欢迎来到本次章鱼杯. 本次杯赛设有 76 道题, 分别为单项选择题, 多项选择题, 填空题和解答题. 题量是新高考题量的 4 倍, 限时 3 小时 (包括队员商量, 分配和上传的时间). 难度比新高考略难. 试题不涉及以及不允许使用高中课本 (以部编版四本 B 类必修, 三本 B 类选择性必修) 范围以外的知识点. 本次杯赛是小组赛, 每组不超过 4 个人. 本次允许使用离线设备和资料, 包括计算器, 编程软件以及纸质资料. 不允许上网讨论以及与其他队伍和不参赛的人员交流. 您将和您的队友自行讨论题目的分配, 最后每个队伍综合所有队员的解答并且请只上交一份答案. 最后, 选择题请注意 A、B、C、D 选项的位置,A、B 选项在同一列,C、D 选项在同一列.

队伍名: **参考答案**

队员: **参**, **考**, **答**, **案**

部分选择题和填空题有解析.

1 选择题

本题共 32 **小题**, **每小题** 5 **分**, **共** 160 **分**. **在每小题给出的四个选项中**, **有且仅有一个是符合题目要求的**.

1. 设 $\mathbb{N}$ 是自然数的集合 (包括 0),P 是质数的集合,Q 是合数的集合. 设 $A=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$,$B=\{a+b|a,b\in Q\}$. 那么 $\operatorname{card}((\complement_{\mathbb{N}}B)\cap A)$ 是

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　**D. 4**

2. 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$, 设 A 的一些子集构成的集合 $\mathcal{F}$ 满足对于任何 $B\in\mathcal{F}$, 如果 $C\subset B$, 那么 $C\in\mathcal{F}$. 这样的 $\mathcal{F}$ 的个数最接近于以下哪个数?

   A. 50　　B. 99　　**C. 150**　　D. 199

   Solution: 确切个数是 168.

3. 设 a 满足方程组 $\begin{cases}3x^2-5xy-2y^2-4x+y+1=0\\ xy+ay-x^2+a^2-1=0\end{cases}$ 的解集的元素个数为 3, 那么 a 的个数是

   A. 0　　B. 2　　**C. 4**　　D. 6

   Solution: 注意到第一个方程可以分解:$(x-2y-1)(3x+y-1)=0$, 将 y 带入进去, 于是只用判定第二个方程和两条直线的交点个数即可. 注意交在交点上的情况.

4. 设 f 是一个单调递增的 $[0,100]\to[0,100]$ 的函数, 满足 $f(x)\geq x$. 如果 f 也要满足以下的性质:(1) 如果 $f(x)=60$, 那么 $35\leq x\leq 40$.(2)$f(x)-x<30$.(3) 如果 $x>80$, 则 $f(x)>90$. 那么以下四个函数 f 中满足以上条件的是

A. $f(x)=10\sqrt{x}$

C. $f(x)=\frac{1}{100}x(200-x)$

B. $f(x)=\min(\frac{5}{3}x,100)$

D. $f(x)=100\sin(\frac{\pi x}{200})$

5. 已知**不存在**同时满足以下四个条件的 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$. 在以下四个条件中, 有且仅有一个条件是去掉这个条件以后仍然**不存在**同时满足其他三个条件的 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$. 那么这个条件是

A. $f(x)$ 是 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的单射和满射

C. $f(x)\geq -x$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立

B. $f(x)$ 在 $1<x<2$ 的时单调递增

D. $f(x)$ 是奇函数

6. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的值恒大于 1 的偶函数,$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的值域是 $(-1,1)$ 上的奇函数.$f(x),g(x)$ 都**不是**常数函数. 那么以下四个函数既**不是**奇函数也**不是**偶函数的是

A. $\frac{(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2}{(f(x)+g(x))^2+(f(x)-g(x))^2}$

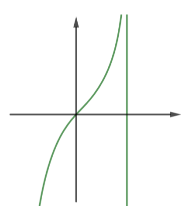
C. $\frac{1+e^{f(x)\sin(x)+g(x)\cos(x)}}{e^{f(x)\sin(x)}+e^{g(x)\cos(x)}}$

B. $f(\ln(\frac{1+g(x)}{1-g(x)}))$

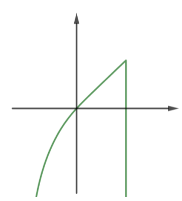
D. $\frac{\sqrt{|g(x)|}-\sqrt{f(x)}}{g(x)-f(x)}$

7. 设函数 $f(x)=\log_3(1-x)+x+x^3+x^9+\cdots+x^{3^{2024}}$, 那么 $f(x)$ 的图像大致是 (y 轴可能有拉伸)

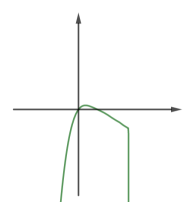
A.



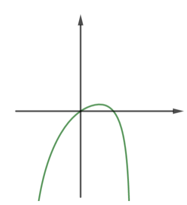
B.



C.



D.



8. 设 2023 次多项式函数 $P(x)$ 满足对于所有 $x=0,1,\ldots,2023$, 都有 $P(x)=1^x+2^x+\cdots+2023^x$. 那么 $P(2024)$ 除以 5 的余数是

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Solution: 设 $P_{2023}(x)=P(x)$,$P_{n-1}(x)=P_n(x)-P_n(x-1)$, 那么由归纳法知道 P_n 是 n 次多项式. 然后 $P_{-1}(x)$ 是等于 0. 又我们知道 $P_{-1}(2024)=\sum_{i=0}^{2024}(-1)^iC_{2024}^iP(i)$, 于是我们就有 $P(2024)=\sum_{i=0}^{2023}(-1)^{i-1}C_{2024}^iP(i)=\sum_{i=0}^{2023}(-1)^{i-1}C_{2024}^i\sum_{j=1}^{2023}j^i=\sum_{j=1}^{2023}\sum_{i=0}^{2023}(-1)^{i-1}C_{2024}^ij^i$, 然后我们知道 $\sum_{i=0}^{2024}(-1)^iC_{2024}^ij^i=(j-1)^{2024}$, 故我们知道,$\sum_{j=1}^{2023}\sum_{i=0}^{2023}(-1)^{i-1}C_{2024}^ij^i=\sum_{j=1}^{2023}j^{2024}-(j-1)^{2024}=2023^{2024}$, 于是除以 5 的余数是 1.

9. 同时投出两颗相同的均匀的六面骰子, 骰子的六个面均分别为 $1,2,3,4,5,6$, 以下四个选项中两个事件**不是**独立的是

A. 第二个骰子上的数字是 4；两个骰子的数字和至少 10.

B. 两个骰子的数字至少有一个除以 3 余 2；两个骰子的数字和是 $3,4,5$ 之一.

C. 第一个骰子上的数字是偶数；两个骰子上的数字相除 (较大者除以较小者) 是整数.

D. 两个骰子数字之积至多三个因数；两个骰子上的数的奇偶性相同.

10. 设 $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$ 是平面上的非零向量, 满足 $|\overrightarrow{\mathbf{a}}| = 2|\overrightarrow{\mathbf{b}}|$. 下面四个结论无论 $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}$ 取何值都**无法**成立的是:

A. $(\overrightarrow{\mathbf{a}} + 4\overrightarrow{\mathbf{b}}) \perp (\overrightarrow{\mathbf{a}} - 3\overrightarrow{\mathbf{b}})$

B. $|\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}| + 2|\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}}| > 7|\overrightarrow{\mathbf{b}}|$

C. $2\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = |\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}}|$

D. $(|\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2\overrightarrow{\mathbf{b}}| - 3|\overrightarrow{\mathbf{b}}|)(\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}) < 0$

11. 设三角形 ABC 的外接圆圆心为 O, 其中 $A(1,0), B(-1,0)$, 满足 $(\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} + \overrightarrow{\mathbf{OC}}) \cdot (\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}}) = 0$, 并且 $\overrightarrow{\mathbf{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{BC}} \neq 0$. 那么所有 C 满足的方程是

A. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$

B. $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} = 1$

C. $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$

D. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

12. 有一个圆形的钟, 中心到 12 点连线的方向垂直于地面. 钟的分针和比时针长. 设中心是 O, 分针和时针是向量, 分针的端点是 A, 时针的端点是 B. 那么在一天 24 小时的区间 (00:00 到次日 00:00) 中,$\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}}$ 平行于地面的次数是

A. 22 B. 24 C. 44 **D.** 48

13. 以下四个条件, 哪一个不能确定一个唯一的凸四边形 $ABCD$

A. $AB = 4, BC = 5, CD = 6, DA = 7, \angle B = 90°$

B. $AB = 4, BC = 5, CD = 9, \angle B = 130°, \angle D = 60°$

C. $AB = 5, BC = 6, CD = 7, \angle A = 80°, \angle D = 70°$

D. $AB = 3, CD = 7, \angle B = 70°, \angle C = 80°, \angle D = 90°$

14. 设 $z \neq 4 + 4\mathrm{i}$ 以及 $z \neq 0$. 同时满足 $\frac{z-2\mathrm{i}}{z-4-4\mathrm{i}}$ 和 $\frac{z-3-\mathrm{i}}{z}$ 都是纯虚数的复数 z 的个数是

A. 0 **B. 1** C. 2 D. 无穷多

Solution: 注意坑:$(3,1)$ 在 $(0,2)$ 和 $(4,4)$ 为直径的圆上.

15. 设 t 是实数, 满足 $|z|^2 - 2 = t(z^2 + \bar{z}^2)$ 的复数 z 在复平面上构成一个图像. 当 t 连续不断地从 0 增大到 5 的时候, 以下对于图像的变化描述正确的是

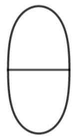
A. 圆-焦点在实轴的椭圆-两条平行直线-焦点在虚轴的双曲线

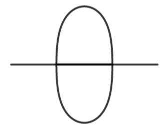
B. 圆-焦点在实轴的椭圆-两条平行直线-焦点在实轴的双曲线

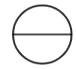
C. 圆-焦点在虚轴的椭圆-两条平行直线-焦点在实轴的双曲线

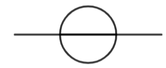
D. 圆-焦点在虚轴的椭圆-两条平行直线-焦点在虚轴的双曲线

16. 设 Z 是复数 z 的集合, 满足存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $z^2 + \sin(t)z + \cos(t) = 0$. 那么 Z 在复平面的图像大致是

A. 

B. 

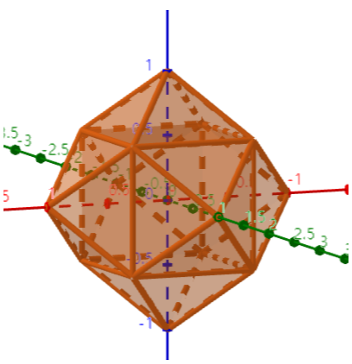
C. 

D. 

> **Solution:** 如果是实数,$t=\pi$ 的时候有 ± 1,$t=0$ 有 $\pm \mathrm{i}$, 如果是虚数, 那么因为 $|\sin(t)|\le 1$ 于是 $|\Re(z)|\le 1/2$, 于是是 B.

17. 设某个多面体在 xOy, yOz, zOx 平面上面的投影都是对角线和坐标轴平行的边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形. 那么这个多面体的体积的最大可能值是

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　**C. 2**　　D. $2\sqrt{2}$

> **Solution:** 我们把重心平移到原点。这个立体比正八面体多出一块
>
> 
>
> 其关于坐标平面对称, 其在 $x,y,z\ge 0$ 的部分是 $(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)$ 为底,$(0,0,0)$ 为第四个顶点的三棱锥和 $(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)$ 为底,$(1/2,1/2,1/2)$ 为第四个顶点的三棱锥的并.

18. 以下四个立体, 表面积 (单位为平方厘米) 和体积 (单位为立方厘米) 从数值上相同. 那么其中体积第二大的是

A. 长宽高之比为 $1:1:4$ 的长方体

B. 正四面体

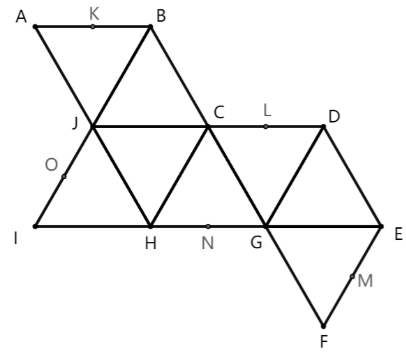
C. 底面半径和高相等的直圆锥体

D. 高是底面半径的 10 倍的直圆柱体

> **Solution:** 四个数分别大约是 $365, 374, 398, 335$

19. 以下是一个正八面体的展开图, 展开以后是一个多边形 $ABCDEFGIJ$. 设 AB, CD, EF, GH, IJ 的中点分别为 K, L, M, N, O.

现在将其折叠成正八面体, 点和线段的位置会和上图中不同, 而且一部分点和线段会重合, 例如 A 和 I 重合,O 和 AJ 的中点会重合. 在折叠后, 以下四组线段**不垂直**的是



A. BM 和 CK　　B. EL 和 GJ　　C. FJ 和 LO　　**D. JL 和 KN**

20. 以下四个圆锥曲线, 焦点到准线的距离和另外三个**不同**的是

    A. 设 $A(-\sqrt{3},-1)$ 和 $B(\sqrt{3},1)$,CA 的斜率和 CB 的斜率乘积为 1 的点 C 构成的曲线

    B. $f''(x)$ 恒等于 -1 的二次函数 $f(x)$ 的图像

    C. 设 D 和 E 是距离为 $\frac{2}{3}$ 的两点, 所有满足 $DF+EF=\frac{4}{3}$ 的点 F 构成的曲线.

    D. 将单位圆的点横坐标不变, 纵坐标变成原来的两倍所得的曲线.

21. 设一条直线上四个点 A,B,C,D, 两两不重合, 假设六个线段比 $a=\frac{|AB|}{|CD|}$,$b=\frac{|AC|}{|BD|}$,$c=\frac{|AD|}{|BC|}$,$d=\frac{|BC|}{|AD|}$,$e=\frac{|BD|}{|AC|}$,$f=\frac{|CD|}{|AB|}$ 两两不相等. 那么这六个数可能的排序的总数的个数是

    A. 12　　**B. 24**　　C. 36　　D. 48

Solution: 容易知道对于任何一种排序, 排列四个顶点能得到 24 中排序. 不妨通过排列四个顶点得到 a 最大, 此时因为 $af=be=cd=1$ 于是 f 排最后, 然后 b 第二, 同理 e 排倒数第二, 然后 $a,b>1$ 可以推出 $c>1$, 于是定下来前两个之后排列唯一确定 (其他情况同理). 前两个的组合一共 24 种.

22. 对每一个数 $t=0,1,\ldots,n-1$, 设 $P(n,t)$ 是 $a\cdot b-t$ 被 n 整除的 (a,b) 的个数, 其中 $1\le a\le n,1\le b\le n$. 记 $M(n)$ 是 $P(n,0),P(n,1),\ldots,P(n,n-1)$ 的最大者,$m(n)$ 是 $P(n,0),P(n,1),\ldots,P(n,n-1)$ 的最小者. 设 $f(n)=\frac{M(n)}{m(n)}$. 那么以下四个可能的 n 值中,$f(n)$ 第二大的是

    A. 420　　**B. 900**　　C. 100000　　D. 2^{40}

Solution: $P(n,0)$ 是最大的,$P(n,1)$ 是最小的, 设 $\phi(n)$ 是 $1,2,\ldots,n$ 中和 n 互质的数的个数. 于是 $P(n,1)=\phi(n),P(n,0)=\sum_{d|n}d\phi(n/d)$. 四个选项分别是 $48.75,45.5,43.75,42$.

23. 我们设一组数 $b_1,\dots,b_n$ 的种类是 $(a_1,a_2,\dots,a_r)$, 其中 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_r$. 对于所有 $k>0$, 如果有 t 个数恰好在 $b_1,\dots,b_n$ 恰好出现 k 次, 那么 $(a_1,a_2,\dots,a_r)$ 就有 t 个 k. 例如,3, 4, 6, 6, 2, 6, 4 的种类是 $(1,1,2,3)$, 因为 2, 3 两个数各有一个,4 这一个数有两个,6 这一个数有三个, 于是种类就有 2 个 1,1 个 2,1 个 3. 我们设对于 n 有以下论断:

均匀地, 独立地从 $1,2,\dots,n$ 中抽样, 一共抽 $M=\frac{n(n+1)}{2}$ 次, 得到数据 $a_1,a_2,\dots,a_M$. 在所有可能的种类中, 这组数的种类是 $(1,2,\dots,n)$ 的概率最大.

