



华南理工大学
South China University of Technology

线性代数和解析几何 作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 12 月 27 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 行列式	1
1.1 第 1 周作业	1
1.2 第 2 周作业	10
第二章 矩阵	16
2.1 第 1 周作业	17
第三章 空间向量	27
第四章 线性方程组解的结构	29
第五章 特征值和特征向量	42
第六章 二次型的标准形与规范形	55

第一章 行列式

1.1 第1周作业

例题 1.1.1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \dots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \dots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \dots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.1. 设 $x_i = \cos \theta_i$, 利用第一类切比雪夫多项式 $T_k(x)$ 满足 $T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$, 则行列式可视为矩阵 $(T_{j-1}(x_i))_{i,j=1}^n$ 的行列式。存在上三角矩阵 C 使得 $(T_0(x), T_1(x), \dots, T_{n-1}(x)) = (1, x, \dots, x^{n-1})C$, 且 C 的主对角线元素为 $c_{11} = 1, c_{22} = 1, c_{jj} = 2^{j-2}$ ($j \geq 3$), 故 $\det C = 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$ 。另一方面, Van-dermonde 行列式 $\det(x_i^{j-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ 。因此

$$D = \det C \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

当 $n = 1$ 时, 右端理解为 1。

例题 1.1.2

$$D = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \dots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \dots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \dots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.2. 利用恒等式 $\sin(k\theta) = \sin \theta \cdot U_{k-1}(\cos \theta)$, 其中 U_{k-1} 是第二类切比雪夫多项式。设 $x_i = \cos \theta_i$, 则

$$D = \left(\prod_{i=1}^n \sin \theta_i \right) \cdot \det(U_{j-1}(x_i))_{i,j=1}^n.$$

存在上三角矩阵 D 使得 $(U_0(x), U_1(x), \dots, U_{n-1}(x)) = (1, x, \dots, x^{n-1})D$, 且 D 的主对角线元素为 $d_{jj} = 2^{j-1}$, 故 $\det D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 。而 $\det(U_{j-1}(x_i)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$, 所以

$$\det(U_{j-1}(x_i)) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

因此

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \sin \theta_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

当 $n = 1$ 时, 右端空乘积理解为 1, 指数为 0, 与 $D = \sin \theta_1$ 一致。

习题一第一大题的第 (1) (3) (5) 问解答如下:

例题 1.1.3 (习题一第一大题)

计算行列式的值 $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

解 1.1.3. (1) 原式 $= \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1$.

(2) 由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} &= 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 \\ &\quad - 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 - 3 \times 5 \times 7 \\ &= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 \\ &= 225 - 225 = 0. \end{aligned}$$

实际上第三行是第二行各数的两倍减去第一行各数得到的, 因此第三行是第一行和第二行的线性组合, 所以矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

的行向量线性相关, 行列式的值为 0.

(3) 仍然由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} &= x^3 + y^3 + y^3 - xy^2 - xy^2 - xy^2 \\ &= x^3 + 2y^3 - 3xy^2. \end{aligned}$$

实际上这个结果可以推广的, 下面定理的证明运用了行列式的线性性质和递归分解的思想。

定理 1.1.1

将 n 阶行列式 D 中每个元 a_{ij} , ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 都加上参数 t , 得到新行列式 $D(t)$, 则:

$$D(t) = D + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \Leftrightarrow D = D(t) - t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

证明. 将 $D(t)$ 中的第一列拆开, 得到的新行列式记为 $D_1(t)$, 则:

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix} \\ D(t) &= D_1(t) + \begin{vmatrix} t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix} = D_1(t) + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= t \sum_{i=1}^n A_{i1} + D_1(t) = t \sum_{i=1}^n A_{i1} + t \sum_{i=1}^n A_{i2} + D_2(t) \\ &= t \sum_{i=1}^n A_{i1} + t \sum_{i=1}^n A_{i2} + t \sum_{i=1}^n A_{i3} + D_3(t) \\ &= \cdots = t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} + D. \end{aligned}$$

□

下面推广一下上面那道例题:

例题 1.1.4

求 n 阶行列式的值 ($a \neq b$):

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.4. 原题只有第一个行列式, 笔者将其进行了转置, 得到第二个行列式, 目的是方便进行证明, 这里运用了“对偶”的思想。这样就可以轻松写出:

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & b - a & \cdots & b - a \\ 0 & x_2 - a & \cdots & b - a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a)$$

$$D(-b) = \begin{vmatrix} x_1 - b & a - b & \cdots & a - b \\ 0 & x_2 - b & \cdots & a - b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - b)$$

因此：

$$D = \prod_{i=1}^n (x_i - a) + (-a) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = \prod_{i=1}^n (x_i - b) + (-b) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

容易发现，

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

取决于原来的行列式本身，与引入的参数无关（因为我们是一列一列地拆出参数，而恰好在取代数余子式时避开了含有参数的列），因此上述公式构成二元一次线性方程组，由此可以解得：

$$D = \frac{a}{a-b} \prod_{i=1}^n (x_i - b) - \frac{b}{a-b} \prod_{i=1}^n (x_i - a).$$

例题 1.1.5

求 n 阶行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.5. 直接套结论：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a)$$

则：

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

其中对于 A_{ij} 而言，由于只有对角线上的数不是 0，因此如果不取对角线上的数写代数余子式，那么由于系数是 0，行列式无论是什么都不会影响结果

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \prod_{k \neq i}^n (x_k - a) & i = j \end{cases}$$

所以：

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = D(-a) + a \sum_{i=1}^n A_{ii} = \prod_{i=1}^n (x_i - a) + a \sum_{i=1}^n \prod_{k \neq i} (x_k - a).$$

我们再补充一个例子：

例题 1.1.6

求 n 阶行列式的值 ($a \neq b$)：

$$D = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & 0 \\ a & a & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & b & b \\ 0 & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

解 1.1.6.

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = D(-b) + b \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

其中：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \\ 0 & 0 & \cdots & -a & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & \cdots & b-a & b-a \\ -a & b-a & \cdots & b-a & b-a \end{vmatrix}$$

然后使用定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

就可以得到：

$$D(-a) = (-a)^{1+2+3+4+\dots+n-1} (-a)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^n$$

$$D(-b) = (-b)^{1+2+3+4+\dots+n-1} (-b)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} b^n$$

当 $a \neq b$ 时，

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{ab^n - ba^n}{a - b} = (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}} (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1})$$

再补充一个例子：

例题 1.1.7 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 1.1.7. 每一列的和是 $a + (n - 1)b$, 可把每一行都加到第一列, 提取公因式 $a + (n - 1)b$:

$$\begin{vmatrix} a + (n - 1)b & a + (n - 1)b & a + (n - 1)b & \cdots & a + (n - 1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n - 1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a + (n - 1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a - b \end{vmatrix} = [a + (n - 1)b](a - b)^{n-1}$$

或者我们可以使用加边法:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & b & \cdots & b \\ 0 & b & a & b & \cdots & b \\ 0 & b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a - b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a - b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \frac{nb}{a-b} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a - b \end{vmatrix} = [a + (n - 1)b](a - b)^{n-1}$$

习题一第二大题的第 (1) (2) 问解答如下:

例题 1.1.8 (习题一第二大题: 证明恒等式)

$$(1) \begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

解 1.1.8.(1) 由于行列式阶数较低, 考虑直接展开即可完成证明:

$$\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = a(d+y) - c(b+x) = ad - bc + ay - cx = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}$$

(2) 直接按列展开即可完成证明:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

例题 1.1.9 (习题一第三大题)

借助行列式的知识解方程组:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

解 1.1.9. 写出各个行列式并应用克莱默法则, 每一个行列式都可以由沙路法则或者对其进行行变换得出结果:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4 - 3 - 2 + 16 = 17$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 34 + 12 + 6 - 6 + 136 = 102$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 34$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 119$$

故解方程组：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{102}{17} = 6, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{34}{17} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{119}{17} = 7.$$

例题 1.1.10 (习题一第5大题)

若排列 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ 的逆序数为 m , 求排列 $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_1$ 的逆序数。

解 1.1.10. 排列 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ 的逆序数为 m 指这个排列的逆序数对的数量为 m , 而数对一共有

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

种, 所以排列 $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_1$ 的逆序数为

$$\binom{n}{2} - m = \frac{n(n-1)}{2} - m.$$

例题 1.1.11 (习题一第6大题)

求下面各个排列的逆序数并判断排列的奇偶性:

- (1) 26538417 (2) $n(n-1)(n-2)\dots 1$ (3) $2n(2n-2)(2n-4)\dots 2(2n-1)(2n-3)\dots 1$.

