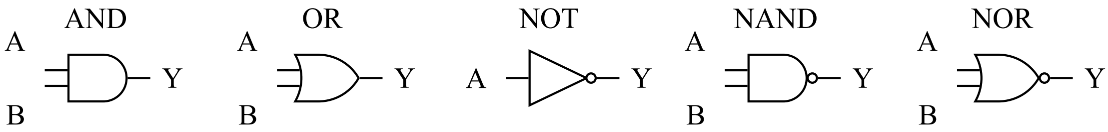
$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P)))$$

类似地：

$$\neg P \Leftrightarrow P \downarrow P \qquad P \vee Q \Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \qquad P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow Q$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P)$$



1.2 命题演算的关系式

$P \Leftrightarrow Q$（逻辑等价）的定义是：$P \leftrightarrow Q$ 为永真式/重言式；$P \Rightarrow Q$（逻辑蕴含）的定义是：$P \rightarrow Q$ 为永真式；

证明两个命题公式等价，方法是：1. 比较真值表；2. 等价运算（使用等价符号 $\Leftrightarrow$）

置换规则：它允许在逻辑公式中，用逻辑等价的子公式替换另一个子公式，而不改变原公式的真值。

定义 1.2.1 对偶式

在命题逻辑中，设 A 是一个仅包含联结词 $\neg$（否定）、$\wedge$（合取）和 $\vee$（析取）的命题公式。A 的**对偶式**是通过将 A 中所有的 $\wedge$ 替换为 $\vee$，所有的 $\vee$ 替换为 $\wedge$，同时将所有的 1（真）替换为 0（假），所有的 0（假）替换为 1（真）而得到的新公式，记作 A^*

定理 1.2.1 对偶式的性质

设 A 和 B 是仅包含联结词 $\neg$、$\wedge$ 和 $\vee$ 的命题公式，A^* 和 B^* 分别是它们的对偶式

1. **对偶原理**：若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。逻辑等价关系在对偶变换下保持不变。
2. **否定与对偶的关系**：$A \Leftrightarrow (A^*)^*$，即 A 的对偶式的对偶式等于 A 本身。
3. **永真式与永假式的对偶**：若 A 永真，则 A^* 永假；若 A 永假，则 A^* 永真。
4. **对偶式的否定**：$\neg A \Leftrightarrow (\neg A^*)^*$，其中 $\neg A^*$ 表示先将 A 中的原子命题取否定，再求对偶式。
5. **对偶式的运算**：$(A \wedge B)^* = A^* \vee B^*$，$(A \vee B)^* = A^* \wedge B^*$，$(\neg A)^* = \neg(A^*)$
6. $A \Rightarrow B$ 的充分必要条件是 $B^* \Rightarrow A^*$

性质 5 是由定义导出的，性质 4 是因为否定运算在对偶变换下保持不变，对偶式定义只涉及交换 $\wedge$ 和 $\vee$，性质 3 更显然，因为永真式为 1，永假式为 0，对偶变换后显然颠倒。

下面证明性质 6，**第一步：证明如果** $A \Rightarrow B$**，则** $B^* \Rightarrow A^*$，由于 $A \Rightarrow B$，所以 $A \rightarrow B$ 是永真式。根据对偶式的性质，永真式的对偶是永假式，因此 $(A \rightarrow B)^*$ 是永假式，将蕴含式转换为基本联结词：$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$，所以 $(\neg A \vee B)^*$是永假式，根据对偶式的定义：$(\neg A \vee B)^* = (\neg A)^* \wedge B^* = \neg A^* \wedge B^*$，因此 $\neg A^* \wedge B^*$ 是永假式，这意味着对于所有赋值，$\neg A^* \wedge B^*$ 都为假。两边同时取否定得到 $\neg A^* \rightarrow \neg B^*$ 为真，即 $B^* \rightarrow A^*$ 为永真式，所以 $B^* \Rightarrow A^*$。**第二步：证明如果** $B^* \Rightarrow A^*$**，则** $A \Rightarrow B$ 由于 $B^* \Rightarrow A^*$，根据第一步的结论（将 A 替换为 B^*，B 替换为 A^*），我们有：$(A^*)^* \Rightarrow (B^*)^*$，根据对偶式的性质，$(A^*)^* = A$，$(B^*)^* = B$，所以 $A \Rightarrow B$。综上，$A \Rightarrow B$ 当且仅当 $B^* \Rightarrow A^*$。

定理 1.2.2 重要等价关系

1. 基本等价关系

双重否定律：$\neg\neg P \Leftrightarrow P$

等幂律（幂等律）：$P \vee P \Leftrightarrow P$，$P \wedge P \Leftrightarrow P$

交换律：$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$，$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

结合律：$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$，$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

分配律：$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$，$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

吸收律：$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$，$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

德摩根律：$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$，$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

2. 常元相关等价关系

零元律：$P \vee 1 \Leftrightarrow 1$，$P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ 同一律：$P \vee 0 \Leftrightarrow P$，$P \wedge 1 \Leftrightarrow P$

排中律：$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$ 矛盾律：$P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$

3. 蕴含与等价关系

蕴含等值式：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$（“$P$ 发生且 Q 不发生”是不可能的）

逆否等值式：$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

等价等值式：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

等价否定等值式：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \leftrightarrow \neg Q$

归谬论：$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$（不可能同时蕴含正反面）

4. 其他重要等价关系

输出律：$(P \wedge Q) \to R \Leftrightarrow P \to (Q \to R)$

应该注意，形如 $A \Leftrightarrow B, A \Rightarrow B$ 不是命题公式，而是命题关系式。而应用这些等价关系式可以证明公式互相等价，或者求主析取范式，主合取范式。解题过程中应该利用等价符号。

但是当题目要证明“若 p 则 q”这样的蕴含关系，就可以出新的考题。我们可以将要证明的蕴含关系利用蕴含式写出来，再证明其永真（解题过程中应该利用等价符号），这就需要用到等价关系式（或者真值表）。

但是，当转化出来的命题公式的蕴含前件或者后件中含有较多的命题变元，就需要使用推理定律，并使用编号 1234 一步步写出推理过程，而不是这里的等价关系式，解题过程中也不应该出现等价符号。考试一般考“利用构造法验证推理是否有效”（指的是构造定理证明系统）。

上面提到的输出律，即 **CP 规则**:

定理 1.2.3 CP 规则（附加前提规则）

对于任意公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n, B, C$，如果 $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ 可以推出 C，则 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 可以推出 $B \to C$。

