姓名：________________　座位号________________________________

**（在此试卷上答题无效）**

**绝密★启用前**

# 2023年普通高等学校招生全国统一考试

# 数学（理科）

**注意事项：**

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1．设集合 $A=\{x|x=3k+1，k\in \mathrm{Z}\}$， $B=\{x|x=3k+2，k\in \mathrm{Z}\}$， $U$ 为整数集，则

$C_U(A\cap B)=$

A． $\{x|x=3k，k\in \mathrm{Z}\}$　　B． $\{x|x=3k-1，k\in \mathrm{Z}\}$

B．C． $\{x|x=3k-1，k\in \mathrm{Z}\}$　　D． $\varnothing$

2-若复数 $(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2$，则 $a=$

A． $-1$　　B．0

C．1　　D．2

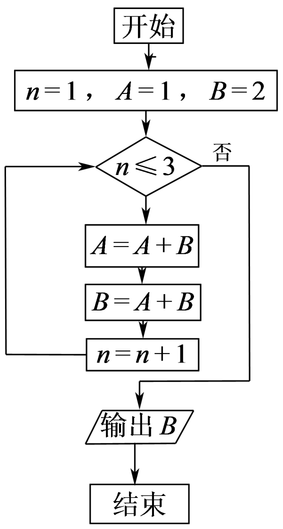
3．执行下面的程序框图，输出的 $B=$

A．21

B．34

C．55

D．89



4．向量$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，则$\cos<\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}，\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}>=$

A．$-\frac{1}{5}$　　B．$-\frac{2}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

5．已知数列$\{a_n\}$中，$S_n$为$\{a_n\}$前$n$项和，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=$

A．7　　B．9　　C．15　　D．20

6．有50人报名足球俱乐部，60人报名乒乓球俱乐部，结束70人报名足球或乒乓球俱乐部，若已知某人报足球俱乐部，则其报乒乓球，俱乐部的概率为

A．0.8　　B．0.4　　C．0.2　　D．0.1

7．“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\cos\alpha+\cos\beta=0$”的

A．充分条件但不是必要条件　　B．必要条件但不是充分条件

C．充要条件　　D．既不是充分条件也不是必要条件

8．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，其中一条渐近线与圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$交于$A$，$B$两点，则$|AB|=$

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

9．有五名志愿者参加社区服务，共服务星期六、星期天两天，每天从中任选两人参加服务，则两天中恰有1人连续参加两天服务的选择种数为

A．120　　B．60　　C．40　　D．30

10．已知$f(x)$为函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位所得函数，则$y=f(x)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$，交点个数为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

11．在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$AB=4$，$PC=PD=3$，$\angle PCA=45°$，则$\triangle PBC$的面积为

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$5\sqrt{2}$

12．已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$，$F_1$、$F_2$为两个焦点，$O$为原点，$P$为椭有圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则$||OP|=$

A．$\frac{2}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{30}}{2}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{35}}{2}$

**二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。**

13．若$y=(x-1)^2+ax+\sin(x+\frac{\pi}{2})$为偶函数，则$a=$__________.

14．设 $x$，$y$ 满足约束条件 $\begin{cases}-2x+3y\leqslant 3\\ 3x-2y\leqslant 3\\ x+y=1\end{cases}$ ，设 $z=3x+2y$，则 $z$ 的最大值为__________.

15．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$E$，$F$ 分别为 $CD$，$A_1B_1$ 的中点，则以 $EF$ 为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为__________.

16．已知△$ABC$ 中，$\angle BAC=60°$，$AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，$AD$ 平分 $\angle BAD$ 交 $BC$ 于点 $D$，则 $AD=$__________.

**四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据情况作答。**

**（一）必答题（60 分）**

17．（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，设 $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项和，$2S_n=na_n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

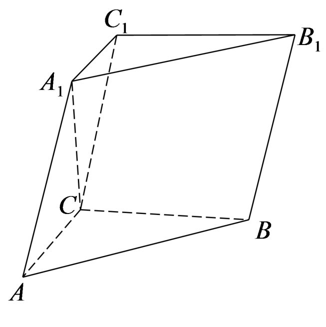
（2）求数列 $\{\frac{a_n+1}{2^n}\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

18．（12 分）

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$A_1C\perp$ 底面 $ABC$，$\angle ACB=90°$，$A_1$ 到平面 $BCC_1B_1$，的距离为 1.

（1）证明：$AC=A_1C$；

（3）若直线 $AA_1$ 与 $BB_1$ 距离为 2，求 $AB_1$ 与平面 $BCC_1B_1$ 所成角的正弦值.



19．（12 分）

为探究某药物对小鼠的生长作用，将 40 只小鼠均分为两组，分别为对照组（不药物）和实验组（加药物）．

（1）设其中两只小鼠中对照组小鼠数目为 $X$，求 $X$ 的分布到和数学期望；

（2）测得 40 只小鼠体重如下（单位：g）：（已按从小到大排好）

对照组：17.3　18.4　20.1　20.4　21.5　23.2　24.6　24.8　25.0　25.4

26.1　26.3　26.4　26.5　26.8　27.0　27.4　27.5　27.6　28.3

实验组：5.4　6.6　6.8　6.9　7.8　8.2　9.4　10.0　10.4　11.2

14.4　17.3　19.2　20.2　23.6　23.8　24.5　25.1　25.2　26.0

（i）求 40 只小鼠体重的中位数 $m$，并完成下面 2×2 列联表：

| | $<m$ | $>m$ |
|---|---|---|
| 对照组 | | |
| 实验组 | | |

（ii）根据 2×2 列联表，能否有 95%的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用．

参考数据：

| $k_0$ | 0.10 | 0.05 | 0.010 |
|---|---|---|---|
| $p(k^2 \geqslant k_0)$ | 2.706 | 3.841 | 6.835 |

20．（12 分）

直线 $x-2y+1=0$ 与 $y^2=2px(p>0)$ 交于 $A$，$B$ 两点，$|AB|=4\sqrt{15}$．

（1）求 $P$ 的值；

（2）$F$ 为 $y^2=2px$ 的焦点，$M$，$N$ 为抛物线上的两点，且 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$，求△$MNF$ 面积的最小值．

21．（12 分）

已知 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．

（1）当 $a=8$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)<\sin 2x$，求 $a$ 的取值范围．

**（二）选考题：共 10 分。请考生第 22、23 题中选一道作答。如果多做，则按所做的第一题计分。**

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知 $p(2, 1)$，直线 $l$:$\begin{cases} x=2+t\cos\alpha, \\ 1+t\sin\alpha, \end{cases}$($t$为参数)，$l$ 与 $x$ 轴，$y$ 轴正半轴交于 $A$，$B$ 两点，

$|PA|\cdot|PB|=4$.

（1）求 $a$ 的值；

（2）以原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 $l$ 的极坐标方程.

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=2|x-a|-a$，$a>0$.

（1）解不等式 $f(x)<x$；

（2）若 $y=f(x)$ 与坐标轴围成的面积为 2，求 $a$.