浙江理工大學

Zhejiang Sci-Tech University

硕 士 学 位 论 文

MASTER'S THESIS

论文题目：完全椭圆积分的性质和均值不等式及其应用

学科专业：基础数学

作者姓名：裘叶芳

指导教师：裘松良、褚玉明 教授

递交日期：2011 年 03 月 21 日

浙江理工大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我格守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：裘叶萍

日期： 2011年 3月31 日

浙江理工大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权浙江理工大学可以将本论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密□　　，在 ＿＿＿＿＿ 年解密后使用本版权书。

本学位论为属于

不保密☑　　。

本学位论为作者签名：袁叶芳　　　　指导老师签名：

日期：2011 年 3 月 31 日　　　　日期：2011 年 3 月 31 日

摘　要

本文共有四章。

第一章简要介绍了 Gauss 超几何函数、椭圆积分和某些均值函数的定义、主要性质、已有结果和相关问题。

第二章证明了关于第一类完全椭圆积分的一个猜测、给出了第二类椭圆积分的最佳广义 Seiffert 平均界。

第三章获得了广义椭圆积分及其组合形式的单调性和凹凸性性质并建立了相关不等式。

第四章给出了第一类 Seiffert 平均的算术平均和对数平均的最佳几何组合上下界、建立了指数平均与广义海伦幂平均之间的精确双向不等式。

关键词：Gauss 超几何函数，椭圆积分，Seiffert 平均，算术平均，指数平均，对数平均，广义海伦幂平均，单调性，凹凸性，不等式

Abstract

This thesis consists of four chapters.

In chapter I, the author introduces the definitions, main properties, some known results and related problems for the Gauss hypergeometric functions, elliptic integrals and some mean value functions.

In chapter II, the author give a positive answer to a conjecture which involving the elliptic integral of the first kind, and present the best possible generalized Seiffert's mean bounds for the elliptic integral of the second kind.

In chapter III, the author obtain some monotonicity, convexity and concavity properties for the generalized elliptic integrals and their combinations. As applications, some new analytic inequalities are found.

In chapter IV, the author give the best possible geometric combinations bounds of arithmetic and logarithmic means for the first Seiffert's mean, and establish a sharp double inequality between the identric and generalized Heronian power means.

Keywords： Gaussian hypergeometric function, elliptic integrals, Seiffert's mean, arithmetic mean, identric mean, logarithmic mean, generalized Heronian power mean, monotonicity, convexity, inequality

目　录

第 1 章 绪 论

1.1 引言

拟共形特殊函数是一个既经典又十分活跃的数学分支，它不仅在复动力系统、解析数论、双曲几何、Ramanujan 模方程和低维拓扑等数学分支中 有广泛的应用，并且在理论物理和信息科学等学科中都有重要的应用[1−3]。 拟共形特殊函数包括 Gauss 超几何函数、椭圆积分、Grötzsch 环函数、Hersch-Plfuger 偏差函数和 Agard 偏差函数等。

18 世纪初，著名数学家 Euler[4] 通过对一类特殊函数的积分表示式的研究，发现并提出了超几何函数，并对这一类函数的深入发展做出了重要贡献[5]。尔后，超几何函数成为 Jacobi, Kummer, Fuchs, Rieman, Schwarz 和 Klein[6,7]等一大批著名数学家研究的主题。近年来，人们发现超几何函数与 Chebyshew 多项式，Legendre 多项式，Gegenbauer 多项式和 Jacobi 多项式[8]等紧密相关，超几何函数已成为特殊特殊函数研究领域中不可或缺的一类重要函数。

椭圆积分理论起源于 Fagnano[9−12] 对双纽线的弧长长度计算的研究，而这一理论的快速发展可归功于 18 世纪数学家 Euler、Lagrange、Landen 等的潜心研究。19 世纪著名数学家 Gauss、Abel 和 Jacobi 等建立了椭圆积分与椭圆函数的关系。上世纪八十年代后期，Anderson、Vamanamurthy 和 Vuorinen 等通过对拟共形映射理论的研究，发现了完全椭圆积分与拟共形映射有着内在的联系，并给出了系列与完全椭圆积分紧密相联的特殊函数的新性质。九十年代，Carlson 和 Gustafson 建立了完全椭圆积分的渐近性质，同时裘松良教授及其合作者们[13−15]给出了完全椭圆积分的单调性、凹凸性以及由初等函数表示的上下界等系列新的分析性质和不等式， 掀起了国内外的数学工作者对椭圆积分的研究热潮并将椭圆积分的研究拓广到广义椭圆积分。

将上半平面变换到拓扑四边形的 Schwarz-Christoffel 变换与广义椭圆积分紧密相关，同时也是完全椭圆积分的推广[16,17]。众多研究结果表明广义椭圆积分在解析数论、拟共形分析、双曲几何、平均值理论等领域中的应用日益凸现。 将完全椭圆积分的某些性质进一步推广到广义椭圆积分已成为该领域研究者们共同关注的热点课题。

本文的主要目的是解决第一类完全椭圆积分的一个公开问题、建立第二类椭圆积分与 Seiffert 平均之间的渐近精确不等式、给出广义椭圆积分及其组合的若干单调性和凹凸性、获得各类平均值之间的精确不等式。

下面先引入一些记号，并简要介绍 Gauss 超几何函数、完全椭圆积分、广义椭圆积分和均值函数的基本定义、性质、部分已有结果和相关问题。

对 $\mathrm{Re}x>0$, $\mathrm{Re}y>0$, 分别称

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\quad \psi=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},\quad B=B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{1.1}$$

为经典的 Γ -函数，ψ-函数和 Beta-函数。众所周知，$\Gamma(x)$ 具有以下二个基本性质：

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}=B(x,1-x),$$

关于这些函数的其它性质可参见文献 [18-21]。

对 $x,y\in(0,\infty)$, 定义函数$R=R(x,y)$[8]如下

$$R=R(x,y)=-2\gamma-\psi(x)-\psi(y), \tag{1.2}$$

其中

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=0.577215\cdots$$

是 Euler-Mascheroni 常数。

引理 1.1[22]**(单调性 L'Hö**$pital$ **法则)** 设 $a,b\in(0,\infty)$, f 和 g 是在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微的两个实值函数，且在 (a,b) 上 $g'(x)\neq 0$. 若 f'/g' 在 (a,b) 上 (严格) 单调上升 (下降)，那么函数

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\quad 和 \quad \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}$$

均是 (a,b) 上的 (严格) 单调上升 (下降) 函数。

引理 1.2[23] 设当 $|x|<1$ 时，无穷级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}r_nx^n$, $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}s_nx^n$, 其中 r_n 和 s_n 都是实数。若对所有的 $n=0,1,2,\cdots$, $s_n>0$ 且 r_n/s_n 关于 n 严格单调上升 (下降)，则函数 $f(x)/g(x)$ 也在 $(0,1)$ 上严格单调上升 (下降)。

在本文中，对任意的 $r\in(0,1)$, 记 $r'=\sqrt{1-r^2}$。 并记 $\mathrm{arth}(r)$ 为 r 的反双曲正切函数。

1.2 Gauss 超几何函数

定义 1.3[24] 给定复数 $a,b,c(c\neq 0,-1,-2,\cdots)$, Gauss 超几何函数是由下式定义的函数在裂纹复平面 $\mathbb{C}\backslash[1,\infty)$ 上的解析开拓

$$F(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{z^n}{n!},|z|<1, \tag{1.3}$$

其中，当 $a\neq 0$ 时 (a,n) 定义如下：

$$(a,n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1), & n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}.\end{cases}$$

(1.3) 式中的 Gauss 超几何函数有下面的导数公式

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z)=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;z). \tag{1.4}$$

当 $a,b,c>0$ 时，有

$$\begin{cases} F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad a+b<c, \\ BF(a,b;c;z)+\log(1-z)=R+O((1-z)\log(1-z)), \quad a+b=c, \\ F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z), \quad a+b>c, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中，B, R 的定义见 (1.1) 和 (1.2). 当 $a+b=c$ 时，称 $F(a,b;c;z)$ 是零平衡的。

零平衡的 Gauss 超几何函数满足如下 Landen 不等式 (其所满足的其它一些不等式可参见文献 [25-26])：

定理 1.4[27] **(Landen 不等式)** 对 $r\in(0,1)$, $a,b\in(0,1), c=a+b\le 1$ 和常数 $C\ge 1$, 若

$$f(r)=(1-\sqrt{r})F(a,b;c;r)-F\Big(a,b;c;\frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\Big),$$

$$g(r)=CF(a,b;c;r)-F\Big(a,b;c;\frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\Big),$$

则有

(1) 对任何 $a,b\in(0,1), c\le 1(c<1)$, f 从 $(0,1)$ 到 $(0,(R-\log 16)/B)$ 上 (严格) 单调上升。特别地，对 $r\in(0,1)$, $a,b\in(0,1), c=a+b\le 1$ 有

$$F\Big(a,b;c;\Big(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\Big)^2\Big)\le(1+r)F(a,b;c;r^2)\le F\Big(a,b;c;\Big(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\Big)^2\Big)+\frac{R-\log 16}{B},$$

$$\frac{1+r}{2}F(a,b;c;1-r^2)\le F\Big(a,b;c;\Big(\frac{1-r}{1+r}\Big)^2\Big)\le\frac{1+r}{2}\Big[F(a,b;c;1-r^2)+\frac{R-\log\ 16}{B}\Big],$$

上述各不等式成立等式当且仅当 $a=b=1/2$.

(2) 若 $C\ge 2$, 则对 $r\in(0,1)$ 有 $g(r)>0$. 若 $1<C\le 2$, 则 $g(r)$ 从 $(0,1)$ 到 $(C_1,C-1)$ 上严格单调下降。其中

$$C_1=\begin{cases} -\infty, & 1<C<2, \\ (R-\log 16)/B, & C=2. \end{cases}$$

(3) 若 $1<C<2$, 则 $F(a,b;c;[2\sqrt{r}/(1+r)]^2)$ 和 $CF(a,b;c;r^2)$ 在 $(0,1)$ 上不可比较。

称函数 $F(a\pm1,b;c;z)$, $F(a,b\pm1;c;z)$, $F(a,b;c\pm1;z)$ 为 $F(a,b;c;z)$ 的邻接函数。Gauss 给出了 $F(a,b;c;z)$ 和它的一对邻接函数之间的 15 个关系式 (参见 [28])。利用这些关系可以得到如下定理：

定理 1.5[29] 对 $a,b,c>0, z\in(0,1)$, 若令 $u=u(z)=F(a-1,b;c;z)$, $v=v(z)=F(a,b;c;z)$, $u_1=u(1-z)$, $v_1=v(1-z)$, 则有

$$z\frac{du}{dz}=(a-1)(v-u),$$

$$z(1-z)\frac{dv}{dz}=(c-a)u+(a-c+bz)v,$$

$$\frac{ab}{c}z(1-z)F(a+1,b+1;c+1;z)=(c-a)u+(a-c+bz)v.$$

1.3 完全椭圆积分

完全椭圆积分是 Gauss 超几何函数的特殊形式，对 $r\in(0,1)$, 第一类和第二类完全椭圆积分分别定义为[30]：

$$\begin{cases}\mathcal{K}=\mathcal{K}(r)=\frac{\pi}{2}F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-r^2\sin^2x)^{-\frac{1}{2}}dx,\\ \mathcal{K}'=\mathcal{K}'(r)=\mathcal{K}(r'),\\ \mathcal{K}(0)=\frac{\pi}{2},\ \mathcal{K}(1)=\infty,\end{cases}\tag{1.6}$$

和

$$\begin{cases}\mathcal{E}=\mathcal{E}(r)=\frac{\pi}{2}F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-r^2\sin^2x)^{\frac{1}{2}}dx,\\ \mathcal{E}'=\mathcal{E}'(r)=\mathcal{E}(r'),\\ \mathcal{E}(0)=\frac{\pi}{2},\ \mathcal{E}(1)=1.\end{cases}\tag{1.7}$$

它们的满足如下导数公式

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathcal{K}}{dr}=\frac{\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K}}{rr'^2},\qquad \frac{d\mathcal{E}}{dr}=\frac{\mathcal{E}-\mathcal{K}}{r},\\ &\frac{d}{dr}(\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})=r\mathcal{K},\ \frac{d}{dr}(\mathcal{K}-\mathcal{E})=\frac{r\mathcal{E}}{r'^2},\end{aligned}\tag{1.8}$$

和 Legendre 关系式[31−33]

$$\mathcal{K}\mathcal{E}'+\mathcal{K}'\mathcal{E}-\mathcal{K}\mathcal{K}'=\frac{\pi}{2},\tag{1.9}$$

以及 Landen 变换[30]

$$\begin{cases}\mathcal{K}\big(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\big)=(1+r)\mathcal{K}(r),\\ \mathcal{K}\big(\frac{1-r}{1+r}\big)=\frac{1}{2}(1+r)\mathcal{K}'(r),\\ \mathcal{E}\big(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\big)=\frac{2\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K}}{1+r},\\ \mathcal{E}\big(\frac{1-r}{1+r}\big)=\frac{\mathcal{E}'+r\mathcal{K}'}{1+r}.\end{cases}\tag{1.10}$$

由(1.5) 可知：在 $r=1$ 附近，$\mathcal{K}$ 具有对数增长性。下面给出 $\mathcal{K}$ 的一些已有重要结果：

1985 年，Carlson 和 Gustafson 得到了[34]：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{\mathcal{K}}{\log(4/r')}<\frac{4}{3+r^2}.$$

1993年，Kühnan 和裘松良证明了[35]：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{9}{8+r^2}<\frac{\mathcal{K}}{\log(4/r')}.$$

1996年，裘松良和 Vamanamurthy 建立了[36]：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{\mathcal{K}}{\log(4/r')}<1+\frac{1}{4}r'^2.$$

近年来，人们对完全椭圆积分进行了广泛研究，得到了许多关于完全椭圆积分及其组合形式的估计式、渐近精确界等（可参见文献 [37-40]）。而且发现完全椭圆积分可以应用均值函数（记号见本章 1.5 节）进行估计。

1994 年，Carlson 等得到以下不等式[41]：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{A(1,r')}<\mathcal{K}<\frac{\pi}{2}\frac{1}{L(1,r')}.$$

1995 年，Sándor 给出了不等式[42]：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\alpha_1}{L(1,r')}+\frac{1-\alpha_1}{A(1,r')}\right)<\mathcal{K}<\frac{\pi}{2}\left(\frac{\beta_1}{L(1,r')}+\frac{1-\beta_1}{A(1,r')}\right), \tag{1.11}$$

其中 $\alpha_1=2/\pi$, $\beta_1=12/(5\pi)$.