这意味着，如果我们能从前提集合和临时假设 B 推导出 C，那么我们就能从原前提集合推导出条件语句 $B \to C$，而不再依赖假设 B。

除了这个规则外，还有若干规则需要遵循：

1. 前提引入规则：在证明的任何步骤中，可以随时引入已知的前提条件。在证明过程中，并不需要用完所有给定的前提。关键是选择能够有效推导出结论的前提组合。当前提自身存在矛盾时，并不影响这个规则的合理性，因为矛盾本身已经足以推出任何结论。
2. 结论引入规则：从已知条件出发，通过有效的推理规则推导出新的结论。
3. 置换规则：在证明过程中，可以用逻辑等价的公式替换原公式，而不改变推理的有效性。最后的置换规则恰恰给出了推理中“不允许使用等价符号”的替代方案。

定理 1.2.4 蕴含关系式

1. 化简律：$P \wedge Q \Rightarrow P$（或 $P \wedge Q \Rightarrow Q$），（抓住重点，忽略次要）

2. 附加律：$P \Rightarrow P \vee Q$，（有真则真，多说不妨）

3. 假言推理（分离规则）：$(P \to Q) \wedge P \Rightarrow Q$（有条件就执行）

4. 拒取式：$(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$ （结果不成立，前提必为假）

5. 假言三段论：$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow (P \to R)$ （环环相扣）

6. 析取三段论：$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$ （非此即彼）

7. 构造性二难：$(P \to Q) \wedge (R \to S), P \vee R \Rightarrow Q \vee S$ （分兵二路，两路夹击）

8. 破坏性二难：$(P \to Q) \wedge (R \to S), \neg Q \vee \neg S \Rightarrow \neg P \vee \neg R$

9. 等价三段论：$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$ （两头落空，源头有错）

10. 归结式：$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)$（两头下注，必中一个）

归结证明是一种基于归结原理的自动定理证明方法，基础是“归结式”：对于两个子句 $C_1 = P \vee A$ 和 $C_2 = \neg P \vee B$，可以通过消去互补文字 P 和 $\neg P$，得到归结式 $A \vee B$。解题过程是：先将待证明的公式转化为合取范式，得到子句集合，然后通过反复应用归结规则，从子句集中推导新的子句，如果能够推导出空子句（矛盾），则证明原公式是不可满足的，否则直到推导出结果为止。

除了利用这些推理规则并使用演绎法进行推理，也可以先附加前提（CP），再直接证明。或者先附加结论的否定（归谬法）再进行间接推演。

定义 1.2.2 相容

如果存在一个真值赋值使得所有公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 同时为真，则称它们是**相容的**（一致的）；否则称它们是**不相容的**（矛盾的），即这些命题公式的合取式为矛盾式。

有了这个思路，我们可以将结论取否定加入到前提条件集合中，证明前提条件不相容，也就是说“题目出错了”，从而证明原来的结论是正确的。

1.3 析取范式，合取范式

定义 1.3.1 析取范式和合取范式，极小项极大项，主析取，主合取范式

析取范式是若干个**简单合取式**（文字的合取）的析取，形如：$(P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S) \vee \cdots$

合取范式是若干个**简单析取式**（文字的析取）的合取，形如：$(P \vee \neg Q) \wedge (R \vee S) \wedge \cdots$

任何命题公式都存在等价的析取范式和合取范式，可通过蕴含等价、内移否定、分配律得。

极小项是包含所有命题变元或其否定的简单合取式，每个变元恰好出现一次。例如，对于变元 P, Q，极小项有：$P \wedge Q$，$P \wedge \neg Q$，$\neg P \wedge Q$，$\neg P \wedge \neg Q$。

极大项是包含所有命题变元或其否定的简单析取式，每个变元恰好出现一次。例如，对于变元 P, Q，极大项有：$P \vee Q$，$P \vee \neg Q$，$\neg P \vee Q$，$\neg P \vee \neg Q$。

主析取范式是由极小项组成的析取范式，每个极小项对应公式的一个成真赋值。

主合取范式是由极大项组成的合取范式，每个极大项对应公式的一个成假赋值。

任何命题公式都存在等价的唯一主析取范式和主合取范式。永真式的主合取范式为空（无极大项），永假式的主析取范式为空（无极小项）。

所以由上述定义得知，主析取范式或主合取范式中不一定有极小项或者极大项。极小项一般用小写 m_i 表示，极大项一般用大写 M_i 表示。

关于成真赋值和成假赋值与谁对应，这里提供理解和记忆的方式：

由于析取范式由若干个简单合取式（极小项）通过析取联结词连接而成，而析取运算具有”一真即真” 的特性，这类似于逻辑代数中的” 或” 运算：0（假）参与运算不改变结果（相当于没有贡献），而每个 1（真）项（对应极小项为真）都会使结果为真。因此，为了和原命题保持等价关系，主析取范式的每一个极小项都要对应着公式的一个成真赋值，不然就不可以代表（或者等价于）原命题公式。

进而，将真值表中每个成真赋值对应的二进制数转化为十进制，即可得到该极小项的下标（如赋值 $P = 1, Q = 0, R = 1$ 对应 m_5）。主析取范式就是所有这些极小项（如 m_2, m_5, m_7）用逻辑加连接起来的形式：$\sum(2, 5, 7)$。

由于合取范式由若干个简单析取式（极大项）通过合取联结词连接而成，而合取运算具有”一假即假” 的特性，这类似于逻辑代数中的” 与” 运算：1（真）参与运算不改变结果（相当于没有贡献），而每个 0（假）项（对应极大项为假）都会使结果为假。因此，为了和原命题保持等价关系，主合取范式的每一个极大项都要对应着公式的一个成假赋值，不然就不可以代表（或者等价于）原命题公式。

进而，将真值表中每个成假赋值对应的二进制数转化为十进制，即可得到该极大项的下标（如赋值 $P = 1, Q = 0, R = 1$ 对应 M_5）。主合取范式就是所有这些极大项（如 M_2, M_5, M_7）用逻辑乘连接起来的形式 $\prod(2, 5, 7)$

对主析取范式（主合取范式）使用分配律（可以理解为多项式乘法）可以得到等价的主合取范式（主析取范式）。

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) = (P \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) = (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg P)$$

第二章 谓词逻辑

2.1 谓词逻辑基本概念

定义 2.1.1 个体词 谓词 n 元谓词 个体常元变元 谓词常项变项

在谓词逻辑中，命题被分解为个体词和谓词两部分。
个体词是命题中表示具体或抽象对象的词，包括表示特定个体的个体常元（如 a, b, c）和表示不确定个体的个体变元（如 x, y, z）。
谓词是用来说明个体性质或个体间关系的词，包括表示特定性质或关系的谓词常项（如 P, Q, R）和表示不确定性质或关系的谓词变项（如 F, G, H）。n 元谓词是涉及 n 个个体的谓词，表示 n 元关系，如一元谓词 $P(x)$ 描述个体性质，二元谓词 $R(x, y)$ 描述两个体间关系，n 元谓词 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 描述 n 个个体的关系。

