

# 二十三种数学方法计算 $\zeta(2)$

——代数龙摘抄

如何计算  $\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ ? 这个问题是在 1644 年由意大利数学家蒙哥利 (Pietro Mengoli) 提出的，而大数学家欧拉于 1735 年第一次解决了这个问题。他得出著名的结果：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

解决这个问题的方法在近代不断涌现。这里我从各处摘抄到一些方法，列举在此，仅供大家参考。

如有错误，请向我指出，谢谢!

首先，我们需要知道这个问题的等价形式，将这个数列除以 4，我们自然得到  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24}$ ，从而我们只需证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

而以下某些证明会用到这一点。

## 目 录

1. 欧拉的证明	3
2. 一个初等的证明	4
3. 数学分析的证明	5
4. 数学分析的证明	6
5. 复分析的证明	6
6. 复数积分的证明	7
7. 泰勒公式证明	8
8. 复分析证明	9
9. 傅立叶分析证明	9
10. 傅立叶分析证明	9
11. 傅立叶分析证明	10
12. 泊松公式证明	11
13. 概率论证明	11
14. 积分 + 函数方程证明	12
15. 三角恒等式的初等证明	13
16. 三角多项式的证明	13
17. 积分证明	14
18. Fejér 核的证明	15
19. Gregory 定理证明	16
20. 数论的证明	17
21. 类似的初等证明	17
22. 伯努利数的证明	18
23. 超几何正切分布的证明	19

### 1. 欧拉的证明

欧拉的证明是十分聪明的。他只是将幂级数同有限的多项式联系到了一起，就得到了答案。首先注意到

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

从而

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

但是  $\frac{\sin x}{x}$  的根集，为

$$x = n \cdot \pi, (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

故我们可以假定

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

(PS：欧拉似乎没有证明这个无穷积，直到 100 年后魏尔斯特拉斯得到了他著名的“魏尔斯特拉斯分解定理”(Weierstrass factorization theorem，详情可见 wiki 相应条目)。利用这个方法得到函数时要特别小心，我以前看到的一个反例就可以说明这个问题)

从而我们对这个无穷乘积的  $x^2$  项进行研究，可以知道

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

所以

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

这样就得到了答案。

注：欧拉给出过严谨的证明，但是由于他的第一个证明太广为人知，所以有时候会认为他没给出真正的证明。不过贴吧里的 tq 唐乾吧友提醒了我，实际上，欧拉有他真正的证明。是通过如下方式：首先令  $N$  为奇数

$$z^n - a^n = (z - a) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2az \cos \frac{2k\pi}{n} + a^2)$$

令  $z = 1 + x/N, a = 1 - x/N$ , 且  $n=N$ , 有

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{x}{N}\right)^N &= \frac{2x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(2 + \frac{2x^2}{N^2} - 2\left(1 - \frac{x^2}{N^2}\right) \cos \frac{2k\pi}{N}\right) \\ &= \frac{2x}{N} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{N}\right) + \frac{x^2}{N^2} \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{N}\right)\right) \\ &= C_N x \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(1 + \frac{x^2}{N^2} \frac{1 + \cos(2k\pi/N)}{1 - \cos(2k\pi/N)}\right) \end{aligned}$$

考虑一次项系数知道  $C_N = 2$  成立, 而在  $N \rightarrow \infty$  时, 左边是  $e^x - e^{-x}$ , 右边通过  $\cos y \approx 1 - y^2/2$ , 那么右边就是  $1 + x^2/(k^2\pi^2)$  的乘积, 也就是

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

比较三次项系数可知答案

## 2. 一个初等的证明

以下证明第一次来自 Ioannis Papadimitriou 于 1973 年在 American Math Monthly 80(4):424-425 页发表的。Apostol 在同一份杂志 425-430 发表了用这个方法计算  $\zeta(2n)$  的方法。

这似乎是这个问题最“初等”的一个证明了, 只需要知道三角函数相应知识就能够完成。我们先证明一个恒等式:

Lemma: 令  $\omega_m = \frac{\pi}{2m+1}$ , 则

$$\cot^2 \omega_m + \cot^2 (2\omega_m) + \cdots + \cot^2 (m\omega_m) = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

证明: 由于

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= \binom{n}{1} \sin \theta \cos^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \sin^3 \theta \cos^{n-3} \theta + \cdots \pm \sin^n \theta \\ &= \sin^n \theta \left( \binom{n}{1} \cot^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \cot^{n-3} \theta + \cdots \pm 1 \right) \end{aligned}$$