2004 年，裘松良和 Alzer 对 (1.11) 式做了如下改进[15]：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\alpha_2}{L(1,r')}+\frac{1-\alpha_2}{A(1,r')}\right)<\mathcal{K}<\frac{\pi}{2}\left(\frac{\beta_2}{L(1,r')}+\frac{1-\beta_2}{A(1,r')}\right),$$

其中 $\alpha_2=2/\pi$, $\beta_2=3/4$ 分别是使得上述不等式成立的最佳常数。

1992 年，Anderson 等证明了不等式[43]：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)^{1/2}<\mathcal{K}<\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{arth}r}{r}. \tag{1.12}$$

事实上，$\mathrm{arth}r/r=1/L(1+r,1-r)$.

2004 年，裘松良和 Alzer 将 (1.12) 式进行研究，得到了如下定理[15]：

定理 1.6 对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)^{\alpha_3}<\mathcal{K}<\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)^{\beta_3}, \tag{1.13}$$

其中，$\alpha_3=3/4$, $\beta_3=1$ 均为最佳常数。并提出了如下猜测：

猜测 1.7 对任意的 $r\in(0,1)$, 有以下不等式成立:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)^{3/4+\alpha^* r}<\mathcal{K}<\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)^{3/4+\beta^* r}$$

其中 $\alpha^*=0$ 和 $\beta^*=1/4$ 是使得不等式成立的最佳常数。

关于第二类完全椭圆积分与均值之间的关系有下列重要结果：

1997 年，裘松良证明了[44]：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{\pi}{2}M_{3/2}(1,r')<\mathcal{E}.$$

2000 年，Barnard 等又给出了[45]：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\mathcal{E}<\frac{\pi}{2}M_2(1,r').$$

2004 年，裘松良和 Alzer 建立了 $\mathcal{E}$ 与幂平均的精确不等式：对 $r\in(0,1)$, 有

$$\frac{\pi}{2}M_{\alpha_4}(1,r')<\mathcal{E}<\frac{\pi}{2}M_{\beta_4}(1,r'),$$

其中，$\alpha_4=3/2, \beta_4=\log 2/(\log\pi-\log 2)$ 均为最佳常数。

1.4 广义椭圆积分

广义椭圆积分是完全椭圆积分的推广，其定义如下[16]：对 $0<a<\min\{c,1\}$，$0<b<c\le a+b$, $r\in(0,1)$ 分别称函数

$$\begin{cases}\mathcal{K}_{a,b,c}=\mathcal{K}_{a,b,c}(r)=\frac{B}{2}F(a,b;c;r^2),\\ \mathcal{K}'_{a,b,c}=\mathcal{K}'_{a,b,c}(r)=\mathcal{K}_{a,b,c}(r'),\\ \mathcal{K}_{a,b,c}(0)=\frac{B}{2},\mathcal{K}_{a,b,c}(1)=\infty.\end{cases}\tag{1.14}$$

和

$$\begin{cases}\mathcal{E}_{a,b,c}=\mathcal{E}_{a,b,c}(r)=\frac{B}{2}F(a-1,b;c;r^2),\\ \mathcal{E}'_{a,b,c}=\mathcal{E}'_{a,b,c}(r)=\mathcal{E}_{a,b,c}(r'),\\ \mathcal{E}_{a,b,c}(0)=\frac{B}{2},\mathcal{E}_{a,b,c}(1)=\frac{1}{2}\frac{B(a,b)B(c,c+1-a-b)}{B(c+1-a,c-b)}.\end{cases}\tag{1.15}$$

为第一类和第二类广义椭圆积分。注意到对 a,b,c 范围的限制保证了在 $(0,1)$ 上 $\mathcal{K}_{a,b,c}$ 是严格单调上升的，$\mathcal{E}_{a,b,c}$ 是严格单调下降的。且当 $a=b=1/2$, $c=1$ 时有 $\mathcal{K}=\mathcal{K}_{1/2,1/2,1}$, $\mathcal{E}=\mathcal{E}_{1/2,1/2,1}$.

广义椭圆积分有以下熟知的导数公式：

$$\frac{d\mathcal{K}_{a,b,c}}{dr}=\frac{2}{rr'^2}[(c-a)\mathcal{E}_{a,b,c}+(br^2+a-c)\mathcal{K}_{a,b,c}],\tag{1.16}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_{a,b,c}}{dr}=\frac{2(a-1)}{r}(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c}),\tag{1.17}$$

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})=\frac{2}{rr'^2}\{[(c-a)-(1-a)r'^2]\mathcal{E}_{a,b,c}+[(a+b)r^2-c+r'^2]\mathcal{K}_{a,b,c}\},\tag{1.18}$$

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})=\frac{2}{r}\{(1-c)\mathcal{E}_{a,b,c}+[c-1-(b-1)r^2]\mathcal{K}_{a,b,c}\}.\tag{1.19}$$

下面的定理 1.8 可参见文献 [17]：

定理 1.8 (1) $(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})/(r^2\mathcal{K}_{a,b,c})$ 从 $(0,1)$ 到 $(b/c,1)$ 上严格单调上升。特别地

$$\frac{b}{c}<\frac{\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c}}{r^2\mathcal{K}_{a,b,c}}<1.$$

(2) $(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})/r^2$ 将 $(0,1)$ 映射到 $((c-b)B/(2c),d)$ 且有正的 Maclaurin 系数，其中

$$d=\frac{B(a,b)B(c,c+1-a-b)}{2B(c+1-a,c-b)}.$$

(3) $r'^{-2}\mathcal{E}_{a,b,c}$ 将 $[0,1)$ 映射到 $[B/2,\infty)$ 且有正的 Maclaurin 系数。

(4) $r'^2\mathcal{K}_{a,b,c}$ 将 $[0,1)$ 映射到 $(0,B/2]$ 且有负的 Maclaurin 系数(除了常数项外)。

(5) $\mathcal{K}_{a,b,c}$ 将 $[0,1)$ 映射到 $[B/2,\infty)$, 具有正的 Maclaurin 系数且是对数下凸的，事实上，$d(\log\mathcal{K}_{a,b,c})/dr$ 也有正的 Maclaurin 系数。

(6) $(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})/(r^2\mathcal{K}_{a,b,c})$ 从 $(0,1)$ 到 $(0,1-b/c)$ 上严格单调下降。

(7) $(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})/(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})$ 从 $(0,1)$ 到 $(b/(c-b),\infty)$ 上严格单调上升。

1.5 均值函数

若 $M(\cdot,\cdot):\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$满足以下 3 个条件：

(1) $M(a,b)=M(b,a)$,

(2) $M(a,a)=a$,

(3) 对任意的 $a<b$ 有 $a<M(a,b)<b$,

则称$M(\cdot,\cdot)$ 是一个均值函数[46]。

常见的均值函数有算术平均、几何平均、对数平均、调和平均、指数平均，它们的表达式分别为

$$A(a,b)=\frac{a+b}{2},\quad G(a,b)=\sqrt{ab},\quad L(a,b)=\frac{a-b}{\log a-\log b},$$

$$H(a,b)=\frac{2ab}{a+b},\quad I(a,b)=\frac{1}{e}\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{1/(a-b)},$$

其中 $a,b>0$ 且 $a\neq b$. 这些经典均值之间有如下大小关系：当 $a\neq b$ 时，有

$$H(a,b)<G(a,b)<L(a,b)<I(a,b)<A(a,b).\tag{1.20}$$

1986 年，Alzer 证明了[47]：对所有的正实数 a,b, 当 $a\neq b$ 时，有

$$\sqrt{G(a,b)A(a,b)}<\sqrt{L(a,b)I(a,b)}<\frac{1}{2}[L(a,b)+I(a,b)]<\frac{1}{2}[G(a,b)+A(a,b)].$$

2003 年, 裘松良等建立了[48]：对所有的正实数 a,b, 当 $a\neq b$ 时，若 $0<a,b<e$, 则

$$[G(a,b)]^{A(a,b)}<[L(a,b)]^{I(a,b)}<[A(a,b)]^{G(a,b)}.$$

若 $a,b>e$, 则

$$[A(a,b)]^{G(a,b)}<[I(a,b)]^{L(a,b)}<[G(a,b)]^{A(a,b)}.$$

除了上述常见的均值函数外还有许多均值函数，例如第一类和第二类 Seiffert 平均[49,50]：

$$P(a,b)=\begin{cases}\frac{a-b}{4\arctan(\sqrt{\frac{a}{b}})-\pi}, & a\neq b,\\ a, & a=b,\end{cases}\qquad T(a,b)=\begin{cases}\frac{a-b}{2\arctan(\frac{a-b}{a+b})}, & a\neq b,\\ a, & a=b.\end{cases}\tag{1.21}$$

及 $p-$ 阶幂平均，广义 Seiffert 平均，广义海伦幂平均[51−53]：

$$M_p(a,b)=\begin{cases}(\frac{a^p+b^p}{2})^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ \sqrt{ab}, & p=0,\end{cases}$$

$$T_p(a,b)=\begin{cases}\frac{p(a-b)}{\arctan\left(\frac{2p(a-b)}{a+b}\right)}, & 0<p\leq\frac{1}{2},\ a\neq b,\\ \frac{a+b}{2}, & p=0,\ a\neq b,\\ a, & a=b\end{cases}\tag{1.22}$$

和

$$H_p(a,b)=\begin{cases}(\frac{a^p+(ab)^{\frac{p}{2}}+b^p}{3})^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ \sqrt{ab}, & p=0.\end{cases}\tag{1.23}$$

当 $a\neq b$ 时，对上述各类平均值，有以下熟知的不等式：

1993 年，Seiffert 证明了以下不等式[49]：

$$L(a,b)<P(a,b)<I(a,b).\tag{1.24}$$

1995 年，Seiffert 又建立了以下不等式[54]：

$$P(a,b)>\frac{3A(a,b)G(a,b)}{A(a,b)+2G(a,b)},\tag{1.25}$$

$$P(a,b)>\frac{A(a,b)G(a,b)}{L(a,b)}.\tag{1.26}$$

2001 年，Sándor 给出了以下不等式[55]：

$$P(a,b)>A^{2/3}(a,b)G^{1/3}(a,b).\tag{1.27}$$

Alzer 和 Janous 建立了以下不等式[56,57]：

$$M_{\frac{\log 2}{\log 3}}(a,b) < H_1(a,b) = \frac{2}{3}A(a,b) + \frac{1}{3}G(a,b) < M_{\frac{2}{3}}(a,b).$$

Sándor 给出了广义海伦幂平均与指数平均之间的不等式[58,59]：

$$H_1(a,b) = \frac{2}{3}A(a,b) + \frac{1}{3}G(a,b) < I(a,b). \tag{1.28}$$

第 2 章　完全椭圆积分

2.1　引言

完全椭圆积分（其定义见 (1.6) 和 (1.7)）是一种重要的特殊函数，它是 Gauss 超几何函数的特殊形式，在几何函数论、拟共形映射、解析数论和 Ramanujan 模方程理论等领域中都有重要的应用。例如，平面 Grötzsch 极值环 $B^2\backslash[0,r]$ 的模 $\mu(r)$ 和在 Hübner 界中出现的特殊函数 $m(r)$ 就可以用完全椭圆积分表示，即：

$$\mu(r)=\frac{2}{\pi}\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}},\quad m(r)=\frac{2}{\pi}r'^2\mathcal{K}\mathcal{K}',$$

其中 $0<r<1$, 它们为拟共形映射和经典 Ramanujan 模方程的解的研究提供了重要的工具。再如在几何上，若令 $P(a,b)$ 表示长、短半轴依次为 a,b, 且离心率 $e=\sqrt{a^2-b^2}/a$ 的椭圆的周长，则有 $P(a,b)=2\pi aF(-1/2,1/2;1;e^2)=4a\mathcal{E}(e)$, 即可用第二类完全椭圆积分表示椭圆的周长。

本章主要是深入研究完全椭圆积分 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{E}$ 的分析性质，证明了关于第一类完全椭圆积分的一个猜测和第二类椭圆积分的最佳广义 Seiffert 平均界。

2.2　主要结果及其证明

引理 2.1[60] 对 $c>0$, 函数 $[(r')^c\mathrm{arth}r]/r$ 在 $(0,1)$ 上严格单调下降当且仅当 $c\geq 2/3$.

引理 2.2 (1) $f_1(r)=(r-r'^2\mathrm{arth}r)/r^3$ 从 $(0,1)$ 到 $(2/3,1)$ 上严格单调上升。

(2) $f_2(r)=[\log(\mathrm{arth}r/r)]/r^2$ 从 $(0,1)$ 到 $(1/3,\infty)$ 上严格单调上升。

(3) $f_3(r)=[\mathcal{E}\mathrm{arth}r-(1/4)r'^2\mathcal{K}\mathrm{arth}r-(3/4)r\mathcal{K}]/r^5$ 从 $(0,1)$ 到 $(\pi/480,\infty)$ 上严格单调上升。

(4) $f_4(r)=[(3/4)+(1/4)r](r-r'^2\mathrm{arth}r)\mathcal{K}-(\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})\mathrm{arth}r$ 在 $(\sqrt{2}/2,1)$ 上严格单调上升且恒正。

(5) $f_5(r)=[(3/4)+r^2]\log(\mathrm{arth}r/r)-\log(2\mathcal{K}/\pi)$ 在 $(0,1/4)$ 上严格单调上升且恒正。

证明： (1) 若令 $u_1(r)=r-r'^2\mathrm{arth}r$, $u_2(r)=r^3$， 则显然有 $f_1(r)=u_1(r)/u_2(r)$, $u_1(0)=u_2(0)=0$,

$$\frac{u_1'(r)}{u_2'(r)}=\frac{2}{3}\frac{\mathrm{arth}r}{r}.\tag{2.1}$$

因为函数 $r\mapsto\mathrm{arth}r/r$ 从 $(0,1)$ 到 $(1,\infty)$ 上是严格单调上升的，所以由引理 1.1 和 (2.1) 可以得到 $f_1(r)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调上升，且 $f_1(0^+)=2/3$, $f_1(1^-)=1$.

(2) 若令 $u_3(r)=\log(\mathrm{arth}r/r)$, $u_4(r)=r^2$, 则有 $f_2(r)=u_3(r)/u_4(r)$, $u_3(0)=u_4(0)=0$,

$$\frac{u_3'(r)}{u_4'(r)}=\frac{r-r'^2\mathrm{arth}r}{2r^2r'^2\mathrm{arth}r}=\frac{1}{2}\frac{r-r'^2\mathrm{arth}r}{r^3}\frac{r}{r'^2\mathrm{arth}r}.\tag{2.2}$$

引理 1.1 和 2.1 以及 (2.2) 表明 $f_2(r)$ 在 $(0,1)$ 上是严格单调上升的, 且 $f_2(0^+)=1/3$, $f_2(1^-)=\infty$.