定义 2.1.2 谓词表达式，命题函数，个体域，论述域

在谓词逻辑中，谓词表达式是由谓词和个体词组成的符号串，用于表示个体的性质或个体间的关系，例如 $P(x)$、$R(a, b)$ 等。
命题函数是以个体变元（其取值范围就是个体域，也称作论述域）为自变量的函数，其取值是一个命题，当个体变元被特定个体常元替换时，命题函数转化为一个具体的命题。例如，$P(x)$ 是一个命题函数，当 x 取值为 a 时，$P(a)$ 成为一个命题。命题函数的真值取决于个体变元的取值和谓词的含义。

可以看出，谓词表达式可以判断真值，命题函数不可以。个体域可以是无限或者有限的，没有特别说明时，个体变元的论述域指的是把整个宇宙中一切事物都作为对象的集合，所以当大题没有说个体域是什么时，最好不要想当然的自我设想个体域，比如说有的题目说“所以人都是学生”，那么最好还是设置命题函数“$M(x) : x$ 是人”，或者声明个体域 x 是人，不要直接不管了。

定义 2.1.3 量词

量词是用于表示个体变元在个体域中取值范围的逻辑符号。
全称量词（$\forall$）：表示”对所有”或”任意”，如 $\forall x P(x)$ 表示”对所有 x，$P(x)$ 成立”。
存在量词（$\exists$）：表示”存在”或”至少有一个”，如 $\exists x P(x)$ 表示”存在 x 使得 $P(x)$ 成立”。
除了这两种基本量词外，还有一些扩展的量词表示法：
唯一存在量词（$\exists!$）：表示”存在唯一的”，如 $\exists! x P(x)$ 表示”存在唯一的 x 使得 $P(x)$ 成立”
计数量词：如 $\exists_n x P(x)$ 表示”恰好有 n 个 x 满足 $P(x)$”

注意，在使用全称量词时，表示个体范围的特性谓词和表示个体性质的谓词构成条件关系式：$\forall x(P(x) \to Q(x))$；使用存在量词时，表示个体范围的特性谓词和表示个体性质的谓词构成合取关系式：$\exists x(P(x) \land Q(x))$。

考虑命题”所有大学生都年轻”。如果我们错误地用合取式：$\forall x(Student(x) \land Young(x))$ 这表示”每个个体都是大学生并且年轻”——要求宇宙中**所有个体**都必须是大学生！这显然过强了。正确的条件式：$\forall x(Student(x) \to Young(x))$ 只对”是大学生”的那些个体施加”年轻”的要求，对非大学生个体没有要求，这才是符合题意的。

考虑命题”有大学生聪明”。如果我们错误地用条件式：$\exists x(Student(x) \to Smart(x))$ 这个公式在逻辑上等价于 $\exists x(\neg Student(x) \lor Smart(x))$，只要存在**任意一个非大学生**，这个公式就为真，完全偏离原意。而 $\exists x(Student(x) \land Smart(x))$ 表达了”存在一个个体既是大学生又聪明”的含义。

实际上，两种表达在特定条件下可以转换：$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \neg\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$

定义 2.1.4 谓词演算的合式公式，简称谓词合式公式

合式公式是谓词逻辑中形式推理和语义解释的基本单位，其递归定义如下：

1. 原子公式是合式公式：如果 P 是 n 元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项（个体常元、个体变元或函数），则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是合式公式
2. 逻辑联结词组合：如果 A 和 B 是合式公式，则 $(\neg A)$、$(A \land B)$、$(A \lor B)$、$(A \to B)$、$(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式
3. 量词组合：如果 A 是合式公式，x 是个体变元，则 $(\forall x A)$ 和 $(\exists x A)$ 也是合式公式
4. 只有有限次应用上述规则构成的表达式才是合式公式

定义 2.1.5 指导变元，辖域，约束变元，约束出现，自由变元，自由出现，闭式

在谓词逻辑中，量词和变元的使用涉及以下重要概念：

指导变元：紧跟在量词后面的个体变元称为指导变元，如 $\forall x$ 中的 x 和 $\exists y$ 中的 y。

辖域：量词所作用的公式范围称为该量词的辖域。如 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 中，$(P(x) \to Q(x))$ 是 $\forall x$ 的辖域。

约束变元：在量词辖域内出现且与该量词指导变元相同的个体变元称为约束变元。

约束出现：个体变元在公式中的某次出现如果处于某个量词的辖域内，且与该量词的指导变元相同，则称为约束出现。

自由变元：在公式中不被任何量词约束的个体变元称为自由变元。

自由出现：个体变元在公式中的某次出现如果不是约束出现，则称为自由出现。

闭式：不包含任何自由出现的个体变元的谓词公式称为闭式。闭式中所有个体变元都是约束出现的，这样的公式具有确定的真值。

例如，在公式 $\forall x(P(x,y) \to \exists z Q(x,z))$ 中：x 和 z 是指导变元，$(P(x,y) \to \exists z Q(x,z))$ 是 $\forall x$ 的辖域，$Q(x,z)$ 是 $\exists z$ 的辖域，第一个 x 和第二个 x 是约束出现（被 $\forall x$ 约束），y 是自由出现（自由变元），z 是约束出现（被 $\exists z$ 约束），该公式不是闭式，因为包含自由变元 y。

定义 2.1.6 谓词公式的解释和分类

谓词公式的解释是指为公式中的符号赋予具体含义的过程，包括以下四个组成部分：
1. **个体域** D：一个非空集合，规定个体变元的取值范围
2. **个体常元的指定**：为每个个体常元指定 D 中的一个特定元素
3. **函数符号的指定**：为每个 n 元函数符号指定 D^n 到 D 的映射
4. **谓词符号的指定**：为每个 n 元谓词符号指定 D^n 到 $\{真, 假\}$ 的映射

给定解释 I 和公式 A，可以通过递归方式计算 A 在 I 下的真值。闭式在任意解释下的真值是确定的，而包含自由变元的公式真值取决于自由变元的取值。公式 A 是永真式当且仅当 A 在所有解释下为真；A 是可满足式当且仅当存在解释使 A 为真；A 是永假式当且仅当 A 在所有解释下为假。

