华南理工大学
South China University of Technology

工科数学分析
作业

作者：夏同
学院：计算机科学与工程学院
班级： 1 班
学号： 202530451676
日期： 2025 年 9 月 27 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 集合，映射与函数

1.1 第 1 周作业

例题 1.1.1: 讨论下列函数的奇偶性

$(1)y = 3x - x^3$ $(2)2 + 3x - x^3$ $(3)y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$

$(4)y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(5)y = \sqrt{x(2-x)}$ $(6)y = 2^{-x}$

$$(7)f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases} \qquad (8)y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

解 1.1.1. (1) 由于 $f(x) + f(-x) = 3x + 3(-x) - x^3 - (-x)^3 = 0$，故为奇函数

(2) 由于 $f(x) + f(-x) = 2 + 3x + 3(-x) + 2 - x^3 - (-x)^3 = 4$，不为奇函数；而 $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$，故为非奇非偶函数

(3) 由于 $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$，故为偶函数

(4) 由于 $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = f(-x)$，故为偶函数

(5) 由于 $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$，故不为偶函数，由于 $f(x) + f(-x) = \sqrt{x(2-x)} + \sqrt{-x(2+x)} \neq= 0$，故为非奇非偶函数

(6) 由于 $\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$，故为非奇非偶函数

(7) 由于 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) + f(-x) = x - 1 + (-x) + 1 = 0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$，故为奇函数

(8) 由于 $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln(-x^2 + (x^2+1)) = 0$，故为奇函数

例题 1.1.2: 研究函数的单调性

$(1)y = ax + b$ $(2)y = ax^2 + bx + c$ $(3)y = x^3$ $(4)y = a^x$

解 1.1.2. (1) 若 $a \geq 0$，则 y 单调递增；若 $a < 0$，则 y 单调递减；若 $a > 0$，则 y 严格单调递增

(2) 若 $a > 0$，则 y 先严格单调减后严格单调增，若 $a < 0$，则 y 先严格单调增后严格单调减，

若 $a=0$，则当 $b>0$ 时，y 单调递增，当 $b<0$ 时，y 单调递减；若 $a=b=0$，则 y 非严格单调递增

(3) 若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)>x_1-x_2>0$ 故单调递增

(4) 需限定 $a>0$，则当 $a>1$ 时，y 单调递增，当 $a<1$ 时，y 单调递减；若 $a=1$，则 $y=1$ 非严格单调递增；

例题 1.1.3: 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$(1)y=\sin^2 x$	$(2)y=\sin x^2$	$(3)y=\cos(x-2)$
$(4)y=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$	$(5)y=x-[x]$	$(6)y=\tan\lvert x\rvert$

解 1.1.3. (1) 是周期函数，周期为 $k\pi,(k\in\mathbb{Z})$，最小正周期为 π

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2-\sin x^2=2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{(x+T)^2-x^2}{2}=2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{2x+T^2}{2}\neq 0$$

则这样的 T 不存在.

(3) 是周期函数，周期为 $2k\pi,(k\in\mathbb{Z})$，最小正周期为 2π.

(4)$y=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\lambda x+\arctan\dfrac{B}{A})$ 是周期函数，周期为 $\frac{2k\pi}{\lambda},(k\in\mathbb{Z},\lambda>0)$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{\lambda},(\lambda>0)$

(5) 是周期函数，因为 $[x]+1=[x+1]$，则 $x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]$，所以 $y=x-[x]$ 是周期函数，周期为 $\mathbb{Z}$，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是 π，假设 $\tan|x|$ 也是周期函数，则存在 $T>0$ 使得对于定义域内的任意实数 x 都有 $|x|+\pi=|x+T|$，代入 $x=-\pi$ 得到 $T=3\pi$，代入 $x=0$ 得到 $T=\pi$，矛盾！所以 $y=\tan|x|$ 不是周期函数.

例题 1.1.4: 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

解 1.1.4. (1) 设 $f(x),g(x)$ 为两个奇函数，则

$$f(x)g(x)=(-f(-x))(-g(-x))=f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设 $f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)g(x)=(-f(-x))(g(-x))=-f(-x)g(-x)\Leftrightarrow f(x)g(x)+f(-x)g(-x)=0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数.

例题 1.1.5: 证明

若函数 $f(x)$ 周期为 $T(T>0)$，则函数 $f(-x)$ 的周期也是 T.

解 1.1.5. 设 $f(x)$ 周期为 T，则 $f(x+T)=f(x)\Rightarrow f(-x+T)=f(-x)$，故 $f(-x)$ 的周期也是 T.

例题 1.1.6: 证明

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义域为 R 的单调函数，求证：$f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

解 1.1.6. 由于 $f(x),g(x)$ 是定义域为 R 的单调函数，则：

$$\forall x_1,x_2\in R,\ (x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))\geq 0,\ \ \forall x_3,x_4\in R,\ (x_3-x_4)(g(x_3)-g(x_4))\geq 0,$$

那么一定存在 $x_1=g(x_3),x_2=g(x_4)$，则相乘

$$(g(x_3)-g(x_4))(f(g(x_3))-f(g(x_4)))\geq 0$$

结合 $x_3,x_4\in R,(x_3-x_4)(g(x_3)-g(x_4))\geq 0$ 就有：

$$(x_3-x_4)(g(x_3)-g(x_4))^2(f(g(x_3))-f(g(x_4)))\geq 0\Rightarrow (x_3-x_4)(f(g(x_3))-f(g(x_4)))\geq 0$$

故 $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

例题 1.1.7: 证明

$$(1)\ \arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.\quad (2)\ \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数 $z_1=2+i,z_2=3+i\Rightarrow z_1z_2=5+5i$，则：

$$\arg(z_1)+\arg(z_2)=\arg(z_1z_2)=\frac{\pi}{4}$$

(2) 由于 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，代入 $x=\arcsin x$ 即可得到：

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

第二章 极限

2.1 第 2 周作业