解 1.1.11. (1) 逆序数为 $1+4+3+1+3+1=13$, 奇排列。 (2) 逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+\dots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

设 $k \in \mathbb{N}_+$ 当 $n=4k, 4k+1$ 时, 为偶排列, 当 $n=4k+2, 4k+3$ 时, 为奇排列。 (3) 逆序数为

$$(2n-1)+(2n-3)+\dots+1+(n-1)+(n-2)+\dots+1=n^2+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$$

当 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 或 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 时, 为偶排列; 当 $n \equiv 1 \pmod{4}$ 或 $n \equiv 2 \pmod{4}$ 时, 为奇排列。

例题 1.1.12 (习题一第10大题)

用行列式的定义计算:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 1.1.12. (1) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\tau(2143)abde + \tau(4123)abce = abde - abce = abe(d - c)$$

(2) 我们自上而下地按每一列来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D &= \tau(1n(n-1)(n-2)\dots 2)a_{11}a_{2n}a_{3,n-1}\dots a_{n-1,n-1}, a_{n,2} \\ &= a_{11}(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}a_{2n}\dots a_{n2} \end{aligned}$$

(3) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D &= \tau(n123\dots(n-1))a_n \\ &= (-1)^{(n-1)}a_n \end{aligned}$$

1.2 第 2 周作业

例题 1.2.1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n, \quad \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n$$

解 1.2.1.(1) 进行行列式的行变换，再按行展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = 68$$

(2) 观察到所有列的元素和相同，所以同时相减：

$$\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ x & x & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & a & \cdots & x & x \\ a & x & \cdots & x & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & x-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & x-a \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}_n$$

$$= \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a+(n-1)x \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a+(n-1)x)(a-x)^{n-1}$$

(3) 一样的道理，当 $a \neq 0$ 时，将前 $n-1$ 列的元素乘以 $-\frac{x}{a}$ 加到最后一列上，再利用定义计算：

$$D = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & x \\ a & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & a-(n-1)\frac{x^2}{a} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a^n - (n-1)x^2 a^{n-2}).$$

当 $a = 0$ 时, 显然

$$D = \begin{cases} x & , n = 1 \\ x^2 & , n = 2 \\ 0 & , n \geq 3 \end{cases}$$

例题 1.2.2 证明等式

$$(1) \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ z_1 + x_1 & z_2 + x_2 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = \left[a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \right] (a-1)^{n-1}$$

解 1.2.2. (1) 先转置, 再一点点拆出来:

$$\begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ z_1 + x_1 & z_2 + x_2 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 + y_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix}$$

然后把最后一列数加到第一行, 再减去第二列数:

$$= \begin{vmatrix} 2x_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ 2x_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ 2x_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix}$$

然后将第三列数减去第一列数, 再乘以 -1 加到第二列数上:

$$= 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 + z_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 + z_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 + z_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(2) 套路式地将第二行, 第三行... 第 n 行分别减去第一行:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

再将第 2 列到第 n 列地数依次加到第一列上:

$$= \begin{vmatrix} a + \frac{(n+2)(n-1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = \left(a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \right) (a-1)^{n-1}$$

例题 1.2.3 计算行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & 49 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n, \quad (3) \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n$$

解 1.2.3. (1) 直接计算即可:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 7 & 49 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 7 & 49 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 11 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 20 \begin{vmatrix} 0 & -6 & 8 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 0 & -6 & 8 \\ 0 & 3.5 & 3.5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -40 \begin{vmatrix} -6 & 8 \\ 3.5 & 3.5 \end{vmatrix} = 1960. \end{aligned}$$

(2) 使用分割法, 分别构造上三角行列式和下三角行列式, 则

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n &= x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= x^n + (-1)^{n+1} y^n = x^n - (-y)^n \end{aligned}$$

当然这题也可以用行变换先行处理，将第 k 行乘以 $-\frac{y}{x}$ 再加到第 $k+1$ 行：

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & y(-\frac{y}{x}) \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & y(-\frac{y}{x})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y(\frac{y}{x})^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x + y(-\frac{y}{x})^{n-1} \end{vmatrix} = x^{n-1} \left(x + y(-\frac{y}{x})^{n-1} \right) = x^n - (-y)^n$$

(3) 这题可以递推法来做：

$$D_n = \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_n = x \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - y \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= x \begin{vmatrix} x & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-1} - yz \begin{vmatrix} x & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & z \\ 0 & 0 & \cdots & y & x \end{vmatrix}_{n-2} = xD_{n-1} - yzD_{n-2}$$

而 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$, 列出特征方程: $r^2 - xr + yz = 0$, 则分类:

当判别式为 0 时, 根为 $\frac{x}{2}$, 则 $D_n = (A + Bn)(\frac{x}{2})^n$, 代入 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz = \frac{3}{4}x^2$ 得到

$$D_n = (n+1) \left(\frac{x}{2} \right)^n$$

当判别式不为 0 时, 根为 $r_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}, r_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4yz}}{2}$, 则 $D_n = Ar_1^2 + Br_2^2$, 代入 $D_1 = x, D_2 = x^2 - yz$ 得到

$$\begin{cases} A = \frac{\sqrt{x^2 - 4yz} + x}{2\sqrt{x^2 - 4yz}} \\ B = \frac{\sqrt{x^2 - 4yz} - x}{2\sqrt{x^2 - 4yz}} \end{cases} \Rightarrow D_n = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2 - 4yz}}$$

综上：

$$D_n = \begin{cases} (n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^n & , x^2 = 4yz \\ \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 4yz})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{x^2 - 4yz}} & , x^2 \neq 4yz \end{cases}$$

例题 1.2.4 求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

解 1.2.4. 分别计算可得：

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ 18 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 39$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 13$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -14 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -15 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 14 & -3 \end{vmatrix} = -26$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 8 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

所以解为:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}, x_4 = 0$$

例题 1.2.5 如果齐次线性方程组有非零解, 求 λ 的取值

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ \lambda^2 x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

解 1.2.5. 考虑系数行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-2\lambda \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda)(1-\lambda) = 0$$

所以 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 1.

第二章 矩阵

2.1 第1周作业

例题 2.1.1

求 $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n$

解 2.1.1. 因为

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \sin n\alpha & -\sin \alpha \cos n\alpha - \cos \alpha \sin n\alpha \\ \sin \alpha \cos n\alpha + \cos \alpha \sin n\alpha & \cos \alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \sin n\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以答案是 $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

例题 2.1.2

令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算

(1) A^2, A^3 和 $f(A)$, 其中 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$;

$$\begin{aligned} \text{解 2.1.2. } A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, 2 = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ f(A) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例题 2.1.3

求与 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解 2.1.3. 设所求矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a - 2b & a + 2b \\ 3c - 2d & c + 2d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3a + c & 3b + d \\ -2a + 2c & -2b + 2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 3a + c \\ a + 2b = -2a + 2c \\ 3c - 2d = 3b + d \\ c + 2d = -2b + 2d \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a - b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C} & \end{aligned}$$

例题 2.1.4

证明：与任意 n 阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵，即 $\mathbf{A} = k\mathbf{E}$

解 2.1.4. 考虑一个特殊的矩阵 \mathbf{E}_{ij} , 这个矩阵的第 i 行 j 列的元素是 1, 其余元素全为 0。并设矩阵 \mathbf{A} 与任意 n 阶矩阵都可交换, 那么它显然为 n 阶矩阵。那么 n 阶矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$ 满足第 j 列的元素为 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, 其余元素全为 0, 而 n 阶矩阵 $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$ 满足第 i 行的元素为 $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$, 其余元素全为 0。因此由于 $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$, 那么对于任意 $i \neq j, a_{ij} = 0$, 所以矩阵 \mathbf{A} 只有对角线上的元素不是 0, 其余元素全为 0。然后由于 \mathbf{E}_{ij} 中的 1 元素的位置任意, 所以矩阵 \mathbf{A} 对角线上的元素必须互相同, 故与任意 n 阶矩阵都可交换的矩阵只能是数量矩阵, 即 $\mathbf{A} = k\mathbf{E}$

例题 2.1.5

证明：若 \mathbf{A} 为实对称矩阵且 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

解 2.1.5. 设 \mathbf{A} 的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 列向量为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \dots, \boldsymbol{\beta}_n$ 。考虑到 $\mathbf{0} = \mathbf{AA}$, 则 $\mathbf{0}$ 的第 i 行 j 列的元素是 $\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_j$, 故任意 i, j 均有 $\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_j = 0$ 。又因为 \mathbf{A} 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j$, 所以考虑当 $i = j$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_i^2 = 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的元素均为 0, 故 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 。

例题 2.1.6

证明：任一方阵可以表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和

解 2.1.6. 设 A 为任意 $n \times n$ 方阵。定义两个矩阵：

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T) \tag{2.1}$$

$$K = \frac{1}{2}(A - A^T) \tag{2.2}$$

首先，验证 S 是对称矩阵：

$$S^T = \left(\frac{1}{2}(A + A^T) \right)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = S$$

因此， S 是对称矩阵。

其次，验证 K 是反对称矩阵：

$$K^T = \left(\frac{1}{2}(A - A^T) \right)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -K$$

因此， K 是反对称矩阵。

最后，验证 $A = S + K$ ：

$$S + K = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}(2A) = A$$

故任一方阵 A 可分解为对称矩阵 S 和反对称矩阵 K 的和，即 $A = S + K$ 。证明完毕。

例题 2.1.7

将 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵.