(3) 令

$$u_5(r)=\mathcal{E}\mathrm{arth}r-\frac{1}{4}r'^2\mathcal{K}\mathrm{arth}r-\frac{3}{4}r\mathcal{K},\quad u_6(r)=r^5,$$

$$u_7(r)=\frac{1}{4}\frac{\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K}}{r'^2}-\frac{1}{2}r\mathcal{K}\mathrm{arth}r+\frac{3}{4}(\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})\frac{\mathrm{arth}r}{r},\quad u_8(r)=r^4,$$

则有 $f_3(r)=u_5(r)/u_6(r)$, $u_5(0)=u_6(0)=u_7(0)=u_8(0)=0$, 由 (1.8) 得

$$\frac{u_5'(r)}{u_6'(r)}=\frac{1}{5}\frac{u_7(r)}{u_8(r)}, \tag{2.3}$$

$$\frac{u_7'(r)}{u_8'(r)}=\frac{1}{4r'^4}\frac{r-r'^2\mathrm{arth}r}{r^3}\left[\frac{3}{4}\frac{\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K}}{r^2}-\frac{1}{4}\mathcal{E}\right]. \tag{2.4}$$

由引理 2.2(1), 引理 1.1 及 (2.3)-(2.4) 可知 $f_3(r)$ 在 $(0,1)$ 上是严格单调上升的。显然有 $f_3(0^+)=\pi/480$, $f_4(1^-)=\infty$.

(4) 令 $u_9(r)=2(1+r)-\mathcal{E}/(r\mathcal{K})-3(\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})/(r^2\mathcal{K})$, 则由函数 $r\mapsto\mathcal{E}/(r\mathcal{K})$ 和函数 $r\mapsto(\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})/(r^2\mathcal{K})$ 的单调性可得 $u_9(r)$ 在 $(0,1)$ 上是严格单调上升的, 并根据 (1.8) 式得

$$f_4'(r)=\frac{(\mathcal{K}-\mathcal{E})+r\mathcal{K}}{4(1+r)}+\frac{r\mathcal{K}\mathrm{arth}r}{4}u_9(r), \tag{2.5}$$

$$u_9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1.013\ldots>0,\quad f_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0.084\ldots>0. \tag{2.6}$$

因此，由 (2.5)-(2.6) 及 $u_9(r)$ 的单调性可得 $f_4(r)$ 在 $(\sqrt{2}/2,1)$ 上是严格单调上升且为正的。

(5) 经简单计算，对 $r\in(0,1/4)$, 有

$$\lim_{r\to0^+}f_5(r)=0, \tag{2.7}$$

$$f_5'(r)=2r\log\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)+\left(\frac{3}{4}+r^2\right)\frac{r-r'^2\mathrm{arth}r}{rr'^2\mathrm{arth}r}-\frac{\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K}}{rr'^2\mathcal{K}}, \tag{2.8}$$

由引理 2.2(1)-(3) 和 (2.8) 式知

$$\begin{aligned}\frac{r'^2\mathcal{K}\mathrm{arth}r}{r^4}f_5'(r)&=\frac{2r'^2\mathcal{K}\mathrm{arth}r}{r}f_2(r)+\mathcal{K}f_1(r)-f_3(r)>\mathcal{K}f_1(r)-f_3(r)\\&>\frac{\pi}{3}-f_3(\frac{1}{4})=1.040\cdots>0.\end{aligned} \tag{2.9}$$

因此，由式 (2.7)-(2.9) 可得 $f_5(r)$ 在 $(0,1/4)$ 上是严格单调上升且为正的。□

定理 2.3 对 $r\in(0,1)$ 定义函数 $F_c(r)=[3/4+cr]\log(\mathrm{arth}r/r)-\log(2\mathcal{K}/\pi)$, 则

(1) $F_c(r)>0$ 当且仅当 $c\in[1/4,\infty)$,

(2) $F_c(r)<0$ 当且仅当 $c\in(-\infty,0]$.

证明: 首先，证明对 $c\in[1/4,\infty)$ 时 $F_c(r)>0$. 令

$$F_{1/4}(r)=(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}r)\log(\frac{\mathrm{arth}r}{r})-\log(\frac{2\mathcal{K}}{\pi}),$$

则有

$$\lim_{r\to0^+}F_{1/4}(r)=0, \tag{2.10}$$

$$F'_{1/4}(r)=\frac{1}{4}\log\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}r\right)\frac{r-r'^2\mathrm{arth}r}{rr'^2\mathrm{arth}r}-\frac{\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K}}{rr'^2\mathcal{K}}. \tag{2.11}$$

若 $r\in(0,\sqrt{2}/2]$, 则由 (2.11) 式得

$$\begin{aligned}\frac{r'^2\mathcal{K}\mathrm{arth}r}{r^3}F'_{1/4}(r)&=\frac{r'^2\mathrm{arth}r\mathcal{K}}{4r}f_2(r)+\frac{1}{4}\mathcal{K}f_1(r)-rf_3(r)>\frac{1}{4}\mathcal{K}f_1(r)-rf_3(r)\\&>\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{2}}{2}f_3(\frac{\sqrt{2}}{2})=0.250\cdots>0,\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $f_1(r)$, $f_2(r)$ 和 $f_3(r)$ 的定义见引理 2.2(1)-(3).

若 $r\in(\sqrt{2}/2,1)$, 则由 (2.11) 式及引理 2.1(4) 有

$$\frac{F'_{1/4}(r)}{\log\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)}=\frac{1}{4}+\frac{f_4(r)}{rr'^2\mathcal{K}\mathrm{arth}r\log(\frac{\mathrm{arth}r}{r})}>0, \tag{2.13}$$

其中 $f_4(r)$ 的定义见引理 2.2(4).

式 (2.12)-(2.13) 表明当 $r\in(0,1)$ 时， $F'_{1/4}(r)>0$, 故 $F_{1/4}(r)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调上升。

因此, 从式 (2.10) 和 $F_{1/4}(r)$ 的单调性可得 $F_{1/4}(r)>0$, 所以对 $c\in[1/4,\infty)$, $F_c(r)>0$ 成立。

其次，证明当 $c\in(-\infty,0]$ 时 $F_c(r)<0$. 由式 (1.13) 可知对 $r\in(0,1)$, $c\leq0$ 有 $F_c(r)<0$ 成立。

最后，证明 1/4 和 0 分别是使得不等式 $F_c(r)>0$ 和 $F_c(r)<0$ 成立的最小值和最大值。

对任意 $c\in(0,1/4)$，取 $r=c\in(0,1/4)$，则由引理 2.2(5) 知 $F_c(r)=f_5(c)>0$. 因此 0 的最大性得证。

若令

$$u_{10}(r)=\frac{F_c(r)}{\log\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)}=\frac{3}{4}+cr-\frac{\log\left(\frac{2\mathcal{K}}{\pi}\right)}{\log\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r}\right)}, \tag{2.14}$$

则有

$$\lim_{r\to1^-}u_{10}(r)=c-\frac{1}{4}<0. \tag{2.15}$$

式 (2.15) 表明对任意 $c \in (0, 1/4)$，存在 $\delta = \delta(c) > 0$， 当 $r \in (1-\delta, 1)$ 时恒成立 $u_{10}(r) < 0$. 因此，从 (2.14) 式即可得到对 $r \in (1-\delta, 1)$, 成立 $F_c(r) < 0$. 由此 1/4 的最小性得证。□

应用定理 2.3 直接可得下面推论 2.4:

推论 2.4 对任意 $r \in (0, 1)$, 有以下不等式成立

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\operatorname{arth} r}{r}\right)^{3/4+\alpha^* r} < \mathcal{K} < \frac{\pi}{2}\left(\frac{\operatorname{arth} r}{r}\right)^{3/4+\beta^* r},$$

其中 $\alpha^* = 0$ 和 $\beta^* = 1/4$ 是使得不等式成立的最佳常数。

注： 推论 2.4 是对猜测 1.7 的肯定回答。

下面给出第二类椭圆积分的最佳广义 Seiffert 平均界。

引理 2.5 (1) $f_6(r) = [\mathcal{K} - \mathcal{E} - (\mathcal{E} - r'^2\mathcal{K})]/r^4$ 从 $(0, 1)$ 到 $(\pi/16, \infty)$ 上严格单调上升。

(2) $f_7(r) = (4\pi - \pi r^2 - 8\mathcal{E})/r^4$ 从 $(0, 1)$ 到 $(3\pi/16, 3\pi - 8)$ 上严格单调上升。

证明： (1) 显然 $f_6(0) = \pi/16$, $f_6(1) = \infty$. 若令 $u_{11}(r) = \mathcal{K} - \mathcal{E} - (\mathcal{E} - r'^2\mathcal{K})$, $u_{12}(r) = r^4$, 则 $f_6(r) = u_{11}(r)/u_{12}(r)$, $u_{11}(0) = u_{12}(0) = 0$,

$$\frac{{u_{11}}'(r)}{{u_{12}}'(r)} = \frac{1}{4r'^2}\frac{\mathcal{E} - r'^2\mathcal{K}}{r^2}. \tag{2.16}$$

由于 $r \mapsto (\mathcal{E} - r'^2\mathcal{K})/r^2$ 从 $(0, 1)$ 到 $(\pi/4, 1)$ 是严格单调上升的。因此由引理 1.1 和式 (2.16) 可知 $f_6(r)$ 在 $(0, 1)$ 上严格单调上升。

(2) 若令 $u_{13}(r) = 4\pi - \pi r^2 - 8\mathcal{E}$, $u_{14}(r) = r^4$, 则 $f_7(r) = u_{13}(r)/u_{14}(r)$, $u_{13}(0) = u_{14}(0) = 0$,

$$\frac{u'_{13}(r)}{2u'_{14}(r)} = f_6(r) + \frac{(\mathcal{E} - r'^2\mathcal{K})/r^2 - \pi/4}{r^2}. \tag{2.17}$$

由于函数 $r \mapsto [(\mathcal{E} - r'^2\mathcal{K})/r^2 - (\pi/4)]/r^2$ 从 $(0, 1)$ 到 $(\pi/32, 1 - \pi/4)$ 是严格单调上升的。从而由引理 1.1, 引理 2.5(1) 和式 (2.17) 即可得到 $f_7(r)$ 在 $(0, 1)$ 上是严格单调上升的，且 $f_7(0) = 3\pi/16$, $f_7(1) = 3\pi - 8$. □

引理 2.6 对 $r \in (0, 1)$, 函数

(1) $f_8(r) = \arctan\left[(\sqrt{3}/2)r\right] - \sqrt{3}\pi r/\left[4(2\mathcal{E} - r'^2\mathcal{K})\right]$ 从 $(0, 1)$ 到 $(0, \arctan(\sqrt{3}/2) - \sqrt{3}\pi/8)$ 严格单调上升。

(2) 存在唯一的 $r_1 \in (0, 1)$, 使得函数 $f_{10}(r) = \arctan r - \pi r/\left[2(2\mathcal{E} - r'^2\mathcal{K})\right]$ 在 $(0, r_1)$ 上严格单调下降而在 $(r_1, 1)$ 上严格单调上升，且在 $(0, 1)$ 上恒负。

证明：(1) 求导得

$$f'_8(r) = \frac{\sqrt{3}r^4\mathcal{E}}{4(4 + 3r^2)(2\mathcal{E} - r'^2\mathcal{K})^2}f_9(r), \tag{2.18}$$

其中 $f_9(r)=[8(2\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})^2-(4+3r^2)\pi\mathcal{E}]/(r^4\mathcal{E})$.

由引理 2.5(2) 可知

$$\begin{aligned} f_9(r)=&\frac{8}{\mathcal{E}}\left(\frac{\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K}}{r^2}\right)^2+16\frac{(\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})/r^2-\pi/4}{r^2}-\frac{4\pi-\pi r^2-8\mathcal{E}}{r^4}\\ >&\frac{16}{\pi}\times\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+16\times\frac{\pi}{32}-(3\pi-8)\\ =&8-\frac{3\pi}{2}>0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

式 (2.18)-(2.19) 表明 $f_8(r)$ 在 $(0,1)$ 上是严格单调上升的，且易得

$$\lim_{r\to 0} f_8(r)=0, \tag{2.20}$$

$$\lim_{r\to 1} f_8(r)=\arctan\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)-\frac{\sqrt{3}\pi}{8}=0.0335\cdots>0. \tag{2.21}$$

因此，由 (2.20)-(2.21) 式及 $f_8(r)$ 的单调性可知结论成立。

(2) 计算得：

$$\lim_{r\to 0} f_{10}(r)=\lim_{r\to 1} f_{10}(r)=0, \tag{2.22}$$

$$f_{10}'(r)=\frac{f_{11}(r)}{2(1+r^2)(2\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})^2}, \tag{2.23}$$

其中 $f_{11}(r)=2(2\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})^2-\pi(1+r^2)\mathcal{E}$. 注意到

$$\lim_{r\to 0} f_{11}(r)=0,\quad \lim_{r\to 1} f_{11}(r)=8-2\pi>0, \tag{2.24}$$

$$f_{11}'(r)=rf_{12}(r), \tag{2.25}$$

其中 $f_{12}(r)=4(2\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})(\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})/r^2-2\pi\mathcal{E}+\pi(1+r^2)(\mathcal{K}-\mathcal{E})/r^2$. 由文献 [22] 中的习题 3.43(13) 知 $f_{12}(r)$ 在 $(0,1)$ 上是严格单调上升的, 且

$$\lim_{r\to 0} f_{12}(r)=-\frac{\pi^2}{4},\quad \lim_{r\to 1} f_{12}(r)=\infty. \tag{2.26}$$

结合式 (2.25)-(2.26) 和 $f_{12}(r)$ 的单调性可知，存在唯一的 $r_0\in(0,1)$ 使得当 $r\in(0,r_0)$ 时，$f_{11}'(r)<0$, 而当 $r\in(r_0,1)$ 时，$f_{11}'(r)>0$. 所以 $f_{11}(r)$ 在 $(0,r_0)$ 上是严格单调下降的，而在 $(r_0,1)$ 上是严格单调上升的。

由式 (2.23)-(2.24) 和 $f_{11}(r)$ 的单调性知，存在唯一的 $r_1\in(0,1)$, 使得当 $r\in(0,r_1)$ 时，$f_{10}'(r)<0$, 而当 $r\in(r_1,1)$ 时，$f_{10}'(r)>0$.

因此，$f_{10}(r)$ 在 $(0,r_1)$ 上是严格单调下降的，而在 $(r_1,1)$ 上是严格单调上升的，且由 (2.22) 可有对 $r\in(0,1)$, $f_{10}(r)<0$. □

定理 2.7 对所有的 $a,b>0$, $a\neq b$, 若记 $N(a,b)=(2a/\pi)\mathcal{E}(\sqrt{1-(b/a)^2})$, 则有以下不等式成立

$$T_{\sqrt{3}/4}(a,b)<N(a,b)<T_{1/2}(a,b),$$

且 $T_{\sqrt{3}/4}(a,b)$ 和 $T_{1/2}(a,b)$ 分别是 $N(a,b)$ 的最佳广义 Seiffert 平均下界和上界。

证明： 不失一般性，不妨设 $a>b$, 令 $t=b/a<1$, $r=(1-t)/(1+t)$. 首先，证明不等式

$$T_{\sqrt{3}/4}(a,b)<N(a,b) \tag{2.27}$$

成立。

由 (1.7), (1.10) 和 (1.22) 可得

$$\begin{aligned}
&N(a,b)-T_{\sqrt{3}/4}(a,b)\\
=&\frac{2a}{\pi}\mathcal{E}'(t)-\frac{\sqrt{3}a(1-t)}{4\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(1-t)}{2(1+t)}\right)}\\
=&\frac{2a}{\pi}\mathcal{E}\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)-\frac{\sqrt{3}ar}{2(1+r)\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)}\\
=&\frac{2a}{\pi}\frac{2\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K}}{1+r}-\frac{\sqrt{3}ar}{2(1+r)\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)}\\
=&\frac{2a(2\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})}{\pi(1+r)\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)}f_8(r),
\end{aligned} \tag{2.28}$$

其中 $f_8(r)$ 的定义见引理 2.6(1).