谓词公式判断类型是比较困难的，为了判断一些简单的情形，可以定义代换实例：

定义 2.1.7 谓词公式的代换实例

谓词公式的代换实例，是指通过将命题逻辑中的命题公式中的命题变元替换为谓词公式而得到的谓词公式。具体来说，设 A 是一个命题公式，其中包含命题变元 $P_1, P_2, \ldots, P_n$。如果用一个谓词公式 B_i（$i = 1, 2, \ldots, n$）替换 A 中的每个命题变元 P_i，则得到的新公式 A' 称为 A 的一个代换实例。

代换实例保持了原命题公式的逻辑结构，只是将原子命题替换为谓词公式。如果原命题公式是永真式（矛盾式），则其所有代换实例也是永真式（矛盾式）。

例如，命题公式 $P \to (Q \wedge P)$ 的一个代换实例可以是：$\forall x P(x) \to (\exists y Q(y) \wedge \forall x P(x))$。而在代换实例的视角来看，有些谓词公式可以通过像命题公式那样进行等价变换，从而证明一些命题公式之间有等价关系或者蕴含关系。这就需要用到之前的推理定律。详见 2.3

2.2 换名，前束范式

换名的动机是让谓词公式中尽量不要出现同样的变元，以便于区分和进行逻辑推理。

约束变元换名规则允许在公式中更改约束变元的名称，而不改变公式的逻辑含义。比如将 $\forall x(P(x) \to \exists y Q(x, y))$ 中的 x 换为 z，得到 $\forall z(P(z) \to \exists y Q(z, y))$，要求如下：
1. 只能更改约束变元的名称，不能更改自由变元；
2. 换名必须在整个量词的辖域内一致进行
3. 新变元名称不能与公式中已有的自由变元同名
4. 多个量词约束的同名变元必须同时换名

自由变元代入规则允许用项替换公式中的自由变元。例如将 $\forall x P(x, y)$ 中的自由变元 y 用常元 a 代入，得到 $\forall x P(x, a)$，要求如下：
1. 代入必须对自由变元的所有自由出现同时进行

2. 代入项中不能含有在公式中受约束的变元
3. 代入后原公式的逻辑含义保持不变

注意，约束变元换名，改变的是变元符号，不改变变元的性质（仍是约束变元），自由变元代入是用具体的项（常元、函数或其他变元）替换自由变元换名规则保持公式的逻辑等价性。

举一个例子，比如谓词公式：$\forall x(P(x,y) \to \exists y Q(x,y))$，这个公式存在两个问题：一是自由变元 y 与约束变元 y 同名，容易引起混淆，二是量词 $\forall x$ 和 $\exists y$ 的约束变元 x 和 y 在公式中混合使用，不利于逻辑推理。下面换名：

第一步：自由变元代入：将自由变元 y 用常元 a 代入：$\forall x(P(x,a) \to \exists y Q(x,y))$

第二步：约束变元换名：将存在量词 $\exists y$ 的约束变元 y 换名为 z：$\forall x(P(x,a) \to \exists z Q(x,z))$。经过两个规则的应用，我们得到的新公式：自由变元 y 已被具体化为常元 a，约束变元 y 被换名为 z，避免了名称冲突，现在公式中每个变元的角色清晰：x 是 $\forall$ 的约束变元，z 是 $\exists$ 的约束变元，a 是常元，新公式与原公式逻辑等价，但更便于进行逻辑推理。

常常利用换名将谓词公式化为与其自身等价的规范形式，成为前束范式：

定义 2.2.1 前束范式，首标，母式

前束范式是谓词逻辑中的一种标准形式，其中所有量词都出现在公式的最前端，且其辖域延伸到公式的末尾。形式化地，一个公式是前束范式当且仅当它具有以下形式：

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nM, \text{其中} Q_1x_1Q_2x_2 \text{为首标}, M \text{为母式}$$

其中：$Q_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ 是量词符号（$\forall$ 或 $\exists$），$x_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ 是个体变元。

将任意谓词公式化为前束范式的步骤通常包括：消去蕴含联结词 $\to$ 和等价联结词 $\leftrightarrow$，将否定符号 $\neg$ 内移，使其只作用于原子公式，将量词向左移动，并适当换名避免变元冲突。

例如谓词公式 $\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z)) \to \exists u Q(x,y,u))$ 化为前束范式的过程是：

$$\begin{aligned}
&\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z)) \to \exists u Q(x,y,u)) && \\
&\Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z)) \vee \exists u Q(x,y,u)) && \text{置换规则}\\
&\Leftrightarrow \forall x\forall y(\forall z(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)) \vee \exists u Q(x,y,u)) && \text{置换规则}\\
&\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z\exists u(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u)) && \text{量词辖域扩张}
\end{aligned}$$

由于上面的 x,y 的辖域覆盖到公式末尾，而且 z 和 u 的虽然辖域不同，但名称不同，无需换名，下面再看一个需要换名的例子。求下列谓词公式的前束范式：$\neg\exists x A(x) \to \forall y B(x,y)$

$$\begin{aligned}
&\neg\exists x A(x) \to \forall y B(x,y) && \\
&\Leftrightarrow \forall x\neg A(x) \to \forall y B(x,y) && \text{否定等价转换}\\
&\Leftrightarrow \forall z\neg A(z) \to \forall y B(x,y) && \text{换名}\\
&\Leftrightarrow \forall z\forall y(\neg A(z) \to B(x,y)) && \text{量词辖域扩张}\\
&\Leftrightarrow \forall z\forall y(A(z) \vee B(x,y)) && \text{置换规则}
\end{aligned}$$

2.3 谓词公式的等价和蕴含关系式

与上一章类似，当两个谓词公式 A 和 B 满足 $A \leftrightarrow B$ 为永真式时，我们说 A 和 B 是等价的，等价关系式的形式为：$A \Leftrightarrow B$；当两个谓词公式 A 和 B 满足 $A \rightarrow B$ 为永真式时，我们说 A 蕴含 B，蕴含关系式的形式为：$A \Rightarrow B$。

定理 2.3.1 常见的等价关系式

1. 去括号（B 含 x）：$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$
2. 去括号（B 含 x）：$\forall y(A(y) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B(x)$
3. 去括号（B 不含 x）：$\forall x(\exists x)\ (B(\wedge, \vee, \rightarrow) A(x)) \Leftrightarrow \forall x(\exists x)\ B(\wedge, \vee, \rightarrow) A(x)$
4. 去括号（B 不含 x）：$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B \quad \exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$
5. 分配律：$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \quad \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
6. 交换律：$\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y) \quad \exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$

