

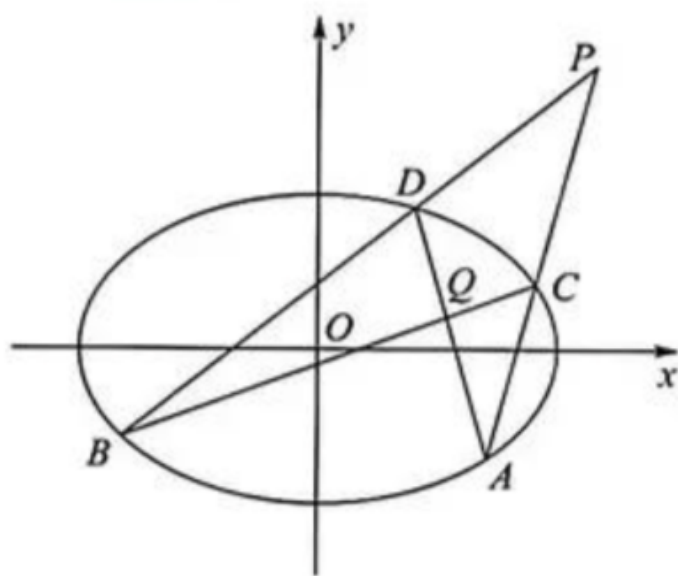
# 高中数学

## 解析几何教程

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期： 2025 年 9 月 25 日



© 2025 版权所有

# 前言

本书内容全部使用  $\text{\LaTeX}$  进行排版，作者“还在尬黑”是一位准大一学生，高中毕业于广东深圳中学，高三数学各次大考平均排名位于前 5%，高考应该也不例外。“还在尬黑”拥有知乎（同名），微信公众号（同名），小红书号（同名）等账号，头像是一个右手三叶结。以及不同名不同头像的 GitHub 账号，发表原创优质内容百余篇，且固定更新频率，堪称发文的“螺丝钉”。

“还在尬黑”对圆锥曲线的解题研究有着浓厚兴趣，并在书中将其总结成了一套完整的解析几何教程。本书适合高中解析几何解题体系未成熟的高二高三学生，以及前来自学的高一学生以及初中生，也可作为高中数学教材。笔者衷心希望本书能够帮助读者提高圆锥曲线解题速度和解题能力，并能够准确地识别班内的“大佬”是用什么东西来装逼的，当然，本书和市面上的某些书不同，不会直接甩给学生们根本用不明白也不懂从何而来的技巧大招，而是会侧重解析一种方法的产生过程，以及如何恰当的选择方法解决具体问题。

学习圆锥曲线（包括高考数学的一些其它内容）的过程中，最重要也最需要大家认真做的就是历年的高考题，本书内容涵盖了大部分恢复高考以来所有的高考解析几何压轴题，并且每一道题都经过了笔者的精挑细选，放到了合适的位置上，后续笔者会在书末尾出一个索引表，帮助只想刷高考题的同学快速使用本书。

除了经典而偏基础的高考题外，本书后面还有些部分为选学内容，难度较高，属于高考不怎么考的范畴，这部分留给同学们或解析几何爱好者们进行自我提高和兴趣拓展。当然，建议读者先打牢必学内容的基础，再进行进一步的学习。

在创作本书的过程中，笔者也得到了朋友们和热心群众的帮助，在此向他们表示感谢！

十分感谢读者朋友们的支持和赞助！祝大家健康进步，高考成功！

还在尬黑

2025 年 9 月 25 日

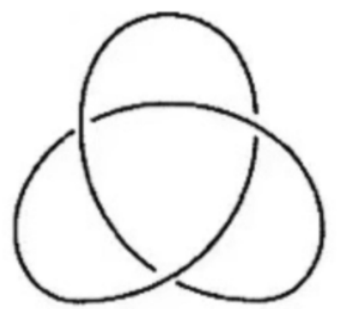


图 1: 我的头像

# 目录

第一章	先导课程	1
1.1	写在前面 . . . . .	1
1.2	轮换, 对称 . . . . .	1
第二章	导数与微分	4
2.1	导数的定义 . . . . .	4

# 第一章 先导课程

## 1.1 写在前面

解析几何是高中数学的重要学习内容，在高考中分值占比较高。

不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代性的表述，这可能是因为圆锥曲线是解析几何中的重难点。但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如3次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈3种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