从引理 2.6(1) 和式 (2.28) 直接可得不等式 (2.27).

其次，证明不等式

$$N(a,b)<T_{1/2}(a,b) \tag{2.29}$$

成立。

再次应用 (1.7), (1.10) 和 (1.22)得

$$\begin{aligned}
&N(a,b)-T_{1/2}(a,b)\\
=&\frac{2a}{\pi}\mathcal{E}'(t)-\frac{a(1-t)}{2\arctan\left(\frac{1-t}{1+t}\right)}\\
=&\frac{2a}{\pi}\mathcal{E}\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)-\frac{ar}{(1+r)\arctan r}\\
=&\frac{2a}{\pi}\frac{2\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K}}{1+r}-\frac{ar}{(1+r)\arctan r}\\
=&\frac{2a(2\mathcal{E}-r'^2\mathcal{K})}{\pi(1+r)\arctan r}f_{10}(r),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

其中 $f_{10}(r)$ 的定义见引理 2.6(2).

由引理 2.6(2) 和式 (2.30) 直接可得不等式 (2.29)。

最后，证明 $T_{\sqrt{3}/4}(a,b)$ 和 $T_{1/2}(a,b)$ 分别是 $N(a,b)$ 的最佳广义 Seiffert 平均下界和上界。

对任意 $0<\varepsilon<(2-\sqrt{3})/4$ 和 $0<x<1$, 由 (1.7), (1.22) 和函数 $x/\arctan(2x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性得

$$T_{\sqrt{3}/4+\varepsilon}(1,1-x)-N(1,1-x)=\frac{J_1(x)}{\arctan\left(\frac{(\sqrt{3}+4\varepsilon)x}{2(2-x)}\right)} \tag{2.31}$$

与

$$\lim_{x\to 0}\left[T_{1/2-\varepsilon}(1,x)-N(1,x)\right]=\frac{1/2-\varepsilon}{\arctan(1-2\varepsilon)}-\frac{2}{\pi}<\frac{1/2}{\arctan 1}-\frac{2}{\pi}=0, \tag{2.32}$$

其中 $J_1(x)=[(\sqrt{3}/4)+\varepsilon]x-N(1,1-x)\arctan((\sqrt{3}+4\varepsilon)x/(2(2-x)))$.

令 $x\to 0$, 利用 Taylor 展式得

$$\begin{aligned}J_1(x)=&\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\varepsilon\right)x-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\varepsilon\right)x\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}x^2+o(x^2)\right]\\&\times\left\{1+\frac{1}{2}x+\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\varepsilon\right)^2\right]x^2+o(x^2)\right\}\\=&\frac{1}{3}\varepsilon\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\varepsilon\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\varepsilon\right)x^3+o(x^3).\end{aligned} \tag{2.33}$$

式 (2.31)-(2.32) 表明对任意 $0<\varepsilon<(2-\sqrt{3})/4$, 存在 $0<\delta_1=\delta_1(\varepsilon)<1$ 和 $0<\delta_2=\delta_2(\varepsilon)<1$ 使得当 $x\in(0,\delta_1)$ 时成立 $T_{\sqrt{3}/4+\varepsilon}(1,1-x)>N(1,1-x)$, 而当 $x\in(0,\delta_2)$ 时成立 $T_{1/2-\varepsilon}(1,x)<N(1,x)$. □

若取 $a=1$ 和 $b=r'$ 并利用定理 2.7 直接可得如下推论：

推论 2.8 不等式

$$\frac{\pi}{2}T_{\alpha_4}(1,r')<\mathcal{E}<\frac{\pi}{2}T_{\beta_4}(1,r')$$

对所有 $r\in(0,1)$成立当且仅当 $\alpha_4\le\sqrt{3}/4$, $\beta_4\ge 1/2$.

第 3 章　广义椭圆积分的性质

3.1　引言

本章主要建立 (1.14) 和 (1.15) 式所定义的广义椭圆积分 $\mathcal{K}_{a,b,c}$ 和 $\mathcal{E}_{a,b,c}$ 及其组合形式的单调性和凹凸性性质，进而给出了广义椭圆积分的一些由初等函数表示的上下界。

3.2　主要结果及其证明

引理 3.1 当 $a+b=c$ $(a+b>c)$时，函数

$$v_1(r)=r'\exp\left\{\frac{F(a,b;c;r^2)}{(2ab/c)r'^2F(a+1,b+1;c+1;r^2)}\right\}$$

从 $(0,1)$ 到 $(e^{R/2},e^{c/(2ab)})$ $((0,e^{c/(2ab)}))$ 严格单调下降。

证明： 对$v_1(r)$ 进行对数求导得

$$\left[r'^2F(a+1,b+1;c+1;r^2)\right]^2\frac{2ab}{c}\frac{v_1'(r)}{v_1(r)}=-2rF(a,b;c;r^2)l_1(r), \tag{3.1}$$

其中 $l_1(r)=[(a+1)(b+1)/(c+1)](1-r^2)F(a+2,b+2;c+2;r^2)-F(a+1,b+1;c+1;r^2)$.

利用 (1.3) 式，有

$$l_1(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1,n)(b+1,n)}{(c+1,n)n!}\frac{(a+b-c)(n+1)+ab}{c+n+1}r^{2n}>0, \tag{3.2}$$

所以由 (3.1), (3.2) 式可知 $v_1'(r)<0$, 即 $v_1(r)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调下降。

利用(1.5) 式得

$$\lim_{r\to 0}\log v_1(r)=\frac{c}{2ab}, \tag{3.3}$$

$$\lim_{r\to 1}\log v_1(r)=\begin{cases}\frac{R}{2}, & a+b=c,\\ -\infty, & a+b>c.\end{cases} \tag{3.4}$$

由 (3.3)-(3.4) 及 $v_1(r)$ 的单调性可得引理 3.1. □

定理 3.2 设 $d\in\mathbf{R}$, 函数

(1) $g_1(r)=\mathcal{K}_{a,b,c}+d\log r$ 在 $(0,1)$ 上严格单调上升当且仅当 $d\geq 0$, 且不存在实数 d 使得 $g_1(r)$ 在 $(0,1)$ 上单调下降。

(2) $g_2(r)=\mathcal{K}_{a,b,c}+d\log r'$ 在 $(0,1)$ 上严格单调上升且下凸当且仅当 $d\leq abB/c$; 当 $a+b=c$ 时，$g_2(r)$ 在 $(0,1)$ 上 严格单调下降且上凸当且仅当 $d\geq 1$； 当 $a+b>c$ 时，不存在实数 d 使得 $g_2(r)$ 在 $(0,1)$ 上单调下降。特别地，函数 $\mathcal{K}_{a,b,c}+(abB/c)\log r'$ 从 $(0,1)$ 到 $(B/2,\infty)$ 严格单调上升且下凸；函数 $\mathcal{K}_{a,c-a,c}+\log r'$ 从 $(0,1)$ 到 $(R/2,B/2)$ 严格单调下降且上凸。

(3) 当 $a+b=c$ (($a+b>c$))时, $g_3(r)=\mathcal{K}_{a,b,c}/\log(d/r')$ 从 $(0,1)$ 到 $(B/(2\log d),1)$ (($B/(2\log d),\infty$)) 严格单调上升当且仅当 $d\geq e^{c/(2ab)}$; 若 $1<d<e^{R/2}$, 则当 $a+b=c$ 时, $g_3(r)$ 从 $(0,1)$ 到 $(1,B/(2\log d))$ 严格单调下降。

证明: (1) 对 $g_1(r)$ 求导并利用 (1.4) 和 (1.14) 可得

$$g_1'(r)=\frac{abB}{c}rF(a+1,b+1;c+1;r^2)+\frac{d}{r}. \tag{3.5}$$

由 (3.5) 式知

$$\begin{aligned}g_1'(r)>0 &\Leftrightarrow -d\leq \inf_{r\in(0,1)}\left\{\frac{abB}{c}r^2F(a+1,b+1;c+1;r^2)\right\}=0\\ &\Leftrightarrow d\geq 0,\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}g_1'(r)<0 &\Leftrightarrow -d\geq \sup_{r\in(0,1)}\left\{\frac{abB}{c}r^2F(a+1,b+1;c+1;r^2)\right\}=\infty\\ &\Leftrightarrow d\leq -\infty.\end{aligned} \tag{3.7}$$

由 (3.6)-(3.7) 式可得定理 3.2(1)。

(2) 首先证明单调性。对 $g_2(r)$ 求导得

$$g_2'(r)=\frac{abB}{c}rF(a+1,b+1;c+1;r^2)-\frac{rd}{r'^2}.$$

于是

$$g_2'(r)>0\Leftrightarrow d\leq \inf_{r\in(0,1)}\left\{\frac{abB}{c}r'^2F(a+1,b+1;c+1;r^2)\right\}=\frac{abB}{c}, \tag{3.8}$$

$$g_2'(r)<0\Leftrightarrow d\geq \sup_{r\in(0,1)}\left\{\frac{abB}{c}r'^2F(a+1,b+1;c+1;r^2)\right\}=\begin{cases}1, & a+b=c,\\ \infty, & a+b>c.\end{cases} \tag{3.9}$$

由 (3.8)-(3.9) 式可得 $g_2(r)$ 的单调性。

其次证明凹凸性。利用级数展开将 $g_2(r)$ 改写成

$$g_2(r)=\frac{B}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{r^{2n}}{n!}-\frac{d}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n}=\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(T_n-d)\frac{r^{2n}}{n}, \tag{3.10}$$

其中 $T_n=[(a,n)(b,n)]/[(c,n)(n-1)!]B$.

因为 $(a+n)(b+n)-(c+n)n=(a+b-c)n+ab>0$, 所以

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)n}>1,$$

据此可知 T_n 在 $n\in\mathbf{N}_+$ 上严格单调上升，且易知

$$\begin{cases}\frac{abB}{c}<T_n<1, & a+b=c,\\ \frac{abB}{c}<T_n<\infty, & a+b>c.\end{cases} \tag{3.11}$$

式 (3.10)-(3.11) 表明 $g_2(r)$ 的凹凸性。

最后, 经过计算可得

$\lim\limits_{r\to 0} g_2(r)=B/2$, $\lim\limits_{r\to 1}[\mathcal{K}_{a,c-a,c}+\log r']=R/2$, $\lim\limits_{r\to 1}[\mathcal{K}_{a,b,c}+(abB/c)\log r']=\infty$.

(3) 运用 (1.3), (1.4) 和 (1.14)可得

$$\frac{2}{Br}\big(r'\log\frac{d}{r'}\big)^2 g_3'(r)=\frac{2ab}{c}r'^2F(a+1,b+1;c+1;r^2)\log\frac{d}{r'}-F(a,b;c;r^2). \tag{3.12}$$

结合式 (3.12) 和引理 3.1 得

$$g_3'(r)>0\Leftrightarrow d\geq \sup_{r\in(0,1)} v_1(r)=e^{\frac{c}{2ab}}, \tag{3.13}$$

$$g_3'(r)<0\Leftrightarrow d\leq \inf_{r\in(0,1)} v_1(r)=e^{\frac{R}{2}}\quad (a+b=c) \tag{3.14}$$

及

$$\lim_{r\to 0} g_3(r)=\frac{B}{2\log d}, \tag{3.15}$$

$$\lim_{r\to 1} g_3(r)=\begin{cases}1, & a+b=c,\\ \infty, & a+b>c.\end{cases} \tag{3.16}$$

由(3.13)-(3.16) 可得定理 3.2(3). □

定理 3.3 函数

$$g_4(r)=\frac{r'^d(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})}{r^2}$$

(1) 在 $(0,1)$ 上严格单调上升当且仅当 $d\leq 0$.

(2) 在 $(0,1)$ 上严格单调下降当且仅当 $d\geq 2ab/(c+1)$.

证明： 经过对 $g_4(r)$ 求导得

$$\frac{cr'^{2-d}}{(c-b)BrF(a,b;c+1;r^2)}g_4'(r)=-\frac{d}{2}+l_2(r), \tag{3.17}$$

其中 $l_2(r)=[(ab)/(c+1)r'^2F(a+1,b+1;c+2;r^2)]/F(a,b;c+1;r^2)$.

利用级数展开可得

$$l_2(r)=\frac{\frac{ab}{c+1}F(c+1-a,c+1-b;c+2;r^2)}{F(c+1-a,c+1-b;c+1;r^2)}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}R_nr^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_nr^{2n}}, \tag{3.18}$$

其中

$$R_n=\frac{ab}{c+1}\frac{(c+1-a,n)(c+1-b,n)}{(c+2,n)}, \tag{3.19}$$

$$S_n=\frac{(c+1-a,n)(c+1-b,n)}{(c+1,n)}. \tag{3.20}$$

若令 $T_n = R_n/S_n$, 则有

$$T_n = \frac{ab}{c+n+1}.$$

由上式可知 T_n 关于 n 严格单调下降，故由引理 1.2 和式 (3.18)-(3.20) 知函数 $l_2(r)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调下降。

由 (3.17) 与 $l_2(r)$ 的单调性可得

$$g_4'(r) > 0 \Leftrightarrow d \le \inf_{r\in(0,1)} 2l_2(r) = 0, \tag{3.21}$$

$$g_4'(r) < 0 \Leftrightarrow d \ge \sup_{r\in(0,1)} 2l_2(r) = \frac{2ab}{c+1}. \tag{3.22}$$

根据 (3.21)-(3.22) 直接可得 $g_4(r)$ 的单调性。□

定理 3.4 函数

$$g_5(r) = \frac{r'^d(\mathcal{K}_{a,b,c} - \mathcal{E}_{a,b,c})}{r^2}$$

(1) 在 $(0,1)$ 上严格单调下降当且仅当 $d \ge (2a(b+1))/(c+1)$.

(2) 当 $a+b=c$ $(a+b>c)$时, 在 $(0,1)$ 上严格单调上升当且仅当 $d \le 0$ $(d \le 2(a+b-c))$.

证明： 对 $g_5(r)$ 求导得

$$\frac{cr'^{2-d}}{bBrF(a,b+1;c+1;r^2)} g_5'(r) = -\frac{d}{2} + l_3(r), \tag{3.23}$$

其中 $l_3(r) = [a(b+1)/(c+1)r'^2 F(a+1,b+2;c+2;r^2)]/F(a,b+1;c+1;r^2)$.

