



华南理工大学

South China University of Technology

# 工科数学分析 作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 11 月 20 日

厚德尚学 自强不息  
务实创新 追求卓越

# 目录

第一章 集合，映射与函数	1
1.1 第 1 周作业 . . . . .	2
第二章 极限	5
2.1 习题 2.1 . . . . .	6
2.2 习题 2.3 . . . . .	7
2.3 习题 2.2 . . . . .	10
2.4 习题 2.4 . . . . .	12
2.5 习题 2.5 . . . . .	14
第三章 一元函数微分学	27
3.1 习题 3.1 . . . . .	27
3.2 习题 3.2 . . . . .	28
3.3 习题 3.3 . . . . .	31
3.4 习题 3.4 . . . . .	34
3.5 习题 3.5 . . . . .	35
3.6 泰勒公式 . . . . .	40
3.7 函数性态的研究 . . . . .	41
第四章 自用	45

# 第一章 集合，映射与函数

## 1.1 第 1 周作业

## 例题 1.1.1 讨论下列函数的奇偶性

(1)  $y = 3x - x^3$

(2)  $2 + 3x - x^3$

(3)  $y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$

(4)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(5)  $y = \sqrt{x(2-x)}$

(6)  $y = 2^{-x}$

(7)  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$

(8)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

解 1.1.1. (1) 由于  $f(x) + f(-x) = 3x + 3(-x) - x^3 - (-x)^3 = 0$ , 故为奇函数

(2) 由于  $f(x) + f(-x) = 2 + 3x + 3(-x) + 2 - x^3 - (-x)^3 = 4$ , 不为奇函数; 而  $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$ , 故为非奇非偶函数

(3) 由于  $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$ , 故为偶函数

(4) 由于  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(-x)$ , 故为偶函数

(5) 由于  $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$ , 故不为偶函数, 由于  $f(x) + f(-x) = \sqrt{x(2-x)} + \sqrt{-x(2+x)} \neq 0$ , 故为非奇非偶函数

(6) 由于  $\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$ , 故为非奇非偶函数

(7) 由于  $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) + f(-x) = x-1 + (-x)+1 = 0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$ , 故为奇函数

(8) 由于  $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln(-x^2 + (x^2 + 1)) = 0$ , 故为奇函数

## 例题 1.1.2 研究函数的单调性

(1)  $y = ax + b$  (2)  $y = ax^2 + bx + c$  (3)  $y = x^3$  (4)  $y = a^x$

解 1.1.2. (1) 若  $a \geq 0$ , 则  $y$  单调递增; 若  $a < 0$ , 则  $y$  单调递减; 若  $a > 0$ , 则  $y$  严格单调递增

(2) 若  $a > 0$ , 则  $y$  先严格单调减后严格单调增, 若  $a < 0$ , 则  $y$  先严格单调增后严格单调减, 若  $a = 0$ , 则当  $b > 0$  时,  $y$  单调递增, 当  $b < 0$  时,  $y$  单调递减; 若  $a = b = 0$ , 则  $y$  非严格单调递增

(3) 若  $x_1 > x_2$ , 则  $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) > x_1 - x_2 > 0$  故单调递增

(4) 需限定  $a > 0$ , 则当  $a > 1$  时,  $y$  单调递增, 当  $a < 1$  时,  $y$  单调递减; 若  $a = 1$ , 则  $y = 1$  非严格单调递增;

**例题 1.1.3** 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$$(1)y = \sin^2 x$$

$$(2)y = \sin x^2$$

$$(3)y = \cos(x-2)$$

$$(4)y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$(5)y = x - [x]$$

$$(6)y = \tan |x|$$

**解 1.1.3.** (1) 是周期函数，周期为  $k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ ，最小正周期为  $\pi$

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{2x+T^2}{2} \neq 0$$

则这样的  $T$  不存在.

(3) 是周期函数，周期为  $2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ ，最小正周期为  $2\pi$ .

(4)  $y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\lambda x + \arctan \frac{B}{A})$  是周期函数，周期为  $\frac{2k\pi}{\lambda}, (k \in \mathbb{Z}, \lambda > 0)$ ，最小正周期为  $\frac{2\pi}{\lambda}, (\lambda > 0)$

(5) 是周期函数，因为  $[x] + 1 = [x+1]$ ，则  $x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 = x - [x]$ ，所以  $y = x - [x]$  是周期函数，周期为  $\mathbb{Z}$ ，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是  $\pi$ ，假设  $\tan |x|$  也是周期函数，则存在  $T > 0$  使得对于定义域内的任意实数  $x$  都有  $|x| + \pi = |x+T|$ ，代入  $x = -\pi$  得到  $T = 3\pi$ ，代入  $x = 0$  得到  $T = \pi$ ，矛盾！所以  $y = \tan |x|$  不是周期函数.

**例题 1.1.4** 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

**解 1.1.4.** (1) 设  $f(x), g(x)$  为两个奇函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(-g(-x)) = f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  为偶函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(g(-x)) = -f(-x)g(-x) \Leftrightarrow f(x)g(x) + f(-x)g(-x) = 0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数.

**例题 1.1.5** 证明

若函数  $f(x)$  周期为  $T(T > 0)$ ，则函数  $f(-x)$  的周期也是  $T$ .

**解 1.1.5.** 设  $f(x)$  周期为  $T$ ，则  $f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(-x+T) = f(-x)$ ，故  $f(-x)$  的周期也是  $T$ .

**例题 1.1.6** 证明

设  $f(x)$  和  $g(x)$  都是定义域为  $R$  的单调函数，求证： $f(g(x))$  也是定义域为  $R$  的单调函数.

解 1.1.6. 由于  $f(x), g(x)$  是定义域为  $R$  的单调函数, 则:

$$\forall x_1, x_2 \in R, (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0, \quad \forall x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在  $x_1 = g(x_3), x_2 = g(x_4)$ , 则相乘

$$(g(x_3) - g(x_4))(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

结合  $x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0$  就有:

$$(x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4))^2(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3 - x_4)(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

故  $f(g(x))$  也是定义域为  $R$  的单调函数.

#### 例题 1.1.7 证明

$$(1) \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad (2) \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数  $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 + i \Rightarrow z_1 z_2 = 5 + 5i$ , 则:

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由于  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , 代入  $x = \arcsin x$  即可得到:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

## 第二章 极限

## 2.1 习题 2.1

## 例题 2.1.1 2.1-A-3: 给出下列极限的精确定义

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

解 2.1.1. (1) 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x| < \delta$  时,  $|f(x)| < \varepsilon$ .

(2) 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x| < \delta$  时,  $|(1+x)^{\frac{1}{x}} - e| < \varepsilon$ .

## 例题 2.1.2 2.1-A-7

利用极限的精确定义证明下列函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 5x) = 24 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2} = \frac{1}{3} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2 - 4} = +\infty.$$

解 2.1.2. (1) 要证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - 3| < \delta$  时,  $|(x^2 + 5x) - 24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$ . 已经出现了  $|x-3|$ , 所以现在只需限定  $|x+8|$ , 先限定  $|x-3| < 1$ , 那么  $|x+8| < 12$ , 此时还需满足  $|(x+8)(x-3)| < 12|x-3| < \varepsilon$ , 得  $|x-3| < \frac{\varepsilon}{12}$ , 故取  $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{12}\right\}$ , 当  $0 < |x-3| < \delta$  时,  $|(x^2 + 5x) - 24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$ .

(2) 要证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - 1| < \delta$  时,  $\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = |x - 1| < \varepsilon$ . 取  $\delta = \varepsilon$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时,  $\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| < \varepsilon$ .

(3) 要证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $|x| > \delta$  时,  $\left|\frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ , 因为  $\left|\frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{2}{3x^2}\right|$ , 取  $\delta = \sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}}$ , 则当  $|x| > \delta$  时,  $\left|\frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ .

(4) 要证对于任意  $G > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < x - 2 < \delta$  时,  $\frac{2x}{x^2 - 4} > G$ , 不妨限定  $x + 2 < 5$ , 则  $x - 2 < 1$ , 则  $\frac{2x}{x^2 - 4} > \frac{4}{(x+2)(x-2)} > \frac{4}{5(x-2)} > G$  解得  $x - 2 < \frac{4}{5G}$ , 所以取  $\delta = \min\left\{1, \frac{4}{5G}\right\}$ , 当  $0 < x - 2 < \delta$  时,  $\frac{2x}{x^2 - 4} > G$ .

## 例题 2.1.3 2.1-A-10

证明: 由  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  能推出  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$ , 但反之不然.

解 2.1.3. 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时,  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 所以由绝对值不等式得到  $|f(x) - A| > ||f(x)| - |A|| = ||f(x)| - |A|| > 0$ , 故  $||f(x)| - |A|| < \varepsilon$ , 所以由  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

能推出  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$ . 然后反过来, 考虑定义在实数域上的函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$ , 其极限



$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 1$ , 但是  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  不存在。

#### 例题 2.1.4 2.1-B-2(1): 利用极限的精确证明

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

解 2.1.4. 要证  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ , 只需证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时,

$$\lim_{x \rightarrow a} |\sin x - \sin a| = 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| < \varepsilon. \text{ 又因为 } 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| < 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| < 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|, \text{ 所以取 } \delta = \varepsilon, \text{ 当 } 0 < |x-a| < \delta \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow a} |\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

#### 例题 2.1.5 2.1-B-4

利用极限的精确定义证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = +\infty$  是错误的。

解 2.1.5. 要证明存在  $G > 0, \forall \delta > 0$  使得当  $x > \delta$  时,  $\frac{x}{x+1} \leq G$ , 则取  $G = 1$ , 便可以满足  $\forall x > 0, \frac{x}{x+1} \leq 1$ , 故存在  $G > 0, \forall \delta > 0$  使得当  $x > \delta$  时,  $\frac{x}{x+1} \leq G$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = +\infty$  是错误的。(本题本质是找到一个够大的上界)

## 2.2 习题 2.3

#### 例题 2.2.1 2.3-A-2

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2)$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)(1 - 2x)^2$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 40x^4)$ ;  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5 + 21x^3)$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ ;  
 (7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 2}$ ; (8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^{10} + x + 7}$ .

