

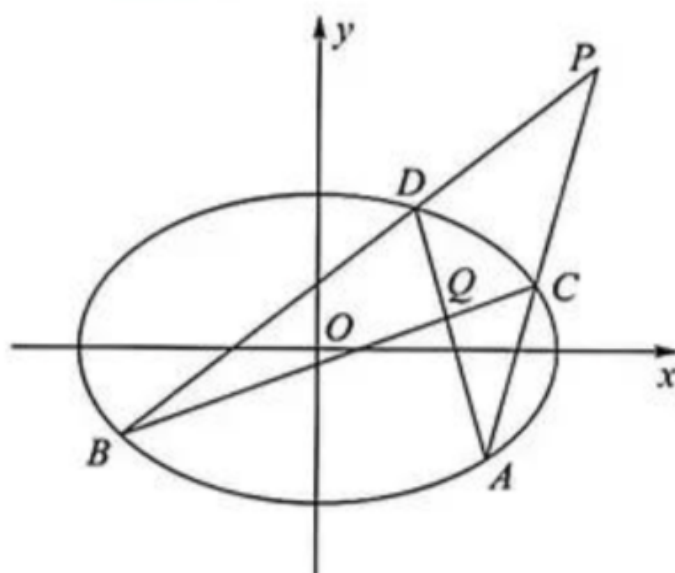
高中数学

解析几何教程

作者：还在尬黑

版本：第 1 版

日期：2026 年 2 月 25 日



© 2025 版权所有

前言

本书内容全部使用 \LaTeX 进行排版，作者“还在尬黑”是一位准大一学生，高中毕业于广东深圳中学，高三数学各次大考平均排名位于前 5%，高考应该也不例外。“还在尬黑”拥有知乎（同名），微信公众号（同名），小红书号（同名）等账号，头像是一个右手三叶结。以及不同名不同头像的 GitHub 账号，发表原创优质内容百余篇，且固定更新频率，堪称发文的“螺丝钉”。

“还在尬黑”对圆锥曲线的解题研究有着浓厚兴趣，并在书中将其总结成了一套完整的解析几何教程。本书适合高中解析几何解题体系未成熟的高二高三学生，以及前来自学的高一学生以及初中生，也可作为高中数学教材。笔者衷心希望本书能够帮助读者提高圆锥曲线解题速度和解题能力，并能够准确地识别班内的“大佬”是用什么东西来装逼的，当然，本书和市面上的某些书不同，不会直接甩给学生们根本用不明白也不懂从何而来的技巧大招，而是会侧重解析一种方法的产生过程，以及如何恰当的选择方法解决具体问题。

学习圆锥曲线（包括高考数学的一些其它内容）的过程中，最重要也最需要大家认真做的就是历年的高考题，本书内容涵盖了大部分恢复高考以来所有的高考解析几何压轴题，并且每一道题都经过了笔者的精挑细选，放到了合适的位置上，后续笔者会在书末尾出一个索引表，帮助只想刷高考题的同学快速使用本书。

除了经典而偏基础的高考题外，本书后面还有些部分为选学内容，难度较高，属于高考不怎么考的范畴，这部分留给同学们或解析几何爱好者们进行自我提高和兴趣拓展。当然，建议读者先打牢必学内容的基础，再进行进一步的学习。

在创作本书的过程中，笔者也得到了朋友们和热心群众的帮助，在此向他们表示感谢！

十分感谢读者朋友们的支持和赞助！祝大家健康进步，高考成功！

还在尬黑

2026 年 2 月 25 日

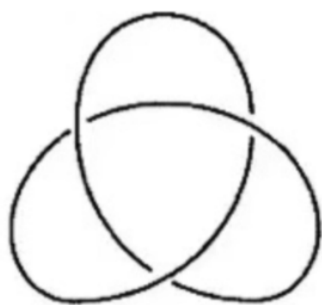


图 1: 我的头像

目录

第一章 先导课程	1
1.1 写在前面	1
1.2 轮换, 对称	1
第二章 手稿	4
2.1 杂题收录	4
第三章 曲线系	19
3.1 曲线系引入	19
第四章 杂题	25
4.1 数学问题	25
第五章 抹茶题集	28
第六章 反演变换在解析几何中的应用	33
6.1 反演变换的基本原理	33
6.1.1 四次曲线的垂足曲线生成方式	34
6.2 基础圆锥曲线定理的反演命题	34
6.3 进阶命题: 蒙日圆与垂直弦性质的反演	35
6.4 离心率、极点与极线的反演表示	36
6.5 射影几何定理的反演表示	37

6.6 隐蔽的反演命题：弗雷歇定理与中点轨迹	37
6.7 复平面上的反演变换	38
第七章 杂题	44

第一章 先导课程

1.1 写在前面

解析几何是高中数学的重要学习内容，在高考中分值占比较高。

不少教辅会以“圆锥曲线”作为替代性的表述，这可能是因为圆锥曲线是解析几何中的重难点。但笔者认为“解析几何”更为贴切：第一，从应试角度考虑，圆锥曲线是解析几何的子集，现在考试有的题也会出直线和圆，新定义曲线（如3次曲线等）进行考察；第二，笔者打算从不单单只谈3种圆锥曲线，而是想在其基础之上，更多地普及一些考试常用的几何知识和背景；第三，笔者愿意先从最基本的直线开始说起，帮助读者搭建完整的解析几何体系。

首先，笔者来讲一讲怎么进行计算。这似乎是一个很简单的问题，但是谁又能保证在紧张刺激的考场环境下不会犯错误？一旦出现计算错误，检查就需要花费一定的时间，所以不如挑选合适的计算方法，从源头上减少失误。本节中，笔者会结合自己的一些实战经验，尽量告诉大家一些计算过程中减小失误，提升速度的技巧和方法，以及解析几何中计算的基本方向——整体代换。

鉴于本书的覆盖群体，笔者会尽量避免过多的公式推导和过于严谨的学术表述，而是从直观的角度出发，用一些具体的例子来说明计算的过程。希望大家能从中受益。

1.2 轮换，对称

在此之前，请允许我先介绍一些基本的概念，我们不妨先来看一些看起来很整齐的式子，这些式子平时很常见，大家在备考强基计划的过程中也会遇到比较多这样的式子：

例题 1.2.1

观察以下代数式，并尝试在心里面归纳出它们的特点：

$$abc$$

$$a + b + c$$

$$ab + bc + ca$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

解 1.2.1. 相信大部分同学是通过自己的直觉来归纳的，直观的感受就是这些式子很“整齐”，而且很有规律可循。那么问题来了：“整齐”是怎么体现的？更进一步地，有没有手段验证一个代数式

是“整齐”的？至于“很有规律可循”，那么规律是什么？

这些问题循序渐进，如果理清这些问题，那么读者便掌握了学习数学时地最基本的关注点：定义，性质，判定。这些式子中的 a, b, c 结构权重是均等的，它们地位相同，没有“特权变量”，也没有“次序”之分。

而且，眼尖的读者可以发现，这些表达式中的项往往成组出现，覆盖所有可能的组合，比如 $a + b + c$ 中全为一次项，如果 a 出现了，不用猜也知道 b 和 c 也出现了；再比如 $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ 中， a^2b 出现了，其中 a 被平方了，那不用猜也知道在其他的项中， b 和 c 也会被平方，而且后面一定会跟着其他没有被平方的字母。它们出现的次数相同。

事实上，由于乘法和加法的交换律和结合律，我们可以发现，对于上面任意一个式子，我们都可以挑选任意两个变量交换位置，而多项式本身保持不变。大家不妨想象一下阅兵式的场景，即使我们偷偷调换两个兵的位置，你也看不出来有什么异样，这是阅兵队伍“整齐”的体现。同样地，这个代数式也可以这样操作，来验证这个代数式是“整齐”的，“规律可循”的。这样我们便可以引出对称式的概念。

定义 1.2.1 对称式

对于一个 n 元多项式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，若对于数 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个排列 (i_1, i_2, \dots, i_n) ，都有

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

则称 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为对称式。

“对称”体现在字母地位平等，没有哪个字母是特殊的。只要式子中包含某个由特定字母组成的项（例如 a^2b ），那么它一定包含由所有其他字母以同样的方式组成的项（即 $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$ ）。

这样我们就认识了对称式的概念，这样当读者听到别人说“对称式”的时候，不会至于一脸懵逼，或者一边点头，假装听懂，然后用直觉去理解这个概念（这样的情况长期发展下去，是不利于学习数学的）。当然，读者也许会发现，像“ $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ ”这样的式子其实比较长，占用了较大的空间，也显得不够简洁。因此我们不妨规定以下记号：

定义 1.2.2 循环和

性质 1.2.1 对称式的性质

(1) 基本对称多项式的基础性：

那么下面我们乘胜追击，再来看一组式子：

例题 1.2.2

观察以下代数式, 并尝试在心里面归纳出它们的特点:

$$a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^3b + b^3c + c^3a$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

解 1.2.2. 和刚才的对称式不同, 如果我们这里调换某两个字母的位置, 那么结果也会发生变化。比如 $a^2b + b^2c + c^2a$ 中, 如果我们把 a 和 b 调换位置, 那么结果也会发生变化, 比如说新出现了 b^2a 项, 这是原来所没有的。

但是读者会发现, 这个式子看上去也是有规律可循的, 比如 $a^3b + b^3c + c^3a$ 中, a^3 项出现了, 那不用猜也知道 b^3 和 c^3 也会在其它部分出现, 而且出现的次数相同, 但是和上文的规律不一样, a^3 后面只会跟着 b , 却没有 c , 即没有 a^2c 项。

例题 1.2.3

将 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 进行展开, 并尽己所能地保证结果的每个部分都是由 a, b, c 三个元同时出现且地位相同的式子:

解 1.2.3. 先展开, 再重组:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (b^2 + ac + ab + bc)(a+c) \\ &= ab^2 + b^2c + a^2c + ac^2 + a^2b + abc + abc + bc^2 \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc\end{aligned}$$

最后为什么

定理 1.2.1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

第二章 手稿

2.1 杂题收录

例题 2.1.1

已知 $x, y > 0$ ，且 $x^2 + 9y^2 = 12$ ，则 $\frac{x+2}{y+1} - 3x$ 的最小值为_____.

解 2.1.1.

例题 2.1.2 (高考题改编)

(单选) 设代数式 $T = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{200}{199}$, 则 ()

A. $14 < T < 16$ B. $16 < T < 18$ C. $18 < T < 20$ D. $20 < T < 22$

解 2.1.2. 出题背景是大名鼎鼎的 Wallis 公式:

$$\begin{aligned}
 I(n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d(-\cos x) \\
 &= (-\cos x \sin^{n-1} x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \, d \sin^{n-1} x \\
 &= (-\cos x \sin^{n-1} x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 x)(n-1) \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \, dx = (n-1)I(n-2) - (n-1)I(n) \\
 \Rightarrow I(n) &= \frac{n-1}{n} I(n-2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{I(2n+1)}{I(2n-1)} = \frac{2n}{2n+1} \\ \frac{I(2n)}{I(2n-2)} = \frac{2n-1}{2n} \end{cases}
 \end{aligned}$$

所以累乘有:

$$\begin{aligned}
 \frac{I(3)}{I(1)} \cdot \frac{I(5)}{I(3)} \cdots \frac{I(2n+1)}{I(2n-1)} &= \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1} \times \frac{2 \times 2}{2 \times 2 + 1} \times \cdots \times \frac{2n}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\
 \frac{I(2)}{I(0)} \cdot \frac{I(4)}{I(2)} \cdots \frac{I(2n)}{I(2n-2)} &= \frac{2 \times 1 - 1}{2 \times 1} \times \frac{2 \times 2 - 1}{2 \times 2} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}
 \end{aligned}$$

又因为:

$$\begin{aligned}
 I(2k+1) < I(2k) < I(2k-1) &\Rightarrow \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} < \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2k+1} \cdot \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right]^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2k} \cdot \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right]^2 \\
 \Rightarrow \frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \right) = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \right) \cdots \left(\frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \right)
 \end{aligned}$$

所以:

$$T^2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \approx \frac{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}}{\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \right) \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}} \frac{\pi}{2}$$

则 $T^2 \approx \frac{(2n+1)\pi}{2}$, 简单计算得知原题选 B.

方法二是使用放缩，先平方然后用糖水不等式，这个方法很套路，稍微一放就排除了 A 选项：

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{200}{199} \\ &> \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{201}{200} \\ &= 268 > 16^2 \end{aligned}$$

但是另一边就有点难度了，首先我们可以根据应试技巧，由“下界比较松”推测出来“上界比较紧”，所以在找上界的时候要放得仔细一点，当然严格说来这个推测逻辑缺乏依据。或者我们根据“仍有 BCD 选项需要分辨”的现状，可以考虑多保留几项再放缩，提高一下精度：

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{22}{21} \cdot \frac{22}{21} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{24}{23} \cdots \frac{200}{199} \cdot \frac{200}{199} \\ &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{22}{21} \cdot \boxed{\frac{22}{21}} \cdot \frac{24}{23} \cdot \boxed{\frac{23}{22}} \cdots \frac{200}{199} \cdot \boxed{\frac{199}{198}} \\ \Rightarrow T &\leq \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{20}{19} \cdot \sqrt{\frac{200}{20}} = \frac{512 \times 512}{(15-4)(15-2)(15+2)(15+4)} \sqrt{10} \\ &= \frac{262144}{46189} \sqrt{10} < 3.1623 \times 5.68 < 18 \end{aligned}$$

熟知 $\sqrt{10} = 3.16227766... < 3.1623$ ，计算得到 $\frac{262144}{46189} < 5.68$ 这样得知本题选 B。

对于考试来说，把题目的答案改成 $17 < T < 19$ 或许是更好的选择。

例题 2.1.3 （高考题改编）

（单选）数列 a_n 各项为正整数且递增， $a_{n+2} = C_{a_{n+1}}^{a_n}$ ，则（ ）

A. $a_n < a_{n-1} + 1$ B. a_1, a_2, a_3 可能成等比数列

C. $a_3 a_4 < a_5$ D. a_3, a_4, a_5 可能成等比数列

解 2.1.3. 由于 a_n 递增，则 A 显然错误；下面考虑选项 BD：

$$a_n a_{n+2} = a_n C_{a_{n+1}}^{a_n} = a_{n+1} C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} = a_{n+1}^2 \Rightarrow a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1}$$

当 $a_n = 1$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^0 = 1 = a_n$ ，与数列递增矛盾；

当 $a_n = 2$ 时，代入表达式得到 $a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^1 = a_{n+1} - 1 < a_{n+1}$ ，矛盾；

当 $a_n > 2$ 时，易得 $a_{n+1} - 1 > 2$ ，代入表达式得到

$$a_{n+1} = C_{a_{n+1}-1}^{a_n-1} \geq C_{a_{n+1}-1}^2 = \frac{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}{2}$$

解方程发现无整数解，而且由于 $C_{a_{n+1}-1}^1 = a_{n+1} - 1$ 是小于 a_{n+1} 的最大整数，且有

$$C_{a_{n+1}-1}^1 < C_{a_{n+1}-1}^2, \quad C_{a_{n+1}-1}^2 \neq a_{n+1}$$

只可能是 $C_{a_{n+1}-1}^2 > a_{n+1}$.