由级数展开得

$$l_3(r) = \frac{\frac{a(b+1)}{c+1}F(c+1-a,c-b;c+2;r^2)}{F(c+1-a,c-b;c+1;r^2)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n r^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n r^{2n}}, \tag{3.24}$$

其中

$$R_n = \frac{(c+1-a,n)(c-b,n)}{(c+2,n)n!}\frac{a(b+1)}{c+1}, \tag{3.25}$$

$$S_n = \frac{(c+1-a,n)(c-b,n)}{(c+1,n)n!}. \tag{3.26}$$

若令 $T_n = R_n/S_n$, 则

$$T_n = \frac{a(b+1)}{c+n+1}. \tag{3.27}$$

显然 T_n 关于 n 严格单调下降， 从而由引理 1.2 及式 (3.24)-(3.27) 知 $l_3(r)$ 关于 r 严格单调下降。

利用 (3.23) 与 $l_3(r)$ 的单调性知

$$g_5'(r) > 0 \Leftrightarrow d \le \inf_{r\in(0,1)} 2l_3(r) = \begin{cases} 0, & a+b=c, \\ 2(a+b-c), & a+b>c, \end{cases} \tag{3.28}$$

$$g_5'(r) < 0 \Leftrightarrow d \geq \sup_{r\in(0,1)} 2l_3(r) = \frac{2a(b+1)}{c+1}. \tag{3.29}$$

从式 (3.28)-(3.29) 即可到 $g_5(r)$ 的单调性。□

定理 3.5 (1) 函数 $g_6(r) = \mathcal{K}_{a,b,c}\mathcal{K}'_{a,b,c}$ 从 $(0, 1/\sqrt{2})$ $((1/\sqrt{2}, 1))$ 到 $(\mathcal{K}^2_{a,b,c}(1/\sqrt{2}), \infty)$ 严格单调下降 (上升)，且 $g_6(x) = g_6(y)$ 当且仅当 $x = y$ 或 $x = y'$.

(2) 函数 $g_7(r) = \mathcal{E}_{a,b,c}\mathcal{E}'_{a,b,c}$ 从 $(0, 1/\sqrt{2})$ $((1/\sqrt{2}, 1))$ 到 $((B/2)\mathcal{E}_{a,b,c}(1), \mathcal{E}^2_{a,b,c}(1/\sqrt{2}))$ 严格单调上升 (下降)，且 $g_7(x) = g_7(y)$ 当且仅当 $x = y$ 或 $x = y'$.

(3) 函数 $g_8(r) = r'^p\mathcal{K}_{a,b,c}$ 从 $(0, 1)$ 到 $(0, B/2)$ 严格单调下降当且仅当 $p \geq 2ab/c$.

(4) 函数 $g_9(r) = r'^p\mathcal{E}_{a,b,c}$ 从 $(0, 1)$ 到 $(B/2, \infty)$ 严格单调上升当且仅当 $p \leq -2(1-a)b/c$.

(5) 当 $d \in [1 - c/(ab), 0)$时， 函数 $g_{10}(r) = \mathcal{K}^d_{a,b,c} + \mathcal{K}'^d_{a,b,c}$ 从 $(0, 1/\sqrt{2})$ $((1/\sqrt{2}, 1))$ 到 $((B/2)^d, 2\mathcal{K}^d_{a,b,c}(1/\sqrt{2}))$ 严格单调上升 (下降)。特别地，当 $r \in (0, 1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, 1)$ 时，有

$$\left(\frac{B}{2}\right)^d < \mathcal{K}^d_{a,b,c} + \mathcal{K}'^d_{a,b,c} < 2\mathcal{K}^d_{a,b,c}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{3.30}$$

并且当 $d \in [1 - c/(2ab), 0)$时, 函数 $g_{10}(r)$ 在 $(0, 1)$ 上是上凸的。

(6) 当 $d \in (0, 1]$时，函数 $g_{11}(r) = \mathcal{E}^d_{a,b,c} + \mathcal{E}'^d_{a,b,c}$ 从 $(0, 1/\sqrt{2})$ $((1/\sqrt{2}, 1))$ 到 $(\mathcal{E}^d_{a,b,c}(1) + (B/2)^d, 2\mathcal{E}^d_{a,b,c}(1/\sqrt{2}))$ 严格单调上升 (下降)；当 $d \in (-\infty, 0)$时, $g_{11}(r)$ 从 $(0, 1/\sqrt{2})$ $((1/\sqrt{2}, 1))$ 到 $(2\mathcal{E}^d_{a,b,c}(1/\sqrt{2}), \mathcal{E}^d_{a,b,c}(1) + (B/2)^d)$ 严格单调下降 (上升)。

(7) 函数 $g_{12}(r) = (r'^2 - r^2)[(\mathcal{E}'_{a,b,c} - r^2\mathcal{K}'_{a,b,c}) - (\mathcal{E}_{a,b,c} - r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})]$ 从 $(0, 1/\sqrt{2})$ $((1/\sqrt{2}, 1))$ 到 $(0, \mathcal{E}_{a,b,c}(1))$ 严格单调下降 (上升)。

证明： (1) 对 $g_6(r)$ 求导得

$$\frac{rr'^2}{2}g_6'(r) = l_4(r) - l_4(r'), \tag{3.31}$$

其中 $l_4(r) = \{[(c-a)(\mathcal{E}_{a,b,c} - r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})]/r^2 + (a+b-c)\mathcal{K}_{a,b,c}\}r^2\mathcal{K}'_{a,b,c}$.

由定理 1.8(2)和(5) 知 $l_4(r)$ 在 $(0, 1)$ 上是严格单调上升的，所以

$$\begin{cases} l_4(r) - l_4(r') < 0,\ r \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \\ l_4(r) - l_4(r') > 0,\ r \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1). \end{cases} \tag{3.32}$$

利用 (3.31)-(3.32)可得 $g_6(r)$ 的分段单调性，且 $g_6(0^+) = g_6(1^-) = \infty$, $g_6(1/\sqrt{2}) = \mathcal{K}^2_{a,b,c}(1/\sqrt{2})$.

此外，当 $x = y$ 时显然有 $g_6(x) = g_6(y)$. 当 $x \neq y$ 时，若 $g_6(x) = g_6(y)$, 根据对称性，不妨设 $x < y$, 由上述证明可知 $0 < x < (1/\sqrt{2}) < y < 1$, 故 $g_6(x) = g_6(y) = g_6(y')$, 即 $x = y'$.

(2) 对 $g_7(r)$ 求导可得

$$\frac{1}{2(1-a)r}g_7'(r)=l_5(r')-l_5(r), \tag{3.33}$$

其中 $l_5(r)=\mathcal{E}'_{a,b,c}(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})/r^2$.

定理 3.4 表明 $l_5(r)$ 在 $(0,1)$ 上是严格单调上升的，故

$$\begin{cases} l_5(r')-l_5(r)<0,\, r\in(\frac{1}{\sqrt{2}},1), \\ l_5(r')-l_5(r)>0,\, r\in(0,\frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases} \tag{3.34}$$

由式 (3.33), (3.34) 可得 $g_7(r)$ 的分段单调性，且 $g_7(0^+)=g_7(1^-)=B\mathcal{E}_{a,b,c}(1)/2$, $g_7(1/\sqrt{2})=\mathcal{E}^2_{a,b,c}(1/\sqrt{2})$.

完全类似于定理 3.5(1) 的证明，$g_7(x)=g_7(y)$ 当且仅当 $x=y$ 或 $x=y'$.

(3) 求导得

$$r'^{2-p}g_8'(r)=-pr\mathcal{K}_{a,b,c}+2\left[\frac{(c-a)(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})}{r}+(a+b-c)r\mathcal{K}_{a,b,c}\right].$$

于是

$$g_8'(r)<0\Leftrightarrow p\geq\sup_{r\in(0,1)}2\left[\frac{(c-a)(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})}{r^2\mathcal{K}_{a,b,c}}+a+b-c\right]=\frac{2ab}{c}.$$

据此可得 $g_8(r)$ 的单调性, 且当 $p\geq 2ab/c$ 时， $g_8(0^+)=B/2$, $g_8(1^-)=0$.

(4) 求导得

$$\frac{r'^{2-p}}{r}g_9'(r)=-p\mathcal{E}_{a,b,c}+\frac{2(a-1)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})r'^2}{r^2}.$$

所以

$$\begin{aligned} g_9'(r)>0\Leftrightarrow -p&\geq\sup_{r\in(0,1)}\frac{2(1-a)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})}{r^2\mathcal{E}_{a,b,c}}r'^2 \\ \Leftrightarrow -p&\geq\sup_{r\in(0,1)}2(1-a)\left(1-\frac{\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c}}{r^2}\frac{1}{\mathcal{E}_{a,b,c}}\right) \\ &=\frac{2(1-a)b}{c}. \end{aligned}$$

据此可得 $g_9(r)$ 的分段单调性，且 $g_9(0^+)=B/2$, $g_9(1^-)=\infty$.

(5) 一方面，对 $g_{10}(r)$ 求导有

$$\frac{rr'^2}{2d\mathcal{K}^{d-1}_{a,b,c}(r)\mathcal{K}'^{d-1}_{a,b,c}(r)}g_{10}'(r)=l_6(r)-l_6(r'), \tag{3.35}$$

其中 $l_6(r)=[(c-a)(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})/r^2+(a+b-c)\mathcal{K}_{a,b,c}](r^{2/(1-d)}\mathcal{K}'_{a,b,c})^{1-d}$.

由于 $d\in[1-c/(ab),0)$, 即 $2/(1-d)\geq 2ab/c$, 由定理 3.5(3) 可知此时 $l_6(r)$ 在 $(0,1)$ 上是严格单调上升的。从而有

$$\begin{cases} l_6(r)-l_6(r')<0,\, r\in(0,\frac{1}{\sqrt{2}}), \\ l_6(r)-l_6(r')>0,\, r\in(\frac{1}{\sqrt{2}},1), \end{cases} \tag{3.36}$$

根据 (3.35), (3.36) 式，并注意到 $d<0$ 可得 $g_{10}(r)$ 在 $(0,1)$ 上的分段单调性。显然有 $g_{10}(0^+)=g_{10}(1^-)=(B/2)^d$, $g_{10}(1/\sqrt{2})=2\mathcal{K}^d_{a,b,c}(1/\sqrt{2})$, 从而不等式 (3.30) 成立。

另一方面，利用

$$\frac{g_{10}'(r)}{2d}=\frac{\dfrac{(c-a)(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})}{r^2}r+(a+b-c)r\mathcal{K}_{a,b,c}}{(r'^{\frac{2}{1-d}}\mathcal{K}_{a,b,c})^{1-d}} -\frac{\dfrac{(c-a)(\mathcal{E}'_{a,b,c}-r^2\mathcal{K}'_{a,b,c})}{r'^2}+(a+b-c)\mathcal{K}'_{a,b,c}(r)}{(r^{\frac{1}{1-d}}\mathcal{K}_{a,b,c}{}')^{1-d}}$$

和定理 3.5(3) 知当 $1/(1-d)\geq 2ab/c$, 即 $d\in[1-c/(2ab),0)$ 时， $g_{10}(r)$ 为上凸函数。

(6) 对 $g_{11}(r)$ 求导得

$$\frac{g_{11}'(r)}{2(1-a)dr}=l_7(r')-l_7(r), \tag{3.37}$$

其中 $l_7(r)=[(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})/r^2]\mathcal{E}^{d-1}_{a,b,c}(r)$.

于是当 $d<1$ 时，有

$$\begin{cases} l_7(r')-l_7(r)>0,\ r\in(0,\frac{1}{\sqrt{2}}), \\ l_7(r')-l_7(r)<0,\ r\in(\frac{1}{\sqrt{2}},1). \end{cases} \tag{3.38}$$

根据式 (3.37)-(3.38) 可得 $g_{11}(r)$ 的分段单调性，且 $g_{11}(0^+)=g_{11}(1^-)=\mathcal{E}^d_{a,b,c}(1)+(B/2)^d$, $g_{11}(1/\sqrt{2})=2\mathcal{E}^d_{a,b,c}(1/\sqrt{2})$.

(7) 由于

$$\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c}=\frac{(c-b)B}{2c}r^2F(a,b;c+1;r^2),$$

所以 $(\mathcal{E}'_{a,b,c}-r^2\mathcal{K}'_{a,b,c})-(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})$ 与 r'^2-r^2 在 $(0,1)$ 上均严格单调下降。当 $r\in(0,1/\sqrt{2})$时, 它们均为两个正的严格单调下降函数，故 $g_{12}(r)$ 在 $(0,1/\sqrt{2})$上 严格单调下降；当 $r\in(1/\sqrt{2},1)$ 时, 只需将 r' 与 r 互换即可得 $g_{12}(r)$ 的单调性，且 $g_{12}(0^+)=g_{12}(1^-)=\mathcal{E}_{a,b,c}(1)$, $g_{12}(1/\sqrt{2})=0$. □

引理 3.6 对 $a\in(0,1/2]$，函数 $v_2(r)=(1-a)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})-(c-a)(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})-(a+b-c)r^2\mathcal{K}_{a,b,c}$ 从 $(0,1)$ 到 $(0,\infty)$ 严格单调上升，特别地，

$$(c-a)(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})+(a+b-c)r^2\mathcal{K}_{a,b,c}<(1-a)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c}). \tag{3.39}$$

证明：因为 $v_2(r)$ 可改写成

$$v_2(r)=r^2\mathcal{K}_{a,b,c}\left[(1-a)\frac{\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c}}{r^2\mathcal{K}_{a,b,c}}-(c-a)\frac{\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c}}{r^2\mathcal{K}_{a,b,c}}-a-b+c\right].$$

由定理 1.8(1) 和 (6) 易知函数 $r\mapsto(1-a)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})/(r^2\mathcal{K}_{a,b,c})-(c-a)(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})/(r^2\mathcal{K}_{a,b,c})-a-b+c$ 从 $(0,1)$ 到 $(b(1-2a)/c,1+c-2a-b)$ 上严格单调上升，故 $v_2(r)$ 在 $(0,1)$ 上单调上升，且 $v_2(0^+)=0$ 和 $v_2(1^-)=\infty$, 从而不等式 (3.39) 成立。

定理 3.7 (1) 对 $a\in(0,1/2)$， 函数 $g_{13}(r)=[\mathcal{E}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c}(1)]\mathcal{K}_{a,b,c}$ 从 $(0,1)$ 到 $(0,(B/2)^2-(B/2)\mathcal{E}_{a,b,c}(1))$ 上严格单调下降。

(2) 函数 $g_{14}(r)=(B/2-\mathcal{E}_{a,b,c})/r^2$ 从 $(0,1)$ 到 $((1-a)bB/(2c),B/2-\mathcal{E}_{a,b,c}(1))$ 上严格单调上升且下凸。

(3)函数 $g_{15}(r)=[\mathcal{E}_{a,b,c}(1)-(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})/r^2]/r'^2$ 从 $(0,1)$ 到 $(\mathcal{E}_{a,b,c}(1)-(c-b)B/(2c),\infty)$ 上严格单调上升。