很显然, 令  $n = 2m+1$ , 则我们有  $\cot^2 \omega_m, \cot^2 (2\omega_m), \dots, \cot^2 (m\omega_m)$  为多项式

$$\binom{n}{1} x^m - \binom{n}{3} x^{m-1} + \cdots \pm 1$$

的根。从而利用韦达定理我们就完成了引理的证明。□

由于三角不等式  $\sin x < x < \tan x$  在  $x \in (0, \pi/2)$  成立，我们知道了  $\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x$ . 对于  $\omega_m, 2\omega_m \dots$  带入得到

$$\sum_{k=1}^m \cot^2(k\omega_m) < \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2 \omega_m^2} < m + \sum_{k=1}^m \cot^2(k\omega_m)$$

所以应用上面引理，就可以得到

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < \frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} + \frac{m\pi^2}{(2m+1)^2}$$

令  $m$  趋于无穷大，结论自然就成立了。

### 3. 数学分析的证明

这个证明来自 Apostol 在 1983 年的 “Mathematical Intelligencer”，只需要简单的高数知识。

注意到恒等式

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} dx dy$$

利用单调收敛定理 (Monotone Convergence Theorem)，立即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} (xy)^{n-1} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$$

通过换元  $(u, v) = ((x+y)/2, (y-x)/2)$ , 也就是  $(x, y) = (u-v, u+v)$  故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \iint_S \frac{1}{1-u^2+v^2} du dv$$

$S$  是由点  $(0, 0), (1/2, -1/2), (1, 0), (1/2, 1/2)$  构成的正方形，利用正方形的对称性，那么

$$\begin{aligned} 2 \iint_S \frac{1}{1-u^2+v^2} du dv &= 4 \int_0^{1/2} \int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2} dv du + 4 \int_{1/2}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} dv du \\ &= 4 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du \\ &\quad + 4 \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left( \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du \end{aligned}$$

利用恒等式  $\arctan(u/\sqrt{1-u^2}) = \arcsin u$ ,  $\arctan((1-u)/\sqrt{1-u^2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin u$ , 就能够得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 4 \int_0^{1/2} \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}} du + 4 \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin u}{2} \right) du \\ &= [2 \arcsin u]^1_{1/2} + [\pi \arcsin u - \arcsin u^2]^1_{1/2} \\ &= \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{36} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

#### 4. 数学分析的证明

(Calabi, Beukers 和 Kock.) 同样利用上一问的结论, 不过这次我们计算的是:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-x^2y^2}$$

做代换

$$(u, v) = \left( \arctan x \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}, \arctan x \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} \right)$$

从而有  $(x, y) = (\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u})$

雅可比行列式即为

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \cos u / \cos v & \sin u \sin v / \cos v^2 \\ \sin u \sin v / \cos u^2 & \cos v / \cos u \end{vmatrix} \\ &= 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} = 1 - x^2 y^2\end{aligned}$$

从而

$$\frac{3}{4} \zeta(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \iint_A dudv$$

其中  $A = \{(u, v) | u > 0, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\}$ , 从而  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  成立!  $\square$

#### 5. 复分析的证明

这个证明在很多复分析书上都有。我们同样可以利用留数计算该结果, 考虑  $f(z) = z^{-2} \cot \pi z$ , 积分路径  $P_n$  为在中心为原点的长形如图

实轴交点为  $\pm(n+1/2)$ , 复轴为  $\pm ni$ , 而若  $\pi z = x + iy$ , 直接计算可得

$$|\cot \pi z|^2 = \frac{\cos^2 x + \sinh^2 y}{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

, 从而很容易就能知道  $|\cot \pi z| < 2$  对于每根积分曲线成立, 于此同时,  $|z| \geq n$  成立, 从而有

$$\left| \oint_{P_n} z^{-2} \cot \pi z \right| \leq \frac{2}{n^2} (8n + 2)$$

成立, 在  $n \rightarrow \infty$  时, 该积分值趋于 0.