雪上加霜的是, $C_{a_{n+1}-1}^2$ 和 $C_{a_{n+1}-1}^1$ 中间没有数可以等于 $C_{a_{n+1}-1}^m$, 所以 BD 错误;

考虑 C, 易得 $a_1 \neq 1, a_2 \geq 4, a_3 \geq 6, a_4 = C_{a_3}^{a_2} > 2a_3 + 1$, 由

$$a_5 = C_{a_4}^{a_3} > a_3 a_4 \Rightarrow a_3^2 < C_{a_4-1}^{a_3-1} < C_{2a_3}^{a_3-1}$$

转化为 $a_3^3 + a_3 < C_{2a_3}^{a_3}$ 这是显然成立的, 故本题目选 C

例题 2.1.4

已知 $\triangle ABC$ 中, $A = 3B = 9C$, 则 $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 2.1.4. 解得 $A = \frac{9\pi}{13}, B = \frac{3\pi}{13}, C = \frac{\pi}{13}$ 考虑积化和差:

$$\begin{aligned} & \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \\ &= \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B) + \cos(B+C) + \cos(B-C) + \cos(A+C) + \cos(A-C)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos \frac{12\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13}) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{13}} \sin \frac{\pi}{13} (\cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{12\pi}{13}) \\ &= \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{13}} (\sin \frac{\pi}{13} - \sin \frac{3\pi}{13} + \sin \frac{3\pi}{13} - \sin \frac{5\pi}{13} + \sin \frac{5\pi}{13} - \sin \frac{7\pi}{13} \\ &\quad + \sin \frac{7\pi}{13} - \sin \frac{9\pi}{13} + \sin \frac{9\pi}{13} - \sin \frac{11\pi}{13} + \sin \frac{11\pi}{13} - \sin \frac{13\pi}{13}) \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

定理 2.1.1 阿贝尔求和

设 B_n 是数列 b_n 的前 n 项和, 当 $n \geq 2$ 时, 有:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i$$

证明 2.1.1. 当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n a_i b_i &= a_1 b_1 + \sum_{i=2}^n a_i (B_i - B_{i-1}) \\
 &= a_1 b_1 + \sum_{i=2}^n a_i B_i - \sum_{i=2}^n a_i B_{i-1} \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i B_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} B_i \\
 &= a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i
 \end{aligned}$$

例题 2.1.5 (来自 Fiddie)

设数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数, 且当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} + a_{n-1} = |a_n|$. 证明:

- (1) 存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m \leq 0$
- (2) 存在正整数 m 使得 $a_m \leq 0, a_{m+1} \leq 0$
- (3) $a_n = a_{n+9}$

解 2.1.5. (1) 当 $n \geq 2$ 时, 由

$$\begin{cases} a_{n+1} + a_{n-1} = |a_n| \\ a_{n+2} + a_n = |a_{n+1}| \end{cases} \Rightarrow a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = |a_n| + |a_{n+1}|$$

$$\Rightarrow a_{n+2} + a_{n-1} = |a_n| - a_n + |a_{n+1}| - a_{n+1} \geq 0$$

若 $n \geq 2$ 时 $a_n > 0$, 上式化为 $a_{n+2} + a_{n-1} = 0$, 矛盾, 故存在大于 1 的正整数 m 使得 $a_m \leq 0$

(2) 已证存在大于 1 的整数 m 使得 $a_m \leq 0$, 现假设不存在正整数 k 使得 $a_k \leq 0, a_{k+1} \leq 0$, 则不妨设 a_m 为首个小于等于 0 的项, 由假设得 $a_1, a_2, \dots, a_{m-1} > 0, a_m \leq 0, a_{m+1} > 0$, 可以通过不断消元推出矛盾:

$$\begin{aligned}
 a_{m+1} + a_{m-1} &= |a_m| = -a_m \Rightarrow a_{m+1} = -a_m - a_{m-1} \\
 a_{m+2} + a_m &= |a_{m+1}| = a_{m+1} \Rightarrow a_{m+2} = a_{m+1} - a_m > 0 + 0 = 0 \\
 a_{m+3} + a_{m+1} &= |a_{m+2}| = a_{m+2} \Rightarrow a_{m+3} = a_{m+2} - a_{m+1} = a_{m+1} - a_m - a_{m+1} = -a_m \geq 0 \\
 a_{m+4} + a_{m+2} &= |a_{m+3}| = -a_m \Rightarrow a_{m+4} = -a_m - a_{m+2} = -a_{m+1} < 0 \\
 a_{m+5} + a_{m+3} &= |a_{m+4}| = a_{m+1} \Rightarrow a_{m+5} = a_{m+1} - a_{m+3} = a_m + a_{m+1} = -a_{m-1} < 0
 \end{aligned}$$

由 $a_{m+4} < 0, a_{m+5} < 0$ 知矛盾, 故存在正整数 k 使得 $a_k \leq 0, a_{k+1} \leq 0$.

(3) 抓住上面第二小问的提示就可以得到:

$$a_{m+6} + a_{m+4} = |a_{m+5}| = a_{m-1} \Rightarrow a_{m+6} = a_{m-1} - a_{m+4} = a_{m-1} + a_{m+1} = -a_m$$

$$a_{m+7} + a_{m+5} = |a_{m+6}| = -a_m \Rightarrow a_{m+7} = -a_m - a_{m+5} = a_{m-1} - a_m$$

$$a_{m+8} + a_{m+6} = |a_{m+7}| = a_{m-1} - a_m \Rightarrow a_{m+8} = a_{m-1} - a_m - a_{m+6} = a_{m-1}$$

$$a_{m+9} + a_{m+7} = |a_{m+8}| = a_{m-1} \Rightarrow a_{m+9} = a_{m-1} - a_{m+7} = a_{m-1} - a_{m-1} + a_m = a_m$$

所以设 $T = 9$, 有

$$\begin{cases} a_m = a_{m+nT}, n \in N \\ a_{m-1} = a_{m-1+nT}, n \in N \end{cases}$$

然后由于

$$a_{m-2+nT} = |a_{m-1+nT}| - a_{m+nT} = |a_{m-1}| - a_m = a_{m-2}$$

以此类推, 则有

$$a_k = a_{k+nT}, k \in N_+, k \leq m$$

取合适的 m 使得 m 大于 T , 则数列 $\{a_n\}$ 为周期数列, 其中一个周期为 9

例题 2.1.6 (南通 9 调 14 题)

已知 x, y 满足 $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+4}-y) = 2$, 则 $4^x + 2^{y-1}$ 的最小值为_____.

解 2.1.6. 套路题, 先换元:

$$\begin{cases} m = \sqrt{x^2+1} - x \Rightarrow x = \frac{1}{2m} - \frac{2}{m} \\ n = \sqrt{y^2+4} - y \Rightarrow y = \frac{2}{n} - \frac{n}{2} \end{cases}$$

再代入 $mn = 2 \Rightarrow n = \frac{2}{m}$:

$$y = \frac{2}{n} - \frac{n}{2} = m - \frac{1}{m} \Rightarrow y = -2x$$

所以:

$$4^x + 2^{y-1} = 4^x + \frac{1}{2 \times 4^x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

当 $x = \frac{1}{4}$ 时取得等号

例题 2.1.7 (深圳中学 2025 届二轮一阶)

$\triangle ABC$ 中, 若

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AE} = \frac{\mu}{\mu+1} \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

则连接 BD, CE 得到交点 Q , 任取 $\triangle ABC$ 所在平面内某一点 P , 那么有:

$$PQ^2 = \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} - \frac{\lambda \mu BC^2 + \lambda AC^2 + \mu AB^2}{(1 + \lambda + \mu)^2}$$

解 2.1.7. 设

$$\begin{cases} \overrightarrow{AQ} = x \overrightarrow{AD} + (1-x) \overrightarrow{AB} = x \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{AC} + (1-x) \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} = y \overrightarrow{AE} + (1-y) \overrightarrow{AC} = y \frac{\mu}{1+\mu} \overrightarrow{AB} + (1-y) \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda+1}{1+\lambda+\mu} \\ y = \frac{\mu+1}{1+\lambda+\mu} \end{cases}$$

化为形如 $x \overrightarrow{QA} + y \overrightarrow{QB} + z \overrightarrow{QC} = 0$ 的方程:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{AC} + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QC}) + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}) \\ &= \frac{\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{AQ} + \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{QC} + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{QB} \\ \Rightarrow \overrightarrow{QA} + \lambda \overrightarrow{QC} + \mu \overrightarrow{QB} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PQ} + \lambda (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PQ}) + \mu (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ}) &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \lambda \overrightarrow{PC} + \mu \overrightarrow{PB} &= (1+\lambda+\mu) \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

平方得:

$$PA^2 + \lambda^2 PC^2 + \mu^2 PB^2 + 2\lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} + 2\mu \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 2\lambda\mu \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = (1+\lambda+\mu)^2 PQ^2$$

分别代入

$$\begin{cases} 2\lambda \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \lambda \left(PA^2 + PC^2 - (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC})^2 \right) = \lambda (PA^2 + PC^2 - AC^2) \\ 2\mu \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \mu \left(PA^2 + PB^2 - (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB})^2 \right) = \mu (PA^2 + PB^2 - AB^2) \\ 2\lambda\mu \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PB} = \lambda\mu \left(PC^2 + PB^2 - (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB})^2 \right) = \lambda\mu (PC^2 + PB^2 - BC^2) \end{cases}$$

变形即可得到:

$$PQ^2 = \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} - \frac{\lambda \mu BC^2 + \lambda AC^2 + \mu AB^2}{(1 + \lambda + \mu)^2}$$

因此有结论：

结论 2.1.1 结论

平面内给定 $\triangle ABC$ ，若点 Q 满足

$$\overrightarrow{QA} + \lambda \overrightarrow{QC} + \mu \overrightarrow{QB} = \vec{0}$$

则任取 $\triangle ABC$ 所在平面内某一点 P ，有

$$PQ^2 = \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} - \frac{\lambda \mu BC^2 + \lambda AC^2 + \mu AB^2}{(1 + \lambda + \mu)^2}$$

例题 2.1.8 奔驰定理

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$ ，以及平面内任意一点 P ，则有：

$$\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{PA} + \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{PB} + \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

这等价于

$$S_{\triangle PBC} \overrightarrow{PA} + S_{\triangle PAC} \overrightarrow{PB} + S_{\triangle PAB} \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

这里的三角形面积是有向面积，我们必须在计算三角形面积时按照字母顺序看一下方向（顺时针或逆时针），然后将与其他两个方向不同的三角形的对应面积取负值。

解 2.1.8.

例题 2.1.9 外心向量关系

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$ ，则其外心满足关系式：

解 2.1.9.

例题 2.1.10 三角形外心坐标

已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$ ，则其外心的坐标为

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} OA^2 & y_A & 1 \\ OB^2 & y_B & 1 \\ OC^2 & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_A & OA^2 & 1 \\ x_B & OB^2 & 1 \\ x_C & OC^2 & 1 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}} \right)$$

解 2.1.10.

例题 2.1.11 三角形垂心坐标已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$, 则其垂心的坐标为

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} x_B x_C + y_B y_C & y_A & 1 \\ x_A x_C + y_A y_C & y_B & 1 \\ x_A x_B + y_A y_B & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_B x_C + y_B y_C & 1 \\ x_B & x_A x_C + y_A y_C & 1 \\ x_C & x_A x_B + y_A y_B & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}} \right)$$

解 2.1.11.

例题 2.1.12 三角形的内心坐标已知平面直角坐标系 xOy 中有一个 $\triangle ABC$, 则其内心的坐标为

$$\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c} \right)$$

解 2.1.12.

例题 2.1.13 容斥原理练习

某学校举办比赛, 有 20 个参赛名额, 现在分给 4 个不同的班, 保证至少有一个班的名额为 4 个, 且每一个班都有名额, 则共有_____种分法。

解 2.1.13. 设四个班的名额为 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in N_+$, 则分法数就是集合 $A_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_i = 4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20\}$ 的元素个数, 又因为

$$\begin{aligned} |A_1| &= \{(x_1, x_3, x_4) | x_2 + x_3 + x_4 = 16, x_2, x_3, x_4 > 0\} = C_{15}^2 \\ |A_1 \cap A_2| &= \{(x_3, x_4) | x_3 + x_4 = 12, x_3, x_4 > 0\} = C_{11}^1 \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 1 \\ |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= C_4^1 |A_1| - C_4^2 |A_1 \cap A_2| + C_4^3 |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= C_4^1 C_{15}^2 - C_4^2 + C_4^3 C_{11}^1 = 358 \end{aligned}$$

例题 2.1.14 求和

计算 $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k$, 其中 $k < n-1, k \in N_+$

解 2.1.14. 定义函数并对其求 k 阶导数:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i x^{i+1} = x \sum_{i=0}^{n-1} (-x)^i C_{n-1}^i \\ &= x(1-x)^{n-1} = (x-1+1)(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-1} - (1-x)^n \\ \Rightarrow f(1) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i = 0 \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i A_{i+1}^k x^{i+1-k} \Rightarrow f^{(k)}(1) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i A_{i+1}^k \end{aligned}$$

现已很接近原式, 问题在于沟通 A_{i+1}^k 和 $(i+1)^k$, 我们假想这样一个情境: 有 k 个不同的球等待放进 $i+1$ 个不同的盒子里面, 放置过程中允许空盒的存在, 所以放法是 $(i+1)^k$, 然后我们换一种方式, 考虑分为恰好有 $0, 1, 2, 3, 4, \dots, k$ 个非空盒子的情况, 那么求和就是

$$\sum_{r=0}^k S(k, r) r! C_{i+1}^r = \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r$$

其中 $S(k, r)$ 表示 k 个有标号的球放到 r 个同样的盒子里面的方法数, C_{i+1}^r 表示从 $i+1$ 个不同的盒子无序地挑出 r 个盒子来放球, 再对其进行全排列使得挑出来的 r 个盒子有编号, 则:

$$(i+1)^k = \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r$$

那么代入到 $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k$ 中就有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k &= \sum_{i=0}^{n-1} \left((-1)^i C_{n-1}^i \left(\sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{r=0}^k S(k, r) A_{i+1}^r (-1)^i C_{n-1}^i \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{i=0}^{n-1} S(k, r) A_{i+1}^r (-1)^i C_{n-1}^i = \sum_{r=0}^k S(k, r) f^{(r)}(1) \end{aligned}$$

对 $(1-x)^{n-1} - (1-x)^n$ 求导易得 $f(x)$ 只有第 $n-1$ 和 n 阶导数在 $x=1$ 处的值不是 0, 即:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i (i+1)^k = 0$$

例题 2.1.15 证明

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A + \cos B} - \frac{\sin A + \cos B}{\sin B - \cos A} = 2 \tan(A + B) \\
 (2) \quad & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A - \cos B} - \frac{\sin A - \cos B}{\sin B - \cos A} = \frac{\cos B + \sin A}{\cos A + \sin B} - \frac{\cos A + \sin B}{\cos B + \sin A} = 2 \tan(A - B) \\
 (3) \quad & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} = 2 \cot(A + B) \\
 (4) \quad & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} - \frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = \frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = 2 \cot(A - B)
 \end{aligned}$$