满足以上论断的最大的 n 的值是

A. 4 **B. 5** C. 6 D. 7

24. 某公司有甲, 乙, 丙三人. 这三个人并不天天到公司. 三个人到公司的概率均为 $\frac{2}{3}$, 给定这三个人的其中任何一个人, 另外任何一个人到公司的条件概率均为 $\frac{3}{4}$. 那么如果给定其中两个人都到了公司, 第三个人也到了公司的条件概率的取值范围是

A. $[\frac{2}{3},1]$ B. $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ C. $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ D. $[\frac{1}{2},1]$

25. 两个离散随机变量 X,Y 关于离散随机变量 Z 条件独立, 如果给定任何 X,Y,Z 的取值 x,y,z, 都满足对于 $P(X=x|Z=z)=P(X=x|Y=y\cap Z=z)$. 设 W,X,Y,Z 都是离散型随机变量. 两个个离散型随机变量 A,B 的联合分布是二元数对 (a,b) 上的分布, 其概率是 $P(A=a\cap B=b)$. 那么下面说法正确的是

A. 如果 X 和 (Y,Z) 的联合分布独立, 那么 X 和 Y 关于 Z 条件独立.

B. 如果 X 和 Y 关于 Z 条件独立,X 和 Z 关于 Y 条件独立, 那么 X 和 (Y,Z) 的联合分布条件独立.

C. 如果 X 和 Y 关于 Z 条件独立,X 和 Y 关于 W 条件独立, 那么 X 和 Y 关于 (Z,W) 的联合分布条件独立.

D. 如果 X 和 Y 独立,Y 和 Z 独立,Z 和 X 独立, 那么 X 和 Y 关于 Z 条件独立.

Solution: B 选项的反例是:(X,Y,Z) 是 $(1,1,1),(0,0,0)$ 各一半概率.C 选项的反例是 $(X,Y,Z,W)\in\{0,1\}^4$ 其中 $X+Y+Z+W$ 是偶数的八种情况均匀分布.D 选项的反例是 $(X,Y,Z)\in\{0,1\}^3$ 其中 $X+Y+Z$ 是偶数的四种情况均匀分布.

26. 假设硬币是均匀的, 六面骰子的六个面的点数是 $1,2,3,4,5,6$ 且是均匀的, 人的生日是一年 365 天均匀分布的 (不考虑闰年), 以下四个概率中第三大的是

A. 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 落在 $(\mu-\sigma,\mu+2\sigma)$ 的概率

B. 任意选 12 个人, 他们的生日都不一样的概率

C. 独立地投硬币 7 次, 至少投出两次正面的条件下, 投出至少三次正面的条件概率

D. 独立地投骰子 3 次, 总和落在闭区间 $[7,14]$ 的概率

Solution: 四个数分别大约是 $0.819, 0.832, 0.825, 0.815$.

27. 设某鱼塘有 100 条鱼, 其中 10 条是有花纹的, 另外 90 只是没有花纹的. 一渔户打算估计鱼塘里面鱼的花纹的条数大小. 一种方式是有放回地抓取 10 次, 每次一只, 抓到有花纹的鱼的次数是 X_1. 一种方式是直接抓取 10 只, 抓到有花纹的鱼的条数是 X_2. 记 V_1, V_2 为 X_1, X_2 的方差. 那么 $\frac{V_2}{V_1}$ 的值是

A. $\frac{10}{9}$ B. $\frac{11}{10}$ C. $\frac{9}{10}$ **D.** $\frac{10}{11}$

28. 上表是某高中学生身体机能测试的数据.

得分	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50
人数	797	546	367	246	158	99	58	36	18	10	5

现在使用不同的函数去拟合这组数据: 假设人数 y 是身体机能数值 x 的函数, 我们有如下四个一元线性回归备选方案:$\frac{y}{x-45} = Ax + B, y = A\ln(105 - x) + B, \ln y = Ax + B, \ln y = A\ln x + B$. 现在对四组数据使用最小二乘法计算 A, B, 然后再带入回模型去计算 y, 得到估计 $\hat{y}(x)$. 那么下面四个函数中平均平方误差 $\frac{1}{11}\sum_{x=0}^{10}(y(50+5x) - \hat{y}(50+5x))^2$ 最小的一个模型是

A. $\frac{y}{x-45} = Ax + B$ C. $\ln y = Ax + B$

B. $y = A\ln(105 - x) + B$ **D.** $\ln y = A\ln x + B$

29. 等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 都不是常数列. 那么满足 $a_k = b_k$ 的 k 的个数的最大可能值是

A. 2 **B.** 3 C. 4 D. 5

Solution: 三项的话考虑公差为 -2, 然后考虑一条直线和指数函数和其相反数两个图像一共只有一共至多三个交点。

30. 有甲, 乙二人玩一个取火柴棍的游戏. 一开始有 n 根火柴棍, 每次每个人都可以取 1,4,10 根火柴棍, 取得最后一根火柴棍的玩家胜利. 甲先手. 那么 n 为以下何值时乙有必胜策略?

A. 2024 B. 2025 **C.** 2026 D. 2027

Solution: 设 $A_n = 0$ 表示 B 有必胜策略,$A_n = 1$ 表示 A 有必胜策略.$A_0 = 0, A_{<0} = 1$, 然后 $A_k = 1 - A_{k-1}A_{k-4}A_{k-10}$. 我们知道 A 在第 11 项以后是一个周期数列, 周期是 11. 而 A_{11} 到 A_{14} 是 $1, 1, 0, 1$, 故选 C

31. 设 $f(x)$ 是一个函数, 满足对于所有 x, y, z 都有 $(x-y)f(z)+(y-z)f(x)+(z-x)f(y)+(x-y)(y-z)(z-x)=0$. 设 $f'(x)$ 是 f 的导数. 那么以下说法**错误**的是

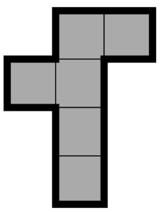
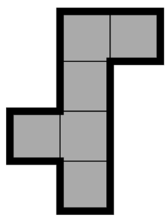
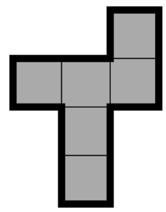
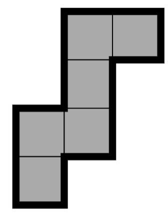
A. $f'(x)$ 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 上的一个单调递增函数

B. 如果 $f(x)$ 满足条件, 那么对于所有 $s, t, g(x) = s + f(x+t)$ 也满足条件.

C. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 有且仅有一个 f 满足 $f(0) = a$ 和 $f(1) = b$

D. 对于 $x > 0$, 有 $\frac{f(x)}{x}$ 是个单调递增的函数.

32. 现在需要从 1×1 的正方形纸片里面裁出来一个长方形的展开图, 其中边均平行于正方形的边. 现在从以下四个正方体的展开图中挑出一种, 通过调整边的长度得到一个长方体的展开图, 将其完整地画在 1×1 的正方形纸片上, 裁下来, 折成一个长方体. 这个长方体的展开图的每一条边也必须和纸片的边平行. 那么以下哪个正方体展开图能设计出来最大的可能的体积的长方体?

A.  **B.**  C.  D. 

Solution: 四种分别是 $1/32, 1/27, 1/54, 1/54$.

2 多项选择题

本题共 12 **小题, 每小题** 6 **分, 共** 72 **分. 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项是正确的. 全部选对得** 6 **分, 部分选对得部分分, 有选错的得** 0 **分.**

33. 设 f 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的一个既单又满的映射, 也就是平面上的点到平面上的点的映射. 其满足: 当且仅当 A, B, C 三点共线,$f(A), f(B), f(C)$ 三点共线. 那么以下说法正确的有

A. 任何一个圆的像都是圆.

B. 任何两个面积相等的三角形的像都是两个面积相等的三角形.

C. 任何一个抛物线的像都是抛物线.

D. 任何一个半平面 (包含半平面的边界直线) 的像都是半平面.

34. 设 $f(x) = \sin(\omega x)$ 是个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 其中 $\omega > 0$. 以下说法正确的有

A. $(x-1)f(x)$ 的图像关于某个点中心对称, 当且仅当 $\omega = (k - \frac{1}{2})\pi$, 其中 k 是正整数.

B. $(x-1)^2 f(x)$ 的图像关于一条垂直于 x 轴的直线轴对称, 当且仅当 $\omega = (k - \frac{1}{2})\pi$, 其中 k 是正整数.

C. $\cos(x-1)f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有最大值, 当且仅当 $\omega = (2k + \frac{1}{2})\pi$, 其中 k 是非负整数.

D. 如果 $(2\cos(x)+1)f(x)$ 是周期函数, 那么他最小正周期是 2π 的整数倍.

35. 对于三维空间中的点, 直线和平面的关系, 下面说法正确的有

A. 对于一条直线和两个点, 过两个点至多只有一个平面与已知直线平行.

B. 对于两条异面直线, 过一个点至多只有一个平面与这两条直线均平行.

C. 对于三条两两不平行的直线, 过一个点至多只有一个平面与三条直线的夹角相等.

D. 对于三角形和第四个点, 过第四个点有且仅有一条直线与三角形三边均垂直.

36. 三棱锥 $ABCD$ 四个面都是直角三角形. 考虑四个直角三角形的四个直角的顶点, 以下情况**不能发生**的有

A. A **是三个直角的顶点,**B **是一个直角的顶点**

B. A 是两个直角的顶点,B 是两个直角的顶点

C. A **是两个直角的顶点,**B **和** C **各是一个直角的顶点**

D. A,B,C,D **各是一个直角的顶点**

37. 有一系列椭圆 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$, 其中 $a,b>0$. 在 a,b 满足一定关系的时候, 这一系列椭圆和某一些曲线相切. 以下说法正确的有

A. 如果 $ab>0$ **是一个定值, 那么这一个椭圆和一条固定的双曲线相切.**

B. 如果 $\frac{b}{a(1-a)}>0$ **是一个定值而且** $\frac{1}{2}<a<1$**, 那么这一个椭圆和一条固定的抛物线相切.**

C. $a+b+\frac{b}{a}=t>0$ **是一个定值, 而且** $\sqrt{t+1}-1<a<t$**, 那么这一个椭圆和一条固定的双曲线相切.**

D. 如果 (a,b) 在同一条圆锥曲线上并且 b 随着 a 增大而减小, 那么这一个椭圆和一条固定的圆锥曲线相切.

Solution: D 的反例如果 $a^2+b^2=1$, 这个椭圆和 $x^{4/3}+y^{4/3}=1$ 相切.

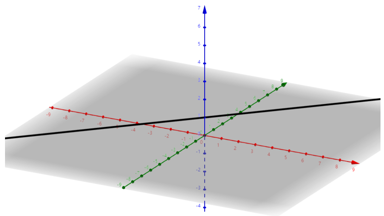
38. 广州塔是一个知名景点, 虽然从正面看起来是中间有个细细的小蛮腰, 但是他的外轮廓是一根根直的钢梁绕轴旋转得到的, 可谓曲中有直. 现在一个人想重现这种奇观. 如 (a) 图所示, 该人将 xOy 平面上的直线 $y=kx$ 整条往 z 轴正方向平移 t 个单位, 其中 $k>0,t>0$, 得到直线 l. 然后, 如 (b) 图, 将这条直线绕 y 轴旋转. 最后, 如 (c) 图, 观察这些直线在 xOy 平面的交点, 发现这些交点构成一个双曲线.

设这个双曲线的方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 以下说法正确的有

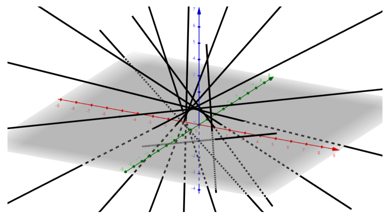
A. k **增大的时候, 双曲线的离心率增大, 而双曲线的离心率和** t **无关.**

B. 如果直线 l **绕** y **轴旋转到直线** m **与** xOy **平面交于** A **点, 那么双曲线在** A **点的切线是** m **在** xOy **平面的投影.**

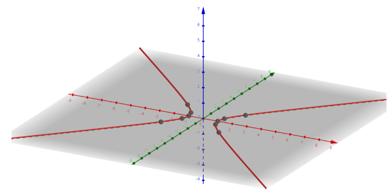
C. 如果在 (b) 图中直线 l 绕的是 x 轴旋转而不是绕 y 轴旋转, 那么双曲线的方程是 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.



(a) 图



(b) 图



(c) 图

D. 当直线 l 绕 y 轴旋转 α 角度，其中 $\tan\alpha = \frac{1}{k}$ 时，其与 xOy 平面交点的 x 轴的坐标等于双曲线其中一个焦点的 x 轴的坐标.

> **Solution:** C 的方程是 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^4/b^2} = 1$

39. 对于一个正整数 $n \geq 2$, 每次操作我们可以选择 “加一之后除以 2” , “除以 2” , “减一以后除以 2” 三个中的一个, 使得操作之后的数也是正整数. 设 $2^t \leq n < 2^{t+1}$, 设 a_n 是利用 t 步将 n 操作到 1 的方法数,b_n 是利用 t 步将 n 操作到 2 的方法数. 例如, 将 5 操作 2 步, 可以得到 $5 \to 3 \to 2$,$5 \to 2 \to 1$,$5 \to 3 \to 1$ 三种可能, 于是 $a_5 = 2, b_5 = 1$. 对正整数 k, 设 0 和 k 的最大公约数是 k. 那么以下说法正确的有

    A. 对于所有正整数 $n \geq 2$,a_n 和 b_n 的最大公约数是 1

    B. 对于所有正整数 n, 如果 $2^t \leq n < 2^{t+1}$, 那么 $a_n + b_n \geq t + 1$.

    C. 对于所有正整数 t,$a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^t} = \frac{3^t - 1 + 2t}{4}$

    D. 对于所有正整数 n,$a_n + b_n \leq n$.

> **Solution:** 对于偶数 n,$a_n = a_{n/2}, b_n = b_{n/2}$, 然后奇数 $n = 2k+1$, 如果 k 不是 2 的幂减一,$a_n = a_k + a_{k+1}, b_n = b_k + b_{k+1}$. 如果是, 那么就是 $a_n = a_k, b_n = b_k + 1$.A 由归纳法证明 $akb_k + 1 - a_(k+1)b_k = 1$(除了 k 是 2 的幂减一) 就得到了.B 对于偶数不对.C 注意到对所有 $2^r < t < 2^{r+1}$,$a_{3\times 2^r - t} = b_t$. 于是根据递推可得.D 选项由归纳法可得.

40. KL 散度是统计和机器学习中常用的统计量. 对于两个离散在 $1, 2, \ldots, n$ 上分布的随机变量 X, Y, 假设对于 $t = 1, \ldots, n$, 均有 $P(X = t) > 0, P(Y = t) > 0$, 那么我们定义 $D_{\mathrm{KL}}(X||Y) = \sum_{t=1}^{n} P(X = t) \ln \frac{P(X=t)}{P(Y=t)}$. 那么对于在 $1, \ldots, n$ 上分布的随机变量 X, Y, Z, 并且假设 $t = 1, \ldots, n$, 均有 $P(X = t) > 0, P(Y = t) > 0, P(Z = t) > 0$, 以下四个结论**错误**的有

    A. $D_{\mathrm{KL}}(X||Y) \geq 0$ 恒成立.

    B. $D_{\mathrm{KL}}(X||Y) = D_{\mathrm{KL}}(Y||X)$ 恒成立.

    C. $D_{\mathrm{KL}}(X||Y) + D_{\mathrm{KL}}(Y||Z) \geq D_{\mathrm{KL}}(X||Z)$ 恒成立.

    D. $D_{\mathrm{KL}}(X||Y) \leq \sum_{t=1}^{n} \frac{(P(X=t) - P(Y=t))^2}{P(Y=t)}$ 恒成立.

金属	黄金	铂金	铜	铅	铁
x: 孙子算经中的密度 (单位: 两/方寸)	(1 斤/1 两)=10	14	7.5	9.5	6
y: 现代公制密度 (单位:g/cm^3)	19.32	21.45	8.9	11.34	7.84

41. 孙子算经卷上第五条曰: 黄金方寸重一斤. 白金方寸重一十四两. 玉方寸重一十二两. 铜方寸重七两半. 铅方寸重九两半. 铁方寸重六两. 石方寸重三两. 如今这条所提到的各种金属的密度如下:

某研究者根据上述的五个数据做线性回归 $y=\hat{b}x+\hat{a}$, 其中 y 是现代公制密度,x 是孙子算经中的密度. 利用现在的五个数据, 其得到了 $\hat{a},\hat{b}$ 的值. 最后得到 $\hat{a}$ 约等于 -3.6, 而按照常理, 这个值应该接近 0. 这位研究者的古代文学素养不足, 遂犯了两个错误: 其一是该研究者根据现在的计量单位, 认为一斤等于 10 两, 而古时候是 16 两. 其二是该研究者错误地认为古时候的“白金”和现在所指的“白金”(和“铂金”) 是一个物质. 为了纠正这个错误, 现在有以下两个修正策略:(1) 将黄金在孙子算经中的密度改成 16,(2) 将白金 (铂金) 的数据点去掉. 那么修正以后会发生的是

A. 如果只修正 (2), 那么 $\hat{b}$ 会减小.

B. 修正 (1) 和 (2) 计算得出的 $\hat{b}$ 比只修正 (1) 得出的 $\hat{b}$ 要小.

C. 如果只修正 (2), 其线性相关系数会增大.

D. 如果修正了 (1)(2), 其线性相关系数会至少是 0.99.

42. 定义一个数列 $\{a_n\}$ 是“等差等比”数列, 如果 a_n 的通项公式满足存在 a,d 和 $q\neq 0$ 使得 $a_n=(a+dn)q^n$. 当 $q=1$ 时, 这个数列是等差数列, 当 $d=0$ 时, 这个数列是等比数列. 那么以下说法正确的是

A. 一个等比数列的前 n 项和 S_n 是一个等差等比数列.

B. 等差等比数列相邻两项的差 a_n-a_{n-1} 是一个等差等比数列.

C. 如果数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是等差等比数列, 那么他们的乘积 $\{a_nb_n\}$ 是等差等比数列当且仅当 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中其中一个是等比数列.

