11

① 可怕的极值点偏移

已知曲线 $y=|\ln x|$ 与圆 $B:(x-1)^2+y^2=r^2$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$ 两点，其中 $B(1,0)$.

（Ⅰ）证明：直线 AC 的斜率小于 0；

（Ⅱ）证明：$\angle ABC$ 为锐角，且 $x_1+x_2+\ln x_1x_2>2$.

② 第一问

根据题意，$(x_1-1)^2+\ln^2 x_1=(x_2-1)^2+\ln^2 x_2=r^2$，不妨设 $x_1<x_2$，则

$$k_{AC}=\frac{\ln x_2+\ln x_1}{x_2-x_1}=\frac{\ln x_1x_2}{x_2-x_1},$$

因此 $k_{AC}<0$ 等价于 $x_1x_2<1$，所以这个题目本质上其实是极值点偏移问题.

记 $f(x)=(x-1)^2+\ln^2 x$，则 $f(x_1)=f(x_2)$，对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=2(x-1)+\frac{2\ln x}{x}=\frac{2[x(x-1)+\ln x]}{x},$$

记 $g(x)=x(x-1)+\ln x$，则

$$g'(x)=2x-1+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x+1}{x}>0$$

对任意的 $x>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $g(1)=0$，所以当 $x<1$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

要证 $x_1x_2<1$，即证 $x_2<\dfrac{1}{x_1}$，也即 $f(x_2)<f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)$，也即 $f(x_1)<f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)$，而

$$f\left(\frac{1}{x_1}\right)-f(x_1)=\frac{(1+x_1)(1-x_1)^3}{x_1^2}>0,$$

命题得证.

③ 第二问

这里在函数图像上嵌套了图形的概念，要证明 $\angle ABC$ 是锐角，那就要转化为代数语言，由于这里坐标都给出了，那么转化为向量应当是一个比较明显的方向.

由题意得，

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(x_1-1)(x_2-1)-\ln x_1\ln x_2,$$

要证明 $\angle ABC$ 是锐角，只需证明 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$，也即

$$(x_1-1)(x_2-1)>\ln x_1\ln x_2,$$

由于 $x_1<1<x_2$，所以上式两边都是负的，平方即等价于

$$(x_1-1)^2(x_2-1)^2>\ln^2 x_1\ln^2 x_2=[r^2-(x_1-1)^2][r^2-(x_2-1)^2],$$

两边展开整理得

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2<r^2\quad\Leftrightarrow\quad(x_2-1)^2<r^2-(x_1-1)^2=\ln^2 x_1,$$

两边开方即为

$$x_2-1<-\ln x_1\quad\Leftrightarrow\quad x_2<1-\ln x_1,$$

由于 $x_2>1$，$1-\ln x_1>1$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以只需证明

$$f(1-\ln x_1)>f(x_2)=f(x_1),$$

而

$$\begin{aligned}f(1-\ln x_1)-f(x_1)&=\ln^2(1-\ln x_1)-(x_1-1)^2\\&=[\ln(1-\ln x_1)+x_1-1][\ln(1-\ln x_1)-x_1+1]\end{aligned},$$

其中，$\ln(1-\ln x_1)-x_1+1>0$，所以只需证 $\ln(1-\ln x_1)+x_1-1>0$.

记 $h(x)=\ln(1-\ln x)+x-1$，则

$$h'(x)=1-\frac{1}{x(1-\ln x)},$$

记 $\varphi(x)=x(1-\ln x)$，则

$$\varphi(x)=-\ln x,$$

于是 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$\varphi(x)\leqslant\varphi(1)=1$，所以 $h'(x)\leqslant 1-\dfrac{1}{1}=0$，$h(x)$ 单调递减，而 $h(1)=0$，所以当 $x<1$ 时，$h(x)>0$，命题得证.

接下来我们尝试证明最后那个不等式，由第一问知

$$\begin{aligned}&x_1x_2<1\Rightarrow\ln x_1<-\ln x_2\Rightarrow\ln^2 x_1>\ln^2 x_2\\&\Rightarrow(x_1-1)^2<(x_2-1)^2\Rightarrow 1-x_1<x_2-1\Rightarrow x_1+x_2>2,\end{aligned}$$

原式也即证明

$$x_1+x_2-2>-\ln x_1x_2,$$

为了方便后面叙述，我们记 $t_1=x_1-1$，$t_2=x_2-1$，则 $t_1^2+\ln^2 x_1=t_2^2+\ln^2 x_2=r^2$，我们只需证明

$$t_1+t_2>-(\ln x_1+\ln x_2),$$

两边平方得

$$
\begin{aligned}
[t_1+t_2]^2 &> (\ln x_1+\ln x_2)^2 \\
&= \ln^2 x_1+2\ln x_1\ln x_2+\ln^2 x_2 \\
&= 2r^2+2\ln x_1\ln x_2-t_1^2-t_2^2,
\end{aligned}
$$

整理得

$$t_1^2+t_1t_2+t_2^2-r^2>\ln x_1\ln x_2,$$

两边再次平方，注意这个时候不等号右侧是负的，所以只需要考虑两边同负的情况即可（事实上左侧是恒负的，这里这样说只是不需要证明左侧的正负而已），左边一共有四项，平方的时候要注意整个式子的对称性以及合理地合并同类项，我们有

$$(t_1^2+t_1t_2+t_2^2-r^2)^2=t_1^4+t_1^2t_2^2+t_2^4+r^4+2t_1t_2(t_1^2+t_2^2)+2t_1^2t_2^2-2r^2(t_1^2+t_1t_2+t_2^2),$$

而

$$\ln^2 x_1\ln^2 x_2=(r^2-t_1^2)(r^2-t_2^2)=r^4-r^2(t_1^2+t_2^2)+t_1^2t_2^2,$$

两边消项整理得

$$t_1^4+2t_1^2t_2^2+t_2^4+2t_1t_2(t_1^2+t_2^2)<r^2(t_1^2+2t_1t_2+t_2^2),$$

提公因式整理得

$$(t_1^2+t_2^2)(t_1+t_2)^2<r^2(t_1+t_2)^2,$$

也即

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2<r^2,$$

而这个命题前面已经证明过了，于是 $x_1+x_2+\ln x_1x_2>2$ 成立.

4 **第二问注**

说实话，这个第二问真心不好做，笔者曾尝试找到一个左侧与 r 相关的拟合式，没有成功，把子哥写了个几何法，太飘逸，着实写不来，邪帝写了个比值换元的方法，太诡异，着实学不会，最终，笔者还是选择了没有什么技巧的强攻，说是没有技巧，实际上在整理代数式的过程中，还是要遵循几个原则的，一是我们转化的大方向其实是依靠平方消去 ln，二是要时刻保持 x_1 和 x_2 的对称性，所以在计算的时候我们是先换元再去平方计算，这样后面更容易看出来因式分解.

⑤ **试题评价**

这个题目笔者用一个词“可怕”来形容，尤其是最后一个不等式，非常非常紧，几乎找不到什么简洁的证明方法，虽然将偏移套进函数性质里面非常新颖，但是难度着实过高，极其不适合考试，考试的话，去掉最后一个不等式，中间增加一问作为证明锐角的提示，会更好一些.