解 2.2.1. (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} (3(2)^2 - 5(2) + 2) = 4$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)(1 - 2x)^2 = \lim_{x \rightarrow -1} (1 + 1)(1 - 2(-1))^2 = 18$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 40x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4(x - 40) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 40) = +\infty$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5 + 21x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5(6 + \frac{21}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \lim_{x \rightarrow -\infty} (6 + \frac{21}{x^2}) = -\infty$ .

(5)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ .

(6)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .

(7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{x + \frac{2}{x^3}} = 0$ .

(8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^{10} + x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5}{x^7} + \frac{2}{x^{10}}}{1 + \frac{1}{x^9} + \frac{7}{x^{10}}} = 0$ ;

## 例题 2.2.2 2.3-A-4

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \right) \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{3x} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{9x^2 + x + 3}}{6x} \right) \end{aligned}$$

解 2.2.2. (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 + \frac{1}{x}} = -\sqrt{3}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{9x} + \frac{1}{9x^2}} = \frac{2}{3}.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{9x^2 + x + 3}}{6x} \right) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{1}{36x} + \frac{3}{6x^2}} = -\frac{1}{2}.$

## 例题 2.2.3 2.3-A-8

$$(1)y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} \quad (2)y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

解 2.2.3. (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = -1$$

故该函数在无穷远处的渐近线为  $y = x - 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

故该函数在  $x = 1$  处的渐近线为  $x = 1$ .

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(1 - \frac{1}{x})^2} = 2$$

故该函数在无穷远处的渐近线为  $y = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(1 - \frac{1}{x})^2} = +\infty$$

故该函数在  $x = 2$  处的渐近线为  $x = 2$ .

## 例题 2.2.4 习题 2.3-B 组-1

已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , 讨论下列极限的状态:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

解 2.2.4. (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$  不确定, 比如当  $f(x) = x$  时, 假如  $g(x) = 2x$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$ , 但当  $g(x) = \frac{x}{2}$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ , 当  $f(x) = g(x)$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  不确定, 比如当  $f(x) = x$  时, 假如  $g(x) = 2x$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$ , 但当  $g(x) = \sqrt{x}$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$ , 又当  $g(x) = x^2$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

## 例题 2.2.5 习题 2.3-B 组-4

设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$ , 求  $a$  和  $b$ .

解 2.2.5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1 - ax^2 - ax - bx - b}{x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + 1-b}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( (1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x} \right)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1-a)x - (a+b) = 0 \end{aligned}$$

必须有  $a = 1, b = -1$ .

## 例题 2.2.6 习题 2.3-B 组-5

设  $a, b, c$  是常数,  $a \neq 0$ , 证明  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$  的图形有斜渐近线, 并求出渐近线方程.

解 2.2.6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = a \neq 0$$

由此可知,  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$  的图形有斜渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1} - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-a)x + c}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b-a + \frac{c}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = b - a$$

则渐近线方程为  $y = ax + b - a$ .

### 2.3 习题 2.2

#### 例题 2.3.1 习题 2.2-A-2

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) = 0 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5n+1} = \frac{3}{5}$$

解 2.3.1. (1) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时有  $|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$ .

$$|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| = \left| \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \right| < \left| \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \right| < \varepsilon$$

因此取  $N = \left\lceil 2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \right\rceil$ , 则对于任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $n \geq N$  时, 有  $|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$ .

(2) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \varepsilon$ , 限定  $n > 9$ , 则  $2^n > n^3$ , 则有  $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \left| \frac{n^2}{n^3} \right| = 2 \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$ , 则取  $N = \max \left\{ 9, \left\lceil 1 + \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \right\}$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \varepsilon$ .

(3) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$ , 则取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ .

(4) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{3n}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5} \left| \frac{1}{5n+1} \right| < \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$ , 则取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{3n}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon$ .

#### 例题 2.3.2 习题 2.2-A-4

证明: 由  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$  能推出  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ , 但反过来不可以.

解 2.3.2. 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $||x_n| - |a|| < |x_n - a| < \varepsilon$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ , 但是考虑数列  $a_n = (-1)^n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , 但是去掉绝对值后,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  不存在, 所以不能反过来.

#### 例题 2.3.3 习题 2.2-B-1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \infty \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2} \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. (a > 1)$$

解 2.3.3. (1) 要证明任意  $G > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时有  $\left| \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} \right| = \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} > G$ , 由

$$\frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \frac{(n-1)(n^2 + n + 1)}{n^2 + 1} > \frac{(n-1)(n^2 + 1)}{n^2 + 1} = n - 1$$

所以取  $N = G + 2$ , 则任意  $G > 0$ ,  $\left| \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} \right| > G$ .

(2) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n < \varepsilon$ , 则取  $N = \left[ \tan \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right] + 1$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$ .

(3) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(2\sqrt{n} + 1)}$ , 取  $N = \left\lceil 1 + \left( \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right)^2 \right\rceil$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ .

(4) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$ , 由

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \frac{a}{2} \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{[a]} \frac{a}{[a] + 1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{[a]}}{[a]!} \frac{a}{n}$$

所以取  $N = \left\lceil \frac{a^{[a+1]}}{[a]! \varepsilon} + 1 \right\rceil$ , 则任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{a^n}{n!} \right| < \varepsilon$ .

#### 例题 2.3.4 2.3-A-3

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} & \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] & \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right] \end{aligned}$$

解 2.3.4. (1) 代数变形:

$$\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{(-2)^{-1} + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{5}{6 \left(1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{6 \left(1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)} \right) = \frac{1}{3}.$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

(4) 用裂项  $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ , 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{2}$$

## 2.4 习题 2.4

### 例题 2.4.1 2.4-A-5

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x}$$

$$(5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta}$$

$$(6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h}$$

$$(7) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\cos x - \cos a}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x - a}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$$

解 2.4.1. 这里只使用基本极限公式:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}. \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{5 \cdot 3x} = \frac{3}{5}. \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}.$$

$$(5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \theta = 0. \quad (6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h^2} h = 0.$$

$$(7) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \left( \frac{\theta}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}. \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^3 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 4x = 2.$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\sin x}{x} = 4.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = -\sin a.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin a}{\cos a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a) \cos a \cos(x-a)} = \sec^2 a, \text{ 其中 } a \neq$$

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

### 例题 2.4.2 2.4-A-6

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/2} & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x} & (3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} (x \neq 0) \\ (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{1/x} & \quad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x} \end{aligned}$$

解 2.4.2. (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/3} \right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \left(1 + \frac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{-1}{x}} \right)^{-1} = \frac{1}{e}.$

(3)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} (x \neq 0) = \lim_{\frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0} \left( \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} \right) = e$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}} \right]^a = \lim_{\frac{1}{ax} \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}} \right]^a = e^a$

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right]^{-4} = e^{-4}.$

### 例题 2.4.3 2.4-B-4

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} & \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin \left(\frac{\pi}{6} - x\right) \tan 3x & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} \\ (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} & \quad (5) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} \end{aligned}$$

解 2.4.3. (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x} - 5}{\frac{1}{x^3} \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x^3}{\sin x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2} \frac{3x^2 - 5x}{3x^2} = 3.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin \left(\frac{\pi}{6} - x\right) \tan 3x = \lim_{x \rightarrow 0} -\sin x \tan \left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x}{\tan x} = \frac{1}{3}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \frac{1}{2} = 1.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x(1 - \tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x} = 2.$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)x \right)^{-1} = \frac{1}{e}.$

## 2.5 习题 2.5

## 例题 2.5.1 2.5-A-2

证明数列  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$  收敛, 并求其极限值.

解 2.5.1. 先证数列  $\{a_n\}$  有界, 数列满足  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ , 由于  $a_1 = \sqrt{2} < 2$ , 假设  $a_k < 2, (k \geq 2)$ , 则有  $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{4} = 2$ , 所以归纳得到  $a_k < 2$ , 因此数列  $\{a_n\}$  有界.

再证明数列  $\{a_n\}$  单调递增, 作商得到  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > 1$ , 所以数列  $\{a_n\}$  单调递增.

由单调有界收敛定理得到  $\{a_n\}$  收敛, 极限存在, 所以设极限为  $A$ , 对  $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$  两边取极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}} \Rightarrow A = 2$$

所以数列  $\{a_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

进一步地, 设  $b_n = a_n - 2$ , 所以

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = \sqrt{2a_n} - 2 = \sqrt{2(2 + b_n)} - 2 = \sqrt{4 + 2b_n} - 2$$

泰勒展开得到

$$\sqrt{4 + 2b_n} = 2\sqrt{1 + \frac{b_n}{2}} = 2\left(1 + \frac{b_n}{4} - \frac{b_n^2}{32} + O(b_n^3)\right) \Rightarrow b_{n+1} = \frac{b_n}{2} - \frac{b_n^2}{16} + O(b_n^3)$$

对于大的  $n$ , 有  $b_n \rightarrow 0$ , 主导项为  $\frac{b_n}{2}$ , 因此  $b_{n+1} \sim \frac{1}{2}b_n$ , 这意味着  $b_n$  以指数速率衰减, 即  $b_n \sim C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ , 其中  $C = b_1 = \sqrt{2} - 2$ . 因此  $b_n^2 \sim C^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ , 因此误差项为  $O\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$$a_n = 2 + (\sqrt{2} - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

## 例题 2.5.2 2.5-A-3

设  $a > 0, 0 < x_1 < \frac{1}{a}, x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), n = 1, 2, 3, \dots$  证明  $\{x_n\}$  收敛并求极限.

解 2.5.2. 先证明数列  $\{x_n\}$  有界, 已知  $0 < x_1 < \frac{1}{a}$ , 则假设  $x_k \in (0, \frac{1}{a}), k \in \mathbb{N}_+$ , 则  $ax_k \in (0, 1)$ , 而  $x_k(2 - ax_k)$  是  $x_k$  的二次函数, 在  $(0, \frac{1}{a})$  上单增, 在  $(\frac{1}{a}, \frac{2}{a})$  上单减, 所以  $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k) > 0$ , 且  $x_{k+1} < \frac{1}{a}(2 - a\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$ , 所以  $x_n \in (0, \frac{1}{a})$ , 数列  $\{x_n\}$  有界. 再证明数列  $\{x_n\}$  单调递增, 作商得到  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - ax_n > 1$ , 所以数列  $\{x_n\}$  单调递增. 由单调有界收敛定理得到  $\{x_n\}$  收敛, 极限存在, 所以设极限为  $A$ , 对  $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$  两边取极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(2 - a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \Leftrightarrow A = A(2 - aA) \Leftrightarrow A = \frac{1}{a}$$

所以数列  $\{x_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a}$ , 事实上这个数列的通项公式是  $x_n = \frac{1}{a} [1 - (1 - ax_1)^{2^{n-1}}]$



## 例题 2.5.3 2.5-A-4

设  $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$  证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ .

解 2.5.3. (1) 当  $x_1 = \sqrt{3}$  时, 假设  $x_k = \sqrt{3}, k \in \mathbb{N}_+$ , 则

$$x_{k+1} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以  $\{x_n = \sqrt{3}\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ .

(2) 当  $0 < x_1 < \sqrt{3}$  时, 假设  $0 < x_k < \sqrt{3}, k \in \mathbb{N}_+$ , 则由函数  $f(x) = \frac{3x+3}{3+x} = 3 - \frac{6}{3+x}$  在  $(0, \sqrt{3})$  上单增, 得到:

$$\frac{3+0}{3+0} = 1 < x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} < \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以归纳得到  $x_k \in (0, \sqrt{3})$ , 且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n-3x_n-x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} > 0$$

则  $\{x_n\}$  单调递增, 由单调有界收敛定理得到  $\{x_n\}$  收敛, 设极限为  $A$ , 代入递推式得到  $A = \frac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ .

(3) 当  $x_1 > \sqrt{3}$  时, 假设  $x_k > \sqrt{3}, k \in \mathbb{N}_+$ , 则由函数  $f(x) = \frac{3x+3}{3+x} = 3 - \frac{6}{3+x}$  在  $(\sqrt{3}, \infty)$  上单增, 得到:

$$x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} > \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以数列  $\{x_n\}$  有下界, 又有:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n-3x_n-x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0$$

所以  $\{x_n\}$  单调递减, 由单调有界收敛定理得到  $\{x_n\}$  收敛, 设极限为  $A$ , 代入递推式得到  $A = \frac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$ , 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ .

## 例题 2.5.4 2.5-B-1

设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{x_n+6}, n = 1, 2, 3, \dots$ , 证明  $\{x_n\}$  极限存在, 并求极限.

解 2.5.4. 先证明数列  $\{x_n\}$  有界, 由  $x_1 = 10 > 3$ , 假设  $x_k > 3$ , 那么  $x_{k+1} = \sqrt{x_k+6} > \sqrt{9} = 3$ , 所以  $\{x_n\}$  有界; 再证明数列  $\{x_n\}$  单调递减, 作商得到

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n+6} - x_n = \frac{x_n+6-x_n^2}{\sqrt{x_n+6}+x_n} = \frac{(3-x_n)(x_n+2)}{\sqrt{x_n+6}+x_n} > 0$$

所以  $\{x_n\}$  单调递减, 由单调有界收敛定理得到  $\{x_n\}$  极限存在, 设极限为  $A$ , 代入递推式得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

### 例题 2.5.5 2.5-B-2

利用柯西准则, 证明下面各数列的收敛性:

(1)  $x_n = a_0 + a_1q + \cdots + a_nq^n$ , 其中  $|a_i| \leq M$  ( $i = 0, 1, 2, \cdots$ ), 且  $|q| < 1$ ;

(2)  $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$ .

解 2.5.5. (1) 设  $m > n$ , 则

$$|x_m - x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_mq^m| \leq M|q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^m| < M \frac{|q^{n+1}|}{1 - |q|}$$

任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = [\log_q \frac{\varepsilon}{M} + 1]$  使得任意  $x > N$ ,  $M \frac{|q^{n+1}|}{1 - |q|} < M|q^{n+1}| < \varepsilon$ , 则数列  $\{x_n\}$  收敛. (2) 设  $m > n$ , 则

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(m)}{2^m} \right| < \left| \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^m} \right| < \frac{1}{2^n}$$

所以任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = [2 - \log_2 \varepsilon]$  使得任意  $n > N$ ,  $|x_m - x_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , 则数列  $\{x_n\}$  收敛.

### 例题 2.5.6 2.5-B-3

对于数列  $\{x_n\}$ , 若子列  $\{x_{2k}\}$  与  $\{x_{2k+1}\}$  都收敛于  $a$ , 试用 “ $\varepsilon - N$ ” 的语言证明数列  $\{x_n\}$  也收敛于  $a$ .

解 2.5.6. 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1 \in \mathbb{N}$  使得  $\forall n > N_1, |x_{2n-1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_2 \in \mathbb{N}$  使得  $\forall n > N_2, |x_{2n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 则数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ ; 那么对  $2n - 1$  代入  $n = N_1 + 1$ , 对  $2n$  代入  $n = N_2 + 1$ , 可知取  $N = \max\{2N_1 + 4, 2N_2 + 4\}$ , 则  $\forall n > N, |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , 则数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ .

### 例题 2.5.7 2.5-B-4

证明: 若  $f(x)$  为定义于  $[a, +\infty)$  上的单调增加函数, 则极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在的充要条件是  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有上界.

解 2.5.7. 必要性: 设极限为  $A$ , 则存在  $N > 0$  使得当  $n > N$  时, 有  $|f(x) - A| < 1$ , 故

$$|f(x)| - |A| < ||f(x)| - |A|| < |f(x_n) - A| < 1 \Rightarrow |f(x_n)| < 1 + |A|$$

所以  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有上界.

充分性: 若  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有上界, 则由确界定理得到  $f(x)$  有上确界  $\sup_{x \in [a, +\infty)} f(x)$ , 由确界定义知道,  $\forall \varepsilon_n = \frac{1}{n}, (n = 1, 2, \cdots), \exists x_n \in [a, +\infty)$ , 使得  $|f(x_n) - A| < \frac{1}{n}$ , 于是得到数列  $\{x_n\}$  满足

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ , 所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  使得  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ , 由于  $f(x)$  为定义于  $[a, +\infty)$  上的单调增加函数, 所以任意  $x > x_{N+1}$ , 均有  $f(x_{N+1}) \leq f(x) \leq A$ , 于是  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

### 例题 2.5.8 2.6-B-1

证明: 当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3, \arctan x \sim \frac{1}{4}\sin 4x$ .

解 2.5.8. (1)  $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim x \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}, x \rightarrow 0$ .

(2)  $\arctan x \sim x = \frac{4x}{4} \sim \frac{\sin 4x}{4}$ , 由  $\tan x \sim x, x \rightarrow 0$  换元  $x = \arctan y$  可得  $y \sim \arctan x, x \rightarrow 0$ .

### 例题 2.5.9 2.6-B-2

利用等价无穷小求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$ .

解 2.5.9. (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-n}$ .

当  $m > n$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = 0$ ;

当  $m = n$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = 1$ ;

当  $m < n$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = \infty$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - 1}{\frac{1}{2}x^2} = 1$ .

### 例题 2.5.10 2.6-B-3

证明: (1)  $2x - x^2 = O(x) (x \rightarrow 0)$ ; (2)  $\sqrt{1+x} - 1 = o(1) (x \rightarrow 0)$ ;

(3)  $2x^3 + 2x^2 = O(x^3) (x \rightarrow \infty)$ ; (4)  $(1+x)^n = 1 + nx + o(x) (x \rightarrow 0)$ .

解 2.5.10. (1) 验证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - x) = 2$  为非零常数, 故  $2x - x^2 = O(x) (x \rightarrow 0)$ .

(2) 由定义, 验证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - 1}{1 + \sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} = 0$ , 故  $\sqrt{1+x} - 1 = o(1) (x \rightarrow 0)$ .

(3) 由定义, 验证  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{2}{x}) = 2$  为非零常数, 故  $2x^3 + 2x^2 = O(x^3) (x \rightarrow \infty)$ .

(4) 验证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots + x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{n(n-1)}{2}x + \dots + x^{n-1} \right) = 0$ , 故

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

### 例题 2.5.11 2.6-B-4

设在某一极限过程中,  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小. 证明: 如果  $\alpha \sim \beta$ , 则  $\beta - \alpha = o(\alpha)$ , 反之, 如果  $\beta - \alpha = o(\alpha)$ , 则  $\alpha \sim \beta$ .

解 2.5.11. 如果  $\alpha \sim \beta$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 1 - 1 = 0$ , 故  $\beta - \alpha = o(\alpha)$ .

如果  $\beta - \alpha = o(\alpha)$ , 则  $0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} - 1$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 故  $\alpha \sim \beta$ .

### 例题 2.5.12 2.6-B-5

证明: 当  $x \rightarrow 0$  时, 有:

(1)  $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$ , ( $0 < n < m$ ); (2)  $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$ , ( $n, m > 0$ ).

解 2.5.12. (1) 由定义得到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)o(1)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} o(1) = 0 \Rightarrow o(g(x)) = g(x)o(1)$$

考虑

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) + o(x^m)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n o(1) + x^m o(1)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} (o(1) + x^{m-n} o(1)) = \lim_{x \rightarrow 0} o(1) = 0$$

故  $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$ , ( $0 < n < m$ ); (2) 考虑

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) \cdot o(x^m)}{x^n \cdot x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n o(1) x^m o(1)}{x^n \cdot x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} (o(1) \cdot o(1)) = 0$$

由定义得到  $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$ , ( $n, m > 0$ ).

### 例题 2.5.13 2.7-B-2

判断  $x = 0$  处的间断点类型 (1)  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + nx^2}$ .

解 2.5.13. (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1} = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1} = 1$ , 所以  $f(x)$  在  $x = 0$  两侧的极限均存在, 但不等于  $f(0)$ , 且  $f(0^-) \neq f(0^+)$ , 所以是跳跃间断点.

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{0 + x^2} = \frac{1}{x}$ , 所以  $x = 0$  为无穷间断点.

### 例题 2.5.14 2.7-B-3

设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ , 试找出其间断点.

