

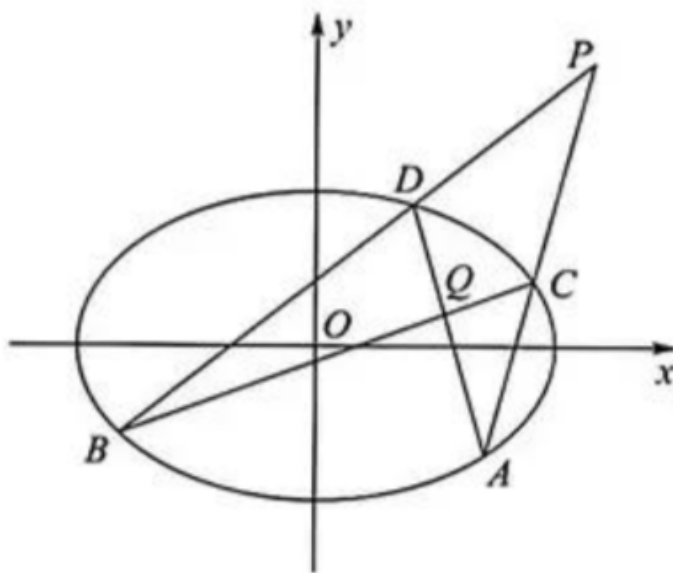
高中数学

解析几何教程

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期：2025 年 9 月 20 日



© 2025 版权所有

前言

本书内容全部使用 \LaTeX 进行排版，作者”还在尬黑”是一位准大一学生，高中毕业于广东深圳中学，高三数学各次大考平均排名位于前 5%，高考应该也不例外。”还在尬黑”拥有知乎（同名），微信公众号（同名），小红书号（同名）等账号，头像是一个右手三叶结。以及不同名不同头像的 GitHub 账号，发表原创优质内容百余篇，在此十分感谢读者的支持和赞助！

”还在尬黑”对圆锥曲线的解题研究有着浓厚兴趣，并在书中将其总结成了一套完整的解析几何教程。本书适合高中解析几何解题体系未成熟的高二高三学生，以及前来自学的高一学生以及初中生，也可作为高中数学教材。笔者衷心希望本书能够帮助读者提高圆锥曲线解题速度和解题能力，并能够准确地识别班内的”大佬”是用什么东西来装逼的。

本书后面有些部分为选学内容，留给同学们进行自我提高和兴趣拓展。当然，建议读者先打牢必学内容的基础，再进行进一步的学习。

祝大家健康进步，高考成功！

还在尬黑

2025 年 9 月 20 日

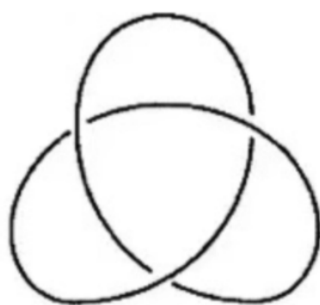


图 1: 我的头像

目录

第一章	先导课程	1
1.1	写在前面	1
1.2	轮换, 对称	1
第二章	导数与微分	4
2.1	导数的定义	4
2.2	微分的定义	4

第一章 先导课程

1.1 写在前面

解析几何是高中数学的重要学习内容，在高考中分值占比较高。

不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代性的表述，这可能是因为圆锥曲线是解析几何中的重难点。但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如3次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈3种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

首先，笔者来讲一讲怎么进行计算。这似乎是一个很简单的问题，但是谁又能保证在紧张刺激的考场环境下不会犯错误？一旦出现计算错误，检查就需要花费一定的时间，所以不如挑选合适的计算方法，从源头上减少失误。本节中，笔者会结合自己的一些实战经验，尽量告诉大家一些计算过程中减小失误，提升速度的技巧和方法，以及解析几何中计算的基本方向——整体代换。

鉴于本书的覆盖群体，笔者会尽量避免过多的公式推导和过于严谨的学术表述，而是从直观的角度出发，用一些具体的例子来说明计算的过程。希望大家能从中受益。

1.2 轮换，对称

在此之前，请允许我先介绍一些基本的概念，我们不妨先来看一些看起来很整齐的式子，这些式子平时很常见，大家在备考强基计划的过程中也会遇到比较多这样的式子：

例题 1.2.1

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$abc$$

$$a + b + c$$

$$ab + bc + ca$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

解 1.2.1. 相信大部分同学是通过自己的直觉来归纳的，直观的感受就是这些式子很“整齐”，而且很有规律可循。那么问题来了：“整齐”是怎么体现的？更进一步地，有没有手段验证一个代数式