D. 等差等比数列满足一个二阶线性递推关系: 存在 c_1,c_2, 对于 $n\geq 3$ 满足 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$.

43. 设 a,b,c 是非零的常数. 以下四个函数 $f(x)$ 中, 存在常数 u,v 满足 $f''(x)+uf'(x)+vf(x)=0$ 的有

A. $f(x)=e^{ax+b}+c$

B. $f(x)=ax^2+bx+c$

C. $f(x)=a\cdot\sin(bx+c)$

D. $f(x)=a\cdot\ln(bx+c)$

44. 设函数 f 和 g 是 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 上的函数, 并且 f 和 g 三阶导数都有定义. 那么以下说法正确的是

A. 如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取到极值, 那么 $f(x)^2$ 也在 $x=x_0$ 处取到极值.

B. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $x=x_0$ 处取到极值, 那么 $f(x)+g(x)$ 也在 $x=x_0$ 处取到极值.

C. 如果对于所有实数 $x<y$ 均有 $f(x)+f(y)>2f(\frac{x+y}{2})$, 那么 $f(x)$ 有且仅有一个极值点.

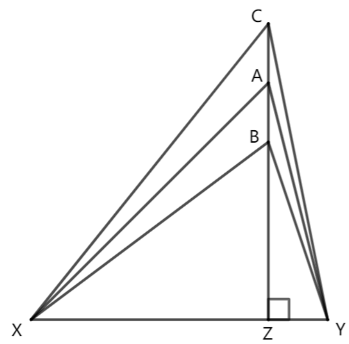
D. 如果 $f''(x)>0$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 成立且 $f'(x_0)=0$, 那么对于 $h>0$,$f(x)=f(x_0)+h$ 恰好有两个根.

3 填空题

本题共 12 **小题, 每小题** 5 **分, 共** 60 **分**.

45. 多项式 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^{2024})$ 展开后 $x^{2049290}$ 的系数是____**10**____.

46. 如下图 (图为示意图, 比例可能不准确), 一个人想测量东西向的河流 XY 的宽度. 他测得 A 与 XY 的夹角 $\angle XAY = 60°$. 他从 A 往南走了 1 米之后, 到达了 B 点, 测得 B 与 XY 的夹角 $\angle XBY = 60.59°$. 他从 A 往北走了 1 米之后, 到达了 C 点, 测得 C 与 XY 的夹角 $\angle XCY = 59.42°$.BC 和 XY 垂直. 那么 A 到 XY 的距离 AZ 是____**64**____米 (四舍五入到最近的整数).



Solution: 设 $XZ=x, YZ=y, AZ=z, a=\tan 60°, b=\tan 60.59°, c=\tan 59.42°$, 于是我们可以列方程得到 $\begin{cases} \frac{(x+y)z}{xy-z^2}=a \\ \frac{(x+y)(z-1)}{xy-(z-1)^2}=b \\ \frac{(x+y)(z+1)}{xy-(z+1)^2}=c \end{cases}$. 将 $u=xy-z^2$ 和 $v=z+y$ 看做两个元, 将其视为两个未知数三个方程的一次方程组, 可以得到 $\begin{cases} zu=av \\ (z-1)u=bv+b(2z-1) \\ (z+1)u=cv+c(-2z-1) \end{cases}$ 利用前两个方程解出来带入第三个化简知 $(2ab+2ac-4bc)z^2+(ab-ac)z-(ab+ac)=0$, 解得 $z\approx 64.4, z\approx 124.0$, 而第二个是增根.

47. 设直角梯形 $ABCD$ 中 $\angle ABC=\angle BCD=90°$.$AC=27.3$ 厘米,$BD=17.5$ 厘米, 设 AC 和 BD 的交点为 E,E 到 BC 的距离是 9 厘米, 那么 BC 的长度是____**10.5**____厘米.

48. 对于除了有限个 t 以外的所有实数 t, 连接 $(t,0)$ 和 $(t^2,1)$ 的所有直线和一个定圆锥曲线相切, 则这个圆锥曲线的两个焦点之间的距离是____$17^{1/4}$____.

Solution: 这个圆锥曲线是 $x=-\frac{y}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4y}$.

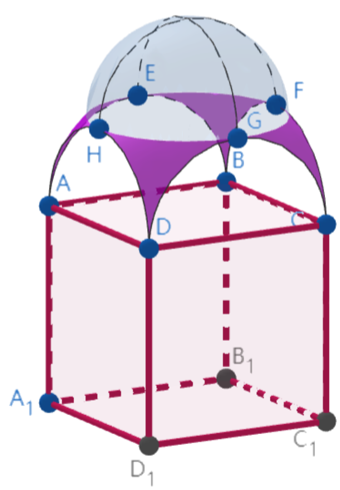
49. 设复数 $z^2-2\mathrm{i}z-2\neq 0$. 同时满足以下两个不等式 $\begin{cases} |z|^2\le 2(z+\bar{z})+2 \\ \frac{3\pi}{4}\le \arg(\frac{z-\mathrm{i}+1}{z-\mathrm{i}-1})\le \frac{7\pi}{4} \end{cases}$ 的复数 z 的集合在复平面的面积是 $\underline{\frac{5}{3}\pi-2\sqrt{3}}$. 其中 arg 表示的是复数的辐角主值.

50. 设 F_1,F_2 是椭圆的两个焦点,P 是椭圆上一个动点,G 是 $\triangle PF_1F_2$ 三条中线的交点,I 是 $\triangle PF_1F_2$ 三条角平分线的交点. 在 P 运动的时候, 如果 G 的轨迹和 I 的轨迹没有交点, 那么椭圆的离心率的取值范围是 $\underline{(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},1)}$.

51. 设平面上的原点是 O, 两个点集 A,B 的闵可夫斯基和是集合 C, 满足 $C=\{Z|\overrightarrow{\mathbf{OZ}}=\overrightarrow{\mathbf{OX}}+\overrightarrow{\mathbf{OY}},X\in A,Y\in B\}$. 设 A 是边和坐标轴平行的边长为 2 正方形的边和内部的点的集合,B 是一个方向任意的边长为 2 的正三角形和内部的点的集合, 那么 A 和 B 的闵可夫斯基和的面积的取值范围是 $\underline{[8+3\sqrt{3},4+\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}]}$.

52. 如下图, 为了过渡方形的建筑和球形的拱顶, 在各式各样的建筑中会用到一种结构叫做帆拱. 最上方的半球形拱顶半径为 1, 而底下需要承接的是一个边长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$. 为此, 可以需要用一个半径为 $\sqrt{2}$ 的球面的一部分作为过渡. 先构造一个以正方形 $ABCD$ 的中心的为中心的半径为 $\sqrt{2}$ 的球, 然后以平面 ABB_1A_1 去掉在这个平面外的部分得到一个半圆形切面 $\widehat{AEB}$, 对另外三个面也如法炮制. 最后去掉与这四个半圆弧相切的一部分并且盖上半径为 1 的球面穹顶即可. 那么这个帆拱 (粉色部分) 的表面积是 $\underline{(6\sqrt{2}-8)\pi}$.

注: 球面被一个平面所截后的部分叫做球冠. 截得的圆面是底, 垂直于底面的直径被截得的部分是高. 如果球冠来自于半径为 R 的球, 其高是 h, 那么这个球冠的面积是 $2\pi Rh$.



53. 有 A,B,C 三个人, 他们每个人都投了个骰子, 结果为 $1,2,3,4,5,6$ 之一. 他们知道自己骰子的点数, 并且知道另外两个人的骰子的点数之和, 但是不知道具体是多少. 已知他们的推理能力足够强. 在他们之间, 发生了如下的对话.

A 说: 我不知道你们分别是多少, 但是我知道你们也都不知道我是多少.

B 说: 本来我确实不知道的,A 说完之后我知道你们是多少了.

C 说: 本来听了 A 说完之后我也不知道你们分别是多少, 但是我得知 B 知道了的话, 我也知道你们分别是多少了.

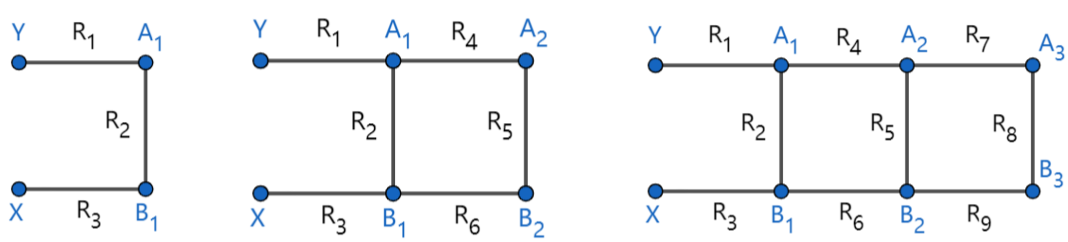
设使得 A 说出这句话的三个点数的组合的可能的个数是 P 种,B 听了 A 之后说出这句话的可能的组合的个数是 Q 种,C 听了 A,B 之后说出这句话的可能的组合的个数是 R 种, 那么 $P\times Q\times R$ 的值是____**9840**____.

Solution: A 给出的信息等价于 B,C 两个人加起来不是 $2,12$ 而且 A 是 $2,3,4,5$, 或者 A 是 1 而 B 和 C 的和在 8 到 11 之间, 或者 A 是 6 而 B 和 C 的和在 3 到 6 之间, 于是 $P=164$.B 给出的信息等价于以下十二种:A,B,C 只能是 $(5,6,5)$,$(5,x,6)$ 其中 $x=2,\ldots,5$,$(2,1,2)$,$(2,x,1)$ 其中 $x=2,\ldots,5$, 于是 $Q=10$. 这种情况下无论如何听了 B 的话,C 总能猜出来.C 听了 A 猜不出来说明如果 B,C 互换 B 仍然猜不出来. 于是排除 $(5,6,5),(5,5,6),(2,1,2),(2,2,1)$ 故 $R=6$, 那么 $PQR=9840$.

54. 一个人要用五个均匀的正四面体的骰子玩快艇骰子, 骰子的面均为 $1,2,3,4$. 他一共要投三次骰子, 然后想要投到五个朝下的面相同. 在每一次投掷之后, 他会固定所有的骰子中朝下的面数字最多的点数 (之一) 的骰子, 然后重新投其他所有的骰子. 例如第一次他投了 $1,1,2,2,3$, 他会固定两个 1, 然后重骰其他的三个. 如果第二次骰的结果是 $1,1,4,4,4$, 其中三个 4 来自于第二次投的, 两个 1 来自于上一次固定的, 他会重投之前固定的两个底面为 1 的骰子. 如果结果是 $1,1,1,1,3$, 他会重投底面为 3 的骰子. 他投到五个点数相同或者一共投了三次骰子后停止. 最后他能成功投出五个同一点数的概率是__**4823/32768**__.

55. 有一组数据是互不相同的整数, 最小的是 0, 最大的是 1000. 已知这些数的平均数是一个整数, 并且不出现在这一组数据之中. 那么这一组数据的平均数的最大可能值是____**956**____.

56. 如下图所示是一个电阻网络:(a),(b),(c) 三个图分别是 1 阶,2 阶,3 阶的阶梯电阻. 一般的,n 阶的电阻网络是 X,Y 之间的电阻, 有端点 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 以及 $B_1,B_2,\ldots,B_n$.



(a) 图　(b) 图　(c) 图

我们设 Y,A_1 中的电阻 $R_1=1\Omega$,A_1,B_1 中的电阻 $R_2=1\Omega$,X,B_1 中的电阻 $R_3=1\Omega$. 一般的, 对于 $i\geq 2$,A_{i-1},A_i 的电阻 R_{3i-2} 的阻值是 $2^{i-1}\Omega$,A_i,B_i 的电阻 R_{3i-1} 的阻值是 $2^{i-1}\Omega$,B_{i-1},B_i 的电阻 R_{3i} 的阻值是 $2^{i-1}\Omega$. 设 n 阶的电阻网络中 X,Y 中的阻值是 $a_n\Omega$, 例如 $a_1=3$,$a_2=\frac{20}{7}$. 那么 a_n 的通项公式是$\frac{(5+\sqrt{41})\left(7+\sqrt{41}\right)^n+(\sqrt{41}-5)\left(7-\sqrt{41}\right)^n}{4\left(\left(7+\sqrt{41}\right)^n-\left(7-\sqrt{41}\right)^n\right)}$.

Solution: 注意到 $a_n = 2 + \frac{1}{1+1/(2a_{n-1})}$

4 解答题

57. (13 points) 设四面体 $ABCD$ 满足 $AB = BC = CD = DA = AC$. 记 α 是二面角 $B-AC-D$,β 是二面角 $A-BD-C$. 设 $x = \cos(\alpha)$,$y = \cos(\beta)$.

    (a) (7 points) 求 $y - x$ 的取值范围.

    Solution:
    不妨设 $AC = 1$, 设 BD 长度为 l, 那么 B, D 到 AC 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,A, C 到 BD 的距离是 $\sqrt{1 - l^2/4}$. 那么由余弦定理 $x = \cos\alpha = \frac{3/2 - l^2}{2\times 3/4} = \frac{3-2l^2}{3}$,$y = \cos\beta = \frac{2 - l^2/2 - 1}{2 - l^2/2} = \frac{2-l^2}{4-l^2}$. 那么我们知道 $l^2 = \frac{3}{2}(1-x)$, 于是 $y = \frac{2-\frac{3}{2}(1-x)}{4-\frac{3}{2}(1-x)} = \frac{1+3x}{5+3x}$.
    那么 $y - x = \frac{1+3x}{5+3x} = -x + 1 - \frac{4}{5+3x} = -\frac{5+3x}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{5+3x}$. 因为 $x \in (-1, 1)$ 那么其是一个负的对勾函数, 最小值在其中一个端点取到, 那么如果 $x = 1, y - x = -\frac{1}{2}$, 如果 $x = -1, y - x = 0$, 那么最小值是 $-\frac{1}{2}$. 最大值的时候由均值不等式,$-\frac{5+3x}{3} - \frac{4}{5+3x} \leq -4\sqrt{3}/3$, 那么其最大值是 $\frac{8-4\sqrt{3}}{3}$, 这个最大值在 $x = \frac{2\sqrt{3}-5}{3}$ 取到, 其在 $(-1, 2)$ 中. 故取值范围是 $(-\frac{1}{2}, \frac{8-4\sqrt{3}}{3}]$.

    (b) (6 points) 点 (x, y) 在一条圆锥曲线上, 请写出这个圆锥曲线的方程以及找到这条圆锥曲线上所有的两个坐标都是整数的点.

    Solution: (x, y) 满足 $3xy + 5y - 1 - 3x = 0$, 也就是 $(3x+5)(y-1) = -4$, 这个是一个平移过后的反比例函数, 故是一个双曲线. 因为 x, y 都是整数, 那么 $3x + 5$ 是整数, 故其为 $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. 经检验, 只有 $(-3, 2), (-2, 5), (-1, -1)$ 是所有整点.

58. (13 points) 有 n 个人 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 围成一圈玩游戏. 首先 P_1 拿到了一个球. 每一次传球的时候, 如果此时 P_i 拿到了球, 他就会以各 $1/2$ 的概率传给相邻的玩家 P_{i-1} 和 P_{i+1}, 其中设 $P_0 = P_n, P_{n+1} = P_1$. 现在规定, 如果某个玩家 P_i 第一次拿到了球而此时其他玩家都拿到过球, 则游戏结束,P_i 是游戏的赢家. 例如在 $n = 3$ 的时候, 如果 P_1 传给 P_2,P_2 传给 P_1,P_1 传给 P_3, 此时 P_3 是最后一个拿到球的, 则游戏停止,P_3 是赢家. 记 p_i 是 P_i 获得游戏胜利的概率.

    我们先说明游戏以概率 1 会停止.

    (a) (4 points) 证明: 如果从开局开始传了 N 次球, 那么游戏还没有停止, 仍然有人没有拿到过球的概率至多 $(1 - \frac{1}{2^n})^{\lfloor N/n \rfloor}$.

    Solution: 使用数学归纳法. 当 $N < n$, 概率至多是 1 显然成立. 当 $N \geq n$, 假设在 $N - n$ 轮结论成立. 在 $N - n$ 轮之后有至少 $\frac{1}{2^n}$ 的概率往一个方向传, 所有人都会拿到球, 游戏就

会结束. 于是我们就有 N 轮的时候概率至多 $(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{2^n})^{\lfloor (N-n)/n \rfloor} = (1-\frac{1}{2^n})^{\lfloor (N)/n \rfloor}$.

因为多项式函数比指数函数增长速度慢, 于是这个概率在 N 增大的时候逐渐降到 0. 那么游戏最终停止的概率是 1, 于是 $p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$ 成立.

(b) (4 points) 在 $n = 4$ 的情况下求 p_2, p_3, p_4 的值.