(4) 函数 $g_{16}(r)=(c-br^2)\mathcal{K}_{a,b,c}-c\mathcal{E}_{a,b,c}$ 从 $(0,1)$ 到 $(0,\infty)$ 严格单调上升且下凸。函数 $g_{17}(r)=g_{16}(r)/r^4$ 从 $(0,1)$ 到 $(ab(c-b)B/(2c(c+1)),\infty)$ 上严格单调上升且下凸。

(5) 函数 $g_{18}(r)=(cr'^2+br^2)\mathcal{E}_{a,b,c}-cr'^2\mathcal{K}_{a,b,c}$ 从 $(0,1)$ 到 $(0,b\mathcal{E}_{a,b,c}(1))$ 上严格单调上升且下凸；函数 $g_{19}(r)=g_{18}(r)/r^4$ 从 $(0,1)$ 到 $(b(c-b)(c+1-a)B/(2c(c+1)),b\mathcal{E}_{a,b,c}(1))$ 上严格单调上升且下凸。

(6) 对 $a+b=c\ (a+b>c)$，函数 $g_{20}(r)=[(1-a)\mathcal{K}_{a,b,c}+a\mathcal{E}_{a,b,c}-(B/2)]/[\log(1/r')-(r^2/2)]$ 从 $(0,1)$ 到 $(abB(1-a)(1+b)/(c(c+1)),1-a)$ $(abB(1-a)(1+b)/(c(c+1)),\infty)$ 上严格单调上升且下凸。

证明：(1) 令 $d=\mathcal{E}_{a,b,c}(1)$, 易知 $g_{13}(0^+)=(B/2)^2-(dB/2)$ 以及 $g_{13}(1^-)=0$。 对 $g_{13}(r)$ 求导并运用定理 1.8(2) 和 (3.39) 得

$$\begin{aligned}\frac{rr'^2}{2}g_{13}'(r)&=-(1-a)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})r'^2\mathcal{K}_{a,b,c}\\&\quad+(\mathcal{E}_{a,b,c}-d)[(c-a)(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})+(a+b-c)r^2\mathcal{K}_{a,b,c}]\\&<-(1-a)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})r'^2\mathcal{K}_{a,b,c}+(1-a)(\mathcal{E}_{a,b,c}-d)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})\\&=(1-a)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})(\mathcal{E}_{a,b,c}-d-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})\\&<-d(1-a)(1-r^2)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c})\\&<0,\end{aligned}$$

由此即得 $g_{13}(r)$ 的单调性。

(2) 将 $g_{14}(r)$ 改写成

$$g_{14}(r)=-\frac{B}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-1,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{r^{2(n-1)}}{n!}$$

即可得 $g_{14}(r)$ 的单调性与凹凸性，且 $g_{14}(0^+)=(1-a)bB/(2c)$, $g_{14}(1^-)=(B/2)-\mathcal{E}_{a,b,c}(1)$.

(3) 令 $l_8(r)=\mathcal{E}_{a,b,c}(1)-(\mathcal{E}_{a,b,c}-r'^2\mathcal{K}_{a,b,c})/r^2$, $l_9(r)=r'^2$, 易知 $l_8(1)=l_9(1)=0$ 且

$$g_{15}(r)=\frac{l_8(r)}{l_9(r)}=\frac{\mathcal{E}_{a,b,c}(1)-(c-b)B/(2c)F(a,b;c+1;r^2)}{r'^2},\tag{3.40}$$

$$\frac{l_8'(r)}{l_9'(r)}=\frac{ab(c-b)B}{2c(c+1)}F(a+1,b+1;c+2,r^2),\tag{3.41}$$

利用引理 1.1 和 (3.40)-(3.41) 即可得 $g_{15}(r)$ 的单调性, 且

$$\lim_{r\to 0} g_{15}(r) = \mathcal{E}_{a,b,c}(1) - \frac{(c-b)B}{2c},$$

$$\lim_{r\to 1} g_{15}(r) = \lim_{r\to 1}\frac{l_8'(r)}{l_9'(r)} = \infty.$$

(4) 利用 (1.14)-(1.15) 可将 $g_{16}(r)$ 改写成

$$\begin{aligned} g_{16}(r) &= (c-b)(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c}) - b(\mathcal{E}_{a,b,c} - r'^2\mathcal{K}_{a,b,c}) \\ &= \frac{(c-b)bB}{2c} r^2 F(a,b+1;c+1;r^2) - \frac{(c-b)bB}{2c} r^2 F(a,b;c+1;r^2) \\ &= \frac{(c-b)bB}{2c} r^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a,n)(b+1,n)}{(c+1,n)}\frac{r^{2n}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c+1,n)}\frac{r^{2n}}{n!}\right] \\ &= \frac{(c-b)bB}{2c} r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a,n)(b+1,n-1)}{(c+1,n)}\frac{r^{2n}}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

由上式可得 $g_{16}(r)$ 的单调性与凹凸性。显然 $g_{16}(0^+) = 0$, $g_{16}(1^-) = \infty$.

类似的有

$$g_{17}(r) = \frac{(c-b)bB}{2c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n+1)(b+1,n)}{(c+1,n+1)}\frac{r^{2n}}{n!},$$

由此即得 $g_{17}(r)$ 的单调性与凹凸性，且 $g_{17}(0^+) = ab(c-b)B/(2c(c+1))$, $g_{17}(1^-) = \infty$.

(5) 因为 $g_{18}(r)$ 可改写为

$$\begin{aligned} g_{18}(r) &= b(\mathcal{E}_{a,b,c} - r'^2\mathcal{K}_{a,b,c}) - (c-b)r'^2(\mathcal{K}_{a,b,c}-\mathcal{E}_{a,b,c}) \\ &= \frac{(c-b)bB}{2c} r^2 F(a,b;c+1;r^2) - \frac{(c-b)bB}{2c} r^2 r'^2 F(a,b+1;c+1;r^2) \\ &= \frac{(c-b)bB}{2c} r^4 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b+1,n)}{(c+1,n)}\left(1-\frac{a+n}{c+n+1}\right)\frac{r^{2n}}{n!}, \end{aligned}$$

利用上式即可得 $g_{18}(r)$ 的单调性与凹凸性，显然 $g_{18}(0^+) = 0$, $g_{18}(1^-) = b\mathcal{E}_{a,b,c}(1)$.

类似的有

$$g_{19}(r) = \frac{(c-b)bB}{2c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b+1,n)}{(c+1,n)}\left(1-\frac{a+n}{c+n+1}\right)\frac{r^{2n}}{n!},$$

由此便得 $g_{19}(r)$ 的单调性和凹凸性以及其极限值。

(6) 利用 (1.14) 和 (1.15) 得

$$g_{20}(r) = \frac{\frac{(1-a)B}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{r^{2n}}{n!} + \frac{aB}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-1,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{r^{2n}}{n!}}{\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} R_n r^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} S_n r^{2n}}, \tag{3.42}$$

其中

$$R_n = B(1-a)\frac{(a,n+1)(b,n+2)}{(c,n+2)}\frac{n+1}{(n+2)!}, \tag{3.43}$$

$$S_n = \frac{1}{n+2}. \tag{3.44}$$

令 $T_n = R_n/S_n$, 则

$$T_n = \frac{B(1-a)(a,n+1)(b,n+2)}{(c,n+2)n!},$$

且 $(b+n+2)(a+n+1)-(c+n+2)(n+1) = (a+b-c)(n+1)+(a+1)b > 0$, 故

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{(b+n+2)(a+n+1)}{(c+n+2)(n+1)} > 1. \tag{3.45}$$

由 (3.45) 式知 T_n 关于 n 严格单调上升。应用引理 1.2 和 (3.42)-(3.44) 以及 T_n 的单调性可知 $g_{20}(r)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调上升且是下凸的。并且易得 $g_{20}(0^+) = B(1-a)(b+1)ab/[c(c+1)]$ 和

$$\lim_{r\to 1^-} g_{20}(r) = \begin{cases} 1-a, \ a+b=c, \\ \infty, \qquad a+b>c. \end{cases}$$ □

引理 3.8 若 $c\in(0,1]$ 和 $a\in(0,c)$， 则有

(1) 数列

$$D(n) = \frac{(2n+1)(2n+3)[(4+2c^2)n+c^2+4c]\Gamma^2(\frac{c}{2}+n)}{4(c,n+1)(n+1)!\Gamma^2(\frac{c}{2})}$$

关于 $n\in\mathbf{N}_+$ 严格单调下降。

(2) 数列 $(a,n)(c-a,n)$ 关于 a 在 $(0,c/2)$ $((c/2,c))$ 上严格单调上升 (下降)。

(3) 对全体 $n\in\mathbf{N}_+$, 成立不等式

$$\frac{(a,n)(c-a,n)(2n+1)(2n+3)}{(c,n+1)(n+1)!}\big\{[1+2a(c-a)]n+a(c-a)+c\big\} < \frac{165}{64}. \tag{3.46}$$

证明：(1) 因为

$$\frac{D(n+1)}{D(n)} = \frac{l_1(n)}{l_2(n)}, \tag{3.47}$$

其中 $l_1(n) = (2n+5)[(c/2)+n]^2[(4+2c^2)(n+1)+c^2+4c]$, $l_2(n) = (c+n+1)(n+2)(2n+1)[(4+2c^2)n+c^2+4c]$, 且

$$\begin{aligned} l_1(n)-l_2(n) =& c(15c^3-32+12c^2-20c)/4+(c^4+4c^3-8)n^2-4c^2n^2 \\ &+4c^2(c^2-1)n+8c(c^2-2)n-8n<0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

由 (3.47) 和 (3.48)式可知结论成立。

(2) 当 $a \in (0,c)$ 时, 令

$$G(a) = (a,n)(c-a,n) = \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+c-a)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}. \tag{3.49}$$

对 $G(a)$ 进行对数求导可得

$$\frac{G'(a)}{G(a)} = G_1(a) - G_1(c-a), \tag{3.50}$$

其中 $G_1(a) = \Psi(a+n) - \Psi(a)$, 且

$$G_1{}'(a) = \Psi'(a+n) - \Psi'(a) < 0. \tag{3.51}$$

利用(3.50) 式得

$$\begin{cases} G'(a) > 0,\ a \in (0, \frac{c}{2}), \\ G'(a) < 0,\ a \in (\frac{c}{2}, c). \end{cases} \tag{3.52}$$

由 (3.52) 式即可知结论成立。

(3) 令

$$E(n) = \frac{(a,n)(c-a,n)(2n+1)(2n+3)}{(c,n+1)(n+1)!}\left\{[1+2a(c-a)]n + a(c-a) + c\right\},$$

则由 (1) 和 (2) 可知

$$E(n) < D(n) < D(1) = \frac{15(3c^3+4c^2+4c)}{32(c+1)} < \frac{165}{64}. \quad \square$$

对 $c \in (0,1]$, $a \in (0,c)$ 且 $b = c-a$, 若记 $\mathcal{K}_{a,b,c} = \mathcal{K}_{a,c}$, 则有以下定理 3.9.

定理 3.9 对 $r \in (0,1)$ 成立不等式

$$\frac{B}{2} - \left(\frac{B}{2} - 1\right) r^2 < \frac{r\mathcal{K}_{a,c}(r)}{\mathrm{arth} r} < \frac{B}{2} - \left\{\frac{B\left[c - 3a(c-a)\right]}{6c}\right\} r^2. \tag{3.53}$$

证明: 设 $g_{21}(r) = [(B/2) - (r\mathcal{K}_{a,c})/\mathrm{arth} r]/r^2$, 则 $g_{21}(r)$ 可改写为

$$g_{21}(r) = \frac{B}{2}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n r^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n r^{2n}}, \tag{3.54}$$

其中

$$R_n = \left[\frac{1}{2n+3} - \frac{(a,n+1)(c-a,n+1)}{(c,n+1)(n+1)!}\right], \tag{3.55}$$

$$S_n = \frac{1}{2n+1}. \tag{3.56}$$

令 $T_n = R_n/S_n$, 则

$$T_n = \frac{2n+1}{2n+3} - \frac{(a,n+1)(c-a,n+1)(2n+1)}{(c,n+1)(n+1)!},$$

结合引理 3.8(3), 有

$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n=&\frac{4}{(2n+3)(2n+5)}-\frac{(a,n+1)(c-a,n+1)}{(c,n+2)(n+2)!}\\&\times\{[1+2a(c-a)]n+3a(c-a)+1+c\}\\>&\frac{4}{(2n+3)(2n+5)}-\frac{165}{64(2n+3)(2n+5)}\\=&\frac{91}{64(2n+3)(2n+5)}>0.\end{aligned}\tag{3.57}$$

根据引理 1.2 和 (3.54)-(3.57) 知 $g_{21}(r)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调上升，并且 $g_{21}(0^+)=B[c-3a(c-a)]/(6c)$, $g_{21}(1^-)=(B/2)-1$, 从而不等式 (3.53) 成立。□

第 4 章　均值不等式

4.1　引言

平均值理论不仅出现于数学的各个分支，并且在控制工程、力学、信息科学、天文学，甚至在经济学和气象学等学科领域均有广泛的实际应用。 近年来，对各类平均值的比较已引起了大批数学爱好者极大的兴趣。尤其是，许多平均值本身可以通过椭圆积分来直接表示。本章的目的是 给出第一类Seiffert平均的由算术平均和对数平均的几何组合的精确上下界，发现指数平均的最佳广义海伦幂平均上下界。

4.2　主要结果及其证明

引理 4.1 若 $x>1$, 则

$$8\arctan x-\frac{4x^2\log x+x^4-1}{x^3+x}-2\pi<0. \tag{4.1}$$

证明: 令 $h_1(x)=8\arctan x-(4x^2\log x+x^4-1)/(x^3+x)-2\pi$, 经简单计算可得

$$\lim_{x\to1}h_1(x)=0, \tag{4.2}$$

$$h_1'(x)=\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}h_2(x), \tag{4.3}$$

其中 $h_2(x)=4x^2\log x-x^4+1$.

$$\lim_{x\to1}h_2(x)=0, \tag{4.4}$$

$$h_2'(x)=4xh_3(x), \tag{4.5}$$

其中 $h_3(x)=2\log x+1-x^2$, 且对 $x>1$ 有

$$\lim_{x\to1}h_3(x)=0, \tag{4.6}$$

$$h_3'(x)=\frac{2}{x}(1-x^2)<0. \tag{4.7}$$

由 (4.1)-(4.7)直接可得引理 4.1. □

引理 4.2 若 $a,b>0$ 且 $a\neq b$, 则

(1) $\sqrt{A(a,b)L(a,b)}>\frac{3A(a,b)G(a,b)}{A(a,b)+2G(a,b)}$;

(2) $\sqrt{A(a,b)L(a,b)}>\frac{A(a,b)G(a,b)}{L(a,b)}$;

(3) $\sqrt{A(a,b)L(a,b)}>A^{2/3}(a,b)G^{1/3}(a,b)$.