解 2.1.15. 第一种方法就是通分, 拿一个式子举例

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A - \cos B} - \frac{\sin A - \cos B}{\sin B - \cos A} \\
 &= \frac{(\sin B - \cos A)^2 - (\sin A - \cos B)^2}{(\sin B - \cos A)(\sin A - \cos B)} \\
 &= \frac{\sin^2 B - 2 \sin B \cos A + \cos^2 A - \sin^2 A + 2 \sin A \cos B - \cos^2 B}{\sin B \sin A - \sin A \cos A - \sin B \cos B + \cos B \cos A} \\
 &= \frac{\cos 2A - \cos 2B + 2(\sin A \cos B - \sin B \cos A)}{\cos(A - B) - \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B)} \\
 &= \frac{-2 \sin(A + B) \sin(A - B) + 2 \sin(A - B)}{\cos(A - B) - \sin(A + B) \cos(A - B)} = \frac{2[1 - \sin(A + B)] \sin(A - B)}{[1 - \sin(A + B)] \cos(A - B)} \\
 &= \frac{2 \sin(A - B)}{\cos(A - B)} = 2 \tan(A - B).
 \end{aligned}$$

再写一个:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} \\
 &= \frac{(\cos A - \cos B)^2 - (\sin A - \sin B)^2}{(\cos A - \cos B)(\sin A - \sin B)} \\
 &= \frac{\cos^2 A - 2 \cos A \cos B + \cos^2 B - \sin^2 A + 2 \sin A \sin B - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin A \cos B - \sin B \cos A + \sin B \cos B} \\
 &= \frac{(\cos^2 A - \sin^2 A) + (\cos^2 B - \sin^2 B) - 2 \cos A \cos B + 2 \sin A \sin B}{\sin A \cos A + \sin B \cos B - (\sin A \cos B + \sin B \cos A)} \\
 &= \frac{\cos 2A + \cos 2B - 2 \cos(A + B)}{\frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B) - \sin(A + B)} = \frac{2 \cos(A + B) \cos(A - B) - 2 \cos(A + B)}{\sin(A + B) \cos(A - B) - \sin(A + B)} \\
 &= \frac{2 \cos(A + B)[\cos(A - B) - 1]}{\sin(A + B)[\cos(A - B) - 1]} = \frac{2 \cos(A + B)}{\sin(A + B)} = 2 \cot(A + B).
 \end{aligned}$$

第二种方法就是按部就班地和差化积，拿一个式子举例

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin B - \cos A}{\sin A - \cos B} - \frac{\sin A - \cos B}{\sin B - \cos A} \\
 &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \cos A}{\sin A - \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} - \frac{\sin A - \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \cos A} \\
 &= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)} \\
 &= -2\frac{\cos\left[2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\right]}{\sin\left[2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\right]} = -2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + A - B\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + A - B\right)} \\
 &= -2\frac{-\sin(A - B)}{\cos(A - B)} = 2\tan(A - B).
 \end{aligned}$$

再写一个：

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} - \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} \\
 &= -\frac{\cos\left[2 \cdot \frac{A+B}{2}\right]}{\frac{1}{2}\sin\left[2 \cdot \frac{A+B}{2}\right]} = -\frac{\cos(A+B)}{\frac{1}{2}\sin(A+B)} \\
 &= -2\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = 2\cot(A+B).
 \end{aligned}$$

例题 2.1.16 (抹茶奶绿供题)

平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{a^2} = 1, (a > 4)$, 椭圆的弦 AB 过点 $D(-2, 0)$, 连接 OA, OB , 线段 OB 交圆 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ 于 C , 若 DC 平行于 OA , 求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 2.1.16. 设 $B(x_1, y_1), A(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 比值换元 $-\lambda = \frac{x_1+2}{x_2+2} = \frac{y_1}{y_2}$, 则:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1 & \Rightarrow \frac{x_1^2 - \lambda^2 x_2^2}{16} + \frac{y_1^2 - \lambda^2 y_2^2}{a^2} = 1 - \lambda^2 \\ \frac{\lambda^2 x_2^2}{16} + \frac{\lambda^2 y_2^2}{a^2} = \lambda^2 & \Rightarrow \frac{(x_1 + \lambda x_2)(x_1 - \lambda x_2)}{16(1+\lambda)(1-\lambda)} + \frac{(y_1 + \lambda y_2)(y_1 - \lambda y_2)}{a^2(1+\lambda)(1-\lambda)} = 1 \end{cases}$$

代入 $x_1 + \lambda x_2 = (-2)(1+\lambda), y_1 + \lambda y_2 = 0$ 得

$$\begin{aligned} \frac{-(x_1 - \lambda x_2)}{8(1-\lambda)} = 1 & \Rightarrow \lambda = \frac{x_1 + 8}{x_2 + 8} \Rightarrow -\lambda = \frac{x_1 + 2}{x_2 + 2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 + 8}{-x_2 - 8} \\ \Rightarrow y_2 &= \frac{-3y_1}{x_1 + 5}, \quad x_2 = \frac{-3(x_1 + 2)}{x_1 + 5} - 2 = \frac{-5x_1 - 16}{x_1 + 5} \end{aligned}$$

设 $y_1 = kx_1$, 则代入 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 得 $\frac{x_1^2}{16} + \frac{k^2 x_1^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm \frac{4}{\sqrt{a^2 + 16k^2}} \\ y_1 = \pm \frac{4k}{\sqrt{a^2 + 16k^2}} \end{cases}$

再代入圆方程得到 $(x+1)^2 + k^2 x^2 = 4 \Rightarrow (k^2 + 1)x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{-1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1} \\ y_3 = \frac{-k \pm k\sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1} \end{cases}$.

我们不妨先带着正负号一起计算, 注意下面的正负号一起取正或取负

$$k_{AO} = \frac{3y_1}{5x_1 + 16} = \frac{\frac{\pm 12k}{\sqrt{a^2 + 16k^2}}}{\pm \frac{20}{\sqrt{a^2 + 16k^2}} + 16} = \frac{\pm 3k}{4\sqrt{a^2 + 16k^2} \pm 5}$$

$$k_{DC} = \frac{\frac{-k \pm k\sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1}}{\frac{-1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}{k^2 + 1} + 2} = \frac{-k \pm k\sqrt{3k^2 + 4}}{2k^2 + 1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}$$

由 $k_{AO} = k_{CD}$ 得到 $\frac{-1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}}{2k^2 + 1 \pm \sqrt{3k^2 + 4}} = \frac{\pm 3}{4\sqrt{a^2 + 16k^2} \pm 5}$, 提取常数并变形得到:

$$\pm 1 = \frac{1}{\sqrt{3k^2 + 4}} - \frac{2\sqrt{a^2 + 16k^2}}{3k^2 + 4} \pm 2\sqrt{\frac{a^2 + 16k^2}{3k^2 + 4}}$$

所以若要求此式成立且 a 为常数, 必有 $\frac{a^2 + 16k^2}{3k^2 + 4}$ 为常数, 则计算得到 $a = \frac{8}{\sqrt{3}} > 4$, 反向代入验证充分性即可得到答案为 $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

例题 2.1.17 (杭二模拟)

已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 设其左焦点为 $F(-1, 0)$

- (1) 若椭圆上的两点 M, N 满足直线 MF, NF 关于 x 轴对称, 且直线 MN 斜率存在, 证明直线 MN 过定点.
- (2) 若过 $B(-2, 2)$ 的一条直线交椭圆于 M, N , $A(2, 0)$, 连接直线 AM, AN 交直线 OB 于 P, Q , 求 $\frac{|OP|}{|OQ|}$ 的值.

解 2.1.17. (1) 注意到直线 MF, NF 关于 x 轴对称, 那么直线 MF, NF 一定关于 y 轴对称, 又因为直线 MN 斜率存在, 所以 M, N 在 x 轴同侧, 且 $k_{MF} + k_{NF} = 0$. 首先这个题用不联立是非常简单的, 但是联立也很好做, 这里用同解方程做法:

$$\begin{cases} (x+1+ty)(x+1-ty) = 0 \\ x = my + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + n \end{cases}$$

$$(m^2 - t^2)y^2 + 2m(n+1)y + (n+1)^2 = 0 = (3m^2 + 4)y^2 + 6mny + 3n^2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3m^2 + 4)(m^2 - t^2)y^2 + 2m(n+1)(3m^2 + 4)y + (n+1)^2(3m^2 + 4) = 0 \\ (m^2 - t^2)(3m^2 + 4)y^2 + 6mn(m^2 - t^2)y + (3n^2 - 12)(m^2 - t^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m(n+1)(3m^2 + 4) = 6mn(m^2 - t^2) \\ (n+1)^2(3m^2 + 4) = (3n^2 - 12)(m^2 - t^2) \end{cases} \Rightarrow n = -4$$

最后是两式作比得到的, 当然, 直接比较 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 可以直接得到 $(-4, 0)$.

(2) 设 $M\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2}, \frac{2\sqrt{3}t_1}{1+t_1^2}\right), N\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2}, \frac{2\sqrt{3}t_2}{1+t_2^2}\right)$, 则

$$MA: x = \frac{x_1 - 2}{y_1}y + 2 = \frac{\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2} - 2}{\frac{2\sqrt{3}t_1}{1+t_1^2}}y + 2 = -\frac{2t_1}{\sqrt{3}}y + 2 \quad NA: x = -\frac{2t_2}{\sqrt{3}}y + 2$$

由直线 MA, NA 与 $y = -x$ 联立得到

$$y_P = \frac{2\sqrt{3}}{2t_1 - \sqrt{3}}, y_Q = \frac{2\sqrt{3}}{2t_2 - \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|OP|}{|OQ|} = -\frac{2t_2 - \sqrt{3}}{2t_1 - \sqrt{3}}$$

写出半代入形式的直线两点式

$$\frac{-2}{2} \frac{1 - t_1 t_2}{1 + t_1 t_2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2} = 1 \Rightarrow t_1 + t_2 = \sqrt{3}$$

得到 $\frac{|OP|}{|OQ|} = 1$.

结论 2.1.2 比值代换法

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 与非椭圆上点 $P(x_0, y_0)$ 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 则

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2} = \frac{y_1 - y_0}{y_0 - y_2} = -\frac{\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} - 1}{\frac{x_0 x_2}{a^2} + \frac{y_0 y_2}{b^2} - 1} \\ (1 + \lambda)^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right) = 2\lambda \left(\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1 \right) \end{cases}$$

证明 2.1.2.

结论 2.1.3 比值代换法

定义双线性极化算子: $T(M, N) = \frac{x_M x_N}{a^2} + \frac{y_M y_N}{b^2} - 1$.

若椭圆上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 与非椭圆上点 $P(x_0, y_0)$ 共线, 且满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 则必然成立以下三大完美定律:

$$\begin{cases} \text{比例生成律: } \lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_0 - x_2} = \frac{T(P, A)}{T(P, B)} \\ \text{降维求和律: } T(A, B) = T(P, A) + T(P, B) \\ \text{调和极化律: } T(P, P) \cdot T(A, B) = 2T(P, A) \cdot T(P, B) \end{cases}$$

实战推论: 消去 λ , 得到纯粹的调和点位约束:

$$\frac{2}{T(P, P)} = \frac{1}{T(P, A)} + \frac{1}{T(P, B)}$$

例题 2.1.18 二级结论

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 计算 $(x_1 y_2 + x_2 y_1) \left(\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} \right)$ 和 $x_1 y_1 + x_2 y_2$ 的大小关系, 证明你的结论.

结论 2.1.4 参数方程

过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两点 $A \left(a \frac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2}, b \frac{2t_1}{1 + t_1^2} \right), B \left(a \frac{1 - t_2^2}{1 + t_2^2}, b \frac{2t_2}{1 + t_2^2} \right)$ 的直线方程为

$$\frac{x(1 - t_1 t_2)}{a(1 + t_1 t_2)} + \frac{y(t_1 + t_2)}{b(1 + t_1 t_2)} = 1$$

第三章 曲线系

3.1 曲线系引入

例题 3.1.1 (椭圆上的中点弦直线)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内有一点 $P(x_0, y_0)$, 求以 P 为弦中点的直线方程.

解 3.1.1. 构造两个椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(2x_0 - x)^2}{a^2} + \frac{(2y_0 - y)^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

相减得到答案

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

例题 3.1.2 (椭圆上的直线两点式)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上有两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求 AB 方程.

解 3.1.2. 构造以 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 为直径的相似椭圆

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{a^2} + \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{b^2} = 1$$

则与原来的椭圆方程相减

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)^2}{b^2}$$

就可以得到 AB 的方程为

$$\frac{x_1 + x_2}{a^2}x + \frac{y_1 + y_2}{b^2}y = 1 + \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2}$$

再对这个方程使用万能代换便可以得到参数方程直线两点式的形式

例题 3.1.3 (抛物线上的直线两点式)

设 $y^2 = 2px$ 上有两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求 AB 方程.

解 3.1.3. 构造直线系 $(y - y_1)(y - y_2) = 0$, 与 $y^2 = 2px$ 相减得到

$$y^2 - (y - y_1)(y - y_2) = 2px \Leftrightarrow 2px - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2 = 0$$

例题 3.1.4 (利用梯形构造四点共圆)

二次函数 $y = x^2 + (a+1)x + a - 2$ 与坐标轴交于 A, B, C 三点, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程, 并验证圆心是否在定直线上, 以及外接圆是否过定点.

解 3.1.4. 构造直线系 $(y-0)(y-(a-2)) = y(y-a+2)$ 再与抛物线 $x^2 + (a+1)x - y + a - 2 = 0$ 相加得到:

$$x^2 + y^2 + (a+1)x - y - ay + 2y + a - 2 = x^2 + y^2 + (a+1)x + (1-a)y + a - 2 = 0$$

圆心 $\left(\frac{a+1}{-2}, \frac{1-a}{-2}\right)$ 一定在定直线上. 将方程改写为

$$a(x-y+1) + x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$$

发现当 $x=0, y=1$ 和 $x=-2, y=-1$ 符合要求, 这样就得到定点 $(0, 1), (-2, -1)$

例题 3.1.5 (2025 八省联考)

椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$, $A(-3, 0), B(2, 0)$, 过 B 的弦 MN 与点 A 形成的三角形 AMN 外心为 D , 证明 $k_{MN}k_{OD}$ 为定值.

解 3.1.5. 由斜率相反出共圆的结论, 可以构造直线系 $(x-ty-2)(x-ty+3) = 0$, 然后与椭圆联立:

$$\begin{cases} (x-ty-2)(x-ty+3) = 0 \\ 8x^2 + 9y^2 - 72 = 0 \end{cases}$$

然后待定 x^2, y^2 系数相等得到椭圆的系数是 (t^2+1) , 所以相加得到:

$$\begin{aligned} (t^2+1)(8x^2+9y^2-72) + (x-ty-2)(x+ty+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (8t^2+9)x^2 + (8t^2+9)y^2 + x - 5ty - 72t^2 - 78 &= 0 \end{aligned}$$

则 $k_{OD} = -5t, k_{MN} = \frac{1}{t}$, 定值为 -5 .

例题 3.1.6 (直径圆的构造)

已知抛物线 $y^2 = 2px$ 和弦 AB 所在的直线 $x = ty + m$, 求 A, B 的直径圆方程.

解 3.1.6. 消去 x 得到

$$y^2 = 2p(ty+m) = 2pty + 2pm \Rightarrow y^2 - 2pty - 2pm = 0$$

消去 y 得到

$$t^2y^2 = (x-m)^2 = 2p^2t^2x \Rightarrow x^2 - (2m+2p^2t^2)x + m^2 = 0$$

加起来就可以得到直径圆方程

$$x^2 + y^2 - (2m + 2p^2t^2)x - 2pty + m^2 - 2pm = 0$$

原因是消去 x, y 得到的式子都可以变为 $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ 和 $(y - y_1)(y - y_2) = 0$ 的形式, 而 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是弦 AB 的两端点, 所以直径圆的方程就是这两个直线的交点的方程。

例题 3.1.7 (过两点的圆系方程例题)

已知 $C: y^2 = 4x, l: y = x + 1$ 交于 A, B 两点, 求经过 A, B 且与 $x = -1$ 相切的圆的方程.