Solution: 由对称性知道 $p_2 = p_4$. 我们设第一步球传到了 P_2, 现在比较 3 和 4 是游戏的赢家的概率比. 设 q_3, q_4 是第一次传球给 2 的时候 P_3, P_4 成为赢家的条件概率. 在这种情况下有一半的概率传给 P_3, 有一半的概率传回 P_1. 于是有一半的概率 P_4 是赢家. 然后在 P_1 手上时, 有一半的概率传给 P_2, 有一半的概率传给 P_4. 那么其中 1/4 的概率让 P_3 胜利, 此时剩下 1/4 的概率, 和初始状况一样. 在这种情况下, 由条件概率,P_4 赢的概率是 $1/4 \times q_4$. 那么我们有 $q_4 = 1/2 + 1/4 \times q_4$, 解得 $q_4 = 2/3$. 那么 $p_4 = q_4/2 = 1/3$, 于是 $p_2 = 1/3, p_3 = 1/3$.

(c) (5 points) 在一般 n 的情况下求 $p_2, p_3, \ldots, p_n$ 的值.

Solution: 不妨 $P_k = P_{n+k}$. 因为他会最终结束, 于是任何一个人都会最终拿到球. 对于任何一个赢家 P_i, 因为他会最终到 P_{i-1} 和 P_{i+1}, 而且如果要经过 P_i, 他必然会经过那两个玩家之一. 于是存在第一次经过这两个玩家之一的事件.

假如第一次经过 P_{i+1}, 那么 P_i 获胜需要球一路传到 P_{i-1} 而不经过 P_i. 设 p_j 是此时球在 P_j 的时候 P_i 获胜的条件概率. 那么 $p_i = 0$,$P_{i-1} = 1$ 且对于所有的 $k \neq i, i-1$ 均有 $p_k = \frac{p_{k-1}+p_{k+1}}{2}$. 这说明 $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n, p_i, \ldots, p_i$ 是等差数列. 进而我们知道 $p_{i+1} = 1/(n-1)$. 同理, 假如第一次经过 P_{i+1}, 那么 P_i 获胜的条件概率是 $1/(n-1)$. 于是总概率即为 $1/(n-1)$.

59. (13 points) 设 $f(x) = x^a - x^b$ 其中 $b > a > 0$. 设 $f(x)$ 的极大值点是 x_0. 设 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 满足 $f(x_1) = f(x_2)$.

(a) (5 points) 证明 $x_1 x_2 < x_0^2$

Solution: 注意到 $x_0 = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{b-a}}$ 是唯一极值点. 设 $x = e^t$, 那么 $f(x) = g(t) = e^{at} - e^{bt}$, 于是 $t_0 = \ln x_0 = \frac{\ln(b/a)}{b-a}$,$g'(t) = ae^{at} - be^{bt}$.$g$ 在 $(-\infty, t_0]$ 单调递增, 在 $(-\infty, t_0]$ 单调递减. 我们现在证明 $g'(t_0+t) + g'(t_0-t) < 0$. 注意 $ae^{at_0} = be^{bt_0}$, 那么

$$ae^{a(t_0+t)} + ae^{a(t_0-t)} - be^{b(t_0+t)}be^{b(t_0-t)} = ae^{t_0}(e^{at} + e^{-at} - e^{bt} - e^{-bt})$$

注意到 $f(x) = x + 1/x$ 在 $x > 1$ 单调递增, 因为 $e^{bt} > e^{at} > 1$, 那么 $ae^{t_0}(e^{at} + e^{-at} - e^{bt} - e^{-bt}) < 0$, 于是 $g'(t_0+t) + g'(t_0-t) < 0$, 进而 $g(t_0+t) - g(t_0-t)$ 递减, 故 $g(t_0+t) < g(t_0-t)$. 设 $x_2 = e^(t_0+t)$, 那么 $f(x_1) = f(x_2) = g((t_0+t)) < g((t_0-t))$, 故 $\ln(x_1) < t_0 - t$, 进而 $x_1 x_2 < x_0^2$.

(b) (4 points) 如果 $a \geq 1$ 以及 $b \geq 2$, 证明 $x_1 + x_2 \leq 2x_0$.

Solution:

注意到对任何 $g(x) = Ax^a - Bx^b$, 其中 $A, B > 0$, 以及 $b > a > 0$, 其满足以下性质:$g(x)$ 在 $x > 0$ 有且仅有一个极大值 $g(x_0) > 0$, 在极大值之前单调递增的且函数值大于等于 0 的, 之后是单调递减的. 这是因为 $g'(x) = Aax^a - Bbx^b = 0$ 的解满足 $Aax^a = Bbx^b$ 而 $(Bbx^b)/(Aax^a)$ 是一个大于等于零的单调递增的数, 于是在 $x \geq x_0$ 的时候 $Aax^a - Bbx^b \leq 0$,$x \leq x_0$ 的时候 $Aax^a - Bbx^b \geq 0$. 因为 $g(x_0) = 0$, 于是在 $x \in (0, x_0)$ 的时候 $g(x) \geq 0$.

设 x_0 满足 $f'(x_0) = 0$, 我们只需证明 $f(x_0+t) \leq f(x_0-t)$ 对于所有 $0 \leq t \leq \max(1-x_0, x_0)$. 也就是说, 我们要证明 $f'(x_0+t) + f'(x_0-t) \leq 0$. 我们只需要证明 $f'(x_0+t) \leq f''(x_0)t$. 再次求导, 我们只用证明 $f''(x_0+t) \leq f'(x_0)$ 对于 $t > 0$, 而 $f''(x_0+t) \geq f'(x_0)$ 对于 $t < 0$.

如果 $a \leq 2$, 我们知道 $f'''(x) = a(a-1)(a-2)x^{a-3} - b(b-1)(b-2)x^{b-3} \leq 0$, 从而 f'' 单调递减, 于是论断成立. 如果 $a \geq 2$, 那么 $f''(x)$ 是 $Ax^a - Bx^b$ 形式, 其中 $a > b > 0$, 只有一个极大值并且极大值之后递减. 注意到 $f''(x_0) = a(a-1)x^{a-2} - b(b-1)x^{b-2} = ax^{a-2}(a-b) < 0$, 于是其在递减区间, 从而论断 $f''(x_0+t) \leq f'(x_0)$ 对于 $t > 0$ 成立. 因为其处于递减区间, 设 $f'''(x_1) = 0$, 于是 $f''(x_0+t) \geq f''(x_0)$ 要么 $x_1 \leq x_0 + t \leq x_0$ 从而通过递减成立, 要么 $x_1 \geq x_0 + t$ 从而 $f''(x_0+t) \geq 0 > f''(x_0)$ 成立.

(c) (4 points) 如果 $a \leq 1$ 以及 $b \leq 2$, 证明 $x_1 + x_2 \geq 2x_0$.

Solution: 同上题目的理, 我们只用证明 $f''(x_0+t) \geq f'(x_0)$ 对于 $t > 0$, 而 $f''(x_0+t) \leq f'(x_0)$ 对于 $t < 0$.

如果 $b \geq 1$, 我们知道 $f'''(x) = a(a-1)(a-2)x^{a-3} - b(b-1)(b-2)x^{b-3} \geq 0$, 从而 f'' 单调递增, 于是论断成立. 如果 $b \leq 1$, 我们利用 $x \to 1/x$ 代换, 可以写出上一问的命题的另一种形式:

注意到对任何 $g(x) = Ax^a - Bx^b$, 其中 $A, B > 0$, 以及 $0 > b > a$, 其满足以下性质:$g(x)$ 在 $x > 0$ 有且仅有一个极大值 $g(x_0)$, 在极大值之前单调递增的, 之后是单调递减且函数值大于等于 0 的.

那么重复以上的操作,$f''(x)$ 是 $Ax^a - Bx^b$ 形式, 其中 $0 > b > a$, 只有一个极大值并且极大值之后递减. 注意到 $f''(x_0) = a(a-1)x^{a-2} - b(b-1)x^{b-2} = ax^{a-2}(a-b) < 0$, 于是其在递增区间, 从而论断 $f''(x_0+t) \leq f'(x_0)$ 对于 $t < 0$ 成立. 因为其处于递增区间, 设 $f'''(x_1) = 0$, 于是 $f''(x_0+t) \geq f''(x_0)$ 要么 $x_0 \leq x_0 + t \leq x_1$ 从而通过递增成立, 要么 $x_0 + t \geq x_1$ 从而 $f''(x_0+t) \geq 0 > f''(x_0)$ 成立.

60. (13 points) 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0 = 1$, 而且公比为 q, 其中 $0 < q < 1$. 设数列 $\{b_n\}$ 满足:$b_0 = 1$, 对于 $n \geq 1$, 如果 $b_0a_0 + b_1a_1 + \cdots + b_{n-1}a_{n-1} > 0$, 则 $b_n = -1$, 如果 $b_0a_0 + b_1a_1 + \cdots + b_{n-1}a_{n-1} \leq 0$, 则 $b_n = 1$. 我们说一个数列 $\{b_n\}$ 是最终周期的, 如果存在正整数 N, T, 使得对于所有正整数 $n > N$, 都有 $b_{n+T} = b_n$.

(a) (4 points) 证明: 对于 $0 < q \leq \frac{1}{2}$, 数列 $\{b_n\}$ 是最终周期的.

Solution: $b_0 = 1$, 我们证明 $b_k = -1$ 对于 $k \geq 1$. 我们知道 $a_0b_0 + \cdots + a_{k-1}b_{k-1} \geq 1 - q - q^2 - \cdots - q^{k-1} = 1 - \frac{q-q^k}{1-q} > 1 - \frac{q}{1-q} > 0$, 故我们总有 $b_k = -1$, 于是他是最终周期的.

(b) (9 points) 是否存在有理数 $q \in (\frac{1}{2}, 1)$ 满足 $\{b_n\}$ 是最终周期的?

Solution: 不存在, 我们用反证法. 我们先用归纳法证明 $|a_0b_0+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}$. 对于 $n = 1$ 成立, 因为 $q > 1/2$. 假设对于 $n-1$ 成立, 有 $|a_0b_0+\cdots+a_{n-2}b_{n-2}| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q}$. 于是我们由于构造知道 $|a_0b_0+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}| \leq ||a_0b_0+\cdots+a_{n-2}b_{n-2}|-|a_{n-1}b_{n-1}||$. 注意到 $|b_n| = 1$. 如果 $|a_0b_0 + \cdots + a_{n-2}b_{n-2}| \geq a_{n-1}$, 那么就有 $||a_0b_0 + \cdots + a_{n-2}b_{n-2}| - |a_{n-1}b_{n-1}|| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q} - q^{n-1} \leq \frac{q^n}{1-q}$. 如果 $|a_0b_0+\cdots+a_{n-2}b_{n-2}| \leq a_{n-1}$, 那么就有 $||a_0b_0+\cdots+a_{n-2}b_{n-2}|-|a_{n-1}b_{n-1}|| \leq q^{n-1} \leq \frac{q^n}{1-q}$.

于是我们至少有 $a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots = 0$. 那么我们设对于任何 $n \leq N$,$b_{n+T} = b_n$. 那么我们有 $a_0b_0 + \cdots + a_Nb_N + (a_{N+1}b_{N+1} + \cdots + a_{N+T}b_{N+T})(1 + q^T + q^{2T} + \dots)$. 根据本题使用的事实, 有 $a_0b_0+\cdots+a_Nb_N+(a_{N+1}b_{N+1}+\cdots+a_{N+T}b_{N+T})(1+q^T+q^{2T}+\dots) = a_0b_0 + \cdots + a_Nb_N + (a_{N+1}b_{N+1} + \cdots + a_{N+T}b_{N+T})\frac{1}{1-q^T}$. 于是 $b_0 + \cdots + q^Nb_N + (b_{N+1}q^{N+1} + \cdots + b_{N+T}q^{N+T})\frac{1}{1-q^T} = 0$. 于是我们可以得到 $b_0 + \cdots + q^nb_N + (b_{N+1}q^{n+1} + \cdots + b_{N+T}q^{N+T}) - q^T(b_0 + \cdots + q^nb_N) = 0$. 整理, 我们可以得到一个方程 $c_kq^k + c_{k-1}q^{k-1} + \cdots + c_0 = 0$ 其中 $c_k \neq 0$, 然后 $c_i = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. 注意到 $q \neq 0$ 于是除去 q 这个因式后不妨设 $c_0 \neq 0$.

假设 $q = a/b$ 其中 a, b 是互质的正整数, 那么我们就有 $c_kb^k + c_{k-1}b^{k-1}a + \cdots + c_0a^k = 0$ 于是就意味着 b 整除 c_0a^k. 因为 a, b 互质,$c_0 \in \{\pm 1, \pm 2\}$, 于是 b 整除 2, 那么 q 是整数或者整数除以 2, 和 $q \in (\frac{1}{2}, 1)$ 矛盾.

注: 本题您能够使用的一个事实是: 对于 $-1 < x < 1$,$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$.

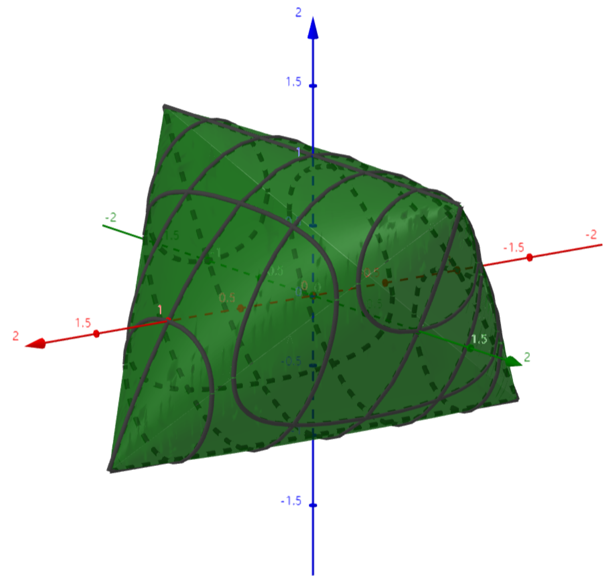
61. (15 points) 端午节到了, 某商家推出了一种粽子. 这个粽子和四面体比, 内容物更充足, 更鼓, 更好吃. 这个粽子的表面是如下图的形状, 其方程是 $z^2 + (x^2 - y^2)z + x^2 + y^2 - 1 = 0$.

(a) (4 points) 构造一个底面在 yOz 平面上的圆柱体, 使得对于所有 $t \in [-1, 1]$, 这个圆柱体和粽子被平面 $z = t$ 所截面积相同. 并利用祖 gèng(该字无法显示) 原理求粽子的体积.

Solution: 注意到原式子可以变形 $\frac{x^2}{1-z} + \frac{y^2}{1+z} = 1$. 这是一个椭圆, 其半长轴和半短轴分别是 $\sqrt{1+z}, \sqrt{1-z}$, 故其面积为 $\pi\sqrt{1-z^2}$.

考虑一个底面在 yOz 平面上的圆柱体, 高为 $\pi/2$, 底面是一个中心在原点的半径为 1 的圆. 那么这个截面积等于矩形 $2\sqrt{1-z^2} \times \pi/2 = \pi\sqrt{1-z^2}$. 故, 其体积是 $\pi^2/2$.

(b) (7 points) “对称” 一直是这个粽子的卖点. 除了 $y = 0$ 和 $x = 0$, 请再找出四个平面, 使得这个粽子关于这四个平面都是轴对称的, 并证明之.



> **Solution:** 平面 $\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \sqrt{2}z = 0$ 都是, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 取遍 ± 1. 注意到这个粽子曲面关于 $y = 0$ 和 $x = 0$ 对称, 故由对称性我们只需要证明这个曲面关于上述四个平面之一对称即可.
>
> 我们只用考虑平面 $x + y + \sqrt{2}z = 0$. 根据垂直和对称的定义, 其把个点 (u, v, w) 对称到 $(\frac{u-v-\sqrt{2}w}{2}, \frac{v-u-\sqrt{2}w}{2}, -\frac{\sqrt{2}(u+v)}{2})$. 如果 (u, v, w) 在曲面上, 也就是 $w^2 + (u^2 - v^2)w + u^2 + v^2 - 1 = 0$, 我们代换 (u, v, w) 到 $(\frac{u-v-\sqrt{2}w}{2}, \frac{v-u-\sqrt{2}w}{2}, -\frac{\sqrt{2}(u+v)}{2})$, 我们由
>
> $$\begin{aligned}&(-\frac{\sqrt{2}(u+v)}{2})^2 + ((\frac{u-v-\sqrt{2}w}{2})^2 - (\frac{v-u-\sqrt{2}w}{2})^2)(-\frac{\sqrt{2}(u+v)}{2})\\ &+(\frac{u-v-\sqrt{2}w}{2})^2 + (\frac{v-u-\sqrt{2}w}{2})^2 - 1\\ =&(\frac{\sqrt{2}(u+v)}{2})^2 - ((\frac{u-v-\sqrt{2}w}{2})^2 - (\frac{v-u-\sqrt{2}w}{2})^2)(\frac{\sqrt{2}(u+v)}{2})\\ &+(\frac{u-v-\sqrt{2}w}{2})^2 + (\frac{v-u-\sqrt{2}w}{2})^2 - 1\\ =&u^2 + v^2 + w^2 - 1 + (u-v)w(u+v) = 0\end{aligned}$$
>
> 知道对称点也在曲面上面. 于是这个曲面关于平面 $x + y + \sqrt{2}z = 0$ 对称.

(c) (4 points) 这种三角形状的粽子自然和平面上的三角形有关. 证明: 对于任何三角形 ABC, 点 $(\frac{\cos A+\cos B}{\sqrt{2}}, \frac{\cos A-\cos B}{\sqrt{2}}, \cos C)$ 是粽子的表面上的点.

