華南理工大學
South China University of Technology

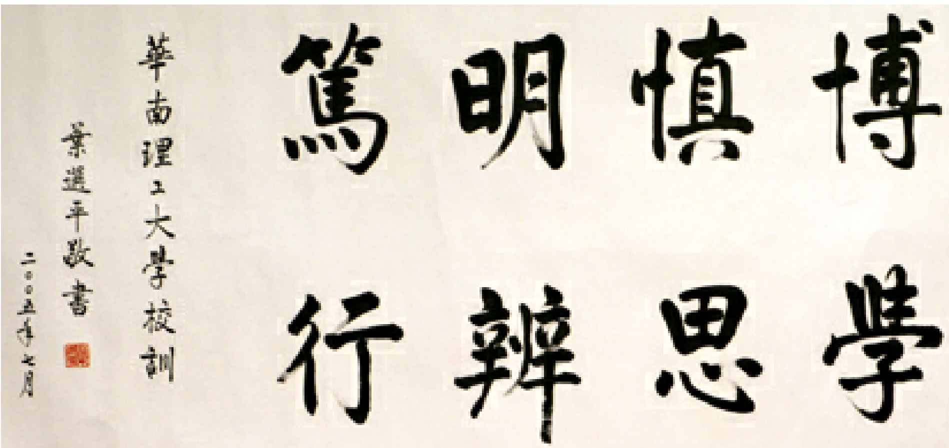
简单导数

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

参考：群友

日期：2026 年 2 月 17 日



前言

收录简单导数群题，部分 CMC 非数类题型。

夏同
于华南理工大学
2026 年 2 月 17 日

目录

定义索引

定理索引

例题索引

第一章 微分中值定理

本章介绍微分中值定理的各种题型，主要介绍以埃米特插值为本质的高观点做题思路，同时以常数 K 值法为考场手段，辅以罗尔定理的多次使用，进行证明。首先介绍埃米特插值的基本形式和 K 值法的证明思路。

题目会给定基本函数 $f(x)$ 的某些性质，比如 f 的光滑性如何，f 在某些点的函数值和导数值等，然后是要证明的结论，我们通常要先构造一个插值多项式 $p(x)$，使得 $p(x)$ 尽可能地拟合 $f(x)$ 的行为，然后构造 $G(x) = f(x) - p(x)$，多次循环地利用罗尔中值定理。

先数一数原题给了多少条件，然后数一数要拟合什么点，拟合到多少阶，把所有点的要拟合阶数（包括 0 阶）相加，减去 1，就是插值多项式的次数，余项比插值多项式的次数高 1 阶。然后根据余项的阶数和原函数的光滑性条件，判断是属于什么类型。

1.1 插值法

1.1.1 例题: K 值法

$f(x) \in C^2[a,b]$，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$$

解 1.1.1. 取 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，则 $F(x) \in C^3[a,b]$，且 $F'(x) = f(x)$，所以要证明的结论等价于证明:$F(x) \in C^3[a,b]$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2F'''(\xi)}{24}$$

插 $F(a), F(b), F\left(\frac{a+b}{2}\right), F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$，一共 4 个条件，余项 4 阶，插值多项式 3 次，导数不够，属于对 $F''' = p'''$ 类型，先写出拉格朗日插值部分，然后根据本题最高只需拟合到 1 阶导数，而且只有 1 个点才需要拟合到 1 阶导数，待定 $1-1=0$ 阶多项式 r:

$$\begin{aligned}p(x) &= \frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}F(a) + \frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-a)}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}F(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}F\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &\quad + c(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

这个式子自动满足 $p(a) = p(b) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 求导数并令 $p'(\frac{a+b}{2}) = F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$：

$$\begin{aligned}p'(x) &= \frac{F(a)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}\left(x-\frac{a+b}{2}+x-b\right) + \frac{F(b)}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}\left(x-\frac{a+b}{2}+x-a\right)\\ &\quad + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}((x-a)+(x-b))\\ &\quad + c(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-\frac{a+b}{2}}\right)\\ &= \frac{F(a)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}\left(x-\frac{a+b}{2}+x-b\right) + \frac{F(b)}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}\left(x-\frac{a+b}{2}+x-a\right)\\ &\quad + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}(x-a+x-b)\\ &\quad + c\left((x-a)(x-b)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\right)\end{aligned}$$

$$p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{F(a)}{a-b} + \frac{F(b)}{b-a} - \frac{c}{4}(b-a)^2 = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{4\left(\frac{F(b)-F(a)}{b-a} - F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(b-a)^2}$$

构造 $G(x) = f(x) - p(x)$，则 $G(a) = G(b) = G\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$，由 Rolle 定理，存在 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$，存在 $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得 $G'(\xi_2) = 0$，加上 $G'(\frac{a+b}{2}) = 0$，由 Rolle 定理，存在 $\xi_3 \in (\xi_1, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G''(\xi_3) = 0$，存在 $\xi_4 \in (\frac{a+b}{2}, \xi_2)$ 使得 $G''(\xi_4) = 0$，由 Rolle 定理，存在 $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (a,b)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$，所以 $F'''(\xi) = p'''(\xi) = 6c$，即：

$$F'''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3}(F(b)-F(a)) - \frac{24}{(b-a)^2}F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

1.1.2 例题:

设 $f \in C^1[a,b] \cap D^3(a,b)$，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(a)+f'(b)}{2} - \frac{f'''(\xi)}{12}(b-a)^2$$

解 1.1.2. 插 $f(a), f(b), f'(a), f'(b)$，则插值多项式 3 次，余项 4 阶，但是条件只到 3 阶，属于 $f''' = p'''$ 类型，插值：

$$p(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + (kx+m)(x-a)(x-b)$$

此时自动保证 $p(a) = f(a), p(b) = f(b)$，参数 k, m 待定，以期望 $p'(a) = f'(a), p'(b) = f'(b)$，解出 k, m.

$$p'(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + (ka+m)(a-b) = f'(a)$$
$$p'(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + (kb+m)(a-b) = f'(b)$$

相减得到

$$k = \frac{f'(b)+f'(a)}{(b-a)^2} - \frac{2(f(b)-f(a))}{(b-a)^3}$$

此时可以继续解方程得到 m，但是没有必要了，我们假装 m 已知，设而不求就可以了设 $G(x) = f(x) - p(x)$，则 $G(a) = G(b) = 0, G'(a) = G'(b) = 0$，所以由罗尔中值定理，存在 $\xi_1 \in (a,b)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$，再由罗尔中值定理，存在 ξ_2, ξ_3 使得 $G''(\xi_2) = 0, G''(\xi_3) = 0$，最后由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$，所以

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 6k = \frac{6(f'(b)+f'(a))}{(b-a)^2} - \frac{12(f(b)-f(a))}{(b-a)^3}$$

1.1.3 例题:

设 $f \in C[0,2] \cap D(0,2)$，满足 $f(0)=f(2)=0, |f'(x)| \leqslant M, \forall x \in (0,2)$，证明

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M$$

解 1.1.3. 插 $f(0), f(2)$，插值多项式 1 次（仅拉格朗日插值式，用不到导数修正）, 余项 2 阶, 导数不够, 属于靠近哪边对哪边插模型。所以在 $[0,1]$ 上插 $f(0)$，在 $[1,2]$ 上插 $f(2)$，则写出两段插值式。

当 $x \in [0,1]$ 时，对 $f(x)$ 的插值为：

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(\xi(x))}{1!}(x-0) = f'(\xi(x))x$$

这是拉格朗日中值定理的直接应用，所以不用考场翻译。得到

$$|f(x)| \leqslant |f'(\theta(x))|x \leqslant Mx$$

当 $x \in [1,2]$ 时，对 $f(x)$ 的插值为：

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(\eta(x))}{1!}(x-2) = f'(\eta(x))(x-2)$$

同理，得到

$$|f(x)| \leqslant |f'(\eta(x))||(x-2)| \leqslant M(2-x)$$

所以

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_1^2 |f(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 Mx\mathrm{d}x + \int_1^2 M(2-x)\mathrm{d}x = M
\end{aligned}$$

1.1.4 例题:

设 $f \in D^2[0,1], f(0)=f(1)=0, |f''(x)| \leqslant M$，证明 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{M}{12}$

解 1.1.4. 要拟合 $f(0), f(1)$ 一共两个插值条件，无导数条件需要拟合，所以插值多项式为一次，也不用待定多项式 r，余项到了 2 阶导数，符合题目所给条件，所以根据埃米特插值，存在 $\theta(x) \in (0,1)$ 使得：

$$f(x)=\frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1), \forall x \in [0,1]$$

这个结论可以用 k 值法来证明，由

$$f(x)-Kx(x-1)=0$$

的条件（其中 K 与 x 有关），设

$$F(y)=f(y)-Ky(y-1)$$

则 $F(0)=F(1)=F(x)=0$，罗尔得到 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0, \xi_1, \xi_2 \in (0,1)$，所以存在 $\theta(x) \in (0,1)$ 使得 $F''(\theta(x))=0$。对 $F(x)$ 求二阶导数得到

$$f''(\theta(x))-2K=0 \Rightarrow K=\frac{f''(\theta(x))}{2}$$

所以

$$f(x)=\frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)$$

所以

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{f''(\theta(x))}{2}\right| |x(x-1)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{M}{2}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x=\frac{M}{12}
\end{aligned}$$

1.1.5 例题:

设 $f \in C^3[0,2]$ 满足

$$f(0)=f'(0)=0, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 8\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

求证存在 $\theta \in (0,2)$ 使得 $f'''(\theta)=0$

解 1.1.5. 套路地，设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$，$F(x)\in C^4[0,2]$，$F(0)=F'(0)=F''(0)=0$，且 $F(2)=8F(1)$，这里我们使用插值法，就是找一个多项式去尽可能的拟合 f 的行为。注意到 $F(0)=F'(0)=F''(0)=0$，所以可以考虑插值多项式为 $p(x)=x^3(ax+b)$，代入 $F(2)=8F(1)$ 得到 $a=0$，所以 $p(x)=bx^3$，再由 $p(1)=F(1)$ 得到 $b=F(1)$，所以

$$p(x)=F(1)x^3$$

于是构造出

$$G(x)=F(x)-F(1)x^3$$

这个 $G(x)$ 满足

$$G(0)=G(1)=G(2)=0, G'(0)=0, G''(0)=0$$

所以由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(0,1)\xi_2\in(1,2)$，使得 $G'(\xi_1)=G'(xi_2)=0$，搭配上 $G'(0)=0$，所以又有罗尔中值定理，得知存在 θ_1,θ_2，使得 $G''(\theta_1)=G''(\theta_2)=0$，同样的，搭配上 $G''(0)=0$，又有罗尔中值定理，得知存在 $\eta_1\in(0,1),\eta_2\in(1,2)$ 使得

$$G'''(\eta_1)=G'''(\eta_2)=0$$

所以由罗尔中值定理，得到存在 $\theta\in(0,2)$ 使得

$$G''''(\theta)=0$$

而求导易得

$$G''''(x)=f'''(x)-p''''(x)=0\Rightarrow f'''(\theta)=0$$

1.1.6 例题:

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2},\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$, 求证在 $(0,1)$ 存在 ξ 使 $f'(\xi)=3$.