解 3.1.7. 联立有:

$$\begin{cases} y^2 = 4(y - 1) \\ (x + 1)^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

相加就有:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$

这是直径圆, 接下来配凑圆系方程:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 + \lambda(x - y - 1) = 0$$

代入 $x = -1$, 得到

$$y^2 - 4y + 4 + \lambda(-2 - y) = 0$$

并让 $\Delta = 0$, 得到:

$$\Delta = (4 + \lambda)^2 - 4(4 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -16$$

所以圆方程有两个: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ 和 $x^2 + y^2 - 18x + 12y + 21 = 0$, 本题目是易错题, 容易漏解.

例题 3.1.8 (直径圆习题)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 弦 AB 过定点 $(m, 0)$, 其直径圆与椭圆交于点 C, D , 证明直线 CD 过定点.

解 3.1.8. 设 $AB: x = ty + m$, 其中 m 已知, 联立韦达:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \\ x = ty + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3t^2 + 4)y^2 + 6tmy + 3m^2 - 12 = 0 \\ (3t^2 + 4)x^2 - 8mx + 4m^2 - 12t^2 = 0 \end{cases}$$

两式相加得到:

$$(3t^2 + 4)x^2 + (3t^2 + 4)y^2 - 8mx + 6tmy + 7m^2 - 12 - 12t^2 = 0$$

引入 $\lambda(3x^2 + 4y^2 - 12) = 0$ 并配凑 $(x + ty + \dots)(x - ty + \dots)$ 结构, 就有

$$-(t^2 + 1)(3x^2 + 4y^2 - 12) + (3t^2 + 4)(x^2 + y^2) - 8mx + 6tmy + 7m^2 - 12 - 12t^2 = 0$$

因式分解成

$$(x - ty - m)(x + ty - 7m) = 0$$

, 所以 CD 过定点 $(7m, 0)$.

例题 3.1.9 (角平分线)

知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 弦 AB 过定点 $P(1, 0)$, $C(4, 0)$, 证明 x 轴平分 $\angle ACB$

解 3.1.9. 由 $AB: x = ty + 1$, 由对称性可以设 $A'B': x = -ty + 1$, 得到退化二次曲线

$$(x - ty - 1)(x + ty - 1) = 0$$

待定 $\lambda(3x^2 + 4y^2 - 12) = 0$, 再根据要配凑的结构

$$(x - ?y - 4)(x + ?y - 4) = 0$$

中的常数项, 得到 $\lambda = -\frac{1}{4}$

$$-(3x^2 + 4y^2 - 12) + 4(x - ty - 1)(x + ty - 1) = 0$$

得到 $(x - 4)^2 = (4 + t^2)y^2$, 这等价于

$$(x + \sqrt{4 + t^2}y - 4)(x - \sqrt{4 + t^2}y - 4) = 0$$

这个方程的根显然为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 所以斜率相反, 角平分线得证.

例题 3.1.10 (抹茶奶绿)

椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的右焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, 点 M, N 在 x 轴上方的椭圆上, 且 $\triangle MNF$ 的外心 D 在 x 轴上, $\sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN|$, 求 $S_{\triangle MNF}$

解 3.1.10. 设直线方程 $MN: y = kx + m \Leftrightarrow kx = y - m$, 并联立

$$\begin{cases} (1): (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0 \\ (2): (4k^2 + 1)y^2 - 2my + m^2 - 4k^2 = 0 \\ (3): y - kx - m = 0 \end{cases}$$

由 $(1) + (2) + 2m(3)$ 相加得到过 A, B 两点, 且圆心在 x 轴上的圆

$$(4k^2 + 1)(x^2 + y^2) + 6kmx + 3m^2 - 4k^2 - 4 = 0$$

代入 $F(\sqrt{3}, 0)$, 得到直线 MN 到焦点 $(\sqrt{3}, 0)$ 的距离: d (后面要根据这个式子求斜率):

$$8k^2 + 6\sqrt{3}km + 3m^2 = 1 \Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{3}k + m}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

此时设圆半径为 R , 并由等面积法推算得:

$$\begin{cases} S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2}|FM||FN|\sin\angle MFN = \frac{1}{2}|MN|d = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}|MN| \\ \sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN| \end{cases} \Rightarrow \sin\angle MFN = \frac{1}{2}$$

于是设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 由向量公式得到

$$\begin{aligned} \cos\angle MFN &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}}{|FM||FN|} = \frac{(x_1 - \sqrt{3})(x_2 - \sqrt{3}) + y_1y_2}{(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1)(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2)} = \frac{(x_1 - \sqrt{3})(x_2 - \sqrt{3}) + y_1y_2}{\frac{3}{4}(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_1)(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_2)} \\ &= \frac{4}{3} \frac{12k^2 + 8\sqrt{3}km + 4m^2 - 1 + m^2 - 4k^2}{(4k^2 + 1)\frac{16}{3} + \frac{32}{\sqrt{3}}km + 4m^2 - 4} = \frac{8k^2 + 8\sqrt{3}km + 5m^2 - 1}{16k^2 + 8\sqrt{3}km + 3m^2 + 1} \\ &= \frac{8k^2 + 8\sqrt{3}km + 5m^2 - (8k^2 + 6\sqrt{3}km + 3m^2)}{16k^2 + 8\sqrt{3}km + 3m^2 + 8k^2 + 6\sqrt{3}km + 3m^2} = \frac{\sqrt{3}km + m^2}{12k^2 + 7\sqrt{3}km + 3m^2} \end{aligned}$$

齐次化后, 设 $t = \frac{m}{k}$, 得到 $(3\sqrt{3} - 2)t^2 + (21 - 2\sqrt{3})t + 12\sqrt{3} = 0$ 解得横截距, 另一个根舍去:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3} - 21 - 2\sqrt{3} - 3}{2(3\sqrt{3} - 2)} = \frac{12}{2 - 3\sqrt{3}}, t_1^2 = \frac{144}{31 - 12\sqrt{3}}, t_2 = -\sqrt{3}$$

然后根据前面求出的距离, 利用斜率的定义计算:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{d^2}{(-\frac{m}{k} - \sqrt{3})^2 - d^2} = \frac{1}{3(\frac{3+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2})^2 - 1} = \frac{31 - 12\sqrt{3}}{3(3 + 2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3} - 2)^2} = \frac{1}{16} \frac{31 - 12\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \\ m^2 &= k^2 \frac{m^2}{k^2} = \frac{1}{16} \frac{31 - 12\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \frac{144}{31 - 12\sqrt{3}} = \frac{9}{2 + 3\sqrt{3}}, km = \frac{3}{4} \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

最后得到面积:

$$\begin{aligned} S_{\triangle MNF} &= \frac{1}{2} \sin\angle MFN |FM||FN| = \frac{1}{4} |FM||FN| = \frac{16k^2 + 8\sqrt{3}km + 3m^2 + 1}{4k^2 + 1} \\ &= \frac{(31 - 12\sqrt{3}) + 6\sqrt{3}(2 - 3\sqrt{3}) + 27 + 2 + 3\sqrt{3}}{\frac{1}{4}(31 - 12\sqrt{3}) + 2 + 3\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{13} \end{aligned}$$

例题 3.1.11 (抹茶奶绿)

椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的右焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, 点 M, N 在 x 轴上方的椭圆上, 且 $\triangle MNF$ 的外心 D 在 x 轴上, $\sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN|$, 求 $S_{\triangle MNF}$

解 3.1.11. 由于本题中圆和椭圆都能削掉半边变成“函数”, 所以我们可以直接联立它们:

$$\begin{cases} (x-m)^2 + y^2 = r^2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 - 2mx + 2\sqrt{3}m - 2 = 0$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由 $\sqrt{3}|FM||FN| = 2|MN|$ 得到:

$$\begin{aligned} |MN| &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 \right) \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_1 \right) \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - x_2 \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} \frac{16}{3} - \frac{8m}{\sqrt{3}} + 2m - 2 \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}m \right) = \sqrt{3} - m \end{aligned}$$

由于圆经过椭圆焦点, 有

$$(\sqrt{3} - m)^2 = r^2 \Rightarrow \sqrt{3} - m = |MN| = r = \frac{\sqrt{3}}{2}|FM||FN|$$

设圆心为 D , 有等边三角形 MDN , 圆周角定理得到 $\angle MFN = \frac{\pi}{6}$, 所求面积为

$$S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} \sin \angle MFN |FM||FN| = \frac{1}{4} |FM||FN| = \frac{\sqrt{3}}{6} r$$

我们要求出 r , 所以还少一个方程, 利用三角形 MNF 余弦定理:

$$|MF|^2 + |NF|^2 - \sqrt{3}|MF||NF| = |MF|^2 + |NF|^2 - 2r = |MN|^2 = r^2 \Rightarrow |MF|^2 + |NF|^2 = r^2 + 2r$$

为了引入 m , 利用恒等式 $|MF|^2 + |NF|^2 + 2|MF||NF| = (|MF| + |NF|)^2$, 韦达定理得:

$$|MF| + |NF| = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2) = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{8}{3}m = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}m$$

那么

$$|MF|^2 + |NF|^2 = (|MF| + |NF|)^2 - 2|MF||NF| = \left(4 - \frac{4}{\sqrt{3}}m \right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}r = r^2 + 2r$$

代入 $\sqrt{3} - m = r$ 得到

$$\left(4 - \frac{4}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - r) \right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}r = r^2 + 2r \Rightarrow r = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{13}$$

得到 $S_{\triangle MNF} = \frac{\sqrt{3}}{6}r = \frac{2 + \sqrt{3}}{13}$

第四章 杂题

4.1 数学问题

例题 4.1.1 新曲线

已知曲线 $\Gamma: 12x^3 + 12xy^2 + 3x^2 + 4y^2 = 0$ 。过原点 O 作两条互相垂直的直线，分别交曲线 Γ 于异于原点的两点 A, B 。求证：无论直线如何转动， $\triangle OAB$ 的外接圆恒过一个异于原点的定点，并求出该定点坐标。

例题 4.1.2

(多选) 已知非零复数 z_1, z_2 满足 $z\bar{z} = z + \bar{z}$ 。设复数 z_3 满足 $\frac{2}{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ 。下列关于 z_1, z_2, z_3 的结论中，正确的有 ()

A. 复数 z_3 必定满足方程 $z\bar{z} = z + \bar{z}$

B. $\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1|} = \frac{|z_2 - z_3|}{|z_2|}$

C. $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} \geq \frac{2}{|z_3|}$

D. $\frac{1}{|z_1|^2} + \frac{1}{|z_2|^2} \leq \frac{2}{|z_3|^2}$

证明 z_3 满足 $z_3\bar{z}_3 = z_3 + \bar{z}_3$ 已知条件是 $z_1\bar{z}_1 = z_1 + \bar{z}_1$ 和 $z_2\bar{z}_2 = z_2 + \bar{z}_2$ 。既然 z_3 是 z_1 和 z_2 的调和平均数，即 $\frac{2}{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ ，我们先把 z_3 解出来：

$$z_3 = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$$

同样的，它的共轭复数就是：

$$\bar{z}_3 = \frac{2\bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}$$

我们要证 $z_3\bar{z}_3 = z_3 + \bar{z}_3$ ，那就把等号左右两边分别算出来，看能不能对得上！先算左边 (LHS)：

$$z_3\bar{z}_3 = \left(\frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}\right) \left(\frac{2\bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}\right) = \frac{4(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)}{(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)}$$

把已知条件 $z_1\bar{z}_1 = z_1 + \bar{z}_1$ 和 $z_2\bar{z}_2 = z_2 + \bar{z}_2$ 直接代入分子：

$$\text{LHS} = \frac{4(z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2)}{(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)}$$

再算右边 (RHS)：

$$z_3 + \bar{z}_3 = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2} + \frac{2\bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}$$

面对两个分数相加，毫不犹豫直接通分！

$$\text{RHS} = \frac{2z_1z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + 2\bar{z}_1\bar{z}_2(z_1 + z_2)}{(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)}$$

分母现在和左边一样了，我们专心拆开分子看一看：

$$\text{分子} = 2z_1z_2\bar{z}_1 + 2z_1z_2\bar{z}_2 + 2\bar{z}_1\bar{z}_2z_1 + 2\bar{z}_1\bar{z}_2z_2$$

把式子里的项重新组合一下，把 z 和它的共轭 \bar{z} 凑对：

$$\text{分子} = 2(z_1\bar{z}_1)z_2 + 2(z_2\bar{z}_2)z_1 + 2(z_1\bar{z}_1)\bar{z}_2 + 2(z_2\bar{z}_2)\bar{z}_1$$

再次代入已知条件 $z\bar{z} = z + \bar{z}$ 替换掉乘积项：

$$\text{分子} = 2(z_1 + \bar{z}_1)z_2 + 2(z_2 + \bar{z}_2)z_1 + 2(z_1 + \bar{z}_1)\bar{z}_2 + 2(z_2 + \bar{z}_2)\bar{z}_1$$

稍微提取一下公因式：

$$\text{分子} = 2(z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2) + 2(z_2 + \bar{z}_2)(z_1 + \bar{z}_1)$$

合并同类项，搞定！

$$\text{分子} = 4(z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2)$$

放回分母上一看， $\text{RHS} = \frac{4(z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2)}{(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)}$ 。完美！左边完全等于右边，第一问爆算成功！第二问：证明 $\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1|} = \frac{|z_2 - z_3|}{|z_2|}$ 这一问看着要处理绝对值很麻烦，但别急，我们先把绝对值里面的代数式整理干净。先看等式左边的内部 $z_1 - z_3$ ：把 $z_3 = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$ 代进去硬减：

$$z_1 - z_3 = z_1 - \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2} = \frac{z_1(z_1 + z_2) - 2z_1z_2}{z_1 + z_2}$$

分子展开化简：

$$z_1^2 + z_1z_2 - 2z_1z_2 = z_1^2 - z_1z_2 = z_1(z_1 - z_2)$$

所以：

$$z_1 - z_3 = \frac{z_1(z_1 - z_2)}{z_1 + z_2}$$

把它塞回我们要算的左边式子里（利用复数模的性质 $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ ）：

$$\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1|} = \left| \frac{\frac{z_1(z_1 - z_2)}{z_1 + z_2}}{z_1} \right|$$

看到没有， z_1 被完美约掉了！

$$\text{左边} = \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 + z_2|}$$

再用一模一样的套路处理等式右边的 $z_2 - z_3$ ：

$$z_2 - z_3 = z_2 - \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2} = \frac{z_2(z_1 + z_2) - 2z_1z_2}{z_1 + z_2}$$

分子展开：

$$z_2z_1 + z_2^2 - 2z_1z_2 = z_2^2 - z_1z_2 = z_2(z_2 - z_1)$$

所以：

$$z_2 - z_3 = \frac{z_2(z_2 - z_1)}{z_1 + z_2}$$

代入右边的式子：

$$\frac{|z_2 - z_3|}{|z_2|} = \left| \frac{\frac{z_2(z_2 - z_1)}{z_1 + z_2}}{z_2} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \right|$$

因为复数相减的模长满足 $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$ （也就是两点之间的距离），所以：

$$\text{右边} = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 + z_2|}$$

左边 = 右边，第二问也就这么被纯代数步骤“爆”出来了！

第五章 抹茶题集

例题 5.0.1 抹茶 T1

椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m (m > 1)$ 上 3 点 $A, B, P(0, 1)$ 满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 求 $|x_B|$ 的最大值