> **Solution:** 带入方程知道我们只用证明 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$. 带入 $C = \pi-(A+B)$ 使用和角公式只用证明 $\cos^2 A+\cos^2 B+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)^2-2\cos A\cos B(\cos A\cos B-\sin A\sin B) = 1$. 注意 $\cos A\cos B\sin A\sin B$ 被消去, 设 $\cos^2 A =$

$x, \cos^2 B = y$, 只用证明 $x + y + (xy + (1-x)(1-y)) - 2xy = 1$, 易证.

注: 您可以用到的一个事实是: 如果椭圆的长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$, 则其面积等于 πab.

62. (15 points) 在平面几何中, 两点决定一条直线, 两条不重合的直线至多交于一个交点. 设 n 是正整数. 设 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. 现在有元素个数大于等于 2 的 S 的子集 $A_1, A_2, \ldots, A_r$. 已知对于任何 $1 \le i < j \le n$ 的 i, j, 存在**至少**一个 $k, 1 \le k \le r$ 满足 $i \in A_k$ 而且 $j \in A_k$. 以下有两个命题, 本题将要探讨这两个条件之间的关系:

(1) 对于任何 $1 \le i < j \le n$ 的 i, j, 存在**唯一**一个 $k, 1 \le k \le r$ 满足 $i \in A_k$ 而且 $j \in A_k$.

(2) 存在平面上两两不重合的直线 $l_1, l_2, \ldots, l_r$ 以及平面上两两不重合的点 $P_1, \ldots, P_n$. 设 $T = \{P_1, \ldots, P_n\}$. 这些点和直线使得 $l_i \cap T = \{P_j | j \in A_i\}$.

(a) (3 points) 证明 (2) 是 (1) 的充分条件.

Solution: 由两条直线至多一个交点, 于是不存在某一对点同时存在在两个集合内.

然而,(2) 不一定是 (1) 的必要条件. 已知存在一个正整数 k 使得当 $n \le k$ 的时候,(2) 是 (1) 的必要条件.$n > k$ 的时候,(2) 不是 (1) 的必要条件.

(b) (5 points) 请给出 $n = k + 1$ 成立 (1) 但是不成立 (2) 的例子.

Solution: 这一题和下一题我们说明 $k = 6.n = 7$ 的例子是

$$\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{3,5,6\}, \{3,4,7\}.$$

(c) (7 points) 证明在 $n = k$ 的情况下,(2) 是 (1) 的必要条件.

Solution: $n = 6$ 的情况, 可以穷举满足 (1) 的这些子集. 以下列举的情况只展示了大于等于 3 元的集合 (等价的只列举了一个).

1. $A_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$: 六点共线
2. $A_1 = \{1,2,3,4,5\}$: 五点共线, 一点不共线
3. $A_1 = \{1,2,3,4\}$: 四点共线, 另外两点不共线
4. $A_1 = \{1,2,3,4\}, A_2 = \{4,5,6\}$: 四点共线, 其中一点和另外两点共线
5. $A_1 = \{1,2,3\}$: 三点共线, 和另外的不共线
6. $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{4,5,6\}$: 两组三点共线
7. $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{3,4,5\}$: 三点共线, 其中一点和另外两点共线

8. $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{3,4,5\}, A_3 = \{1,5,6\}$: 点 1,3,5 构成一个三角形,2,4,6 分别在 1,3,3,5 和 5,1 构成的直线上, 不共线

9. $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{3,4,5\}, A_3 = \{1,5,6\}, A_4 = \{2,4,6\}$: 点 1,3,5 构成一个三角形,2,4,6 分别是另一条直线和在 1,3,3,5 和 5,1 构成的直线的交点

10. 所有集合都是二元集: 无三点共线.

63. (15 points) 在不等式中, 各种平均值有诸多应用. 设 $n \geq 3$, 对于正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 我们有平方平均值 $Q = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$, 代数平均值 $A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 以及调和平均值 $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$. 我们现在要探究 $\frac{Q-A}{A-H}$ 的值域.

我们目前希望将其变成简单的情形:$a_1 = a_2 \cdots = a_{n-1}$. 为了变成这个情形, 我们需要调整法. 该调整法需要以下的策略: 对于其中三个元 x, y, z, 固定 $p = x+y+z, q = yz+zx+xy$, 我们希望考虑 $r = xyz$ 在何时取到极值. 由韦达定理, 我们考虑三次函数 $F(t) = t^3 - pt^2 + qt$,r 为何值时 $F(t) = r$ 在非负实数上有三个根. 这里设 $p^2 > 3q > 0$.$F(t) = r$ 如果有三个非负根, 设他的三个根是 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

(a) (4 points) 证明在 $p^2 \geq 4q$ 的情况下,r 可以取到 0.

Solution: 只用证明 $z = 0$ 时有非负解 x, y. 已知 $p^2 > 4q > 0$, 那么 $t^2 - pt + q = 0$ 有两个非负根, 于是可以作为 x, y 的值.

(b) (6 points) 求 $F(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的极大值 r_1 和极小值 r_0. 并且证明: 无论 p, q 关系如何,$F(t) = r_1$ 的三个根满足 $0 \leq x_1 = x_2 \leq x_3$, 在 $p^2 < 4q$ 的情况下,$F(t) = r_0$ 的三个根满足 $0 \leq x_1 \leq x_2 = x_3$.

Solution: 我们对 F 求导, 得到两个根 $\frac{p\pm\sqrt{p^2-3q}}{3}$. 设 $y_1 = \frac{p-\sqrt{p^2-3q}}{3}, y_2 = \frac{p+\sqrt{p^2-3q}}{3}$. 我们可以得到 $0 < y_1 < y_2$. 因为 F' 是开口向上的二次函数, 那么 F 在 $t \in (-\infty, y_1)$ 递增, 在 $t \in (y_1, y_2)$ 递减, 在 $t \in (y_2, \infty)$ 递增. 于是 $r_1 = f(y_1) = \frac{-2p^3+9pq}{27} + \frac{2p^2-6q}{27}\sqrt{p^2-3q}$ 是极大值, 取到的时候两个较小的相同. 在 $r_2 = f(y_2) = \frac{-2p^3+9pq}{27} - \frac{2p^2-6q}{27}\sqrt{p^2-3q}$ 的时候是极小值, 注意到 $p^2 \geq 4q$ 我们知道 $p - 2y_2 > 0$, 于是三个根满足 $0 \leq x_1 \leq x_2 = x_3$.

(c) (5 points) 由上一问, 我们可以不妨设 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1$, 设 $a_n = a$, 求 $a > 0$ 的情况下 $G(a) = \frac{\sqrt{\frac{n-1+a^2}{n}} - \frac{n-1+a}{n}}{\frac{n-1+a}{n} - \frac{n}{n-1+\frac{1}{a}}}$ 的取值范围.

Solution: 化简得 $G(a) = \frac{(n-1)a+1}{(n-1)(a-1)^2} \times (\sqrt{n(n-1+a^2)} - (n-1+a)) = \frac{(n-1)a+1}{\sqrt{n(n-1+a^2)}+(n-1+a)}$.
设 $\tilde{G}(a) = \frac{(n-1)a+1}{\sqrt{n(n-1+a^2)}+(n-1+a)}$ 原先的 $G(x)$ 在 $x = 1$ 的地方没有定义, 于是在 $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$ 的时候 $G(x) = \tilde{G}(x)$. 在没有定义的地方 $\tilde{G}(1) = 1/2$.
注意到 $\tilde{G}'(a) = \frac{n((n-1)^2-x+(n-2)\sqrt{n(n-1+a^2)}}{\sqrt{n(n-1+a^2)}(\sqrt{n(n-1+a^2)}+(n-1+a))^2}$ 是一个恒大于零的数. 然后知道 $\tilde{G}(0) =$

$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)+n-1}}$, 以及设 $H(x)=\tilde{G}(1/x)=\frac{(n-1)+a}{\sqrt{n((n-1)a^2+1)+(n-1)a+1)}}$,$H(0)=\frac{n-1}{\sqrt{n+1}}$, 于是由于连续函数的介值定理我们知道范围是在 $(\frac{1}{\sqrt{n(n-1)+n-1}}, \frac{n-1}{\sqrt{n+1}})\backslash\{1/2\}$.

注: 允许用函数极限写. 如果不考虑函数极限, 直接证明答案夹在两个数之间然后说明能取到接近的也可.

64. (15 points) 对于大于等于 3 的正整数 m, n, 如果存在正整数 p 满足 $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{p}$, 进行一次操作可以将 n 变成 m.

    (a) (5 points) 对于任何大于等于 3 的奇数 n, 可以经过三次操作将其变成 $n+1$

    Solution: $n \to n(n-1) \to n(n+1) \to n+1$.

    (b) (10 points) 对于任何正整数 n, 我们可以经过至多 $4\log_2 n-3$ 次操作使得 3 可以变成 n.

    Solution: 3 到 4 只需要 $3 \to 6 \to 12 \to 4$. 设 $2^t < n \le 2^{t+1}$, 其中 $t \ge 2$.

    根据第一问, 我们也可以得到, 对于正整数 k 和非负整数 l, 我们可以得到 $(2k+1)2^l \to 2^l(2k+1)(2k) \to 2^l(2k+1)(2k+2) \to (2k+2)2^l$.

    我们分两类讨论: 如果 $2^t < n < 2^{t-1}\times 3$: 我们先进行 $3 \to 6 \to \cdots \to 3\times 2^{t-1}$. 注意到这个正整数的变化是可逆的, 于是我们只要证明反向的 n 变到 $3\times 2^{t-1}$ 即可. 我们每一次取最大的非负整数 l 使得 $2^l | n$, 然后根据大小关系, 我们知道 $n/2^l \ge 3$, 设 $n=2^l\times(2k+1)$ 于是用 3 步就可以把 n 变成 $(2k+2)2^l$. 然后每一次 $l \le t-2, l$ 严格递增, 于是进行了 $3(t-1)$ 步, 一共 $4(t-1) < 4t-3$ 步.

    如果 $2^{t-1}\times 3 < n < 2^{t+1}$(等于的情况就是 $(t-1)$ 步): 我们先进行 $3 \to 6 \to \cdots \to 3\times 2^{t+1} \to 2^{t+1}$ 共 $t+2$ 步. 同样我们只要证明反向的 n 变到 2^{t+1} 即可. 同样我们每一次取最大的非负整数 l 使得 $2^l | n$, 然后根据大小关系, 我们知道 $n/2^l \ge 3$, 设 $n=2^l\times(2k+1)$ 于是用 3 步就可以把 n 变成 $(2k+2)2^l$. 然后每一次 $l \le t-2, l$ 严格递增, 于是进行了 $3(t-1)$ 步, 一共 $4t-1 \le 4(t-1)+6-3 \le 4\log_2(3\times 2^{t-1})-3$ 步. 于是得证.

65. (15 points) 设有一个直圆柱, 其下底面是一个在 xOy 平面上的半径为 1 的圆, 其中心是 $A(0,1,0)$. 设圆柱上底面是 $z=a$, 其中 $a>0$ 是参数. 点 $B(0,0,a)$ 是上底面的圆周上的一点, 点 D 在下底面圆周 $x^2+(y-1)^2=1 \wedge z=0$ 上运动, 过 B 做 BD 的垂直平面交 xOy 平面为一条动直线. 这条动直线和 xOy 平面上的一条圆锥曲线 C 相切.

    (a) (6 points) 对参数 a, 求 C 的方程.

    Solution: 设 O 是 $(0,0)$, 设 OD 的斜率是 k, 解得 D 的坐标是 $(\frac{2k}{k^2+1}, \frac{2k^2}{k^2+1}, 0)$, 然后 $OD^2=\frac{4}{k^2+1}$. 设 OBD 平面上 B 做 BD 的垂线交 OD 于 T, 我们知道直角三角形 BDT 中 OB 是斜边的垂足, 那么根据相似三角形,$OD\times OT=OB^2=a^2$. 于是 $OT^2=\frac{a^4\sqrt{k^2+1}}{4k^2}$. 于是我们知道 T 的坐标是 $(-\frac{a^2}{2k}, -\frac{a^2}{2}, 0)$, 并且斜率是 $-\frac{1}{k}$. 注意到这个是 OT' 在 xOy 平

面的垂直平分线, 其中 $T'(-a^2/k,-a^2,0)$. 那么根据抛物线的光学性质, 我们发现这个是一个 $y=-a^2$ 为准线,$(0,0)$ 为焦点的抛物线. 于是抛物线的方程是 $x^2=2a^2(y+\frac{a^2}{2})$.

(b) (9 points) 当 D 在下底面圆周上运动时, 设圆锥曲线 C 上一点 E 使得 $BD\perp BE$. 求参数 a 的范围, 使得以下论断成立:DE 长度取到最小值时,D 的坐标是 $(0,2,0)$.

Solution: 设 OD 的斜率是 k, 解得 D 的坐标是 $(\frac{2k}{k^2+1},\frac{2k^2}{k^2+1},0)$. 然后过 B 做 BD 垂直平面交 xOy 平面的交点是斜率是 $-\frac{1}{k}$. 那么因为其实抛物线上的点, 那么根据求导斜率是 $\frac{x}{a^2}$. 那么 $x=-\frac{a^2}{k}$, 于是 $y=\frac{a^2}{2k^2}-\frac{a^2}{2}$. 那么根据焦点和准线的关系,$OC=y_C+a^2=\frac{a^2}{2k^2}+\frac{a^2}{2}$. 于是我们就有 $DE^2=BD^2+DC^2=BO^2+2OD^2+OC^2$, 于是我们就有

$$DE^2=\frac{4k^2}{k^2+1}+2a^2+a^4(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2})^2=\frac{4}{1+1/k^2}+2a^2+a^2(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2})^2$$

设 $DE^2=F(1/k^2)$, 那么求导得知 $F'(x)=\frac{1}{2}a^4(x+1)-\frac{4}{(x+1)^2}$, 其中 $x\in[0,\infty)$, 记在 $x=0$ 的时候, 斜率 k 不存在, 直线 OD 和 x 轴垂直,D 是 $(0,2,0)$. 那么这个导数是单调递增的, 如果有大于零的零点就是 $x=\sqrt[3]{a^4/8}-1$, 且大于 0. 于是根据没有零点, 可得 $a\geq\sqrt[4]{8}$.

66. (15 points) 设 n 是 4 的倍数. 数列 $a_1,\ldots,a_n$, 满足 $a_1=1$, 并且对于任何 $1\leq i,j,k\leq n$, 如果 i,j,k 其中两个的和等于第三个, 那么 a_i,a_j,a_k 其中两个的和等于第三个.

(a) (6 points) 说明这样的数列必须是以下三种情况之一:

(1) 对于所有 k,$a_k=k$.

(2) 对于奇数 k,$|a_k|=1$; 对于偶数 k,$a_k=0$.

(3) 对于奇数 k,$|a_k|=1$; 对于除以 4 余 2 的正整数 k,$|a_k|=2$; 对于 4 的倍数 k,$a_k=0$.

Solution: 我们分两类: 如果 $a_2=0$, 那么根据 $2+i=(2+i)$ 我们知道 a_i 和 a_{i+2} 和 0 两个加起来等于第三个, 于是 a_i 和 a_{i+2} 要么相等, 要么是相反数. 从而满足 (2).

如果 $a_2\neq 0$, 那么 $a_2=2$. 我们再分两类. 如果 $a_3=3$, 假设 $a_k=k$ 对小于 n 的 k 成立, 其中 $n\geq 4$. 那么我们知道,a_n,$n-1$ 和 1 两个加起来等于第三个, 以及 a_n,$n-2$ 和 2 两个加起来等于第三个. 那么 a_n 能够得到的范围是 $\{n,n-2,2-n\}\cap\{n,n-4,4-n\}$, 因为 $n\geq 4$ 于是只有 n, 于是就是 (1).

最后就是 $a_3=\pm 1$. 那么 $a_2=2$ 以及 $a_1,a_3\in\{1,-1\}$ 可知 $a_4=0$. 和之前相同, 我们就有 k 是奇数的话,a_k 的绝对值是 2,k 是 4 的倍数,a_k 是 0, 否则 a_k 的绝对值是 2.

(b) (9 points) 设 $n=4k$,b_k 是满足题目条件的数列 $a_1,\ldots,a_n$ 的个数, 求 b_k 的通项公式.

Solution:

先说明 $a_{4t+2}=2$, 如果 $a_{4t+2}=-2$, 因为 n 是 4 倍数于是后面还有项. 考虑 $1,4t+3,4t+2$

以及 $1, 4t+1, 4t+2$ 知道 $a_{4t+1} = a_{4t+3} = -1$. 但是考虑 $2, 4t+1, 4t+3$ 就有矛盾. 于是 $a_{4t+2} = 2$ 而不能是 -2, 满足 (3).

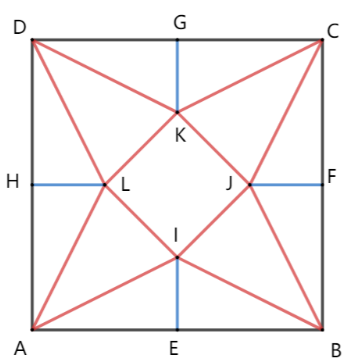
满足 (1) 的数列仅有一个, 满足 (2) 的数列都满足要求, 于是有 2^{2k-1} 个.

