华南理工大学
South China University of Technology

工科数学分析
作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 11 月 25 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 集合，映射与函数

1.1 第 1 周作业

例题 1.1.1 讨论下列函数的奇偶性

(1)$y = 3x - x^3$ (2)$2 + 3x - x^3$ (3)$y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$

(4)$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (5)$y = \sqrt{x(2-x)}$ (6)$y = 2^{-x}$

(7)$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ (8)$y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

解 1.1.1. (1) 由于 $f(x)+f(-x) = 3x+3(-x)-x^3-(-x)^3 = 0$，故为奇函数

(2) 由于 $f(x)+f(-x) = 2+3x+3(-x)+2-x^3-(-x)^3 = 4$，不为奇函数；而 $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$，故为非奇非偶函数

(3) 由于 $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$，故为偶函数

(4) 由于 $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = f(-x)$，故为偶函数

(5) 由于 $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$，故不为偶函数，由于 $f(x)+f(-x) = \sqrt{x(2-x)}+\sqrt{-x(2+x)} \neq 0$，故为非奇非偶函数

(6) 由于 $\begin{cases} f(x)+f(-x) = 2^{-x}+2^{-(-x)} = 2^{-x}+2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$，故为非奇非偶函数

(7) 由于 $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)+f(-x) = x-1+(-x)+1 = 0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$，故为奇函数

(8) 由于 $f(x)+f(-x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1}) = \ln(-x^2+(x^2+1)) = 0$，故为奇函数

例题 1.1.2 研究函数的单调性

(1)$y = ax+b$ (2)$y = ax^2+bx+c$ (3)$y = x^3$ (4)$y = a^x$

解 1.1.2. (1) 若 $a \geq 0$，则 y 单调递增；若 $a<0$，则 y 单调递减；若 $a>0$，则 y 严格单调递增

(2) 若 $a>0$，则 y 先严格单调减后严格单调增，若 $a<0$，则 y 先严格单调增后严格单调减，若 $a=0$，则当 $b>0$ 时，y 单调递增，当 $b<0$ 时，y 单调递减；若 $a=b=0$，则 y 非严格单调递增

(3) 若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2) = x_1^3-x_2^3 = (x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2) > x_1-x_2 > 0$ 故单调递增

(4) 需限定 $a>0$，则当 $a>1$ 时，y 单调递增，当 $a<1$ 时，y 单调递减；若 $a=1$，则 $y=1$ 非严格单调递增；

例题 1.1.3 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$(1) y = \sin^2 x$ $(2) y = \sin x^2$ $(3) y = \cos(x-2)$

$(4) y = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$ $(5) y = x - [x]$ $(6) y = \tan|x|$

解 1.1.3. (1) 是周期函数，周期为 $k\pi, (k\in\mathbb{Z})$，最小正周期为 π

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{(x+T)^2-x^2}{2} = 2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{2x+T^2}{2} \neq 0$$

则这样的 T 不存在.

(3) 是周期函数，周期为 $2k\pi, (k\in\mathbb{Z})$，最小正周期为 2π.

(4)$y = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\lambda x + \arctan\dfrac{B}{A})$ 是周期函数，周期为 $\frac{2k\pi}{\lambda}, (k\in\mathbb{Z}, \lambda > 0)$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{\lambda}, (\lambda > 0)$

(5) 是周期函数，因为 $[x]+1 = [x+1]$，则 $x+1-[x+1] = x+1-[x]-1 = x-[x]$，所以 $y = x-[x]$ 是周期函数，周期为 $\mathbb{Z}$，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是 π，假设 $\tan|x|$ 也是周期函数，则存在 $T>0$ 使得对于定义域内的任意实数 x 都有 $|x|+\pi = |x+T|$，代入 $x=-\pi$ 得到 $T=3\pi$，代入 $x=0$ 得到 $T=\pi$，矛盾！所以 $y=\tan|x|$ 不是周期函数.

例题 1.1.4 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

解 1.1.4. (1) 设 $f(x), g(x)$ 为两个奇函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(-g(-x)) = f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设 $f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(g(-x)) = -f(-x)g(-x) \Leftrightarrow f(x)g(x) + f(-x)g(-x) = 0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数.

例题 1.1.5 证明

若函数 $f(x)$ 周期为 $T(T>0)$，则函数 $f(-x)$ 的周期也是 T.

解 1.1.5. 设 $f(x)$ 周期为 T，则 $f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(-x+T) = f(-x)$，故 $f(-x)$ 的周期也是 T.

例题 1.1.6 证明

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义域为 R 的单调函数，求证：$f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

解 1.1.6. 由于 $f(x), g(x)$ 是定义域为 R 的单调函数，则：

$$\forall x_1, x_2 \in R,\ (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0,\ \ \forall x_3, x_4 \in R,\ (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在 $x_1 = g(x_3), x_2 = g(x_4)$，则相乘

$$(g(x_3) - g(x_4))(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

结合 $x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0$ 就有：

$$(x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4))^2(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3 - x_4)(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

故 $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

例题 1.1.7 证明

$$(1)\ \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad (2)\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数 $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 + i \Rightarrow z_1 z_2 = 5 + 5i$，则：

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由于 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，代入 $x = \arcsin x$ 即可得到：

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

第二章 极限

2.1 习题 2.1

例题 2.1.1 2.1-A-3：给出下列极限的精确定义

（1）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

解 2.1.1.（1）对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时，$|f(x)|<\varepsilon$.
（2）对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时，$|(1+x)^{\frac{1}{x}}-e|<\varepsilon$.

例题 2.1.2 2.1-A-7

利用极限的精确定义证明下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5x)=24$ （2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$ （4）$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x}{x^2-4}=+\infty.$

解 2.1.2.（1）要证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-3|<\delta$ 时，$|(x^2+5x)-24|=|(x+8)(x-3)|<\varepsilon$。已经出现了 $|x-3|$，所以现在只需限定 $|x+8|$，先限定 $|x-3|<1$，那么 $|x+8|<12$，此时还需满足 $|(x+8)(x-3)|<12|x-3|<\varepsilon$，得 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{12}$，故取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{12}\right\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，$|(x^2+5x)-24|=|(x+8)(x-3)|<\varepsilon$。
（2）要证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon$。取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$。
（3）要证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|x|>\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$，因为 $\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{2}{3x^2}\right|$，取 $\delta=\sqrt{\dfrac{2}{3\varepsilon}}$，则当 $|x|>\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$。
（4）要证对于任意 $G>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<x-2<\delta$ 时，$\dfrac{2x}{x^2-4}>G$，不妨限定 $x+2<5$，则 $x-2<1$，则 $\dfrac{2x}{x^2-4}>\dfrac{4}{(x+2)(x-2)}>\dfrac{4}{5(x-2)}>G$ 解得 $x-2<\dfrac{4}{5G}$，所以取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{4}{5G}\right\}$，当 $0<x-2<\delta$ 时，$\dfrac{2x}{x^2-4}>G$。

例题 2.1.3 2.1-A-10

证明：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$，但反之不然。

解 2.1.3. 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|=<\varepsilon$，所以由绝对值不等式得到 $|f(x)-A|>||f(x)-|-A||=||f(x)|-|A||>0$，故 $||f(x)|-|A||<\varepsilon$，所以由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$. 然后反过来，考虑定义在实数域上的函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ -1, x\notin Q\end{cases}$，其极限

$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=1$，但是 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在。

例题 2.1.4 2.1-B-2(1)：利用极限的精确证明

$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

解 2.1.4. 要证 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$，只需证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|=2|\cos\dfrac{x+a}{2}||\sin\dfrac{x-a}{2}|<\varepsilon$。又因为 $2|\cos\dfrac{x+a}{2}||\sin\dfrac{x-a}{2}|<2|\sin\dfrac{x-a}{2}|<2|\dfrac{x-a}{2}|=|x-a|$，所以取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|<\varepsilon$.

例题 2.1.5 2.1-B-4

利用极限的精确定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$ 是错误的.

解 2.1.5. 要证明存在 $G>0,\forall\delta>0$ 使得当 $x>\delta$ 时，$\dfrac{x}{x+1}\le G$，则取 $G=1$，便可以满足 $\forall x>0,\dfrac{x}{x+1}\le 1$，故存在 $G>0,\forall\delta>0$ 使得当 $x>\delta$ 时，$\dfrac{x}{x+1}\le G$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$ 是错误的.（本题本质是找到一个够大的上界）

2.2 习题 2.3

例题 2.2.1 2.3-A-2

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+2)$;　(2) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)(1-2x)^2$;　(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-40x^4)$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^5+21x^3)$;　(5) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}$;　(6) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^4+2}$;　(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+2x}{x^{10}+x+7}$.

解 2.2.1.（1）$\lim\limits_{x\to2}(3x^2-5x+2)=\lim\limits_{x\to2}(3(2)^2-5(2)+2)=4.$

（2）$\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)(1-2x)^2=\lim\limits_{x\to-1}(1+1)(1-2(-1))^2=18.$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-40x^4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4(x-40)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\lim\limits_{x\to+\infty}(x-40)=+\infty.$

（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^5+21x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5(6+\dfrac{21}{x^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\lim\limits_{x\to-\infty}(6+\dfrac{21}{x^2})=-\infty.$

（5）$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty.$

（6）$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty.$

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+1}{x^4+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{x+\frac{2}{x^3}}=0.$

（8）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+2x}{x^{10}+x+7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}}}{1+\frac{1}{x^9}+\frac{7}{x^{10}}}=0;$

例题 2.2.2 2.3-A-4

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) \qquad (2)\ \lim_{x\to-\infty}(\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x})$$
$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x}) \quad (4)\ \lim_{x\to-\infty}(\frac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x})$$

解 2.2.2. （1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

（2） $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{\sqrt{3x^2+x}}{x})=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}=-\sqrt{3}.$

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{9x}+\dfrac{1}{9x^2}}=\dfrac{2}{3}.$

（4） $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x})=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9}{36}+\dfrac{1}{36x}+\dfrac{3}{6x^2}}=-\dfrac{1}{2}.$

例题 2.2.3 2.3-A-8

$$(1)y=\frac{x^2-2x-2}{x-1} \qquad (2)y=\frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

解 2.2.3. （1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-2x+x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=-1$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y=x-1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0^-}(x-\frac{1}{x})=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0^+}(x-\frac{1}{x})=-\infty$$

故该函数在 $x=1$ 处的渐近线为 $x=1$.