利用留数定理, 则有

$$2\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}(z^{-2} \cot \pi z, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{P_n} z^{-2} \cot \pi z dz = 0$$

而每一点的留数, 计算有  $\operatorname{Res}(z^{-2} \cot \pi z, 0) = -\pi/3$ ,  $\operatorname{Res}(z^{-2} \cot \pi z, k) = 1/(\pi k^2)$  ( $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$ ), 从而有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} = \frac{\pi}{3}$$

答案显而易见了。

## 6. 复数积分的证明

本证明由 Dennis C.Russell 给出。考虑积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(2 \cos x) dx$$

那么利用  $\cos$  的欧拉公式

$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix} = e^{ix}(1 + e^{-2ix})$  从而  $\ln(2 \cos x) = \ln(e^{ix}) + \ln(1 + e^{-2ix}) = ix + \ln(1 + e^{-2ix})$  在积分中代换得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} ix + \ln(1 + e^{-2ix}) dx \\ &= i \frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\pi/2} \ln(1 + e^{-2ix}) dx \end{aligned}$$

再利用  $\ln(1 + x)$  的泰勒展开, 也就是

$$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$$

代入知为

$$\ln(1 + e^{-2ix}) = e^{2ix} - e^{-4ix}/2 + e^{-6ix}/3 + \dots$$

从而积分就有

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + e^{-2ix}) dx = -\frac{1}{2i}(e^{-i\pi} - 1 - \frac{e^{-2i\pi} - 1}{2^2} + \frac{e^{-3i\pi} - 1}{3^2} - \frac{e^{-4i\pi} - 1}{4^2} + \dots)$$

但是由于  $e^{-i\pi} = -1$ , 原式变为

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + e^{-2ix}) dx = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{-3i}{4} \zeta(2)$$

故如前面式子有

$$I = i \left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{-3}{4} \zeta(2) \right)$$

由于左边是实数, 右边是纯虚数, 从而只能两边都为 0, 即  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ , 这还给了我们一个副产品, 就是

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

## 7. 泰勒公式证明

(Boo Rim Choe 在 1987 American Mathematical Monthly 上发表) 利用反三角函数  $\arcsin x$  的泰勒展开

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

对于  $|x| \leq 1$  成立, 从而令  $x = \sin t$ , 有

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1}$$

对于  $|t| \leq \frac{\pi}{2}$  成立, 但由于积分

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

故而对两边从 0 到  $\pi/2$  积分有

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^{\pi/2} t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

同样可得

## 8. 复分析证明

(T. Marshall 在 American Math Monthly, 2010) 对于  $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , 令

$$R(z) = \sum \frac{1}{\log^2 z}$$

这个和是对于每一个  $\log$  的分支加起来. 在  $D$  中所有点有领域使  $\log(z)$  的分支解析. 由于这个级数在  $z = 1$  之外一致收敛,  $R(z)$  在  $D$  上解析.

这里有几个 Claim:

当  $z \rightarrow 0$  时, 级数每一项趋于 0. 由于一致收敛我们知道  $z = 0$  是可去奇点, 我们可令  $R(0) = 0$ .  $R$  的唯一奇点是  $z = 1$  的二阶极点, 是由  $\log z$  的主分支. 我们有  $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 R(z) = 1$ .  $R(1/z) = R(z)$ . 由于 1. 和 3. 有  $R$  在  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (扩充复平面) 上亚纯, 从而是有理函数. 从 2 知道  $R(z)$  的分母是  $(z - 1)^2$ . 由于  $R(0) = R(\infty) = 0$ , 分子就是  $az$ . 而 2. 说明  $a = 1$ , 也就是

$$R(z) = \frac{z}{(z - 1)^2}.$$

现在令  $z = e^{2\pi i w}$  得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(w - n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi w)}$$

也就是说

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

可立刻的到  $\zeta(2) = \pi^2/6$ .

## 9. 傅立叶分析证明

考虑函数  $f(x) = x^2, x \in (-\pi, \pi)$ , 将其傅立叶展开

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx \right)$$

显而易见, 代入  $f(0)$  即可得到答案

## 10. 傅立叶分析证明

考虑函数  $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$ , 将其傅立叶展开

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right)$$

利用 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$

其中  $a_n$  为  $e^{inx}$  的系数，即  $\frac{(-1)^n}{n} i, a_0 = 0$

那么有

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$

可得答案

## 11. 傅立叶分析证明

考虑

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$$

在实轴上一致收敛，对于在  $t \in [-\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ ，我们有

$$\sum_{n=1}^N \sin nt = \frac{e^{it} - e^{i(N+1)t}}{2i(1 - e^{it})} + \frac{1 - e^{iNt}}{2i(1 - e^{it})}$$

