华南理工大学
South China University of Technology

# 线性代数和解析几何作业

作者：夏同
学院：计算机科学与工程学院
班级： 1 班
学号： 202530451676
日期： 2025 年 9 月 21 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

# 目录

# 第一章 行列式

## 1.1 第 1 周作业

习题一第一大题的第（1）（3）（5）问解答如下：

**例题 1.1.1: (习题一第一大题)**

计算行列式的值 $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

**解** 1.1.1. (1) 原式 $= \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1.$
(2) 由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned}
=&1\times 5\times 9+2\times 6\times 7+3\times 4\times 8\\
&-1\times 6\times 8-2\times 4\times 9-3\times 5\times 7\\
=&45+84+96-48-72-105\\
=&225-225=0.\square
\end{aligned}$$

实际上第三行是第二行各数的两倍减去第一行各数得到的，因此第三行是第一行和第二行的线性组合，所以矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

的行向量线性相关，行列式的值为 0.
(3) 仍然由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned}
&= x^3+y^3+y^3-xy^2-xy^2-xy^2\\
&= x^3+2y^3-3xy^2.\square
\end{aligned}$$

实际上这个结果可以推广的，下面定理的证明运用了行列式的线性性质和递归分解的思想。

**定理 1.1.1**

将 $n$ 阶行列式 $D$ 中每个元 $a_{ij},(i,j=1,2,...,n)$ 都加上参数 $t$，得到新行列式 $D(t)$，则：

$$D(t)=D+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\Leftrightarrow D=D(t)-t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

其中 $A_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 的代数余子式.

*证明.* 将 $D(t)$ 中的第一列拆开，得到的新行列式记为 $D_1(t)$，则：

$$D_1(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(t) &= D_1(t)+\begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}=D_1(t)+\begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+D_1(t)=t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+D_2(t) \\ &= t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i3}+D_3(t) \\ &= \cdots = t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}+D. \end{aligned}$$

□

下面推广一下上面那道例题：

**例题 1.1.2**

求 $n$ 阶行列式的值 $(a\neq b)$：

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

**解** 1.1.2. 原题只有第一个行列式，笔者将其进行了转置，得到第二个行列式，目的是方便进行证明，这里运用了“对偶”的思想。这样就可以轻松写出：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & b-a & \cdots & b-a \\ 0 & x_2 - a & \cdots & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a)$$

$$D(-b) = \begin{vmatrix} x_1 - b & a-b & \cdots & a-b \\ 0 & x_2 - b & \cdots & a-b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - b)$$

因此：

$$D = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a) + (-a)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - b) + (-b)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

容易发现，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

取决于原来的行列式本身，与引入的参数无关（因为我们是一列一列地拆出参数，而恰好在取代数余子式时避开了含有参数的列），因此上述公式构成二元一次线性方程组，由此可以解得：

$$D = \frac{a}{a-b}\prod_{i=1}^{n}(x_i - b) - \frac{b}{a-b}\prod_{i=1}^{n}(x_i - a).$$

**例题 1.1.3**

求 $n$ 阶行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

**解** 1.1.3. 直接套结论：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a)$$

则：

$$D = D(-a) + a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

其中对于 $A_{ij}$ 而言，由于只有对角线上的数不是 0，因此如果不取对角线上的数写代数余子式，那么由于系数是 0，行列式无论是什么都不会影响结果

$$A_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \prod\limits_{k\neq i}^{n}(x_k-a) & i=j\end{cases}$$

所以：

$$D=D(-a)+a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=D(-a)+a\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{k\neq i}^{n}(x_k-a).$$

我们再补充一个例子：

**例题 1.1.4**

求 $n$ 阶行列式的值（$a\neq b$）：

$$D=\begin{vmatrix}a & a & \cdots & a & 0\\ a & a & \cdots & 0 & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a & 0 & \cdots & b & b\\ 0 & b & \cdots & b & b\end{vmatrix}$$

**解** 1.1.4.

$$D=D(-a)+a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=D(-b)+b\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