解 2.1.7. 第2行减去2倍第1行，第3行减去5倍第1行，第4行减去7倍第1行，得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix}$$

第3行减去2倍第2行，第4行减去2倍第2行，交换第3行和第4行得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.8

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 用分块矩阵的方法求 A^2 .

解 2.1.8. 令 $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = \begin{pmatrix} B^2 & O \\ O & C^2 \end{pmatrix}$, 其中 O 为零矩阵。

计算得到 $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 13 & -6 \\ 5 & 28 & -13 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 10 & -13 & 3 \\ -13 & 46 & -13 \\ 3 & -13 & 10 \end{pmatrix}$. 故答案为

$$\begin{pmatrix} 2 & 13 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 28 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.9

计算下列矩阵的秩, 如果矩阵为满秩, 计算出矩阵的逆:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

解 2.1.9.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix}$$

则 $\det \mathbf{A} \neq 0$ 矩阵的秩为 3, 矩阵为满秩, 下求逆矩阵:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

例题 2.1.10

求这个矩阵的逆, 其中 $a_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 2.1.10. 考虑矩阵将矩阵的第 1 行乘以 $\frac{1}{a_1}$, 第二行乘以 $\frac{1}{a_2}$, 依此类推, 得到:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

将这个矩阵的第 n 行与第 $n-1$ 行交换, 再将第 $n-1$ 行与第 $n-2$ 行交换, 依此类推, 直到第 2

行与第1行交换，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

将矩阵的第1行乘以 $\frac{1}{a_n}$ ，第二行乘以 $\frac{1}{a_1}$ ，依此类推，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{array} \right) \Rightarrow \text{逆矩阵为} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{array} \right)$$

例题 2.1.11

求矩阵 \mathbf{X} 使得：

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \mathbf{X} = \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{array} \right).$$

解 2.1.11. 转化为求这个矩阵的逆：

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{构造} [\mathbf{A}|E] = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

第 k 行减去第 $k+1$ 行，即可消去第 k 行中第 $k+1$ 列及以后的所有 1，得到：

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

等式两边右乘以 \mathbf{A}^{-1} ，得：

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

例题 2.1.12

求解线性方程组:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1, \\ 3x_2 - 5x_3 = -4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

解 2.1.12. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -\frac{17}{20}, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{9}{10}.$$

最后一行是由于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$, 则 $x_1 = -\frac{17}{20}, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{9}{10}$

例题 2.1.13

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

解 2.1.13. 构造增广矩阵并进行矩阵的行变换 $[A|E] =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & | & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -13 & 6 & | & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & \frac{29}{2} & -\frac{13}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -13 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -29 & 13 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -29 & 13 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 & 5 \\ -10 & -72 & 33 \\ -24 & -159 & 73 \end{pmatrix}$$

例题 2.1.14

求 $(k+l) \times (k+l)$ 矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_k & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_l \end{pmatrix}$ 的逆，其中 \mathbf{E}_k 为 $k \times k$ 单位矩阵， \mathbf{E}_l 为 $l \times l$ 单位矩阵。

解 2.1.14. 设逆矩阵为： $\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{pmatrix}$ ，其中 \mathbf{X} 是 $k \times k$ 矩阵， \mathbf{Y} 是 $k \times l$ 矩阵， \mathbf{Z} 是 $l \times k$ 矩阵， \mathbf{W} 是 $l \times l$ 矩阵。计算矩阵乘积：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_k & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}_k \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{Z} & \mathbf{E}_k \mathbf{Y} + \mathbf{B} \mathbf{W} \\ \mathbf{O} \mathbf{X} + \mathbf{E}_l \mathbf{Z} & \mathbf{O} \mathbf{Y} + \mathbf{E}_l \mathbf{W} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{Z} & \mathbf{Y} + \mathbf{B} \mathbf{W} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

等式成立：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{Z} & \mathbf{Y} + \mathbf{B} \mathbf{W} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_k & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_l \end{pmatrix}$$

得到方程组： $\mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{Z} = \mathbf{E}_k$, $\mathbf{Y} + \mathbf{B} \mathbf{W} = \mathbf{O}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{O}$, $\mathbf{W} = \mathbf{E}_l$ ，因此，逆矩阵为：

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_k & -\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_l \end{pmatrix}$$

例题 2.1.15

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 是同阶方阵，其中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 可逆，求下列矩阵的逆：

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

解 2.1.15. 设逆矩阵为：

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}$ 是与 \mathbf{A} 同阶的方阵。计算矩阵乘积：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{O} \mathbf{X} + \mathbf{A} \mathbf{Z} & \mathbf{O} \mathbf{Y} + \mathbf{A} \mathbf{W} \\ \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{C} \mathbf{Z} & \mathbf{B} \mathbf{Y} + \mathbf{C} \mathbf{W} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{E}$, $\mathbf{A} \mathbf{W} = \mathbf{O}$, $\mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{C} \mathbf{Z} = \mathbf{O}$, $\mathbf{B} \mathbf{Y} + \mathbf{C} \mathbf{W} = \mathbf{E}$ ，计算得到

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

例题 2.1.16

若 $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, 证明:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}$$

解 2.1.16. 设 $\mathbf{S} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}$, 计算乘积:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{S} &= \mathbf{E}(\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}) - \mathbf{A}(\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}) \\ &= (\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}) - (\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots + \mathbf{A}^k) \\ &= \mathbf{E} + (\mathbf{A} - \mathbf{A}) + (\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^2) + \cdots + (\mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^{k-1}) - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{E} + \mathbf{O} + \mathbf{O} + \cdots + \mathbf{O} - \mathbf{O} = \mathbf{E} \end{aligned}$$

例题 2.1.17

设 \mathbf{A} 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵, 证明 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

解 2.1.17. 由伴随矩阵的定义, 有:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$$

其中 \mathbf{E} 是 n 阶单位矩阵。对等式 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$ 两边取行列式:

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^*| = ||\mathbf{A}|\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & |\mathbf{A}|\end{vmatrix} = |\mathbf{A}|^n$$

分情况讨论: 当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时可以直接得到 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$. 当 $|\mathbf{A}| = 0$ 时, 则我们可以对矩阵 \mathbf{A} 进行初等变换使之变成阶梯型矩阵, 那么最后一行元素一定全为 0, 因此 $|\mathbf{A}|$ 中最多只有最后一行的元素对应的代数余子式非零, 所以 $|\mathbf{A}^*|$ 中一定有全为 0 的列, 所以 $|\mathbf{A}^*| = 0 = |\mathbf{A}|^{n-1}$, 综上所述, 无论 $|\mathbf{A}|$ 是否为零, 都有:

$$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$$

第三章 空间向量

例题 3.0.1 16

求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点 O 及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 3.0.1. 根据题意, $\overrightarrow{OM_0} = (2, 9, -6)$ 为平面法向量, 设平面方程为 $2x + 9y - 6z + D = 0$, 代入 $M_0 = (2, 9, -6)$, 有 $2(2) + 9(9) - 6(-6) + D = 0$, 即 $D = -121$, 即 $2x + 9y - 6z - 121 = 0$ 为平面方程.

例题 3.0.2 18

求过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程.

解 3.0.2. 设平面方程为 $3x - 7y + 5z + D = 0$, 代入 $(3, 0, -1)$, 有 $3(3) - 7(0) + 5(-1) + D = 0 \Rightarrow D = -4$, 即 $3x - 7y + 5z - 4 = 0$ 为平面方程.

例题 3.0.3 20

求过点 $(4, 0, -2)$ 和点 $(5, 1, 7)$ 且平行于 x 轴的平面方程.

解 3.0.3. 设该平面的法向量为 $\vec{n} = (0, B, C)$, 则平面方程可以写为 $By + Cz + D = 0$, 代入 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$, 有 $B = -\frac{9D}{2}$, $C = \frac{D}{2}$, 取 $D = -2$, $B = 9$, $C = -1$, 即 $9y - z - 2 = 0$ 为平面方程.

例题 3.0.4 22

平面 $x - 2y + 3z + D = 0$, $-2x + 4y + Cz + 6 = 0$, 分别求出当两个平面平行和重合时的 C, D 值.

解 3.0.4. 当两个平面重合, 则它们等价, 则 $C = -6, D = -3$; 若两个平面平行, 则 $C = -6, D \neq -3$;

例题 3.0.5 25

求出经过点 $P(3, 1, 2)$ 且平行于平面 $x + y + z + 3 = 0, y - z + 1 = 0$ 的直线的对称式方程.

解 3.0.5. 直线的方向向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$, 则 $\vec{n} \cdot (1, 1, 1) = 0, \vec{n} \cdot (0, 1, -1) = 0$ 解得直线的方向向量为 $\vec{n} = (-2, 1, 1)$, 则其对称式方程为 $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{1}$.

例题 3.0.6 27

(1) 求过直线 $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ 和点 $(1, 2, -1)$ 的平面方程.

(2) 求过直线 $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 且与平面 $x + 2z = 1$ 垂直的平面方程.

