华南师范大学附属中学2024届高三5月月考

数学

本试卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考号和座位号填写在答题卡指定区域内，并用 2B 铅笔填涂相关信息。

2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔涂黑答题卡上对应题目的答案标号；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在问卷上则答案无效。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡上各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合要求的。

1. 设常数$a\in\mathbb{R}$，集合$A=\{x|(x-1)(x-a)\geq 0\}$，$B=\{x|x\geq a-1\}$，若$A\cup B=\mathbb{R}$，则a的取值范围为(　　)

A.$(-\infty,2)$　　B.$(-\infty,2]$　　C.$(2,+\infty)$　　D.$[2,+\infty)$

2. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别为角A,B,C的对边，若$\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}=\dfrac{2}{\cos B\cos C}$，则$a=$（　　）

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C.1　　D.2

3. 在$0,1,2,3,4$中不重复地选取4个数字，共能组成(　　)个不同的四位数.

A.96　　B.18　　C.120　　D.84

4. “x_0是函数$f(x)$的一个极值点”是“$f(x)$在x_0处导数为0”的(　　)

A.充要条件　　B.充分不必要条件　　C.必要不充分条件　　D.既不充分也不必要条件

5. 已知复数z_1,z_2的模长为1，且$z_1+z_2=z_1z_2$，则z_1+z_2的值是

A.1　　B.-1　　C.i　　D.$-i$

6. 已知m，n是两条不同直线，α，β，γ是三个不同平面，则下列命题中正确的是（　）

A．若$m\parallel n$，$n\subset\alpha$，则$m\parallel\alpha$

B．若$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则$\alpha\parallel\beta$

C．若$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，$m\subset\beta$，$n\subset\gamma$，则$\beta\parallel\gamma$

D．若$m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，则m，n平行、相交、异面均有可能

7. 已知正实数a,b满足$a+2b=1$，则$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的取值范围是（　　）.

A.$\left[1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$　　B.$\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　C.$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$　　D.$\left[0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$

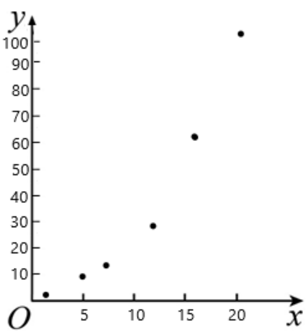
8. 已知在平面直角坐标系xOy中，双曲线$E_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b_1^2}=1\ (a,b_1>0)$的右焦点为$F$，点$D$为双曲线右支上一点，直线$OD$交双曲线于另一点$G$，且$GF\perp DF$，$|OD|=2|DF|$，直线$GF$经过椭圆$E_2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b_2^2}=1\ (a>b_2>0)$的下顶点，记$E_1$的离心率为$e_1$，$E_2$的离心率为$e_2$，则（　　）

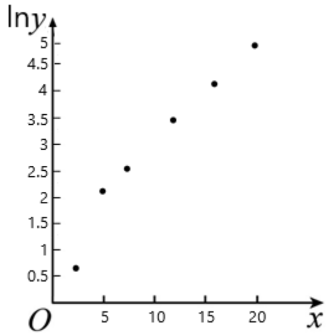
A. $\dfrac{1}{7}e_1^2+e_2^2=1$　　B. $\dfrac{1}{15}e_1^2+e_2^2=1$　　C. $\dfrac{1}{15}e_1^2+2e_2^2=1$　　D. $\dfrac{4}{15}e_1^2+e_2^2=1$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分。

9. 使用统计手段科学预测传染病可以保障人民群众的生命健康。下表和散点图为某段时间内全球某传染病感染病例在第一次监测到之后数量随时间的变化，以时间为自变量x（单位为天），以监测到的病例总数为因变量y，选择以下两个回归模型拟合y随x的变化：回归模型一：$y=k_1x+b_1\ (x>0)$；回归模型二：$y=k_2e^{mx}\ (x>0)$，通过计算得出$k_1=5.14$，$b_1=-16.3$；$k_2=2.5,m=0.2$，则下列说法正确的是(　　).

x	1	5	7	12	16	20
y	2	9	12	29	63	101





A.使用回归模型一拟合的决定系数R^2大于使用回归模型二的决定系数R^2

B.通过模型二得出的经验回归方程的预报效果好于通过模型一得出的经验回归方程

C.在首例病例出现后 45 天，该传染病感染人数很有可能在200 人左右

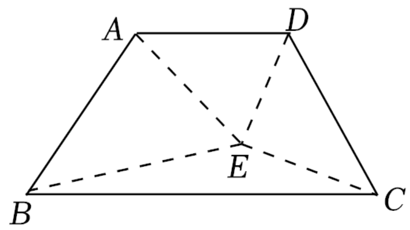
D.在首例病例出现后 45 天，该传染病的感染人数很有可能超过10000 人

10. 函数$f(x)$和$g(x)$的定义域为$\mathbb{R}$，若$f(x)$的最小正周期为a，$g(x)$的最小正周期为b，则(　　).