解 2.5.14. 观察发现分母在  $x = 1$  处的变化速度很快, 计算  $f(x)$  的分段函数得到:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = -1 \\ 0, & |x| > 1 \\ 1 + x, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

所以  $f(1^-), f(1), f(1^+)$  都不等, 所以  $x = 1$  为间断点.

#### 例题 2.5.15 2.7-B-4

试确定  $a, b$  的值, 使  $f(x) = \frac{e^x - b}{(x - a)(x - 1)}$  有无穷间断点  $x = 0$ , 有可去间断点  $x = 1$ .

解 2.5.15. (1) 由题意得到  $f(x)$  在  $x = 0$  处左极限和右极限至少一个为无穷大, 假设  $a \neq 0$ , 由于  $f(x)$  为初等函数, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - b}{(x - a)(x - 1)} = \frac{1 - b}{a}$  为常数, 矛盾, 所以  $a = 0$ ; 当  $b = 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - x} = 1$ , 所以需要同时满足  $a = 0, b \neq 1$ , 下证充分性, 当  $a = 0, b \neq 1$  时

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - b}{(x - a)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} + \frac{e - b}{x - 1} = \infty$$

(2) 要使得  $f(x)$  有可去间断点  $x = 1$ , 则  $f(1^-) = f(1^+)$ , 假设  $b \neq e$ , 计算发现

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - b}{(x - a)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - b}{(x - 1)(1 - a)} = \infty$$

矛盾, 所以  $b = e$  为必要条件, 当  $b = e$  时, 计算极限并使用等价无穷小替换:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x - a)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x - a)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{1 - a}$$

所以  $a \neq 1$ , 下面证明充分性. 当  $a \neq 1, b = e$  时,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x - a)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x - a)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{1 - a} = e$ , 所以此时  $f(1^-) = f(1^+) = e$ , 因此  $x = 1$  为可去间断点, 等价于  $a \neq 1, b = e$ . 所以答案为  $a = 0, b \neq 1; a \neq 1, b = e$ .

#### 例题 2.5.16 2.8-A-3 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^{3 \sec x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x)^{\cos \frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(\cos^2 x + \sqrt{1 - x^2})}{e^x + \sin x} + (1 + x)^x \right]$$

解 2.5.16. (1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^{3 \sec x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^3 = e^3$ .

(2) 由于该函数为初等函数, 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x)^{\cos \frac{1}{x}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \frac{\pi}{2}$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(\cos^2 x + \sqrt{1-x^2})}{e^x + \sin x} + (1+x)^x \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos^2 x + \sqrt{1-x^2}) = 1 + \ln 2$ .

### 例题 2.5.17 2.8-A-5

证明下列方程在给定区间至少有一个根:  $x2^x = 1, x \in [0, 1]; x^3 + px - q = 0, p > 0, x \in R$

解 2.5.17. (1) 设初等函数  $f(x) = x2^x - 1$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = -1, f(1) = 1$ , 由零点存在性定理知  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有至少一个根.

(2) 设初等函数  $g(x) = x^3 + px - q$  在  $R$  上连续,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} - \frac{q}{x^3}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} - \frac{q}{x^3}\right) = +\infty \end{cases}$$

零点存在性定理知  $g(x)$  在  $R$  上有至少一个根.

### 例题 2.5.18 2.8-A-6

设  $f(x) \in C[0, 1]$ , 并且  $\forall x \in [0, 1], 0 < f(x) < 1$  (画-图). 求证:  $\exists x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

解 2.5.18. 设连续函数  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(0) = f(0) - 0 > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$ , 由零点存在性定理知  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上有根  $x_0, \exists x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

### 例题 2.5.19 2.8-B-2

证明: 若  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  都存在, 则  $f(x)$  必有界.

解 2.5.19. 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则任意  $\varepsilon_1 > 0$ , 存在  $N_1 \in R$  使得  $\forall x > N_1$ , 有  $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ , 即  $A - \varepsilon_1 < f(x) < A + \varepsilon_1$ , 说明  $f(x)$  在  $(N_1, +\infty)$  有上界  $A + \varepsilon_1$  和下界  $A - \varepsilon_1$ ; 设  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ , 则任意  $\varepsilon_2 > 0$ , 存在  $N_2 \in R$  使得  $\forall x < N_2$ , 有  $|f(x) - B| < \varepsilon_2$ , 即  $B - \varepsilon_2 < f(x) < B + \varepsilon_2$ , 说明  $f(x)$  在  $(-\infty, N_2)$  有上界  $B + \varepsilon_2$  和下界  $B - \varepsilon_2$ ; 由于  $f(x)$  在  $[N_2, N_1]$  上连续, 所以在  $[N_2, N_1]$  上也有上界  $C_1$ , 有下界  $C_2$ , 则取  $D_1 = \max\{C_1, A + \varepsilon_1, B + \varepsilon_2\}, D_2 = \min\{C_2, A - \varepsilon_1, B - \varepsilon_2\}$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有上界  $D_1$  和下界  $D_2$ ; 证毕.

### 例题 2.5.20 2.8-B-3

设  $f(x) \in C(a, b)$ , 且  $f(a^+)$  与  $f(b^-)$  都存在, 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续.

解 2.5.20. 补充定义函数  $g(x) = \begin{cases} f(a^+), x = a \\ f(x), x \in (a, b) \\ f(b^-), x = b \end{cases}$ , 则  $g(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+) = g(a)$ , 所以  $g(x)$  在  $a$  点右连续, 同理  $g(b)$  在  $b$  点左连续, 由此可知  $g(x)$  在  $[a, b]$  上一致连续, 那么  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续.

**例题 2.5.21 2.8-B-4**

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [a, b]$ ,  $L$  为常数, 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续.

解 2.5.21. 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在仅与  $\varepsilon$  有关的  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ , 使得  $\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$ , 有  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$ , 即  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续.

## 例题 2.5.22

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}$ , 试求  $\{a_n\}$  的渐进.

解 2.5.22. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 前  $n$  项积为  $T_n$ , 则有

$$a_{n+1} = \frac{S_n}{T_n} = \frac{S_n}{a_n T_{n-1}} = \frac{S_n}{\frac{S_{n-1}}{T_{n-1}} T_{n-1}} = \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

转化为估计  $S_n$  的阶, 将  $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  代入得到:

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_{n+1} = S_n + \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

下面估计  $S_n$  的主阶, 先考察它的有界性和单调性, 由

$$S_n > 0, S_{n+1} - S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} > 0 \Rightarrow S_{n+1} > S_n$$

可知  $S_n$  是单调递增的, 再次代入递推式有

$$S_{n+1} - S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} > 1 \Rightarrow S_{n+1} - S_n > 1 \Rightarrow S_n \geq n$$

所以  $S_n$  发散到正无穷, 无上界, 我们再把这个结论代入到递推公式中:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{S_n}{S_{n-1}} \Leftrightarrow \frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{1}{S_{n-1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

当  $n$  趋于无穷时,  $S_n \sim n$ , 构造  $b_n = S_n - n$  以得到更精确的阶, 将  $S_n = n + b_n$  代入递推公式:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{n + b_n}{n - 1 + b_{n-1}} - 1 = \frac{1 + \frac{b_n}{n}}{1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{b_{n-1}}{n}\right)} - 1$$

泰勒展开可得:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= -1 + \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) \left(1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{b_{n-1}}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -1 + \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) - \frac{b_{n-1}}{n} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{b_n - b_{n-1}}{n} + \frac{b_n(1 - b_{n-1})}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \Rightarrow b_{n+1} - b_n &\sim \frac{1}{n} \Rightarrow b_n \sim \ln n + O(1) \Rightarrow S_n = n + b_n \sim n + \ln n + O(1) \end{aligned}$$

所以  $\{S_n\}$  的阶为  $n + \ln n + c + o(1)$ , 代入  $a_n = \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}$  得到:

$$a_n = \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} = \frac{(n-1) + \ln(n-1) + c + o(1)}{(n-2) + \ln(n-2) + c + o(1)}$$



并利用

$$\ln(n-1) = \ln n - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \ln(n-2) = \ln n - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

代入:

$$S_{n-1} = n-1 + \ln n + c - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = n \left(1 + \frac{\ln n + c - 1}{n} - \frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$S_{n-2} = n-2 + \ln n + c - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = n \left(1 + \frac{\ln n + c - 2}{n} - \frac{4}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

故技重施:

$$\frac{1}{S_{n-2}} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln n + c - 2}{n} + \frac{(\ln n + c - 2)^2 + 4}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

代入得到

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{\ln n + c - 1}{n} - \frac{3}{2n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\ln n + c - 2}{n} + \frac{(\ln n + c - 2)^2 + 4}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 - \frac{\ln n + c - 2}{n} + \frac{\ln n + c - 1}{n} + \frac{(\ln n + c - 2)^2 + 2}{n^2} \\ &\quad - \frac{(\ln n + c - 1)(\ln n + c - 2)}{n^2} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{3 - c - \ln n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

### 例题 2.5.23

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}$ , 找到一个正整数  $k$ , 使得  $n \geq k$  时,  
 $a_n < 1 + \frac{1}{n}$ .

解 2.5.23.

### 例题 2.5.24

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ , 求  $\{a_n\}$  的渐进.

解 2.5.24. 解微分方程

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} \Rightarrow \frac{da}{dn} = \frac{1}{a} \Rightarrow ada = dn \Rightarrow a \sim \sqrt{2n} \Rightarrow a_n^2 \sim 2n$$

设  $a_n^2 = b_n + 2n$ , 代入递推公式得到

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 \Leftrightarrow 2(n+1) + b_{n+1} = 2n + b_n + 2 + \frac{1}{2n + b_n}$$

化简得到  $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2n + b_n} = b_n + \frac{\frac{1}{2n}}{1 - (-\frac{b_n}{2n})}$ , 泰勒展开:

$$b_{n+1} - b_n \sim \frac{1}{2n} - \frac{b_n}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \Rightarrow b_n \sim \frac{1}{2} \ln n + c_n$$

再次代入递推公式:

### 例题 2.5.25

已知  $k$  为正整数, 求积分  $\int_0^\pi \frac{x \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx$

解 2.5.25.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = \int_{-\pi}^0 \frac{(x + \pi) \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \frac{x \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx + \pi \int_0^\pi \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + \pi \int_0^\pi \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= -I + \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= -I + 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= -I + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + \frac{\pi^2}{2} \\ \Rightarrow I &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

### 例题 2.5.26

给出  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$ , 计算  $\int_0^1 \int_0^y \frac{\ln(1+x)}{x} dx dy$ .