解 3.0.6. (1) 该直线的方向向量为 $\vec{n}_1 = (3, 1, 2)$, 过点 $A(2, 2, 1)$, 设 $B(1, 2, -1)$, 则 $\vec{AB} = (-1, 0, -2)$, 设平面的法向量为 \vec{n} , 那么 $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$, 解得 $n = (-2, 4, 1)$, 则 $-2x + 4y + z + D = 0$ 为平面方程, 代入点 $A(2, 2, 1)$ 得到 $D = -5$, 所以 $2x - 4y - z + 5 = 0$ 为平面方程.

(2) 设平面方程为 $x + 3y - z + \lambda(x - y + z + 1) = 0$, 即

$$(1 + \lambda)x + (3 - \lambda)y + (\lambda - 1)z + \lambda = 0$$

法向量为 $\vec{n} = (1 + \lambda, 3 - \lambda, \lambda - 1)$, 垂直于 $\vec{n}_1 = (1, 0, 2)$, 解得 $\lambda = \frac{1}{3}$, 则平面方程为 $4x + 8y - 2z + 1 = 0$

例题 3.0.7 28

证明下列两条直线 l_1 和 l_2 共面, 并求它们所在的平面的方程.

$$l_1: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}, \quad l_2: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = 5 + 4t. \end{cases}$$

解 3.0.7. 将 l_1 化为参数方程 $\begin{cases} x = 7 + 3u \\ y = 2 + 2u \\ z = 1 - 2u \end{cases}$, 与 l_2 的参数方程联立得到 $t = 0, u = -2$, 所以两条直线的交点为 $(1, -2, 5)$, 所以两条直线 l_1 和 l_2 共面, 设出平面的法向量为 \vec{n} , $\vec{n} \cdot (2, -3, 4) = 0$, $\vec{n} \cdot (3, 2, -2) = 0$, 解得 $\vec{n} = (2, -16, -13)$, 则 $2x - 16y - 13z + D = 0$ 为平面方程, 代入 $(1, -2, 5)$ 得到 $D = 31$, 所以 $2x - 16y - 13z + 31 = 0$ 为平面方程.

第四章 线性方程组解的结构

易错点：进行矩阵行变换时不能将上下两行同时加到中间的那一行上（通常是心血来潮），但是往往忽略了可能导致消掉了后面某一列的 0，而前面的某一列出现非 0 的数字

例题 4.0.1

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 10, \\ -x_2 - 13x_3 - 2x_4 + x_5 = -14, \\ x_3 - 16x_4 + 2x_5 = -11, \\ 2x_4 + 5x_5 = 12; \end{cases}$$

解 4.0.1. 构造增广矩阵

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & -3 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

例题 4.0.2

设 $\beta = (1, 2, 1, 1)$, $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, -1, -1)$, $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$.
试将 β 表示成向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合.

解 4.0.2. 构造增广矩阵并进行行变换

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

解得 $k_1 = \frac{5}{4}, k_2 = \frac{1}{4}, k_3 = -\frac{1}{4}, k_4 = -\frac{1}{4}$, 所以

$$\beta = \frac{5}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4.$$

例题 4.0.3

设 $\alpha_1 = (3, -1, 1), \alpha_2 = (1, 1, 2), \alpha_3 = (1, -3, -3), \alpha_4 = (4, 0, 5)$.

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关;

(2) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.

解 4.0.3. (1) 证明 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = \mathbf{0}$ 有非零解, 系数矩阵 A 与增广矩阵 \tilde{A} :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

取前三列写出行列式计算, 易得 $r(A) = r(\tilde{A})$ 所以有非零解, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

(2) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关, 构造系数矩阵:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix}$$

计算行列式, 得 $|A| \neq 0$, 所以 $r(A) = 3$, 与列数相等, 所以方程组无非零解, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.

例题 4.0.4

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 也线性无关.

解 4.0.4. 即证明

$$k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + k_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \mathbf{0}$$

只有零解, 即

$$(k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 也线性无关.

例题 4.0.5

\mathbb{R}^3 中, 由基 $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (1, -1, 1), \alpha_3 = (-1, 2, 1)$ 到基 $\beta_1 = (2, 0, 1), \beta_2 = (0, 1, 1), \beta_3 = (1, -1, 2)$ 的过渡矩阵?

解 4.0.5. 设

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

则设过渡矩阵为 $\mathbf{C}, \mathbf{AC} = \mathbf{B}$, 则有 $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, 所以由

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

且左乘一个可逆矩阵相当于作一系列初等行变换或列变换, 所以我们可以写出矩阵 $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$, 通过初等行变换得到 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & -3 & 4 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.625 & 0.125 & 0.125 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.125 & 0.625 & 0.375 \end{array} \right) \end{array}$$

过渡矩阵为: $\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

例题 4.0.6

已知 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 1)$ 和 $\beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (2, 3, 1), \beta_3 = (3, 1, 2)$ 是 \mathbb{R}^3 的两组基. (1) 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵; (2) 分别求向量 $\alpha = (1, 0, 1)$ 在这两组基下的坐标.

解 4.0.6. (1) 设 $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则有 $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$, 则有 $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, 所以由

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

且左乘一个可逆矩阵相当于作一系列初等行变换或列变换，所以我们可以写出矩阵 $(A|B)$ ，通过初等行变换得到 $A^{-1}B$ ：

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

所以过渡矩阵为： $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 构造增广矩阵并进行行变换

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

所以向量 $\alpha = (1, 0, 1)$ 在基 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 1, 1)$ 的坐标为 $(1, -1, 1)$ ；

(3) 构造增广矩阵并进行行变换

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array} \right) \end{aligned}$$

所以向量 $\alpha = (1, 0, 1)$ 在基 $\beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (2, 3, 1), \beta_3 = (3, 1, 2)$ 的坐标为 $(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$

例题 4.0.7

在 \mathbb{R}^3 中求向量 $\alpha = (3, 7, 1)$ 在基 $\alpha_1 = (1, 3, 5), \alpha_2 = (6, 3, 2), \alpha_3 = (3, 1, 0)$ 下的坐标

解 4.0.7. 构造矩阵进行初等行变换：

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & -2 \\ 0 & -28 & -15 & -14 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 \times 28 & -8 \times 28 & -2 \times 28 \\ 0 & -28 \times 15 & -15 \times 15 & -14 \times 15 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 \times 28 & -8 \times 28 & -2 \times 28 \\ 0 & 0 & -1 & -154 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -154 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & 0 & 1230 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -459 \\ 0 & -15 & 0 & 1230 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -459 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{pmatrix}$$

坐标是 $(33, -82, 154)$

例题 4.0.8

在 \mathbb{R}^4 中找一个向量 γ , 使它在标准基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 和基 $\beta_1 = (2, 1, -1, 1), \beta_2 = (0, 3, 1, 0), \beta_3 = (5, 3, 2, 1), \beta_4 = (6, 6, 1, 3)$ 下有相同的坐标.

解 4.0.8. 设 $\gamma = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ 则

$$\begin{cases} 2k_1 + 5k_3 + 6k_4 = k_1 \\ k_1 + 3k_2 + 3k_3 + 6k_4 = k_2 \\ -k_1 + k_2 + 2k_3 + k_4 = k_3 \\ k_1 + k_3 + 3k_4 = k_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 5k_3 + 6k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 6k_4 = 0 \\ -k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_3 + 2k_4 = 0 \end{cases}$$

构建增广矩阵

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因为只需要找到一个向量, 所以取 $k_4 = -1$, 则 $\gamma = (1, 1, 1, -1)$.

例题 4.0.9

设向量组 $\xi_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\xi_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\xi_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\xi_4 = (1, -1, 2, 0)$, $\xi_5 = (2, 1, 5, 6)$

(1) 证明 ξ_1, ξ_2 线性无关. (2) 求向量组中包含 ξ_1, ξ_2 的极大线性无关组.

解 4.0.9. (1) 设 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = \mathbf{0}$, 转化为方程组:

$$\begin{cases} k_1 + 0k_2 = 0 \\ -k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}, \text{解得 } k_1 = 0, k_2 = 0$$

, 因此 ξ_1, ξ_2 线性无关.

(2) 将向量组构成矩阵 A , 其中列向量为 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$, 对 A 进行行化简:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3=R_3-2R_1]{R_2=R_2+R_1, R_4=R_4-4R_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2=\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow[R_3=R_3-R_2]{R_4=R_4-2R_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{交换 } R_3, R_4} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3=-\frac{1}{4}R_3} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

行简化阶梯形的主元列在第 1、2、4 列, 对应向量 ξ_1, ξ_2, ξ_4 . 向量 ξ_3 可以由 ξ_1 和 ξ_2 线性表示, ξ_5 可以由 ξ_1, ξ_2, ξ_4 线性表示; 因此, 包含 ξ_1 和 ξ_2 的极大线性无关组为 ξ_1, ξ_2, ξ_4 .