3 和 4 即书上给出的量词辖域扩张与收缩律，2 虽然说 B 含 x，但是由于此时蕴含前件不含 x，而是含有 y，且指导变元是 y，所以此时和 4 一样。上面的公式利用等价变形都可以解决，下面给出理解和记忆的方式。

1. 左边说“至少有一个 x，能够确保：如果它满足 A，那么它也满足 B”。右边说“如果所有的 x 都满足 A，那么至少有一个 x 满足 B”。例如：“假设你是老师，你承诺说你会找一些幸运儿学生，如果他们来上课就能及格”，这等价于“如果所有学生都来上课，那么有学生能及格”，因为你总要挑选学生给到及格。

2. 需要注意在这个公式中，$B(x)$ 中的变元是自由变元（没有被任何量词约束），因此两边都表示关于某个特定个体 x 的陈述。左边说”对任何一个 y，如果 y 具有性质 A，那么 x 具有性质 B”；右边说”如果存在某个个体具有性质 A，那么 x 具有性质 B”。例如，”如果任何人都是医生，那么张三健康”等价于”如果有医生存在，那么张三健康”。由于 x 是自由变元，两边讨论的都是同一个特定的 x（这里也可以视作存在量词引入），$B(x)$ 描述的是这个特定个体的性质，不受量词影响。

3. 当 B 是与 x 无关的事实陈述时，可以把 B 从量词中“提出来”。例如，“对所有学生，今天下雨且他们要考试”等价于“今天下雨且所有学生都要考试”。

4. 左边说“每个 A 都导致 B”；右边说“只要有 A 存在就会导致 B”。例如，“如果每个学生都作弊，就取消考试”等价于“只要有学生作弊，就取消考试”。

5. “每个人都既聪明又勤奋”等价于“每个人都聪明且每个人都勤奋”。“有人会唱歌或跳舞”等价于“有人会唱歌或者有人会跳舞”。

6. “任何两个人都是朋友”等价于“对任何人来说，与任何人都是朋友”，量词顺序不影响含义。“存在两个人是朋友”等价于“存在这样的两个人，他们是朋友”，存在量词的顺序也不影响含义。

定理 2.3.2 常见的蕴含关系式（结论的弱化）

1. $\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$
2. $\forall x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$
3. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \neg\forall x A(x) \to \exists x B(x)$
4. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
5. $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$
6. $\exists x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$
7. $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall x A(x,x)$
8. $\exists x A(x,x) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$
9. $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

1. 如果存在某个 x 满足 $A(x)$，那么存在某个 x 满足 $B(x)$。注意，这里的两个 x 可能不是同一个个体，也可能是同一个个体，当为后一种情况，就得到了蕴含后件。所以蕴含关系 $\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$ 成立。

2. 如果所有 x 满足 $A(x)$，那么存在某个 x 满足 $B(x)$。单独考虑这个对 $B(x)$ 量身定制的 x 也会满足 $A(x)$，此时 $A(x) \to B(x)$ 成立，蕴含关系 $\forall x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$ 成立。

3. 左边是一个强条件：要么所有个体都满足 A，要么所有个体都满足 B。右边是一个弱条件：每个个体至少满足 A 或 B 之一。显然，如果左边成立，那么右边必须成立，因为如果所有个体都满足 A，那么每个个体都满足 A，所以满足 A 或 B；类似如果所有个体都满足 B，也一样。但反过来不一定成立：可能有些个体满足 A 但不满足 B，有些满足 B 但不满足 A，所以右边真但左边假，因此蕴含关系 $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$ 成立。而另一个蕴含关系式作为例题安排在后面了。

4. 如果存在一个个体同时满足 A 和 B，那么当然存在满足 A 的个体（就是这个个体）和存在满足 B 的个体（也是这个个体），但是右边的两个 x 可能一样也可能不一样，蕴含关系 $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ 显然成立。

5. 每一个满足 A 的 x 都同时满足 B，那当 x 恒满足 A 时就会恒满足 B，但当存在不满足 A 的个体时，前提不施加任何约束，因此可能存在某些个体满足 A 但不满足 B，只要不是所有个体都满足 A，前提仍然为真。蕴含关系 $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$ 显然成立。

6. 对于某特定的 x，如果 $A(x)$ 成立，那么 $B(x)$ 也成立。但是右边的两个 x 可能一样也可能不一样，蕴含关系 $\exists x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$ 显然成立。

7. 左边说 A 关系对所有个体对都成立。右边说 A 关系对所有自对（即个体与自身）都成立。如果左边成立，特别地，当 $y = x$ 时，$A(x,x)$ 成立，因此蕴含关系 $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall x A(x,x)$ 成立。

8. 如果存在一个个体与自身满足 A，那么取个体 x 和 y（取 $y = x$）满足 A。所以左边蕴含右边，即 $\exists x A(x,x) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$ 。但可能 $A(x,y)$ 成立对于 x 和 y 不同，$A(x,x)$ 不成立。

9. 从“全局 A”到“存在万能 y”（万能钥匙）到“每个 x 有对应 y”（专用钥匙）到“存在一对”（碰运气），强度递减，蕴含关系成立。

上面的叙述其实已经用到了四大谓词逻辑推理规则：

定理 2.3.3 四大谓词逻辑推理规则

1. 全称实例化 (Universal Instantiation, UI): 从全称命题推出特定实例。

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(c), \text{其中}c\text{是个体域中的任意个体}$$

使用要求与注意事项：c 必须属于个体域中的个体，且 c 不能在 $A(x)$ 中约束出现，可以对同一个全称命题进行多次实例化，得到不同的实例，实例化时保持变元的一致性。例如，从“所有人都会死”推出“苏格拉底会死”。

2. 存在实例化 (Existential Instantiation, EI) 从存在命题推出特定实例。

$$\exists x P(x) \Rightarrow P(c), \text{其中}c\text{是个体域中的某个特定个体}$$

使用要求与注意事项：除了 x 以外，$A(x)$ 不能出现其它自由出现的个体变元，同时 c 必须是新引入的常元，不能和公式或推理证明过程中的其它常元或变元相同；c 不能出现在结论中（因为不知道具体是哪个个体）；只能对同一个存在量词使用一次 EI。例如，从”有人迟到了”推出”令小王是那个迟到的人”

3. 全称泛化 (Universal Generalization, UG) 从特定实例推出全称命题。

$$P(c) \Rightarrow \forall x P(x), \text{其中}c\text{是个体域中的任意个体}$$

使用要求与注意事项：c 必须是自由出现的个体变元，不能有特殊性质，且 c 不能在 $A(x)$ 中约束出现，必须确保对个体域中所有个体都成立。示例：通过证明任意一个三角形的内角和为 180 度，推出所有三角形的内角和为 180 度。