首先，笔者来讲一讲怎么进行计算。这似乎是一个很简单的问题，但是谁又能保证在紧张刺激的考场环境下不会犯错误？一旦出现计算错误，检查就需要花费一定的时间，所以不如挑选合适的计算方法，从源头上减少失误。本节中，笔者会结合自己的一些实战经验，尽量告诉大家一些计算过程中减小失误，提升速度的技巧和方法，以及解析几何中计算的基本方向——整体代换。

鉴于本书的覆盖群体，笔者会尽量避免过多的公式推导和过于严谨的学术表述，而是从直观的角度出发，用一些具体的例子来说明计算的过程。希望大家能从中受益。

## 1.2 轮换，对称

在此之前，请允许我先介绍一些基本的概念，我们不妨先来看一些看起来很整齐的式子，这些式子平时很常见，大家在备考强基计划的过程中也会遇到比较多这样的式子：

### 例题 1.2.1

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$abc$$

$$a + b + c$$

$$ab + bc + ca$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

**解 1.2.1.** 相信大部分同学是通过自己的直觉来归纳的，直观的感受就是这些式子很“整齐”，而且很有规律可循。那么问题来了：“整齐”是怎么体现的？更进一步地，有没有手段验证一个代数式

是“整齐”的？至于“很有规律可循”，那么规律是什么？

这些问题循序渐进，如果理清这些问题，那么读者便掌握了学习数学时地最基本的关注点：定义，性质，判定。这些式子中的  $a, b, c$  结构权重是均等的，它们地位相同，没有“特权变量”，也没有“次序”之分。

而且，眼尖的读者可以发现，这些表达式中的项往往成组出现，覆盖所有可能的组合，比如  $a + b + c$  中全为一次项，如果  $a$  出现了，不用猜也知道  $b$  和  $c$  也出现了；再比如  $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$  中， $a^2b$  出现了，其中  $a$  被平方了，那不用猜也知道在其他的项中， $b$  和  $c$  也会被平方，而且后面一定会跟着其他没有被平方的字母。它们出现的次数相同。

事实上，由于乘法和加法的交换律和结合律，我们可以发现，对于上面任意一个式子，我们都可以挑选任意两个变量交换位置，而多项式本身保持不变。大家不妨想象一下阅兵式的场景，即使我们偷偷调换两个兵的位置，你也看不出来有什么异样，这是阅兵队伍“整齐”的体现。同样地，这个代数式也可以这样操作，来验证这个代数式是“整齐”的，“规律可循”的。这样我们便可以引出对称式的概念。

#### 定义 1.2.1: 对称式

对于一个  $n$  元多项式  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，若对于数  $1, 2, \dots, n$  的任意一个排列  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ ，都有

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则称  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为对称式。

“对称”体现在字母地位平等，没有哪个字母是特殊的。只要式子中包含某个由特定字母组成的项（例如  $a^2b$ ），那么它一定包含由所有其他字母以同样的方式组成的项（即  $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$ ）。

这样我们就认识了对称式的概念，这样当读者听到别人说“对称式”的时候，不会至于一脸懵逼，或者一边点头，假装听懂，然后用直觉去理解这个概念（这样的情况长期发展下去，是不利于学习数学的）。当然，读者也许会发现，像“ $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ ”这样的式子其实比较长，占用了较大的空间，也显得不够简洁。因此我们不妨规定以下记号：

#### 定义 1.2.2: 循环和

#### 性质 1.2.1: 对称式的性质

(1) 基本对称多项式的基础性：

那么下面我们乘胜追击，再来看一组式子：

## 例题 1.2.2

观察以下代数式, 并尝试在心里面归纳出它们的特点:

$$a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^3b + b^3c + c^3a$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

**解 1.2.2.** 和刚才的对称式不同, 如果我们这里调换某两个字母的位置, 那么结果也会发生变化。比如  $a^2b + b^2c + c^2a$  中, 如果我们把  $a$  和  $b$  调换位置, 那么结果也会发生变化, 比如说新出现了  $b^2a$  项, 这是原来所没有的。

但是读者会发现, 这个式子看上去也是有规律可循的, 比如  $a^3b + b^3c + c^3a$  中,  $a^3$  项出现了, 那不用猜也知道  $b^3$  和  $c^3$  也会在其它部分出现, 而且出现的次数相同, 但是和上文的规律不一样,  $a^3$  后面只会跟着  $b$ , 却没有  $c$ , 即没有  $a^2c$  项。