这个和被

$$\frac{2}{|1 - e^{it}|} = \frac{1}{\sin t/2}$$

控制，从而在  $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$  上一致有界，据 Dirichlet 判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin t}{n}$$

是在  $[\epsilon, e\pi - \epsilon]$  一致收敛，从而对于  $t \in (0, 2\pi)$ ，

$$f'(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \operatorname{Im}(\log(1 - e^{it})) = \arg(1 - e^{it}) = \frac{t - \pi}{2}$$

从而有

$$-\zeta(2)/2 - \zeta(2) = f(\pi) - f(0) = \int_0^{\pi} \frac{t - \pi}{2} dt = -\frac{\pi^2}{4}$$

## 12. 泊松公式证明

(Richard Troll) 由泊松求和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

可知

其中  $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$  为傅立叶变换。

那么有  $f(x) = e^{-a|x|}$ ,  $f$  的傅立叶变换为

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2}$$

也就是说

$$\frac{1}{2a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-a|n|} - \frac{1}{a^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 + 4\pi^2 k^2}$$

则

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 + 4\pi^2 k^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2a} \left( \frac{e^a + 1}{e^a - 1} \right) - \frac{1}{a^2} \right\} = \frac{1}{12}$$

从而就有  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

## 13. 概率论证明

(Luigi Pace 发表于 2011 American Math Monthly)

设  $X_1, X_2$  是独立同半区域柯西分布, 也就是它们的分布函数都是  $p(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} (x > 0)$   
令随机变量  $Y = X_1/X_2$ , 那么  $Y$  的概率密度函数  $p_Y$  定义在  $y > 0$ , 有

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_0^{\infty} x p_{X_1}(xy) p_{X_2}(x) dx = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2y^2)(1+x^2)} dx \\ &= \frac{2}{\pi^2(y^2-1)} \left[ \log \left( \frac{1+x^2y^2}{1+x^2} \right) \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\log(y^2)}{y^2-1} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\log(y)}{y^2-1}. \end{aligned}$$

由于  $X_1, X_2$  独立同分布, 所以  $P(Y > 1) = P(X_1 > X_2) = 1/2$ , 那么有

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{4}{\pi^2} \frac{\log(y)}{y^2-1} dy$$

也就是说

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{-\log(y)}{1-y^2} dy = - \int_0^1 \log(y)(1+y^2+y^4+\dots) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

那么答案显而易见。

#### 14. 积分 + 函数方程证明

(H Haruki,S Haruki 在 1983 年 American Mathematical Monthly 发表)

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx$$

只需要算出这个积分值即可，我们令

$$f(a) = \int_0^1 \frac{\log(x^2 - 2x \cos a + 1)}{x} dx$$

要证明  $f(a) = -\frac{(a-\pi)^2}{2} + \frac{\pi^2}{6}$

利用等式  $(x^2 - 2x \cos a + 1)(x^2 + 2x \cos a + 1) = x^4 - 2x^2 \cos 2a + 1$  我们有

$$f(a/2) + f(\pi - a/2) = \int_0^1 \frac{\log(x^4 - 2x^2 \cos a + 1)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log(t^2 - 2t \cos a + 1)}{t} dt = \frac{1}{2} f(a)$$

中间是令  $\sqrt{x} = t$  得到的等式。解函数方程  $f(a/2) + f(\pi - a/2) = f(a)/2$ , 求导两次得  $f''(a/2) + f''(\pi - a/2) = 2f''(a)$ , 由于  $f''$  是在闭区间  $[0, 2\pi]$  上的连续函数, 从而  $f''$  在该区域有最大值  $M$  与最小值  $m$ . 设  $f''(a_0) = M$  对于某个  $a_0 \in [0, 2\pi]$  成立, 在等式中设  $a = a_0$  有

$$f''(a_0/2) + f''(\pi - a_0/2) = 2f''(a_0) = 2M$$

但是由于  $f''(a_0/2), f''(\pi - a_0/2)$  都小于  $M$ , 从而只能都等于  $M$ . 继续这样的迭代, 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f''(a_0/2^n) = f''(0) = M$$