解 1.1.6. 套路式地，设

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,G(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

则有

$$F(0)=G(0)=0,F(1)=\frac{5}{2},G(1)=\frac{3}{2}$$

而问题要证明的结论似乎仅与 $f(x)$（以及其导函数，原函数）有关，所以要从 $G(x)$ 中分出 $F(x)$ 或者 $f(x)$ 来，考虑分部积分：

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}F(x)=xF(x)|_0^1-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=1$$

则问题转化为 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上二阶可导，且 $F(0)=0,F(1)=\frac{5}{2},\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=1$，求证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F''(\xi)=3$。再取 $g(x)=\int_0^x F(x)\mathrm{d}x$，则 $g'(0)=0,g'(1)=\frac{5}{2}$，且 $g(0)=0,g(1)=1$，则问题转化为 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上三阶可导，求证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'''(\xi)=3$。4 个条件，余项 4 阶，插值多项式为 3 次，导数 3 阶不够，属于 $g'''=p'''$ 类型，构造插值多项式：

$$p(x)=\frac{x-0}{1-0}g(1)+\frac{x-1}{0-1}g(0)+(kx+m)x(x-1)=x+(kx+m)x(x-1)$$

求导并令 $p'(0)=g'(0),p'(1)=g'(1)$：

$$\begin{aligned}
&p'(x)=1+(kx+m)(2x-1)+kx(x-1)\\
&p'(0)=1-m=0\Rightarrow m=1\\
&p'(1)=1+(k+1)(1)+0k=1+k+1=2+k=\frac{5}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

构造 $W(x)=g(x)-p(x)$，则 $W(0)=W(1)=W'(0)=W'(1)=0$，且 $W(x)$ 在 $(0,1)$ 上三阶可导，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使得 $G'(\xi_1)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_2\in(0,\xi_1)$ 使得 $W''(\xi_2)=0$，存在 $\xi_3\in(\xi_1,1)$ 使得 $W''(\xi_3)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_3)\subset(0,1)$ 使得 $W'''(\xi)=0$，所以

$$g'''(\xi)=p'''(\xi)=6k=3$$

1.1.7 例题:

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二次可微，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi)$$

解 1.1.7. 拟合 $f(a),f(b),f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，设

$$G(x)=f(x)-\left[\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

则 $G(a)=G(b)=G\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$ 使得 $G'(\xi_1)=0$，存在 $\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ 使得 $G'(\xi_2)=0$，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使得 $G''(\xi)=0$，所以 $f''(\xi)=p''(\xi)$，求导：

$$p''(x)=4\frac{f(a)}{(b-a)^2}+4\frac{f(b)}{(b-a)^2}-8\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2}=\frac{4}{(b-a)^2}\left(f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

所以

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi)$$

1.1.8 例题:

设 $f\in C^3[-1,1]$ 满足 $f(-1)=0,f'(0)=0,f(1)=1$，证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得 $f'''(\xi)=3$

解 1.1.8. 插 $f(-1),f(1),f(0),f'(0)$，则插值多项式为三次，余项四阶，导数三阶不够，属于 $f'''=p'''$ 类型，构造插值多项式：

$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)}f(1)+\frac{(x-1)(x-0)}{(-1-1)(-1-0)}f(-1)+\frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)}f(0)+cx(x-1)(x+1)\\&=\frac{x(x+1)}{2}-(x^2-1)f(0)+c(x-1)(x+1)x\\p'(x)=&\frac{2x+1}{2}-2xf(0)+c\left((x-1)(x+1)+x(x+1)+x(x-1)\right)\\p'(0)=&\frac{1}{2}-c=0\Rightarrow c=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

构造 $G(x)=f(x)-p(x)$，则 $G(-1)=G(0)=G(1)=0,G'(0)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(-1,0)$ 使得 $G'(\xi_1)=0$，存在 $\xi_2\in(0,1)$ 使得 $G'(\xi_2)=0$，加上 $G'(0)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_3\in(\xi_1,0)\subset(-1,1)$ 使得 $G''(\xi_3)=0$，存在 $\xi_4\in(0,\xi_2)\subset(-1,1)$ 使得 $G''(\xi_4)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\xi_3,\xi_4)\subset(-1,1)$ 使得 $G'''(\xi)=0$，所以

$$f'''(\xi)=p'''(\xi)=6c=3$$

1.1.9 例题:

$f(x)\in C^4[0,1]$，三次多项式 $p(x)$ 满足 $p(0)=f(0),p(1)=f(1),p'(0)=f'(0),p'(1)=f'(1)$，证明

$$|f(x)-p(x)|\leqslant\frac{1}{384}\max_{x\in[0,1]}\{f''''(x)\}$$

解 1.1.9. 构造 $G(x)=f(x)-p(x)$，则 $G(0)=G(1)=0,G'(0)=G'(1)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使得 $G'(\xi_1)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_2\in(0,\xi_1)$ 使得 $G''(\xi_2)=0$，存在 $\xi_3\in(\xi_1,1)$ 使得 $G''(\xi_3)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_3)\subset(0,1)$ 使得 $G'''(\xi)=0$，现在因为罗尔定理的迭代次数受零点个数限制。要得到四阶导数的信息，需引入额外零点。即证

$$-\frac{1}{384}\max_{x\in[0,1]}\{f''''(x)\}\leqslant G(x)\leqslant\frac{1}{384}\max_{x\in[0,1]}\{f''''(x)\}$$

使用 K 值法解决，假设存在与 x 有关的量 K，使得 $G(x)=K\dfrac{x^2(x-1)^2}{4!}$，再设函数 $H(y)=G(y)-K\dfrac{y^2(y-1)^2}{4!}$,则 $H(0)=H(1)=H(x)=0$,$H'(0)=H'(1)=0$,由罗尔中值定理,存在 $\xi_1\in(0,x),\xi_2\in(x,1)$ 使得 $H'(\xi_1)=H'(\xi_2)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_3\in(0,\xi_1),\xi_4\in(\xi_1,\xi_2),\xi_5\in(\xi_2,1)$ 使得 $H''(\xi_3)=H''(\xi_4)=H''(\xi_5)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_6\in(\xi_3,\xi_4),\xi_7\in(\xi_4,\xi_5)$ 使得 $H'''(\xi_6)=H'''(\xi_7)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\xi_6,\xi_7)\subset(0,1)$ 使得 $H^{(4)}(\xi)=0$，所以

$$f''''(\xi)-p''''(\xi)=f''''(\xi)-0=f''''(\xi)=G''''(\xi)=K\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}y^4}\left(\frac{y^2(y-1)^2}{4!}\right)$$

而且 $\frac{y^2(y-1)^2}{4!}$ 求 4 阶导数的值是 1，所以 $K=f''''(\xi)$，所以

$$f(x)-p(x)=\frac{f''''(\xi)x^2(x-1)^2}{4!}\leqslant\frac{1}{384}f''''(\xi)$$

取绝对值得到

$$|f(x)-p(x)|\leqslant\frac{1}{384}\max_{x\in[0,1]}\{f''''(x)\}$$

1.1.10 例题:

设 $f\in C^4[0,1]$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3f\left(\frac{1}{2}\right)=8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}f(x)\mathrm{d}x$，求证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''''(\xi)=0$.

解 1.1.10. 取原函数 $F(x)$，则 $F(x)\in C^5[0,1]$，且 $F'(x)=f(x)$，

$$F(1)-F(0)+3F'\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(F\left(\frac{3}{4}\right)-F\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

插 $F(0),F(1),F\left(\frac{1}{2}\right),F'\left(\frac{1}{2}\right),F\left(\frac{3}{4}\right),F\left(\frac{1}{4}\right)$ 一共 6 个条件，余项 6 阶，插值多项式为 5 次，导数 5 阶不够，属于 $F^{(5)}=p^{(5)}$ 类型，插值：

$$\begin{aligned}
L(x)=&\frac{(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{4})(x-1)(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{3}{4})(0-\frac{1}{4})(0-1)(0-\frac{1}{2})}F(0)+\frac{(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{4})(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(1-\frac{3}{4})(1-\frac{1}{4})(1-0)(1-\frac{1}{2})}F(1)\\
&+\frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{4})}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}F\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{2})}{\left(\frac{3}{4}-0\right)\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}F\left(\frac{3}{4}\right)\\
&+\frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})}{\left(\frac{1}{4}-0\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}F\left(\frac{1}{4}\right)\\
s(x)=&c(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2}),s'(\frac{1}{2})=\frac{1}{64}\\
p(x)=&L(x)+s(x)
\end{aligned}$$

此时

$$p(0)=F(0),p(1)=F(1),p\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right),p'\left(\frac{1}{2}\right)=F'\left(\frac{1}{2}\right),p\left(\frac{3}{4}\right)=F\left(\frac{3}{4}\right),p\left(\frac{1}{4}\right)=F\left(\frac{1}{4}\right)$$

求导并令 $p'\left(\frac{1}{2}\right)=F'\left(\frac{1}{2}\right)$，解得

$$c=64\left[F'\left(\frac{1}{2}\right)-L'\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

构造 $G(x)=F(x)-p(x)$，则 $G(0)=G\left(\frac{1}{4}\right)=G\left(\frac{1}{2}\right)=G\left(\frac{3}{4}\right)=G(1)=0$，罗尔中值定理得到 $G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=G\left(\frac{1}{2}\right)=G'(\xi_3)=G'(\xi_4)=0$，罗尔中值定理得到 $G''(\xi_5)=G''(\xi_6)=G''(\xi_7)=G''(\xi_8)=0$，罗尔中值定理得到 $G'''(\xi_9)=G'''(\xi_{10})=G'''(\xi_{11})=0$，罗尔中值定理得到 $G''''(\xi_{12})=G''''(\xi_{13})=0$，罗尔中值定理得到存在 $\xi\in(\xi_{12},\xi_{13})\subset(0,1)$ 使得

$$G^{(5)}(\xi)=0$$

所以

$$F^{(5)}(\xi)=p^{(5)}(\xi)$$

又因为 $p(x)$ 为五次多项式，所以 $p^{(5)}(x)\equiv 0$，所以

$$f''''(\xi)=F^{(5)}(\xi)=p^{(5)}(\xi)=0$$

1.1.11 例题:

设 $f \in C^2[0,1]$，满足 $f(0)=f(1)=0, \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$，证明 $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \geqslant 8$

解 1.1.11. 为了利用最小值条件，假设 $c \in (0,1)$ 使得 $f(c)=-1$，则插值条件为 $f(0)=f(1)=0, f(c)=-1, f'(c)=0$，插值式 3 次，余项 4 阶，导数 4 阶差 2 阶，属于靠近谁插谁的类型。

在区间 $[0,c]$ 上插 $f(0),f(c),f'(c)$，构造插值多项式：

$$p_1(x)=\frac{x-c}{0-c}f(0)+\frac{x-0}{c-0}f(c)+k_1(x-0)(x-c)=-\frac{x}{c}+k_1x(x-c)$$
$$p_1'(x)=-\frac{1}{c}+k_1(2x-c) \quad p_1'(c)=0 \Rightarrow k_1=\frac{1}{c^2}$$

构造 $G_1(x)=f(x)-p_1(x)$，则 $G_1(0)=G_1(c)=0, G_1'(c)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(0,c)$ 使得 $G_1'(\xi_1)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_2\in(\xi_1,c)$ 使得 $G_1''(\xi_2)=0$，所以 $f''(\xi_2)=p_1''(\xi_2)=\frac{2}{c^2}$.

在区间 $[c,1]$ 上插 $f(1),f(c),f'(c)$，构造插值多项式：

$$p_2(x)=\frac{x-c}{1-c}f(1)+\frac{x-1}{c-1}f(c)+k_2(x-1)(x-c)=-\frac{x-1}{1-c}+k_2(x-1)(x-c)$$
$$p_2'(x)=-\frac{1}{1-c}+k_2(2x-1-c) \quad p_2'(c)=0 \Rightarrow k_2=\frac{1}{(1-c)^2}$$

构造 $G_2(x)=f(x)-p_2(x)$，则 $G_2(1)=G_2(c)=0, G_2'(c)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_3\in(c,1)$ 使得 $G_2'(\xi_3)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_4\in(c,\xi_3)$ 使得 $G_2''(\xi_4)=0$，所以 $f''(\xi_4)=p_2''(\xi_4)=\frac{2}{(1-c)^2}$.

综上所述，在区间 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上分别找到 ξ_2,ξ_4 使得 $f''(\xi_2)=\frac{2}{c^2}, f''(\xi_4)=\frac{2}{(1-c)^2}$. 下面说明 $\max\left\{\frac{2}{c^2},\frac{2}{(1-c)^2}\right\}\geqslant 8$. 分类讨论即可：当 $c\in(0,\frac{1}{2}]$ 时，$\frac{2}{c^2}\geqslant 8$；当 $c\in(\frac{1}{2},1)$ 时，$\frac{2}{(1-c)^2}\geqslant 8$。即证 $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8$

1.1.12 例题:

设 $f \in D^2[-a,a], a>0$ 满足

$$f(-a)=-1, f(a)=1, f'(-a)=f'(a)=0, |f''(x)| \leqslant 1$$

证明 (1) $a \geqslant \sqrt{2}$ (2) $a > \sqrt{2}$.

解 1.1.12. 微分条件不足以插 4 个点, 靠近谁插谁模型. 但是没有其他约束条件，要找一个公共点能同时出现在两边插，只能是带入 $x=0$.

在区间 $[-a,0]$ 上插 $f(-a), f(0), f'(-a)$，构造插值多项式：

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \frac{x-0}{-a-0}f(-a)+\frac{x+a}{0+a}f(0)+k_1(x+a)x=\frac{x}{a}+(\frac{x}{a}+1)f(0)+k_1(x+a)x \\
p_1'(x) &= \frac{1+f(0)}{a}+k_1(2x+a) \quad p_1'(-a)=0 \Rightarrow k_1=\frac{1+f(0)}{a^2} \\
\Rightarrow p_1(x) &= \frac{x}{a}+(\frac{x}{a}+1)f(0)+\frac{1+f(0)}{a^2}(x+a)x
\end{aligned}$$

构造 $G_1(x)=f(x)-p_1(x)$，则 $G_1(-a)=G_1(0)=0, G_1'(-a)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_1 \in (-a,0)$ 使得 $G_1'(\xi_1)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi_2 \in (-a,\xi_1)$ 使得 $G_1''(\xi_2)=0$，所以 $f''(\xi_2)=p_1''(\xi_2)=\frac{2+2f(0)}{a^2}$.