（2）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(1-\frac{1}{x})^2}=2$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y=2$.

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2}{(1-\frac{1}{x})^2}=+\infty$$

故该函数在 $x=2$ 处的渐近线为 $x=2$.

例题 2.2.4 习题 2.3-B 组-1

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$，讨论下列极限的状态：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

解 2.2.4. （1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty+\infty=+\infty$.

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ 不确定，比如当 $f(x)=x$ 时，假如 $g(x)=2x$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=-\infty$，但当 $g(x)=\frac{x}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$，当 $f(x)=g(x)$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$.

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\cdot+\infty=+\infty$.

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不确定，比如当 $f(x)=x$ 时，假如 $g(x)=2x$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{2}$，但当 $g(x)=\sqrt{x}$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\infty$，又当 $g(x)=x^2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

例题 2.2.5 习题 2.3-B 组-4

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a 和 b.

解 2.2.5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}}\\&=\frac{\lim_{x\to\infty}\left((1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}\right)}{1}\\&=\lim_{x\to\infty}(1-a)x-(a+b)=0\end{aligned}$$

必须有 $a=1, b=-1$.

例题 2.2.6 习题 2.3-B 组-5

设a,b,c 是常数, $a\neq 0$, 证明$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$的图形有斜渐近线, 并求出渐近线方程.

解 2.2.6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=a\neq 0$$

由此可知，$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$ 的图形有斜渐近线.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x+1}-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-a)x+c}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{b-a+\frac{c}{x}}{1+\frac{1}{x}}=b-a$$

则渐近线方程为 $y=ax+b-a$.

2.3 习题 2.2

例题 2.3.1 习题 2.2-A-2

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{5n+1}=\dfrac{3}{5}$

解 2.3.1.（1）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时有 $|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$.

$$|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|=\left|\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right|<\left|\frac{1}{2\sqrt{n-1}}\right|<\varepsilon$$

因此取 $N=\left[2+\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$，则对于任意 $\varepsilon>0$，当 $n\geq N$ 时，有 $|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$.

（2）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\varepsilon$，限定 $n>9$，则 $2^n>n^3$，则有 $\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\left|\dfrac{n^2}{n^3}\right|=2\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\max\left\{9,\left[1+\dfrac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\varepsilon$.

（3）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{n+1}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

（4）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{3n}{5n+1}-\dfrac{3}{5}\right|=\dfrac{3}{5}\left|\dfrac{1}{5n+1}\right|<\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{3n}{5n+1}-\dfrac{3}{5}\right|<\varepsilon$.

例题 2.3.2 习题 2.2-A-4

证明：由 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$ 能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，但反过来不可以.

解 2.3.2. 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$||x_n|-|a||<|x_n-a|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，但是考虑数列 $a_n=(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$，但是去掉绝对值后，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在，所以不能反过来.

例题 2.3.3 习题 2.2-B-1

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{n^2+1}=\infty$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}=\dfrac{1}{2}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.(a>1)$

解 2.3.3. （1）要证明任意 $G>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时有 $\left|\dfrac{n^3-1}{n^2+1}\right|=\dfrac{n^3-1}{n^2+1}>G$，由

$$\frac{n^3-1}{n^2+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^2+1}>\frac{(n-1)(n^2+1)}{n^2+1}=n-1$$

所以取 $N=G+2$，则任意 $G>0$，$\left|\dfrac{n^3-1}{n^2+1}\right|>G$.

（2）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\arctan n-\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}-\arctan n<\varepsilon$，则取 $N=[\tan\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon]+1$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\arctan n-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$.

（3）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2\sqrt{n}+1)}$，取 $N=\left[1+\left(\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

（4）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|=\dfrac{a^n}{n!}<\varepsilon$，由

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\frac{a}{2}\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{[a]}\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}<\frac{a^{[a]}}{[a]!}\frac{a}{n}$$

所以取 $N=\left[\dfrac{a^{[a+1]}}{[a]!\varepsilon}+1\right]$，则任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|<\varepsilon$.

例题 2.3.4 2.3-A-3

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$

解 2.3.4. （1）代数变形：

$$\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{(-2)^{-1}+\dfrac{3^n}{(-2)^{n+1}}}{1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}=\frac{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}{1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{5}{6\left(1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}\right)}$$

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6\left(1+(-\frac{3}{2})^{n+1}\right)}\right)=\frac{1}{3}$.

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

（3）

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

（4）用裂项 $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{k+1-1}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{2}$$

2.4 习题 2.4

例题 2.4.1 2.4-A-5

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{5x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin 3x}$ (5) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta}$ (6) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\tan^2 h}{h}$

(7) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$ (9) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ (11) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ (12) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$ (14) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

解 2.4.1. 这里只使用基本极限公式：

（1）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$ （2）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2.$

（3）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{5}.$ （4）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}.$

（5）$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\theta=0.$ （6）$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\tan^2 h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\tan^2 h}{h^2}h=0.$

（7）$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}.$ （8）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=1.$

（9）$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sec x}{(1+\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

（10）$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to0}2\cos 4x=2.$$

（11）$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=4\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{\sin x}{x}=4.$$

（12）$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$$

（13）$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=-\sin a.$$

（14）$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin a}{\cos a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos a\cos(x-a)}=\sec^2 a$，其中 $a\neq$

$(2k+1)\frac{\pi}{2}$，$k \in \mathbb{Z}_+$.

例题 2.4.2 2.4-A-6

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/2}$ (2) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x}$ (3) $\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$ $(x\neq 0)$
(4) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}$ (5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4x}$

解 2.4.2. （1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x/3}\right)^{\frac{3}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{-1}{x}}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

（3）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}(x\neq 0) = \lim\limits_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\left(\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right) = \mathrm{e}$

vspace0.5em （4）$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^{a} = \lim\limits_{\frac{1}{ax}\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^{a} = \mathrm{e}^{a}$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-4} = \mathrm{e}^{-4}$.

例题 2.4.3 2.4-B-4

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}}$ (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$
(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ (5) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

解 2.4.3. （1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{x}-5}{\frac{1}{x^3}\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x^3}{\sin x^2} = 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x^2}\dfrac{3x^2-5x}{3x^2} = 3$.

（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x = \lim\limits_{x\to 0}-\sin x\tan(3x+\dfrac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan 3x} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{x}{\tan x} = \dfrac{1}{3}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = 2\dfrac{1}{2} = 1$.

（4）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\tan x+1}{1-\tan x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{x(1-\tan x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x}{x} = 2$.

（5）$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{-1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\dfrac{1}{x})x\right)^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2.5 习题 2.5

例题 2.5.1 2.5-A-2

证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$ 收敛，并求其极限值.

解 2.5.1. 先证数列 $\{a_n\}$ 有界，数列满足 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$，由于 $a_1 = \sqrt{2} < 2$，假设 $a_k < 2, (k \geq 2)$，则有 $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{4} = 2$，所以归纳得到 $a_k < 2$，因此数列 $\{a_n\}$ 有界.

再证明数列 $\{a_n\}$ 单调递增，作商得到 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\dfrac{2}{a_n}} > 1$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调递增.

由单调有界收敛定理得到 $\{a_n\}$ 收敛，极限存在，所以设极限为 A，对 $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ 两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \Rightarrow A = 2$$

所以数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

进一步地，设 $b_n = a_n - 2$，所以

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = \sqrt{2a_n} - 2 = \sqrt{2(2+b_n)} - 2 = \sqrt{4+2b_n} - 2$$

泰勒展开得到

$$\sqrt{4+2b_n} = 2\sqrt{1+\frac{b_n}{2}} = 2\left(1 + \frac{b_n}{4} - \frac{b_n^2}{32} + O(b_n^3)\right) \Rightarrow b_{n+1} = \frac{b_n}{2} - \frac{b_n^2}{16} + O(b_n^3)$$

对于大的 n , 有 $b_n \to 0$, 主导项为 $\frac{b_n}{2}$, 因此 $b_{n+1} \sim \frac{1}{2}b_n$，这意味着 b_n 以指数速率衰减，即 $b_n \sim C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 其中 $C = b_1 = \sqrt{2} - 2$。因此 $b_n^2 \sim C^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, 因此误差项为 $O\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$$a_n = 2 + (\sqrt{2}-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad (n \to \infty)$$

例题 2.5.2 2.5-A-3

设 $a > 0, 0 < x_1 < \dfrac{1}{a}, x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), n = 1, 2, 3, \cdots$ 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

解 2.5.2. 先证明数列 $\{x_n\}$ 有界，已知 $0 < x_1 < \dfrac{1}{a}$，则假设 $x_k \in (0, \dfrac{1}{a}), k \in \mathrm{N}_+$，则 $ax_k \in (0,1)$，而 $x_k(2 - ax_k)$ 是 x_k 的二次函数，在 $(0, \dfrac{1}{a})$ 上单增，在 $(\dfrac{1}{a}, \dfrac{2}{a})$ 上单减，所以 $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k) > 0$，且 $x_{k+1} < \dfrac{1}{a}(2 - a\dfrac{1}{a}) = \dfrac{1}{a}$，所以 $x_n \in (0, \dfrac{1}{a})$, 数列 $\{x_n\}$ 有界. 再证明数列 $\{x_n\}$ 单调递增，作商得到 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - ax_n > 1$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，极限存在，所以设极限为 A，对 $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ 两边取极限得到

$$\lim_{x\to\infty} x_{n+1} = \lim_{x\to\infty} x_n(2 - a\lim_{x\to\infty} x_n) \Leftrightarrow A = A(2 - aA) \Leftrightarrow A = \frac{1}{a}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{a}$，事实上这个数列的通项公式是 $x_n = \dfrac{1}{a}\left[1 - (1 - ax_1)^{2^{n-1}}\right]$

例题 2.5.3 2.5-A-4

设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

解 2.5.3.（1）当 $x_1 = \sqrt{3}$ 时，假设 $x_k = \sqrt{3}, k \in \mathrm{N}_+$，则

$$x_{k+1} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以 $\{x_n = \sqrt{3}\}$，$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

（2）当 $0 < x_1 < \sqrt{3}$ 时，假设 $0 < x_k < \sqrt{3}, k \in \mathrm{N}_+$，则由函数 $f(x) = \dfrac{3x+3}{3+x} = 3 - \dfrac{6}{3+x}$ 在 $(0, \sqrt{3})$ 上单增，得到：

$$\frac{3+0}{3+0} = 1 < x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} < \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以归纳得到 $x_k \in (0, \sqrt{3})$，且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n-3x_n-x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} > 0$$

则 $\{x_n\}$ 单调递增，由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，设极限为 A，代入递推式得到 $A = \dfrac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

（3）当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时，假设 $x_k > \sqrt{3}, k \in \mathrm{N}_+$，则由函数 $f(x) = \dfrac{3x+3}{3+x} = 3 - \dfrac{6}{3+x}$ 在 $(\sqrt{3}, \infty)$ 上单增，得到：

$$x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} > \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 有下界，又有：

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n-3x_n-x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，设极限为 A，代入递推式得到 $A = \dfrac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$，那么 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

例题 2.5.4 2.5-B-1

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}, n = 1, 2, 3, \cdots$，证明 $\{x_n\}$ 极限存在，并求极限.