类似地, 我们就有  $f''(0) = m$ , 从而  $M = m, f''$  为常函数, 则  $f$  只能是二次函数, 设

$$f(a) = \alpha \frac{a^2}{2} + \beta a + \gamma$$

代入式子有  $-\pi\alpha/2 = \beta/2, \pi^2\alpha/2 + \beta\pi + 2\gamma = \gamma/2$ , 而

$$f'(a) = \int_0^1 \frac{2 \sin a}{1+x^2-2x \cos a} dx$$

得知  $f'(\pi/2) = \pi/2$  从而有  $\alpha = -1, \beta = \pi, \gamma = -\pi^2/3$ , 代入  $a = 0$ , 得到

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

### 15. 三角恒等式的初等证明

(Josef Hofbauer 发表于 2002 年 American Mathematical Monthly)

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi+x}{2}} \right]$$

从而就有

$$1 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4 \left[ \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{4}} \right]} = \cdots = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}$$

又由于  $\sin^{-2} x > x^{-2} > \tan^{-2} x$  对  $x \in (0, \pi/2)$  成立

令  $x = (2k+1)\pi/(2N)$ , 对  $k = 0, 1, \dots, N/2-1$  ( $N = 2^n$ ) 对不等式求和, 就变为

$$1 > \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} > 1 - \frac{1}{N}$$

令  $N \rightarrow \infty$  可得答案

### 16. 三角多项式的证明

(Kortram 发表于 1996 年 Mathematics Magazine)

对于奇数  $n = 2m+1$ , 我们知道  $\sin nx = F_n(\sin x)$ , 其中  $F_n$  是次数  $n$  的多项式。那么  $F_n$  的零点为  $\sin(j\pi/n)$  ( $-m \leq j \leq m$ ), 且有  $\lim_{y \rightarrow 0} (F_n(y)/y) = n$ . 那么

$$F_n(y) = ny \prod_{j=1}^m \left( 1 - \frac{y^2}{\sin^2(j\pi/n)} \right)$$

从而

$$\sin nx = n \sin x \prod_{j=1}^m \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2(j\pi/n)} \right)$$

比较两边泰勒展开的  $x^3$  系数, 有

$$-\frac{n^3}{6} = -\frac{n}{6} - n \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sin^2(j\pi/n)}$$

于是

$$\frac{1}{6} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{n^2 \sin^2(j\pi/n)} = \frac{1}{6n^2}$$

固定整数  $M$ , 令  $m > M$ , 则有

$$\frac{1}{6} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{n^2 \sin^2(j\pi/n)} = \frac{1}{6n^2} + \sum_{j=M+1}^m \frac{1}{n^2 \sin^2(j\pi/n)}$$

利用  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$  对于  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  成立, 我们有

$$0 < \frac{1}{6} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{n^2 \sin^2(j\pi/n)} = \frac{1}{6n^2} + \sum_{j=M+1}^m \frac{1}{4j^2}$$

令  $n, m$  趋于无穷, 就有

$$0 \leq \frac{1}{6} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{\pi^2 j^2} \leq \sum_{j=M+1}^m \frac{1}{4j^2}$$

也即

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 j^2} = \frac{1}{6}$$

## 17. 积分证明

(Matsuoka 发表于 1961 年 American Mathematical Monthly)

考虑积分

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx \text{ and } J_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x dx$$

我们有 Wallis 公式:

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

那么对于  $n > 0$ , 分部积分有

$$\begin{aligned} I_n &= [x \cos^{2n} x]_0^{\pi/2} + 2n \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos^{2n-1} x dx \\ &= n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

得到

$$\frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^{n-1}(n-1)!^2}{(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{4^n n!^2}{(2n)!} J_n$$

将这个式子从 1 加到  $n$ , 能够有

$$\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = J_0 - \frac{4^N N!^2}{(2N)!} J_N$$

由于  $J_0 = \pi^3/24$ , 只需要证明  $\lim_{N \rightarrow \infty} 4^N N!^2 J_N / (2N)! = 0$ , 但是不等式  $x < \frac{\pi}{2} \sin x$  对于  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 得到

$$J_N < \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{2N} x dx = \frac{\pi^2}{4} (I_N - I_{N+1}) = \frac{\pi^2 I_N}{8(N+1)}$$

也即

$$0 < \frac{4^N N!^2}{(2N)!} J_N < \frac{\pi^3}{16(N+1)}$$

### 18. FEJÉR 核的证明

(Stark 在 1969 年 American Mathematical Monthly 上的证明)

对于 Fejér 核有如下等式:

$$\left( \frac{\sin nx/2}{\sin x/2} \right)^2 = \sum_{k=-n}^n (n - |k|) e^{ikx} = n + 2 \sum_{k=1}^n (n - k) \cos kx$$