## 例题 1.2.3

将  $(a+b)(b+c)(c+a)$  进行展开, 并尽己所能地保证结果的每个部分都是由  $a, b, c$  三个元同时出现且地位相同的式子:

**解 1.2.3.** 先展开, 再重组:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (b^2 + ac + ab + bc)(a+c) \\ &= ab^2 + b^2c + a^2c + ac^2 + a^2b + abc + abc + bc^2 \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc\end{aligned}$$

最后为什么

## 定理 1.2.1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

## 第二章 导数与微分

### 2.1 导数的定义

#### 例题 2.1.1

已知  $x, y > 0$ , 且  $x^2 + 9y^2 = 12$ , 则  $\frac{x+2}{y+1} - 3x$  的最小值为\_\_\_\_\_.

解 2.1.1.

#### 例题 2.1.2

(单选) 数列  $a_n$  各项为正整数且递增,  $a_{n+2} = C_{a_{n+1}}^{a_n}$ , 则 ( )

A.  $a_n < a_{n-1} + 1$     B.  $a_1, a_2, a_3$  可能成等比数列

C.  $a_3 a_4 < a_5$     D.  $a_3, a_4, a_5$  可能成等比数列

解 2.1.2. 由于  $a_n$  递增, 则 A 显然错误; 下面考虑选项 BD:

$$a_n a_{n+2} = a_n C_{a_{n+1}}^{a_n} = a_{n+1} C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} = a_{n+1}^2 \Rightarrow a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}$$

当  $a_n = 1$  时, 代入表达式得到  $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^0 = 1 = a_n$ , 与数列递增矛盾;

当  $a_n = 2$  时, 代入表达式得到  $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^1 = a_{n+1} - 1 < a_{n+1}$ , 矛盾;

当  $a_n > 2$  时, 易得  $a_{n+1} - 1 > 2$ , 代入表达式得到

$$a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} \geq C_{a_{n+1}-1}^2 = \frac{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}{2}$$

解方程发现无整数解, 而且由于  $C_{a_{n+1}-1}^1 = a_{n+1} - 1$  是小于  $a_{n+1}$  的最大整数, 且有

$$C_{a_{n+1}-1}^1 < C_{a_{n+1}-1}^2, \quad C_{a_{n+1}-1}^2 \neq a_{n+1}$$

只可能是  $C_{a_{n+1}-1}^2 > a_{n+1}$ .

雪上加霜的是,  $C_{a_{n+1}-1}^2$  和  $C_{a_{n+1}-1}^1$  中间没有数可以等于  $C_{a_{n+1}-1}^m$ , 所以 BD 错误;

考虑 C, 易得  $a_1 \neq 1, a_2 \geq 4, a_3 \geq 6, a_4 = C_{a_3}^{a_2} > 2a_3 + 1$ , 由

$$a_5 = C_{a_4}^{a_3} > a_3 a_4 \Rightarrow a_3^2 < C_{a_4-1}^{a_3-1} < C_{2a_3}^{a_3-1}$$

转化为  $a_3^3 + a_3 < C_{2a_3}^{a_3}$  这是显然成立的, 故本题目选 C

## 例题 2.1.3

已知  $\triangle ABC$  中,  $A = 3B = 9C$ , 则  $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 2.1.3. 解得  $A = \frac{9\pi}{13}, B = \frac{3\pi}{13}, C = \frac{\pi}{13}$  考虑积化和差:

$$\begin{aligned}
 & \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \\
 &= \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B) + \cos(B+C) + \cos(B-C) + \cos(A+C) + \cos(A-C)) \\
 &= \frac{1}{2}(\cos \frac{12\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13}) \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{13}} \sin \frac{\pi}{13} (\cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{12\pi}{13}) \\
 &= \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{13}} (\sin \frac{\pi}{13} - \sin \frac{3\pi}{13} + \sin \frac{3\pi}{13} - \sin \frac{5\pi}{13} + \sin \frac{5\pi}{13} - \sin \frac{7\pi}{13} \\
 &\quad + \sin \frac{7\pi}{13} - \sin \frac{9\pi}{13} + \sin \frac{9\pi}{13} - \sin \frac{11\pi}{13} + \sin \frac{11\pi}{13} - \sin \frac{13\pi}{13}) \\
 &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$