解 2.5.4. 先证明数列 $\{x_n\}$ 有界，由 $x_1 = 10 > 3$，假设 $x_k > 3$，那么 $x_{k+1} = \sqrt{x_k+6} > \sqrt{9} = 3$，所以 $\{x_n\}$ 有界；再证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减，作商得到

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n+6} - x_n = \frac{x_n+6-x_n^2}{\sqrt{x_n+6}+x_n} = \frac{(3-x_n)(x_n+2)}{\sqrt{x_n+6}+x_n} > 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 极限存在，设极限为 A，代入递推式得到 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 3$.

例题 2.5.5 2.5-B-2

利用柯西准则，证明下面各数列的收敛性：
(1) $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$，其中 $|a_i| \leqslant M$（$i = 0, 1, 2, \cdots$），且 $|q| < 1$；
(2) $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$.

解 2.5.5.（1）设 $m > n$，则

$$|x_m - x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_m q^m| \leqslant M|q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^m| < M\frac{|q^{n+1}|}{1-|q|}$$

任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N = [\log_q \dfrac{\varepsilon}{M} + 1]$ 使得任意 $x > N$，$M\dfrac{|q^{n+1}|}{1-|q|} < M|q^{n+1}| < \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛.（2）设 $m > n$，则

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(m)}{2^m}\right| < \left|\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right| < \frac{1}{2^n}$$

所以任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N = [2 - \log_2 \varepsilon]$ 使得任意 $n > N$，$|x_m - x_n| < \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例题 2.5.6 2.5-B-3

对于数列 $\{x_n\}$，若子列 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k+1}\}$ 都收敛于 a, 试用“$\varepsilon - N$”的语言证明数列 $\{x_n\}$ 也收敛于 a.

解 2.5.6. 任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N, |x_{2n-1} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N, |x_{2n} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a；那么对 $2n-1$ 代入 $n = N_1 + 1$，对 $2n$ 代入 $n = N_2 + 1$，可知取 $N = \max\{2N_1 + 4, 2N_2 + 4\}$，则 $\forall n > N, |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

例题 2.5.7 2.5-B-4

证明：若 $f(x)$ 为定义于 $[a, +\infty)$ 上的单调增加函数，则极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.

解 2.5.7. 必要性：设极限为 A，则存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时，有 $|f(x) - A| < 1$，故

$$|f(x)| - |A| < ||f(x)| - |A|| < |f(x_n) - A| < 1 \Rightarrow |f(x_n)| < 1 + |A|$$

所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.
充分性：若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界，则由确界定理得到 $f(x)$ 有上确界 $\sup_{x\in[a,+\infty)} f(x)$，由确界定义知道，$\forall \varepsilon_n = \frac{1}{n}, (n = 1, 2, \cdots), \exists x_n \in [a, +\infty)$，使得 $|f(x_n) - A| < \frac{1}{n}$，于是得到数列 $\{x_n\}$ 满足

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N$ 使得 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$，由于 $f(x)$ 为定义于 $[a,+\infty)$ 上的单调增加函数，所以任意 $x>x_{N+1}$，均有 $f(x_{N+1})\le f(x)\le A$，于是 $|f(x)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

例题 2.5.8 2.6-B-1

证明：当 $x\to 0$ 时，有 $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3, \arctan x\sim\dfrac{1}{4}\sin 4x$.

解 2.5.8. （1）$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim x\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^3}{2}, x\to 0$.

（2）$\arctan x\sim x=\dfrac{4x}{4}\sim\dfrac{\sin 4x}{4}$，由 $\tan x\sim x, x\to 0$ 换元 $x=\arctan y$ 可得 $y\sim\arctan x, x\to 0$.

例题 2.5.9 2.6-B-2

利用等价无穷小求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{2x}, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

解 2.5.9. （1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{2}{5}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^m}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}x^{m-n}$.

当 $m>n$ 时，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}=0$；

当 $m=n$ 时，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}=1$；

当 $m<n$ 时，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}=\infty$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-1}{\frac{1}{2}x^2}=1$.

例题 2.5.10 2.6-B-3

证明：（1）$2x-x^2=O(x)\ (x\to 0)$；（2）$\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to 0)$；

（3）$2x^3+2x^2=O(x^3)\ (x\to\infty)$；（4）$(1+x)^n=1+nx+o(x)\ (x\to 0)$.

解 2.5.10. （1）验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2-2x)=2$ 为非零常数，故 $2x-x^2=O(x)\ (x\to 0)$.

（2）由定义，验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-1}{1+\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}=0$，故 $\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to 0)$.

（3）由定义，验证 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}(2+\dfrac{2}{x})=2$ 为非零常数，故 $2x^3+2x^2=O(x^3)\ (x\to\infty)$.

（4）验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1-nx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}x^2+\ldots+x^n}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{n(n-1)}{2}x+..+x^{n-1}\right)=0$，故

$(1+x)^n = 1+nx+o(x)\ (x\to 0)$.

例题 2.5.11 2.6-B-4

设在某一极限过程中，α 和 β 都是无穷小. 证明：如果 $\alpha\sim\beta$, 则 $\beta-\alpha=o(\alpha)$，反之，如果 $\beta-\alpha=o(a)$, 则 $\alpha\sim\beta$.

解 2.5.11. 如果 $\alpha\sim\beta$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}-1=1-1=0$，故 $\beta-\alpha=o(\alpha)$.

如果 $\beta-\alpha=o(a)$，则 $0=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}-1$，所以 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，故 $\alpha\sim\beta$.

例题 2.5.12 2.6-B-5

证明：当 $x\to 0$ 时，有：

（1）$o(x^n)+o(x^m)=o(x^n),(0<n<m)$；（2）$o(x^n)\cdot o(x^m)=o(x^{n+m}),(n,m>0)$.

解 2.5.12. （1）由定义得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)o(1)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}o(1)=0\Rightarrow o(g(x))=g(x)o(1)$$

考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)+o(x^m)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^no(1)+x^mo(1)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\left(o(1)+x^{m-n}o(1)\right)=\lim_{x\to 0}o(1)=0$$

故 $o(x^n)+o(x^m)=o(x^n),(0<n<m)$；（2）考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)\cdot o(x^m)}{x^n\cdot x^m}=\lim_{x\to 0}\frac{x^no(1)x^mo(1)}{x^n\cdot x^m}=\lim_{x\to 0}\left(o(1)\cdot o(1)\right)=0$$

由定义得到 $o(x^n)\cdot o(x^m)=o(x^{n+m}),(n,m>0)$.

例题 2.5.13 2.7-B-2

判断 $x=0$ 处的间断点类型（1）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+nx^2}$.

解 2.5.13. （1）$\lim\limits_{x\to 0^-}=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}=\dfrac{1}{1}=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 两侧的极限均存在，但不等于 $f(0)$，且 $f(0^-)\neq f(0^+)$，所以是跳跃间断点.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+nx^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{\frac{1}{n}+x^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{0+x^2}=\dfrac{1}{x}$，所以 $x=0$ 为无穷间断点.

例题 2.5.14 2.7-B-3

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，试找出其间断点.

解 2.5.14. 观察发现分母在 $x=1$ 处的变化速度很快，计算 $f(x)$ 的分段函数得到：

$$f(x)=\begin{cases}0, x=-1\\ 0, |x|>1\\ 1+x, |x|<1\\ 1, x=1\end{cases}$$

所以 $f(1^-), f(1), f(1^+)$ 都不等，所以 $x=1$ 为间断点.

例题 2.5.15 2.7-B-4

试确定 a, b 的值, 使 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$, 有可去间断点 $x=1$.

解 2.5.15.（1）由题意得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左极限和右极限至少一个为无穷大，假设 $a\neq 0$，由于 $f(x)$ 为初等函数，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-1)}=\dfrac{1-b}{a}$ 为常数，矛盾，所以 $a=0$；当 $b=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-x}=1$，所以需要同时满足 $a=0, b\neq 1$，下证充分性，当 $a=0, b\neq 1$ 时

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}}{x}+\frac{\mathrm{e}-b}{x-1}=\infty$$

（2）要使得 $f(x)$ 有可去间断点 $x=1$，则 $f(1^-)=f(1^+)$，假设 $b\neq\mathrm{e}$，计算发现

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}-b}{(x-1)(1-a)}=\infty$$

矛盾，所以 $b=\mathrm{e}$ 为必要条件，当 $b=\mathrm{e}$ 时，计算极限并使用等价无穷小替换：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}}{1-a}$$

所以 $a\neq 1$，下面证明充分性。当 $a\neq 1, b=\mathrm{e}$ 时，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{(x-a)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}}{1-a}=\mathrm{e}$，所以此时 $f(1^-)=f(1^+)=\mathrm{e}$，因此 $x=1$ 为可去间断点，等价于 $a\neq 1, b=\mathrm{e}$.
所以答案为 $a=0, b\neq 1; a\neq 1, b=\mathrm{e}$.

例题 2.5.16 2.8-A-3 求极限

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^{3\sec x}$, $\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(\cos^2 x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin x}+(1+x)^x\right]$

解 2.5.16.（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^{3\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^3=\mathrm{e}^3$.

（2）由于该函数为初等函数，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1}=\frac{\pi}{2}$.

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(\cos^2 x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin x}+(1+x)^x\right]=1+\lim\limits_{x\to0}\ln(\cos^2 x+\sqrt{1-x^2})=1+\ln 2$.