证明： (1) 不妨设 $a>b$. 令 $x=\sqrt{a/b}>1$, 则有

$$\begin{aligned}&A(a,b)L(a,b)-\left[\frac{3A(a,b)G(a,b)}{A(a,b)+2G(a,b)}\right]^2\\&=\frac{b^3A(a,b)}{[A(a,b)+2G(a,b)]^2}\frac{x^2(x^2+1)}{8\log x}h_4(x),\end{aligned}\tag{4.8}$$

其中 $h_4(x)=[(x^2-1)(x^2+4x+1)^2]/[x^2(x^2+1)]-36\log x$.

注意到对 $x>1$, 有

$$\lim_{x\to 1}h_4(x)=0,\tag{4.9}$$

$$h_4'(x)=\frac{2(x-1)^4(x^4+8x^3+10x^2+8x+1)}{x^3(x^2+1)^2}>0.\tag{4.10}$$

利用 (4.8)-(4.10) 便可得结论 (1)。

(2) 注意到结论 (2) 等价于不等式

$$L^3(a,b)>A(a,b)G^2(a,b).\tag{4.11}$$

不妨设 $a>b$. 令 $x=a/b>1$, 则有

$$\begin{aligned}&3\log L(a,b)-\log[A(a,b)G^2(a,b)]\\&=3\log\left(\frac{x-1}{\log x}\right)-\log\left(\frac{x(x+1)}{2}\right).\end{aligned}\tag{4.12}$$

令 $h_5(x)=3\log[(x-1)/\log x]-\log[x(x+1)/2]$, 通过简单计算得

$$\lim_{x\to 1}h_5(x)=0,\tag{4.13}$$

$$h_5'(x)=\frac{x^2+4x+1}{x(x-1)(x+1)\log x}h_6(x),\tag{4.14}$$

其中 $h_6(x)=\log x-[3(x^2-1)]/(x^2+4x+1)$. 对 $x>1$ 易得

$$\lim_{x\to 1}h_6(x)=0,\tag{4.15}$$

$$h_6'(x)=\frac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)^2}>0.\tag{4.16}$$

由(4.12)-(4.16) 可得不等式 (4.11), 即结论 (2).

(3) 结论 (3) 可由不等式 (4.11) 得到。□

定理 4.3 对任意的 $a,b>0$, $a\neq b$, 不等式

$$A^{\alpha}(a,b)L^{1-\alpha}(a,b)<P(a,b)<A^{\beta}(a,b)L^{1-\beta}(a,b)\tag{4.17}$$

成立当且仅当 $\alpha\leq 1/2$ 与 $\beta\geq 1$.

证明： 首先证明对任意的 $a,b>0$, $a\neq b$, 以下不等式成立

$$P(a,b)>\sqrt{A(a,b)L(a,b)}. \tag{4.18}$$

不妨设 $a>b$. 令 $x=\sqrt{a/b}>1$, 则有

$$\begin{aligned}&A(a,b)L(a,b)-P^2(a,b)\\&=\frac{b^2(x^2-1)(x^2+1)}{4(4\arctan x-\pi)^2\log x}h_7(x),\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 $h_7(x)=(4\arctan x-\pi)^2-[4(x^2-1)\log x]/(x^2+1)$, 并且

$$\lim_{x\to 1}h_7(x)=0, \tag{4.19}$$

$$h_7'(x)=\frac{4}{1+x^2}h_1(x), \tag{4.21}$$

其中 $h_1(x)$ 的定义见引理 4.1.

由 (4.19)-(4.21) 和引理 4.1 即得不等式 (4.18).

其次，由第 1 章中的 (1.20) 和 (1.24) 知对任意的 $a,b>0$, $a\neq b$, 成立不等式

$$P(a,b)<A(a,b). \tag{4.22}$$

最后证明常数 $\alpha=1/2$ 与 $\beta=1$ 是不等式 (4.17) 成立的最佳常数。

对任意的 $0<\varepsilon<1/2$, $x>0$, 经过简单计算便得

$$\begin{aligned}&A^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(1+x,1)L^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(1+x,1)-P(1+x,1)\\&=\frac{J_2(x)}{[\log(1+x)]^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(4\arctan\sqrt{1+x}-\pi)}\end{aligned} \tag{4.23}$$

和

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}[P(x,1)-A^{1-\varepsilon}(x,1)L^{\varepsilon}(x,1)]\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1-\frac{1}{x}}{4\arctan\sqrt{x}-\pi}-\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{2}\right)^{1-\varepsilon}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x}\right)^{\varepsilon}\right]\\&=+\infty,\end{aligned} \tag{4.24}$$

其中 $J_2(x)=x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(1+\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(4\arctan\sqrt{1+x}-\pi)-x[\log(1+x)]^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

令 $x\to 0$ 并运用 Taylor 展开得

$$\begin{aligned}J_2(x)=&x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\left[1+\frac{1+2\varepsilon}{4}x+\frac{(1+2\varepsilon)(2\varepsilon-1)}{32}x^2+o(x^2)\right]\left[1-\frac{x}{2}\right.\\&\left.+\frac{7}{24}x^2+o(x^2)\right]-x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\left[1-\frac{1-2\varepsilon}{4}x+\frac{(13-6\varepsilon)(1-2\varepsilon)}{96}x^2\right.\\&\left.+o(x^2)\right]\\=&\frac{\varepsilon}{12}x^{\frac{7}{2}-\varepsilon}+o(x^{\frac{7}{2}-\varepsilon}).\end{aligned} \tag{4.25}$$

等式 (4.23)-(4.25) 表明对任意的 $0<\varepsilon<1/2$， 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 和 $X=X(\varepsilon)>1$，当 $x\in(0,\delta)$ 时成立 $A^{1/2+\varepsilon}(1+x,1)L^{1/2-\varepsilon}(1+x,1)>P(1+x,1)$， 而当 $x\in(X,\infty)$ 时成立 $P(x,1)>A^{1-\varepsilon}(x,1)L^{\varepsilon}(x,1)$. 由此便证明了常数 $\alpha=1/2$ 与 $\beta=1$ 的最佳性。□

注： 定理 4.3 改进了不等式 (1.25)-(1.27).

引理 4.4 设 $h_8(x)=4x^{4p}-4x^{4p-2}+(p-2)x^{3p+2}-2(p-4)x^{3p}+(p-6)x^{3p-2}+2(2p-3)x^{2p+2}-4(2p-3)x^{2p}+2(2p-3)x^{2p-2}+(p-6)x^{p+2}-2(p-4)x^{p}+(p-2)x^{p-2}-4x^2+4$. 若 $p=\log 3=1.0986\cdots$, 则存在唯一的 $x_0\in(1,+\infty)$，当 $x\in(1,x_0)$ 时 $h_8(x)>0$, 而当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时 $h_8(x)<0$ 以及 $h_8(x_0)=0$.

证明： 令 $h_9(x)=h_8'(x)/x$, $h_{10}(x)=x^{5-p}h_9'(x)$, $h_{11}(x)=h_{10}'(x)/(2px)$, $h_{12}(x)=h_{11}'(x)/(2x)$, $h_{13}(x)=(1/2)x^{5-p}h_{12}'(x)$ 和 $h_{14}(x)=h_{13}'(x)/(px)$. 经过初等计算得

$$h_8(1)=0, \tag{4.26}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h_8(x)=-\infty, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}h_9(x)=&16px^{4p-2}-8(2p-1)x^{4p-4}+(p-2)(3p+2)x^{3p}-6p(p-4)x^{3p-2}\\&+(p-6)(3p-2)x^{3p-4}+4(p+1)(2p-3)x^{2p}-8p(2p-3)x^{2p-2}\\&+4(p-1)(2p-3)x^{2p-4}+(p-6)(p+2)x^{p}-2p(p-4)x^{p-2}\\&+(p-2)^2x^{p-4}-8,\end{aligned}$$

$$h_9(1)=0, \tag{4.28}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h_9(x)=-\infty, \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}h_{10}(x)=&32p(2p-1)x^{3p+2}-32(p-1)(2p-1)x^{3p}+3p(p-2)(3p+2)\\&\times x^{2p+4}-6p(p-4)(3p-2)x^{2p+2}+(p-6)(3p-2)(3p-4)x^{2p}\\&+8p(p+1)(2p-3)x^{p+4}-16p(p-1)(2p-3)x^{p+2}+8(p-1)\\&\times(p-2)(2p-3)x^{p}+p(p-6)(p+2)x^4-2p(p-2)(p-4)x^2\\&+(p-2)^2(p-4),\end{aligned}$$

$$h_{10}(1)=144(p-1)>0, \tag{4.30}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h_{10}(x)=-\infty, \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}h_{11}(x)=&16(2p-1)(3p+2)x^{3p}-48(p-1)(2p-1)x^{3p-2}+3(p-2)(p+2)\\&\times(3p+2)x^{2p+2}-6(p-4)(p+1)(3p-2)x^{2p}+(p-6)(3p-2)\end{aligned}$$

$$\times(3p-4)^{2p-2}+4(p+1)(p+4)(2p-3)x^{p+2}-8(p-1)(p+2)$$
$$\times(2p-3)x^{p}+4(p-1)(p-2)(2p-3)x^{p-2}+2(p-6)(p+2)x^{2}$$
$$-2(p-2)(p-4),$$

$$h_{11}(1)=360(p-1)>0, \tag{4.32}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h_{11}(x)=-\infty, \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}h_{12}(x)=&24p(2p-1)(3p+2)x^{3p-2}-24(p-1)(2p-1)(3p-2)x^{3p-4}+3\\&\times(p-2)(p+1)(p+2)(3p+2)x^{2p}-6p(p-4)(p+1)(3p-2)x^{2p-2}\\&+(p-1)(p-6)(3p-2)(3p-4)x^{2p-4}+2(p+1)(p+2)(p+4)\\&\times(2p-3)x^{p}-4p(p-1)(p+2)(2p-3)x^{p-2}+2(p-1)(p-2)^{2}\\&\times(2p-3)x^{p-4}+2(p-6)(p+2),\end{aligned}$$

$$h_{12}(1)=636p^{2}-684p+24=40.168\cdots>0, \tag{4.34}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h_{12}(x)=-\infty, \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}h_{13}(x)=&12p(2p-1)(3p-2)(3p+2)x^{2p+2}-12(p-1)(2p-1)(3p-2)\\&\times(3p-4)x^{2p}+3p(p-2)(p+1)(p+2)(3p+2)x^{p+4}-6p(p-4)\\&\times(p-1)(p+1)(3p-2)x^{p+2}+(p-1)(p-2)(p-6)(3p-2)\\&\times(3p-4)x^{p}+p(p+1)(p+2)(p+4)(2p-3)x^{4}-2p(p-1)\\&\times(p-2)(p+2)(2p-3)x^{2}+(p-1)(p-2)^{2}(p-4)(2p-3),\end{aligned}$$

$$h_{13}(1)=1038p^{3}-1950p^{2}+1092p-240=-17.510\cdots<0. \tag{4.36}$$

并且对 $x\geq 1$, 有

$$\begin{aligned}h_{14}(x)=&24(p+1)(2p-1)(3p-2)(3p+2)x^{2p}+24(p-1)(2p-1)\\&\times(3p-2)(4-3p)x^{2p-2}-3(2-p)(p+1)(p+2)(p+4)\\&\times(3p+2)x^{p+2}+6(p-1)(4-p)(p+1)(p+2)(3p-2)x^{p}\\&-(p-1)(2-p)(6-p)(3p-2)(4-3p)x^{p-2}-4(p+1)\\&\times(p+2)(p+4)(3-2p)x^{2}-4(p-1)(2-p)(p+2)\\&\times(3-2p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< 24(p+1)(2p-1)(3p-2)(3p+2)x^{p+2}+24(p-1)(2p-1)\\
&\quad \times(3p-2)(4-3p)x^{p+2}-3(2-p)(p+1)(p+2)(p+4)\\
&\quad \times(3p+2)x^{p+2}+6(p-1)(4-p)(p+1)(p+2)(3p-2)x^{p+2} \qquad (4.37)\\
&=(-9p^5+99p^4+1896p^3-2628p^2+528p-96)x^{p+2}\\
&=(-43.944\cdots)x^{p+2}<0.
\end{aligned}$$

由不等式 (4.36) 和 (4.37) 知，当 $x\in[1,+\infty)$ 时 $h_{13}(x)<0$。因此 $h_{12}(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格单调下降。

由 (4.34) 和 (4.35) 以及 $h_{12}(x)$ 的单调性可知，存在唯一的 $\lambda_1\in(1,+\infty)$, 当 $x\in[1,\lambda_1)$ 时成立 $h_{12}(x)>0$，而当 $x\in(\lambda_1,+\infty)$ 时成立 $h_{12}(x)<0$. 从而 $h_{11}(x)$ 在 $[1,\lambda_1]$ 上严格单调上升，而在 $[\lambda_1,+\infty)$ 上严格单调下降。

利用 (4.32) 和 (4.33) 以及 $h_{11}(x)$ 的单调性知，存在唯一的 $\lambda_2\in(1,+\infty)$, 当 $x\in[1,\lambda_2)$ 时成立 $h_{11}(x)>0$, 而当 $x\in(\lambda_2,+\infty)$ 时成立 $h_{11}(x)<0$. 因此，$h_{10}(x)$ 在 $[1,\lambda_2]$ 上严格单调上升，而在 $[\lambda_2,+\infty)$ 上严格单调下降。

(4.30) 和 (4.31) 式以及 $h_{10}(x)$ 的单调性表明存在唯一的 $\lambda_3\in(1,+\infty)$, 当 $x\in[1,\lambda_3)$ 时有 $h_{10}(x)>0$, 而当 $x\in(\lambda_3,+\infty)$ 时有 $h_{10}(x)<0$. 因此，$h_9(x)$ 在 $[1,\lambda_3]$ 上严格单调上升，而在 $[\lambda_3,+\infty)$ 上严格单调下降。

结合式 (4.28) 和 (4.29) 以及 $h_9(x)$ 的单调性可得如下结论：存在唯一的 $\lambda_4\in(1,+\infty)$, 当 $x\in(1,\lambda_4)$ 时 $h_9(x)>0$, 而当 $x\in(\lambda_4,+\infty)$ 时 $h_9(x)<0$. 故 $h_8(x)$ 在 $[1,\lambda_4]$ 上严格单调上升，而在 $[\lambda_4,+\infty)$ 上严格单调下降。

最后由 (4.26)和 (4.27) 以及 $h_8(x)$ 的单调性得引理 4.4. □

定理 4.5 对任意的 $a,b>0$ 和 $a\neq b$, 成立不等式

$$H_1(a,b)<I(a,b)<H_{\log 3}(a,b),$$

其中 $H_{\log 3}(a,b)$ 和 $H_1(a,b)$ 分别是指数平均 $I(a,b)$ 的最佳广义海伦幂平均上界和下界。

证明： 首先，由 (1.28) 易知对任意的 $a,b>0$ 和 $a\neq b$ 不等式 $H_1(a,b)<I(a,b)$ 成立。

其次，证明对任意的 $a,b>0$ 和 $a\neq b$, 成立不等式

$$I(a,b)<H_{\log 3}(a,b). \tag{4.38}$$

不妨设 $a>b$, 令 $x=\sqrt{a/b}>1$ 和 $p=\log 3$, 则

$$\begin{aligned}
&\log[H_p(a,b)]-\log[I(a,b)]\\
&=\frac{1}{p}\log(1+x^p+x^{2p})-\frac{2x^2}{x^2-1}\log x.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

令

$$h_{15}(x)=\frac{1}{p}\log(1+x^p+x^{2p})-\frac{2x^2}{x^2-1}\log x, \tag{4.40}$$

经过简单计算得

$$\lim_{x\to1}h_{15}(x)=\lim_{x\to+\infty}h_{15}(x)=0, \tag{4.41}$$

$$h'_{15}(x)=\frac{4x}{(x^2-1)^2}h_{16}(x), \tag{4.42}$$

其中 $h_{16}(x)=\log x-[(x^2-1)(2x^{2p-2}+x^p+x^{p-2}+2)]/[4(1+x^p+x^{2p})]$, 且

$$h_{16}(1)=0, \tag{4.43}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h_{16}(x)=-\infty, \tag{4.44}$$

$$h'_{16}(x)=\frac{h_8(x)}{4x(1+x^p+x^{2p})^2}, \tag{4.45}$$

其中 $h_8(x)$ 的定义见引理 4.4.

