



华南理工大学

South China University of Technology

线性代数和分析几何 作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 9 月 21 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 行列式	1
1.1 第 1 周作业	1
1.2 第 1 周作业	8

第一章 行列式

1.1 第 1 周作业

习题一第一大题的第 (1) (3) (5) 问解答如下:

例题 1.1.1: (习题一第一大题)

$$\text{计算行列式的值 } \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$$

解 1.1.1. (1) 原式 $= \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1$.

(2) 由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} &= 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 \\ &\quad - 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 - 3 \times 5 \times 7 \\ &= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 \\ &= 225 - 225 = 0. \square \end{aligned}$$

实际上第三行是第二行各数的两倍减去第一行各数得到的, 因此第三行是第一行和第二行的线性组合, 所以矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

的行向量线性相关, 行列式的值为 0.

(3) 仍然由沙路法则: 原式

$$\begin{aligned} &= x^3 + y^3 + y^3 - xy^2 - xy^2 - xy^2 \\ &= x^3 + 2y^3 - 3xy^2. \square \end{aligned}$$

实际上这个结果可以推广的, 下面定理的证明运用了行列式的线性性质和递归分解的思想。

定理 1.1.1

将 n 阶行列式 D 中每个元 a_{ij} , $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ 都加上参数 t , 得到新行列式 $D(t)$, 则:

$$D(t) = D + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \Leftrightarrow D = D(t) - t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

证明. 将 $D(t)$ 中的第一列拆开, 得到的新行列式记为 $D_1(t)$, 则:

$$D_1(t) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(t) &= D_1(t) + \begin{vmatrix} t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix} = D_1(t) + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ t & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= t \sum_{i=1}^n A_{i1} + D_1(t) = t \sum_{i=1}^n A_{i1} + t \sum_{i=1}^n A_{i2} + D_2(t) \\ &= t \sum_{i=1}^n A_{i1} + t \sum_{i=1}^n A_{i2} + t \sum_{i=1}^n A_{i3} + D_3(t) \\ &= \cdots = t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} + D. \end{aligned}$$

□

下面推广一下上面那道例题:

例题 1.1.2

求 n 阶行列式的值 ($a \neq b$):

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.2. 原题只有第一个行列式，笔者将其进行了转置，得到第二个行列式，目的是方便进行证明，这里运用了“对偶”的思想。这样就可以轻松写出：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & b - a & \cdots & b - a \\ 0 & x_2 - a & \cdots & b - a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a)$$

$$D(-b) = \begin{vmatrix} x_1 - b & a - b & \cdots & a - b \\ 0 & x_2 - b & \cdots & a - b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - b)$$

因此：

$$D = \prod_{i=1}^n (x_i - a) + (-a) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = \prod_{i=1}^n (x_i - b) + (-b) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

容易发现，

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

取决于原来的行列式本身，与引入的参数无关（因为我们是一列一列地拆出参数，而恰好在取代数余子式时避开了含有参数的列），因此上述公式构成二元一次线性方程组，由此可以解得：

$$D = \frac{a}{a-b} \prod_{i=1}^n (x_i - b) - \frac{b}{a-b} \prod_{i=1}^n (x_i - a).$$

例题 1.1.3

求 n 阶行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 1.1.3. 直接套结论：

$$D(-a) = \begin{vmatrix} x_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - a)$$

则：

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

其中对于 A_{ij} 而言, 由于只有对角线上的数不是 0, 因此如果不取对角线上的数写代数余子式, 那么由于系数是 0, 行列式无论是什么都不会影响结果

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \prod_{k \neq i} (x_k - a) & i = j \end{cases}$$

所以:

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = D(-a) + a \sum_{i=1}^n A_{ii} = \prod_{i=1}^n (x_i - a) + a \sum_{i=1}^n \prod_{k \neq i} (x_k - a).$$

我们再补充一个例子:

例题 1.1.4

求 n 阶行列式的值 ($a \neq b$):

$$D = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & 0 \\ a & a & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & b & b \\ 0 & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

解 1.1.4.

$$D = D(-a) + a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = D(-b) + b \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

其中:

$$D(-a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \\ 0 & 0 & \cdots & -a & b-a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & \cdots & b-a & b-a \\ -a & b-a & \cdots & b-a & b-a \end{vmatrix}$$

然后使用定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

就可以得到:

$$\begin{aligned} D(-a) &= (-a)^{1+2+3+4+\cdots+n-1} (-a)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^n \\ D(-b) &= (-b)^{1+2+3+4+\cdots+n-1} (-b)^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} b^n \end{aligned}$$

当 $a \neq b$ 时,

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{ab^n - ba^n}{a-b} = (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}} (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1})$$

习题一第二大题的第 (1) (2) 问解答如下:

例题 1.1.5: (习题一第二大题: 证明恒等式)

$$(1) \begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

解 1.1.5. (1) 由于行列式阶数较低, 考虑直接展开即可完成证明:

$$\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = a(d+y) - c(b+x) = ad - bc + ay - cx = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}$$

(2) 直接按列展开即可完成证明:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 1 & e & f \\ 0 & d & c \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

例题 1.1.6: (习题一第三大题)

借助行列式的知识解方程组:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

解 1.1.6. 写出各个行列式并应用克莱默法则, 每一个行列式都可以由沙路法则或者对其进行行变换得出结果:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4 - 3 - 2 + 16 = 17$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 34 + 12 + 6 - 6 + 136 = 102$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 17 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 34$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -26 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 119$$

故解方程组：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{102}{17} = 6, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{34}{17} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{119}{17} = 7.$$

例题 1.1.7: (习题一第 5 大题)

若排列 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ 的逆序数为 m ，求排列 $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_1$ 的逆序数。

解 1.1.7. 排列 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ 的逆序数为 m 指这个排列的逆序数对的数量为 m ，而数对一共有

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

种，所以排列 $i_n, i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_1$ 的逆序数为

$$\binom{n}{2} - m = \frac{n(n-1)}{2} - m.$$

例题 1.1.8: (习题一第 6 大题)

求下面各个排列的逆序数并判断排列的奇偶性：

(1) 26538417 (2) $n(n-1)(n-2)\dots 1$ (3) $2n(2n-2)(2n-4)\dots 2(2n-1)(2n-3)\dots 1$.

解 1.1.8. (1) 逆序数为 $1+4+3+1+3+1=13$ ，奇排列。(2) 逆序数为

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

设 $k \in \mathbb{N}_+$ 当 $n=4k$, $4k+1$ 时，为偶排列，当 $n=4k+2$, $4k+3$ 时，为奇排列。(3) 逆序数为

$$(2n-1) + (2n-3) + \dots + 1 + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

当 $n \equiv 0(\text{mod } 4)$ 或 $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ 时，为偶排列；当 $n \equiv 1(\text{mod } 4)$ 或 $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ 时，为奇排列。

例题 1.1.9: (习题一第 10 大题)

用行列式的定义计算:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 1.1.9. (1) 我们自上而下地按每一行来取元素, 则结果为:

$$\tau(2143)abde + \tau(4123)abce = abde - abce = abe(d - c)$$

(2) 我们自上而下地按每一列来取元素, 则结果为:

$$\begin{aligned} D &= \tau(1n(n-1)(n-2)\dots 2)a_{11}a_{2n}a_{3,n-1}\dots a_{n-1,n-1}, a_{n,2} \\ &= a_{11}(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}a_{2n}\dots a_{n2} \end{aligned}$$

(3) 我们自上而下地按每一行来取元素, 则结果为:

$$\begin{aligned} D &= \tau(n123\dots(n-1))a_n \\ &= (-1)^{(n-1)}a_n \end{aligned}$$

chapter 矩阵

1.2 第 1 周作业

测试