例题 2.5.17 2.8-A-5

证明下列方程在给定区间至少有一个根：$x2^x=1, x\in[0,1]; x^3+px-q=0, p>0, x\in R$

解 2.5.17.（1）设初等函数 $f(x)=x2^x-1$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1, f(1)=1$，由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有至少一个根.
（2）设初等函数 $g(x)=x^3+px-q$ 在 R 上连续，

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{p}{x^2}-\frac{q}{x^3}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1+\frac{p}{x^2}-\frac{q}{x^3}\right)=+\infty\end{cases}$$

零点存在性定理知 $g(x)$ 在 R 上有至少一个根.

例题 2.5.18 2.8-A-6

设 $f(x)\in C[0,1]$, 并且 $\forall x\in[0,1], 0<f(x)<1$(画-图). 求证：$\exists x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

解 2.5.18. 设连续函数 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(0)=f(0)-0>0, g(1)=f(1)-1<0$，由零点存在性定理知 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有根 x_0，$\exists x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

例题 2.5.19 2.8-B-2

证明: 若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 必有界.

解 2.5.19. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则任意 $\varepsilon_1>0$，存在 $N_1\in R$ 使得 $\forall x>N_1$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon_1$，即 $A-\varepsilon_1<f(x)<A+\varepsilon_1$，说明 $f(x)$ 在 $(N_1,+\infty)$ 有上界 $A+\varepsilon_1$ 和下界 $A-\varepsilon_1$；设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$，则任意 $\varepsilon_2>0$，存在 $N_2\in R$ 使得 $\forall x<N_2$，有 $|f(x)-B|<\varepsilon_2$，即 $B-\varepsilon_2<f(x)<B+\varepsilon_2$，说明 $f(x)$ 在 $(-\infty,N_2)$ 有上界 $B+\varepsilon_2$ 和下界 $B-\varepsilon_2$；由于 $f(x)$ 在 $[N_2,N_1]$ 上连续，所以在 $[N_2,N_1]$ 上也有上界 C_1，有下界 C_2，则取 $D_1=\max\{C_1,A+\varepsilon_1,B+\varepsilon_2\}, D_2=\min\{C_2,A-\varepsilon_1,B-\varepsilon_2\}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有上界 D_1 和下界 D_2；证毕.

例题 2.5.20 2.8-B-3

设 $f(x)\in C(a,b)$，且 $f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 都存在，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

解 2.5.20. 补充定义函数 $g(x)=\begin{cases} f(a^+), x=a \\ f(x), x\in(a,b) \\ f(b^-), x=b \end{cases}$，则 $g(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a^+)=g(a)$，所以 $g(x)$ 在 a 点右连续，同理 $g(b)$ 在 b 点左连续，由此可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

例题 2.5.21 2.8-B-4

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|,\forall x,y\in[a,b]$，$L$ 为常数，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

解 2.5.21. 任意 $\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关的 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$，使得 $\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$，有 $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|<L\dfrac{\varepsilon}{L}=\varepsilon$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

例题 2.5.22

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$，试求 $\{a_n\}$ 的渐进.

解 2.5.22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，则有

$$a_{n+1}=\frac{S_n}{T_n}=\frac{S_n}{a_nT_{n-1}}=\frac{S_n}{\frac{S_{n-1}}{T_{n-1}}T_{n-1}}=\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

转化为估计 S_n 的阶，将 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 代入得到：

$$S_1=1, S_2=2, S_{n+1}=S_n+\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

下面估计 S_n 的主阶，先考察它的有界性和单调性，由

$$S_n>0, S_{n+1}-S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}>0\Rightarrow S_{n+1}>S_n$$

可知 S_n 是单调递增的，再次代入递推式有

$$S_{n+1}-S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}>1\Rightarrow S_{n+1}-S_n>1\Rightarrow S_n\geq n$$

所以 S_n 发散到正无穷，无上界，我们再把这个结论代入到递推公式中：

$$S_{n+1}=S_n+\frac{S_n}{S_{n-1}}\Leftrightarrow\frac{S_{n+1}}{S_n}=1+\frac{1}{S_{n-1}}\to 1\ \ (n\to\infty)$$

当 n 趋于无穷时，$S_n\sim n$，构造 $b_n=S_n-n$ 以得到更精确的阶，将 $S_n=n+b_n$ 代入递推公式：

$$S_{n+1}-S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\Leftrightarrow b_{n+1}-b_n=\frac{n+b_n}{n-1+b_{n-1}}-1=\frac{1+\frac{b_n}{n}}{1-\left(\frac{1}{n}-\frac{b_{n-1}}{n}\right)}-1$$

泰勒展开可得：

$$\begin{aligned}
b_{n+1}-b_n=&-1+\left(1+\frac{b_n}{n}\right)\left(1+\left(\frac{1}{n}-\frac{b_{n-1}}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
=&-1+\left(1+\frac{b_n}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)-\frac{b_{n-1}}{n}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
=&\frac{1}{n}+\frac{b_n-b_{n-1}}{n}+\frac{b_n(1-b_{n-1})}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
=&\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
\Rightarrow b_{n+1}-b_n\sim&\frac{1}{n}\Rightarrow b_n\sim\ln n+O(1)\Rightarrow S_n=n+b_n\sim n+\ln n+O(1)
\end{aligned}$$

所以 $\{S_n\}$ 的阶为 $n+\ln n+c+o(1)$，代入 $a_n=\dfrac{S_{n-1}}{S_{n-2}}$ 得到：

$$a_n=\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}=\frac{(n-1)+\ln(n-1)+c+o(1)}{(n-2)+\ln(n-2)+c+o(1)}$$

并利用

$$\ln(n-1)=\ln n-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),\quad \ln(n-2)=\ln n-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

代入：

$$S_{n-1}=n-1+\ln n+c-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=n\left(1+\frac{\ln n+c-1}{n}-\frac{3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$S_{n-2}=n-2+\ln n+c-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=n\left(1+\frac{\ln n+c-2}{n}-\frac{4}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

故技重施：

$$\frac{1}{S_{n-2}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{\ln n+c-2}{n}+\frac{(\ln n+c-2)^2+4}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

代入得到

$$\begin{aligned}a_n=&\left(1+\frac{\ln n+c-1}{n}-\frac{3}{2n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\ln n+c-2}{n}+\frac{(\ln n+c-2)^2+4}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\=&1-\frac{\ln n+c-2}{n}+\frac{\ln n+c-1}{n}+\frac{(\ln n+c-2)^2+2}{n^2}\\&-\frac{(\ln n+c-1)(\ln n+c-2)}{n^2}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\=&1+\frac{1}{n}+\frac{3-c-\ln n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

例题 2.5.23

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$，找到一个正整数 k，使得 $n\geq k$ 时，$a_n<1+\dfrac{1}{n}$.

解 2.5.23.

例题 2.5.24

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，求 $\{a_n\}$ 的渐进.

解 2.5.24. 解微分方程

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}n}=\frac{1}{a}\Rightarrow a\mathrm{d}a=\mathrm{d}n\Rightarrow a\sim\sqrt{2n}\Rightarrow a_n^2\sim 2n$$

设 $a_n^2=b_n+2n$，代入递推公式得到

$$a_{n+1}=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2\Leftrightarrow 2(n+1)+b_{n+1}=2n+b_n+2+\frac{1}{2n+b_n}$$

化简得到 $b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{2n + b_n} = b_n + \dfrac{\frac{1}{2n}}{1 - (-\frac{b_n}{2n})}$，泰勒展开：

$$b_{n+1} - b_n \sim \frac{1}{2n} - \frac{b_n}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \Rightarrow b_n \sim \frac{1}{2}\ln n + c_n$$

再次代入递推公式：

例题 2.5.25

已知 k 为正整数，求积分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x$

解 2.5.25.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \frac{x\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^0 \frac{(x+\pi)\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x} \\
&= \int_{-\pi}^0 \frac{x\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x + \pi\int_0^\pi \frac{\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x = -I + \pi\int_0^\pi \frac{\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x \\
&= -I + \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x = -I + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x \\
&= -I + 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x = -I + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x \\
&= -I + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}{\sin^{2k}x + \cos^{2k}x}\mathrm{d}x = -I + \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}.$$

例题 2.5.26

给出 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$，计算 $\displaystyle\int_0^1\int_0^y \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 2.5.26. 根据所给式子，得到 $0 \le x \le y$（因为 x 从 0 到 y 积分），再根据外层积分确定 $0 \le y \le 1$，所以 $0 \le x \le y \le 1$，所以:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^y \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_x^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln(x+1)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{12} - 2\ln 2 + 1
\end{aligned}$$

例题 2.5.27

求积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x+\cos^6 x}$

解 2.5.27.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x+\cos^6 x} &= \int \frac{\sec^6 x\mathrm{d}x}{1+\tan^6 x} = \int \frac{\sec^6(\arctan t)\mathrm{d}\arctan t}{1+\tan^6(\arctan t)} \\ &= \int \frac{(1+t^2)^3\mathrm{d}t}{(t^6+1)(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^4-t^2+1)} \\ &= \int \frac{1+t^2}{t^4-t^2+1}\mathrm{d}t = \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}-1}\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+1} = \arctan(t-\frac{1}{t})+C \\ &= \arctan(\tan x-\frac{1}{\tan x})+C = \arctan(\frac{\tan^2 x-1}{\tan x}) \\ &= \arctan(-2\cot 2x)+C = C-\arctan(2\cot 2x).\end{aligned}$$

例题 2.5.28

求积分 $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$.

解 2.5.28.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\tan x+1)(\tan^2 x+1)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)^2} \quad (令 t=\tan x) \\ &= \int \left(\frac{1/4}{1+t}+\frac{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}}{1+t^2}+\frac{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int \frac{1-t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int \frac{1-t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\ln|1+t|+\frac{1}{4}\arctan t-\frac{1}{8}\ln(1+t^2)+\frac{1}{4}\cdot\frac{t+1}{1+t^2}+C \\ &= \frac{1}{4}\ln|1+\tan x|-\frac{1}{4}\ln|\sec x|+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}(\sin x\cos x+\cos^2 x)+C \\ &= \frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x+C\end{aligned}$$

例题 2.5.29

求积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x + 2\sin x}$.