例题 4.0.10

设 $\alpha_1 = (2, 1, 2, 2, -4)$, $\alpha_2 = (1, 1, -1, 0, 2)$, $\alpha_3 = (0, 1, 2, 1, -1)$,
 $\alpha_4 = (-1, -1, -1, -1, 1)$, $\alpha_5 = (1, 2, 1, 1, 1)$, 确定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 极大线性无关组.

解 4.0.10. 将向量组构成矩阵 A , 其中列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, 对 A 进行行简化:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换 } R_1, R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_2=R_2-2R_1, R_4=R_4-2R_1, R_5=R_5+4R_1]{R_3=R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_1=R_1-R_2, R_4=R_4+2R_2, R_5=R_5-6R_2]{R_3=R_3+3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 3 & -9 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_5=R_5+3R_3]{R_4=R_4-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[R_1=R_1+R_3]{R_2=R_2-2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

行最简形式的主元列在第 1、2、3 列, 对应向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。因此, 向量组的秩为 3, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。其余向量可线性表示: $\alpha_4 = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3$, $\alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$ 故向量组的极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

例题 4.0.11

设 A 为 $n \times n$ 矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明: $r(A) + r(A - E) = n$

解 4.0.11. 假设 AB 为 $n \times n$ 矩阵, $AB = O$, 首先, 方程组 $Ax = 0$ 的解向量组 \mathbf{x} (显然都是列向量) 的极大线性无关组的向量个数为原方程组自由变量的个数, 即 $n - r(A)$, 而且矩阵 B 恰好提供了一组列向量, 满足要求, 但是由于这组列向量一定可以被 \mathbf{x} 的极大线性无关组一个个地线性表示, 所以这组列向量的极大线性无关组的向量个数不一定等于 (小于等于) 解向量组 \mathbf{x} (显然都是列向量) 的极大线性无关组的向量个数; 所以 $r(A) + r(B) \leq n$

而且, 我们知道, 如果将 $A + B, A, B$ 分别视为向量组:

$$\begin{cases} A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) \\ A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \end{cases}$$

分别列出它们的极大线性无关组 (等价于它们自身):

$$\begin{cases} A + B \Leftrightarrow M_{12} = (\alpha_{i_1} + \beta_{i_1}, \alpha_{i_2} + \beta_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r} + \beta_{i_r}) \\ A \Leftrightarrow M_1 = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}) \\ B \Leftrightarrow M_2 = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_t}) \end{cases}$$

则显然 M_{12} 可以由 M_1, M_2 线性表示, 则 $r(A) + r(B) = s + t \geq r = r(A + B)$

对于本题, 由于 $r(E) = n = r(A + E - A) \leq r(A) + r(A - E)$, 且 $A(A - E) = O \Rightarrow r(A) + r(A - E) \leq n$, 所以 $r(A) + r(A - E) = n$ 成立。

例题 4.0.12

求下列齐次线性方程组的一个基础解系, 并写出通解: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

解 4.0.12. 写出系数矩阵并进行行变换:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & \\ 3 & 6 & -1 & -3 & \\ 5 & 10 & 1 & -5 & \end{array} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & -4 & 0 & \\ 0 & 0 & -4 & 0 & \end{array} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & -4 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \\ \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{4}R_2} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

得到 $x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$, 将 $x_2 = s, x_4 = t$ 看作自由未知量, 则解向量为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s+t \\ s \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = s\xi_1 + t\xi_2, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

其中 ξ_1, ξ_2 为基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例题 4.0.13

设线性方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 - x_2 + 14x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 2. \end{cases}$$

- (1) 求方程组导出组的一个基础解系 (2) 用特解和导出组的基础解系表示方程组的所有解.

解 4.0.13. (1) 导出组为齐次线性方程组, 以及系数矩阵:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 9x_1 - x_2 + 14x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 0 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 14 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 4 & 5 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行行变换, 得到行最简形式:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 4 & 5 & 7 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ 4 & 5 & 7 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & -7 & -1 & 14 \\ 0 & -7 & -1 & 14 \\ 0 & -7 & -1 & 14 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{保留前两行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & -7 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

自由变量 $x_3 = 7s, x_4 = t$ (其中 $s, t \in \mathbb{R}$), 则:

$$x_1 = -11s, \quad x_2 = -s + 2t, \quad x_3 = 7s, \quad x_4 = t$$

解向量和导出组的基础解系为：

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 原方程组的增广矩阵为：

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 14 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & 2 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{保留前两行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{7}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -2 & \frac{2}{7} \end{array} \right) \\ \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -2 & \frac{2}{7} \end{array} \right) \end{array}$$

令自由变量 $x_3 = 7s, x_4 = t$ (其中 $s, t \in \mathbb{R}$), 则：

$$x_1 = \frac{1}{7} - 11s, \quad x_2 = \frac{2}{7} - s + 2t, \quad x_3 = 7s, \quad x_4 = t$$

特解为当 $s = 0, t = 0$ 时：

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所有解可表示为特解加上导出组基础解系的线性组合：

$$\mathbf{X} = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

例题 4.0.14

已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}$$

讨论参数 s, t 取何值时，方程组有解，无解；有解时，试用导出组的基础解系表示通解。

解 4.0.14. 方程组的增广矩阵为：

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array} \\ \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - R_2, R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2}} \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}$$

第四行对应方程 $0 = t + 2$ ，因此当 $t \neq -2$ 时，方程组无解。当 $t = -2$ 时，方程组有解，且解的情况取决于参数 p 。情况 1: $p \neq -8$ ，此时增广矩阵的秩为 3，系数矩阵的秩也为 3，自由变量个数为 1。导出组的基础解系含一个向量。从行最简形式：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

由第三行得 $(p+8)x_3 = 0$ ，因 $p \neq -8$ ，故 $x_3 = 0$ ，进而解得： $x_1 = -1 - x_4, x_2 = 1 - 2x_4$ 特解和导出组的基础解系分别为：

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为：

$$\mathbf{x} = \eta + c\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

情况 2: $p = -8$; 此时增广矩阵的秩为 2, 系数矩阵的秩也为 2, 自由变量个数为 2。导出组的基础解系含两个向量。从行最简形式:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

解得: $x_1 = -1 + 4x_3 - x_4$, $x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4$ 特解和导出组的基础解系分别为:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为:

$$\mathbf{x} = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

例题 4.0.15

设 \mathbf{A} 为 n 阶方阵, 那么

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, r(\mathbf{A}) = n \\ 1, r(\mathbf{A}) = n-1 \\ 0, r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$$

解 4.0.15. (1) 若 $r(\mathbf{A}) = n$, 则 \mathbf{A} 可逆, 所以由于 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \Rightarrow \det(\mathbf{A}^*) = \det(|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}) \neq 0$, 所以 \mathbf{A}^* 可逆, 是满秩的;

(2) 此时尽管 $|\mathbf{A}| = 0$, 但是仍然有 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$, 所以将 \mathbf{A} 视作方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{O}$ 的系数矩阵, 由于 $r(\mathbf{A}) = n-1$, 所以方程组自由未知量个数为 1, 所以解向量 \mathbf{x} 的极大线性无关组的向量个数就是 1, 而 \mathbf{A}^* 所提供的列向量都可以被 \mathbf{x} 的极大线性无关组线性表示, 所以 $r(\mathbf{A}^*) \leq 1$, 但是又由于矩阵 \mathbf{A} 存在 $n-1$ 阶不为 0 的行列式, 所以 $r(\mathbf{A}^*) = 1$

(3) 若 $r(\mathbf{A}) = n-2$, 不存在 $n-1$ 阶不为 0 的行列式, 所以由 (2) 得到 $r(\mathbf{A}^*) = 0$

第五章 特征值和特征向量

例题 5.0.1 求特征值和特征向量

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 5.0.1. (1) 计算 $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & -1 \\ -2 & -2 - \lambda & 2 \\ 3 & 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -2 & -2 - \lambda \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)[(-2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 12] - 2[(-2)(-1 - \lambda) - 6] - 1[(-2)(6) - (-2 - \lambda)(3)] \\ &= (3 - \lambda)[(2 + 3\lambda + \lambda^2) - 12] - 2[2 + 2\lambda - 6] - 1[-12 + 6 + 3\lambda] \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 10) - 2(2\lambda - 4) - (3\lambda - 6) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 5) - 7(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(15 - 7 - 2\lambda - \lambda^2) \\ &= (\lambda - 2)(8 - 2\lambda - \lambda^2) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4) = 0 \end{aligned}$$

所以特征值是 $\lambda_1 = 2$ (二重) 和 $\lambda_2 = -4$ (一重)

先计算矩阵 $A - 2E$ 并进行行变换:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以选取 x_2, x_3 为自由变量, $x_1 = x_3 - 2x_2$, 则有基向量:

$$x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则特征值 2 对应的特征向量为 $k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

计算矩阵 $A + 4E$ 并进行行变换:

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 \times 7 + 7 \times 2 & 2 \times 7 + 2 \times 2 & 2 \times 7 - 2 \times (-1) \\ 3 \times 7 - 7 \times 3 & 6 \times 7 - 2 \times 3 & 3 \times 7 + 1 \times 3 \end{pmatrix}$$

得到 $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 36 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 选取 x_3 为自由变量, 解得 $x_2 = -\frac{2}{3}x_3$, 代入得 $x_1 = \frac{1}{3}x_3$ 取
 $x_3 = 3: \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 则特征值 -4 对应的特征向量为 $k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 其中 k_3 为任意常数.