我们考虑 (3). 我们注意到考虑到 a_{4t+2}, 和 a_{2t+1} 比较要么是 $2a_{2t+1}$ 要么是 0, 根据绝对值为 2 那么只有 $a_{4t+2} = 2a_{t+1}$. 于是我们就有 $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k-1} = 1$.

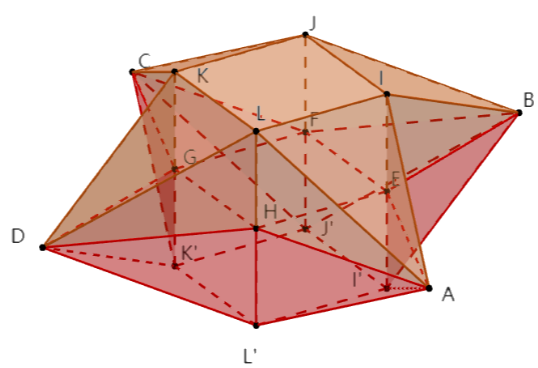
如果 $a_{2t+1} = a_{2l+1}$ 而且 $t - l \le n/2 - 1$ 是奇数, 那么我们有 a_{2t-2l} 必须和 $2a_{2t+1}$ 相同, 于是 a_{2t+1} 和 a_{2l+1} 不能同为 -1. 因此, 等于 -1 的 a_t 的下标 t 必然除以 4 同余. 可以说明满足该条件和 (3) 的数列都满足要求.

如果 k 是奇数, 那么大于 $2k-1$ 的除以 4 余 1 的下标有 $(k-1)/2$ 个, 除以 4 余 3 的下标有 $(k+1)/2$ 个. 但是因为有重复计算 $1, 2, 1, 0$ 周期的数列, 于是是要减 1. 于是算上 (1) 和 (2), 总数是 $b_k = 3 \times 2^{(k-1)/2} + 2^{2k-1}$. 如果 k 是偶数, 那么大于 $2k-1$ 的除以 4 余 1 的下标有 $k/2$ 个, 除以 4 余 3 的下标有 $k/2$ 个. 同理因为有重复计算 $1, 2, 1, 0$ 周期的数列, 于是是要减 1. 于是算上 (1) 和 (2), 总数是 $b_k = 2^{k/2+1} + 2^{2k-1}$.

67. (15 points) 现在有两张正方形的纸片, 两张纸片叠在一起不能装下任何体积的物品. 但是以枕头和枕套为灵感, 我们可以使用折纸的方式让他装下一定的体积. 如 (a) 图所示, 将正方形 $ABCD$ 纸片每一边的中点 E, F, G, H 作边的垂线, 然后取 I, J, K, L 使得 $EI = FJ = GK = HL$. 之后, 沿着三角形的折痕 ALI, BIJ, CJK, DKL 向纸内方向折,EI, FJ, GK, LH 向纸外方向折, 使得 IE, FJ, GK, LH 均垂直于 $ABCD$ 所在平面, 这样正方形 $IJKL$ 就被顶起来了. 然后将另一个正方形纸片作同样对称的操作, 于是就得到了如 (b) 图所示的立体. 其中 (b) 立体中的每一个字母对应的是 (a) 图中的字母折叠后的位置, 然后 I', J', K', L' 是对称的另一张纸的位置.



(a) 图



(b) 图

设正方形边长为 2 以及设 $EI = t$.

(a) (4 points) 现在需要让这个立体能够容纳尽量大的长方体. 那么 t 取何值时长方体 $IJKL - I'J'K'L'$ 的体积最大? 最大值是多少?

Solution: 长方体的底面是一个对角线 $2(1-t)$ 的正方形, 高是 $2t$. 于是体积是 $4(1-t)^2t$. 其最大的时候是 $y=\frac{1}{3}$, 其体积是 $\frac{16}{27}$.

现在需要让这个立体本身体积最大.

(b) (4 points) 请写出这个立体的体积关于 t 的关系表达式.

Solution: 剩下的椎体 $A-LII'L'$ 底面是一个 $\sqrt{2}(1-t)\times 2t$ 的长方形, 高是 $\sqrt{1-\frac{(1-t)^2}{2}}$. 那么总体积是 $\frac{8}{3}t(1-t)\sqrt{2-(1-t)^2}$. 于是立体的体积是 $4(1-t)^2t+\frac{8}{3}t(1-t)\sqrt{2-(1-t)^2}$.

(c) (7 points) 尽管无法求出 t 的值使得体积最大, 我们仍然可以找到体积比较大的 t 值. 设有理数 t 可以表示成 $t=p/q$, 其中 p,q 是互质的正整数. 请找出在所有使得立体的体积是一个大于 1.4 的有理数的 t 中, 分母 q 最小的一个.

Solution: 我们知道 $1-t=\frac{p^2+2pq-q^2}{p^2+q^2}$. 当 $t=6/13$ 时其体积是 $3080/2197>1.4$. 注意到当 p,q 互质的时候, 其分母和分子的最大公约数是 2. 于是我们只用检验 $p^2+q^2\le 26$ 的其他情况. 满足这些的是 $(p,q)=(1,1),(2,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(1,4),(4,1),(3,4),$ $(4,3)$,$(1,5),(5,1)$. 其中能够给出一个介于 $[0,1]$ 且分母 ≤ 13 的 (p,q) 只有 $(p,q)=(1,1)$ 以及 $(1,2),(2,3),(3,4)$, 最后 $(3,4)$ 的情况分母大于 13,$(1,1)$ 的情况 $t=0$,$(1,2)$ 的情况 $t=\frac{4}{5}$ 体积是 $272/375<1$, 所以 $\frac{6}{13}$ 即为所求.

注: 您可以用到以下事实: 对于满足 $u^2+v^2=2$ 上的正数 u,v,u,v 均是正有理数当且仅当存在正整数 p,q 使得 $u=\frac{p^2+2pq-q^2}{p^2+q^2}$.

68. (15 points) 设 D 是模长小于 1 的复数的集合.

(a) (6 points) 对任何 $a,z_1,z_2\in D$, 证明:$1+az_1+\bar{a}z_2+z_1z_2\neq 0$.

Solution: 我们采用反证法. 如果 $1+az_1=-\bar{a}z_2-z_1z_2$, 那么就有 $|1+az_1|=|\bar{a}z_2+z_1z_2|=|z_2|\cdot|\bar{a}+z_1|<|\bar{a}+z_1|$. 于是我们就用 $|1+az_1|^2<|\bar{a}+z_1|^2$, 那么展开消掉相同的项有 $1+|az_1|^2<|\bar{a}|^2+|z_1|^2$, 于是 $(1-|a|^2)(1-|z_1|^2)<0$, 矛盾.

(b) (9 points) 如果复数 a,b,c,d 满足对于所有 $z_1,z_2\in D$ 均有 $a+bz_1+cz_2+dz_1z_2\neq 0$, 证明: 对于任何 $z\in D$,$a+dz\neq 0$.

Solution: 这个结论等价于 $|d|>|a|$. 我们希望找到 $z_1\in D$ 使得 $z_2=-\frac{a+bz_1}{c+dz_1}\in D$, 这就意味着 $|a+bz_1|<|c+dz_1|$. 由于 $|d|>|a|$, 而且 $\min(|c|-|b|,|b|-|c|)\le 0$ 那么 $|d|-|a|>|c|-|b|$ 和 $|d|-|a|>|b|-|c|$ 总有一个成立. 我们分两类. 如果 $|d|-|a|>|c|-|b|$, 于是 $r=\frac{|a|+|c|}{|d|+|b|}<1$ 那么我们取 z_1 使得 $\arg(bz_1)=\pi$, 然后 $|r|<|z_1|<1$. 于是 $|a+bz_1|=|a|-|z_1||b|<|d||z_1|-|c|\le|dz_1+c|$. 如果 $|d|-|a|>|b|-|c|$, 于

是 $r = \frac{|a|-|c|}{|d|-|b|} < 1$ 那么我们取 z_1 使得 $\arg(dz_1) = \arg(c)$, 然后 $|r| < |z_1| < 1$. 于是 $|c+dz_1| = |c| + |d||z_1| > 1 + |b||z_1| \geq |az_1 + b|$, 矛盾.

69. (17 points) 西克曼骰子是一对均匀的六面正方体骰子, 其中一颗上面的点数是 $1, 2, 2, 3, 3, 4$ 而另一颗是 $1, 3, 4, 5, 6, 8$. 将两颗骰子一起投出的时候, 他们的和的分布列恰好和两颗均匀的 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的骰子一起投出的和的分布列相同. 设 $n \geq 2$ 是一个正整数, 现在我们需要探究将西克曼骰子推广到 n 面骰子的情况. 我们希望造出两个均匀的 n 面骰子, 一颗写着 $p_1, \ldots, p_n$, 另一颗写着 $q_1, \ldots, q_n$, 所有写上的数字均为正整数. 将这两颗骰子一起投出的时候, 他们的和的分布列恰好和两颗均匀的 $1, \ldots, n$ 的骰子一起投出的和的分布列也相同. 说两颗均匀的 n 面骰子等价, 如果他们骰子的结果的分布列相同. 例如写着 $1, 1, 3, 4, 5, 6$ 和写着 $6, 5, 1, 4, 3, 1$ 的骰子是等价的.

(a) (4 points) 证明: 如果 n 是质数, 如果要达成上述效果, 两颗骰子只能是两颗分别写着 $1, 2, \ldots, n$ 的骰子 (以及何其等价的骰子).

Solution: 设 $P(x) = \sum_{i=1}^{n} X^{p_i - 1}$,$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} X^{q_i - 1}$. 于是 $P(x)Q(x) = (1 + x + \cdots + x^{n-1})^2$. 设 $R(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$. 那么 $P(x)Q(x) = R(x)^2$. 注意到 P, Q 都是多项式且最小的和最大的情况只有一种, 于是 P, Q 都是首一多项式. 因为 $R(x)$ 是一个首一多项式, 而且不能分解成两个非常值的振系数多项式的乘积, 那么要么 $P(x) = R(x)^2, Q(x) = 1$ 要么 $P(x) = R(x), Q(x) = R(x)$. 前者不成立, 因为 $P(1) = Q(1) = n$.

(b) (7 points) 证明: 如果 n 是合数, 并且 n 有 d 个不同的因数, 那么一共至少有 $d-1$ 种互不等价的骰子可以作为其中一颗骰子.

Solution: 我们设 $n = ab$ 其中 $a, b \geq 2$. 一颗骰子上面的数是 $1 + u + v : 0 \leq u \leq a-1, 0 \leq v \leq b-1$(可以重复, 重复的 t 在骰子上写上满足 $u + v = t$ 的 (u, v) 对的个数个 t), 另一个骰子上面是 $1 + au + bv : 0 \leq u \leq b-1, 0 \leq v \leq a-1$(同上的, 可以重复.) 那么两个骰子的和即为 $2 + u_1 + v_1 + au_2 + bv_2 : 0 \leq u_1, v_2 \leq a-1, 0 \leq v_1, u_2 \leq b-1$. 然后注意到可以将其重新组合成 $1 + u_1 + au_2 : 0 \leq u_1 \leq a-1, 0 \leq u_2 \leq b-1$ 以及 $1 + v_1 + bv_2 : 0 \leq v_1 \leq b-1, 0 \leq v_2 \leq a-1$. 于是两颗骰子的总和的分布和两个 $1, 2, \ldots, n$ 的总和的分布相同.

注意到对每一对 a, b 满足 $ab = n$, 一颗骰子的最大数是 $a + b - 1 \leq n$, 另一颗的最大数是 $2n - a - b + 1 \geq n$. 当且仅当 a, b 中一个是 1 成立等号. 那么对于任何一对 (无序对) 乘积等于 n 的约数 a, b, 他们对应了一对唯一的骰子 (观察最大的数就可以对应唯一一对 ab.), 除了 $1, n$ 这一对. 那么我们知道不同的骰子总数至少 $d-1$.

(c) (6 points) 设 n 有 d 个不同的因子, 求最小的 n, 使得至少有 $d+1$ 种互不等价的骰子可以作为其中一颗骰子.

Solution: $n = 8$. 除了 (b) 列出的三个以外, 还可以构造一对骰子 $1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7$, 另一

个是 $1,3,3,5,5,7,7,9$. 注意到不存在两个数 $a+b=8$ 但是乘积是 8, 于是和 (b) 的构造不同.

当 $n=2,3,5,7$ 根据 (a) 只有一种骰子.

当 $n=4$, 我们和 (a) 一样, 设 $P(x)=\sum_{i=1}^{n}X^{p_i-1}$,$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}X^{q_i-1}$. 设 $R(x)=1+x+x^2+x^3=(1+x)(1+x^2)$, 同理 $P(x)$ 是一个首一多项式,$P(1)=4$, 那么 $P(x)$ 只能是 $R(x)^2$ 的首一因式. 那么 $P(x)=(1+x)^2,(1+x)(1+x^2),(1+x^2)^2$ 之一, 只有三种.

当 $n=6$, 我们和 (a) 一样设 $P(x)=\sum_{i=1}^{n}X^{p_i-1}$,$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}X^{q_i-1}$. 设 $R(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$, 同理 $P(x)$ 是一个首一多项式,$P(1)=6$, 那么 $P(x)$ 只能是 $R(x)^2$ 的首一因式, 并且 $P(x)$ 包含 $(1+x)(1+x+x^2)$. 那么 $P(x)=(1+x)(1+x+x^2),(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2),(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2$ 之一, 只有三种.

综上,$n=8$ 为所求.

注: 您可以直接使用以下事实: 对于质数 p,$1+x+\cdots+x^{p-1}$ 无法分解成两个非常值的整系数多项式的乘积.

70. (17 points) 给定 $n\geq 2$ 是一个正整数. 对整系数多项式 P, 假设集合 $A_i=\{m\in\mathbb{Z}|P(m)=i\}$. 设 $T=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. 如果 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 至少两个集合非空:

(a) (7 points) 求 $\operatorname{card}(T)$ 的最大可能值. 这个值和 n 有关.

Solution: 在 $n\leq 4$ 的时候,$k=n+1$, 除此之外,$k=n$.$n\leq 4$ 的构造在下一题,$n\geq 5$ 的构造就是 $P(n)=n$.

我们假设 $k>n$, 由抽屉原理, 我们存在某个 A_i 使得 $|A_i|\geq 2$. 我们设 A_i 中最小和最大的元是 m,M. 不妨 $m=0$, 否则可以平移. 设 $T=|A_1\cup\cdots\cup A_n|$. 并且 $|P(u)-i|$ 只能是 $|u(u-M)|$ 的倍数. 如果 $|u(u-M)|\geq n$, 那么要么 $u\notin T$ 要么 $u\in A_i$.

对于 $n=2$, 我们如果 $M=1$ 或者 $M>2$, 对于任何 $u\in\mathbb{Z}$, 那么 $|P(u)-i|\geq 2$, 于是只有 A_i 非空. 于是只能 $M=2$, 进而 $|P(1)-i|\leq 1$, 于是 T 元素个数最多 3 个.

对于 $n=3$, 我们如果 $M=1$, 可以知道 $|P(-2)-i|=|P(3)-i|>2$, 于是 T 最多只有四个元.$M=2$ 的时候仅有 $|P(1)-i|$ 可能小于等于 2, 于是 T 只有至多 3 个元.$M=3$ 的时候仅有 $|P(1)-i|,|P(2)-i|$ 可能小于等于 2, 于是 T 只有至多 4 个元.$M>3$ 的时候不可能存在 $T\backslash A_i$ 的元素. 于是 T 元素个数最多 4 个.

对于 $n=4$, 我们如果 $M=1$, 可以知道 $|P(\leq -2)-i|=|P(\geq 3)-i|>2$, 于是 T 最多只有四个元.$M=2$ 的时候 $|P(\leq -2)-i|=|P(\geq 4)-i|>2$, 于是 T 只有至多 4 个元.$M=3$ 的时候仅有 $|P(1)-i|,|P(2)-i|$ 可能小于等于 3, 于是 T 只有至多 4 个元.$M=4$ 的时候仅有 $|P(1)-i|,|P(3)-i|$ 可能小于等于 3, 于是 T 只有至多 5 个元.$M\geq 5$ 的时候不可能存在 $T\backslash A_i$ 的元素. 于是 T 元素个数最多 5 个.

对于更大的 n, 如果 $M\geq n+1$, 有知道 $|P(u)-i|\geq n$, 那么只有 A_i 非空, 矛盾. 如果 $M=n$, 我们知道 $u=M/2$ 知道 $|P(u)-i|\leq\lfloor M/2\rfloor\lceil M/2\rceil$, 这个数在 $n\geq 5$ 的时候

大于等于 n, 那么 $\lfloor M/2\rfloor, \lceil M/2\rceil \in A_i$. 当 n 是奇数的时候, 我们知道对于所有 $1 \le t \le n-1$,$|u(u-\lfloor M/2\rfloor)(u-\lceil M/2\rceil)(u-n)| \ge n$. 当 n 是偶数的时候, 我们知道对于所有 $1 \le t \le n-1$,$|u(u-M/2)(u-n)| \ge n$(四个乘积一个至少 $n/2$, 有一个至少 2). 于是也只有 A_i 非空. 如果 $M = n-1$,$|P(\le -1) - i| = |P(\ge n) - i| > n-1$, 于是只有至多 n 个在 T 内. 如果 $M = n-2$,$|P(\le -2) - i| = |P(\ge n) - i| > n-1$, 于是只有至多 $n+1$ 个在 T 内. 但是如果取到, 则有 $|P(-1) - i| = |P(n-1) - i| = n-1$ 于是 $P(-1) = P(n-1)$, 和之前 $M = n$ 的情况. 如果 $M \le n-3$, 我们有 $|P(\ge \lceil \frac{M+n}{2}\rceil)| \ge n$ 以及 $|P(\le \lfloor \frac{M-n}{2}\rfloor)| \ge n$, 于是只有中间的 n 的数在 T 内. 于是上界证毕.