由 (4.45) 式和引理 4.4 知，存在唯一的 $x_0\in(1,+\infty)$, 使得 $h_{16}(x)$ 在 $[1,x_0]$ 上严格单调上升，而在 $[x_0,+\infty)$ 上严格单调下降。(4.43) 和(4.44)式 以及 $h_{16}(x)$ 的单调性表明，存在唯一的 $\lambda\in(1,+\infty)$, 当 $x\in(1,\lambda)$ 时 $h_{16}(x)>0$, 而当 $x\in(\lambda,+\infty)$ 时 $h_{16}(x)<0$, 由此并结合 (4.42) 便知 $h_{15}(x)$ 在 $(1,\lambda]$ 上严格单调上升，而在 $[\lambda,+\infty)$ 上严格单调下降。

由 (4.39)-(4.41) 和 $h_{15}(x)$ 的单调性便可得不等式 (4.38).

最后，证明 $H_{\log 3}(a,b)$ 和 $H_1(a,b)$ 分别是指数平均 $I(a,b)$ 的最佳广义海伦平均上界和下界。

对任意的 $0<\varepsilon<\log 3$ 和 $x>0$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{H_{\log 3-\varepsilon}(1,x)}{I(1,x)}&=e\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\frac{1}{3}(1+x^{\frac{\varepsilon-\log 3}{2}}+x^{\varepsilon-\log 3})\right]^{\frac{1}{\log 3-\varepsilon}}}{x^{\frac{1}{x-1}}}\\&=\frac{e}{3^{\frac{1}{\log 3-\varepsilon}}}<\frac{e}{3^{\frac{1}{\log 3}}}=1,\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}&H_{1+\varepsilon}(1+x,1)-I(1+x,1)\\&=\left[\frac{1+(1+x)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}+(1+x)^{1+\varepsilon}}{3}\right]^{\frac{1}{1+\varepsilon}}-\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}.\end{aligned} \tag{4.47}$$

令 $x\to0$, 运用 Taylor 展式不难得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1+(1+x)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}+(1+x)^{1+\varepsilon}}{3}\right]^{\frac{1}{1+\varepsilon}}-\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}\\&=\frac{\varepsilon}{12}x^2+o(x^2).\end{aligned} \tag{4.48}$$

等式 (4.46) 表明，对任意的 $0<\varepsilon<\log 3$, 存在 $X=X(\varepsilon)>1$，当 $x\in(X,+\infty)$ 时，成立 $I(1,x)>H_{\log 3-\varepsilon}(1,x)$.

等式 (4.47) 和 (4.48) 表明，对任意的 $0<\varepsilon<\log 3$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x\in(0,\delta)$ 时成立 $H_{1+\varepsilon}(1+x,1)>I(1+x,1)$.

由此便证明了 $H_{\log 3}(a,b)$ 和 $H_1(a,b)$ 的作为 $I(a,b)$ 的上下界的最佳性。 □

参 考 文 献

[1] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Special functions of quasiconformal theory [J]. Exposition. Math., 1989, 7: 97-136.

[2] A. Varchenko. Multidimensional hypergeometric functions and their appearance in conformal field theory, algebraic K-theory, algebraic geometry ect. [J]. Proc. Internat. Congr. Math., 1990: 281-300.

[3] M. Vuorinen. Geometric properties of quasiconformal maps and special functions I-III [J]. Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź Sér. Rech. Déform., 1997, 24: 7-58.

[4] E. T. Whittaker and G. N. Waston. A Course of Modern Analysis [M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

[5] W. K. Bühler. Gauss: A Biographical Study [M]. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1981.

[6] F. Klein. Vorlesungen Über Die Hypergeometrische Funktionen [M]. B. G. Teubner, Berlin, New York, 1933.

[7] F. Klein. Vorlesungen Über Die Entwicklung Der Mathematik Im 19 [M]. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1979.

[8] M. Aramowitz and I. A. Stegun (Eds.). Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables [M]. Dover, New York, 1965.

[9] B. C. Berndt. Ramanujan's Notebook I [M]. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1985.

[10] B. C. Berndt. Ramanujan's Notebook II [M]. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1989.

[11] B. C. Berndt. Ramanujan's Notebook III [M]. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1991.

[12] B. C .Berndt. Ramanujan's Notebook IV [M]. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1993.

[13] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Functional inequalities for hypergeometric functions and complete elliptic integrals [J]. SIAM J. Math. Anal., 1992, 23: 512-524.

[14] S.-L. Qiu, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Some inequalities for the growth of elliptic integrals [J]. SIAM J. Math. Anal., 1998, 29: 1224-1237.

[15] H. Alzer and S.-L. Qiu. Monotonicity theorems and inequalities for the complete elliptic integrals [J]. J. Comput. Appl. Math., 2004, 172(2): 289-312.

[16] V. Heikkala, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Generalized elliptic integrals [J]. Rep. Univ. Helsinki, Dept. Math. Stat., No. 404, University of Helsinki, 2004.

[17] V. Heikkala, H. Lindén, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Generalized elliptic integrals and the Legengre $\mathcal{M}$-function [J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 338: 223-243.

[18] G. D. Anderson and S.-L. Qiu. A monotoneity property of the gamma function [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1995, 125: 3355-3362.

[19] S.-L. Qiu and M. Vuorinen. Some properties of the gamma and psi functions, with Applications [J]. Math. Comput., 2004, 74: 723-742.

[20] H. Alzer. Inequalities Involving $\Gamma(x)$ and $\Gamma(1/x)$ [J]. J. Comput. Appl. Math., 2006, 192: 460-480.

[21] X.-M. Zhang and Y.-M. Chu. An Inequality Involving the Gamma Function and the Psi Function [J]. International Journal of Modern Mathematics, 2008, 3(1): 67-73.

[22] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps [M]. Wiley & Sons, New York, 1997.

[23] S. Ponnusamy and M. Vuorinen. Asymptotic expansions and inequalities for hypergeometric functions [J]. Mathematika, 1997, 44: 278-301.

[24] E. D. Rainville. Intermediate Diffeential Equations [M]. 2nd ed. Macmillan, 1964.

[25] P. F. Byrd and M. D. Friedman. Handbook of Elliptic integrals for Engineers and Scientists [M]. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1971.

[26] G. D. Anderson, R. W. Barnard, K. C. Richards, M. K. Vamanamurthy and M.V uorinen. Inequalities for zero-balanced hypergeometric functions [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1995, 347: 1713-1723.

[27] S.-L. Qiu and M. Vuorinen. Landen inequalities for hypergeometric functions [J]. Nagoya Math. J., 1999, 154: 31-56.

[28] S.-L. Qiu and M. Vuorinen. Duplication inequalities for the ratios of hypergeometric functions [J]. Forum Math., 2000, 12: 109-133.

[29] G. D. Anderson, S.-L. Qiu, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Generalized elliptic integrals and modular equations [J]. Pacific J. Math., 2000, 192(1): 1-37.

[30] S.-L. Qiu and M. Vuorinen. Special Functions In Geometric Function Theory [M]. Handbook of complex analysis: geometric function theory. Vol. 2, 621-659, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2005.

[31] E. A. Karatsuba and M. Vuorinen. On hypergeometric functions and generalizations of Legendre's relation [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, 260: 623-640.

[32] E. B. Elliot. A formula including Legendre's $\mathcal{E}\mathcal{K}' + \mathcal{E}'\mathcal{K} - \mathcal{K}\mathcal{K}' = \pi/2$ [J]. Messenger of Math., 1904, 33: 31-40.

[33] P. L. Duren. The Legendre relation for elliptic integrals, in Paul Halmos [J]. Celebrating 50 years of mathematic, ed. by J. H. Ewing and F. W. Gehring, Springer-Verlag, New York, 1991: 305-315.

[34] B. C. Carlson and J. L. Gustafson. Asymptotic expansion of the first elliptic integral [J]. SIAM J. Math. Anal., 1985, 16: 1072-1092.

[35] S.-L. Qiu. The proof of a conjecture on the first elliptic integrals [J]. J. Hangzhou Inst. of Elect. Eng., 1993, 3: 29-36. (in Chinese)

[36] S.-L. Qiu and M. K. Vamanamurthy. Sharp estimates for complete elliptic integrals [J]. SIAM J. Math. Anal., 1996, 27: 823 – 834.

[37] P. F. Byrd and M. D. Friedman. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Sicentists [M]. 2nd ed., Die Grundlehren Math. Wiss., Bd. 67, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[38] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Hypergeometric functions and elliptic integrals [M]. In: Current Topics in Analytic Function Theory (H. M. Srivastava, S.Owa,eds.). Singapore: World Scientific, 1992, 48-85.

[39] H. Alzer. Sharp inequalities for the complete integral of the first kind [J]. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1998, 124 :309-314.

[40] S. András, Á. Baricz. Bounds for complete elliptic integral of the first kind [J]. J. Exposit. Math. (2010), doi: 10,1016/j. exmath. 2009. 12. 005.

[41] M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Inequalities for means [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, 183(1): 155-166.

[42] J. Sándor. On certain inequalities for means. J. Math. Anal. Appl., 189, 1995; 602-606.

[43] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Functional inequalities for complete elliptic integrals and their ratios [J]. SIAM J. Math. Anal., 1990, 21(2): 536-549.

[44] S.-L. Qiu and J.-M. Shen. On two problems concerning means [J]. J. Hangzhou Inst. Eectr. Eng., 1997, 3: 1-7.

[45] R. W. Barnard, K. Pearce and K. C. Richards. A monotonicity property involving ${}_3F_2$ and comparisons of the classical approximations of elliptical arc length [J]. SIAM J. Math. Anal., 2000, 32(2): 403-419.

[46] J.-C. Kuang. Applied Inequalities [M]. Hunan Eduation Press, 2nd. Ed., 1993.

[47] S.-L. Qiu and J.-M. Shen. On two problems concerning means [J]. J. Hangzhou Inst. Electr. Eng.,1997, 3: 1-7.

[48] H. Alzer and S.-L. Qiu. Inequalities for means in two variables [J]. Arch. Math.(Basel), 2003, 80(2): 201-215.

[49] H. J. Seiffert, Problem 887 [J]. Nieuw Arch. Wisk(4)., 1993, 11(2): 176-176.

[50] H. J. Seiffert. Aufgabe β16 [J]. Die Wurzel, 1995, 29: 221-222.

[51] P. S. Bullen. Handbook of Means and Their Inequalities [M]. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[52] G. Toader. Seiffert type means [J]. Nieuw Arch. Wisk(4)., 1999, 17(3): 379-382.

[53] G. Jia and J.-D. Cao. A new upper bound of the logarithmic mean [J]. J. Inequal. Pure Appl. Math., 2003, 4(4): Article 80, 4 pages.

[54] H. J. Seiffert. Ungleichungen für einen bestmmten Mittelwert [J]. Nieuw Arch. Wisk(4)., 1995, 13(2): 195-198.

[55] J. Sándor. On certain inequalities for means III [J]. Arch. Math., 2001, 76(1): 34-40.

[56] H. Alzer and W. Janous. Solution of problem 8* [J]. Crux. Math.,1987, 13: 173-178.

[57] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić. Means and Their Ineualities [M]. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[58] J. Sándor. A note on some inequalities for means [J]. Arch. Math. (Basel)., 1991, 56(5): 471-473.

[59] J. Sándor. On certain identities for means [J]. Studia Univ. Babes-Bolyai Math., 1993, 38(4): 7-14.

[60] S.-L. Qiu, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen. Some inequalities for the Hersch-Pfluger distortion function [J]. J. Inequal. Appl., 1999, 4(2): 115-139.

致 谢

首先感谢导师裘松良教授和褚玉明教授在我攻读硕士学位期间对我的亲切关怀和悉心指导。两位导师不仅让我们组建了学术讨论班，定期为我们进行学术指导，给我们提供了优良的学习环境和学术氛围，而且在专业课的学习以外，老师们还给我们讲述了许多数学家的故事和数学思想方法，提高了我的数学素养，并且鼓励我们参加复分析方向的各种会议，开阔了我的眼界。老师们平日的行政工作如此繁忙，但对于我们所撰写的毕业论文，却不辞辛劳地修改了一遍又一遍，这种严谨的治学态度和实干精神更是我今后工作和学习的榜样，在此，向裘老师、褚老师表示我深深的敬意和谢意！

其次，我要感谢我的同窗兼好友王淼坤，他对于学术的刻苦钻研精神和热情以及踏实细致的学习态度都深深感染着我，是不断鞭策我前进的动力。同时，他为人乐观、豁达、乐于助人的性格，也使得我们结下了深厚的友谊，谢谢你！

再次，我要衷心的感谢我的家人，我的同班同学，我的师兄、师姐、师弟们在生活上、学习上、工作中对我的帮助和鼓励，使得我的研究生生活多姿多彩，让我度过了这段难忘的时光，这份亲情、这份友情我将永远珍藏。

最后，感谢各位专家百忙之中对本文的审阅和提出的宝贵意见！

附 录

作者在读期间发表和录用的学术论文

1. 裘叶芳，王淼坤，褚玉明，王根娣，Tow sharp inequalities for Lehmer mean, identric mean and logarithmic means, Journal of Mathematical Inequalities, JMI-0435，6 Pages, preprint.

2. 褚玉明，裘叶芳，王淼坤，Sharp power mean bounds for the combination of Seiffert and geometric means, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2010, Article ID 108920, 12 Pages. (SCI)

3. 裘松良，裘叶芳，王淼坤，褚玉明，Hölder mean inequalities for the generalized Grötzsch ring and Hersch-Pfluger distortion functions, Mathematical Inequalities & Applications, MIA-2497, 9 Pages, accepted. (SCI).