4. 存在泛化 (Existential Generalization, EG)：从特定实例推出存在命题。

$$P(c) \Rightarrow \exists x P(x), \text{其中}c\text{是个体域中的某个特定个体}$$

使用要求与注意事项：c 可以是任意已知个体，但是取代 c 的 x 不可以在 $A(c)$ 中出现过，即不能和已有的量词绑定。示例：从“苏格拉底是哲学家”推出“存在哲学家”。

5. **易错点：在使用 EI 引入新常元后，不能再对该常元使用 UG**

例题：证明 $\forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \neg\forall x A(x) \to \exists x B(x)$

(1)	$\forall x(A(x) \vee B(x))$	前提
(2)	$\neg\forall x A(x)$	附加前提
(3)	$\exists x \neg A(x)$	由 (2) 量词否定转换
(4)	$\neg A(c)$	由 (3) 存在实例化 (EI)，c 为新常量
(5)	$A(c) \vee B(c)$	由 (1) 全称实例化 (UI)
(6)	$B(c)$	由 (4)(5) 析取三段论
(7)	$\exists x B(x)$	由 (6) 存在泛化 (EG)
(8)	$\neg\forall x A(x) \to \exists x B(x)$	由 (2)(7) 条件证明 (CP)

第三章 集合与关系

3.1 集合

定义 3.1.1 空集，全集，有限集，无限集，元素个数

空集：不含任何元素的集合，记作 $\varnothing$ 或 $\{x|x \neq x\}$。空集是任何集合的子集。空集是唯一的
全集：特定讨论中包含所有对象的集合，记作 U。全集是相对的，取决于讨论的上下文。
有限集：元素个数有限的集合。如果集合 A 有 n 个元素，其中 n 是非负整数，则 A 是有限集。
无限集：不是有限集的集合，即元素个数无限多的集合。如自然数集 $\mathbb{N}$、实数集 $\mathbb{R}$ 等。
元素个数：有限集 A 中元素的数目，记作 $|A|$ 或 $card(A)$。无限集的元素个数用基数概念描述，如可数无限集、不可数无限集等。

定义 3.1.2 集合的包含关系

子集：如果集合 A 中的每个元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A \subseteq B$。空集是空集的子集
真子集：如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$。即

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \wedge \exists x(B(x) \wedge \neg A(x))$$

定义 3.1.3 集合的基本运算

交集：集合 A 和 B 的交集是由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，记作 $A \cap B$。

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

并集：集合 A 和 B 的并集是由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，记作 $A \cup B$。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

补集：集合 A 的补集是由全集中所有不属于 A 的元素组成的集合，记作 $\sim A$。

$$\sim A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

差集：集合 A 与 B 的差集是由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合：

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

对称差：A 和 B 的对称差是由所有属于 A 或属于 B 但不同时属于两者的元素组成的集合

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

幂集：集合 A 的幂集是由 A 的所有子集构成的集合，记作 $P(A)$：

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

定理 3.1.1 容斥原理

对于有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，有：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

然后主要写一些差集，对称差，幂集的性质。

定理 3.1.2 差集的性质

分配律：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)=(A-B)-C \quad A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

分配律：$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C) \quad (A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

去括号：$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

传递性：如果 $A\subseteq B$，则 $A-C\subseteq B-C$

第二条恒等变形就可以了比较简单，第四条也好理解，$x\in A\wedge x\notin C$ 显然蕴含 $x\in B\wedge x\notin C$ 第一条和第三条有点难，一个很霸道的方式是，对于全集 U 内的元素 x，考虑真值表

$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	$x\in(B\cup C)$	$x\in(B-C)$	$x\in A-B$	$x\in A-C$	$x\in A\cap C$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

然后，目标表达式比较

$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	$x\in A-(B\cup C)$	$x\in(A-B)\cap(A-C)$	$x\in(A-B)-C$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

从表 2 可以看出第 4,5,6 列的真值完全相同，因此：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)=(A-B)-C$

$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	$x\in A-(B-C)$	$x\in(A-B)\cup(A\cap C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

从表 3 可以看出，第 4 列和第 5 列的真值完全相同，因此 $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

定理 3.1.3 对称差的性质

结合律：$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$
分配律：$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
差形式：$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$
取补集：$\sim(A\oplus B)=(\sim A\oplus B)=(A\oplus\sim B)$
常见等价关系：$A\oplus B=\varnothing$ 当且仅当 $A=B$，$A\oplus B=A\oplus C$ 当且仅当 $B=C$
消去律：$(A\oplus B)\oplus(B\oplus C)=A\oplus C$（可以推广）

证明：$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

A	B	C	$A\oplus B$	$(A\oplus B)\oplus C$	$B\oplus C$	$A\oplus(B\oplus C)$	是否相等
0	0	0	0	0	0	0	是
0	0	1	0	1	1	1	是
0	1	0	1	1	1	1	是
0	1	1	1	0	0	0	是
1	0	0	1	1	0	1	是
1	0	1	1	0	1	0	是
1	1	0	0	0	1	0	是
1	1	1	0	1	0	1	是

如果要求必须使用等价变形，我们依然可以使用真值表写出两者的主析取范式，然后比较。两者的的主析取范式完全相同，因此：$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$，具体的解答过程则是先将左右两边化为交并补运算，真值表可以起到检查是否正确的作用。

$$
\begin{aligned}
(A\oplus B)\oplus C=&(\sim A\cap\sim B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(A\cap B\cap C)\\
A\oplus(B\oplus C)=&(\sim A\cap\sim B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(A\cap B\cap C)
\end{aligned}
$$

证明：$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

A	B	C	$B \oplus C$	$A \cap (B \oplus C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \oplus (A \cap C)$	相等
0	0	0	0	0	0	0	0	是
0	0	1	1	0	0	0	0	是
0	1	0	1	0	0	0	0	是
0	1	1	0	0	0	0	0	是
1	0	0	0	0	0	0	0	是
1	0	1	1	1	0	1	1	是
1	1	0	1	1	1	0	1	是
1	1	1	0	0	1	1	0	是

证明：$(A \cup B) \oplus (A \cup C) \subseteq A \cup (B \oplus C)$

A	B	C	$B \oplus C$	$A \cup (B \oplus C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \oplus (A \cup C)$	蕴含关系
0	0	0	0	0	0	0	0	相等
0	0	1	1	1	0	1	1	相等
0	1	0	1	1	1	0	1	相等
0	1	1	0	0	1	1	0	相等
1	0	0	0	1	1	1	0	左真右假
1	0	1	1	1	1	1	0	左真右假
1	1	0	1	1	1	1	0	左真右假
1	1	1	0	1	1	1	0	左真右假