解 5.0.1. 由于我们将证明: 一旦 m 固定, 符合题意的弦最多只有一对对称解, $|x_B|$ 此时是一个确定的定值。因此“求最大值”必然是指随着参数 m 在允许范围 ($m > 1$) 内变化时, 绝对值 $|x_B|$ 能达到的全局上界。设点 $A(x_A, y_A)$, 点 $B(x_B, y_B)$ 。已知定点 $P(0, 1)$ 。有

$$\overrightarrow{AP} = (0 - x_A, 1 - y_A) = (-x_A, 1 - y_A), \overrightarrow{PB} = (x_B - 0, y_B - 1) = (x_B, y_B - 1)$$

由于 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 代入条件:

$$\begin{cases} -x_A = 2x_B \\ 1 - y_A = 2(y_B - 1) \end{cases} \implies \begin{cases} x_A = -2x_B \\ y_A = 3 - 2y_B \end{cases}$$

已知 A 和 B 都在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$ 上。分别代入

$$\frac{x_B^2}{4} + y_B^2 = m, \frac{(-2x_B)^2}{4} + (3 - 2y_B)^2 = m$$

消去 x_B 得到:

$$\frac{x_B^2}{4} + y_B^2 = x_B^2 + 4y_B^2 - 12y_B + 9 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\right)x_B^2 + (4 - 1)y_B^2 - 12y_B + 9 = 0$$

整理得到椭圆轨迹 $E_B: \frac{x_B^2}{4} + (y_B - 2)^2 = 1$, 将 x_B^2 反代, 找出参数 m 和 y_B 的对应关系为 $m = 4y_B - 3$, 由条件 $m > 1$:

$$4y_B - 3 > 1 \implies 4y_B > 4 \implies y_B > 1$$

, 因此, 满足条件的点 B 的充分且必要集合为: 椭圆 $\frac{x_B^2}{4} + (y_B - 2)^2 = 1$ 上满足 $y_B > 1$ 的所有点。由于点 B 在 $\frac{x_B^2}{4} + (y_B - 2)^2 = 1$ 上, 且任意实数的平方非负 $(y_B - 2)^2 \geq 0$:

$$\frac{x_B^2}{4} = 1 - (y_B - 2)^2 \leq 1 \implies x_B^2 \leq 4 \implies |x_B| \leq 2$$

当且仅当 $y_B = 2$ 时取得等号, 此时完美符合约束 $y_B > 1$, 且对应的 $m = 4(2) - 3 = 5$ 同样符合 $m > 1$ 。

例题 5.0.2 抹茶 T2

椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过点 F 的直线交椭圆于 A, B 两点, 若 $|OA|^2 = |AB|$, 求点 A 的坐标.

解 5.0.2. 点 A 的焦半径为: $r_A = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_A$, 凡是过焦点的弦被焦点分成的两段 r_A 和 r_B , 必然满足经典的调和性质: $\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} = \frac{2a}{b^2}$, 将 $a = 2, b = 1$ 代入:

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} = \frac{4}{1} = 4$$

消去 r_B :

$$\frac{1}{r_B} = 4 - \frac{1}{r_A} = \frac{4r_A - 1}{r_A} \Rightarrow r_B = \frac{r_A}{4r_A - 1}$$

弦长 $|AB| = r_A + r_B = r_A + \frac{r_A}{4r_A - 1} = \frac{4r_A^2}{4r_A - 1}$ 将 $r_A = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_A$ 代入:

$$|AB| = \frac{4\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_A\right)^2}{4\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_A\right) - 1} = \frac{4\left(4 - 2\sqrt{3}x_A + \frac{3}{4}x_A^2\right)}{8 - 2\sqrt{3}x_A - 1} = \frac{3x_A^2 - 8\sqrt{3}x_A + 16}{7 - 2\sqrt{3}x_A}$$

然后将 $|OA|^2$ 同样转化为关于 x_A 的表达式

$$|OA|^2 = x_A^2 + y_A^2 = x_A^2 + 1 - \frac{x_A^2}{4} = 1 + \frac{3}{4}x_A^2 = \frac{3x_A^2 + 4}{4}$$

联立 $\frac{3x_A^2 + 4}{4} = \frac{3x_A^2 - 8\sqrt{3}x_A + 16}{7 - 2\sqrt{3}x_A}$ 得到

$$2\sqrt{3}x_A^3 - 3x_A^2 - 8\sqrt{3}x_A + 12 = 0$$

分解得

$$(x_A^2 - 4)(2\sqrt{3}x_A - 3) = 0$$

当 $x_A^2 - 4 = 0$ 解得 $x_A = 2$ 或 $x_A = -2$. 即 $(2, 0)$ 和 $(-2, 0)$. 当 $2\sqrt{3}x_A - 3 = 0$ 解得 $x_A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 即 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{4}\right)$.

例题 5.0.3 抹茶 T3

抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过焦点的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 M 在抛物线上, 满足 $MA \perp MB, FM \perp AB$, 求 $\triangle ABM$ 的面积.

解 5.0.3. 假设 $AB \perp x$ 轴, 则直线方程为 $x = 1$. 解得 $y^2 = 4 \Rightarrow A(1, 2), B(1, -2)$, 此时 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1, 2) \cdot (1, -2) = 1 - 4 = -3 \neq 0$. 矛盾! 故设直线 AB 的方程为 $x = ty + 1$ (其中 $t \neq 0$). 联立得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$, 设点 M 的坐标为 (x_0, y_0) , 且 $x_0 = \frac{y_0^2}{4}$. $\overrightarrow{MA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \left(\frac{y_1^2 - y_0^2}{4}, y_1 - y_0\right)$, $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0) = \left(\frac{y_2^2 - y_0^2}{4}, y_2 - y_0\right)$ 由 $MA \perp MB$ 得 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$:

$$\frac{y_1^2 - y_0^2}{4} \cdot \frac{y_2^2 - y_0^2}{4} + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0 \Leftrightarrow (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) \left[\frac{(y_1 + y_0)(y_2 + y_0)}{16} + 1 \right] = 0$$

化简得 $(y_1 + y_0)(y_2 + y_0) + 16 = 0$, 代入得 $-4 + y_0(4t) + y_0^2 + 16 = 0 \Rightarrow y_0^2 + 4ty_0 + 12 = 0$, 所以 $t = \frac{-y_0^2 - 12}{4y_0}$ 。

由 $FM \perp AB$ 得 $t(y_0^2 - 4) + 4y_0 = 0$, 联立消去 t :

$$\frac{-y_0^2 - 12}{4y_0} = \frac{-4y_0}{y_0^2 - 4} \Leftrightarrow (y_0^2 - 12)(y_0^2 + 4) = 0$$

解得 M 点的横坐标: $x_0 = \frac{y_0^2}{4} = \frac{12}{4} = 3$ 。所以 $M(3, \pm 2\sqrt{3})$ 。 $t^2 = \left(\frac{-4(\pm 2\sqrt{3})}{12-4}\right)^2 = (\mp\sqrt{3})^2 = 3$ 。已知 $FM \perp AB$, 且焦点 F 在直线 AB 上, 因此点 M 到底边 AB 的距离

$$|FM| = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 0)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + 12} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

底边 $|AB|$: 由抛物线焦点弦长公式 $|AB| = x_1 + x_2 + p$: 由于 $x = ty + 1$, 可得 $x_1 + x_2 = t(y_1 + y_2) + 2 = t(4t) + 2 = 4t^2 + 2$ 。因此 $|AB| = 4t^2 + 2 + p = 4(3) + 2 + 2 = 16$ 。面积 S :

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times |AB| \times |FM| = \frac{1}{2} \times 16 \times 4 = 32$$

另解: 由 $\triangle AMB$ 是以 AB 为斜边的直角三角形且 $FM \perp AB$ 可知, 根据射影定理得 $|FM|^2 = |FA| \cdot |FB|$ 。建立以 F 为极点, 极轴沿 x 轴正方向的极坐标系, 抛物线方程为 $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$ 。设直线 AB 的倾斜角为 α , 则 A, B 的极角分别为 α 和 $\alpha + \pi$ 。由极坐标性质可知:

$$|FA| = \frac{2}{1 - \cos \alpha}, \quad |FB| = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$$

从而 $|FA| \cdot |FB| = \frac{4}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{\sin^2 \alpha}$ 。又弦长 $|AB| = |FA| + |FB| = \frac{4}{\sin^2 \alpha}$, 故由此确立几何关系: $|FM|^2 = |AB|$ 。由于 $FM \perp AB$, 点 M 的极角为 $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$, 代入极坐标方程得 $|FM| = \frac{2}{1 \pm \sin \alpha}$ 。结合前述关系式得:

$$\left(\frac{2}{1 \pm \sin \alpha}\right)^2 = \frac{4}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{1 \pm \sin \alpha} = \frac{1}{|\sin \alpha|}$$

解得 $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$ 。此时, 弦长 $|AB| = \frac{4}{1/4} = 16$, 高 $|FM| = \sqrt{16} = 4$ 。因此, $\triangle ABM$ 的面积为:

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |FM| = \frac{1}{2} \times 16 \times 4 = 32$$

例题 5.0.4 抹茶 T4

点 $A(0, -1)$, 点 P, Q 满足点 A, P, Q 共线, 且 $|AP| \cdot |AQ| = 3$, 若 $k_{OQ} = 3k_{OP}$, 求点 P 的轨迹方程。

解 5.0.4. 设动点 P 的坐标为 (x, y) , 点 Q 的坐标为 (x_Q, y_Q) 。由题设 $k_{OQ} = 3k_{OP}$ 可知, 直线 OP 与 OQ 的斜率均存在且不为零, 故点 P 与点 Q 的横坐标均满足 $x \neq 0$ 且 $x_Q \neq 0$ 。由斜率公式得 $\frac{y_Q}{x_Q} = \frac{3y}{x}$, 即 $xy_Q = 3x_Qy$ 。

由于点 $A(0, -1)$ 与 P, Q 三点共线, 且 P 不在 y 轴上, 故向量 $\overrightarrow{AP} \neq \vec{0}$ 。设 $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}$ ($\lambda \neq 0$), 则有:

$$(x_Q, y_Q + 1) = \lambda(x, y + 1) \implies x_Q = \lambda x, \quad y_Q = \lambda(y + 1) - 1$$

将上述关系代入 $xy_Q = 3x_Qy$ 中, 得 $x[\lambda(y + 1) - 1] = 3\lambda xy$ 。因 $x \neq 0$, 等式两边同除以 x 并整理得 $\lambda(y + 1) - 1 = 3\lambda y$, 即 $\lambda(1 - 2y) = 1$ 。若 $y = \frac{1}{2}$, 方程无解, 故 $y \neq \frac{1}{2}$, 从而解得 $\lambda = \frac{1}{1-2y}$ 。

根据长度条件 $|AP| \cdot |AQ| = 3$, 结合 $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}$ 可得 $|\lambda| \cdot |AP|^2 = 3$ 。代入距离公式与 λ 的表达式, 得到关于 P 点坐标的方程:

$$\left| \frac{1}{1-2y} \right| \cdot [x^2 + (y+1)^2] = 3 \implies x^2 + (y+1)^2 = 3|1-2y|$$

针对 $1-2y$ 的正负号进行分类讨论:

当 $1-2y > 0$, 即 $y < \frac{1}{2}$ 时, 方程化为 $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 3 - 6y$, 整理得 $x^2 + y^2 + 8y - 2 = 0$, 配方得标准方程 $x^2 + (y+4)^2 = 18$ 。该圆上点的纵坐标最大值为 $y_{max} = -4 + \sqrt{18} = -4 + 3\sqrt{2}$ 。由于 $3\sqrt{2} = \sqrt{18} < 4.5$, 故 $y_{max} < 0.5$, 即该轨迹圆上的所有点均满足 $y < \frac{1}{2}$ 的前提条件。

当 $1-2y < 0$, 即 $y > \frac{1}{2}$ 时, 方程化为 $x^2 + y^2 + 2y + 1 = -(3 - 6y)$, 整理得 $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$, 即 $x^2 + (y-2)^2 = 0$ 。此方程的唯一实数解为点 $(0, 2)$, 但该点横坐标 $x = 0$, 不满足斜率存在的初始前提, 故应予以舍弃。

综上所述, 动点 P 的轨迹是以 $(0, -4)$ 为圆心, $\sqrt{18}$ 为半径的圆, 且需除去与 y 轴的交点。其轨迹方程为:

$$x^2 + (y+4)^2 = 18 \quad (x \neq 0)$$

或写成一般式: $x^2 + y^2 + 8y - 2 = 0 \quad (x \neq 0)$ 。

例题 5.0.5 抹茶 T5

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右顶点为 A , $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$, 若双曲线上存在点 P , 使得 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$, 求双曲线的离心率的取值范围。

解 5.0.5. 设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 其右顶点为 $A(a, 0)$ 。由 $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ 可得 B 点坐标为 $(2a, 0)$ 。设双曲线上存在点 $P(x, y)$ 满足 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$, 则有 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 且点 P 不与 A, B 重合, 即 $y \neq 0$ 。

根据向量坐标运算, $\overrightarrow{PA} = (a-x, -y)$, $\overrightarrow{PB} = (2a-x, -y)$, 由数量积为零得:

$$(x-a)(x-2a) + y^2 = 0 \implies y^2 = -(x-a)(x-2a)$$

由于 $y^2 > 0$, 可得 x 的取值范围满足 $a < x < 2a$ 。此条件同时限定了点 P 必须位于双曲线的右支。

将点 P 在双曲线上的关系 $y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$ 代入上述方程。利用离心率关系 $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$, 得 $y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2)$ 。联立圆与双曲线的方程:

$$(e^2 - 1)(x-a)(x+a) = -(x-a)(x-2a)$$

由于 $x > a$ ，等式两边可约去 $x - a$ ，得：

$$(e^2 - 1)(x + a) = -(x - 2a)$$

整理得 $e^2x + e^2a - x - a = -x + 2a$ ，化简可解得点 P 的横坐标为：

$$x = \frac{3 - e^2}{e^2}a$$

要使满足题意的点 P 存在，该横坐标 x 必须满足范围 $a < x < 2a$ 。代入得：

$$a < \frac{3 - e^2}{e^2}a < 2a$$

由于 $a > 0$ ，不等式各边同除以 a 得 $1 < \frac{3}{e^2} - 1 < 2$ ，即 $2 < \frac{3}{e^2} < 3$ 。由此解得：

$$1 < e^2 < \frac{3}{2}$$

考虑到双曲线离心率 $e > 1$ ，对不等式开平方得 $1 < e < \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

经过检验，当 $e \in (1, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 时，所求横坐标 x 对应的纵坐标 $y = \pm\sqrt{-(x-a)(x-2a)}$ 必为非零实数，保证了点 P 存在且不与 A, B 重合，满足 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 。若 $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，则 $x = a$ ，此时点 P 与顶点 A 重合，角不存在。因此，双曲线离心率 e 的取值范围是 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 。

第六章 反演变换在解析几何中的应用

反演变换作为一种高级几何变换，常被应用于解析几何的命题与解题中。通过反演映射，基础的二次曲线问题可转化为高次曲线（如三次、四次曲线）的交轨问题。本章将系统阐述反演变换的原理，并通过具体实例展示其在圆锥曲线定理推广中的应用。