解 2.5.26. 根据所给式子, 得到  $0 \leq x \leq y$  (因为  $x$  从 0 到  $y$  积分), 再根据外层积分确定  $0 \leq y \leq 1$ , 所以  $0 \leq x \leq y \leq 1$ , 所以:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^y \frac{\ln(1+x)}{x} dx dy &= \int_0^1 \int_x^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{(1-x) \ln(1+x)}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \int_0^1 \ln(x+1) dx \\ &= \frac{\pi^2}{12} - 2 \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

## 例题 2.5.27

求积分  $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

解 2.5.27.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} &= \int \frac{\sec^6 x dx}{1 + \tan^6 x} = \int \frac{\sec^6(\arctan t) d \arctan t}{1 + \tan^6(\arctan t)} \\
 &= \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{(t^6+1)(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{(t^2+1)(t^4-t^2+1)} \\
 &= \int \frac{1+t^2}{t^4-t^2+1} dt = \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}-1} dt \\
 &= \int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+1} = \arctan(t-\frac{1}{t}) + C \\
 &= \arctan(\tan x - \frac{1}{\tan x}) + C = \arctan(\frac{\tan^2 x - 1}{\tan x}) \\
 &= \arctan(-2 \cot 2x) + C = C - \arctan(2 \cot 2x).
 \end{aligned}$$

## 例题 2.5.28

求积分  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x + \cos x}$ .

解 2.5.28.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x + \cos x} &= \int \frac{dx}{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1)} \\
 &= \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)^2} \quad (\text{令 } t = \tan x) \\
 &= \int \left( \frac{1/4}{1+t} + \frac{-\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}}{1+t^2} + \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{(1+t^2)^2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+t} dt + \frac{1}{4} \int \frac{1-t}{1+t^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1-t}{(1+t^2)^2} dt \\
 &= \frac{1}{4} \ln|1+t| + \frac{1}{4} \arctan t - \frac{1}{8} \ln(1+t^2) + \frac{1}{4} \cdot \frac{t+1}{1+t^2} + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln|1+\tan x| - \frac{1}{4} \ln|\sec x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(\sin x \cos x + \cos^2 x) + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x + C
 \end{aligned}$$

## 例题 2.5.29

求积分  $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$ .

解 2.5.29.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin x (1 + \cos x)} = \int \frac{dx}{4 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{8 \sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} \\
 &= \int \frac{dt}{4 \sin t \cos^3 t} = \int \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 dt}{4 \sin t \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{(\tan^2 t + 1)^2}{\tan t} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{(\tan(\arctan \theta)^2 + 1)^2}{\tan \arctan \theta} d \arctan \theta = \frac{1}{4} \int \frac{\theta^2 + 1}{\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int \left( \theta + \frac{1}{\theta} \right) d\theta = \frac{1}{8} \theta^2 + \frac{1}{4} \ln |\theta| + C \\
 &= \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C
 \end{aligned}$$

## 例题 2.5.30

求积分  $\int \frac{x e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx$ .

解 2.5.30.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx &= \int \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \int \frac{e^{\ln t} \ln t}{(e^{\ln t} + 1)^2} d \ln t = \int \frac{\ln t}{(t + 1)^2} dt \\
 &= \int \ln t d \left( -\frac{1}{1 + t} \right) = -\frac{\ln t}{t + 1} + \int \frac{1}{1 + t} d \ln t \\
 &= -\frac{\ln t}{t + 1} + \int \frac{1}{t(1 + t)} dt = -\frac{\ln t}{t + 1} + \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} \right) dt \\
 &= -\frac{\ln t}{t + 1} + \ln t - \ln(t + 1) + C = -\frac{x}{e^x + 1} + x - \ln(e^x + 1) + C
 \end{aligned}$$

## 第三章 一元函数微分学

### 3.1 习题 3.1

#### 例题 3.1.1 3.1-A-3

下列各式可否成为  $f(x)$  在  $x_0$  点的导数的定义? 请说明理由.

(1)  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内定义,  $x_0 \in (a, b)$ , 若极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$  存在, 则称该极限为  $f(x)$  在  $x_0$  点的导数.

(2)  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内定义,  $x_0 \in (a, b)$ , 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  存在, 则称该极限为  $f(x)$  在  $x_0$  点的导数.

(3)  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内定义,  $x_0 \in (a, b)$ , 若极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$  存在, 则称该极限为  $f(x)$  在  $x_0$  点的导数.

解 3.1.1. (1) 可以, 因为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = f'(x_0)$$

(2) 可以, 因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

(3) 不可以, 当  $f'(x_0)$  存在时, 该极限等于  $f'(x_0)$ , 这是因为

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \frac{1}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2}f'(x_0) = f'(x_0) \end{aligned}$$

但是当  $f'(x_0)$  不存在, 而左右导数存在时, 该极限推出的是左导数和右导数的平均值, 并非  $f'(x_0)$ , 比如当  $f(x) = |x|, x = 0$  导数不存在, 但是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x| - |-\Delta x|}{2\Delta x} = 0$$

矛盾, 所以不可以用作导数的定义.

## 例题 3.1.2 3.1-A-9

利用定义求函数在  $x = 0$  处的导数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

解 3.1.2. 利用定义, 有

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

## 例题 3.1.3 3.1-B-3

求证: 偶函数的导数是奇函数, 奇函数的导数是偶函数;

解 3.1.3. 设  $f(x)$  是偶函数, 所以  $f(x) - f(-x) = 0$ , 两边求导得到  $f'(x) + f'(-x) = 0$ , 所以偶函数的导数是奇函数; 设  $f(x)$  是奇函数, 所以  $f(x) + f(-x) = 0$ , 两边求导得到  $f'(x) - f'(-x) = 0$ , 所以奇函数的导数是偶函数

我们也可以考虑定义: 设  $f(x)$  是偶函数, 所以

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-(-h)} = -f'(-x)$$

所以偶函数的导数是奇函数; 设  $f(x)$  是奇函数, 所以

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(-x-h)}{-(-h)} = f'(-x)$$

所以奇函数的导数是偶函数。

## 例题 3.1.4 3.1-B-4

求证: 周期函数的导数仍然是周期函数

解 3.1.4. 设  $f(x)$  是周期函数,  $T$  是周期,  $f(x+T) = f(x)$ , 则两边求导得到  $f'(x+T) = f'(x)$ , 所以  $f'(x)$  也是周期函数, 也可以从定义考虑:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = f'(x+T)$$

所以  $f'(x)$  是周期函数。

## 3.2 习题 3.2

## 例题 3.2.1 3.2-A-2

求导 (1)  $y = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ; (2)  $y = \frac{1}{x^3 + 2x + 1}$ ; (3)  $y = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$ .

解 3.2.1. (1)  $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ ; (2)  $y' = \frac{-3x^2 - 2}{(x^3 + 2x + 1)^2}$ ; (3)  $y' = -\frac{1 + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2}$

### 例题 3.2.2 3.2-A-4

求导 (1)  $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ ; (2)  $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ; (3)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ .

解 3.2.2. (1)  $y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ;  
 (2)  $y' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{(\sqrt{a^2 - x^2})^2} = \frac{a^2}{(\sqrt{a^2 - x^2})^3}$ ;  
 (3)  $y' = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ .

### 例题 3.2.3 3.2-B-1

设  $y = f(x)$  为严格递增的可导函数,  $x = \varphi(y)$  是它的反函数. 证明:

(1) 当  $h \neq 0$  时,  $f(x+h) - f(x) = k \neq 0$ , 若记  $f(x+h) = y+k$ , 则  $\varphi(y+k) = x+h$ .

(2) 当  $k \rightarrow 0$  时,  $\frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k} = \frac{h}{k} = \frac{h}{y+k-y} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)}$  趋于  $\frac{1}{f'(x)}$ .

解 3.2.3. (1) 由  $x = \varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$ , 以及  $y = f(x)$  为严格递增的可导函数, 所以  $\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} > 0$ , 所以  $x = \varphi(y)$  为严格递增的可导函数, 所以

$$f(x+h) = y+k \Rightarrow \varphi(f(x+h)) = x+h = \varphi(y+k)$$

(2)  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}$ , 这里  $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow k \rightarrow 0$ .

### 例题 3.2.4 3.2-B-2

设  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ , 用  $\varphi$  表示  $f$  的反函数. 求证:  $f(1) = 7, \varphi(7) = 1$ . 并计算  $\varphi'(7)$ .

解 3.2.4. 代入得到  $f(1) = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$ , 所以  $\varphi(7) = 1$ , 由  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$  可得  $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ , 所以  $\varphi'(7) = \frac{1}{f'(\varphi(7))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{10}$ .

### 例题 3.2.5 3.2-B-3

设  $y = (\arcsin x)^2$ , 证明  $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ .

解 3.2.5. 两边求导数得到  $y' = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\cos \arcsin x} = 2 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ , 所以  $\sqrt{1-x^2}y' = 2 \arcsin x$ , 再次两边求导得到  $\sqrt{1-x^2}y'' + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ , 等价变形就有  $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ .

### 例题 3.2.6 3.2-B-4

求下列函数的  $n$  阶导数  $y^{(n)}$ : (1)  $y = \frac{1}{1-x^2}$ ; (2)  $y = \sin^2 x$ .

解 3.2.6. (1) 裂项有  $y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$ , 所以  $y^{(n)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1+x} \right)^{(n)} + \left( \frac{1}{1-x} \right)^{(n)} \right]$ , 求  $n$  阶

导数有  $y^{(n)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right]$

(2)  $y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ ,  $y^{(n)} = \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right]^{(n)} = -2^{n-1} \cos \left( 2x + \frac{n\pi}{2} \right)$ , 诱导公式得到

$y^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left( 2x + \frac{(n-1)\pi}{2} \right)$



## 3.3 习题 3.3

## 例题 3.3.1 3.3-A-2

方程  $e^y + xy + y = 2$  确定隐函数  $y = y(x)$ , 求  $y'(x)$ .