A. $f(x)+g(x)$为周期函数　　B. $f(x)g(x)$为周期函数

C. $f\left(\dfrac{x}{b}\right)+g\left(\dfrac{x}{a}\right)$为周期函数　　D. $f\left(\dfrac{x}{b}\right)g\left(\dfrac{x}{a}\right)$为周期函数

11. 如图所示，在五面体$EBDCA$中，$\triangle ABE$，$\triangle BCE$，$\triangle DCE$都是等腰直角三角形，$AB=AE=DE=DC=2$，且平面$ABE\perp$平面BCE，平面$DCE\perp$平面BCE，则下列说法正确的有(　　).



A. $AD\parallel$平面BEC

B. 五面体$EBDCA$的外接球半径为2

C. 五面体$EBDCA$的体积为$2\sqrt{2}$

D. 五面体$EBDCA$的内切球半径为$\dfrac{6\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 直线l_1的斜率为k_1，直线l_2的斜率为k_2，直线l_1不与直线l_2垂直，且直线l_1和直线l_2夹角的角平分线的斜率为$\dfrac{k_1+k_2}{2}$，则k_1的取值范围是________.

13. 在平面直角坐标系中，若以原点为中心的双曲线经过旋转变换后为函数$f(x)$的图象，函数$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$且$g(x)=f(x)\ (x>0)$，若$g(x)$在定义域内存在反函数，则双曲线离心率的取值范围为________.

14. 已知实数a,b满足$e^a+\cos(a+b)=a$，则a的值是________，b的取值集合是________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

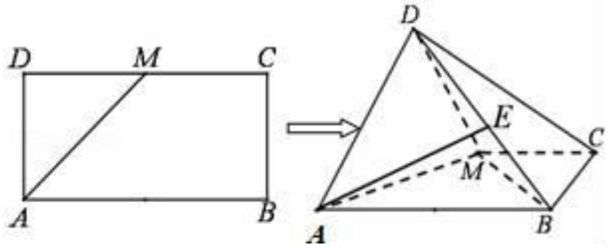
已知$\triangle ABC$的三个内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}ac\cos B$.

(1).求角B的大小;

(2).若$a=2$，且$\dfrac{\pi}{4}\le A\le\dfrac{\pi}{3}$，求边$c$的取值范围

16.（15 分）

如图，已知长方形$ABCD$中，$AB=2$，$AD=1$，M为DC的中点. 将$\triangle ADM$沿AM折起，使得平面$ADM\perp$平面$ABCM$.



(1).求证：$AD\perp BM$；

(2).若$\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DB}\ (0<\lambda<1)$，当二面角$E-AM-D$大小为$\dfrac{\pi}{3}$时，求$\lambda$的值.

17.（15 分）

在一条只能沿单向行驶的高速公路上，共有n $(n\geq 2)$个服务区。现有一辆车从第n个服务区向第1个服务区行驶，且当它从第k $(1<k\leq n)$个服务区开出后，将等可能地停靠在第$1\sim k-1$个服务区，直到它抵达第1个服务区为止，记随机变量X_n为这辆车全程一共进入的服务区总数.

(1).求X_3的分布列及期望；

(2).证明：$\left\{\dfrac{1}{E(X_{n+1})-E(X_n)}\right\}$是等差数列.

18.（17 分）

已知椭圆E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$的焦距为$2\sqrt{3}$，且$A\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$D(-2,1)$中恰有两点在椭圆$E$上.

(1). 求椭圆E的标准方程；

(2). 椭圆E上有三点G,S,T，直线ST过点$C(2,2)$，直线GS与y轴交于$(0,h)$，点M为GS中点，M,O,C三点共线，直线GT与直线OC的交点为Q，求三角形QGS的面积关于h的表达式.

19.（17 分）

对给定的在定义域内连续且存在导函数的函数$f(x)$，若对在$f(x)$定义域内的给定常数a，存在数列$\{a_n\}$满足a_1在$f(x)$的定义域内且$a_1>a$，且对$\forall n\geq 2,n\in\mathbb{N}^*$，$y=f(x)$在区间$(a,a_{n-1})$的图象上有且仅有在$x=a_n$一个点处的切线平行于$(a,f(a))$和$(a_{n-1},f(a_{n-1}))$的连线，则称数列$\{a_n\}$为函数$f(x)$的“$a$关联切线伴随数列”.

(1). 若函数$f(x)=x^2$，证明$\forall a\in\mathbf{R}$，$f(x)$都存在“a关联切线伴随数列”；

(2). 若函数$g(x)=(x-1)^3$，数列$\{a_n\}$为函数$g(x)$的“1关联切线伴随数列”，且$a_1=\sqrt{3}+1$，求$\{a_n\}$的通项公式；

(3). 若函数$h(x)=mx^3+6\sin x$，数列$\{b_n\}$为函数$h(x)$的“b关联切线伴随数列”，记数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，证明：当$m\geq 1$，$b\geq 0$时，$S_n+b_n\geq (n-1)b+2b_1$.