解 2.5.29.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x + 2\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{4\sin t\cos^3 t} = \int \frac{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2\mathrm{d}t}{4\sin t\cos^3 t} = \frac{1}{4}\int \frac{(\tan t^2+1)^2}{\tan t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{(\tan(\arctan\theta)^2+1)^2}{\tan\arctan\theta}\mathrm{d}\arctan\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\theta^2+1}{\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\int\left(\theta+\frac{1}{\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\theta^2+\frac{1}{4}\ln|\theta|+C \\
&= \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln|\tan\frac{x}{2}|+C
\end{aligned}$$

例题 2.5.30

求积分 $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

解 2.5.30.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{x\mathrm{e}^{x}}{(e^{x}+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{\ln t}\ln t}{(\mathrm{e}^{\ln t}+1)^2}\mathrm{d}\ln t = \int \frac{\ln t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int \ln t\mathrm{d}\left(-\frac{1}{1+t}\right) = -\frac{\ln t}{t+1}+\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}\ln t \\
&= -\frac{\ln t}{t+1}+\int\frac{1}{t(1+t)}\mathrm{d}t = -\frac{\ln t}{t+1}+\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\ln t}{t+1}+\ln t-\ln(t+1)+C = -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C
\end{aligned}$$

第三章 一元函数微分学

3.1 习题 3.1

例题 3.1.1 3.1-A-3

下列各式可否成为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数的定义？请说明理由.

(1) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内定义,$x_0\in(a,b)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在, 则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数.

(2) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内定义,$x_0\in(a,b)$，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数.

(3) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内定义,$x_0\in(a,b)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在, 则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数.

解 3.1.1. （1）可以，因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0)$$

（2）可以，因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x_0+x-x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

（3）不可以，当 $f'(x_0)$ 存在时，该极限等于 $f'(x_0)$，这是因为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f'(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f'(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\&=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0)\end{aligned}$$

但是当 $f'(x_0)$ 不存在，而左右导数存在时，该极限推出的是左导数和右导数的平均值，并非 $f'(x_0)$，比如当 $f(x)=|x|,x=0$ 导数不存在，但是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{|\Delta x|-|-\Delta x|}{2\Delta x}=0$$

矛盾，所以不可以用作导数的定义.

例题 3.1.2 3.1-A-9

利用定义求函数在 $x=0$ 处的导数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$.

解 3.1.2. 利用定义，有

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

例题 3.1.3 3.1-B-3

求证：偶函数的导数是奇函数，奇函数的导数是偶函数；

解 3.1.3. 设 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)-f(-x)=0$，两边求导得到 $f'(x)+f'(-x)=0$，所以偶函数的导数是奇函数；设 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=0$，两边求导得到 $f'(x)-f'(-x)=0$，所以奇函数的导数是偶函数

我们也可以考虑定义：设 $f(x)$ 是偶函数，所以

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-(-h)}=-f'(-x)$$

所以偶函数的导数是奇函数；设 $f(x)$ 是奇函数，所以

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x)-f(-x-h)}{-(-h)}=f'(-x)$$

所以奇函数的导数是偶函数。

例题 3.1.4 3.1-B-4

求证：周期函数的导数仍然是周期函数

解 3.1.4. 设 $f(x)$ 是周期函数，T 是周期，$f(x+T)=f(x)$，则两边求导得到 $f'(x+T)=f'(x)$，所以 $f'(x)$ 也是周期函数，也可以从定义考虑：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}=f'(x+T)$$

所以 $f'(x)$ 是周期函数.

3.2 习题 3.2

例题 3.2.1 3.2-A-2

求导（1）$y=1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$；（2）$y=\dfrac{1}{x^3+2x+1}$；（3）$y=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$.

解 3.2.1. （1） $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$；（2） $y' = \frac{-3x^2-2}{(x^3+2x+1)^2}$；（3） $y' = -\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^2}$

例题 3.2.2 3.2-A-4

求导（1） $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$；（2） $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$；（3） $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

解 3.2.2. （1） $y' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

（2） $y' = \frac{\sqrt{a^2-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \frac{a^2}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}$；

（3） $y' = \frac{1+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

例题 3.2.3 3.2-B-1

设 $y = f(x)$ 为严格递增的可导函数，$x = \varphi(y)$ 是它的反函数. 证明：

(1) 当 $h \neq 0$ 时,$f(x+h) - f(x) = k \neq 0$，若记 $f(x+h) = y+k$, 则 $\varphi(y+k) = x+h$.

(2) 当 $k \to 0$ 时，$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \frac{h}{k} = \frac{h}{y+k-y} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)}$ 趋于 $\frac{1}{f'(x)}$.

解 3.2.3. （1） 由 $x = \varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$，以及 $y = f(x)$ 为严格递增的可导函数，所以 $\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} > 0$，所以 $x = \varphi(y)$ 为严格递增的可导函数，所以

$$f(x+h) = y+k \Rightarrow \varphi(f(x+h)) = x+h = \varphi(y+k)$$

（2） $\lim\limits_{k\to 0} \frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}$， 这里 $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$.

例题 3.2.4 3.2-B-2

设$f(x) = x^3+2x^2+3x+1$, 用φ表示f 的反函数.求证 : $f(1) = 7, \varphi(7) = 1$.并计算$\varphi'(7)$.

解 3.2.4. 代入得到 $f(1) = 1+2+3+1 = 7$，所以 $\varphi(7) = 1$，由 $f(x) = x^3+2x^2+3x+1$ 可得 $f'(x) = 3x^2+4x+3$，所以 $\varphi'(7) = \frac{1}{f'(\varphi(7))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{10}$.

例题 3.2.5 3.2-B-3

设$y = (\arcsin x)^2$, 证明$(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

解 3.2.5. 两边求导数得到 $y' = 2\arcsin x \cdot \dfrac{1}{\cos\arcsin x} = 2\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，所以 $\sqrt{1-x^2}y' = 2\arcsin x$，再次两边求导得到 $\sqrt{1-x^2}y'' + \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$，等价变形就有 $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

例题 3.2.6 3.2-B-4

求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$：（1）$y = \frac{1}{1-x^2}$；（2）$y = \sin^2 x$.

解 3.2.6.（1）裂项有 $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right)$，所以 $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} + \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}\right]$，求 n 阶导数有 $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right]$

（2）$y = \sin^x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x), y^{(n)} = \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right]^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$，诱导公式得到 $y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x + \dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)$

3.3 习题 3.3

例题 3.3.1 3.3-A-2

方程 $\mathrm{e}^y + xy + y = 2$ 确定隐函数 $y = y(x)$，求 $y'(x)'$.

解 3.3.1. 两边求导得到 $y'\mathrm{e}^y + y + xy' + y' = 0$ 解得 $y' = -\dfrac{y}{\mathrm{e}^y + x + 1}$

例题 3.3.2 3.3-A-3

（1）$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y + xy = 0$ （2）$x^2 + y^2 - \arcsin y = 0$ （3）$x^y = y^x$

（4）$\arctan \dfrac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ （5）$x^2 - 2xy + y^2 = 2x$ （6）$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

（7）$xy^2 + \mathrm{e}^y = \cos(x + y^2)$ （8）$\ln y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

解 3.3.2. （1）两边求导得 $\mathrm{e}^x - y'\mathrm{e}^y + y + xy' = 0$ 解得 $y' = \dfrac{\mathrm{e}^x + y}{\mathrm{e}^y - x}$

（2）两边求导得 $2x + 2yy' - \dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ 解得 $y' = \dfrac{2x\sqrt{1-y^2}}{1 - 2y\sqrt{1-y^2}}$

（3）变换得到 $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$，两边求导得到 $y' = \dfrac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$

（4）两边求导得 $\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\dfrac{y'x - y}{x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2}$ 解得 $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

（5）两边求导得 $2x - 2y - 2xy' + 2yy' = 2$ 解得 $y' = \dfrac{x - y - 1}{x - y}$

（6）两边求导得 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{y'}{2\sqrt{y}} = 0$，解得 $y' = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

（7）两边求导得 $y^2 + 2xyy' + \mathrm{e}^y y' = -(1 + 2yy')\sin(x + y^2)$，解得 $y' = -\dfrac{y^2 + \sin(x+y^2)}{\mathrm{e}^y + 2xy + 2y\sin(x+y^2)}$.

（8）两边求导得 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$，解得 $y' = -\dfrac{y}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

例题 3.3.3 3.3-A-4 求下列由参数方程表示的函数的导数:

1) $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; (2) $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(3) $x = 1 + t^3, y = e^{2t}$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}$; (4) $x = 1 + t^2, y = \cos t$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(5) $x = e^t \sin t, y = e^{-t}\cos t$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 3.3.3. 使用链式法则，分别求导得：

$$（1）\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{t}}{2\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}\frac{\frac{2}{3}(1-\sqrt{t})^{\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[3]{t^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$$

（2）$x+y=1\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1.$ （3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{3t^2}$，代入 $x=2,t=1$ 得到 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^2.$

（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\sin t}{2t}.$ （5）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}(-\sin t-\cos t)}{\mathrm{e}^{t}(\sin t+\cos t)}=-\mathrm{e}^{2t}.$

例题 3.3.4 3.3-A-5: 用对数求导法求导数

（1）$y=x^{\sin x},(x>0)$；（2）$y=(\sqrt{x})^{\ln x},(x>0)$；（3）$y=a^{\sin x},(a>0)$；

（4）$y=(1+x)^{\frac{1}{x}},(x>0)$；（5）$y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$；（6）$y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

解 3.3.4. （1）$\ln y=(\sin x)\ln x\Rightarrow\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\sin x}{x}+(\cos x)\ln x\Rightarrow y'=x^{\sin x}\left((\cos x)\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

（2）$\ln y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}2\ln x\dfrac{1}{x}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y\ln x}{x}$

（3）$\ln y=\sin x\ln a\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x\ln a\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a^{\sin x}\cos x\ln a$

（4）$\ln y=\dfrac{\ln(x+1)}{x}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ 解得：

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$$

（5）定义域为 $(-4,-2)\cup(-2,+\infty)$，取绝对值，然后取对数

$$\ln|y|=\ln\left(\frac{(x+5)^2|x-4|^{\frac{1}{3}}}{|x+2|^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\right)=2\ln|x+5|+\frac{1}{3}\ln|x-4|-5\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln(x+4)$$

两边对 x 微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|y|=\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\cdot\frac{1}{x+5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-4}-5\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}$$

解得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right)$$

（6）定义域为 $(-1,1]$，$|y|=|x|\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\Rightarrow\ln|y|=\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln|1-x|-\dfrac{1}{2}\ln|1+x|$，两边对 x 微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|y|=\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}\right)$$

例题 3.3.5 3.3-A-6

下列参数方程给出函数 $y=y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

(1)$x=a\cos t,y=a\sin t$; (2)$x=2t-t^2,y=3t-t^3$;

(3)$x=\ln(1+t^2),y=\arctan t$; (4)$x=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),y=t^2$.