故而有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \left( \frac{\sin nx/2}{\sin x/2} \right)^2 dx &= \frac{n\pi^2}{2} + 2 \sum_{k=1}^n (n - k) \int_0^\pi x \cos kx dx \\ &= \frac{n\pi^2}{2} - 2 \sum_{k=1}^n (n - k) \frac{1 - (-1)^k}{k^2} \\ &= \frac{n\pi^2}{2} - 4n \sum_{1 \leq k \leq n, 2 \nmid k} \frac{1}{k^2} + 4 \sum_{1 \leq k \leq n, 2 \nmid k} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

如果我们令  $n = 2N, N \in \mathbb{Z}^+$ , 那么

$$\int_0^\pi \frac{x}{8N} \left( \frac{\sin Nx}{\sin x/2} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{(2r+1)^2} + O\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

但是由于  $\sin x/2 > x/\pi$  对于  $0 < x < \pi$  成立, 那么

$$\int_0^\pi \frac{x}{8N} \left( \frac{\sin Nx}{\sin x/2} \right)^2 dx < \frac{\pi^2}{8N} \int_0^\pi \sin^2 Nx \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{8N} \int_0^{N\pi} \sin^2 y \frac{dy}{y} = O\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

也即

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^2}$$

## 19. GREGORY 定理证明

证明来自 Borwein 和 Borwein 的著作”Pi and the AGM”

以下公式是著名的 Gregory 定理：

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

令

$$a_N = \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}, b_N = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(2n+1)^2}$$

我们需要证明  $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N^2 - b_N = 0$  即可

如果  $n \neq m$  那么

$$\frac{1}{(2n+1)(2m+1)} = \frac{1}{2(m-n)} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2m+1} \right)$$

就有

$$\begin{aligned} a_N^2 - b_N &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N, m \neq n}^N \frac{(-1)^{m+n}}{2(m-n)} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2m+1} \right) \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N, m \neq n}^N \frac{(-1)^{m+n}}{(m-n)} \frac{1}{(m-n)(2n+1)} = \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n c_{n,N}}{2n+1} \end{aligned}$$

其中

$$c_{n,N} = \sum_{m=-N, m \neq n}^N \frac{(-1)^m}{m-n}$$

很容易可见  $c_{-n,N} = -c_{n,N}$ , 故而  $c_{0,N} = 0$  若  $n > 0$  那么

$$c_{n,N} = (-1)^{n+1} \sum_{j=N-n+1}^{N+n} \frac{(-1)^j}{j}$$

我们可以知道  $|c_{n,N}| \leq 1/(N-n+1)$  由于这个交错和加了后比第一项要小, 也即

$$\begin{aligned} |a_N^2 - b_N| &\leq \sum \left( \frac{1}{(2n-1)(N-n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(N-n+1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2N+1} \left( \frac{2}{2n-1} + \frac{1}{N-n+1} \right) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{2N+3} \left( \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{N-n+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{2N+1} (2 + 4 \log(2N+1) + 2 + 2 \log(N+1)) \end{aligned}$$

所以  $a_N^2 - b_N$  趋于 0 成立。

## 20. 数论的证明

(本证明来自华罗庚的数论)

需要用到整数能被表示为四个平方的和。令  $r(n)$  为四元组使得  $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$  成立的四元组  $(x, y, z, t)$  的个数。最平凡的是  $r(0) = 1$ , 同时, 我们知道

$$r(n) = 8 \sum_{m|n, 4\nmid m} m$$

对于  $n > 0$  成立。令  $R(N) = \sum_{n=0}^N r(n)$ , 很容易可以看出,  $R(N)$  是渐进于半径  $\sqrt{N}$  的四维球体积。也即  $R(N) \sim \frac{\pi^2}{2} N$ . 但是

$$R(N) = 1 + 8 \sum_{n=1}^N \sum_{m|n, 4\nmid m} m = 1 + 8 \sum_{m \leq N, 4\nmid m} m \left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor = 1 + 8(\theta(N) - 4\theta(N/4))$$

其中

$$\theta(x) = \sum_{m \leq x} m \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$$

但是

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{mr \leq x} m = \sum_{r \leq x} \sum_{m=1}^{\lfloor x/r \rfloor} m = \frac{1}{2} \sum_{r \leq x} \left( \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor \right) = \frac{1}{2} \sum_{r \leq x} \left( \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor^2 + O\left(\frac{x}{r}\right) \right) \\ &= \frac{x^2}{2} (\zeta(2) + O(1/x)) + O(x \log x) = \frac{\zeta(2)x^2}{2} + O(x \log x) \end{aligned}$$