在区间 $[0,a]$ 上插 $f(a), f(0), f'(a)$，构造插值多项式：

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= \frac{x-0}{a-0}f(a)+\frac{x-a}{0-a}f(0)+k_2(x-a)x=\frac{x}{a}+(\frac{x}{a}-1)f(0)+k_2(x-a)x \\
p_2'(x) &= \frac{1+f(0)}{a}+k_2(2x-a) \quad p_2'(a)=0 \Rightarrow k_2=\frac{1+f(0)}{a^2} \\
\Rightarrow p_2(x) &= \frac{x}{a}+(\frac{x}{a}-1)f(0)+\frac{1+f(0)}{a^2}(x-a)x
\end{aligned}$$

构造 $G_2(x)=f(x)-p_2(x)$，则 $G_2(a)=G_2(0)=0, G_2'(a)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_3 \in (0,a)$ 使得 $G_2'(\xi_3)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi_4 \in (\xi_3,a)$ 使得 $G_2''(\xi_4)=0$，所以 $f''(\xi_4)=p_2''(\xi_4)=\frac{2+2f(0)}{a^2}$.

由条件 $|f''(x)| \leqslant 1$ 得

$$|1+f(0)| \leq \frac{a^2}{2}, |f(0)-1| \leq \frac{a^2}{2} \Rightarrow 1-\frac{a^2}{2} \leq f(0) \leq -1+\frac{a^2}{2}$$

两式同时成立要求 $1-\dfrac{a^2}{2} \leq -1+\dfrac{a^2}{2}$，解得 $a^2 \geq 2$，即 $a \geq \sqrt{2}$。

若 $a=\sqrt{2}$，则 $0 \leq f(0) \leq 0$，故 $f(0)=0$，且 $f''(\xi_2)=1$，$f''(\xi_4)=-1$。考虑积分表示：

$$\begin{aligned}
f(0) &= f(-a)+f'(-a)(x+a)+\int_{-a}^{0}(0-t)f''(t)\mathrm{d}t=-1-\int_{-a}^{0}tf''(t)\,\mathrm{d}t \\
f(0) &= f(a)+f'(a)(0-a)+\int_{a}^{0}(0-t)f''(t)\mathrm{d}t=1-\int_{0}^{a}tf''(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

当 $t \leq 0$ 时，由 $f''(t) \leq 1$ 得 $tf''(t) \geq t$（因 $t \leq 0$），故

$$\int_{-a}^{0}tf''(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{-a}^{0}t\,\mathrm{d}t=-\frac{a^2}{2}=-1,$$

从而 $f(0) \le -1-(-1)=0$，等号成立仅当在 $[-a,0]$ 上 $f''(t)\equiv 1$。类似地，当 $t\ge 0$ 时，由 $f''(t)\ge -1$ 得 $tf''(t)\ge -t$，故

$$\int_0^a tf''(t)\,\mathrm{d}t \ge -\int_0^a t\,\mathrm{d}t = -\frac{a^2}{2} = -1,$$

从而 $f(0)\le 1-(-1)=2$，此上界非紧。改用 $f''(t)\le 1$ 得 $tf''(t)\le t$，故

$$\int_0^a tf''(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^a t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2} = 1,$$

从而 $f(0)\ge 1-1=0$，等号成立仅当在 $[0,a]$ 上 $f''(t)\equiv 1$。于是 $f(0)=0$ 要求 $f''\equiv 1$ 于 $[-a,0]$ 和 $[0,a]$，这与 $f''(\xi_4)=-1$ 矛盾。故 $a=\sqrt{2}$ 不可能。

综上，必有 $a>\sqrt{2}$。

1.1.1 定理: 拉格朗日插值积分余项

设 $f\in C^2[a,b]$，且 f'' 在 $[a,b]$ 上可积，则成立

$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\int_a^b f''(y)k(x,y)\mathrm{d}y$$

其中

$$k(x,y)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}(y-b), & b\geqslant y\geqslant x\geqslant a\\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b\geqslant x\geqslant y\geqslant a\end{cases}$$

考虑

$$g(x)=f(x)-\left(\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\right)$$

那么 $g(a)=g(b)=0, g''=f''$，拆分积分余项即可发现：

$$\begin{aligned}\int_a^b g''(y)\,k(x,y)\,dy &= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x g''(y)\,(a-y)\,dy+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b g''(y)\,(y-b)\,dy\\ &=\frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)\,g'(x)+\int_a^x g'(y)\,dy\right]+\frac{x-a}{b-a}\left[-g'(x)\,(x-b)-\int_x^b g'(y)\,dy\right]\\ &=\frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)\,g'(x)+g(x)\right]+\frac{x-a}{b-a}\left[-g'(x)\,(x-b)+g(x)\right]\\ &=g(x)\,.\end{aligned}$$

1.1.13 例题:

设 $f \in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| \mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}$$

解 1.1.13. 由已知，$f \in C^2[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$。对任意 $x \in [a,b]$，利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{b-x}{b-a}f(x)+\frac{x-a}{b-a}f(x)\\
&= \frac{b-x}{b-a}\big[(a-x)f'(x)+f(x)\big]+\frac{x-a}{b-a}\big[(b-x)f'(x)+f(x)\big]\\
&= \frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)f'(x)+\int_a^x f'(y)\mathrm{d}y\right]+\frac{x-a}{b-a}\left[(b-x)f'(x)+\int_b^x f'(y)\mathrm{d}y\right]\\
&= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (a-y)\mathrm{d}f'(y)+\frac{x-a}{b-a}\int_b^x (b-y)\mathrm{d}f'(y)\\
&= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (a-y)f''(y)\mathrm{d}y+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-y)f''(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

取绝对值，并利用 $|f''(y)| = \left|\dfrac{f''(y)}{f(y)}\right||f(y)|$，得

$$|f(x)| \leq \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (y-a)\left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right||f(y)|\mathrm{d}y+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-y)\left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right||f(y)|\mathrm{d}y.$$

设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$，则 $M>0$（否则 $f\equiv 0$，不等式显然成立）。取 $c\in(a,b)$ 使 $|f(c)|=M$。在上式中令 $x=c$，并注意到 $|f(y)|\leq M$，$y-a\leq c-a$（当 $y\in[a,c]$），$b-y\leq b-c$（当 $y\in[c,b]$），故

$$\begin{aligned}
M &\leq \frac{b-c}{b-a}\int_a^c (c-a)\left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right|M\mathrm{d}y+\frac{c-a}{b-a}\int_c^b (b-c)\left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right|M\mathrm{d}y\\
&= M\cdot\frac{(b-c)(c-a)}{b-a}\int_a^b \left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right|\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

因 $M>0$，两边消去 M 得

$$1 \leq \frac{(b-c)(c-a)}{b-a}\int_a^b \left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right|\mathrm{d}y.$$

由均值不等式，

$$\frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \leq \frac{1}{b-a}\left(\frac{(b-c)+(c-a)}{2}\right)^2=\frac{b-a}{4},$$

代入上式即得

$$\int_a^b \left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right|\mathrm{d}y \geq \frac{4}{b-a}.$$

（等号成立条件可进一步讨论，此处略。）

1.1.14 例题:

（2004 年全国 II 卷）函数 $f(x)=x\ln x$，求证：对于 $a>b>0$ 有

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)<(a-b)\ln 2$$

解 1.1.14. 设

$$\begin{aligned}
g(x)&=\frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}f(b)\\
&=\frac{(x-a)(x-b)}{-\frac{(a-b)^2}{4}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{\frac{(a-b)^2}{2}}f(a)+\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{\frac{(a-b)^2}{2}}f(b)\\
&=\frac{2}{(a-b)^2}\left((x-\frac{a+b}{2})(x-b)f(a)+(x-a)(x-\frac{a+b}{2})f(b)-2(x-a)(x-b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

构造 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(a)=h\left(\frac{a+b}{2}\right)=h(b)=0$，由罗尔中值定理得存在 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}),\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ 使得 $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$，再由罗尔中值定理得存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $h''(\xi)=0$，所以

$$f''(\xi)=g''(\xi)=\frac{4}{(a-b)^2}\left(f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

问题转化为证明

$$\frac{(a-b)^2}{4}f''(\xi)=\frac{(a-b)^2}{4\xi}<(a-b)\ln 2\Leftrightarrow \xi>\frac{a-b}{4\ln 2}$$

1.1.15 例题:

设 $f \in D[a,b]$，且 $|f'(x)| \leqslant M, \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，令 $|F(x)| = \left|\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|$，证明:

(1) $|F(x)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{8}$;

(2) 若 $f(a) = f(b) = 0$，则 $|F(x)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{16}$.

解 1.1.15. (1) $F(x)$ 两阶可导，$|F''(x)| \leqslant M, F(b) = F(a) = 0$，插左右端点，微分条件足够，用 K 值法：设 K 与 x 有关，使得 $F(x) = K\frac{(x-a)(x-b)}{2!}$，构造 $G(y) = F(y) - K\frac{(y-a)(y-b)}{2!}$，则 $G(a) = G(b) = G(x) = 0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1 \in (a,x), \xi_2 \in (x,b)$ 使得 $G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = 0$，再由罗尔中值定理，存在 $\theta(x) \in (a,b)$ 使得 $G''(\theta(x)) = 0$，所以

$$f'(\theta(x)) - K = 0 \Rightarrow K = f'(\theta(x)) \Rightarrow F(x) = f'(\theta(x))\frac{(x-a)(x-b)}{2!}$$
$$|F(x)| \leqslant \frac{M}{2}|(x-a)(x-b)| \leqslant \frac{M}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{8}$$

(2) $F(x)$ 两阶可导，$|F''(x)| \leqslant M, F(a) = F(b) = F'(a) = F'(b) = 0$，插左右端点，微分条件远远不够，属于靠近谁插谁的类型，不直接插左右端点和导数，而是引入 $x_0 \in (a,b)$ 是 $|F(x)|$ 的极大值点（若极值点是端点处，此时结论显然成立），在 (a,x_0) 和 (x_0,b) 区间构造插值多项式。在区间 $[a,x_0]$ 上插 $f(a), f'(a), f(x_0), f'(x_0)$，构造插值多项式：

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!}F''(\xi_1) = \frac{(x-a)^2}{2!}F''(\xi_1)$$
$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(\xi_2) = \frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(\xi_2)$$

相减得到

$$F(x_0) = \frac{(x_0-a)^2}{2!}F''(\xi_1) - \frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(\xi_2)$$

绝对值不等式得到

$$|F(x_0)| \leqslant \frac{1}{2!}\left(\frac{(x_0-a)^2}{2!} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\right)M = \frac{M}{4}\left((x_0-a)^2 + (x-x_0)^2\right)$$

由于 $x \in (a,b)$，所以 $(x_0-a)^2 + (x-x_0)^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$，因此

$$|F(x_0)| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{16}$$

最后提示一下，要看要证明的结论是什么，插值只是辅助手段，比如本题结论就是 $F(x)$ 的上下界，那么先看余项够不够微分条件用完，如果刚好，就是（1），如果差远了，就是（2），（2）中引入了 $F(x)$ 取到上下界时的自变量 x_0，在两个区间分别插值，最后相减得到 $F(x_0)$ 的表达式，绝对值不等式得到 $F(x_0)$ 的上界，再利用 $x \in (a,b)$ 得到最终结论。

1.1.16 例题:

设 $f(x)\in C^3[-1,1]$ 满足 $f(-1)=0, f'(0)=0, f(1)=1$，证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得

$$f'''(\xi)=3+\xi$$

解 1.1.16. 插 $f(-1), f(1), f(0), f'(0)$，则插值多项式为三次，余项四阶，导数差 1 阶，所以是 $f'''=p'''$ 模型，但是等号右边还有 ξ，所以对 $g(x)=f(x)-\frac{x^4}{24}$ 构造插值多项式，$g(-1)=-\frac{1}{24}, g'(0)=0, g(0)=f(0), g(1)=1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$，构造插值多项式 $p(x)$：

$$\begin{aligned}
p(x)&=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}g(-1)+\frac{(x-1)(x-(-1))}{(0-1)(0-(-1))}g(0)+\frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)}g(1)+cx(x-1)(x+1)\\
&=\frac{(x-0)(x-1)}{2}\left(-\frac{1}{24}\right)+\frac{(x-1)(x+1)}{-1}g(0)+\frac{(x-0)(x+1)}{2}\left(\frac{23}{24}\right)+cx(x-1)(x+1)\\
&=\frac{-x^2+x}{48}-(x^2-1)g(0)+\frac{23x^2+23x}{48}+cx(x-1)(x+1)\\
p'(x)&=\frac{-2x+1}{48}+(-2x)g(0)+\frac{46x+23}{48}+c\left((x-1)(x+1)+x(x+1)+x(x-1)\right)\\
p'(0)&=\frac{1}{48}+0+\frac{23}{48}-c=0\Rightarrow c=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