(b) (10 points) 假设上一个问题的最大可能值是 k_n(是一个和 n 有关的数). 求所有的正整数 n 满足: 如果整系数多项式 P, 使得 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 至少两个集合非空且 $\text{card}(T) = k_n$, 那么 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 都非空.

Solution: $n = 2$ 或者 $n \ge 6$

当 $n = 2$ 的时候, 显然成立.

当 $n = 3$ 的时候,$P(x) = 3 - (1-x^2)(2-x)$ 能使得 $2, 1, -1 \in A_3, 0 \in A_1$.

当 $n = 4$ 的时候,$P(x) = 1 + (4-x^2)$ 能使得 $1, -1 \in A_4, 2, 0, -2 \in A_1$.

当 $n = 5$ 的时候,$P(x) = 5 - (4-x^2)(1-x^2)$ 能使得 $2, 1, -1, -2 \in A_5, 0 \in A_1$.

当 $n \ge 6$ 的时候, 如果两个 A_i 有两个元素, 我们和前一问一样, 设 M 是最大的元素,0 是最小的元素. 如果 $M \ge n+1$, 有知道 $|P(u) - i| \ge n$, 那么只有 A_i 非空, 矛盾. 如果 $M = n, n-1$, 我们知道 $u = \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$ 知道 $|P(u) - i| \le \lfloor (n-1)/2\rfloor \lceil (n-1)/2\rceil$, 这个数在 $n \ge 6$ 的时候大于等于 n, 那么 $\lfloor M/2\rfloor, \lceil M/2\rceil \in A_i$. 当 M 是奇数的时候, 我们知道对于所有 $0 \le t \le M$,$|u(u-\lfloor u/2\rfloor)(u-\lceil u/2\rceil)(u-M)| \ge n$. 当 M 是奇数的时候, 我们知道对于所有 $0 \le t \le M$,$|u(u-u/2)(u-M)| \ge n$(四个乘积一个至少 $(n+1)/2$, 有一个至少 2). 于是也只有 A_i 非空. 设 $P(x) = (x)(x-M)Q(x) + i$, 如果 $M = n-2$, 因为 $2(n-2) > n/2$ 那么 $|Q(M-2), Q(M+1)| \le 1$, 于是只能相等, 进而 $P(M+1) - P(M-2) > n$, 矛盾.$M = n-3$ 的时候因为 $n-2 > n/2$ 于是 $Q(M+1) = Q(M-1) = \pm 1$, 进而只能相等. 于是这就规约到 $M = n-1$ 的情形. 最后, 在 $M \le n-4$ 的时候, 在 $u \ge \lfloor \frac{M+n}{2} \rfloor$ 和 $u \le \lceil \frac{M-n}{2} \rceil$ 的时候 $|(u-M)u| > n-1$, 于是 T 只能是中间 $n-1$ 个数, 矛盾.

因此, 没有两个数在同一个 A_i 里. 进而因为 $k_n = n$ 得知所有的 A_i 各有一个元素.

注: 本大题两问都有点复杂, 如果答案是对的中最多扣一至两分. 如果大意是对的即可满分.

71. (17 points) 如果我们知道一个圆锥曲线上的有理点, 我们可以采用割线的方法找到其他所有的有理点. 例如, 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上有一个点 $A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. 我们设一条过 A 的直线斜率是 k, 那么我们就可以通过韦达定理知道这条直线和圆的另一个交点是 $(\frac{-3-8k+3k^2}{5(1+k^2)}, \frac{4-6k-4k^2}{5(1+k^2)})$. 我们称 $x = \frac{-3-8k+3k^2}{5(1+k^2)}, y = \frac{4-6k-4k^2}{5(1+k^2)}$ 是 $x^2 + y^2 = 1$ 对点 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 的通解.

(a) (4 points) 对点 $(0, 0)$ 作割线, 求圆锥曲线 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$ 的通解.

Solution: 设 $y = kx$, 其中 $x \neq 0$, 那么我们就有 $x = -\frac{D+Ek}{A+Bk+Ck^2}$, 相应的 $y = -\frac{Dk+Ek^2}{A+Bk+Ck^2}$

(b) (5 points) 假设某个圆锥曲线 C 对于点 P 的通解是 $x = \frac{-5+k+k^2}{2+k+k^2}, y = \frac{-4-9k-2k^2}{2+k+k^2}$. 求 C 的表达式和 P 的坐标.

Solution: 我们考虑 $k = 0$ 得到坐标 $(-5/2, -2)$, 让 $k = 1$ 得到坐标 $(-3/4, -15/4)$, 于是这个点是 $(1, -2)$. 作代换, 知道 $x = \frac{-7}{2+k+k^2} + 1$, 那么根据上一题, 我们知道方程是 $2(x-1)^2 + (x-1)(y+2) + (y+2)^2 + 7(x-1) = 0$, 也就是 $2x^2 + xy + y^2 + 5x + 3y - 3 = 0$.

(c) (8 points) 假设 $A(3,4), B(0,0), C(3,0)$, 点 D 满足 $\measuredangle ADB = \measuredangle BDC$, 其中 $\measuredangle$ 指的是有向角,$\measuredangle XYZ$ 是直线 XY 逆时针绕 Y 旋转转到直线 YZ 的最小正角度.(例如, 如果 $\triangle ABC$ 是逆时针排列的正三角形的三个顶点, 那么 $\measuredangle BAC = 60°$ 而 $\measuredangle CAB = 120°$.) 求 D 满足的方程, 并且求这个方程上的所有有理点的通解.

Solution: 设 $D(x,y)$, 于是我们可以知道 $k_{AD} = \frac{y-4}{x-3}, k_{BD} = y/x, k_{CD} = \frac{y}{x-3}$. 由正切的差角公式, 有 $\frac{k_{AD}-k_{BD}}{1+k_{AD}k_{BD}} = \frac{k_{BD}-k_{CD}}{1+k_{BD}k_{CD}}$. 带入整理得 $2x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 3y^3 = 6x^2 - 9xy - 6y^2$. 设 $y = kx$, 那么有理点的通解为 $x = \frac{6-9k-6k^2}{2-3k+2k^2-3k^3}, y = \frac{6k-9k^2-6k^3}{2-3k+2k^2-3k^3}$.

72. (17 points) 设 $a > 1$, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 上有动点 P, 过 $(0,0)$ 作 P 的切线的平行线交椭圆于 Q, R, 其中 Q, P, R 是在椭圆上逆时针排列. 点 P 运动的时候, 动点 $S(\tan(\frac{\angle QPR}{2}), \frac{|PQ|}{|PR|})$ 也随之运动.S 的运动的轨迹是 C, 是一个封闭图形.

(a) (12 points) 求曲线 C 的方程: 求出关于 x, y, a 的多项式 $F(x,y,a) = 0$, 满足 C 是 $F(x,y,a) = 0$ 上 $x, y > 0$ 的点以及 $F(x,y,a)$ 不能分解成两个非常数的多项式的乘积.

Solution: 设 $P(a\cos(t+\frac{\pi}{4}), \sin(t+\frac{\pi}{4})), Q(a\cos(t-\frac{\pi}{4}), \sin(t-\frac{\pi}{4})), R(-a\cos(t-\frac{\pi}{4}), -\sin(t-\frac{\pi}{4}))$. 我们可以计算出 $k_{PQ} = -1/(a\tan(t)), k_{PR} = \tan t/a$, 于是我们可以计算出

$$x = \tan(\frac{\angle QPR}{2}) = \frac{\pm\sqrt{(k_{PQ}^2+1)(k_{PR}^2+1)} - (1 + k_{PQ}k_{PR})}{k_{PQ} - k_{PR}}$$

带入, 注意到半角的正切值是正的, 得

$$x = \frac{1}{a}(\sqrt{(a^2\sin^2 t + \cos^2 t)(a^2\cos^2 t + \sin^2 t)} + (a^2 - 1)\sin(t)\cos(t))$$

注意到

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a}(\sqrt{(a^2\sin^2 t + \cos^2 t)(a^2\cos^2 t + \sin^2 t)} - (a^2 - 1)\sin(t)\cos(t))$$

那么我们知道 $a(x + 1/x) = 2\sqrt{(a^2\sin^2 t + \cos^2 t)(a^2\cos^2 t + \sin^2 t)}$

经过直接计算得 $y = \sqrt{\frac{a^2\sin^2 t + \cos^2 t}{a^2\cos^2 t + \sin^2 t}}$, 那么我们可以算出来 $a(x+1/x)(y+1/y) = 2(a^2+1)$. 整理后, 即为 $a(x^2+1)(y^2+1) - 2(a^2+1)xy = 0$.

注: 如果得到一个不是最简的结果那么将扣两分.

(b) (5 points) 证明:C 所围成的面积至多 $2a\ln a+2(1-\ln 2)a$.

> **Solution:** 注意到 $2(a^2+1)=a(x+1/x)(y+1/y)\geq 2a(x+1/x)$ 我们有 $x,y\leq a$. 然后我们有 $a(xy+1)^2\leq a(x^2+1)(y^2+1)=2(a^2+1)xy$, 我们有 $xy\leq 2a$. 那么这个图形在 $xy\leq 2, 0\leq x,y\leq a$ 的范围内, 面积是 $2a+2a\ln(a/2)=2a\ln a+2(1-\ln 2)a$.

注: 唯一一个在本题可以用到的关于积分的事实是: 设 $a,b,c>0$ 且 $b<c$, 那么曲线 $y=a/x, x=b, x=c, y=0$ 所围成区域的面积等于 $a\ln(c/b)$.

73. (17 points) 设 $\theta<2\pi/3$. 设 $u_1,\ldots,u_n$ 都是非零复数, 并且对于所有 $1\leq \mathrm{i}\leq n, 1\leq j\leq n$, 均有 $\arg\frac{u_i}{u_j}\in[0,\theta]\cup[2\pi-\theta,2\pi)$. 其中 arg 表示的是复数的辐角主值. 设复数 $a_1,\ldots,a_n$, 满足对于所有 $1\leq i\leq n$,$|a_i-1|\leq\frac{1}{2}$. 记 $S=a_1u_1+\cdots+a_nu_n$,$T=u_1+\cdots+u_n$.

(a) (6 points) 证明:$S\neq 0$.

> **Solution:** 设 $R=|u_1|+\cdots+|u_n|$. 由题设条件, 我们不妨设 $\arg u_i\in[-\theta/2,\theta/2]$(为了简便我们可以让辐角为负), 因此,$|T|>\cos(\theta/2)R$. 然后我们有 $|S-T|\leq|1-a_1||u_1|+\cdots+|1-a_n||u_n|\leq\frac{R}{2}$. 于是 $|S|\geq|T|-|S-T|\geq\cos(\theta/2)R-\frac{1}{2}R>0$.

现在利用上面的命题证明以下. 设 $a_{i,j}$ 是 n^2 个复数, 其中 $1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n$. 并且对于所有 i,j, 均有 $|a_{i,j}-1|\leq\frac{1}{2}$. 记所有 $1,2,\ldots,n$ 的排列为 $1,2,\ldots,n$ 各出现一次的 n 项数列 $b_1,\ldots,b_n$. 设和 $S=\sum_{(b_1,\ldots,b_n)\text{是一个排列}}a_{1,b_1}a_{2,b_2}\ldots a_{n,b_n}$.

(b) (11 points) 证明 $S\neq 0$.

> **Solution:**
>
> 我们使用归纳法证明以下两条:
>
> (1)$S\neq 0$
>
> (2) 对于所有 $1\leq k\leq n$ 设 S' 是将 $a_{k,1},\ldots,a_{k,n}$ 改成另一组满足条件的 $a'_{k,1},\ldots,a'_{k,n}$ 之后求和的结果, 那么 $\arg\frac{S}{S'}\in[0,\pi/2]\cap[2\pi-\pi/2,2\pi)$.
>
> $n=1$ 显然满足两条. 设 $n-1$ 成立.
>
> 我们设 A 是一个 $n\times n$ 数表, 第 i 行第 j 列是 $a_{i,j}$. 设和 $S(A)$ 是对这个数表里的数求的和. 根据排列的性质, 我们知道两点: 如果我们将两行互换, 这个 $S(A)$ 不变. 这是因为 b_i 和 b_j 互换所得到的排列仍然是一个排列, 是所有的排列到所有的排列的一一对应. 另外就是将 $a_{i,j}$ 和 $a_{j,i}$ 对换 (沿着对角线对称),$S(A)$ 仍然不变, 因为我们可以考虑排列 $b_{b_k}=k$, 这个构成所有排列到所有排列的双射. 那么 (2) 等价于将第 k 行改变以后 S' 和 S 的角度差不超过 $\pi/2$. 由此, 我们证明只需要证明这个对改变第 n 行成立, 以及使用第 (2) 条的时候可以将“行”变成“列”.
>
> 设 A 去掉第 n 行, 然后将第 n 列去掉, 原先的第 k 列用第 n 列代替的 $(n-1)\times(n-1)$ 数表叫做 A_k,(于是 A_n 是直接去掉第 n 行和第 n 列的数表.) 那么我们对于任何一个排列 $b_1,\ldots,b_n$, 我们设 $b_n=u$, 然后 $b_k=n$, 我们给另一组排列 $b'_1,\ldots,b'_{n-1}$ 使得 $b'_i=b_i$ 如

果 $i \neq k$, 然后 $b_k = u$. 这样构成了一个 $1, 2 \ldots, n$ 的排列到 $1, \ldots, n$ 的排列满足 $b_n = u$ 的排列的双射. 在求和 $S(A)$ 中 $a_{n,u}$ 将会乘以所有 $a_{1,b_1} \ldots a_{n-1,b_{n-1}}$ 而通过将第 n 行变成第 u 列,$a_{k,n}$ 是数表 A_u 的第 k 行第 u 个, 于是 $a_{n,u}$ 将会乘积 $S(A_u)$, 于是我们就有 $S(A) = a_{n,1}S(A_1) + \cdots + a_{n,n}S(A_n)$.

我们知道 A_i 和 A_j 的第 i 和 j 列不同. 将 A_i 的第 i, j 列互换之后,A_i, A_j 仅有第 i 列不同, 由归纳法知道 $\arg \frac{S(A_i)}{S(A_j)}$ 是在 $[0, \pi/2] \cup [2\pi - \pi/2, 2\pi)$.

由前一问可以知道对于任何一组 $a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}$, 和 $S(A)$ 不为 0, 并且对于 $\theta = \pi/2$, 由其证明过程可以得到

$$\left|\arg \frac{S(A)}{S(A_1) + \cdots + S(A_n)}\right| \leq \arcsin \frac{|S(A) - (S(A_1) + \cdots + S(A_n))|}{|S(A_1) + \cdots + S(A_n)|} \leq \arcsin \frac{1/2}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

于是角度 $\arg \frac{S(A)}{S(A_1)+\cdots+S(A_n)}$ 在 $[0, \pi/4] \cup [2\pi - \pi/4, 2\pi]$. 于是我们就有 $\arg \frac{S(A)}{S(A')}$ 在 $[0, \pi/2] \cup [2\pi - \pi/2, 2\pi]$.

注意: 本题用矩阵的 Permanent(积和式) 记号写, 即使不证明 (但是需要提到)Permanent 的性质也不扣分, 因为证明的本质是加强归纳法.

注: 为了书写简洁, 本题允许使用矩阵的积和式 (Permanent) 记号写, 即使不证明 (但是需要提到) 积和式的性质也不扣分.

74. (17 points) 卡方分布是一个概率统计中常用的分布, 拥有 k 个自由度的卡方分布被称作 χ_k^2. 他的定义是 k 个独立的正态分布 $N(0,1)$ 随机变量的平方和. 现在想要做一些假设检验, 但是如果无法接触到卡方表, 那么只能推算显著水平.

现在有一系列独立的, 期望为 0 的正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 随机变量 $X_1, \ldots, X_N$. 现在需要通过计算平方和的平均值 $\overline{X^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i^2$ 检验是否这些随机变量来自于 $\mathcal{N}(0,1)$. 已知显著性水平 $0 < \alpha < 1$ 以及假设 $N > 4\ln(\frac{1}{\alpha})$.

在估算概率的时候, 人们常常结合矩母函数和马尔科夫不等式证明. 设随机变量 X, 函数 $F(t) = E(e^{tX})$.k 个自由度的卡方分布 χ_k^2 的矩母函数为 $F(t) = \frac{1}{(\sqrt{1-2t})^k}$. 马尔科夫不等式指的是如果一个非负的随机变量 X 以及正实数 t, 我们有 $P(X \geq t) \leq E(X)/t$.