6.1 反演变换的基本原理

定义：假设反演中心为 O ，反演半径为 R 。平面上任意一点 P （异于点 O ）被变换至反演像上的点 P' ，满足 \overrightarrow{OP} 与 $\overrightarrow{OP'}$ 同向共线，且 $OP \cdot OP' = R^2$ 。

反演变换具有以下基本性质：

- 过反演中心的直线变为过反演中心的直线。
- 不过反演中心的直线变为过反演中心的圆。
- 过反演中心的圆变为不过反演中心的直线。
- 不过反演中心的圆变为不过反演中心的圆。
- 反演是可逆的双射变换。若曲线 Γ 的反演像为 Γ' ，则 Γ' 作相同参数的反演变换可还原为 Γ 。
- 反演中心 O 与无穷远点 ∞ 互为反演点。
- 反演具有保角性，两曲线交角在反演前后保持不变，正交关系在变换中被严格保持。

在平面直角坐标系中，设反演中心为原点 $O(0,0)$ 。对于任意一点 (x_0, y_0) ，其反演点坐标为 $\left(\frac{R^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{R^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)$ 。根据反演的可逆性，对于一般二次曲线方程

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

将其中的 x 替换为 $\frac{R^2 x}{x^2 + y^2}$ ，将 y 替换为 $\frac{R^2 y}{x^2 + y^2}$ ，即可得到反演像的代数方程：

$$R^4(Ax^2 + Bxy + Cy^2) + R^2(Dx + Ey)(x^2 + y^2) + F(x^2 + y^2)^2 = 0$$

其中 x, y 不同时为 0。通常情况下，该反演像为一条四次曲线。若反演中心在原二次曲线上，则退化为三次曲线；直线与圆的情况则分别退化为对应的直线或圆。

例如，以原点 O 为反演中心， $R = 2$ 为反演半径，对椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 进行反演。代入坐标变换公式并化简，可得反演像方程为 $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + 16y^2$ 。

6.1.1 四次曲线的垂足曲线生成方式

上述四次曲线也可通过垂足曲线的方式生成。考虑椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, O 是坐标原点, l 是椭圆的动切线, P 是点 O 在直线 l 上的垂足。设 $P(x_0, y_0)$, 则切线 l 的方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, 整理得 $\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}x + \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}y = 1$ 。由相切条件可知 $a^2 \left(\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2 + b^2 \left(\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2 = 1$ 。整理得 P 的轨迹方程为 $(x^2 + y^2)^2 = ax^2 + by^2$ 。此轨迹即为椭圆 $ax^2 + by^2 = 1$ 以 O 为反演中心、 $R = 1$ 为反演半径的反演像。同理, 对于双曲线 $xy = 1$, 点 O 到其切线的垂足轨迹方程为 $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$, 该轨迹恰为双曲线 $xy = 1$ 以 O 为中心、 $\sqrt{2}$ 为半径的反演像。

6.2 基础圆锥曲线定理的反演命题

利用反演变换的保角性与拓扑不变性, 可将基础的解析几何题目转化为高次曲线交轨问题。

例题 6.2.1

已知曲线 $\Gamma: (x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + 16y^2$, $A(-2, 0)$ 。过原点 O 和定点 $E(-\frac{10}{3}, 0)$ 的动圆与 Γ 交于 B, C 两点, $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 的外接圆半径分别为 R_1, R_2 。证明: $(R_1^2 - 1)(R_2^2 - 1)$ 为定值。

解 6.2.1. 设过点 $O(0, 0)$ 和 $E(-\frac{10}{3}, 0)$ 的圆方程为

$$x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x + Fy = 0$$

联立曲线 Γ 的方程 $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + 16y^2$, 消去二次项得 $(-\frac{10}{3}x - Fy)^2 = 4x^2 + 16y^2$, 整理得

$$64x^2 + 60Fxy + 9(F^2 - 16)y^2 = 0$$

设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 且 $y_1, y_2 \neq 0$ 。令 $t_1 = \frac{x_1}{y_1}, t_2 = \frac{x_2}{y_2}$, 则 t_1, t_2 为方程 $64t^2 + 60Ft + 9(F^2 - 16) = 0$ 的两根。由韦达定理可得

$$t_1 + t_2 = -\frac{15F}{16}, \quad t_1 t_2 = \frac{9(F^2 - 16)}{64}$$

由于 $\triangle ABO$ 的外接圆过原点 O 及定点 $A(-2, 0)$, 可设其方程为 $x^2 + y^2 + 2x + E_1 y = 0$ 。将点 B 满足的圆方程 $x_1^2 + y_1^2 = -\frac{10}{3}x_1 - Fy_1$ 代入, 得 $-\frac{4}{3}x_1 + (E_1 - F)y_1 = 0$ 。由此解得 $E_1 = F + \frac{4}{3}t_1$ 。同理, $\triangle ACO$ 外接圆的参数满足 $E_2 = F + \frac{4}{3}t_2$ 。分析两外接圆半径。其半径平方分别为 $R_1^2 = 1 + \frac{E_1^2}{4}$ 与 $R_2^2 = 1 + \frac{E_2^2}{4}$ 。因此

$$(R_1^2 - 1)(R_2^2 - 1) = \frac{E_1^2 E_2^2}{16}$$

计算 $E_1 E_2$ 的乘积:

$$E_1 E_2 = F^2 + \frac{4}{3}F(t_1 + t_2) + \frac{16}{9}t_1 t_2$$

代入韦达定理结论可得 $E_1 E_2 = F^2 - \frac{5}{4}F^2 + \frac{1}{4}(F^2 - 16) = -4$ 。于是 $(R_1^2 - 1)(R_2^2 - 1) = \frac{(-4)^2}{16} = 1$ 。得证。(注: 此题本质为证明椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 中, 过点 $(-\frac{6}{5}, 0)$ 的弦对左顶点张角为直角)。

例题 6.2.2

已知曲线 $\Gamma: (x^2 + y^2)^2 = 4xy$ 。过坐标原点 O 的动圆 $\odot Q$ 与 Γ 相切， $\odot Q$ 分别交 x 轴、 y 轴于 B, C 两点。求证： $\triangle OBC$ 的面积为定值。

解 6.2.2. 设 $\odot Q$ 方程为 $x^2 + y^2 = Dx + Ey$ 。联立 Γ 方程，得 $(Dx + Ey)^2 = 4xy$ 。整理得关于 $\frac{x}{y}$ 的二次方程：

$$D^2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 + (2DE - 4) \left(\frac{x}{y}\right) + E^2 = 0$$

由相切条件，该方程的判别式必定为零：

$$\Delta = (2DE - 4)^2 - 4D^2E^2 = 0$$

化简得 $-16DE + 16 = 0$ ，即 $DE = 1$ 。圆 $\odot Q$ 交坐标轴于 $B(D, 0)$ 及 $C(0, E)$ 。 $\triangle OBC$ 的面积为 $\frac{1}{2}|D||E| = \frac{1}{2}$ 。得证。

6.3 进阶命题：蒙日圆与垂直弦性质的反演

例题 6.3.1

已知曲线 $\Gamma: (x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + 16y^2$ ， O 为坐标原点。有两个过原点 O 的圆 $\odot C_1$ 与 $\odot C_2$ 均与曲线 Γ 相切，且 $\odot C_1$ 与 $\odot C_2$ 在 origin 正交。设 $\odot C_1$ 与 $\odot C_2$ 除原点 O 外的交点为 P 。求证：线段 OP 的长度为定值。

解 6.3.1. 设过原点的圆方程为 $x^2 + y^2 = Dx + Ey$ 。将其与 Γ 的方程联立，考察相切条件，得 $(Dx + Ey)^2 = 4x^2 + 16y^2$ 。整理得关于 x, y 的齐次二次方程：

$$(D^2 - 4)x^2 + 2DExy + (E^2 - 16)y^2 = 0$$

相切要求此二次齐次方程的判别式为零：

$$\Delta = (2DE)^2 - 4(D^2 - 4)(E^2 - 16) = 0$$

化简得 $16D^2 + 4E^2 = 64$ ，即 $4D^2 + E^2 = 16$ 。设 $\odot C_1, \odot C_2$ 的方程分别为 $x^2 + y^2 = D_1x + E_1y$ 与 $x^2 + y^2 = D_2x + E_2y$ 。两圆相切的条件为 $4D_1^2 + E_1^2 = 16$ 且 $4D_2^2 + E_2^2 = 16$ 。两圆在 origin 正交的条件为 $D_1D_2 + E_1E_2 = 0$ 。联立两圆方程，求交点 $P(x, y)$ 。令 $|OP|^2 = x^2 + y^2$ 。由两圆方程得 $D_1x + E_1y = |OP|^2$ 且 $D_2x + E_2y = |OP|^2$ 。运用克莱姆法则解得 x, y ，并代入 $x^2 + y^2 = |OP|^2$ 中，化简得：

$$|OP|^2 = \frac{(D_1E_2 - D_2E_1)^2}{(D_1 - D_2)^2 + (E_1 - E_2)^2}$$

利用恒等式及正交条件 $D_1D_2 + E_1E_2 = 0$ ，将分子和分母展开：

$$|OP|^2 = \frac{(D_1^2 + E_1^2)(D_2^2 + E_2^2)}{D_1^2 + E_1^2 + D_2^2 + E_2^2}$$

代入条件 $E_1^2 = 16 - 4D_1^2$ 与 $E_2^2 = 16 - 4D_2^2$, 以及正交导出的关系 $D_1^2 D_2^2 = E_1^2 E_2^2$, 进一步化简可得分子与分母均含有公因式 $32 - 3(D_1^2 + D_2^2)$. 约去该公因式后得到 $|OP|^2 = \frac{16}{5}$. 因此线段 OP 的长为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

例题 6.3.2

已知曲线 $\Gamma: x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ (蔓叶线). 设 A, B 是 Γ 上异于原点 O 的两个动点, 且满足 $OA \perp OB$. 求证: $\triangle OAB$ 的外接圆恒过一个异于原点的定点.

解 6.3.2. 设直线 OA 的方程为 $y = kx$, 则 OB 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x$. 代入曲线 Γ 求点 A, B 坐标. 对点 A , 得 $x^3 + k^2x^3 - k^2x^2 = 0$, 解得 $x_A = \frac{k^2}{1+k^2}$, $y_A = \frac{k^3}{1+k^2}$. 同理, 将 k 替换为 $-\frac{1}{k}$ 得 $x_B = \frac{1}{1+k^2}$, $y_B = -\frac{1}{k(1+k^2)}$. 设 $\triangle OAB$ 外接圆方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$. 代入点 A 坐标并除以 $\frac{k^2}{1+k^2}$ 得 $k^2 + D + Ek = 0$. 代入点 B 坐标得 $-\frac{1}{k^2} + D - \frac{E}{k} = 0$, 即 $Dk^2 - Ek = -1$. 两式相加消去 E 得 $D(1+k^2) = -(1+k^2)$, 由此解得 $D = -1$ 及 $E = \frac{1-k^2}{k}$. 外接圆方程为 $x^2 + y^2 - x + \frac{1-k^2}{k}y = 0$. 令含有参数的项 $y = 0$, 得 $x^2 - x = 0$. 解得异于原点的定点为 $(1, 0)$.

6.4 离心率、极点与极线的反演表示

例题 6.4.1

已知曲线 $\Gamma: (x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ (心脏线), O 为坐标原点. 过原点 O 作任意一条不与 y 轴重合的直线, 交曲线 Γ 于 A, B 两点. 求证: 线段 AB 的长度为定值 4.

解 6.4.1. 设直线方程为 $y = kx$. 代入曲线 Γ 方程, 得 $(x^2 + k^2x^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + k^2x^2)$. 由于交点异于原点, 提取公因式 x^2 并化简得 $[x(1+k^2) + 2]^2 = 4(1+k^2)$. 开平方后解出两交点的横坐标:

$$x_A = \frac{-2 + 2\sqrt{1+k^2}}{1+k^2}, \quad x_B = \frac{-2 - 2\sqrt{1+k^2}}{1+k^2}$$

线段长度 $|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_A - x_B| = \sqrt{1+k^2} \left| \frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+k^2} \right| = 4$.

极性变换与反演能够反映极点与极线中深刻的调和共轭性质。

例题 6.4.2

已知曲线 $\Gamma_1: (x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2) + 2y^2 = 0$ 以及圆 $\Gamma_2: x^2 + y^2 - x = 0$. 过原点 O 作任意一条射线, 交 Γ_1 于 A, B 两点, 交 Γ_2 于 Q 点. 求证: 点 Q 恒为线段 AB 的中点.

解 6.4.2. 设射线方程为 $y = kx$ ($x > 0$). 将射线代入圆 Γ_2 方程得 $x(1+k^2) = 1$, 解得 $x_Q = \frac{1}{1+k^2}$. 将其代入 Γ_1 方程, 提取非零因子后得关于横坐标的方程 $x^2(1+k^2)^2 - 2x(1+k^2) + 2k^2 = 0$. 由韦达定理, 交点 A, B 的横坐标之和为 $x_A + x_B = \frac{2}{1+k^2}$. 显然满足 $x_A + x_B = 2x_Q$, 结合三点共射线的条件, 可得结论成立. 此性质实为圆锥曲线极点、极线与截线所构成的调和共轭线段经反演后的同构表现。

对于任意离心率 $e > 0$, 帕斯卡蜗牛线族 $\Gamma_e: (x^2 + y^2 + ex)^2 = x^2 + y^2$ 中过极点的弦长恒为常数。设截线 $y = kx$, 代入化简后得 $[x(1 + k^2) + e]^2 = 1 + k^2$, 解出两交点横坐标之差, 并结合弦长公式计算可得 $|AB| = 2$, 此结果不受离心率参数 e 的影响。

6.5 射影几何定理的反演表示

反演不仅适用于度量性质的推广, 对于射影几何中的结合关系(如共点、共线)也能建立对应结构。

以帕斯卡定理为例: 圆锥曲线上内接六边形对边延长线的三个交点共线。通过选定特定反演中心, 双曲线反演生成双纽线 $\Gamma: (x^2 + y^2)^2 = 4xy$ 。原图形中的割线反演为过原点的圆, 三点共线反演为四点共圆。由此得出结论: 在 Γ 上取 6 个异于原点 O 的点构造 6 个过原点的圆, 其对位交点 P, Q, R 必与点 O 共圆。

同理, 结合极性变换(对偶原则), 将“点共线”转化为“线共点”, 可严格证明布里昂雄定理。针对彭赛列闭合定理中偏心两圆的交错折线问题, 通过选取特定的极限点作为反演中心进行莫比乌斯变换, 可将偏心圆映射为同心圆, 将复杂的边长动态变化转化为静态的旋转对称性证明。

6.6 隐蔽的反演命题: 弗雷歇定理与中点轨迹

为增加问题的代数复杂度与隐蔽性, 命题常采用弗雷歇定理或弦中点轨迹进行包装。

例题 6.6.1

已知曲线 $\Gamma: 12x^3 + 12xy^2 + 3x^2 + 4y^2 = 0$ 。过原点 O 作两条互相垂直的直线, 分别交 Γ 于异于原点的两点 A, B 。求证: $\triangle OAB$ 的外接圆恒过一定点。