当  $x \rightarrow \infty$  成立, 从而

$$R(N) \sim \frac{\pi^2}{2} N^2 \sim 4\zeta(2) \left( N^2 - \frac{N^2}{4} \right)$$

得到  $\zeta(2) = \pi^2/6$

## 21. 类似的初等证明

首先我们要证明这个等式:

$$\sum_{k=1}^n \cot^2 \left( \frac{2k-1}{2n} \frac{\pi}{2} \right) = 2n^2 - n$$

是由于注意到

$$\cos 2n\theta = \operatorname{Re}(\cos \theta + i \sin \theta)^{2n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} \cos^{2n-2k} \theta \sin^{2k} \theta$$

就立即可得

$$\frac{\cos 2n\theta}{\sin^{2n}\theta} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} \cot^{2n-2k}\theta$$

令  $x = \cot^2\theta$ , 就可以变为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} x^{n-k}$$

有根  $x_j = \cot^2(2j-1)\pi/4n$  对  $j = 1, 2, \dots, n$  成立, 从而由于  $\binom{2n}{2n-2} = 2n^2 - n$ , 韦达定理知答案。

有了这个等式, 我们类似初等证明中的方法进行证明

现在  $1/\theta > \cot\theta > 1/\theta - \theta/3 > 0$  对于  $0 < \theta < \pi/2 < \sqrt{3}$  成立, 就有

$$1/\theta^2 - 2/3 < \cot^2\theta < 1/\theta^2$$

对于  $\theta_k = (2k-1)\pi/4n$  做和, 从  $k=1$  到  $n$  我们得到

$$2n^2 - n < \sum_{k=1}^n \left( \frac{2n}{2k-1} \frac{2}{\pi} \right)^2 < 2n^2 - n + 2n/3$$

从而有

$$\frac{\pi^2}{16} \frac{2n^2 - n}{n^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} < \frac{\pi^2}{16} \frac{2n^2 - n/3}{n^2}$$

这也就是我们想要的

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

## 22. 伯努利数的证明

函数  $B(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  为伯努力数  $B_k$  的生成函数, 有  $B$  是亚纯, 且只在  $2\pi in$  有极点, 利用 Mittag-Leffler 定理可以展开为

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi in}{x - 2\pi in} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2\pi in}}\right).$$

而注意到后者又可以展开为几何级数相加:

$$\frac{x}{e^x - 1} = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{2\pi in}\right)^k = \sum_{k \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} x^{2n}$$

是由于在重排级数的同时, 奇数项消去了而偶数项留下了, 所以我们就得到如下式子:

$$B_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}$$

也就是要求计算

$$B_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2} \right\} = \frac{1}{12}$$

那么  $\zeta(2) = \pi^2/6$  就能得到。

### 23. 超几何正切分布的证明

(本证明来自 Lars Holst 于 2013 年 Journal of Applied Probability 的证明)

注意到超几何正切函数  $f_1(x) = \frac{2}{\pi(e^x - e^{-x})}$ , 有

$$\int_{-\infty}^x \frac{2}{\pi(e^y - e^{-y})} dy = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x).$$

这样可以知道  $f_1$  是一个分布函数, 而如果  $X_1, X_2$  都满足超几何正切分布的话, 我们有如下引理:

$X_1 + X_2$  的概率密度是:

$$f_2(x) = \frac{4x}{\pi^2(e^x - e^{-x})}.$$

这是因为

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(e^y + e^{-y})} \frac{2}{\pi(e^{x-y} + e^{y-x})} dy \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ue^{-x}}{(1+u^2)(1+u^2e^{-2x})} du \\ &= \frac{4}{\pi(e^x - e^{-x})} \int_0^{\infty} \left( \frac{u}{1+u^2} - \frac{ue^{-2x}}{1+u^2e^{-2x}} \right) du \\ &= \frac{4x}{\pi(e^x - e^{-x})} \end{aligned}$$

而知道这样的函数是密度函数之后, 我们就可以得到 Basel 问题:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} xe^{-(2k+1)x} dx \\ &= \int_0^{\infty} xe^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kx} dx = \int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-2x}} dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) dx = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

这样可以得到结论。