构造 $W(x)=g(x)-p(x)$，则 $W(-1)=W(1)=W'(0)=W(0)=0$，且 $W(x)$ 在 $(-1,1)$ 上三阶可导，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(-1,0)$ 使得 $W'(\xi_1)=0$，存在 $\xi_2\in(0,1)$ 使得 $W'(\xi_2)=0$，加上 $W'(0)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_3\in(\xi_1,0)\subset(-1,1)$ 使得 $W''(\xi_3)=0$，存在 $\xi_4\in(0,\xi_2)\subset(-1,1)$ 使得 $W''(\xi_4)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\xi_3,\xi_4)\subset(-1,1)$ 使得 $W'''(\xi)=0$，所以

$$g'''(\xi)=f'''(\xi)-\xi=p'''(\xi)=6c=3\Leftrightarrow f'''(\xi)=3+\xi$$

1.1.17 例题:

设 $f \in C^1[0,1]$, 证明存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$f'(\xi) = \int_0^1 (12x-6)\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

解 1.1.17. 上来就分部积分，将 $f(x)$ 独立出来，总是不会错的。

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (12x-6)\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}(6x^2-6x) \\
&= f(x)(6x^2-6x)\big|_0^1 - \int_0^1 (6x^2-6x)\mathrm{d}f(x) \\
&= f(x)(6x^2-6x)\big|_0^1 - \int_0^1 (6x^2-6x)f'(x)\mathrm{d}x \\
&= -6\int_0^1 (x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

即证存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$f'(\xi) + 6\int_0^1 (x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x = 0$$

由积分中值定理得：

$$\begin{aligned}
6\int_0^1 (x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x = 6f'(\xi)\int_0^1 (x^2-x)\mathrm{d}x = 6f'(\xi)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_0^1 \\
= f'(\xi)\left(2x^3-3x^2\right)\big|_0^1 = -f'(\xi)
\end{aligned}$$

于是命题得证

第二章 微分中值定理：构造函数法

2.1 一阶构造类

2.1.1 例题:

设 $f \in C[0,2] \cap D(0,2)$ 满足

$$f(0) = f(2) = 0, \lim_{x\to1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 5$$

则存在 $\xi \in (0,\eta)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}$$

解 2.1.1. 由极限条件得到 $f(1) = 2, f'(1) = 5$，先解微分方程：

$$\begin{aligned}
y' = \frac{2x-y}{x} = 2 - \frac{y}{x} &\Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = 2 \\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} y' + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} y = 2\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} y)' = 2\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} \\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} y = 2\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} + C \Leftrightarrow xy = x^2 + C \\
\Leftrightarrow & y = x + \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

分离常数 C 得到 $c = x(y-x)$，于是构造

$$c(x) = x(f(x) - x)$$

其中 $c(0) = 0, c(1) = 1, c(2) = -4$，求导得到

$$c'(x) = x(f'(x) - 1) + f(x) - x = xf'(x) + f(x) - 2x$$

于是由拉格朗日中值定理得 $\alpha \in (0,1), \beta \in (1,2)$, 使得

$$c'(\alpha) = \frac{c(1) - c(0)}{1-0} = 1, c'(\beta) = \frac{c(1) - c(2)}{1-2} = -5$$

由导数介值定理知存在 $\xi \in (0,\eta)$ 使得 $c'(\xi) = 0$

$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}$$

2.1.2 例题:

设 $f \in C[0,1] \cap D(0,1)$ 满足 $f(0)=0$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{\xi f(\xi)}{1-\xi}$$

解 2.1.2. 考虑微分方程

$$\begin{aligned}
y'=\frac{xy}{1-x}=\frac{x}{1-x}y &\Leftrightarrow y'+\frac{x}{x-1}y=0\\
&\Leftrightarrow y'\mathrm{e}^{\int \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x}+\frac{x}{x-1}\mathrm{e}^{\int \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x}y=0\\
&\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\int \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x}y\right)'=0 \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{x+\ln(x-1)}y\right)'=0 \Leftrightarrow ((x-1)\mathrm{e}^{x}y)'=0\\
&\Leftrightarrow (x-1)\mathrm{e}^{x}y=c \Leftrightarrow y=\frac{c}{(x-1)\mathrm{e}^{x}}
\end{aligned}$$

分离常数得到：$c=\mathrm{e}^{x}(x-1)y$，构造函数 $c(x)=\mathrm{e}^{x}(x-1)f(x)$，求导得到

$$c'(x)=\mathrm{e}^{x}\left((x-1)f(x)+(x-1)f'(x)+f(x)\right)=\mathrm{e}^{x}\left((x-1)f'(x)+xf(x)\right)$$

即证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $c'(\xi)=0$，又注意到 $c(0)=c(1)=0$，由罗尔定理，命题显然成立.

2.1.3 例题:

设 $f \in C[-1,2] \cap D(-1,2)$ 且有 $f(-1)=f(2)=-\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})=1$。证明对任何实数 $\lambda \in \mathbb{R}$，都存在 $\xi \in (-1,2)$，使得

$$f'(\xi)=\lambda\left[f(\xi)-\frac{\xi}{2}\right]+\frac{1}{2}$$

解 2.1.3. 解微分方程，注意到这类微分方程的标准形式是 $y'+P(x)y=Q(x)$，往这方面凑就可以：

$$\begin{aligned}
y'=\lambda y-\frac{\lambda x}{2}+\frac{1}{2} &\Leftrightarrow y'-\lambda y=-\frac{\lambda}{2}x+\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow y'\mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x}+(-\lambda)\mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x}y=\mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}x\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x}y\right)'=\mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}x\right)\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}y\right)'=\mathrm{e}^{-\lambda x}\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda x}y=\int\mathrm{e}^{-\lambda x}\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{-2\lambda}\int\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\lambda x)\,\mathrm{d}(-\lambda x)\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda x}y=\frac{1}{-2\lambda}\left(-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}+c\right)\\
&\Leftrightarrow y=\frac{1}{-2\lambda}\left(-\lambda x+c\mathrm{e}^{\lambda x}\right)
\end{aligned}$$

分离常数 c 得到

$$c=-2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}y+\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

构造

$$\begin{aligned}
c(x)&=-2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x)+\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}(x-2f(x))\\
c'(x)&=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-2f'(x)-\lambda(x-2f(x)))
\end{aligned}$$

等价于证明存在 $\xi\in(-1,2)$ 使得 $c'(\xi)=0$，由于 $c(-1)=0, c(\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}\lambda\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}, c(2)=3\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda}$，由零点定理知存在 $\xi_1\in(\frac{1}{2},2)$ 使得 $c'(\xi_1)=0$，由罗尔定理知存在 $\xi_2\in(-1,\xi_1)\subset(-1,2)$ 使得 $c'(\xi_2)=0$，于是命题得证.

2.1.4 例题:

设 $f \in D[0,1]$ 且 $f(0) > 0, f(1) > 0, \int_0^1 f(x)\,dx = 0$, 证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0$$

解 2.1.4. 此类构造虽然仍然是一阶构造，但是他要把部分 f 视为已知函数来构造（动机是保留一阶微分方程的形式），对于本题，即 $3f^2$ 视为已知的函数考虑 $y' + 3f^2y = 0$. 解得 $y = ce^{-\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$, 分离变量得构造函数 $c(x) = f(x)\,e^{\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$ 注意到

$$c'(x) = e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}\left[f'(x) + 3f^3(x)\right].$$

以及由积分中值定理，我们知道存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$f(\theta) = \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

注意到若 f 只有一个零点，则因为 $f(0) > 0, f(1) > 0$, 我们知道 $f(x) > 0, \forall x \in [0,\theta)\bigcup(\theta,1]$, 从而 $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$, 这就是一个矛盾！于是存在 $\theta_1 \neq \theta_2$, 使得 $f(\theta_1) = f(\theta_2) = 0$. 现在就有 $c(\theta_1) = c(\theta_2) = 0$, 由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $c'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0.$$

2.2 二阶构造类

2.2.1 视为关于 f' 的一阶构造类

2.2.1 例题:

设 $f \in D^2[0,1]$ 使得 $f(0) = f(1)$，证明存在 $\eta \in (0,1)$ 使得

$$f''(\eta) = \frac{2f'(\eta)}{1-\eta}$$

解 2.2.1. 解微分方程

$$\begin{aligned}
y' = \frac{2}{1-x}y \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x-1}y = 0 \\
&\Leftrightarrow y'\mathrm{e}^{\int \frac{2}{x-1}\mathrm{d}x} + \frac{2}{x-1}\mathrm{e}^{\int \frac{2}{x-1}\mathrm{d}x}y = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\int \frac{2}{x-1}\mathrm{d}x}y\right)' = 0 \Leftrightarrow ((x-1)^2y)' = 0 \\
&\Leftrightarrow c = (x-1)^2y
\end{aligned}$$

构造 $c(x) = (x-1)^2f'(x)$，求导得

$$c'(x) = 2(x-1)f'(x) + (x-1)^2f''(x),\quad c'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

即证存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$，由已知 $c(1) = 0$，以及罗尔中值定理知存在 $\xi_1 \in (0,1)$ 使得 $f'(xi_1) = 0$，所以对应 $c(\xi_1) = 0$，由罗尔中值定理知存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$，得证.

2.2.2 例题:

设 $f \in D^2[0,1], f(0) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, f(1) = \frac{\pi}{4}$, 证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$f''(\xi)\left(1+\xi^2\right) + 2f'(\xi)\xi = 0$$

解 2.2.2. 解微分方程

$$\begin{aligned} y'(1+x^2) + 2xy = 0 &\Leftrightarrow y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0 \\ &\Leftrightarrow y'\mathrm{e}^{\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x} + \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{e}^{\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}y = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}y\right)' = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{\ln(x^2+1)}y)' = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)y = c \end{aligned}$$

构造 $c(x) = f'(x)(1+x^2)$, 则 $c'(x) = 2xf'(x) + (1+x^2)f''(x)$，转化为证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$。注意到 $f(0) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, f(1) = \frac{\pi}{4}$，而 $\arctan 0 = 0, \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，故令

$$g(x) = f(x) - \arctan x, \quad x \in [0,1].$$

则 $g \in C^2[0,1]$ 且 $g(0) = g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = g(1) = 0$。由罗尔定理，存在 $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \xi_2 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ 使得

$$g'(\xi_1) = 0, \quad g'(\xi_2) = 0.$$

又 $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{1+x^2}$，于是

$$c(\xi_i) = (1+\xi_i^2)f'(\xi_i) = (1+\xi_i^2)\cdot\frac{1}{1+\xi_i^2} = 1, \quad i = 1,2.$$

因此 $c(\xi_1) = c(\xi_2) = 1$。对 $c(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上用罗尔，存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$，即

$$f''(\xi)(1+\xi^2) + 2f'(\xi)\xi = 0.$$

2.2.2 难度在解微分方程的一类

2.2.3 例题:

设 $f \in D^2(\mathbb{R})$, $f(0)f(\pi) < 0$, 证明存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得

$$f''(\xi) - 2f'(\xi)\cot\xi + f(\xi)\left(1 + 2\cot^2\xi\right) = 0.$$

解 2.2.3. 首先，解微分方程

$$y'' - 2y'\cot x + y(1 + 2\cot^2 x) = 0.$$

令 $y = u\sin x$，代入可得 $u'' = 0$，故 $u = Cx + D$，因此通解为 $y(x) = (Cx + D)\sin x$，其中 C, D 为常数。于是有

$$\frac{y(x)}{\sin x} = Cx + D \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y(x)}{\sin x}\right)'' = 0.$$

受此启发，构造函数

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}, \quad x \in (0, \pi).$$

计算得

$$g''(x) = \frac{f''(x) - 2\cot x\, f'(x) + f(x)\left(1 + 2\cot^2 x\right)}{\sin x}, \quad x \in (0, \pi).$$

因此，要证存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使得原式成立，只需证存在 ξ 使 $g''(\xi) = 0$。

下面证明 g'' 在 $(0, \pi)$ 内有零点。由 $f(0)f(\pi) < 0$ 知 $f(0)$ 与 $f(\pi)$ 异号且均非零。不妨设 $f(0) > 0$，则 $f(\pi) < 0$（若相反则同理）。考虑 $g'(x) = \dfrac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{\sin^2 x}$。当 $x \to 0^+$ 时，$\sin x \sim x$，$\cos x \sim 1$，故

$$g'(x) \sim -\frac{f(0)}{x^2} \to -\infty.$$

当 $x \to \pi^-$ 时，令 $t = \pi - x$，则 $\sin x \sim t$，$\cos x \sim -1$，故

$$g'(x) \sim \frac{f(\pi)}{t^2} \to -\infty.$$

因此 g' 在 $(0, \pi)$ 内连续，且两端趋于 $-\infty$，从而 g' 在 $(0, \pi)$ 内必取得最大值（例如，取 $\delta > 0$ 足够小，使在 $(0, \delta)$ 和 $(\pi - \delta, \pi)$ 上 $g'(x) < g'(\pi/2)$，则 g' 在 $[\delta, \pi - \delta]$ 上有最大值，该最大值即为整个区间上的最大值）。设最大值点为 $\xi \in (0, \pi)$，则 $g'(\xi)$ 为极大值，故 $g''(\xi) = 0$。若 $f(0) < 0$，则 g' 两端趋于 $+\infty$，同理取最小值点即得 $g''(\xi) = 0$。因此存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使 $g''(\xi) = 0$，代入即得

$$f''(\xi) - 2f'(\xi)\cot\xi + f(\xi)(1 + 2\cot^2\xi) = 0.$$

2.2.4 例题:

设 $f \in D^2\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(0) = 0$, 证明存在 $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\xi) = f(\xi)\left(1 + 2\tan^2\xi\right)$$

解 2.2.4. 首先解微分方程
$$y'' = y(1+2\tan^2 x). \tag{1}$$
观察得 $y_1 = \sec x$ 是 (1) 的一个特解，因为
$$y_1' = \sec x \tan x, \quad y_1'' = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x = \sec x(1+2\tan^2 x).$$
设另一解为 $y = u(x)\sec x$，代入 (1)：
$$y' = u'\sec x + u\sec x\tan x, \quad y'' = u''\sec x + 2u'\sec x\tan x + u\sec x(\tan^2 x + \sec^2 x),$$
而 $\tan^2 x + \sec^2 x = 1 + 2\tan^2 x$，代入得
$$u''\sec x + 2u'\sec x\tan x = 0 \implies u'' + 2u'\tan x = 0.$$
令 $v = u'$，则 $v' = -2v\tan x$，解得 $v = C_1\cos^2 x$，于是
$$u' = C_1\cos^2 x \implies u = C_1\int \cos^2 x\,dx + C_2 = \frac{C_1}{2}(x + \sin x\cos x) + C_2.$$
因此通解为
$$y(x) = \frac{C_2}{\cos x} + \frac{C_1}{2}\left(\frac{x}{\cos x} + \sin x\right).$$
求导得
$$\big(y(x)\cos x\big)' = \frac{c_2}{2}(1+\cos 2x), \quad \left(\frac{(y\cos x)'}{1+\cos 2x}\right)' = 0.$$
受此启发，对给定的 f，定义
$$g(x) = f(x)\cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
则 $g \in C^2$，且由 $f(0)=0$ 得 $g(0)=0$；又 $\cos(\pm\pi/2)=0$，故 $g(\pm\pi/2)=0$。于是 g 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上有三个零点 $-\pi/2, 0, \pi/2$。由罗尔定理，存在 $\eta_1 \in (-\pi/2, 0)$ 和 $\eta_2 \in (0, \pi/2)$ 使得
$$g'(\eta_1) = g'(\eta_2) = 0.$$
现在考虑函数
$$h(x) = \frac{g'(x)}{1+\cos 2x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$
由于分母 $1+\cos 2x = 2\cos^2 x > 0$，$h$ 在开区间内可导，且 $h(\eta_1) = h(\eta_2) = 0$。再次应用罗尔定理，存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (-\pi/2, \pi/2)$ 使得 $h'(\xi) = 0$。求导：
$$h'(x) = \frac{\big(f''(x)\cos x - 2f'(x)\sin x - f(x)\cos x\big)\cos^2 x - \big(f'(x)\cos x - f(x)\sin x\big)\cdot 2\cos x(-\sin x)}{2\cos^4 x}.$$
分子化简：
$$\big(f''\cos x - 2f'\sin x - f\cos x\big)\cos^2 x + 2\sin x\cos x\big(f'\cos x - f\sin x\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= f'' \cos^3 x - 2f' \sin x \cos^2 x - f \cos^3 x + 2f' \sin x \cos^2 x - 2f \sin^2 x \cos x \\
&= f'' \cos^3 x - f \cos^3 x - 2f \sin^2 x \cos x \\
&= \cos x \big[f'' \cos^2 x - f(\cos^2 x + 2\sin^2 x) \big].
\end{aligned}
$$

因此

$$
h'(x) = \frac{f''(x)\cos^2 x - f(x)(\cos^2 x + 2\sin^2 x)}{2\cos^3 x}.
$$

由于 $\cos^2 x + 2\sin^2 x = \cos^2 x(1 + 2\tan^2 x)$，所以

$$
h'(x) = \frac{f''(x) - f(x)(1 + 2\tan^2 x)}{2\cos x}.
$$

由 $h'(\xi) = 0$ 且 $\cos\xi \neq 0$，即得

$$
f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\tan^2 \xi).
$$

证毕。

2.2.5 例题:

设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 二阶可导 , $f\left(0\right)=0$, 证明存在 $\zeta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''\left(\zeta\right)=3f'\left(\zeta\right)\tan\zeta+2f\left(\zeta\right).$$

解 2.2.5. 首先考虑微分方程

$$y''=3y'\tan x+2y. \tag{1}$$

直接验证可知，函数 $y_1(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ 和 $y_2(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ 均为 (1) 的解，故通解为

$$y(x)=\frac{C_1}{\cos^2 x}+C_2\frac{\sin x}{\cos^2 x},\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

由此得

$$y(x)\cos^2 x=C_1+C_2\sin x,\ \left(y(x)\cos^2 x\right)'=C_2\cos x,\ \left(\frac{\left(y(x)\cos^2 x\right)'}{\cos x}\right)'=0. \tag{2}$$

受此启发，对给定的函数 $f(x)$，定义

$$g(x)=f(x)\cos^2 x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

则 g 二阶可导，且由 $\cos^2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0$ 知 $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，又 $f(0)=0$ 得 $g(0)=0$。因此 g 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上有三个零点 $-\pi/2,0,\pi/2$。由罗尔定理，存在 $\eta_1\in(-\pi/2,0)$ 和 $\eta_2\in(0,\pi/2)$ 使得

$$g'(\eta_1)=0,\quad g'(\eta_2)=0.$$

现在考虑函数

$$h(x)=\frac{g'(x)}{\cos x},\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

由于分母 $\cos x>0$ 在开区间内，h 可导，且 $h(\eta_1)=h(\eta_2)=0$。再次应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(-\pi/2,\pi/2)$ 使得 $h'(\xi)=0$。计算 $h'(x)$。由 $g(x)=f(x)\cos^2 x$ 得

$$g'(x)=f'(x)\cos^2 x-2f(x)\cos x\sin x,$$

$$g''(x)=f''(x)\cos^2 x-4f'(x)\cos x\sin x-2f(x)\cos^2 x+2f(x)\sin^2 x.$$

于是

$$\begin{aligned}
h'(x)&=\frac{g''(x)\cos x+g'(x)\sin x}{\cos^2 x}\\
&=\frac{\left(f''\cos^2 x-4f'\cos x\sin x-2f\cos^2 x+2f\sin^2 x\right)\cos x+\left(f'\cos^2 x-2f\cos x\sin x\right)\sin x}{\cos^2 x}\\
&=\frac{f''\cos^3 x-3f'\cos^2 x\sin x-2f\cos^3 x}{\cos^2 x}\\
&=\cos x\left(f''(x)-3f'(x)\tan x-2f(x)\right).
\end{aligned}$$

由 $h'(\xi)=0$ 且 $\cos\xi\neq 0$，即得

$$f''(\xi)-3f'(\xi)\tan\xi-2f(\xi)=0,$$

亦即

$$f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi).$$

因此存在 $\zeta=\xi\in(-\pi/2,\pi/2)$ 满足要求。

2.2.6 例题:

设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微且 f 至少有三个零点，证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得

$$f''(\xi)+2\xi^2 f'(\xi)+\left(\xi^4+2\xi\right)f(\xi)=0$$

解 2.2.6. 考虑微分方程

$$y''+2x^2y'+(x^4+2x)y=0. \tag{1}$$

令 $y=ue^{-x^3/3}$，则

$$y'=e^{-x^3/3}(u'-ux^2),\quad y''=e^{-x^3/3}\big(u''-2x^2u'+u(x^4-2x)\big).$$

代入 (1) 得

$$e^{-x^3/3}\big[u''-2x^2u'+u(x^4-2x)+2x^2(u'-ux^2)+(x^4+2x)u\big]=0,$$

化简后即为 $u''=0$，故 $u=C_1+C_2x$，从而 (1) 的通解为

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x^3/3}.$$

由此启发，对给定的函数 $f(x)$（设 f 二阶可导），构造

$$g(x)=f(x)e^{x^3/3},\quad x\in\mathbb{R}.$$

计算 g 的导数：

$$g'(x)=f'(x)e^{x^3/3}+f(x)e^{x^3/3}x^2=e^{x^3/3}\big(f'(x)+x^2f(x)\big),$$
$$g''(x)=e^{x^3/3}\big[f''(x)+2x^2f'(x)+(x^4+2x)f(x)\big]. \tag{2}$$

已知 f 至少有三个零点，设它们为 $x_1<x_2<x_3$，则 $g(x_i)=f(x_i)e^{x_i^3/3}=0$（$i=1,2,3$）。由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$ 和 $\xi_2\in(x_2,x_3)$ 使得

$$g'(\xi_1)=0,\quad g'(\xi_2)=0.$$

再对 g' 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $g''(\xi)=0$。代入 (2) 并注意到 $e^{\xi^3/3}\neq 0$，即得

$$f''(\xi)+2\xi^2f'(\xi)+(\xi^4+2\xi)f(\xi)=0.$$

因此存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 满足要求。

2.2.7 例题:

设 $f \in C[-2,2] \cap D(-2,2)$ 且

$$|f(x)| < 1, \forall x \in [-2,2], f^2(0) + (f'(0))^2 = 4,$$

证明存在 $\theta \in (-2,2)$ 使得

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

解 2.2.7. Method I: 首先观察微分方程 $y'' + y = 0$。若 y 是其解，则两边乘以 y' 得 $y'y'' + yy' = 0$，即 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((y')^2 + y^2\big) = 0$，故 $(y')^2 + y^2$ 为常数。这表明二次型 $(y')^2 + y^2$ 是方程的一个首次积分。受此启发，对给定的函数 $f(x)$（设其二阶可导），我们构造

$$g(x) = f^2(x) + \big(f'(x)\big)^2, \quad x \in [-2,2].$$

则 g 可导，且

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)\big(f(x) + f''(x)\big). \tag{1}$$

由已知条件 $|f(x)| < 1$ 对一切 $x \in [-2,2]$ 成立，特别地 $|f(2)| < 1, |f(-2)| < 1, |f(0)| < 1$。对 f 在区间 $[0,2]$ 和 $[-2,0]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\theta_1 \in (0,2)$ 和 $\theta_2 \in (-2,0)$ 使得

$$f'(\theta_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2}, \quad f'(\theta_2) = \frac{f(-2) - f(0)}{-2}.$$

于是

$$|f'(\theta_1)| \le \frac{|f(2)| + |f(0)|}{2} < \frac{1+1}{2} = 1, \quad |f'(\theta_2)| < 1.$$

从而

$$g(\theta_1) = f^2(\theta_1) + (f'(\theta_1))^2 < 1 + 1 = 2, \quad g(\theta_2) < 2.$$

另一方面，由已知 $f^2(0) + (f'(0))^2 = 4$ 得 $g(0) = 4 > 2$。因此 g 在闭区间 $[\theta_2, \theta_1]$ 上的值满足：端点值小于 2，而内部点 0 处值为 4，故最大值必在内部某点 $\theta \in (\theta_2, \theta_1) \subset (-2,2)$ 取得（因为端点值均小于最大值）。由极值必要条件，$g'(\theta) = 0$。代入 (1) 得 $2f'(\theta)\big(f(\theta) + f''(\theta)\big) = 0$。若 $f'(\theta) = 0$，则 $g(\theta) = f^2(\theta) < 1$（因为 $|f(\theta)| < 1$），但 $g(\theta)$ 是最大值且至少为 4（因为 $g(0) = 4$），矛盾。故 $f'(\theta) \ne 0$，从而必有

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

2.2.8 例题:

设 $f \in C[-2,2] \cap D(-2,2)$ 且

$$|f(x)| < 1, \forall x \in [-2,2], f^2(0) + (f'(0))^2 = 4,$$

证明存在 $\theta \in (-2,2)$ 使得

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

解 2.2.8. 思路：考虑微分方程 $y'' + y = 0$。若 y 是其解，则计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\sin x + y'\cos x) = y'\sin x + y\cos x + y''\cos x - y'\sin x = (y + y'')\cos x = 0,$$

故 $y\sin x + y'\cos x$ 为常数。这表明该线性组合是方程的一个首次积分。受此启发，对给定的函数 f（设二阶可导），我们构造

$$g(x) = f(x)\sin x + f'(x)\cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

则 g 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续可导，且

$$g'(x) = f'(x)\sin x + f(x)\cos x + f''(x)\cos x - f'(x)\sin x = (f(x) + f''(x))\cos x. \tag{1}$$

由已知条件 $|f(x)| < 1$ 对一切 $x \in [-2,2]$ 成立，特别地，

$$|f(\pm\frac{\pi}{2})| < 1, \quad |f(0)| < 1.$$

又 $f^2(0) + (f'(0))^2 = 4$，故 $|f'(0)| = \sqrt{4 - f^2(0)} > \sqrt{3} > 1$，从而 $|g(0)| = |f'(0)| > 1$，而

$$|g(\frac{\pi}{2})| = |f(\frac{\pi}{2})| < 1, \quad |g(-\frac{\pi}{2})| = |-f(-\frac{\pi}{2})| < 1.$$