可以发现，当全集内的某个元素 x 满足 $x \in (A \cup B) \oplus (A \cup C)$ 时，x 必然满足 $x \in A \cup (B \oplus C)$
证明：$(A \oplus B) \oplus (B \oplus C) = A \oplus C$

A	B	C	$A \oplus B$	$B \oplus C$	$(A \oplus B) \oplus (B \oplus C)$	$A \oplus C$	是否相等
0	0	0	0	0	0	0	是
0	0	1	0	1	1	1	是
0	1	0	1	1	0	0	是
0	1	1	1	0	1	1	是
1	0	0	1	0	1	1	是
1	0	1	1	1	0	0	是
1	1	0	0	1	1	1	是
1	1	1	0	0	0	0	是

然而，此题用真值表，是杀鸡用牛刀，其实最简单的方法是利用结合律：

$$(A_1 \oplus A_2) \oplus (A_2 \oplus A_3) = A_1 \oplus (A_2 \oplus A_2) \oplus A_3 = A_1 \oplus \varnothing \oplus A_3 = A_1 \oplus A_3$$

定理 3.1.4 对称差的代数结构

对于任意集合序列 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，有

$$(A_1 \oplus A_2) \oplus (A_2 \oplus A_3) \oplus \cdots \oplus (A_{n-1} \oplus A_n) = A_1 \oplus A_n$$

对于任意形式的对称差链，只要每个中间项出现偶数次，就会相互抵消。例如：

$$(A \oplus B \oplus C) \oplus (B \oplus C \oplus D) = A \oplus D$$

因为通过结合律和交换律，B 和 C 实际上各出现两次，因此抵消。

证明：$\sim (A \oplus B) = (\sim A \oplus B)$

$$\begin{aligned}
\sim (A \oplus B) &= \sim ((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) = (\sim A \cup B) \cap (A \cup \sim B) \\
&= (\sim A \cap A) \cup (\sim A \cap \sim B) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \sim B) \\
&= (\sim A \cap \sim B) \cup (A \cap B) = (\sim A \oplus B)
\end{aligned}$$

定理 3.1.5 幂集的性质

设 X 是一个集合，$P(X)$ 表示 X 的幂集（即 X 的所有子集构成的集合）。幂集具有以下性质：

1. 如果 $|X| = n$（有限），则 $|P(X)| = 2^n$，$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$，有 $1 = 2^0$ 个元素
2. 单调性：如果 $A \subseteq B$，则 $P(A) \subseteq P(B)$
3. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$，当且仅当 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$ 取等
4. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
5. $P(A - B) \subseteq (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\}$

性质 3 的证明比较简单：

$$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B) \cup P(A \cup B) = P(A \cup B)$$

分别放缩左右两侧即可，而且这样的操作还有一个好处，就是可以看清蕴含关系变成等价关系时的特殊条件（当且仅当 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$ 取等）。我们不妨再看一个例子：

证明或证伪：$A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup D)$

解：考虑 $B = A \cup C, D = A \cup C$，则

$$A \subset (A \cup C), C \subset (A \cup C) \Rightarrow (A \cup C) = (B \cup D)$$

显然该命题错误，改成 $A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$ 即可。

证明或证伪：$A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap D)$

解：同样错误，考虑 $A \cap C \subset A, C - A \neq \varnothing, B \cap D \subset B, D - B \neq \varnothing$，则转化为

$$(A \cap C) \cap (B \cap D) = (A \cap B) \cap (C \cap D) \subset A \cap B$$

显然，这里 $(A \cap B) = (C \cap D)$ 完全是可能的，所以仍然需要改成 $\subseteq$

性质 4 显然，一个集合既是 A 的子集，又是 B 的子集，那么其元素都在 A, B 中，即在 $A \cap B$ 中，反过来，一个集合的元素在 $A \cap B$ 中，那么也在 A, B 中，故既是 A 的子集又是 B 的子集。

下面证明性质 5：$P(A-B)\subseteq(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$

$$\begin{aligned}P(A-B)&=\{x|x\subseteq(A\cap\sim B)\}=\{x|x\subseteq A\wedge x\subseteq\sim B\}\\&\subseteq\{x|x\subseteq A\wedge x\nsubseteq B\}=(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}\end{aligned}$$

需要说明的是，涉及到幂集的性质的有关证明不可以使用真值表，或者说用真值表比较麻烦，因为我们考虑集合之间的关系的时候，由于集合可能有不止一个元素，所以 x 中的元素全在 A 中的反面，不是“x 中的元素全不在 A 中”，而是“x 中的元素不全在 A 中”。这就导致了

$$x\nsubseteq A\wedge x\nsubseteq B\Leftarrow x\nsubseteq A\cup B$$

和之前的情形大不相同，此时要分多种情形讨论，复杂度明显升高。但是，真值表还是可以帮助我们进行集合的等价运算，如：

例题 3.1.1

$$(A\cap B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\sim C)$$

解 3.1.1. 设全集为 U，观察到三个并集中都有 B，所以合并：

$$\begin{aligned}&(A\cap B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\sim C)\\&=[B\cap(A\cap C)]\cup[B\cap(\sim A\cap C)]\cup[B\cap(A\cap\sim C)]\quad(\text{结合律})\\&=B\cap[(A\cap C)\cup(\sim A\cap C)\cup(A\cap\sim C)]\quad(\text{分配律})\\&=B\cap\{[(A\cup\sim A)\cap C]\cup(A\cap\sim C)\}\quad(\text{分配律})\\&=B\cap[(U\cap C)\cup(A\cap\sim C)]\quad(\text{补集律：}A\cup\sim A=U)\\&=B\cap[C\cup(A\cap\sim C)]\quad(\text{同一律：}U\cap C=C)\\&=B\cap[(C\cup A)\cap(C\cup\sim C)]\quad(\text{分配律})\\&=B\cap[(A\cup C)\cap U]\quad(\text{交换律和补集律})\\&=B\cap(A\cup C)\quad(\text{同一律})\end{aligned}$$

另一种方式就是使用真值表：我们通过分析元素 x 的属于关系来简化该表达式。定义真值表，其中 1 表示 x 属于集合，0 表示 x 不属于集合：

$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	$x\in A\cap B\cap C$	$x\in\sim A\cap B\cap C$	$x\in A\cap B\cap\sim C$	$x\in$ 整体表达式
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1