(2) 计算 $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 + 0 - 1 \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)^2[(-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot 1] - (\lambda^2 - 1) = \lambda^2(\lambda^2 - 1) - (\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

特征值: $\lambda = 1$ (二重根), $\lambda = -1$ (二重根), 对于 $\lambda = 1$, 构造矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ 进行初等行变换:

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_4 \end{cases}$$

$$\text{基向量: } x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以特征值 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数。

对于 $\lambda = -1$, 构造矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ 进行初等行变换:

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_4 \end{cases}$$

$$\text{基向量: } x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow \xi_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以特征值 $\lambda_1 = -1$ 对应的特征向量为 $k_3 \xi_3 + k_4 \xi_4$, 其中 k_3, k_4 为任意常数.

例题 5.0.2 求该 n 阶矩阵的特征值和特征向量

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

解 5.0.2. 计算 $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1-\lambda & n-1-\lambda & n-1-\lambda & \cdots & n-1-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (n-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = (n-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (n-1-\lambda)(-\lambda-1)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = n-1, \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

特征值为 $\lambda_1 = n-1$ (一重) 和 $\lambda_2 = -1$ ($n-1$ 重)

对于特征值 $\lambda_1 = n-1$, 我们根据相同的行变换过程发现此时每一列的和为 0, 因此此时这个矩阵的所有行向量线性相关, 所以只有一个有效方程, 而且 x_1, x_2, \dots, x_n 应该相等, 严谨的说明过程则需要写出:

$$\begin{cases} -(n-1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 - (n-1)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 - (n-1)x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots - (n-1)x_n = 0 \end{cases}$$

设 $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 则第 i 个方程为:

$$-(n-1)x_i + (S - x_i) = 0 \Rightarrow S = nx_i$$

这对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 成立, 因此:

$$nx_1 = nx_2 = \cdots = nx_n \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

故特征向量为 $\xi = k(1, 1, \dots, 1)^T$, $k \neq 0$.

下面考虑另一个特征向量 $\lambda_2 = -1$, 将刚才进行的行变换作用于矩阵:

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} n-1-\lambda & n-1-\lambda & n-1-\lambda & \cdots & n-1-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

代入 $\lambda = -1$, 则可得到 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, 一组基可以取为:

$$\xi_1 = (1, -1, 0, 0, \dots, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, -1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \xi_{n-1} = (1, 0, 0, \dots, 0, -1)^T$$

故特征向量为:

$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_{n-1} \xi_{n-1}, \quad k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \text{ 为任意常数}$$

例题 5.0.3

设 λ 是 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值, α 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量, 证明 $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的一个特征值, α 也是 A^* 属于此特征值的一个特征向量.

解 5.0.3. 由于矩阵 A 可逆, 所以 $AA^* = |A|E$, 设列向量 α 满足 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A^*A\alpha = \lambda A^*\alpha$, 即 $|A|E\alpha = |A|\alpha = \lambda A^*\alpha$, 即 $\frac{|A|}{\lambda}\alpha = A^*\alpha$, 所以 $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的一个特征值, α 也是 A^* 属于此特征值的一个特征向量.

例题 5.0.4

设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, α_1, α_2 分别是属于 λ_1, λ_2 的特征向量. 试证: $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量

解 5.0.4. 由定义得到 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 相加有 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$, 假如 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 A 的特征向量, 即 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_3(\alpha_1 + \alpha_2)$, 与 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ 联立得到 $(\lambda_3 - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\alpha_2 = 0$, 由 α_1, α_2 线性无关, 得到 $\lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2$, 但是 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 因此矛盾, $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 A 的特征向量.

例题 5.0.5

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & a & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 试求 a, b 的值.

解 5.0.5. 由于矩阵 A 与 B 相似, 它们具有相同的特征值。矩阵 B 是对角矩阵, 其特征值即为对角线元素: $-4, b$ 和 2 。因此, A 的特征值也应为 $-4, b$ 和 2 , 而且由相似矩阵的迹相等得到 $3 + a + (-1) = a + 2 = -4 + b + 2 = b - 2 \Rightarrow b = a + 4$, 由特征多项式韦达定理得到 A 的所有特征值的积为 $|A| = -4 \times b \times 2 = -8b$, 下面计算行列式 (按行展开):

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & a \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (a \cdot (-1) - 2 \cdot 6) - 2 \cdot ((-2) \cdot (-1) - 2 \cdot 3) - 1 \cdot ((-2) \cdot 6 - a \cdot 3) \\ &= 3 \cdot (-a - 12) - 2 \cdot (2 - 6) - 1 \cdot (-12 - 3a) \\ &= -3a - 36 + 8 + 12 + 3a = -16 \end{aligned}$$

所以 $b = 2, a = 2 - 4 = -2$

例题 5.0.6

已知 $\lambda = 1$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & t+1 \end{pmatrix}$ 的二重特征值, 求 t 的值, 并求是否存在可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵

解 5.0.6. 由于已知 $\lambda = 1$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & t+1 \end{pmatrix}$ 的二重特征值, 所以直接计算 $|A - E|$ 的值:

$$\begin{aligned} \det(A - I) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & t \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & t \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (1 \cdot t - t \cdot t) - 1 \cdot (1 \cdot t - t \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot t - 1 \cdot 1) \\ &= (t - t^2) - 0 + (t - 1) = -t^2 + 2t - 1 = -(t - 1)^2 \end{aligned}$$

必要条件是 $\det(A - E) = 0$, 即 $t = 1$, 当 $t = 1$ 时, 矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

计算特征多项式:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (4-\lambda) \left[\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
 &= (4-\lambda) [(2-\lambda)^2 - 1] - ((2-\lambda) - 1) + (1 - (2-\lambda)) \\
 &= (4-\lambda) [(\lambda^2 - 4\lambda + 3) - (1 - \lambda) + (\lambda - 1)] \\
 &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 2\lambda - 2) = (4-\lambda)(\lambda-1)^2
 \end{aligned}$$

因此特征值为 $\lambda = 1$ (二重) 和 $\lambda = 4$, 验证了 $\lambda = 1$ 是二重特征值。接下来算出 \mathbf{T} , 对于特征值 $\lambda = 1$, 解方程组 $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 。选择两个线性无关的解:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此 λ_1 的代数重数和几何重数相等, 对于特征值 $\lambda = 4$, 解方程组 $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到方程 $x_1 = x_3, x_2 = x_3$ 。取一个特解:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $\mathbf{T} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 。且 $\det(\mathbf{T}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ 可逆, 满足:

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

结果的三个对角线上的元素不用具体计算, 因为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.

例题 5.0.7

求出能使下列矩阵 \mathbf{A} 相似于对角矩阵的正交矩阵 \mathbf{T} :

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}; (2) \mathbf{A} = A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

解 5.0.7. (1) 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, 特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 4 - 2\lambda & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 11) = 0$$

得特征值: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ (二重), $\lambda_3 = 11$, 对于 $\lambda = 2$, 解 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行化简}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系: $\alpha_1 = (-1, 2, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 2, -1)^T$, 对于 $\lambda = 11$, 解 $(\mathbf{A} - 11\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A} - 11\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

此时已经很容易解得特征向量为: $\alpha_3 = (2, 1, 2)^T$ 。对 $\lambda = 2$ 对应的特征向量进行正交化: 取 $\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, 0)^T$:

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (0, 2, -1)^T - \frac{4}{5}(-1, 2, 0)^T = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -1\right)^T$$

取 $\beta_2 = (-4, -2, 5)^T$ (乘以 5 简化) 单位化并构造正交矩阵:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(2) 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 下面证明一个引理: 如果矩阵 \mathbf{A} 的每一行元素之和都等

于同一个常数 c , 那么 c 是 \mathbf{A} 的一个特征值。设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 矩阵, 且满足:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = c \quad \text{对于所有 } i = 1, 2, \dots, n$$

考虑向量 $\mathbf{v} = (1, 1, \dots, 1)^T$ (全 1 向量)。计算矩阵乘积 \mathbf{Av} 的第 i 个分量:

$$(\mathbf{Av})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot v_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 = \sum_{j=1}^n a_{ij} = c$$

因此, 对于所有 $i = 1, 2, \dots, n$, 都有 $(\mathbf{Av})_i = c$, 这意味着: $\mathbf{Av} = c\mathbf{v}$, 根据特征值和特征向量的定义, 上式 $\mathbf{Av} = c\mathbf{v}$ 表明 c 是 \mathbf{A} 的特征值, \mathbf{v} 是对应的特征向量。

而矩阵 \mathbf{A} 的每一行元素之和均为:

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} = 4 + (-1) + (-1) + 1 = 3 \quad \text{对于所有 } i = 1, 2, 3, 4$$

因此, $\lambda = 3$ 是 \mathbf{A} 的一个特征值, 对应的特征向量为 $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)^T$ 。将 \mathbf{A} 分解为: $\mathbf{A} = 3\mathbf{E} + \mathbf{C}$, 其中 \mathbf{E} 是 4×4 单位矩阵, $\mathbf{C} = \mathbf{A} - 3\mathbf{E}$ 。计算 \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

显然, $\text{rank}(\mathbf{C}) = 1$, 即 \mathbf{C} 是秩 1 矩阵。一个非零特征值: $\lambda_C = \text{tr}(\mathbf{C}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, 三个零特征值: $0, 0, 0$, 由于 $\mathbf{A} = 3\mathbf{E} + \mathbf{C}$, 且矩阵加法保持特征向量的对应关系, 有: $\lambda_A = 3 + \lambda_C$; 因此: 当 $\lambda_C = 4$ 时, $\lambda_A = 3 + 4 = 7$, 当 $\lambda_C = 0$ 时, $\lambda_A = 3 + 0 = 3$; 由于 \mathbf{C} 有一个非零特征值和三个零特征值, \mathbf{A} 对应地有一个特征值 7 和三个特征值 3。

对于 $\lambda = 3$, 解 $(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$: 得基础解系: $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 0, 0, 1)^T$; 对于 $\lambda = 7$, 解 $(\mathbf{A} - 7\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得特征向量: $\boldsymbol{\alpha}_4 = (-1, 1, 1, -1)^T$ 对 $\lambda = 3$ 对应的特征向量进行正交化: 取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 0, 0)^T$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 = (1, 0, 1, 0)^T - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0)^T = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)^T$$

取 $\boldsymbol{\beta}_2 = (1, -1, 2, 0)^T$ (乘以 2 简化)

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_2$$

计算得 $\boldsymbol{\beta}_3 = (-1, 1, 1, 3)^T$, 构造正交矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

例题 5.0.8

试证明：设 A 为 n 阶实对称矩阵，且 $A^2 = A$ ，则存在正交矩阵 T ，使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

其中 r 为秩， E_r 为 r 阶单位矩阵。

解 5.0.8. 由于 A 是实对称矩阵，根据实对称矩阵的正交相似对角化定理，存在正交矩阵 T ，使得

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值。又已知 $A^2 = A$ ，考虑正交相似变换：

$$(T^{-1}AT)^2 = T^{-1}A^2T = T^{-1}AT \Leftrightarrow \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

因此，对于每个 i ，有 $\lambda_i^2 = \lambda_i$ ，解得 $\lambda_i = 0$ 或 $\lambda_i = 1$ 。由于 A 的秩为 r ，而实对称矩阵的秩等于其非零特征值的个数，故特征值 1 的个数为 r 。通过适当排列正交矩阵 T 的列向量（即特征向量的顺序），可以使特征值 1 位于前 r 个位置，于是

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

例题 5.0.9

设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2 = A$ ，证明若 λ 为 A 的一个特征值，则 $\lambda = 0$ 或 1 。

解 5.0.9. 设 λ 为 A 的任意一个特征值，对应的特征向量为 $\alpha \neq \mathbf{0}$ ，即

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A^2\alpha = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$$

由于 $A^2 = A$ ，有 $A^2\alpha = A\alpha = \lambda\alpha$ ，因此

$$\lambda^2\alpha = \lambda\alpha.$$

因为 $\alpha \neq \mathbf{0}$ ，所以 $\lambda^2 = \lambda$ ，即 $\lambda(\lambda - 1) = 0$ ，解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 。由于 λ 是 A 的任意特征值，故 A 的所有特征值都是 0 或 1。

例题 5.0.10

设 A 为 2×2 矩阵，若 $\text{tr}(A) = 8$ 且 $|A| = 12$ ，求 A 的特征值。

解 5.0.10. 用定义，设 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (ad - bc) - \lambda(a + d) + \lambda^2$ ，则代入数据得到 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$ ，因此 A 的特征值为 2 或 6。

例题 5.0.11

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为两个 n 阶方阵, 证明:

- (1) 若 λ 为 \mathbf{AB} 的一个非零特征值, 则它也是 \mathbf{BA} 的一个特征值;
- (2) 若 $\lambda = 0$ 为 \mathbf{AB} 的一个特征值, 则 $\lambda = 0$ 也是 \mathbf{BA} 的一个特征值

解 5.0.11. (1) 设 $\lambda \neq 0$ 为 \mathbf{AB} 的一个特征值, 则存在非零向量 α 使得 $\mathbf{AB}\alpha = \lambda\alpha$, 由于 $\lambda \neq 0$ 且 $\alpha \neq 0$, 有 $\mathbf{AB}\alpha \neq 0$ 。假设 $\mathbf{B}\alpha = 0$, 则 $\mathbf{AB}\alpha = \mathbf{A}(\mathbf{B}\alpha) = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 与 $\lambda\alpha \neq 0$ 矛盾。因此 $\mathbf{B}\alpha \neq 0$ 。将等式两边左乘 \mathbf{B} , 得

$$\mathbf{B}(\mathbf{AB}\alpha) = \mathbf{B}(\lambda\alpha) \implies \mathbf{BA}(\mathbf{B}\alpha) = \lambda(\mathbf{B}\alpha).$$

由于 $\mathbf{B}\alpha \neq 0$, 上式表明 λ 是 \mathbf{BA} 的一个特征值, 对应的特征向量为 $\mathbf{B}\alpha$ 。

(2) 若 $\lambda = 0$ 为 \mathbf{AB} 的一个特征值, 则 \mathbf{AB} 是奇异矩阵, 即 $\det(\mathbf{AB}) = 0$ 。由于 $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{BA})$, 因此 $\det(\mathbf{BA}) = 0$, 即 \mathbf{BA} 也是奇异矩阵。故 $\lambda = 0$ 是 \mathbf{BA} 的一个特征值。

例题 5.0.12

试证对于可逆矩阵 A, B , 有 $\mathbf{AB} \sim \mathbf{BA}$.

解 5.0.12. 矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 可逆, 考虑相似变换 $\mathbf{P} = \mathbf{A}$ 。由于 \mathbf{A} 可逆, \mathbf{P} 可逆, 且 $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ 。则

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{BA} = \mathbf{IBA} = \mathbf{BA}.$$

因此, \mathbf{AB} 相似于 \mathbf{BA} 。

例题 5.0.13

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为两个 n 阶方阵, 证明若存在同一个可逆矩阵 \mathbf{P} 同时对角化 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , 则有 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 。

解 5.0.13. 设矩阵 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 矩阵 \mathbf{B} 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 且存在同一个可逆矩阵 \mathbf{P} 同时对角化 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , 根据定义:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

因此

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{APP}^{-1}\mathbf{BP} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{ABP} = \text{diag}(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \dots, \lambda_n\mu_n)$$

同理

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BPP}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BAP} = \text{diag}(\mu_1\lambda_1, \mu_2\lambda_2, \dots, \mu_n\lambda_n)$$

所以 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{ABP} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BAP}$, 同时左乘 \mathbf{P} , 右乘 \mathbf{P}^{-1} , 得到 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

例题 5.0.14

设 A 是 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵, 如果 $A \neq 0$, 但 $A^3 = 0$, 试证明 A 不可对角化。

解 5.0.14. 假设 A 可对角化。由于 $A^3 = 0$, 则 A 是幂零矩阵, 其特征值均为零。这是因为若 λ 是 A 的特征值, 则 λ^3 是 A^3 的特征值, 而 $A^3 = 0$ 的特征值全为零, 故 $\lambda^3 = 0$, 即 $\lambda = 0$ 。由于 A 可对角化, 存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda,$$

其中 Λ 是对角矩阵, 其对角线元素为 A 的特征值, 即全为零。因此 $\Lambda = 0$, 于是

$$A = P0P^{-1} = 0,$$

与已知 $A \neq 0$ 矛盾。故假设不成立, A 不可对角化。

例题 5.0.15

若 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$, 证明存在 X 使得 $ABX = A$.