解 3.3.5.（1）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cot t)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\csc^2 t}{-a\sin t}=-\dfrac{1}{a\sin^3 t}$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{3}{2}(1+t)\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3}{4(1-t)}$

（3）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{1+t^2}{2t}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{(1+t^2)}{4t^3}$

（4）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2t\sqrt{t^2+1}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{4t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}\sqrt{t^2+1}=4t^2+2.$

例题 3.3.6　3.3-A-7 求下列隐函数的二阶导数 y''

（1）$x^3+y^3-3axy=0,(a>0)$；（2）$y^2+2\ln y=x^4$；（3）$xy=\mathrm{e}^{x+y}$；（4）$y=1-x\mathrm{e}^y$

解 3.3.6.（1）两边求导数得

$$3x^2+3y^2y'=3a(y+xy')\Rightarrow(ax-y^2)y'=x^2-ay\Rightarrow(a-2yy')y'+(ax-y^2)y''=2x-ay'$$

解得

$$y''=\frac{1}{y^2-ax}\left[\frac{2a(ay-x^2)}{y^2-ax}-2y\left(\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)^2-2x\right]$$

（2）两边求导数得

$$2yy'+\frac{2y'}{y}=4x^3\Rightarrow(y^2+1)y'=2x^3y\Rightarrow(2yy')y'+(y^2+1)y''=2(3x^2y+x^3y')$$

解得

$$y''=\frac{2x^2y}{(1+y^2)^2}\left[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)\right]$$

（3）两边求导数得 $xy'+y=\mathrm{e}^{x+y}(1+y')\Rightarrow(\mathrm{e}^{x+y}-x)y'=y-\mathrm{e}^{x+y}\Leftrightarrow(xy-x)y'=y-xy$，再次在两边求导

$$(xy'+y-1)y'+(xy-x)y''+y=0\Rightarrow y''=\frac{y}{x-xy}+\frac{(x+y-2)(xy-y)}{(x-xy)^2}+\frac{x(xy-y^2)}{(x-xy)^3}$$

（4）两边求导数得 $y'=-x\mathrm{e}^yy'-\mathrm{e}^y\Rightarrow y'(1+x\mathrm{e}^y)=-\mathrm{e}^y\Rightarrow y'(y-2)=\mathrm{e}^y$，再次求导有

$$y''=\mathrm{e}^{2y}\left[\frac{1}{(y-2)^2}-\frac{1}{(y-2)^3}\right]\Leftrightarrow y''=\frac{2\mathrm{e}^{2y}}{(1+x\mathrm{e}^y)^2}-\frac{x\mathrm{e}^{3y}}{(1+x\mathrm{e}^y)^3}$$

例题 3.3.7　3.3-A-9

求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：（1）$r^2=2a^2\cos 2\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处

（2）$r=a\mathrm{e}^{m\theta}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 以及 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$ 为极坐标.

解 3.3.7.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{\frac{\mathrm{d}r(\theta)\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}r(\theta)\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$$

（1）参数方程为 $r^2(\theta)=2a^2\cos2\theta, r'(\theta)r(\theta)=2a^2(-\sin2\theta), r(\frac{\pi}{6})=a^2, r(\theta)=a, r'(\theta)=-\sqrt{3}a$，代入

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=0$$

（2）参数方程为 $\begin{cases}x=a\mathrm{e}^{m\theta}\cos\theta\\ y=a\mathrm{e}^{m\theta}\sin\theta\end{cases}$ $,r(\theta)=a\mathrm{e}^{m\theta}, r'(\theta)=am\mathrm{e}^{m\theta}$，代入就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=\frac{\cos\theta+m\sin\theta}{-\sin\theta+m\cos\theta}=\tan\left(\theta+\arctan\frac{1}{m}\right)$$

例题 3.3.8 3.3-B-1

求导：$y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ $\quad y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$ $\quad y=3^x\ln x$

解 3.3.8. （1）$y'=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x$；

（2）$\ln y=x\ln\left(\frac{a}{b}\right)+a\ln\left(\frac{b}{x}\right)+b\ln\left(\frac{x}{a}\right)=x\ln\left(\frac{a}{b}\right)+(b-a)\ln x$，两边求导得

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{b-a}{x}, y'=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{b-a}{x}\right)$$

（3）$y'=3^x\ln3\ln x+\dfrac{3^x}{x}$

3.4 习题 3.4

例题 3.4.1 3.4-A-5

利用一阶微分的形式不变性求微分：$(1)y=\arctan\mathrm{e}^x$ $\quad(2)y=\mathrm{e}^{\sin x}$

解 3.4.1. （1）$\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；（2）$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}\sin x=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$

例题 3.4.2 3.4-B-1

求下列函数的二阶微分 $\mathrm{d}^2y:(1)y=\sqrt{1+x^2}$ $\quad(2)y=\dfrac{\ln x}{x}$

解 3.4.2. （1）$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x^2=\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x^2$

（2）$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\right)=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}\mathrm{d}x^2=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}\mathrm{d}x^2$

3.5 习题 3.5

例题 3.5.1 3.5-A-5

拉格朗日中值定理证明的关键是构造辅助函数，试利用下列辅助函数来证明这个定理：
（1）$\Phi(x)=[f(x)-f(a)](b-a)-(x-a)[f(b)-f(a)]$;
（2）$\Phi(x)=f(x)(b-a)-x[f(b)-f(a)]$.

解 3.5.1.（1）过 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 的直线方程对应的一次函数为 $g(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$，所以构造

$$\begin{aligned} h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)\\ =\frac{(b-a)f(x)-(f(b)-f(a))(x-a)-(b-a)f(a)}{b-a}\\ =\frac{(b-a)(f(x)-f(a))-(f(b)-f(a))(x-a)}{b-a}=\frac{\Phi(x)}{b-a}\end{aligned}$$

且 $h(a)=h(b)=0$，所以根据罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $h'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=g'(\xi)$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

（2）设 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，容易发现 $\varphi'(x)=h'(x)$，这表明 $\varphi(x)$ 是 $h(x)$ 向上平移得到的，所以尽管此时没有 $h(a)=h(b)=0$，但是 $h(a)=h(b)$ 却仍然成立，仍可利用罗尔定理得到存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=g'(\xi)$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

例题 3.5.2 3-5-A-6

(1) 证明：如果 $\forall x\in[a.b]$, 有 $f'(x)\geqslant m,m$ 是某常数，则有 $f(b)\geqslant f(a)+m(b-a)$;
(2) 证明：如果 $\forall x\in[a,b]$, 有 $f'(x)\leqslant M,M$ 是某常数，则有 $f(b)\leqslant f(a)+M(b-a)$;
(3) 如果 $\forall x\in[a,b]$, 有 $|f'(x)|\leqslant M$, 试写出一个类似的定理.

解 3.5.2.（1）根据导数存在，得知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，符合拉格朗日定理使用条件，于是存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，又因为 $f'(\xi)\geq m$，代入就有 $f(b)\geqslant f(a)+m(b-a)$
（2）根据导数存在，得知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，符合拉格朗日定理使用条件，于是存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，又因为 $f'(\xi)\leqslant M$，代入就有 $f(b)\leqslant f(a)+M(b-a)$
（3）根据导数存在，得知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，符合拉格朗日定理使用条件，于是存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即 $|f'(\xi)|=\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$，又因为 $|f'(\xi)|\leqslant M$，代入就有 $|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a)$，即 $|f(b)|\leqslant|f(a)|+M(b-a)$

例题 3.5.3 3-5-A-7

证明: 无论m是什么数, 多项式函数$f(x) = x^3 - 3x + m$在$[0,1]$内决不会有两个零点.

解 3.5.3. 用反证法，假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 存在两个零点 x_1 和 x_2，则由于罗尔定理，存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi) = 0$，但是 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 在 $(0,1)$ 上小于 0，矛盾，所以 $f(x) = x^3 - 3x + m$ 在 $[0,1]$ 内决不会有两个零点.

例题 3.5.4 3-5-A-8

设 $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ 且可微；对于每个 $x, f(x)$ 的值都在 (0,1) 内；并且 $\forall x \in (0,1), f'(x) \neq 1$.求证：存在唯一的一个数 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

解 3.5.4. 构造函数 $g(x) = f(x) - x$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续可微，且 $g(0) = f(0) - 0 > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上必有零点，假设有两个及以上个零点，则根据罗尔定理得到必然存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = 1$，矛盾，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上只有一个零点，即存在唯一的一个数 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

例题 3.5.5 3-5-A-10

证明：(1) $| \sin b - \sin a | \leqslant | b - a |$; (2)$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ $(a > b > 0)$.

解 3.5.5. （1）由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{\sin b - \sin a}{b - a}$
且 $|f'(\xi)| = \left|\dfrac{\sin b - \sin a}{b - a}\right| \leq 1$，变形即可得到 $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$
（2）等价于证明 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln a - \ln b}{b - a} < \dfrac{1}{b}$，根据 Lagrange 中值定理，对于函数 $f(x) = \ln x$，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{\ln a - \ln b}{b - a}$ 且由于 $\ln x$ 的导函数在 (a,b) 上单调递减，所以 $f'(a) < f'(\xi) < f(b)$，即 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln a - \ln b}{b - a} < \dfrac{1}{b}$.

例题 3.5.6 3-5-A-11

证明：若 $f(x) \in C[a,b]$, 在 (a,b) 内可导，则必存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$$

解 3.5.6. 等价于证明 $\dfrac{f(a) - f(b)}{a^2 - b^2} = \dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$，根据柯西中值定理，对于 $f(x)$ 和 $g(x) = x^2$，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，即 $\dfrac{f(a) - f(b)}{a^2 - b^2} = \dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$.

例题 3.5.7 3-5-A-12

设 $f(x) \in C[a,b]$. 在 (a,b) 内可导，$0 < a < b$. 求证: 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

解 3.5.7. 等价于证明 $\dfrac{\frac{f(a)}{a}-\frac{f(b)}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = f(\xi)-\xi f'(\xi)$，对于 $f(x)$ 和 $g(x)=\dfrac{1}{x}$，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

例题 3.5.8 3-5-B-2

设函数$f(x)$满足$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^n, n>1$,通过考虑$f'$证明$f$ 是常数.