其中：

$$D(-a)=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a\\ 0 & 0 & \cdots & -a & b-a\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & -a & \cdots & b-a & b-a\\ -a & b-a & \cdots & b-a & b-a\end{vmatrix}$$

然后使用定义：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$$

就可以得到：

$$D(-a)=(-a)^{1+2+3+4+\ldots+n-1}(-a)^n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a^n$$

$$D(-b)=(-b)^{1+2+3+4+\ldots+n-1}(-b)^n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}b^n$$

当 $a \neq b$ 时，

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{ab^n - ba^n}{a-b} = (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}} (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1})$$

习题一第二大题的第（1）（2）问解答如下：

**例题 1.1.5: (习题一第二大题：证明恒等式)**

$$(1) \begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

**解** 1.1.5. (1) 由于行列式阶数较低，考虑直接展开即可完成证明：

$$\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = a(d+y) - c(b+x) = ad - bc + ay - cx = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}$$

(2) 直接按列展开即可完成证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

**例题 1.1.6: (习题一第三大题)**

借助行列式的知识解方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

**解** 1.1.6. 写出各个行列式并应用克莱默法则，每一个行列式都可以由沙路法则或者对其进行行变换得出结果：

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4 - 3 - 2 + 16 = 17$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 34 + 12 + 6 - 6 + 136 = 102$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&-6&-4\\1&3&-1\\2&17&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-26&-4\\1&3&-1\\2&17&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-26&-4\\1&3&-1\\0&11&3\end{vmatrix}=34$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&2&-6\\1&2&3\\2&-1&17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&-26\\1&2&3\\2&-1&17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&-26\\1&2&3\\0&-5&11\end{vmatrix}=119$$

故解方程组：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{102}{17}=6,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{34}{17}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{119}{17}=7.$$

**例题 1.1.7: (习题一第 5 大题)**

若排列 $i_1,i_2,i_3,...,i_n$ 的逆序数为 m，求排列 $i_n,i_{n-1},i_{n-2},...,i_1$ 的逆序数。

**解** 1.1.7. 排列 $i_1,i_2,i_3,...,i_n$ 的逆序数为 $m$ 指这个排列的逆序数对的数量为 $m$，而数对一共有

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

种，所以排列 $i_n,i_{n-1},i_{n-2},...,i_1$ 的逆序数为

$$\binom{n}{2}-m=\frac{n(n-1)}{2}-m.$$

**例题 1.1.8: (习题一第 6 大题)**

求下面各个排列的逆序数并判断排列的奇偶性：

(1)26538417 (2)$n(n-1)(n-2)...1$ (3)$2n(2n-2)(2n-4)...2(2n-1)(2n-3)...1$.

**解** 1.1.8. (1) 逆序数为 $1+4+3+1+3+1=13$，奇排列。(2) 逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+...+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

设 $k\in\mathbb{N}_+$ 当 $n=4k,\ 4k+1$ 时，为偶排列，当 $n=4k+2,\ 4k+3$ 时，为奇排列。(3) 逆序数为

$$(2n-1)+(2n-3)+...+1+(n-1)+(n-2)+...+1=n^2+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$$

当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$ 或 $n\equiv 3(\mathrm{mod}4)$ 时，为偶排列；当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ 或 $n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ 时，为奇排列。

例题 1.1.9: (习题一第 10 大题)

用行列式的定义计算：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**解** 1.1.9. (1) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\tau(2143)abde + \tau(4123)abce = abde - abce = abe(d-c)$$

(2) 我们自上而下地按每一列来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D =& \tau(1n(n-1)(n-2)...2)a_{11}a_{2n}a_{3,n-1}...a_{n-1,n-1}, a_{n,2} \\ =& a_{11}(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}a_{2n}\cdots a_{n2} \end{aligned}$$

(3) 我们自上而下地按每一行来取元素，则结果为：

$$\begin{aligned} D =& \tau(n123...(n-1))a_n \\ =& (-1)^{(n-1)}a_n \end{aligned}$$

chapter 矩阵

## 1.2 第 1 周作业

测试