解 3.3.1. 两边求导得到  $y'e^y + y + xy' + y' = 0$  解得  $y' = -\frac{y}{e^y + x + 1}$

## 例题 3.3.2 3.3-A-3

- (1)  $e^x - e^y + xy = 0$  (2)  $x^2 + y^2 - \arcsin y = 0$  (3)  $x^y = y^x$   
 (4)  $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  (5)  $x^2 - 2xy + y^2 = 2x$  (6)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$   
 (7)  $xy^2 + e^y = \cos(x + y^2)$  (8)  $\ln y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

解 3.3.2. (1) 两边求导得  $e^x - y'e^y + y + xy' = 0$  解得  $y' = \frac{e^x + y}{e^y - x}$

(2) 两边求导得  $2x + 2yy' - \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 0$  解得  $y' = \frac{2x\sqrt{1-y^2}}{1-2y\sqrt{1-y^2}}$

(3) 变换得到  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ , 两边求导得到  $y' = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$

(4) 两边求导得  $\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2}$  解得  $y' = \frac{x+y}{x-y}$

(5) 两边求导得  $2x - 2y - 2xy' + 2yy' = 2$  解得  $y' = \frac{x-y-1}{x-y}$

(6) 两边求导得  $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0$ , 解得  $y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$

(7) 两边求导得  $y^2 + 2xyy' + e^y y' = -(1 + 2yy') \sin(x + y^2)$ , 解得  $y' = -\frac{y^2 + \sin(x + y^2)}{e^y + 2xy + 2y \sin(x + y^2)}$ .

(8) 两边求导得  $\frac{y'}{y} = \frac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$ , 解得  $y' = -\frac{y}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ .

## 例题 3.3.3 3.3-A-4 求下列由参数方程表示的函数的导数:

- 1)  $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ; (2)  $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;  
 (3)  $x = 1 + t^3, y = e^{2t}$ , 求  $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=2}$ ; (4)  $x = 1 + t^2, y = \cos t$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;  
 (5)  $x = e^t \sin t, y = e^{-t} \cos t$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解 3.3.3. 使用链式法则, 分别求导得:

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{t}}{2\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}} \cdot \frac{\frac{2}{3}(1-\sqrt[3]{t})^{\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt[3]{t})^2}}{\sqrt[3]{t^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$$

$$(2) \quad x + y = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1. \quad (3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{2e^{2t}}{3t^2}, \text{ 代入 } x=2, t=1 \text{ 得到 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \frac{2}{3}e^2.$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{-\sin t}{2t}. \quad (5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{e^{-t}(-\sin t - \cos t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = -e^{2t}.$$

### 例题 3.3.4 3.3-A-5: 用对数求导法求导数

$$(1) \quad y = x^{\sin x}, (x > 0); \quad (2) \quad y = (\sqrt{x})^{\ln x}, (x > 0); \quad (3) \quad y = a^{\sin x}, (a > 0);$$

$$(4) \quad y = (1+x)^{\frac{1}{x}}, (x > 0); \quad (5) \quad y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}; \quad (6) \quad y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

解 3.3.4. (1)  $\ln y = (\sin x) \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\sin x}{x} + (\cos x) \ln x \Rightarrow y' = x^{\sin x} \left( (\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$

(2)  $\ln y = \frac{1}{2} \ln^2 x \Rightarrow \frac{d \ln y}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} 2 \ln x \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \ln x}{x}$

(3)  $\ln y = \sin x \ln a \Rightarrow \frac{d \ln y}{dy} \frac{dy}{dx} = \cos x \ln a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^{\sin x} \cos x \ln a$

(4)  $\ln y = \frac{\ln(x+1)}{x} \Rightarrow \frac{d \ln y}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}$  解得:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right)$$

(5) 定义域为  $(-4, -2) \cup (-2, +\infty)$ , 取绝对值, 然后取对数

$$\ln |y| = \ln \left( \frac{(x+5)^2 |x-4|^{\frac{1}{3}}}{|x+2|^5 (x+4)^{\frac{1}{2}}} \right) = 2 \ln |x+5| + \frac{1}{3} \ln |x-4| - 5 \ln |x+2| - \frac{1}{2} \ln(x+4)$$

两边对  $x$  微分:

$$\frac{d}{dx} \ln |y| = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x+5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-4} - 5 \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+4}$$

解得:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)} \right)$$

(6) 定义域为  $(-1, 1]$ ,  $|y| = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln |1+x|$ , 两边对  $x$  微分:

$$\frac{d}{dx} \ln |y| = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \right)$$

### 例题 3.3.5 3.3-A-6

下列参数方程给出函数  $y = y(x)$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

(1)  $x = a \cos t, y = a \sin t;$  (2)  $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3;$

(3)  $x = \ln(1+t^2), y = \arctan t;$  (4)  $x = \ln(t + \sqrt{t^2+1}), y = t^2.$

解 3.3.5. (1)  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (-\cot t) \frac{dt}{dx} = \frac{\csc^2 t}{-a \sin t} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$

(2)  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2}(1+t) \right) \frac{dt}{dx} = \frac{3}{4(1-t)}$

(3)  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2t} \right) \frac{dt}{dx} = -\frac{(1+t^2)}{4t^3}$

(4)  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (2t\sqrt{t^2+1}) \frac{dt}{dx} = \frac{4t^2+2}{\sqrt{t^2+1}} \sqrt{t^2+1} = 4t^2+2.$

**例题 3.3.6 3.3-A-7 求下列隐函数的二阶导数  $y''$**

(1)  $x^3 + y^3 - 3axy = 0, (a > 0)$ ; (2)  $y^2 + 2 \ln y = x^4$ ; (3)  $xy = e^{x+y}$ ; (4)  $y = 1 - xe^y$

解 3.3.6. (1) 两边求导数得

$$3x^2 + 3y^2 y' = 3a(y + xy') \Rightarrow (ax - y^2)y' = x^2 - ay \Rightarrow (a - 2yy')y' + (ax - y^2)y'' = 2x - ay'$$

解得

$$y'' = \frac{1}{y^2 - ax} \left[ \frac{2a(ay - x^2)}{y^2 - ax} - 2y \left( \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \right)^2 - 2x \right]$$

(2) 两边求导数得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3 \Rightarrow (y^2 + 1)y' = 2x^3y \Rightarrow (2yy')y' + (y^2 + 1)y'' = 2(3x^2y + x^3y')$$

解得

$$y'' = \frac{2x^2y}{(1+y^2)^2} [3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)]$$

(3) 两边求导数得  $xy' + y = e^{x+y}(1+y') \Rightarrow (e^{x+y} - x)y' = y - e^{x+y} \Leftrightarrow (xy - x)y' = y - xy$ , 再次在两边求导

$$(xy' + y - 1)y' + (xy - x)y'' + y = 0 \Rightarrow y'' = \frac{y}{x - xy} + \frac{(x + y - 2)(xy - y)}{(x - xy)^2} + \frac{x(xy - y^2)}{(x - xy)^3}$$

(4) 两边求导数得  $y' = -xe^y y' - e^y \Rightarrow y'(1 + xe^y) = -e^y \Rightarrow y'(y - 2) = e^y$ , 再次求导有

$$y'' = e^{2y} \left[ \frac{1}{(y-2)^2} - \frac{1}{(y-2)^3} \right] \Leftrightarrow y'' = \frac{2e^{2y}}{(1+xe^y)^2} - \frac{xe^{3y}}{(1+xe^y)^3}$$

**例题 3.3.7 3.3-A-9**

求  $\frac{dy}{dx}$ : (1)  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  在  $\theta = \frac{\pi}{6}$  处

(2)  $r = ae^{m\theta}$ , 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  以及  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$  为极坐标.

解 3.3.7.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr(\theta)\sin\theta}{d\theta}}{\frac{dr(\theta)\cos\theta}{d\theta}} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}$$

(1) 参数方程为  $r^2(\theta) = 2a^2 \cos 2\theta$ ,  $r'(\theta)r(\theta) = 2a^2(-\sin 2\theta)$ ,  $r(\frac{\pi}{6}) = a^2$ ,  $r(\theta) = a$ ,  $r'(\theta) = -\sqrt{3}a$ , 代入

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta} = 0$$

(2) 参数方程为  $\begin{cases} x = ae^{m\theta} \cos \theta \\ y = ae^{m\theta} \sin \theta \end{cases}$ ,  $r(\theta) = ae^{m\theta}$ ,  $r'(\theta) = ame^{m\theta}$ , 代入就有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta} = \frac{\cos\theta + m\sin\theta}{-\sin\theta + m\cos\theta} = \tan\left(\theta + \arctan \frac{1}{m}\right)$$

### 例题 3.3.8 3.3-B-1

求导:  $y = e^x + e^{e^x}$     $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b$     $y = 3^x \ln x$

解 3.3.8. (1)  $y' = e^x + e^{e^x} e^x$ ;

(2)  $\ln y = x \ln \left(\frac{a}{b}\right) + a \ln \left(\frac{b}{x}\right) + b \ln \left(\frac{x}{a}\right) = x \ln \left(\frac{a}{b}\right) + (b-a) \ln x$ , 两边求导得

$$\frac{y'}{y} = \ln \left(\frac{a}{b}\right) + \frac{b-a}{x}, y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln \left(\frac{a}{b}\right) + \frac{b-a}{x}\right)$$

(3)  $y' = 3^x \ln 3 \ln x + \frac{3^x}{x}$

## 3.4 习题 3.4

### 例题 3.4.1 3.4-A-5

利用一阶微分的形式不变性求微分: (1)  $y = \arctan e^x$    (2)  $y = e^{\sin x}$

解 3.4.1. (1)  $dy = \frac{de^x}{1+e^{2x}} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ ; (2)  $dy = e^{\sin x} d \sin x = e^{\sin x} \cos x dx$

### 例题 3.4.2 3.4-B-1

求下列函数的二阶微分  $d^2y$ : (1)  $y = \sqrt{1+x^2}$    (2)  $y = \frac{\ln x}{x}$

解 3.4.2. (1)  $d^2y = d(dy) = d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx\right) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} dx^2 = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx^2$