解 3.5.8. 变形得到 $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq |x-y|^{n-1}$，由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in (x,y)$ 使得 $|f'(\xi)| = \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$，则 $|f'(\xi)| < |x-y|^{n-1}$，由于 x,y 的任意性，$|f'(\xi)|=0$，所以 f 是常数.

例题 3.5.9 3-5-B-10

设 h>0, $f'(x)$ 在 $(a-h,a+h)$ 内存在. 求证：

(1) $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h)+f'(a-\theta h) \quad (0<\theta<1)$;

(2) $\dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h) \quad (0<\theta<1)$.

解 3.5.9. （1）由 Lagrange 中值定理得到，若 $f'(x)$ 在 $(x,x+h)$ 内存在，那么存在 $\xi \in (x,x+h)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，这里可以换元，令 $\xi = x+\theta h$，其中 $\theta \in (0,1)$，则存在 $\theta \in (0,1)$ 使得 $f'(x+\theta h) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，使用这个定理就可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\\ &= f'(a+\theta h)+f'(a-\theta h)\end{aligned}$$

（2）同理，若 $f'(x)$ 在 $(x,x+h)$ 内存在，那么存在 $\xi \in (x,x+h)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，这里可以换元，令 $\xi = x+\theta h$，其中 $\theta \in (0,1)$，则存在 $\theta \in (0,1)$ 使得 $f'(x+\theta h) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，使用这个定理就可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\\ &= f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h)\end{aligned}$$

例题 3.5.10 3-5-B-11

由拉格朗日中值定理知, $\ln(1+x)-0=x\cdot\frac{1}{1+\theta x}(0<\theta<1)$, 证明 $\lim\limits_{x\to0}\theta=\frac{1}{2}$.

解 3.5.10. 解得 $\theta=\dfrac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}$，转化为求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}$，由

$$\frac{(x-\ln(x+1))'}{(x\ln(x+1))'}=\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)}=\frac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}$$

则由于导函数之比在 0 处的极限存在，分母不为 0，当 $x\to0$ 时，分子分母趋近于 0，所以洛必达法则有效，则

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}$$

发现分子分母趋近于 0，对 $\dfrac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}$ 分子分母上下分别求导得到 $\dfrac{1}{2+\ln(x+1)}$，由于导函数之比在 0 处的极限存在，分母不为 0，则洛必达法则有效，则

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\ln(x+1)}=\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\theta=\dfrac{1}{2}$

例题 3.5.11 3-5-B-12

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x},x\neq0,\\ 0,x=0.\end{cases}$,并设 $g(0)=g'(0)=0,g''(0)=17.$ 求 $f'(0)$.

解 3.5.11. 利用导数的定义：已知 $f(0)=0$

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h^2}$$

又因为 $g'(x),g''(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有定义，所以使用洛必达法则得到

$$\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{g'(h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{g'(h)-g'(0)}{h}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{17}{2}$$

可导一定连续，所以 $f'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{g''(h)}{2}=\dfrac{17}{2}$

例题 3.5.12 3-5-B-14

设 $f(x)$ 一阶可导，且 $f''(x_0)$ 存在，求证：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

解 3.5.12. 发现分子分母都趋近于 0，先分子分母上下分别求导得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0+h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0+h)}{h}$$

，发现此时极限仍然存在，分母仍不是 0，所以洛必达法则有效，于是有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0+h)}{h}$$

再利用 $f''(x_0)$ 的存在性，以及导数的定义，得到

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0+h)}{h}&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0)-(f'(x_0+h)-f'(x_0))}{h}\\&=2f''(x_0)-f''(x_0)=f''(x_0)\end{aligned}$$

即证.

3.6 泰勒公式

例题 3.6.1 3.6-A-2

按 x 的正整数幂, 写出下列函数的展开式至含有指定阶数的项 (带皮亚诺余项) :
(1) $\frac{1}{1-x}$ 到含 x^7 的项；(2) $\arctan x$ 到含 x^4 的项
(3) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 到含 x^4 的项；(4) $\tan x$ 到含 x^4 的项.

解 3.6.1. （1）先求 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 的在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$，由于 $(1-x)f(x)=1$ 两边求 n 阶导数，并利用莱布尼兹公式，得到

$$(1-x)f^{(n)}(x)+(-1)C_n^1f^{(n-1)}(x)=0 \Leftrightarrow f^{(n)}(0)=nf^{(n-1)}(0)$$

又 $f'(0)=1$，所以 $f^{(n)}(0)=n!$，于是展开到含 x^7 的项就是：

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+o(x^7)$$

（2）令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-(-x^2)}$，展开得到：

$$f'(x)=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+o(x^4)=1-x^2+x^4-x^6+o(x^6)$$

保留到到含 x^4 的项就是

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

（3）直接使用广义二项式展开：

$$\begin{aligned}f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}&=1+C_{-\frac{1}{2}}^1x+C_{-\frac{1}{2}}^2x^2+C_{-\frac{1}{2}}^3x^3+C_{-\frac{1}{2}}^4x^4+o(x^4)\\&=1-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3+\frac{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{24}x^4+o(x^4)\\&=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

（4）反复求导过程复杂，可以先建立微分方程：

$$y'=(\tan x)'=1+\tan^2 x=1+y^2$$

两边求导得到：

$$\begin{aligned}y''&=2yy'=2y(1+y^2)=2y+2y^3\\y'''&=2y'+6y^2y'=2(1+y^2)+6y^2(1+y^2)=2+8y^2+6y^4\\y^{(4)}&=16yy'+24y^3y'=16y(1+y^2)+24y^3(1+y^2)=16y+40y^3+24y^5\end{aligned}$$

代入 $y=0$，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)\quad(x\to0)$ 于是得到展开式：

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

例题 3.6.2 3.6-A-5

求函数$f(x)=xe^x$ 的n 阶麦克劳林公式, 带拉格朗日余项.

解 3.6.2. 设 $f(x)=xe^x$，其泰勒展开式展开到含 x^n 的项的式子，都可以由 x, e^x 展开式的乘积确定：

$$\begin{aligned} f(x)=xe^x &= x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) \\ &= x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

再加上 $\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}, \theta\in(0,1)$，即可得到

$$f(x)=xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}(\theta x+n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

例题 3.6.3 3.6-A-6

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$;(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{(\sin 2x)^6}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac12\right)\ln\left(1+\frac1x\right)$;(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac1x-\frac{1}{e^x-1}\right)$; (6) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$

解 3.6.3. （1） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x+\frac12x^2+o(x^2)-1-x}{x^2}=\dfrac12$

（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x+\frac12x^2+\frac16x^3+o(x^3)-1-x-\frac12x^2}{x^3}=\dfrac16$

（3） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{(\sin 2x)^6}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^3+\frac12x^6+o(x^6)-1-x^3}{64x^6}=\dfrac{1}{128}$

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac12\right)\ln\left(1+\dfrac1x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac1x+\dfrac12\right)\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x+2}{2}\ln(x+1)}{x}=1$

（5） $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac1x-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\dfrac{1-x+\frac12x^2+o(x^2)-1-x}{x^2}=\dfrac12$

（6） $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+x+\frac12x^2+o(x^2)-1-x}{1-\frac12x-\frac18x^2+o(x^2)-(1-\frac12x+\frac1{24}x^2)}=\dfrac{\frac12}{-\frac16}=-3$

3.7 函数性态的研究

例题 3.7.1 3.7-A-3

证明函数$y=x+\sin x$严格上升.

解 3.7.1. $y'=1-\cos x\geq0$，故 y 严格上升.

例题 3.7.2 3.7-A-7

设$f(x)=axe^{bx}$, 试确定常数a,b, 使得$f(\frac{1}{3})=1$, 且函数在$x=\frac{1}{3}$处有极大值.

解 3.7.2. $f'(x)=ae^{bx}(bx+1)$, $f'(\frac{1}{3})=ae^{b\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{3}b)=0$, $f(\frac{1}{3})=a\dfrac{1}{3}e^{b\frac{1}{3}}=1$，得到由必要条件引出的方程组 $a\left(b+\dfrac{1}{3}\right)=0, ae^{b\frac{1}{3}}=3$，由第二个方程得到 $a\neq 0$，所以 $b=-3, a=3e$

下面证明充分性，当 $b=-3, a=3e$ 时，$f(x)=3xe\cdot e^{-3x}=3xe^{1-3x}$, $f(\dfrac{1}{3})=1$, $f'(x)=e\dfrac{1-3x}{e^{3x}}=0$，导函数的正负性取决于一次函数 $y=1-3x$，当 $x<\dfrac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时，$f'(x)=0$，当 $x>\dfrac{1}{3}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\frac{1}{3}$ 处的极大值是 $f(\frac{1}{3})=1$.

例题 3.7.3 3.7-A-8

(1) $\sin x>\frac{2}{\pi}x \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$; (2) $\cos x>1-\frac{x^2}{2} \quad (x\neq 0)$;
(3) $x>\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2} \quad (x>0)$;(4) $\ln(1+x)\geqslant\frac{\arctan x}{1+x} \quad (x\geqslant 0)$.

解 3.7.3. （1）对于 $y=\sin x$，$y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，y 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为凹函数。根据凹函数的定义，设 $x_1=0$，$x_2=\frac{\pi}{2}$，$f(x)=\sin x$，有：

$$f(tx_1+(1-t)x_2)=f\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)\geq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)=1-t$$

令 $x=\frac{\pi}{2}(1-t)\in(0,\frac{\pi}{2})$，则有 $\sin x>\frac{2}{\pi}x \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$.
（2）考虑函数 $f(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$，则 $f(0)=0$。计算导数：

$$f'(x)=-\sin x+x,\quad f''(x)=-\cos x+1\geq 0$$

因此 $f'(x)$ 单调递增，又 $f'(0)=0$，故当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$。所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值 $f(0)=0$，且当 $x\neq 0$ 时 $f(x)>0$，即 $\cos x>1-\frac{x^2}{2} \quad (x\neq 0)$.
（3）先证左边不等式：令 $f(x)=x-\ln(1+x)$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0 \quad (x>0)$，故 $f'(x)>0$，又因为 $f(x)>f(0)=0$，故 $f(x)>0$，即 $x>\ln(1+x)$
再证右边不等式：令 $g(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$，则 $g(0)=0$，$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0 \quad (x>0)$，故 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，又因为 $g(x)>g(0)=0$，故 $g(x)>0$，即 $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$
（4）令 $h(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则 $h(0)=0$。计算导数：

$$h'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}$$

当 $x\geq 0$ 时，$\ln(1+x)\geq 0$，且 $1-\frac{1}{1+x^2}\geq 0$，故 $h'(x)\geq 0$，$h(x)$ 单调递增，因此 $h(x)\geq h(0)=0$，即 $(1+x)\ln(1+x)\geq\arctan x$，亦即 $\ln(1+x)\geq\frac{\arctan x}{1+x} \quad (x\geq 0)$.