解 6.6.1. 设 OA 方程为 $y = kx$, OB 方程为 $y = -\frac{1}{k}x$ 。代入 Γ 并降次, 解得 $x_A = -\frac{3+4k^2}{12(1+k^2)}$, $y_A = -\frac{k(3+4k^2)}{12(1+k^2)}$ 。利用对称性得 $x_B = -\frac{3k^2+4}{12(k^2+1)}$, $y_B = -\frac{3k^2+4}{12k(k^2+1)}$ 。设外接圆方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$ 。代入 A, B 坐标并消元, 化简可解得关于 D, E 的线性方程组。其中 $D + Ek = \frac{3+4k^2}{12}$ 与 $Dk^2 - Ek = \frac{3k^2+4}{12}$ 。两式相加消去 E 项, 得 $D(1+k^2) = \frac{7(1+k^2)}{12}$, 即 $D = \frac{7}{12}$ 。令含参项 $y = 0$, 解得外接圆恒过的定点为 $(-\frac{7}{12}, 0)$ 。

例题 6.6.2

已知曲线 $\Gamma: (x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) - 2y^2 = 0$ 。过原点 O 的直线 l 交 Γ 于两点 A, B , 设中点为 M 。求 M 的轨迹。

解 6.6.2. 设直线 l 方程为 $y = kx$ 。代入 Γ 方程, 化简上述四次方程可得一元二次方程: $(1+k^2)^2x^2 + 2(1+k^2)x - 2k^2 = 0$ 。由韦达定理, 中点横坐标 $x_M = \frac{-1}{1+k^2}$, 纵坐标 $y_M = \frac{-k}{1+k^2}$ 。消除参数 k , 计算 $x_M^2 + y_M^2 = \frac{1}{1+k^2} = -x_M$ 。整理得轨迹方程为 $x^2 + y^2 + x = 0$ (除去原点)。该结果本质上体现了反演空间中极线与圆的同构对应。

6.7 复平面上的反演变换

在复平面 \mathbb{C} 中, 取单位圆为反演基准, 坐标 (x, y) 在复反演映射下可表达为极简的代数形式:

$$w = \frac{1}{\bar{z}}$$

广义圆与直线的统一方程 $Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$ 在经过上述映射后, 化为 $Cw\bar{w} + B\bar{w} + \bar{B}w + A = 0$ 。二次项系数 A 与常数项 C 发生了位置互换, 充分展现了复数域中反演对称的代数结构特征。

例题 6.7.1

已知非零复数 z_1, z_2 满足方程 $z\bar{z} = z + \bar{z}$ 。设复数 z_3 满足 $\frac{2}{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ 。关于 z_1, z_2, z_3 的论断如下: A. 复数 z_3 必定满足方程 $z\bar{z} = z + \bar{z}$

B. $\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1|} = \frac{|z_2 - z_3|}{|z_2|}$

C. $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} \geq \frac{2}{|z_3|}$

D. $\frac{1}{|z_1|^2} + \frac{1}{|z_2|^2} \geq \frac{2}{|z_3|^2}$

判断上述论断的正确性。

解 6.7.1. 将原方程 $z\bar{z} = z + \bar{z}$ 两边同除以 $z\bar{z}$, 得 $\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z} = 1$ 。转化至反演平面中, 令 $w = \frac{1}{\bar{z}}$, 方程化为 $w + \bar{w} = 1$, 即 $\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}$ 。该方程在 w 平面上表示一条垂直于实轴的直线。由调和平均条件 $\frac{2}{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ 可知 $w_3 = \frac{w_1 + w_2}{2}$, 即 w_3 为线段 $w_1 w_2$ 的中点。

对于论断 A: 由于 w_1, w_2 均在直线 $\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}$ 上, 其所在的中点 w_3 必满足 $\operatorname{Re}(w_3) = \frac{1}{2}$ 。映射回原复平面, z_3 满足方程 $z\bar{z} = z + \bar{z}$ 。A 正确。

对于论断 B: 将距离公式转化至 w 平面。 $\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1|} = \frac{|w_3 - w_1|/|w_1 w_3|}{1/|w_1|} = \frac{|w_3 - w_1|}{|w_3|}$ 。同理等式右侧为 $\frac{|w_3 - w_2|}{|w_3|}$ 。由中点性质可知 $|w_3 - w_1| = |w_3 - w_2|$, 故等式成立。B 正确。

对于论断 C: 在 w 平面应用三角不等式。由于 $w_1 + w_2 = 2w_3$, 取模长得 $|w_1| + |w_2| \geq |w_1 + w_2| = 2|w_3|$ 。将其还原为原坐标表达即为 $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} \geq \frac{2}{|z_3|}$ 。C 正确。

对于论断 D: 由复数运算的平行四边形法则, $|w_1 - w_2|^2 + |w_1 + w_2|^2 = 2(|w_1|^2 + |w_2|^2)$ 。代入 $w_1 + w_2 = 2w_3$ 并利用 $|w_1 - w_2|^2 \geq 0$ 放缩可得 $4|w_3|^2 \leq 2(|w_1|^2 + |w_2|^2)$ 。还原后不等式成立。D 正确。

例题 6.7.2

已知曲线 $\Gamma: (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 。设过坐标原点 O 的动圆 C 与 Γ 相切。若圆 C 分别交直线 $y = x$ 与 $y = -x$ 于异于原点的 M, N 两点, 求证: $\triangle OMN$ 的面积为定值。

解 6.7.2. 设圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$ 。将该方程与直线 $y = x$ 联立, 可得交点纵横坐标满足 $2x^2 + (D + E)x = 0$ 。若交点 M 异于原点, 则 $x_M = y_M = -\frac{D+E}{2}$ 。由此可得线段长度 $|OM| = \frac{|D+E|}{\sqrt{2}}$ 。同理, 将其与直线 $y = -x$ 联立, 解得交点 N 满足 $x_N = -\frac{D-E}{2}, y_N = \frac{D-E}{2}$, 线段长度 $|ON| = \frac{|D-E|}{\sqrt{2}}$ 。因直线 $y = x$ 与 $y = -x$ 垂直, $\triangle OMN$ 面积表达为 $S = \frac{1}{2}|OM||ON| = \frac{1}{4}|D^2 - E^2|$ 。探讨相切条件: 将圆 C 的代数式代入 Γ 中消去高次项得 $(-Dx - Ey)^2 = x^2 - y^2$ 。重新排列为齐次形式

$(D^2-1)x^2+2DExy+(E^2+1)y^2=0$ 。若相切则此式判别式等于零,即 $(2DE)^2-4(D^2-1)(E^2+1)=0$ 。化简可得方程约束 $D^2-E^2=1$ 。将该约束代入面积公式中,得到 $S=\frac{1}{4}$, 该面积恒为定值。(本题几何背景为等轴双曲线切线交其渐近线所成三角形面积定值性质的反演)。

例题 6.7.3

已知曲线 $\Gamma: x^3+xy^2-y^2=0$ 。设有两个过原点 O 的动圆 C_1, C_2 均与 Γ 相切, 且 C_1 与 C_2 在 origin 处正交。若 P 为两圆除原点外的交点, 求证: 点 P 恒在一个定圆上。

解 6.7.3. 设切圆一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$ 。代入 Γ 提取共因式后化为 $Dx^2+Exy+y^2=0$ 。相切要求判别式等于零, 即满足 $4D=E^2$ 。设圆 C_1, C_2 的对应系数为 (D_1, E_1) 与 (D_2, E_2) 。两圆在 origin 正交等效于一次项系数内积 $D_1D_2+E_1E_2=0$ 。代入切线约束条件后得 $\frac{E_1^2E_2^2}{16}+E_1E_2=0$ 。排除退化情形, 恒得 $E_1E_2=-16$ 。由方程作差联立解交点 $P(x, y)$, 得到直线约束 $y=-\frac{D_1-D_2}{E_1-E_2}x=-\frac{E_1+E_2}{4}x$ 。利用 $E_1E_2=-16$ 及和式构建一元二次方程, 可知 $E_1^2=-\frac{4y}{x}E_1+16$ 。将 $D_1=\frac{E_1^2}{4}$ 回代至 C_1 方程中并将二次形式带入替换, 方程变为 $x^2+y^2+\frac{1}{4}(-\frac{4y}{x}E_1+16)x+E_1y=0$ 。展开并合并同类项, 含参项 E_1 相互抵消, 恒等化简为 $x^2+y^2+4x=0$ 。该定圆即为点 P 之轨迹。

例题 6.7.4

已知曲线 $\Gamma: 27x^2+36y^2+6x(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2=0$ 。设过坐标原点 O 的动圆 C 与 Γ 相切, 且线段 OM 为圆 C 的一条直径。求证: 点 M 的轨迹是一个圆。

解 6.7.4. 设动圆 C 方程为 $x^2+y^2-Dx-Ey=0$ 。因 OM 为其直径且过原点, 端点 M 坐标恰为 (D, E) 。代入曲线 Γ 可得关于 x, y 的二次齐次形式: $(27+6D-D^2)x^2+(6E-2DE)xy+(36-E^2)y^2=0$ 。结合相切条件判别式设为零, 即 $(6E-2DE)^2-4(27+6D-D^2)(36-E^2)=0$ 。提取公因式并逐步展开, 可消去 D^2E^2 与 DE^2 等高次相互干扰项。化简后余项构成 $36E^2+36D^2-216D-972=0$ 。对其同除以 36, 即得变量结构关系 $D^2+E^2-6D-27=0$ 。将坐标 (x_M, y_M) 替代 (D, E) , 可知点 M 的轨迹为圆 $x^2+y^2-6x-27=0$ 。(几何背景: 椭圆焦点对切线垂足的轨迹为对应辅圆的反演等价表示)。

例题 6.7.5

定圆 $C_1: x^2+y^2+4x=0$ 。对于 C_1 上任一异于原点 O 的点 $P(x_0, y_0)$, 作经过 O 与 P 且同曲线 $\Gamma: x^3+xy^2-y^2=0$ 相切的两圆, 设切点为 A, B 。求证: $\triangle OAB$ 的外接圆恒过一定点。

解 6.7.5. 构建经过 O, P 并同 Γ 相切之圆方程 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$ 。根据例题已有结论, 其相切约束仍为 $4D=E^2$ 。由经过点 $P(x_0, y_0)$, 将已知定圆约束 $x_0^2+y_0^2=-4x_0$ 带入切圆方程化简得 $(D-4)x_0+Ey_0=0$ 。代入 D 表达式构成二次方程 $(E^2-16)x_0+4Ey_0=0$ 。其两根 E_1, E_2 由韦达定理给定 $E_1E_2=-16$ 及 $E_1+E_2=-\frac{4y_0}{x_0}$ 。求解具体切点坐标, 原齐次方程 $Dx^2+Exy+y^2=0$ 等效于直线 $y=-\frac{E}{2}x$ 。将其与切圆方程联立解得切点横纵坐标分别为 $x=\frac{E^2}{E^2+4}, y=\frac{-2E}{E^2+4}$ 。计算可知

平方项满足 $x_A^2 + y_A^2 = \frac{E_1^2}{E_1^2 + 4} = x_A$ 。由此可知点 A 的坐标无条件满足方程 $x^2 + y^2 - x = 0$ 。同理切点 B 坐标也满足该方程。由于原点 O 显然同置其上, 三点唯一的共圆外接方程即为 $x^2 + y^2 - x = 0$ 。该外接圆恒常穿过定点 $(1, 0)$ 。

例题 6.7.6

曲线 $\Gamma: x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ 。圆 C 过原点 O 与定点 $F(4, 0)$, 并且同 Γ 在另两点 A, B 相交。求证: 直线 OA 与 OB 的斜率乘积为常数。

解 6.7.6. 由动圆 C 经过点 $O(0, 0)$ 与 $F(4, 0)$ 两点, 其圆心必位于直线 $x = 2$ 上。设圆 C 的一般方程为 $x^2 + y^2 - 4x + Ey = 0$ 。将圆 C 与曲线 Γ 联立以求相交弦属性。对于 Γ 方程可化为 $x(x^2 + y^2) = y^2$ 。将圆 C 之二次结构形式代入, 得到 $x(4x - Ey) = y^2$, 展开得 $4x^2 - Exy - y^2 = 0$ 。两边同除以 x^2 转化为关于直线斜率 $k = y/x$ 的方程, 得到 $k^2 + Ek - 4 = 0$ 。该一元二次方程的两根 k_A, k_B 即分别代表交点直线 OA 与 OB 之斜率。由韦达定理直观获取两根之积 $k_A k_B = -4$ 。因所得之积无涉变动参数 E , 证明斜率乘积恒等于常值 -4 。该题运用了抛物线焦弦端点对顶点的反演投射属性构造。

综上, 复平面反演为许多经典几何问题提供了降维工具。例如托勒密定理, 通过将反演中心置于圆内接四边形的一个顶点, 圆被反演变换为一条直线, 定理在反演平面中直接退化为共线三点之间的距离线段相加定理 $|B'D'| = |B'C'| + |C'D'|$, 代入距离反演公式 $|w_X - w_Y| = \frac{|z_X - z_Y|}{|z_X||z_Y|}$ 并整理即可得证。上述证明避免了传统几何方法中繁复的辅助线构造与推导, 体现了变换群视角下的结构优势。

题目: 曲线 $\Gamma: x^3 + xy^2 - 3x^2 + 2y^2 = 0$ 。动圆 C 过原点 $O(0, 0)$ 与定点 $F(4, 0)$, 并且与曲线 Γ 在另两点 A, B 相交。求证: 直线 OA 与 OB 的斜率乘积为常数。

证明: 由于动圆 C 经过 $O(0, 0)$ 和 $F(4, 0)$, 其圆心必然在直线 $x = 2$ 上。设动圆 C 的一般方程为 $x^2 + y^2 - 4x + Ey = 0$ 。将其改写为 $x^2 + y^2 = 4x - Ey$, 并代入曲线 Γ 的方程中。将 Γ 变形为 $x(x^2 + y^2) - 3x^2 + 2y^2 = 0$, 代入后得到:

$$x(4x - Ey) - 3x^2 + 2y^2 = 0$$

展开并合并同类项:

$$4x^2 - Exy - 3x^2 + 2y^2 = 0 \implies x^2 - Exy + 2y^2 = 0$$

两边同除以 x^2 , 化为关于直线斜率 $k = \frac{y}{x}$ 的一元二次方程:

$$2k^2 - Ek + 1 = 0$$

设直线 OA, OB 的斜率分别为 k_A, k_B , 它们即为该方程的两个实根。由韦达定理可知, 两根之积为:

$$k_A k_B = \frac{1}{2}$$

因为该乘积与动参数 E 无关, 故证明直线 OA 与 OB 的斜率乘积恒为常数 $\frac{1}{2}$ 。

题目二: 证明斜率和为定值(椭圆弦性质的转化) 题目: 曲线 $\Gamma: x^3 + xy^2 - x^2 - 2y^2 = 0$ 。动圆 C 过原点 $O(0,0)$ 与定点 $P(0,2)$, 并且与曲线 Γ 相交于另外两点 A, B 。求证: 直线 OA 与 OB 的斜率之和为定值。

证明: 动圆 C 经过 $O(0,0)$ 和 $P(0,2)$, 说明其圆心在直线 $y=1$ 上。设动圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 + Dx - 2y = 0$ 。将其改写为 $x^2 + y^2 = 2y - Dx$ 。把 Γ 变形为 $x(x^2 + y^2) - x^2 - 2y^2 = 0$, 并将上式代入:

$$x(2y - Dx) - x^2 - 2y^2 = 0$$

展开得到:

$$2xy - Dx^2 - x^2 - 2y^2 = 0 \implies -2y^2 + 2xy - (D+1)x^2 = 0$$

两边同除以 $-x^2$, 转化为关于斜率 $k = \frac{y}{x}$ 的方程:

$$2k^2 - 2k + (D+1) = 0$$

该方程的两根 k_A, k_B 对应直线 OA 与 OB 的斜率。由韦达定理可知, 两根之和为:

$$k_A + k_B = -\frac{-2}{2} = 1$$

定值与动参数 D 无关, 故直线 OA 与 OB 的斜率之和恒为 1。

例题 6.7.7

已知曲线 $\Gamma: x^3 + xy^2 + 2x^2 + xy + y^2 = 0$ 。动圆 C 过原点 $O(0,0)$ 与定点 $P(-1,1)$, 并且与曲线 Γ 在另外两点 A, B 相交。求证: 直线 OA 与 OB 的斜率满足关系式 $k_A k_B + k_A + k_B$ 为常数, 并求出该常数的值。