(2)  $d^2y = d(dy) = d\left(\frac{1-\ln x}{x^2} dx\right) = \frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4} dx^2 = \frac{2\ln x-3}{x^3} dx^2$

## 3.5 习题 3.5

## 例题 3.5.1 3.5-A-5

拉格朗日中值定理证明的关键是构造辅助函数, 试利用下列辅助函数来证明这个定理:

- (1)  $\Phi(x) = [f(x) - f(a)](b-a) - (x-a)[f(b) - f(a)];$   
 (2)  $\Phi(x) = f(x)(b-a) - x[f(b) - f(a)].$

解 3.5.1. (1) 过  $(a, f(a)), (b, f(b))$  的直线方程对应的一次函数为  $g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ , 所以构造

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) \\ &= \frac{(b-a)f(x) - (f(b) - f(a))(x-a) - (b-a)f(a)}{b-a} \\ &= \frac{(b-a)(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(x-a)}{b-a} = \frac{\Phi(x)}{b-a} \end{aligned}$$

且  $h(a) = h(b) = 0$ , 所以根据罗尔定理, 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $h'(\xi) = 0$ , 即  $f'(\xi) = g'(\xi)$ , 即

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

(2) 设  $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}x$ , 容易发现  $\varphi'(x) = h'(x)$ , 这表明  $\varphi(x)$  是  $h(x)$  向上平移得到的, 所以尽管此时没有  $h(a) = h(b) = 0$ , 但是  $h(a) = h(b)$  却仍然成立, 仍可利用罗尔定理得到存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $\varphi'(\xi) = 0$ , 即  $f'(\xi) = g'(\xi)$ , 即

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

## 例题 3.5.2 3.5-A-6

- (1) 证明: 如果  $\forall x \in [a, b]$ , 有  $f'(x) \geq m$ ,  $m$  是某常数, 则有  $f(b) \geq f(a) + m(b-a)$ ;  
 (2) 证明: 如果  $\forall x \in [a, b]$ , 有  $f'(x) \leq M$ ,  $M$  是某常数, 则有  $f(b) \leq f(a) + M(b-a)$ ;  
 (3) 如果  $\forall x \in [a, b]$ , 有  $|f'(x)| \leq M$ , 试写出一个类似的定理.

解 3.5.2. (1) 根据导数存在, 得知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微, 符合拉格朗日定理使用条件, 于是存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ , 又因为  $f'(\xi) \geq m$ , 代入就有  $f(b) \geq f(a) + m(b-a)$

(2) 根据导数存在, 得知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微, 符合拉格朗日定理使用条件, 于是存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ , 又因为  $f'(\xi) \leq M$ , 代入就有  $f(b) \leq f(a) + M(b-a)$

(3) 根据导数存在, 得知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微, 符合拉格朗日定理使用条件, 于是存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ , 即  $|f'(\xi)| = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right|$ , 又因为  $|f'(\xi)| \leq M$ , 代入就有  $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$ , 即  $|f(b)| \leq |f(a)| + M(b-a)$

**例题 3.5.3 3-5-A-7**

证明: 无论  $m$  是什么数, 多项式函数  $f(x) = x^3 - 3x + m$  在  $[0, 1]$  内决不会有两个零点.

**解 3.5.3.** 用反证法, 假设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  存在两个零点  $x_1$  和  $x_2$ , 则由于罗尔定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f'(\xi) = 0$ , 但是  $f'(x) = 3x^2 - 3$  在  $(0, 1)$  上小于 0, 矛盾, 所以  $f(x) = x^3 - 3x + m$  在  $[0, 1]$  内决不会有两个零点.

**例题 3.5.4 3-5-A-8**

设  $f(x) \in C[0, 1]$  且可微; 对于每个  $x$ ,  $f(x)$  的值都在  $(0, 1)$  内; 并且  $\forall x \in (0, 1), f'(x) \neq 1$ . 求证: 存在唯一的一个数  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

**解 3.5.4.** 构造函数  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上连续可微, 且  $g(0) = f(0) - 0 > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上必有零点, 假设有两个及以上个零点, 则根据罗尔定理得到必然存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $g'(\xi) = 0$ , 即  $f'(\xi) = 1$ , 矛盾, 所以  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上只有一个零点, 即存在唯一的一个数  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

**例题 3.5.5 3-5-A-10**

证明: (1)  $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ ; (2)  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$  ( $a > b > 0$ ).

**解 3.5.5.** (1) 由 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = \frac{\sin b - \sin a}{b - a}$

且  $|f'(\xi)| = \left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| \leq 1$ , 变形即可得到  $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$

(2) 等价于证明  $\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{b - a} < \frac{1}{b}$ , 根据 Lagrange 中值定理, 对于函数  $f(x) = \ln x$ , 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = \frac{\ln a - \ln b}{b - a}$  且由于  $\ln x$  的导函数在  $(a, b)$  上单调递减, 所以  $f'(a) < f'(\xi) < f'(b)$ , 即  $\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{b - a} < \frac{1}{b}$ .

**例题 3.5.6 3-5-A-11**

证明: 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 在  $(a, b)$  内可导, 则必存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$$

**解 3.5.6.** 等价于证明  $\frac{f(a) - f(b)}{a^2 - b^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$ , 根据柯西中值定理, 对于  $f(x)$  和  $g(x) = x^2$ , 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ , 即  $\frac{f(a) - f(b)}{a^2 - b^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$ .

## 例题 3.5.7 3-5-A-12

设  $f(x) \in C[a, b]$ . 在  $(a, b)$  内可导,  $0 < a < b$ . 求证: 存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

解 3.5.7. 等价于证明  $\frac{\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$ , 对于  $f(x)$  和  $g(x) = \frac{1}{x}$ , 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

## 例题 3.5.8 3-5-B-2

设函数  $f(x)$  满足  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n, n > 1$ , 通过考虑  $f'$  证明  $f$  是常数.

解 3.5.8. 变形得到  $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|^{n-1}$ , 由拉格朗日中值定理知存在  $\xi \in (x, y)$  使得  $|f'(\xi)| = \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$ , 则  $|f'(\xi)| < |x - y|^{n-1}$ , 由于  $x, y$  的任意性,  $|f'(\xi)| = 0$ , 所以  $f$  是常数.

## 例题 3.5.9 3-5-B-10

设  $h > 0, f'(x)$  在  $(a - h, a + h)$  内存在. 求证:

$$(1) \frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} = f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h) \quad (0 < \theta < 1);$$

$$(2) \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h))}{h} = f'(a + \theta h) - f'(a - \theta h) \quad (0 < \theta < 1).$$

解 3.5.9. (1) 由 Lagrange 中值定理得到, 若  $f'(x)$  在  $(x, x + h)$  内存在, 那么存在  $\xi \in (x, x + h)$  使得  $f'(\xi) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ , 这里可以换元, 令  $\xi = x + \theta h$ , 其中  $\theta \in (0, 1)$ , 则存在  $\theta \in (0, 1)$  使得  $f'(x + \theta h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ , 使用这个定理就可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} &= \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a - h)}{h} \\ &= f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h) \end{aligned}$$

(2) 同理, 若  $f'(x)$  在  $(x, x + h)$  内存在, 那么存在  $\xi \in (x, x + h)$  使得  $f'(\xi) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ , 这里可以换元, 令  $\xi = x + \theta h$ , 其中  $\theta \in (0, 1)$ , 则存在  $\theta \in (0, 1)$  使得  $f'(x + \theta h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ , 使用这个定理就可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h))}{h} &= \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f(a) - f(a - h)}{h} \\ &= f'(a + \theta h) - f'(a - \theta h) \end{aligned}$$

## 例题 3.5.10 3-5-B-11

由拉格朗日中值定理知,  $\ln(1+x) - 0 = x \cdot \frac{1}{1+\theta x} (0 < \theta < 1)$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ .

解 3.5.10. 解得  $\theta = \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)}$ , 转化为求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)}$ , 由

$$\frac{(x - \ln(x+1))'}{(x \ln(x+1))'} = \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)} = \frac{x}{x + (x+1) \ln(x+1)}$$

则由于导函数之比在 0 处的极限存在, 分母不为 0, 当  $x \rightarrow 0$  时, 分子分母趋近于 0, 所以洛必达法则有效, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + (x+1) \ln(x+1)}$$

发现分子分母趋近于 0, 对  $\frac{x}{x + (x+1) \ln(x+1)}$  分子分母上下分别求导得到  $\frac{1}{2 + \ln(x+1)}$ , 由于导函数之比在 0 处的极限存在, 分母不为 0, 则洛必达法则有效, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + (x+1) \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \ln(x+1)} = \frac{1}{2}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$

## 例题 3.5.11 3-5-B-12

设  $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ , 并设  $g(0) = g'(0) = 0, g''(0) = 17$ . 求  $f'(0)$ .

解 3.5.11. 利用导数的定义: 已知  $f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2}$$

又因为  $g'(x), g''(x)$  在  $x = 0$  的邻域内有定义, 所以使用洛必达法则得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h)}{2}$$

可导一定连续, 所以  $f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h)}{2} = \frac{17}{2}$

## 例题 3.5.12 3-5-B-14

设  $f(x)$  一阶可导, 且  $f''(x_0)$  存在, 求证:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$



解 3.5.12. 发现分子分母都趋近于 0，先分子分母上下分别求导得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(x_0 + 2h) - 2f'(x_0 + h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + 2h) - f'(x_0 + h)}{h}$$

，发现此时极限仍然存在，分母仍不是 0，所以洛必达法则有效，于是有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + 2h) - f'(x_0 + h)}{h}$$

再利用  $f''(x_0)$  的存在性，以及导数的定义，得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + 2h) - f'(x_0 + h)}{h} = f''(x_0)$$

即证.

### 3.6 泰勒公式

#### 例题 3.6.1 3.6-A-2

按  $x$  的正整数幂, 写出下列函数的展开式至含有指定阶数的项 (带皮亚诺余项):

- (1)  $\frac{1}{1-x}$  到含  $x^7$  的项; (2)  $\arctan x$  到含  $x^4$  的项  
(3)  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$  到含  $x^4$  的项; (4)  $\tan x$  到含  $x^4$  的项.