例题 3.7.4 3.7-B-3

用函数的凹凸性证明下列不等式: (1) $\ln x \leqslant x-1\ (x>0)$;
(2) $2\arctan\frac{a+b}{2} \geqslant \arctan a+\arctan b\ (a,b\geqslant 0)$;
(3) $1+x^2 \leqslant 2^x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$;
(4) $\frac{x^n+y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n\ (x>0,y>0,x\neq y,n>1)$.

解 3.7.4. （1）考虑函数 $f(x)=\ln x$，其定义域为 $(0,+\infty)$。计算导数：

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凹函数。根据凹函数的性质，对于任意 $x>0$，有：

$$f(x)\leq f(1)+f'(1)(x-1)$$

代入 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，得：

$$\ln x\leq 0+1\cdot(x-1)=x-1$$

即 $\ln x\leqslant x-1\ (x>0)$.
（2）考虑函数 $f(x)=\arctan x$，其定义域为 $[0,+\infty)$。计算导数：

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\leq 0$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是凹函数。根据凹函数的性质，对于任意 $a,b\geq 0$，有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

即：

$$2\arctan\frac{a+b}{2}\geq\arctan a+\arctan b\quad(a,b\geq 0)$$

（3）考虑函数 $g(x)=2^x-1-x^2$，我们需要证明在 $[0,1]$ 上 $g(x)\geq 0$。计算导数：

$$g'(x)=2^x\ln 2-2x,\quad g''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$$

在 $[0,1]$ 上，由于 $2^x\leq 2$ 且 $(\ln 2)^2<1$，所以 $g''(x)<2-2=0$，即 $g(x)$ 是凹函数。由凹函数的性质，对于任意 $x\in[0,1]$，有：

$$g(x)\geq(1-x)g(0)+xg(1)$$

代入 $g(0)=0$，$g(1)=0$，得：

$$g(x)\geq 0$$

即 $2^x-1-x^2\geq 0$，所以 $1+x^2\leqslant 2^x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$。
（4）考虑函数 $f(x)=x^n\ (n>1)$，其定义域为 $(0,+\infty)$。计算导数：

$$f'(x)=nx^{n-1},\quad f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$$

因此 $f(x)$ 是凸函数。根据凸函数的性质，对于 $x>0, y>0, x\neq y$，有：

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

即：

$$\frac{x^n+y^n}{2}>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0, y>0, x\neq y, n>1)$$

例题 3.7.5 3.8-A-6

求从点$M(p,p)$到抛物线$y^2=2px$ 的最短距离.

解 3.7.5. 设函数 $f(y)=\left(\frac{y^2}{2p}-p\right)^2+(y-p)^2, f'(y)=2\left(\frac{y^2}{2p}-p\right)\frac{y}{p}+2(y-p)=0$，导函数可以化为

$$\frac{f'(y)}{p}=2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{p}\right)^2-1\right)\frac{y}{p}+2\frac{y}{p}-2=\left(\frac{y}{p}\right)^3-2$$

单调递增，那么 $f'(y)=0\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{2}p$，则 $f(y)$ 在 $(-\infty,\sqrt[3]{2}p)$ 单调递减，在 $(\sqrt[3]{2}p,+\infty)$ 上单调递增，最小值为 $p\sqrt{\left((2^{-\frac{1}{3}}-1)^2+(2^{\frac{1}{3}}-1)^2\right)}=p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}+2}{2}}$.

例题 3.7.6 3.8-A-7

从面积为常数 S 的一切矩形中, 求其周长为最小者

解 3.7.6. 设 $ab=S$，则 $a+b\geq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{S}$，当且仅当 $a=b$，即正方形时取等号，所以最小者为边为 $\sqrt{S}$ 的正方形

例题 3.7.7 3.8-A-8

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形，求此矩形的边长

解 3.7.7. 设第一象限的点 $P(x,y)$，使用基本不等式，矩形面积为 $S=4xy\leq 2ab\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=2ab$，解方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{b}{a}\end{cases}$ 当且仅当矩形的边长为 $\sqrt{2}a, \sqrt{2}b$ 时取等号

例题 3.7.8 3.8-B-5

求由 y 轴上的一个给定点 $(0,b)$ 到抛物线 $x^2=4y$ 上的点的最短距离.

解 3.7.8. 设距离的平方为 $f(x)=x^2+\left(\frac{x^2}{4}-b\right)^2$，则

$$f'(x)=2x+2\left(\frac{x^2}{4}-b\right)\frac{x}{2}=x\left(\frac{x^2}{4}-(b-2)\right)$$

当 $b \le 2$ 时，$f'(x)$ 在 $x \le 0$ 时小于等于 0，在 $x > 0$ 时大于 0，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，最小值为 $f(0) = b^2$；
当 $b > 2$ 时，$f'(x)$ 的根为 $x_1 = -2\sqrt{b-2}, x_2 = 0, x_3 = 2\sqrt{b-2}$，$f'(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 小于 0，在 $[x_1, 0]$ 上大于等于 0，在 $(0, x_2)$ 上小于 0，在 $[x_2, +\infty)$ 上大于等于 0
所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 单调递减，在 $[x_1, 0]$ 上单调递增，在 $(0, x_2)$ 上单调递减，在 $[x_2, +\infty)$ 上单调递增，又由于 $f(x)$ 为偶函数，所以最小值为 $f(-2\sqrt{b-2}) = f(2\sqrt{b-2}) = 4(b-1)$，则距离的最小值为 $\begin{cases} |b|, b \le 2 \\ 2\sqrt{b-1}, b > 2 \end{cases}$

例题 3.7.9 3.8-B-6

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分求一点 P, 使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小 (其中 $a > 0, b > 0$).

解 3.7.9. 取 $P(x, y)$，切线斜率为 $k = -\dfrac{b^2x^2}{a^2y^2}$，切线方程为 $Y - y = -\dfrac{b^2x}{a^2y}(X - x)$，横截距和纵截距为 $\dfrac{a^2}{x}, \dfrac{b^2}{y}$，三角形面积为 $\dfrac{a^2b^2}{2xy} = \dfrac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}}$，则设 $f(x) = x^2(a - x^2), f'(x) = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2) = 0$，又因为 $x > 0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0, \dfrac{a}{\sqrt{2}})$ 大于 0，在 $[\dfrac{a}{\sqrt{2}}, +\infty)$ 小于等于 0，所以最小值为 $f(\dfrac{a}{\sqrt{2}})$，所以所求的 P 坐标为 $(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}})$，三角形的面积是 $S = \dfrac{a^2b^2}{2xy} = ab$

第四章 自用

例题 4.0.1

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上三阶可导，且 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=a\neq 1$，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$.

解 4.0.1. 首先由 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$ 得知 $f'(x), f(x)$ 均单调递增，所以

$$f(x+h)>f(x)+f'(\xi)(x+h-x)>f(x)+f'(x)h$$

令 $h\to+\infty$，得 $f(x)\to+\infty$，现在对已知极限变形：

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right)=1-a\neq 0$，同样可以对所求极限变形：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)$$

问题在于如何沟通 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right)=1-a$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)$，观察到它们是微分形式，所以不妨反方向利用洛必达法则。须知，洛必达法则在 $\dfrac{*}{\infty}$ 的情形中是适用的，即若 $f\to\infty, f, g$ 在 a 的某个去心邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'}{f'}$ 存在（或为无穷大，但分母不等于 0），那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g}{f}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'}{f'}$；相关证明可以参阅数分教材（如陈纪修的，卓里奇的，等等）.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f'(x)}{f''(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{xf''(x)}$$

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=A, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)=1-A, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}=1-a$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

由于 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}=1-a\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\dfrac{xf''(x)}{f'(x)}=\dfrac{1}{1-a}$ 即 $\dfrac{1-A}{1-a}=A$，解得

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{1}{2-a}$$

例题 4.0.2 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} n^x\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

解 4.0.2. 根据做差的形式不难想到拉格朗日中值定理，但是如果直接凑分母 $1=n+1-n$，那就会导致 $\xi\in(n,n+1)$ 的东西出现，而没有很好的利用上

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to 0, n\to+\infty$$

所以先化为 e 指数，用取对数之后的差分形式作为分母 $\mathrm{e}^f-\mathrm{e}^g=\mathrm{e}^\xi(f-g),\xi\in(f,g)$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^x\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\lim_{n\to+\infty} n^x\left[\mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})}-\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty} n^x\left[\frac{\mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})}-\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}}{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})-n\ln(1+\frac{1}{n})}\right]\left[(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})-n\ln(1+\frac{1}{n})\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty} n^x\mathrm{e}^\xi\left[(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})-n\ln(1+\frac{1}{n})\right]
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{e}^\xi\in\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)$，当 $n\to+\infty$ 时，$\xi\to 1$，所以:

$$\begin{aligned}
&=\lim_{n\to+\infty} n^x\cdot\mathrm{e}\left[(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})-n\ln(1+\frac{1}{n})\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty} n^x\cdot\mathrm{e}\left[\left(1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{3(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty} n^x\cdot\mathrm{e}\left[-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3(n+1)^2}-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty} n^x\cdot\mathrm{e}\left[\frac{1}{2n(n+1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty} n^x\cdot\mathrm{e}\left[\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{2n+1}{3n^2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty} n^x\cdot\mathrm{e}\left[\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&=\frac{\mathrm{e}}{2}\lim_{n\to+\infty} n^{x-2}
\end{aligned}$$

因此，极限为:

$$\lim_{n\to+\infty} n^x\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\begin{cases}0 & \text{如果}x<2\\ \dfrac{\mathrm{e}}{2} & \text{如果}x=2\\ +\infty\text{或不存在} & \text{如果}x>2\end{cases}$$