是“整齐”的？至于“很有规律可循”，那么规律是什么？

这些问题循序渐进，如果理清这些问题，那么读者便掌握了学习数学时地最基本的关注点：定义，性质，判定。这些式子中的 a, b, c 结构权重是均等的，它们地位相同，没有“特权变量”，也没有“次序”之分。

而且，眼尖的读者可以发现，这些表达式中的项往往成组出现，覆盖所有可能的组合，比如 $a + b + c$ 中全为一次项，如果 a 出现了，不用猜也知道 b 和 c 也出现了；再比如 $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ 中， a^2b 出现了，其中 a 被平方了，那不用猜也知道在其他的项中， b 和 c 也会被平方，而且后面一定会跟着其他没有被平方的字母。它们出现的次数相同。

事实上，由于乘法和加法的交换律和结合律，我们可以发现，对于上面任意一个式子，我们都可以挑选任意两个变量交换位置，而多项式本身保持不变。大家不妨想象一下阅兵式的场景，即使我们偷偷调换两个兵的位置，你也看不出来有什么异样，这是阅兵队伍“整齐”的体现。同样地，这个代数式也可以这样操作，来验证这个代数式是“整齐”的，“规律可循”的。这样我们便可以引出对称式的概念。

定义 1.2.1: 对称式

对于一个 n 元多项式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，若对于数 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个排列 (i_1, i_2, \dots, i_n) ，都有

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则称 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为对称式。

“对称”体现在字母地位平等，没有哪个字母是特殊的。只要式子中包含某个由特定字母组成的项（例如 a^2b ），那么它一定包含由所有其他字母以同样的方式组成的项（即 $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$ ）。

这样我们就认识了对称式的概念，这样当读者听到别人说“对称式”的时候，不会至于一脸懵逼，或者一边点头，假装听懂，然后用直觉去理解这个概念（这样的情况长期发展下去，是不利于学习数学的）。当然，读者也许会发现，像“ $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ ”这样的式子其实比较长，占用了较大的空间，也显得不够简洁。因此我们不妨规定以下记号：

定义 1.2.2: 循环和

性质 1.2.1: 对称式的性质

(1) 基本对称多项式的基础性：

那么下面我们乘胜追击，再来看一组式子：

例题 1.2.2

观察以下代数式, 并尝试在心里面归纳出它们的特点:

$$a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^3b + b^3c + c^3a$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

解 1.2.2. 和刚才的对称式不同, 如果我们这里调换某两个字母的位置, 那么结果也会发生变化。比如 $a^2b + b^2c + c^2a$ 中, 如果我们把 a 和 b 调换位置, 那么结果也会发生变化, 比如说新出现了 b^2a 项, 这是原来所没有的。

但是读者会发现, 这个式子看上去也是有规律可循的, 比如 $a^3b + b^3c + c^3a$ 中, a^3 项出现了, 那不用猜也知道 b^3 和 c^3 也会在其它部分出现, 而且出现的次数相同, 但是和上文的规律不一样, a^3 后面只会跟着 b , 却没有 c , 即没有 a^2c 项。

例题 1.2.3

将 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 进行展开, 并尽己所能地保证结果的每个部分都是由 a, b, c 三个元同时出现且地位相同的式子:

解 1.2.3. 先展开, 再重组:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (b^2 + ac + ab + bc)(a+c) \\ &= ab^2 + b^2c + a^2c + ac^2 + a^2b + abc + abc + bc^2 \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc\end{aligned}$$

最后为什么

定理 1.2.1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

第二章 导数与微分

2.1 导数的定义

定义 2.1.1: 导数

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地函数取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数在点 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 。

例题 2.1.1: 求

数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 处的导数。

解 2.1.1. 直接求导即可

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

2.2 微分的定义

定义 2.2.1: 微分

函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义, 如果函数的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微, 而 $A\Delta x$ 叫做函数在点 x 处相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy , 即 $dy = A\Delta x$ 。