假设对一切 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 均有 $f(x) + f''(x) \neq 0$，则由连续性，$f(x) + f''(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内恒正或恒负。不妨设恒正（否则考虑 $-f$），则由于在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内 $\cos x > 0$，由 (1) 知 $g'(x) > 0$，即 g 严格递增。于是

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

但 $|g(-\frac{\pi}{2})| < 1$，$|g(\frac{\pi}{2})| < 1$，而 $|g(0)| > 1$，矛盾。因此假设不成立，故存在 $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$。此 ξ 即为所求。

2.2.9 例题:

设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 内可导. 若对任何 $x\in(a,b)$, 都有 $g'(x)\neq 0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$$

解 2.2.9. 首先将等式两边交叉相乘（注意 $g'(\xi)\neq 0$ 且 $g(b)-g(\xi)\neq 0$，后者可由 g 的严格单调性得到，因为 $g'(x)\neq 0$ 在 (a,b) 内恒正或恒负，从而 g 严格单调，故当 $\xi\in(a,b)$ 时 $g(b)\neq g(\xi)$），移项得 $f'(\xi)\big[g(b)-g(\xi)\big]-g'(\xi)\big[f(\xi)-f(a)\big]=0$，考虑积分：

$$\begin{aligned}
&\int\Big(f'(x)\big[g(b)-g(x)\big]-g'(x)\big[f(x)-f(a)\big]\Big)\,\mathrm{d}x\\
=&\int f'(x)(g(b)-g(x))\mathrm{d}x-\int g'(x)(f(x)-f(a))\mathrm{d}x\\
=&\int(g(b)-g(x))\,\mathrm{d}f(x)-\int(f(x)-f(a))\,\mathrm{d}g(x)\\
=&\big[g(b)-g(x)\big]f(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}\big[g(b)-g(x)\big]-\left(\big[f(x)-f(a)\big]g(x)-\int g(x)\,\mathrm{d}\big[f(x)-f(a)\big]\right)\\
=&\big[g(b)-g(x)\big]f(x)-\int f(x)\big(-g'(x)\big)\mathrm{d}x-\big[f(x)-f(a)\big]g(x)+\int g(x)f'(x)\mathrm{d}x\\
=&\big[g(b)-g(x)\big]f(x)+\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x-\big[f(x)-f(a)\big]g(x)+\int g(x)f'(x)\mathrm{d}x\\
=&\big[g(b)-g(x)\big]f(x)-\big[f(x)-f(a)\big]g(x)+\int\big[f(x)g'(x)+g(x)f'(x)\big]\mathrm{d}x\\
=&\big[g(b)-g(x)\big]f(x)-\big[f(x)-f(a)\big]g(x)+f(x)g(x)+C\\
=&f(x)g(b)-f(x)g(x)-f(x)g(x)+f(a)g(x)+f(x)g(x)+C\\
=&f(x)g(b)+f(a)g(x)-f(x)g(x)+C\\
=&\big[f(x)-f(a)\big]\big[g(b)-g(x)\big]+\big(f(a)g(b)+C\big).
\end{aligned}$$

考虑 $h(x)=\big[f(x)-f(a)\big]\cdot\big[g(b)-g(x)\big],\quad x\in[a,b]$，由于 f,g 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 内可导，h 也在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 内可导。计算 h 在端点处的值：

$$h(a)=\big[f(a)-f(a)\big]\cdot\big[g(b)-g(a)\big]=0,\quad h(b)=\big[f(b)-f(a)\big]\cdot\big[g(b)-g(b)\big]=0.$$

因此 $h(a)=h(b)=0$。由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $h'(\xi)=0$。

$$h'(x)=f'(x)\big[g(b)-g(x)\big]-g'(x)\big[f(x)-f(a)\big].$$

代入 ξ 得

$$f'(\xi)\big[g(b)-g(\xi)\big]-g'(\xi)\big[f(\xi)-f(a)\big]=0.$$

2.2.10 例题:

设 $f, g \in D^2[a,b], g''(x) \neq 0, f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$. 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

解 2.2.10. 即证 $f''(\xi)g(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0$，考虑对该表达式进行分部积分：

$$\begin{aligned}\int [f''(x)g(x) - f(x)g''(x)]\,\mathrm{d}x &= \int f''(x)g(x)\mathrm{d}x - \int f(x)g''(x)\mathrm{d}x \\ &= \int g(x)\mathrm{d}f'(x) - \int f(x)\mathrm{d}g'(x) \\ &= g(x)f'(x) - \int f'(x)g'(x)\mathrm{d}x - (f(x)g'(x) - \int f'(x)g'(x)\mathrm{d}x) \\ &= g(x)f'(x) - f(x)g'(x)\end{aligned}$$

因此，令

$$h(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x), \quad x \in [a,b],$$

则 $h'(x) = f''(x)g(x) - f(x)g''(x)$。由 $f, g \in D^2[a,b]$ 知 h 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。利用已知条件 $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$，计算 h 在端点处的值：

$$h(a) = f'(a)g(a) - f(a)g'(a) = 0, \quad h(b) = f'(b)g(b) - f(b)g'(b) = 0.$$

于是 $h(a) = h(b) = 0$。由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$，即

$$f''(\xi)g(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0. \tag{2}$$

下证 $g(\xi) \neq 0$。已知 $g''(x) \neq 0$ 对一切 $x \in [a,b]$ 成立，故 g'' 在 (a,b) 内恒正或恒负。不妨设 $g'' > 0$，则 g 是严格凸函数。又 $g(a) = g(b) = 0$，由凸函数的性质，对任意 $x \in (a,b)$ 有 $g(x) < 0$（凸函数图像位于连接两端点的弦下方，而弦为 $y = 0$）。同理若 $g'' < 0$，则 g 严格凹，此时 $g(x) > 0$ 对 $x \in (a,b)$ 成立。总之，$g(x) \neq 0$ 对一切 $x \in (a,b)$ 成立，特别地 $g(\xi) \neq 0$。又由条件 $g''(\xi) \neq 0$，于是 (2) 式可化为

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

因此存在这样的 $\xi \in (a,b)$ 满足要求。

2.2.11 例题:

设 $f\in D^2[0,1]$, $f(0)=2, f'(0)=-2, f(1)=1$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0$$

解 2.2.11. 首先，分部积分得到：

$$\int f(x)f'(x)+f''(x)\mathrm{d}x=f'(x)+\frac{1}{2}f^2(x)$$

定义辅助函数 $g(x)=f'(x)+\frac{1}{2}f^2(x), x\in[0,1]$，由已知条件 $f(0)=2$, $f'(0)=-2$ 得 $g(0)=0$。因此，若能在 $(0,1]$ 内找到另一点 x_0 使得 $g(x_0)=0$，则对 g 在 $[0,x_0]$ 上应用罗尔定理，即存在 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$ 使 $g'(\xi)=0$，而 $g'(\xi)=f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)$，命题得证。下面寻找 g 的另一个零点。考虑方程 $g(x)=0$ 即 $f'(x)=-\frac{1}{2}f^2(x)$，这是一阶可分离方程，其通解为 $\frac{1}{f(x)}=\frac{x}{2}+C$。受此启发，构造函数

$$\varphi(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{f(x)},$$

但此式仅在 $f(x)\neq 0$ 时有定义。计算其导数：

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}+\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{\frac{1}{2}f^2(x)+f'(x)}{f^2(x)}=\frac{g(x)}{f^2(x)}.$$

因此 $\varphi'(x)=0$ 当且仅当 $g(x)=0$（在 $f(x)\neq 0$ 处）。现在分两种情况讨论。

情况 1：f 在 $(0,1)$ 内无零点。 此时 $f(x)\neq 0$ 对一切 $x\in[0,1]$ 成立，故 φ 在 $[0,1]$ 上连续可导。计算端点值：

$$\varphi(0)=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},\qquad \varphi(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1}=-\frac{1}{2},$$

即 $\varphi(0)=\varphi(1)$。由罗尔定理，存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $\varphi'(\eta)=0$，从而 $g(\eta)=0$。于是 $g(0)=g(\eta)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使 $g'(\xi)=0$，得证。

情况 2：f 在 $(0,1)$ 内有零点。 设这些零点将 $(0,1)$ 分成若干个开区间，在每个这样的区间上 f 不变号且不为零，因此 φ 在该区间上连续可导。考虑其中一个区间 (α,β)，其中 α,β 是相邻的零点或端点（注意 $f(0)=2\neq 0, f(1)=1\neq 0$，故端点 $0,1$ 不是零点）。于是 α 或 β 至少有一个是零点（因为区间端点要么是零点要么是端点，而端点非零点，所以区间至少有一端是零点）。不妨设 α 是零点，则当 $x\to\alpha^+$ 时，$f(x)\to 0$，故 $|\varphi(x)|\to\infty$（因为 $\frac{1}{f(x)}\to\infty$）。而 φ 在区间另一端（可能是 β 是零点或 1 等）处或趋于无穷或取有限值。因此 φ 在该区间上连续且在一端趋于无穷，从而 φ 在区间内部必存在极值点（例如，若趋于 $+\infty$，则函数有最小值；若趋于 $-\infty$，则有最大值）。设该极值点为 $\eta\in(\alpha,\beta)$，则 $\varphi'(\eta)=0$，即 $g(\eta)=0$。于是 $g(0)=g(\eta)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\eta)$（若 $\eta>0$）或 $\xi\in(\eta,1)$（若 $\eta<0$，但 $\eta\in(0,1)$ 故 $\eta>0$）使 $g'(\xi)=0$，得证。

综上所述，无论 f 在 $(0,1)$ 内是否有零点，总存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0.$$

2.3 多中值点问题

2.3.1 例题:

设 $f \in C[0,1] \bigcap D(0,1)$ 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明存在互不相同的 $\lambda, \mu \in (0,1)$ 使得

$$f'(\lambda)(1+f'(\mu))=2$$

解 2.3.1. 我们要证明存在两个不同的点 $\lambda, \mu \in (0,1)$ 使得

$$f'(\lambda)\big(1+f'(\mu)\big)=2.$$

思路是引入一个中间点 $c \in (0,1)$，然后分别用拉格朗日中值定理将 $f'(\lambda)$ 和 $f'(\mu)$ 用 $f(c)$ 表示出来。具体地，对任意 $c \in (0,1)$，在区间 $[0,c]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\lambda \in (0,c)$ 使得

$$f'(\lambda)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}.$$

在区间 $[c,1]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\mu \in (c,1)$ 使得

$$f'(\mu)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-f(c)}{1-c}.$$

于是

$$f'(\lambda)\big(1+f'(\mu)\big)=\frac{f(c)}{c}\left(1+\frac{1-f(c)}{1-c}\right)=\frac{f(c)}{c}\cdot\frac{2-c-f(c)}{1-c}.$$

我们希望存在某个 $c \in (0,1)$ 使得这个乘积等于 2，即

$$\frac{f(c)(2-c-f(c))}{c(1-c)}=2 \quad \Leftrightarrow f(c)(2-c-f(c))=2c(1-c) \Leftrightarrow (f(c)+(2c-2))(f(c)-c)=0$$

舍 $f(c)=c$，取 $f(c)=2-2c$，构造函数

$$g(x)=f(x)+2x-2, \quad x \in [0,1].$$

由已知 $f(0)=0$，$f(1)=1$ 得

$$g(0)=0+0-2=-2, \qquad g(1)=1+2-2=1.$$

由于 g 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理，存在 $c \in (0,1)$ 使得 $g(c)=0$，即 $f(c)=2-2c$。

取此 c，则如上所得的 $\lambda \in (0,c)$ 和 $\mu \in (c,1)$ 即为所求，且满足

$$f'(\lambda)\big(1+f'(\mu)\big)=2.$$

证毕。

2.3.2 例题:

设 $f \in C[0,1] \bigcap D(0,1)$ 使得 $f(0)=0, f(1)=1$, 正实数满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 证明存在互不相同的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1$$

解 2.3.2. 思路是引入 $n-1$ 个分点 $0=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$，然后在每个子区间 (y_{i-1}, y_i) 上对 f 应用拉格朗日中值定理，得到存在 $x_i \in (y_{i-1}, y_i)$ 使得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}, i=1,\ldots,n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(y_i-y_{i-1})}{f(y_i)-f(y_{i-1})}. \tag{1}$$

我们希望这个和等于 1。观察发现，如果能让每个分母 $f(y_i)-f(y_{i-1})$ 恰好等于 λ_i，那么 (1) 式就变成 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=1$，这正是我们需要的。因此问题转化为：能否在 $[0,1]$ 内选取 $n-1$ 个分点 $y_1,\ldots,y_{n-1}$，使得

$$f(y_i)-f(y_{i-1}) = \lambda_i \quad (i=1,\ldots,n),$$

其中 $y_0=0, y_n=1$，且 $f(y_0)=f(0)=0, f(y_n)=f(1)=1$。注意到 $\lambda_i>0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，因此这些等式相当于要求 $f(y_i)$ 依次取值为 $\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2, \ldots, \lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}$，而最后一个自动满足因为总和为 1。即令

$$t_i = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i, \quad i=1,\ldots,n-1,$$