解 5.0.15. 对于 $AB = C$, 固定 A 的某一行, 我们发现 C 的对应的那一行的每一个元素, 都是由 B 的每一列的各个元素, 乘以 A 那一行各个元素所提供的“比例权重”, 再求和得到的, 遍历每一列操作都一样, 于是 A, B 相乘等价于对 B 进行行变换。固定 B 的某一列, 对于 C 的对应的那一列的各个元素, 都是由 A 的每一行的元素乘以 B 那一列各个元素所提供的“比例权重”, 再求和得到的, 遍历每一行操作都一样, 于是 A, B 相乘等价于对 A 进行初等列变换。

已知 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$, 这意味着矩阵 AB 的列空间与矩阵 A 的列空间相同, 即 $\text{col}(AB) = \text{col}(A)$ 。设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 其列向量为 a_1, a_2, \dots, a_n 。由于 $\text{col}(AB) = \text{col}(A)$, 对于每个列向量 a_j , 存在向量 x_j 使得

$$ABx_j = a_j.$$

构造矩阵 X 为 $p \times n$ 矩阵 (其中 p 是 B 的列数), 其第 j 列为 x_j , 即 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 。则

$$ABX = AB[x_1, x_2, \dots, x_n] = [ABx_1, ABx_2, \dots, ABx_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n] = A.$$

因此, 存在矩阵 X 使得 $ABX = A$ 。

另解: 设可逆矩阵 P, Q 使得 $A = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, 则

$$\text{rank}(AB) = \text{rank} \left(P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB \right) = \text{rank}(A) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB \right)$$

记 $QB = \begin{pmatrix} B_r \\ B_s \end{pmatrix}$, 其中 B_r 为 r 行矩阵, 则

$$\text{rank}(AB) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r \\ B_s \end{pmatrix} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} B_r \\ 0 \end{pmatrix} = \text{rank}(B_r)$$

所以 \mathbf{B}_r 行满秩，此时，构造满足要求的矩阵 \mathbf{X} 就变得非常直观：我们需要一个矩阵，当之右乘 $\mathbf{Q}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_r \\ \mathbf{B}_s \end{pmatrix}$ 时，能“筛选”出左上角的 \mathbf{E}_r ，而忽略掉其他部分。取矩阵 \mathbf{C} 使得 $\mathbf{B}_r\mathbf{C} = \mathbf{E}_r$ ，取 $\mathbf{X} = (\mathbf{C} | \mathbf{O})$ ，矩阵 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ 正是为此目的而设计的：

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{X} &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{C} | \mathbf{O}) \\ &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_r \\ \mathbf{B}_s \end{pmatrix} (\mathbf{C} | \mathbf{O}) = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & 0 \\ \mathbf{B}_s\mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{A}$

例题 5.0.16

$$\text{tr}(A^* A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

解 5.0.16.

第六章 二次型的标准形与规范形

例题 6.0.1

用配方法把下列二次型化成标准形: $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4$

解 6.0.1. 先用平方差公式代换, 让式子中出现平方项, 再根据系数配平方: 设 $2y_1 = x_1 + x_2, 2y_2 = x_1 - x_2$, 则有:

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 &= \frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4} + \frac{y_1 + y_2}{2}x_3 + y_1x_4 \\ &= \frac{y_1^2}{4} + y_1\left(\frac{x_3}{2} + x_4\right) - \frac{y_2^2}{4} + \frac{x_3y_2}{2} \\ &= \left(\frac{y_1}{2} + \frac{x_3}{2} + x_4\right)^2 - \left(\frac{x_3}{2} + x_4\right)^2 - \left(\frac{y_2}{2} - \frac{x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{2}\right)^2 \\ &= z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 \end{aligned}$$

其中 $z_1 = \frac{y_1}{2} + \frac{x_3}{2} + x_4, z_2 = \frac{x_3}{2} + x_4, z_3 = \frac{y_2}{2} - \frac{x_3}{2}, z_4 = \frac{x_3}{2}$.

例题 6.0.2

用正交变换把下列实二次型化成标准形, 并写出所作的正交变换: $2x_1x_3 + x_2^2$

解 6.0.2. 将该二次型简写成矩阵乘积的形式:

$$2x_1x_3 + x_2^2 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T$$

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

得到特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, 令 $\lambda = 1$, 则

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 \text{ 为自由变量} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 为基础解系, 显然 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$. 令 $\lambda = -1$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 \mathbf{v}_3 为基础解系, 则将 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 单位化, 写出矩阵 $\mathbf{P} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_3 \right)$, 令 $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$ 得到规范型: $-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

例题 6.0.3

求下列实二次型的正、负惯性指数: $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

解 6.0.3. 将该二次型化成标准形:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T \\ &= (x_1, x_2, x_3) \mathbf{A} (x_1, x_2, x_3)^T \\ |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda + 1 & -\lambda^2 + 4\lambda - 2 \\ 0 & -1 - \lambda & 2\lambda - 5 \\ 1 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) \end{aligned}$$

特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3 + \sqrt{2}, \lambda_3 = 3 - \sqrt{2}$ 。由于 $3 + \sqrt{2} > 0$ 和 $3 - \sqrt{2} > 0$, 正特征值个数为 2, 负特征值个数为 1。因此, 二次型的标准形可通过正交变换化为:

$$-1 \cdot y_1^2 + (3 + \sqrt{2})y_2^2 + (3 - \sqrt{2})y_3^2$$

正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1。

例题 6.0.4

判断下列实二次型是不是正定二次型, 或在何种条件下是正定二次型:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

解 6.0.4. 给定二次型:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

对应的对称矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

二次型正定的充要条件是对称矩阵 A 的所有顺序主子式大于零。

1. 第一顺序主子式: $\Delta_1 = 1 > 0$ 恒成立。

2. 第二顺序主子式: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$, 要求 $\Delta_2 > 0$, 即: $1 - \lambda^2 > 0 \Rightarrow -1 < \lambda < 1$

3. 第三顺序主子式 (矩阵行列式):

$$\begin{aligned} \Delta_3 = \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 - 4) - \lambda \cdot (5\lambda + 2) - (2\lambda + 1) \\ &= 1 - 5\lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda - 1 = -5\lambda^2 - 4\lambda \end{aligned}$$

要求 $\Delta_3 > 0$, 即:

$$-5\lambda^2 - 4\lambda > 0 \Rightarrow 5\lambda^2 + 4\lambda < 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} < \lambda < 0$$

因此, 当且仅当 $\lambda \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ 时, 该二次型为正定二次型。

例题 6.0.5

设有二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 问

(1) 当 a 取何值时, $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定?

(2) 当 a 取何值时, $f(x_1, x_2, x_3)$ 负定?

解 6.0.5. 该二次型对应的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

(1) 第一, 二阶顺序子式大于 0, 即 $\begin{cases} \Delta_1 = a > 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow a > 1$

第三阶顺序子式: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a-2)(a+1)^2 > 0 \Rightarrow a > 2$ 因此, 当 $a > 2$ 时, 二次型正定。

(2) 二次型 f 负定当且仅当 $-f$ 正定。 $-f$ 对应的矩阵为 $-\mathbf{A}$:

$$-\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ -1 & -a & 1 \\ -1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

第一顺序主子式: $\Delta'_1 = -a > 0 \Rightarrow a < 0$

第二顺序主子式: $\Delta'_2 = \begin{vmatrix} -a & -1 \\ -1 & -a \end{vmatrix} = a^2 - 1 > 0 \Rightarrow a < -1 \text{ 或 } a > 1$

第三顺序主子式:

$$\begin{aligned} \Delta'_3 &= \begin{vmatrix} -a & -1 & -1 \\ -1 & -a & 1 \\ -1 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a \cdot \begin{vmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -a \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -a(a^2 - 1) + 1(a + 1) - 1(-1 - a) = -a^3 + a + a + 1 + 1 + a \\ &= -a^3 + 3a + 2 = -(a - 2)(a + 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

综合三个条件: $a < 0, a < -1, a < 2$, 取交集, 因此, 当 $a < -1$ 时, $-\mathbf{A}$ 正定, 即原二次型负定。

例题 6.0.6

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为两个 n 阶正定矩阵, 证明: $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 也是正定矩阵。

解 6.0.6. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为两个 $n \times n$ 的正定矩阵, 显然由于定义, \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是实对称阵, 则验证定义 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, 所以 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 也是实对称阵。则任意矩阵 $\mathbf{X} \neq 0, \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T > 0, \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{X}^T > 0$, 则 $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T + \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{X}^T = \mathbf{X}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{X}^T > 0$, 即 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 也是正定矩阵。

例题 6.0.7

设 \mathbf{A} 为 n 阶正定矩阵, 证明:

(1) \mathbf{A}^T 也是正定矩阵;

(2) \mathbf{A} 的伴随矩阵 \mathbf{A}^* 也是正定矩阵。

解 6.0.7. (1) 设 \mathbf{A} 为 $n \times n$ 的正定矩阵, 则 \mathbf{A}^T 也是实对称阵, 则任意矩阵 $\mathbf{X} \neq 0$, 有 $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T > 0$, 则 $\mathbf{X}\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T = (\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T)^T > 0$, 即 \mathbf{A}^T 也是正定矩阵。

(2) 由于 \mathbf{A} 为正定矩阵, 则 $|\mathbf{A}| > 0$, 则 \mathbf{A} 可逆, 即 \mathbf{A}^{-1} 存在, 且满足 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 。又由于存在可逆矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T$, 那么 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}|(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)^{-1} = |\mathbf{A}|(\mathbf{P}^T)^{-1}\mathbf{P}^{-1} = |\mathbf{A}|(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{P}^{-1}$, 即 \mathbf{A}^{-1} 也是正定矩阵。所以其各项特征值均大于 0, 因此 \mathbf{A}^* 各项特征值也大于 0, 所以 \mathbf{A}^* 也是正定矩阵。