解 3.6.1. (1) 先求  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  的在  $x=0$  处的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(0)$ , 由于  $(1-x)f(x) = 1$  两边求  $n$  阶导数, 并利用莱布尼兹公式, 得到

$$(1-x)f^{(n)}(x) + (-1)C_n^1 f^{(n-1)}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = n f^{(n-1)}(0)$$

又  $f'(0) = 1$ , 所以  $f^{(n)}(0) = n!$ , 于是展开到含  $x^7$  的项就是:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + o(x^7)$$

(2) 令  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$ , 展开得到:

$$f'(x) = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + o(x^4) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

积分回去, 得到

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^7)$$

保留到到含  $x^4$  的项就是

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

(3) 直接使用广义二项式展开:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + C_{-\frac{1}{2}}^1 x + C_{-\frac{1}{2}}^2 x^2 + C_{-\frac{1}{2}}^3 x^3 + C_{-\frac{1}{2}}^4 x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + \frac{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{24}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

(4) 反复求导过程复杂, 可以先建立微分方程:

$$y' = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

两边求导得到:

$$y'' = 2yy' = 2y(1+y^2) = 2y + 2y^3$$

$$y''' = 2y' + 6y^2y' = 2(1+y^2) + 6y^2(1+y^2) = 2 + 8y^2 + 6y^4$$

$$y^{(4)} = 16yy' + 24y^3y' = 16y(1+y^2) + 24y^3(1+y^2) = 16y + 40y^3 + 24y^5$$

于是得到展开式:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

## 例题 3.6.2 3.6-A-5

求函数  $f(x) = xe^x$  的  $n$  阶麦克劳林公式, 带拉格朗日余项.

解 3.6.2. 设  $f(x) = xe^x$ , 其泰勒展开式展开到含  $x^n$  的项的式子, 都可以由  $x, e^x$  展开式的乘积确定:

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^x = x \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

再加上  $\frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!}, \theta \in (0, 1)$ , 即可得到

$$f(x) = xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}(\theta x + n + 1)}{(n+1)!}$$

## 例题 3.6.3 3.6-A-6

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}; (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{(\sin 2x)^6}; \\ (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right); & (5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right); \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 3.6.3. } (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \\ (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{6} \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{(\sin 2x)^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) - 1 - x^3}{64x^6} = \frac{1}{128} \\ (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2 \ln(x+1)}{2x} = 1 \\ (5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \frac{1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \\ (6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) - (1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{6}} = -3 \end{aligned}$$

## 3.7 函数性态的研究

## 例题 3.7.1 3.7-A-3

证明函数  $y = x + \sin x$  严格上升.

解 3.7.1.  $y' = 1 - \cos x \geq 0$ , 故  $y$  严格上升.

## 例题 3.7.2 3.7-A-7

设  $f(x) = axe^{bx}$ , 试确定常数  $a, b$ , 使得  $f(\frac{1}{3}) = 1$ , 且函数在  $x = \frac{1}{3}$  处有极大值.

解 3.7.2.  $f'(x) = ae^{bx}(bx + 1)$ ,  $f'(\frac{1}{3}) = ae^{b\frac{1}{3}}(1 + \frac{1}{3}b) = 0$ ,  $f(\frac{1}{3}) = a\frac{1}{3}e^{b\frac{1}{3}} = 1$ , 得到由必要条件引出的方程组  $a(b + \frac{1}{3}) = 0$ ,  $ae^{b\frac{1}{3}} = 3$ , 由第二个方程得到  $a \neq 0$ , 所以  $b = -3$ ,  $a = 3e$ , 下面证明充分性, 当  $b = -3$ ,  $a = 3e$  时,  $f(x) = 3xe \cdot e^{-3x} = 3xe^{1-3x}$ ,  $f(\frac{1}{3}) = 1$ ,  $f'(x) = e^{\frac{1-3x}{e^{3x}}} = 0$ , 导函数的正负性取决于一次函数  $y = 1 - 3x$ , 当  $x < \frac{1}{3}$  时,  $y < 0$ , 当  $x > \frac{1}{3}$  时,  $y > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $\frac{1}{3}$  处的极大值是  $f(\frac{1}{3}) = 1$ .

## 例题 3.7.3 3.7-A-8

- (1)  $\sin x > \frac{2}{\pi}x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$ ; (2)  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \neq 0)$ ;  
 (3)  $x > \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad (x > 0)$ ; (4)  $\ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x \geq 0)$ .

解 3.7.3. (1) 对于  $y = \sin x$ ,  $y' = \cos x$ ,  $y'' = -\sin x$ ,  $y$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上为凹函数. 根据凹函数的定义, 设  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $f(x) = \sin x$ , 有:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) = f\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) = 1-t$$

令  $x = \frac{\pi}{2}(1-t) \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 则有  $\sin x > \frac{2}{\pi}x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$ .

(2) 考虑函数  $f(x) = \cos x - (1 - \frac{x^2}{2})$ , 则  $f(0) = 0$ . 计算导数:

$$f'(x) = -\sin x + x, \quad f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$$

因此  $f'(x)$  单调递增, 又  $f'(0) = 0$ , 故当  $x > 0$  时  $f'(x) > 0$ , 当  $x < 0$  时  $f'(x) < 0$ . 所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处取得最小值  $f(0) = 0$ , 且当  $x \neq 0$  时  $f(x) > 0$ , 即  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \neq 0)$ .

(3) 先证左边不等式: 令  $f(x) = x - \ln(1+x)$ , 则  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad (x > 0)$ , 故  $f'(x) > 0$ , 又因为  $f(x) > f(0) = 0$ , 故  $f(x) > 0$ , 即  $x > \ln(1+x)$

再证右边不等式: 令  $g(x) = \ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2})$ , 则  $g(0) = 0$ ,  $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad (x > 0)$ , 故  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增, 又因为  $g(x) > g(0) = 0$ , 故  $g(x) > 0$ , 即  $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$

(4) 令  $h(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$ , 则  $h(0) = 0$ . 计算导数:

$$h'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

当  $x \geq 0$  时,  $\ln(1+x) \geq 0$ , 且  $1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0$ , 故  $h'(x) \geq 0$ ,  $h(x)$  单调递增, 因此  $h(x) \geq h(0) = 0$ , 即  $(1+x)\ln(1+x) \geq \arctan x$ , 亦即  $\ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x \geq 0)$ .

## 例题 3.7.4 3.7-B-3

用函数的凹凸性证明下列不等式: (1)  $\ln x \leq x - 1$  ( $x > 0$ );

(2)  $2 \arctan \frac{a+b}{2} \geq \arctan a + \arctan b$  ( $a, b \geq 0$ );

(3)  $1 + x^2 \leq 2^x$  ( $0 \leq x \leq 1$ );

(4)  $\frac{x^n + y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$  ( $x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1$ ).

解 3.7.4. (1) 考虑函数  $f(x) = \ln x$ , 其定义域为  $(0, +\infty)$ 。计算导数:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

因此  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是凹函数。根据凹函数的性质, 对于任意  $x > 0$ , 有:

$$f(x) \leq f(1) + f'(1)(x - 1)$$

代入  $f(1) = 0, f'(1) = 1$ , 得:

$$\ln x \leq 0 + 1 \cdot (x - 1) = x - 1$$

即  $\ln x \leq x - 1$  ( $x > 0$ ).

(2) 考虑函数  $f(x) = \arctan x$ , 其定义域为  $[0, +\infty)$ 。计算导数:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$$

因此  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是凹函数。根据凹函数的性质, 对于任意  $a, b \geq 0$ , 有:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

即:

$$2 \arctan \frac{a+b}{2} \geq \arctan a + \arctan b \quad (a, b \geq 0)$$

(3) 考虑函数  $g(x) = 2^x - 1 - x^2$ , 我们需要证明在  $[0, 1]$  上  $g(x) \geq 0$ 。计算导数:

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 2x, \quad g''(x) = 2^x (\ln 2)^2 - 2$$

在  $[0, 1]$  上, 由于  $2^x \leq 2$  且  $(\ln 2)^2 < 1$ , 所以  $g''(x) < 2 - 2 = 0$ , 即  $g(x)$  是凹函数。由凹函数的性质, 对于任意  $x \in [0, 1]$ , 有:

$$g(x) \geq (1-x)g(0) + xg(1)$$

代入  $g(0) = 0, g(1) = 0$ , 得:

$$g(x) \geq 0$$

即  $2^x - 1 - x^2 \geq 0$ , 所以  $1 + x^2 \leq 2^x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ).

(4) 考虑函数  $f(x) = x^n$  ( $n > 1$ ), 其定义域为  $(0, +\infty)$ 。计算导数:

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$$

因此  $f(x)$  是凸函数。根据凸函数的性质，对于  $x > 0, y > 0, x \neq y$ ，有：

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

即：

$$\frac{x^n + y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1)$$

## 第四章 自用

## 例题 4.0.1

设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上三阶可导, 且  $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} = a \neq 1$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ .

解 4.0.1. 首先由  $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$  得知  $f'(x), f(x)$  均单调递增, 所以

$$f(x+h) > f(x) + f'(\xi)(x+h-x) > f(x) + f'(x)h$$

令  $h \rightarrow +\infty$ , 得  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 现在对已知极限变形:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{f''(x)} \right)$$

所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = 1 - a \neq 0$ , 同样可以对所求极限变形:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{f'(x)} \right)$$

问题在于如何沟通  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = 1 - a$  和  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{f'(x)} \right)$ , 观察到它们是微分形式, 所以不妨反方向利用洛必达法则。须知, 洛必达法则在  $\frac{*}{\infty}$  的情形中是适用的, 即若  $f \rightarrow \infty, f, g$  在  $a$  的某个去心邻域内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'}{f'}$  存在 (或为无穷大, 但分母不等于 0), 那么  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g}{f} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'}{f'}$ ; 相关证明可以参阅数分教材 (如陈纪修的, 卓里奇的, 等等)。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f'(x)}{f''(x)}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} \end{aligned}$$

设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = 1 - A$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{f''(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} = 1 - a$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} = 1 - a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{1-a}$  即  $\frac{1-A}{1-a} = A$ , 解得

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{1}{2-a}$$