则 $0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<1$。现在 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $f(0)=0, f(1)=1$，由介值定理，对每个 t_i，存在 $y_i \in (0,1)$ 使得 $f(y_i)=t_i$。由于 f 不一定单调，这些 y_i 可能不按顺序排列，但我们可以通过选择适当的原像来保证它们递增。事实上，因为 t_i 递增，我们可以先取 y_1 为某个满足 $f(y_1)=t_1$ 的点，然后在区间 $(y_1,1]$ 上考虑函数 f，它仍连续且 $f(y_1)=t_1, f(1)=1>t_2$，所以存在 $y_2>y_1$ 使得 $f(y_2)=t_2$，依此类推。这样得到一组严格递增的点 $0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<1$，满足 $f(y_i)=t_i$。于是

$$f(y_i)-f(y_{i-1}) = t_i-t_{i-1} = \lambda_i \quad (i=1,\ldots,n),$$

其中 $y_0=0, y_n=1$。现在，对每个子区间 $[y_{i-1}, y_i]$ 应用拉格朗日中值定理，存在 $x_i \in (y_{i-1}, y_i)$ 使得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}} = \frac{\lambda_i}{y_i-y_{i-1}} \Leftrightarrow \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = y_i-y_{i-1}.$$

求和得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1}) = y_n-y_0 = 1.$$

这样就找到了所需的 x_i，它们互不相同（因为分别属于不同的子区间）。

2.3.3 例题:

例题 10.22 设 $f \in C[0,1] \bigcap D(0,1)$ 使得 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得存在两两不同的 $x_1, x_2, \cdots, x_N \in (0,1)$ 满足

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j f'(x_j)}-1\right|<\varepsilon$$

解 2.3.3. 第一步：选取合适的 N。因为 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}=1$，所以存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j}-1\right|<\varepsilon.$$

记 $S=\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j}$，则 $S \in (0,1)$ 且 $|S-1|<\varepsilon$。

第二步：构造一组正数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ 满足 $\sum \lambda_i=1$。令

$$\lambda_i=\frac{1/2^i}{S}, \quad i=1, \ldots, N.$$

则 $\lambda_i>0$ 且 $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i=1$。

第三步：证明存在互异的 $x_1, \ldots, x_N \in (0,1)$ 使得 $\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=1$。为此通过插入分点来构造。令

$$t_0=0, \quad t_i=\lambda_1+\cdots+\lambda_i\ (i=1, \ldots, N-1), \quad t_N=1,$$

则 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=1$。由于 f 连续且 $f(0)=0, f(1)=1$，由介值定理，存在 $y_1 \in (0,1)$ 使得 $f(y_1)=t_1$。假设已找到 $y_{i-1} \in (0,1)$ 满足 $f(y_{i-1})=t_{i-1}$，则考虑区间 $[y_{i-1}, 1]$，在该区间上 f 连续，$f(y_{i-1})=t_{i-1}$，$f(1)=1>t_i$，故存在 $y_i \in (y_{i-1}, 1)$ 使得 $f(y_i)=t_i$。如此归纳，得到严格递增的点列

$$0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{N-1}<y_N=1,$$

且满足 $f(y_i)=t_i$ 对 $i=0,1, \ldots, N$ 成立（其中 $y_0=0, y_N=1$）。于是

$$f(y_i)-f(y_{i-1})=t_i-t_{i-1}=\lambda_i, \quad i=1, \ldots, N.$$

现在对每个子区间 $[y_{i-1}, y_i]$ 应用拉格朗日中值定理，存在 $x_i \in (y_{i-1}, y_i)$ 使得

$$f'(x_i)=\frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}=\frac{\lambda_i}{y_i-y_{i-1}} \Rightarrow \frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=y_i-y_{i-1}.$$

求和得

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{N}(y_i-y_{i-1})=y_N-y_0=1.$$

第四步：回到原表达式。由 $\lambda_i=\frac{1/2^i}{S}$ 知

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j f'(x_j)}=S \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{f'(x_j)}=S \cdot 1=S \Rightarrow\left|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j f'(x_j)}-1\right|=|S-1|<\varepsilon.$$

这样就找到了所需的 N 及两两不同的 $x_1, \ldots, x_N \in (0,1)$，证毕。

2.3.4 例题:

设 $f \in C[0,1]$ 且 $\int_0^1 f(x)\,dx \neq 0$, 证明存在互不相同的 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0,1]$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\,dx &= \left[\frac{1}{1+\theta_1^2}\int_0^{\theta_1} f(x)\,dx + f(\theta_1)\arctan\theta_1\right]\theta_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+\theta_2^2}\int_0^{\theta_2} f(x)\,dx + f(\theta_2)\arctan\theta_2\right](1-\theta_3)\end{aligned}$$

解 2.3.4. 分部积分

$$\begin{aligned}&\int\left(\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y + f(x)\arctan x\right)\mathrm{d}x \\ =&\int\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int f(x)\arctan x\mathrm{d}x \\ =&\int\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\arctan x + \int f(x)\arctan x\mathrm{d}x \\ =&\arctan x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y - \int f(x)\arctan x\mathrm{d}x + \int f(x)\arctan x\mathrm{d}x \\ =&\arctan x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = g(x), x\in[0,1], g(x)\in C[0,1].\end{aligned}$$

于是要证的等式可改写为

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f = g'(\theta_1)\,\theta_3 = g'(\theta_2)\,(1-\theta_3). \tag{1}$$

又 $g(0)=0$，$g(1)=\arctan 1\int_0^1 f = \frac{\pi}{4}\int_0^1 f$，所以

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f = \frac{1}{2}g(1).$$

现在，由已知 $\int_0^1 f \neq 0$ 知 $g(1)\neq 0$，且 $g(0)=0$，故 $\frac{1}{2}g(1)$ 介于 0 与 $g(1)$ 之间。由连续函数的介值定理，存在 $\theta_3\in(0,1)$ 使得

$$g(\theta_3) = \frac{1}{2}g(1). \tag{2}$$

接下来，分别在区间 $[0,\theta_3]$ 和 $[\theta_3,1]$ 上应用拉格朗日中值定理。因为 g 在 $[0,\theta_3]$ 上连续，在 $(0,\theta_3)$ 内可导，存在 $\theta_1\in(0,\theta_3)$ 和 $\theta_2\in(\theta_3,1)$ 使得

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\theta_3)-g(0)}{\theta_3-0} = \frac{g(\theta_3)}{\theta_3},\ g'(\theta_2) = \frac{g(1)-g(\theta_3)}{1-\theta_3}.$$

将 (2) 代入，得

$$g'(\theta_1) = \frac{g(1)}{2\theta_3},\quad g'(\theta_2) = \frac{g(1)}{2(1-\theta_3)} \Rightarrow g'(\theta_1)\,\theta_3 = \frac{g(1)}{2},\quad g'(\theta_2)\,(1-\theta_3) = \frac{g(1)}{2}.$$

而 $\frac{g(1)}{2} = \frac{\pi}{8}\int_0^1 f$，故 (1) 成立。显然 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 互不相同（$\theta_1<\theta_3<\theta_2$），这就完成了证明。

2.3.5 例题:

设 f, g 在 $[0,1]$ 可微且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明存在 $\xi, \eta \in (0,1), \xi \neq \eta$ 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$$

解 2.3.5. 已知 f, g 在 $[0,1]$ 上可微，且满足

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

将左端拆开：$\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^{\frac{2}{3}} f + \int_{\frac{2}{3}}^1 f$，代入 (1) 得

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f = 2\int_{\frac{2}{3}}^1 f. \tag{2}$$

积分中值定理，存在 $\theta \in (0, \frac{2}{3})$ 使 $\int_0^{\frac{2}{3}} f = \frac{2}{3}f(\theta)$，存在 $\eta \in (\frac{2}{3}, 1)$ 使得 $\int_{\frac{2}{3}}^1 f = \frac{1}{3}f(\eta)$。代入 (2) 得

$$\frac{2}{3}f(\theta) = 2\cdot\frac{1}{3}f(\eta) \quad\Longrightarrow\quad f(\theta) = f(\eta). \tag{3}$$

于是我们找到了两个不同的点 $\theta \in (0, \frac{2}{3})$ 和 $\eta \in (\frac{2}{3}, 1)$ 使得 $f(\theta) = f(\eta)$。现在考虑要证明的结论：存在 $\xi, \eta \in (0,1)$ 且 $\xi \neq \eta$ 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)\big[f(\eta) - f(\xi)\big]. \tag{4}$$

将 (4) 改写为

$$f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = g'(\xi)f(\eta).$$

这启发我们将其视为关于 f 的一阶线性微分方程：若将 η 暂时固定，则方程 $y' + g'y = g'f(\eta)$ 的通解为 $y = f(\eta) + Ce^{-g(x)}$，即 $(y - f(\eta))e^{g(x)}$ 为常数。因此，对给定的 η，函数

$$c(x) = \big[f(x) - f(\eta)\big]e^{g(x)}$$

的导数恰好为

$$c'(x) = \big[f'(x) + g'(x)(f(x) - f(\eta))\big]e^{g(x)}. \tag{5}$$

于是 $c'(\xi) = 0$ 等价于 (4)。由 (3) 知 $f(\theta) = f(\eta)$，故

$$c(\theta) = \big[f(\theta) - f(\eta)\big]e^{g(\theta)} = 0, \quad c(\eta) = \big[f(\eta) - f(\eta)\big]e^{g(\eta)} = 0.$$

因此 c 在 $[\theta, \eta]$ 上满足 $c(\theta) = c(\eta) = 0$（注意 $\theta < \eta$）。由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (\theta, \eta) \subset (0,1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$。代入 (5) 并注意到 $e^{g(\xi)} > 0$，即得

$$f'(\xi) + g'(\xi)(f(\xi) - f(\eta)) = 0 \quad\Longrightarrow\quad f'(\xi) = g'(\xi)\big[f(\eta) - f(\xi)\big].$$

这里 ξ 与 η 不同（因为 $\xi \in (\theta, \eta)$ 而 η 是右端点），故结论成立。

第三章 导数题

3.1 偏移题

3.1.1 例题:

（黎曼杯 T18 加强）$f(x)=\mathrm{e}^x-x\ln x-kx-1$．若函数 $f(x)$ 有两个零点，将其分别记为 a,b．

（1）试求 k 的取值范围；

（2）证明：

$$k>a+\ln b+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

（3）证明：

$$a+b>1-\frac{1}{\mathrm{e}^{k+1}}+\ln(k+1)$$

解 3.1.1. **(1)** 令 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}$，则原方程等价于 $g(x)=k$．求导得

$$g'(x)=\frac{(x-1)(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}.$$

由于 $x>0$ 时 $\mathrm{e}^x-1>0$，故 $g'(x)$ 的符号由 $x-1$ 决定：当 $0<x<1$ 时 $g'(x)<0$，当 $x>1$ 时 $g'(x)>0$．因此 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=1$ 处取得最小值 $g(1)=\mathrm{e}-1$．又 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，故对任意 $k>\mathrm{e}-1$，方程 $g(x)=k$ 恰有两个不同的实根；而当 $k\leq\mathrm{e}-1$ 时，方程至多有一个实根．因此 k 的取值范围是 $(\mathrm{e}-1,+\infty)$．

(2) 设 $f(x)$ 的两个零点为 α,β，且 $0<\alpha<1<\beta$．由 $f(\alpha)=0$ 得

$$k=\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha}-\ln\alpha-\frac{1}{\alpha}.$$

要证 $k>\alpha+\ln\beta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即证

$$\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha}-\ln\alpha-\frac{1}{\alpha}>\alpha+\ln\beta+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

整理得

$$\ln(\alpha\beta)<\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha}-\alpha-\frac{1}{\alpha}-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

构造函数 $G(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad(x>0)$，求导得

$$G'(x)=\frac{(x-1)(\mathrm{e}^x-x-1)}{x^2}.$$

由 $\mathrm{e}^x \geq x+1$（当且仅当 $x=0$ 取等），知当 $x>0$ 时 $\mathrm{e}^x-x-1>0$，故 $G'(x)$ 的符号由 $x-1$ 决定：$0<x<1$ 时 $G'(x)<0$，$x>1$ 时 $G'(x)>0$．因此 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，最小值 $G(1)=\mathrm{e}-2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$，从而 $G(x)>0$ 恒成立．于是欲证原不等式，只需证 $\ln(\alpha\beta)<0$，即 $\alpha\beta<1$．

下证 $\alpha\beta<1$．考虑函数 $F(x)=I(x)-I\left(\dfrac{1}{x}\right)$，其中 $I(x)=\mathrm{e}^x-x\ln x-kx-1$．对 $x\geq 1$ 求导整理得

$$F'(x)=\frac{(x-1)\big(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{1/x}+x-1\big)}{x^2}.$$

令 $m(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{1/x}+x-1$，则

$$m'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{1/x}+\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}+1>0 \quad (x>1),$$

且 $m(1)=0$，故 $m(x)>0$ 对 $x>1$ 恒成立．因此 $F'(x)>0$（$x>1$），$F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，且 $F(1)=0$，从而 $F(x)\geq 0$，即 $I(x)\geq I(1/x)$ 对 $x\geq 1$ 成立．取 $x=\beta>1$，得 $I(\beta)\geq I(1/\beta)$．由 $I(\beta)=0$ 知 $I(1/\beta)\leq 0$．

另一方面，由第 (1) 问定义的 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，且 $g(\alpha)=k$，易知 $I(x)=x\big(g(x)-k\big)$．因为 $g(x)-k$ 在 $(0,1)$ 上严格递减且恰有一个零点 $x=\alpha$，所以当 $x\in(0,\alpha)$ 时 $g(x)-k>0$，$I(x)>0$；当 $x\in(\alpha,1)$ 时 $g(x)-k<0$，$I(x)<0$．于是由 $I(1/\beta)\leq 0$ 及 $1/\beta\in(0,1)$ 可得 $1/\beta\geq\alpha$，即 $\alpha\beta\leq 1$．若 $\alpha\beta=1$，则 $1/\beta=\alpha$，代入得 $I(\alpha)=I(\beta)=0$ 且 $\beta=1/\alpha$，但此时 $g(\alpha)=g(1/\alpha)$．容易验证 $g(x)\neq g(1/x)$ 对 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 成立（例如由 $F(x)$ 的性质可推知），矛盾．因此 $\alpha\beta<1$．

综上，$\ln(\alpha\beta)<0$，从而原不等式得证．

3.1.2 例题: 来自群友"港"

曲线 $\Gamma : x^2 + \ln^2 y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right)^2$，$AB$ 为 Γ 的一条弦.