从真值表可知，x 属于整体表达式当且仅当满足以下条件：$x \in B$ 为真，同时 $x \in A$ 或 $x \in C$ 为真，这等价于 $x \in B \cap (A \cup C)$。

伪装的方式是：

设 x 是全集中的任意元素，我们分析 x 属于该并集的条件。

若 $x \in A \cap B \cap C$，则 $x \in A$，$x \in B$，$x \in C$

若 $x \in \sim A \cap B \cap C$，则 $x \notin A$，$x \in B$，$x \in C$

若 $x \in A \cap B \cap \sim C$，则 $x \in A$，$x \in B$，$x \notin C$

综合三种情况，x 属于该并集当且仅当同时满足：$x \in B$，$x \in A$ 或 $x \in C$（即 $x \in A \cup C$），因此，x 属于该并集当且仅当 $x \in B \cap (A \cup C)$

这种等价变形的题目比较简单，首先化成交并补，然后只需要观察重复出现的结构（有的时候还需要进行适当的换元）接着等价运算。题目一难或者看不出来了，就利用真值表来证明。

3.2 集合的笛卡尔积

定义 3.2.1 集合的笛卡尔积

设 A 和 B 是两个集合，A 与 B 的**笛卡尔积**（或称直积）定义为所有有序对 (a, b) 组成的集合，其中 $a \in A$，$b \in B$，记作 $A \times B$：

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

推广到 n 个集合：对于 n 个集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，它们的笛卡尔积定义为所有 n 元有序组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 组成的集合，其中 $a_i \in A_i$：

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

特殊情形：

当 $A = B$ 时，$A \times A$ 可简写为 A^2

n 个相同集合 A 的笛卡尔积可简写为 A^n

实数集 $\mathbb{R}$ 与自身的笛卡尔积 $\mathbb{R}^2$ 表示平面直角坐标系

空集与任何集合的笛卡尔积为空集：$\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing$

第四章 函数

4.1 自然数

定义 4.1.1 后继集与自然数集的定义

后继集：设 A 是一个集合，A 的**后继集**定义为 $A^+ = A \cup \{A\}$。

自然数集的递归定义（冯・诺依曼定义）：

1. **基础**：$0 = \varnothing$
2. **递归步骤**：$n + 1 = n^+ = n \cup \{n\}$
3. **极限情况**：自然数集 $\mathbb{N}$ 是包含 0 且在后继运算下封闭的最小集合

按照这个定义，自然数可以具体构造为：

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= 0^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \\
2 &= 1^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= 2^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

性质：每个自然数都是它前面所有自然数的集合：$n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$；这种定义方式使得 $m < n$ 当且仅当 $m \in n$；自然数集 $\mathbb{N}$ 是一个归纳集

第五章 图论

5.1 图的基本概念

定义 5.1.1 有向图，无向图，平行边，邻接，环，孤立点，简单图

1. 一个**无向图**可以被表示为 $G = (V, E)$，其中 V 是一个非空集合（有限），称为**顶点集**，其元素称为**顶点**或**节点**，E 是 V 中元素的无序对构成的集合，称为**边集**，即 $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$

2. 一个**有向图**可以被表示为 $G = (V, E)$，其中 V 是一个非空集合（有限），称为**顶点集**，其元素称为**顶点**或**节点**，E 是 V 中元素的有序对构成的集合，称为**边集**，即 $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$

3. **平行边**：在无向图中，连接同一对顶点的多条边称为平行边，在有向图中，同一方向连接同一对顶点的多条弧称为平行边。

4. **邻接**：在无向图中，如果存在边 $e = \{u, v\}$，则称顶点 u 和 v 是邻接的（相邻的）

5. 环：如果一条边的两个端点关联于同一个结点，称为环。

6. **孤立点**：在无向图中，如果一个顶点不与任何其他顶点相邻，则称它为孤立点。

定义 5.1.2 度的概念

度数（无向图）：顶点 v 的度数（简称度）$\deg(v)$ 是与该顶点相关联的边的数量，自环通常算作 2 度（因为连接同一顶点的两个端点）

入度和出度（有向图）：顶点 v 的入度 $\deg^-(v)$ 是以 v 为弧头的弧的数量，顶点 v 的出度 $\deg^+(v)$ 是以 v 为弧尾的弧的数量，顶点 v 的总度数 $\deg(v) = \deg^-(v) + \deg^+(v)$

悬挂结点：度数为 1 的顶点称为悬挂结点，在有向图中，通常指总度数为 1 的顶点

悬挂边：与悬挂结点相关联的边称为悬挂边。

最大度和最小度：图 G 的最大度 $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$，图 G 的最小度 $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$

最大入度和最小入度（有向图）：图 D 的最大入度 $\Delta^-(D) = \max\{\deg^-(v) \mid v \in V(D)\}$，图 D 的最小入度 $\delta^-(D) = \min\{\deg^-(v) \mid v \in V(D)\}$

最大出度和最小出度（有向图）：图 D 的最大出度 $\Delta^+(D) = \max\{\deg^+(v) \mid v \in V(D)\}$，图 D 的最小出度 $\delta^+(D) = \min\{\deg^+(v) \mid v \in V(D)\}$

定义 5.1.3 图的基本分类

简单图：在无向图中，如果不存在平行边，则称它为简单图。
多重图：如果一个图存在平行边，则称它为多重图。
n 阶图：具有 n 个顶点的图称为 n 阶图。
零图：边集为空（没有边，只有结点）的图称为零图，即所有顶点都是孤立点。
平凡图：只有一个顶点且没有边的图称为平凡图，是最简单的非空图（一阶零图）。
空图：顶点集为空的图称为空图（通常不考虑）。
完全图：任意两不同顶点之间都恰有一条边的简单图称为完全图。n 阶完全图记作 K_n。
二分图：顶点集 V 可以划分为两个不相交子集 V_1 和 V_2，使得每条边的一个端点在 V_1 中，另一个端点在 V_2 中，称为二分图。
正则图：所有顶点度数都相同的图称为正则图。若每个顶点的度数均为 k，称为 k-正则图。
环图：n 个顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 依次连接形成的环状图称为环图，记作 C_n。
轮图：在环图 C_{n-1} 中添加一个顶点，并将该顶点与环图中所有顶点相连，称为轮图 W_n。
n 方体图：用 n 维超立方体的顶点和边构成的图称为 n 方体图，记作 Q_n。顶点集为所有长度为 n 的二进制串，两个顶点相邻当且仅当它们的二进制表示恰好有一位不同。

5.2 特殊图

第六章 树