解 6.7.7. 设经过原点 $O(0,0)$ 的动圆 C 的一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$ 。因为动圆 C 经过定点 $P(-1,1)$, 将其坐标代入圆的方程可得:

$$(-1)^2 + 1^2 - D + E = 0$$

化简得到参数 D 与 E 的约束关系:

$$E - D = -2$$

现将动圆方程改写为 $x^2 + y^2 = -Dx - Ey$ 。同时, 将曲线 Γ 的方程提取公因式变形为:

$$x(x^2 + y^2) + 2x^2 + xy + y^2 = 0$$

将圆的二次形式代入 Γ 中以求交点性质:

$$x(-Dx - Ey) + 2x^2 + xy + y^2 = 0$$

展开并合并同类项：

$$-Dx^2 - Exy + 2x^2 + xy + y^2 = 0$$

$$(2-D)x^2 + (1-E)xy + y^2 = 0$$

在 $x \neq 0$ 的前提下（即交点不在 y 轴上），等式两边同除以 x^2 ，转化为关于交点与原点连线斜率 $k = \frac{y}{x}$ 的一元二次方程：

$$k^2 + (1-E)k + (2-D) = 0$$

该方程的两个根 k_A, k_B 即为直线 OA 与 OB 的斜率。由韦达定理可得：

$$k_A + k_B = -(1-E) = E-1$$

$$k_A k_B = 2-D$$

我们需要求证的代数式为 $k_A k_B + k_A + k_B$ ，代入上述结果：

$$k_A k_B + k_A + k_B = (2-D) + (E-1) = 1 + (E-D)$$

将前面得到的圆系约束条件 $E-D = -2$ 代入上式：

$$k_A k_B + k_A + k_B = 1 + (-2) = -1$$

由于最终结果与动圆的参数 D, E 无关，故证明该组合式恒为常数 -1 。

例题 6.7.8

已知曲线 $\Gamma: x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ 。动直线 L 不经过原点 $O(0,0)$ ，且与曲线 Γ 交于 A, B, C 三点。记直线 OA, OB, OC 的斜率分别为 k_A, k_B, k_C 。若这三条直线的斜率满足条件：

$$k_A + k_B + k_C + k_A k_B k_C = 2$$

求证：动直线 L 恒过一个定点，并求出该定点坐标。

解 6.7.8. 设不过原点的动直线 L 的方程为截距一般式 $ux + vy = 1$ 。将曲线 Γ 的方程变形提取公因式，得到 $x(x^2 + y^2) = y^2$ 。为了寻找交点 A, B, C 与原点连线的斜率属性，我们将直线 L 的方程代入 Γ 中进行齐次化（Homogenization）构造。将右侧的 y^2 乘以 1（即 $ux + vy$ ）：

$$x(x^2 + y^2) = y^2(ux + vy)$$

展开并整理，得到一个关于 x, y 的三次齐次方程：

$$x^3 + xy^2 - uxy^2 - vy^3 = 0$$

$$x^3 + (1-u)xy^2 - vy^3 = 0$$

因为直线 L 不经过原点，且交点显然不全在 y 轴上（可设 $x \neq 0$ ）。我们在等式两边同除以 x^3 ，并令斜率 $k = \frac{y}{x}$ ，即可得到一个关于斜率 k 的一元三次方程：

$$1 + (1 - u)k^2 - vk^3 = 0$$

改写为标准形式：

$$vk^3 + (u - 1)k^2 - 1 = 0$$

由题意，该方程的三个根即为直线 OA, OB, OC 的斜率 k_A, k_B, k_C 。请注意，该方程中一次项 k 的系数为 0。根据一元三次方程的韦达定理（Vieta's formulas），我们可以提取出根与系数的关系：

$$k_A + k_B + k_C = -\frac{u-1}{v} = \frac{1-u}{v}$$

$$k_A k_B k_C = -\frac{-1}{v} = \frac{1}{v}$$

已知题目给定的斜率约束条件为：

$$k_A + k_B + k_C + k_A k_B k_C = 2$$

将韦达定理的结果代入上式：

$$\frac{1-u}{v} + \frac{1}{v} = 2$$

合并同分母的分子：

$$\frac{2-u}{v} = 2 \implies 2-u = 2v$$

移项整理，得到参数 u 和 v 之间的线性约束关系：

$$u + 2v = 2$$

等式两边同除以 2，化为：

$$u\left(\frac{1}{2}\right) + v(1) = 1$$

将此时的 u, v 结构与我们最初设定的动直线方程 $ux + vy = 1$ 进行对比。这说明，无论参数 u 和 v 如何变动，只要它们满足上述约束，当 $x = \frac{1}{2}$ 且 $y = 1$ 时，等式 $ux + vy = 1$ 将恒等成立。因此，证明动直线 L 恒过定点 $(\frac{1}{2}, 1)$ 。

题目背后的“反演透视”这道题的设计完全贯彻了你提到的**“圆过定点 \rightarrow 直线过定点”**的跨维度映射：在原像平面（Conic Plane）中：存在一条抛物线 $y^2 = x$ 。我们让一个动圆 C 经过原点 $O(0, 0)$ ，并且该圆与抛物线相交于原点及另外三点。由于某种极其对称的几何约束（在这里表现为斜率方程），这个动圆必定会经过另一个定点 $(2, 1)$ 。反演操作（Inversion）：我们以原点 O 为反演中心进行反演变换。在目标平面（Problem Plane）中：抛物线反演成了题目中的三次曲线 $\Gamma: x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ 。过原点的动圆，瞬间被“拉直”，反演成了题目中不过原点的动直线 L 。原像中圆所经过的定点 $(2, 1)$ ，经过反演坐标变换 $X = \frac{x}{x^2+y^2}, Y = \frac{y}{x^2+y^2}$ 后，完美地变成了直线 L 所经过的定点 $(\frac{1}{2}, 1)$ 。你是否觉得，这种利用代数里的“齐次化”来处理几何上的“反演变换”，有一种将复杂降维打击的数学暴力美学？

第七章 杂题

例题 7.0.1 浙江风味圆锥曲线

椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$. 斜率为正的直线 l 与椭圆 C_1 和抛物线 C_2 均恰有一个公共点, 分别为点 A, B , 椭圆 C_1 交抛物线 C_2 于点 C, D .

(1) 若直线 CD 经过椭圆 C_1 的右焦点 F , 求 p 的值;

(2) 设直线 CD 交直线 l 于点 E , 求 $\triangle AOE$ 面积的最小值.

解 7.0.1. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 其中 $c = \sqrt{4-3} = 1$, 即 $F(1, 0)$. 由对称性可知, 椭圆 C_1 与抛物线 $C_2: y^2 = 2px$ 的交点 C, D 所在的直线 CD 垂直于 x 轴. 若直线 CD 经过右焦点 $F(1, 0)$, 则点 C, D 的横坐标必定为 $x = 1$. 将 $x = 1$ 代入椭圆 C_1 的方程中, 解得 $y^2 = \frac{9}{4}$. 由于点 C, D 亦在抛物线 C_2 上, 将 $x = 1, y^2 = \frac{9}{4}$ 代入抛物线方程 $y^2 = 2px$ 中, 得 $\frac{9}{4} = 2p$, 解得 $p = \frac{9}{8}$.

对于 $\triangle AOE$ 面积最小值的求解, 首先对坐标系作伸缩变换, 令 $x = 2X, y = \sqrt{3}Y$. 在此仿射变换下, 椭圆 C_1 转化为单位圆 $C'_1: X^2 + Y^2 = 1$, 抛物线 C_2 转化为 $3Y^2 = 4pX$. 令参量 $p' = \frac{2p}{3}$, 则抛物线方程变为 $C'_2: Y^2 = 2p'X$. 直线 l 依然是 C'_1 和 C'_2 的公切线, 设其交 X 轴于点 $T(t, 0)$. 由伸缩变换的性质, 原面积与新面积的关系满足 $S_{\triangle AOE} = 2\sqrt{3}S_{\triangle A'O'E'}$.

为建立公切线的统一方程, 在此引入并证明二次曲线的切线对引理: 设二次曲线方程为 $S(x, y) = 0$, 曲线外一点 $P_0(x_0, y_0)$. 记将点 P_0 代入曲线方程所得的常数值为 S_{11} , 点 P_0 对应的极线方程为 $T(x, y) = 0$. 则从 P_0 引向该二次曲线的两条切线所构成的整体方程为 $T^2 = S \cdot S_{11}$.

证法一 (齐次坐标与参数方程法): 将二次曲线方程写为齐次矩阵形式 $S = \mathbf{X}^T M \mathbf{X} = 0$, 其中 $\mathbf{X} = (x, y, 1)^T$, M 为对称矩阵. 设已知点坐标对应的向量为 $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, 1)^T$, 则 $S_{11} = \mathbf{X}_0^T M \mathbf{X}_0$, 极线 $T = \mathbf{X}_0^T M \mathbf{X}$. 设切线上任意一点为 \mathbf{X} , 过 \mathbf{X}_0 与 \mathbf{X} 的直线上任意一点可表示为 $\mathbf{X}_Q = \mathbf{X} + \lambda \mathbf{X}_0$. 因该直线与二次曲线相切, 代入曲线方程得 $(\mathbf{X} + \lambda \mathbf{X}_0)^T M (\mathbf{X} + \lambda \mathbf{X}_0) = 0$. 展开并利用矩阵对称性化简, 可得关于 λ 的一元二次方程 $\lambda^2 S_{11} + 2\lambda T + S = 0$. 由相切条件可知该直线与曲线仅有一个交点, 即该方程具有唯一实数解, 故其判别式 $\Delta = (2T)^2 - 4S_{11}S = 0$. 整理化简即得 $T^2 = S \cdot S_{11}$.

证法二 (过交点的曲线系法): 设从 P_0 引出的两条切线与曲线 $S = 0$ 切于点 A, B , 则直线 AB 即为切点弦 (极线), 其方程为 $T(x, y) = 0$. 这两条切线在代数上构成一退化的二次曲线, 且与原曲线 $S = 0$ 共用交点 A, B 并在此处相切. 根据曲线系理论, 与 $S = 0$ 在其与 $T = 0$ 交点处相切的二次曲线系可表示为 $S(x, y) + \lambda T(x, y)^2 = 0$. 由于切线对图形必然经过公共端点 $P_0(x_0, y_0)$, 将 P_0 的坐标代入该曲线系方程. 已知将极点坐标代入极线方程所得的值等于极点代入原曲线方程的值, 即 $T(x_0, y_0) = S_{11}$, 代入后方程化为 $S_{11} + \lambda S_{11}^2 = 0$. 因 P_0 在曲线外, 有 $S_{11} \neq 0$, 解得 $\lambda = -\frac{1}{S_{11}}$. 将参量 λ 代回曲线系方程, 得 $S(x, y) - \frac{1}{S_{11}} T(x, y)^2 = 0$, 同乘 S_{11} 并移项, 即证得 $T^2 = S \cdot S_{11}$.

由上述引理, 设点 $T(t, 0)$, 由于 l 为公切线, 从 T 点引出的两条切线满足如下方程: 对于单位圆 C'_1 , 代入公式可得方程为 $(tX - 1)^2 = (t^2 - 1)(X^2 + Y^2 - 1)$ 。对于抛物线 C'_2 , 其极线为 $-p'(X + t) = 0$, 代入点 T 得 $S_{11} = -2p't$, 其切线对方程为 $(-p'(X + t))^2 = (-2p't)(Y^2 - 2p'X)$, 化简得 $p'(X + t)^2 = -2t(Y^2 - 2p'X)$ 。因直线 l 是公切线且 T 位于 X 轴上, 两方程必然表示同一对直线。提取两式中 X^2 和 Y^2 的系数并令其成比例, 圆切线对方程化简后系数比为 $\frac{1}{1-t^2}$, 抛物线切线对方程化简后系数比为 $\frac{p'}{-2t}$ 。令两式相等, 解得 $p' = \frac{2t}{1-t^2}$ 。

直线 CD 为交点弦, 联立圆 $X^2 + Y^2 = 1$ 与抛物线 $Y^2 = 2p'X$, 消去 Y 可得交点横坐标 X_0 满足 $X_0^2 + 2p'X_0 - 1 = 0$, 解得 $p' = \frac{1-X_0^2}{2X_0}$ 。将两个关于 p' 的表达式联立, 得 $\frac{1-X_0^2}{2X_0} = \frac{2t}{1-t^2}$, 交叉相乘并展开重组得 $(X_0 + t)^2 = (1 - X_0t)^2$ 。由几何关系可知交点 T 在抛物线左侧, 即 $t < 0$, 且交点 $X_0 \in (0, 1)$, 故开方取合理符号解得 $t = \frac{X_0+1}{X_0-1}$ 。

在变换后的图形中, 设圆心为 $O'(0, 0)$, A' 为切点, 则 $O'A' \perp A'E'$ 且半径 $|O'A'| = 1$ 。在直角三角形 $\triangle O'A'E'$ 中, 由勾股定理可得其面积的平方为 $(S_{\triangle A'O'E'})^2 = \frac{1}{4}|O'A'|^2|A'E'|^2 = \frac{1}{4} \times 1^2 \times (|O'E'|^2 - |O'A'|^2) = \frac{1}{4}(X_0^2 + Y_0^2 - 1)$ 。因交点 $E'(X_0, Y_0)$ 位于公切线上, 必然满足圆的切线对方程, 代入整理得 $X_0^2 + Y_0^2 - 1 = \frac{(tX_0-1)^2}{t^2-1}$ 。将 $t = \frac{X_0+1}{X_0-1}$ 代入该式, 计算分子得 $tX_0 - 1 = \frac{X_0^2+1}{X_0-1}$, 计算分母得 $t^2 - 1 = \frac{4X_0}{(X_0-1)^2}$ 。代入面积公式化简得 $(S_{\triangle A'O'E'})^2 = \frac{(X_0^2+1)^2}{16X_0}$ 。

构造函数 $f(X_0) = \frac{(X_0^2+1)^2}{16X_0}$, 其中 $X_0 \in (0, 1)$ 。对其求导得 $f'(X_0) = \frac{16(X_0^2+1)(3X_0^2-1)}{256X_0^2}$ 。令 $f'(X_0) = 0$, 在区间 $(0, 1)$ 内解得唯一的驻点 $X_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。当 $X_0 \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时, $f'(X_0) < 0$, $f(X_0)$ 单调递减; 当 $X_0 \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 时, $f'(X_0) > 0$, $f(X_0)$ 单调递增。由此可知 $f(X_0)$ 在 $X_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 处取得最小值, 计算得 $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{9}$, 即 $S_{\triangle A'O'E'}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

根据仿射变换还原面积的几何倍数关系, 可得原三角形面积的最小值为 $S_{min} = 2\sqrt{3} \times S_{\triangle A'O'E'} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 。故 $\triangle AOE$ 面积的最小值为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 。