(a) (8 points) 证明: 如果 $\overline{X^2} < 1 - 2\sqrt{\frac{\ln(\frac{1}{\alpha})}{N}}$, 我们有 $1 - \alpha$ 的把握认为这些随机变量不来自于 $N(0,1)$.

Solution: 我们证明: 对于任何 $0 < t < 1$,

$$P(X \leq k(1-t)) \leq ((1-t)e^t)^{k/2}$$

由马尔科夫不等式以及 $X \sim \chi_k^2$ 的矩母函数, 对于正数 s, 我们可以得到

$$P(X \geq k(1+t)) = P(e^{sX} \geq e^{sk(1+t)}) \leq \frac{E(e^{sX})}{e^{sk(1+t)}} = \frac{1}{(\sqrt{1-2s})^k e^{sk(1+t)}}$$

记 $f(s) = \ln(\frac{1}{(\sqrt{1-2s})^k e^{sk(1+t)}}) = -k(\frac{1}{2}\ln(1-2s) + s(1+t))$. 那么 $f'(s) = -k(-\frac{1}{1-2s} + 1 + t)$.

令导数等于 0 我们可以得到 $s=\frac{t/2}{1+t}$. 由此可以得到

$$P(X\geq k(1+t))\leq \frac{1}{(\sqrt{1-2s})^k e^{sk(1+t)}}=(\frac{1+t}{e^t})^{k/2}$$

故我们只需证明, 在 $\varepsilon=2\sqrt{\frac{\ln(\frac{1}{\alpha})}{N}}$ 的时候, 有 $((1-\varepsilon)e^{\varepsilon})^{N/2}\leq\alpha$. 两边取对数, 以及 $\ln(\alpha)/(N/2)=\varepsilon^2/2$ 我们只用证明当 $\ln(1-\varepsilon)+\varepsilon\leq-\varepsilon^2/2$. 当 $\varepsilon=0$ 的时候成立, 求导只用证明 $-\frac{1}{1-\varepsilon}+1\leq-\varepsilon$. 注意到左边是 $-\varepsilon/(1-\varepsilon)$, 比右边小, 即证.

(b) (9 points) 证明: 如果 $\overline{X^2}>1+t$, 其中 t 是方程 $t^2=\frac{2\ln(\frac{1}{\alpha})}{N}(2+\frac{4}{3}t)$ 的正根, 我们也有 $1-\alpha$ 的把握认为这些随机变量不来自于 $N(0,1)$.

Solution:
我们证明: 对于任何 $t>0$,

$$P(X\geq k(1+t))\leq((1+t)e^{-t})^{k/2}$$

和上一问同理, 对于负数 s, 我们可以得到

$$P(X\leq k(1-t))=P(e^{sX}\geq e^{sk(1-t)})\leq\frac{E(e^{sX})}{e^{sk(1-t)}}=\frac{1}{(\sqrt{1-2s})^k e^{sk(1-t)}}$$

和上一问同理, 取 $s=\frac{-t/2}{1-t}$. 由此可以得到

$$P(X\geq k(1+t))\leq\frac{1}{(\sqrt{1-2s})^k e^{sk(1-t)}}=((1-t)e^t)^{k/2}$$

我们只需证明,$((1+t)e^{-t})^{N/2}\leq\alpha$. 两边取对数, 就是 $\ln(1+t)-t\leq 2\ln(1/\alpha)/N$. 设 $E=2\ln(1/\alpha)/N$, 我们只要证明如果 $t^2=E(2+\frac{4}{3}t)$, 那么 $\ln(1+t)-t\leq E$, 也就是 $\ln(1+t)-t\leq-\frac{t^2}{2+\frac{4}{3}t}$, 也就是说 $\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2+4t/3}\leq 0$. 设左边是 $F(t)$, 注意到 $F(0)=0$,$F'(t)=-t^3/(2t+3)^2(t+1)$, 于是 $F(0)$ 是最大值, 即证.

75. (17 points) 设严格递增数列 $\{a_n\}$ 每一项都是正整数, 并且满足对于所有 $n\geq 1$,$a_{a_n}=3n$. 已知该数列存在且唯一.

(a) (9 points) 证明: 对于所有 n, 均有 $\frac{1}{1\cdot a_1}+\frac{1}{2\cdot a_2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot a_n}\leq\frac{44}{63}+\frac{2}{3}\ln(\frac{4}{3})$

Solution: 我们可以写出 a_n 的公式: 设 $3^t\leq n<3^{t+1}$. 如果 $3^t\leq n<2\times 3^t$, 就有 $a_n=n+3^t$. 如果 $2\times 3^t\leq n<3^{t+1}$, 就有 $a_n=3n-3^{t+1}$. 那么我们可以得到, 对于所有 t,

有

$$\frac{1}{3^t a_{3^t}}+\frac{1}{(3^t+1)a_{3^t+1}}+\cdots+\frac{1}{(3^{t+1}-1)a_{3^{t+1}-1}}$$
$$=\frac{1}{3^t a_{3^t}}+\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{(3^t+k)a_{3^t+k}}+\frac{1}{2\times 3^t a_{2\times 3^t}}+\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{(2\times 3^t+k)a_{2\times 3^t+k}}$$
$$=\frac{1}{3^t\times 2\times 3^t}+\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{(3^t+k)(2\times 3^t+k)}+\frac{1}{3^t\times 2\times 3^t}+\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{(2\times 3^t+k)\times 3\times(3^t+k)}$$
$$=\frac{1}{3^t\times 2\times 3^t}+\frac{1}{3^t}\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{3^t+k}-\frac{1}{2\times 3^t+k}+\frac{1}{2\times 3^t\times 3^{t+1}}+\frac{1}{3^{t+1}}\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{3^t+k}-\frac{1}{2\times 3^t+k}$$
$$=\frac{4}{3}(\frac{1}{2\times 9^t}+\frac{1}{3^t}\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{3^t+k}-\frac{1}{2\times 3^t+k})$$

我们知道 $\frac{3}{7t}+\frac{4}{7(t+1)}-\ln\frac{t+1}{t}$ 关于 $t>3$ 递增, 于是我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{3^t+k}-\frac{1}{2\times 3^t+k}\\&=-\frac{3}{7\times 3^t}-\frac{1}{7\times 2\times 3^t}+\frac{4}{7\times 3^{t+1}}\\&+\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{3}{7(3^t+k-1)}+\frac{4}{7(3^t+k)}-\frac{3}{7(2\times 3^t+k-1)}-\frac{4}{7(2\times 3^t+k)}\\&<-\frac{13}{14\times 3^{t+1}}+\sum_{k=1}^{3^t-1}\ln\frac{3^t+k}{3^t+k-1}-\ln\frac{2\times 3^t+k}{2\times 3^t+k-1}\\&=-\frac{13}{14\times 3^{t+1}}+\ln\frac{2\times 3^t}{3^t}-\ln\frac{3\times 3^t}{2\times 3^t}=-\frac{13}{14\times 3^{t+1}}+\ln\frac{4}{3}\end{aligned}$$

于是就有

$$\frac{1}{3^t a_{3^t}}+\cdots+\frac{1}{(3^{t+1}-1)a_{3^{t+1}-1}}<\frac{4}{3}(\frac{1}{2\times 9^t}-\frac{13}{42\times 9^t}+\frac{1}{3^t}\ln\frac{4}{3})=\frac{4}{3}(\frac{4}{21\times 9^t}+\frac{1}{3^t}\ln\frac{4}{3})$$

我们不妨设 $3^t>n$, 因此, 我们不妨求和求到 $\frac{1}{(3^{t+1}-1)a_{3^{t+1}-1}}$, 得到

$$\frac{1}{1a_1}+\cdots+\frac{1}{(3^{t+1}-1)a_{3^{t+1}-1}}<\frac{2}{3}+\frac{4}{3}(\frac{4}{21\times 8}(1-\frac{1}{9^t})+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^t})\ln\frac{4}{3})<\frac{44}{63}+\frac{2}{3}\ln\frac{4}{3}$$

(b) (8 points) 证明: 存在正整数 n, 使得 $\frac{1}{1\cdot a_1}+\frac{1}{2\cdot a_2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot a_n}\geq\frac{25}{36}+\frac{2}{3}\ln(\frac{4}{3})$.

Solution: 前面变形同上一问.

我们知道 $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}-2\ln\frac{t+1}{t}$ 关于 t 严格单调递减, 若 $t>1$, 于是我们有

$$\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{3^t+k}-\frac{1}{2\times 3^t+k}$$

$$=-\frac{1}{2\times 3^t}+\frac{1}{2\times 3^{t+1}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3^t-1}\frac{1}{3^t+k-1}+\frac{1}{3^t+k}-\frac{1}{2\times 3^t+k-1}-\frac{1}{2\times 3^t+k}$$

$$>-\frac{1}{2\times 3^t}+\frac{1}{2\times 3^{t+1}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3^t-1}2\ln\frac{3^t+k}{3^t+k-1}-2\ln\frac{2\times 3^t+k}{2\times 3^t+k-1}$$

$$=-\frac{1}{2\times 3^t}+\frac{1}{2\times 3^{t+1}}+\frac{1}{2}(2\ln\frac{2\times 3^t}{3^t}-2\ln\frac{3\times 3^t}{2\times 3^t})=-\frac{1}{3^{t+1}}+\ln\frac{4}{3}$$

于是就有

$$\frac{1}{3^t a_{3^t}}+\cdots+\frac{1}{(3^{t+1}-1)a_{3^{t+1}-1}}>\frac{4}{3}(\frac{1}{2\times 9^t}-\frac{1}{3\times 9^t}+\frac{1}{3^t}\ln\frac{4}{3})=\frac{4}{3}(\frac{1}{6\times 9^t}+\frac{1}{3^t}\ln\frac{4}{3})$$

设左右边的差是 $\varepsilon_t>0$

因此, 我们求和, 得到

$$\frac{1}{1a_1}+\cdots+\frac{1}{(3^{t+1}-1)a_{3^{t+1}-1}}>\frac{2}{3}+\frac{4}{3}(\frac{1}{48}(1-\frac{1}{9^t})+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^t})\ln\frac{4}{3})+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_t$$

右边的值至少 $\frac{25}{36}+\frac{2}{3}\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{36\times 9^t}-\frac{2}{3\times 3^t}\ln\frac{4}{3}+\varepsilon_1$. 我们让 $t>\log_3(2/\varepsilon_1)$ 即可证明之.

注: 两问如果考虑无限求和 (级数) 不扣分, 但是要注意不能随意交换每一项的求和顺序.

76. (17 points) 给定正整数 n, 正实数 $0<t<1$, 有 n 个 $1+t$,n 个 $1-t$, 以及一个 X,$2n+1$ 个数学对象进行排列, 一共有 $M=(2n+1)C_{2n}^{n}$ 种不同的排列方式. 对于排列 $a_1,a_2,\ldots,a_{2n+1}$, 设 X 排在 a_k. 如果 $k=1$, 则记这个排列的重量是 1. 否则记这个排列的重量是乘积 $a_1a_2\ldots a_{k-1}$. 设 W_n 是所有排列的重量的平均值, 其可以表示成关于 t 的多项式 $W_n=\sum_{k=0}^{2n}w_{n,k}t^k$.

例如, 在 $n=1$ 的情况下,$1-t,1+t,X$ 的不同的排列一共有 6 种, 分别是 $1-t,1+t,X$,$1+t,1-t,X$,$1-t,X,1+t$,$1+t,X,1-t$,$X,1-t,1+t$,$X,1+t,1-t$. 这 6 个排列的重量分别是 $(1-t)(1+t)=1-t^2,(1+t)(1-t)=1-t^2,1-t,1+t,1,1$, 其平均重量是 $W_1=1-\frac{t^2}{3}$, 故 $w_{1,0}=1,w_{1,1}=0,w_{1,2}=-\frac{1}{3}$.

(a) (6 points) 在**不计算**$w_{n,k}$ 的值和 W_n 具体值的情况下, 对于所有 n,t, 证明:$W_n\le 1$.

Solution: 我们使用归纳法. 我们特别的标记一个 $1+t$ 和一个 $1-t$. 我们知道去掉这两个之后剩下 $2n-1$ 个排列, 然后我们将两个数插入进去. 我们有三种情况: 两个数如果都在 X 后面, 插进去重量不变. 如果是一个在 X 前面一个在后面, 那么两个互换的时候 X 重量平均是 1, 于是不变. 如果都在前面, 那么就是重量乘以 $1-t^2$, 于是更小. 那么我们就有 $W_n\le W_{n-1}$, 然后由归纳法,$W_n\le W_0=1$.

(b) (11 points) 写出并证明 $w_{n,k}$ 的通项公式.

Solution: 我们把 $1+t$ 和 $1-t$ 标 $1,2,\ldots,n$ 然后每一次我们调换每一对. 于是这 2^n 对的平均数和前面的对子数有关. 我们设前面有 s 对,r 个单独的. 那么前面一共 $\frac{(2n)!}{(2n-2s-r)!(2s+r)!}$ 种组合是前面有 $2s+t$ 个, 然后其中 $C_n^r 2^r C_{n-r}^s$ 种组合满足. 那么我们知道

$$W_n = \frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-s}\frac{1}{C_{2n}^{2s+r}}C_n^r 2^r C_{n-r}^s (1-t^2)^s$$

我们先证明 $\sum_{r=0}^{n-s}\frac{1}{C_{2n}^{2s+r}}C_n^r 2^r C_{n-r}^s = \frac{4^n C_{2s}^s}{4^s C_{2n}^n}$. 或者我们说明 $\sum_{r=0}^{n-s}\frac{1}{C_{2n}^{2s+r}}C_n^r 2^r C_{n-r}^s \frac{C_{2n}^n}{4^n} = \frac{C_{2t}^s}{4^s}$. 我们用数学归纳法证明. 归纳奠基:$n=s$ 的时候, 左边就只有一项 $\frac{1}{C_{2n}^{2n}}\frac{C_{2n}^n}{4^n} = \frac{C_{2s}^s}{4^s}$, 于是成立.

我们设 $F(n,r,s) = \frac{1}{C_{2n}^{2s+r}}C_n^r 2^r C_{n-r}^s \frac{C_{2n}^n}{4^n} = \frac{(2s+r)!(2n-2s-r)!}{n!r!s!(n-r-s)!}2^r\frac{1}{4^n}$. 那么 $F(n,n-s,s) = \frac{(n+s)!}{n!(n-s)!s!}2^{n-s}\frac{1}{4^n}$. 注意到

$$F(n,r,s) - F(n+1,r,s) = F(n,r,s)\left(1 - \frac{(2n-2s-r+1)(2n-2s-r+2)}{4(n+1)(n+1-r-s)}\right)$$

设 $R(n,r,s) = -\frac{(2n-2s-r+1)r}{4(n+1)(n+1-r-s)}F(n,r,s) = -\frac{(n+s+1)!(2n-2s-r+1)!}{(n+1)!(r-1)!s!(n+1-r-s)!}2^r\frac{1}{4^{n+1}}$, 特别的

$$R(n,n-s+1,s) = -\frac{(n+s+1)!}{(n+1)!s!}2^{n-s+1}\frac{1}{4^{n+1}} = -F(n+1,n-s+1,s)$$

那么我们知道 $R(n,r,s) - R(n,r+1,s) = F(n,r,s) - F(n+1,r,s)$. 于是我们可以知道 $F(n,n-s+2,s)=0$,$R(n,n-s+2,s)=0$,$R(n,0,s)=0$, 进而

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n-s+1}F(n+1,r,s) &= \sum_{r=0}^{n-s+1}F(n,r,s) + R(n,r+1,s) - R(n,r,s)\\ &= \sum_{r=0}^{n-s+1}F(n,r,s) + R(n,n-s+2,s) - R(n,0,s) = \sum_{r=0}^{n-s+1}F(n,r,s)\end{aligned}$$

于是归纳证明完毕. 那么我们求和

$$W_n = \frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{n}\frac{4^n C_{2s}^s}{4^s C_{2n}^n}(1-t^2)^s$$

我们现在证明

$$W_n = \sum_{s=0}^{n}\frac{1}{2k+1}C_n^k(-1)^k t^{2k}$$

我们还是归纳法. 当 $n=0$ 的时候两者都是 1. 注意到递推

$$W_{n+1} = \frac{4C_{2n}^n}{C_{2n+2}^{n+1}}\frac{2n+1}{2n+3}W_n + \frac{1}{2n+3}(1-t^2)^{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}W_n + \frac{1}{2n+3}(1-t^2)^{n+1}$$

于是由归纳假设, 我们有

$$W_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}W_n + \frac{1}{2n+3}(1-t^2)^{n+1} = \sum_{s=0}^{n+1}(\frac{1}{2k+1}\frac{2n+2}{2n+3}C_n^k + \frac{1}{2n+3}C_{n+1}^k)(-1)^k t^{2k}$$
$$= \sum_{s=0}^{n+1}(\frac{1}{2k+1}\frac{2(n+1-k)}{2n+3}C_{n+1}^k - \frac{1}{2n+3}C_{n+1}^k)(-1)^k t^{2k}$$
$$= \sum_{s=0}^{n+1}\frac{2(n+1-k)+(2k-1)}{(2k+1)(2n+3)}C_{n-1}^k(-1)^k t^{2k} = \sum_{s=0}^{n+1}\frac{1}{(2k+1)}C_{n-1}^k(-1)^k t^{2k}$$

于是归纳证毕.