（1）求 Γ 的最高点 P，最低点 Q 的坐标.

（2）若 AB 的斜率为 0，求 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值.

（3）求 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值.

解 3.1.2. 记 $R = \frac{e}{e+1}$，则方程化为 $x^2 + (\ln y)^2 = R^2$。由此可得参数方程：

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = e^{R\sin\theta}, \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

(1) 当 $\sin\theta = 1$ 时 y 取最大值 e^R, 此时 $x = 0$; 当 $\sin\theta = -1$ 时 y 取最小值 e^{-R}，此时 $x = 0$。故最高点为 $P(0, e^R)$, 最低点为 $Q(0, e^{-R})$, 即 $P\left(0, e^{\frac{e}{e+1}}\right)$， $Q\left(0, e^{-\frac{e}{e+1}}\right)$.

(2) 由于直线 l 斜率为 0，即水平线，由曲线关于 y 轴对称，可设 A 在左半平面，B 在右半平面，且 A 与 B 关于 y 轴对称。设 B 对应的参数为 θ（$\cos\theta > 0$），则 $B(R\cos\theta, \mathrm{e}^{R\sin\theta})$，$A(-R\cos\theta, \mathrm{e}^{R\sin\theta})$。于是 $\triangle PAB$ 的底边长 $AB = 2R\cos\theta$，高为 $\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{R\sin\theta}$，面积

$$S(\theta) = R\cos\theta\,(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{R\sin\theta}), \quad \theta \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

令 $t = R\sin\theta$，则

$$S(t) = \sqrt{R^2 - t^2}\,(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t).$$

为求最大值，考虑函数 $\varphi(t) = \ln S(t)$：

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\ln(R^2 - t^2) + \ln(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t), \;\; \varphi'(t) = -\frac{t}{R^2 - t^2} - \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t}$$

$$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t\mathrm{e}^R + \mathrm{e}^t(R^2 - t^2 - t) = 0 \Leftrightarrow t\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}} + \mathrm{e}^t\left(\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right)^2 - t^2 - t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}})\left(\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right)^2 - t^2 - t\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}\left(t + \frac{1}{\mathrm{e}+1}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}+1} - t\right) = 0$$

得到驻点 $t = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}$，再求二阶导：

$$\varphi''(t) = -\frac{(R^2 - t^2) - t(-2t)}{(R^2 - t^2)^2} - \frac{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t) - \mathrm{e}^t(-\mathrm{e}^t)}{(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t)^2} = -\frac{R^2 + t^2}{(R^2 - t^2)^2} - \frac{\mathrm{e}^t\mathrm{e}^R}{(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t)^2} < 0$$

因此 $\varphi'(t)$ 在 $(-R, R)$ 上严格单调递减，故方程 $\varphi'(t) = 0$ 至多有一个实根 $t = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}$。由于 $S(t)$ 在端点 $t = \pm R$ 处为零，在 $(-R, R)$ 内为正，故该驻点即为最大值点。此时 $c = \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}$，代入得

$$S_{\max} = \sqrt{R^2 - \left(-\frac{1}{\mathrm{e}+1}\right)^2}\left(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}(\mathrm{e}-1)$$

(3) 对于一般直线 l，设 $A(R\cos\theta_1, \mathrm{e}^{R\sin\theta_1})$，$B(R\cos\theta_2, \mathrm{e}^{R\sin\theta_2})$，则 $\triangle PAB$ 面积为

$$S(\theta_1,\theta_2) = \frac{R}{2}\left|\cos\theta_1(\mathrm{e}^{R\sin\theta_2} - \mathrm{e}^R) - \cos\theta_2(\mathrm{e}^{R\sin\theta_1} - \mathrm{e}^R)\right|.$$

由面积表达式及三角不等式得

$$S \le \frac{R}{2}\left(|\cos\theta_1|(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{R\sin\theta_2}) + |\cos\theta_2|(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{R\sin\theta_1})\right) \triangleq H(\theta_1,\theta_2),$$

等号成立当且仅当 $\cos\theta_1$ 与 $\cos\theta_2$ 异号。令 $u = \sin\theta_1, v = \sin\theta_2$，则

$$H(u,v) = \frac{R}{2}\left(\sqrt{1-u^2}\,(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{Rv}) + \sqrt{1-v^2}\,(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{Ru})\right).$$

求偏导数并令其为零，得到方程组

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{Rv}) = -R\sqrt{1-v^2}\,\mathrm{e}^{Ru}, \quad \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{Ru}) = -R\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{e}^{Rv}.$$

由对称性知 $u, v < 0$，令 $a = -u > 0, b = -v > 0$，则方程组化为

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-Rb}) = R\sqrt{1-b^2}\,\mathrm{e}^{-Ra}, \quad \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-Ra}) = R\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{e}^{-Rb}.$$

两式相除并整理得

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-Rb}}{\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-Ra}} = \mathrm{e}^{-R(a-b)}.$$

取对数后移项得到

$$\ln a + \ln(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-Ra}) + Ra = \ln b + \ln(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-Rb}) + Rb.$$

定义函数 $K(t) = \ln t + \ln(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-Rt}) + Rt = \ln t + \ln(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}t}) + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}t$，则由复合函数单调性得到 $K(t)$ 严格递增，从而 $a = b$，即 $u = v$。因此极值点必满足 $u = v$，此时

$$H(u,u) = R\sqrt{1-u^2}(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{Ru}),$$

与 (2) 中形式相同，由 (2) 知该函数的最大值在 $u = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处取得，同时，等号条件要求 $\cos\theta_1$ 与 $\cos\theta_2$ 异号，故取 $\theta_2 = \pi - \theta_1$，此时直线为水平线 $y = \mathrm{e}^{Ru} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}$，且 S 达到该最大值。由于 $H(u,v)$ 在边界 $u, v = \pm 1$ 上为零，而内点值大于零，故该驻点即为全局最大值点。综上，$\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}(\mathrm{e}-1)$

3.1.3 例题:

（1）若 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，判断 $2\cos^2\theta$ 与 $\left(\frac{1}{n}\cos 2\theta+1\right)^n$ 的大小关系，并证明.
（2）证明：对于任意自然数 n，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有

$$\left(\sin^2\theta+\sin^3\theta+\cdots+\sin^{2n}\theta+\sin^{2n+1}\theta\right)+\left(\cos^2\theta+\cos^3\theta+\cdots+\cos^{2n}\theta+\cos^{2n+1}\theta\right)$$
$$\geq\left(\sqrt{2}+2\right)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

解 3.1.3. （1）取 $\theta=0$ 探路，显然有 $2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，于是考虑证明 $2\cos^2\theta\leqslant\left(\frac{1}{n}\cos 2\theta+1\right)^n$，即 $1+\cos 2\theta\leqslant\left(\frac{1}{n}\cos 2\theta+1\right)^n$，取对数即 $\ln(1+\cos 2\theta)\leqslant n\ln\left(1+\frac{\cos 2\theta}{n}\right)$，改造成：

$$f(x)=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\ln(1+x)$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{x}{n}}-\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)-\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)(1+x)}=\frac{x\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)(1+x)}.$$

因此 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减，在 $[0,1]$ 上单调递增，从而 $f(x)\geqslant f(0)=0$ 对任意 $x\in(-1,1]$ 成立，等号仅当 $x=0$ 时取得。于是 $1+\cos 2\theta\leqslant\left(1+\frac{\cos 2\theta}{n}\right)^n$，即 $2\cos^2\theta\leqslant\left(\frac{1}{n}\cos 2\theta+1\right)^n$，等号当 $\cos 2\theta=0$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时成立。
（2）由二倍角公式，$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$，则对于任意正整数 $m\geq 2$，

$$\sin^m\theta+\cos^m\theta=2^{-\frac{m}{2}}\left[(1-\cos 2\theta)^{\frac{m}{2}}+(1+\cos 2\theta)^{\frac{m}{2}}\right].$$

令 $x=\cos 2\theta\in(-1,1)$，则需证的和式为

$$S(\theta)=\sum_{m=2}^{2n+1}2^{-\frac{m}{2}}\left[(1-x)^{\frac{m}{2}}+(1+x)^{\frac{m}{2}}\right].$$

对于每个 $k=\frac{m}{2}\in\{1,1.5,2,\ldots,n+0.5\}$，考虑函数 $\varphi_k(x)=(1-x)^k+(1+x)^k$。由于 $\varphi_k(x)$ 是偶函数，且当 $x>0$ 时，

$$\varphi_k'(x)=-k(1-x)^{k-1}+k(1+x)^{k-1}=k\left[(1+x)^{k-1}-(1-x)^{k-1}\right]>0,$$

所以 $\varphi_k(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，从而在 $x=0$ 处取最小值 $\varphi_k(0)=2$。因此

$$(1-x)^{\frac{m}{2}}+(1+x)^{\frac{m}{2}}\geq 2\Rightarrow\sin^m\theta+\cos^m\theta\geq 2\cdot 2^{-\frac{m}{2}}=2^{1-\frac{m}{2}}.$$

对 m 从 2 到 $2n+1$ 求和得

$$S(\theta)\geq\sum_{m=2}^{2n+1}2^{1-\frac{m}{2}}=2\sum_{m=2}^{2n+1}2^{-\frac{m}{2}}=2\cdot\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\right)}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=(2+\sqrt{2})\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

等号成立当且仅当 $x=0$，即 $\cos 2\theta=0$，亦即 $\theta=\frac{\pi}{4}$。因此原不等式得证。

3.1.4 例题:

证明：曲线

$$y = (x - \ln x)e^{1-x}$$

上不存再不同的两点关于直线 $y = x$ 对称

解 3.1.4.

3.1.5 例题: 邪帝导数题

已知函数 $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x}, (a > 1)$

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3), (x_1 < x_2 < x_3)$，证明 $f(x_1x_2x_3) < 1 - a$.

解 3.1.5.

3.1.6 例题: 远古偏移题，来自陈语梦

已知 $x_1 - \ln(\ln x_1 + 1) = x_2 - \ln(\ln x_2 + 1) = m$ 求证

$$m + 1 < x_1 + x_2 < \frac{7}{6}m + \frac{5}{6}$$

解 3.1.6. 设函数 $f(x) = x - \ln(\ln x + 1) - 1$，左侧化为

$$g(x) = x^2 - x\,(m+1) + 1 = x\ln(\ln x + 1) - x + 1, \quad x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

加强证明 $g(x)$ 单调递增，求导得 $g'(x) = \ln(\ln x + 1) + x \cdot \frac{1}{\ln x + 1} \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(\ln x + 1) + \frac{1}{\ln x + 1} - 1$ 又因为任意 $x > 0$ 有 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$，所以 $g'(x) > 0$，故 $g(x)$ 单调递增。右侧化为

$$g(x) = x^2 - x\left(\frac{7}{6}f(x) + \frac{5}{6}\right) + 1 = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{5}{6}x + \frac{7}{6}x\ln(\ln(x) + 1)$$

可以考虑证明函数

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) + \frac{1}{6}f(x) + \frac{7}{72}f^2(x) = x^2 - x\left(\frac{7}{6}f(x) + \frac{5}{6}\right) + 1 + \frac{1}{6}f(x) + \frac{7}{72}f^2(x) \\ &= \end{aligned}$$

单调递减，上界：

$$x_1 + x_2 + x_3 < 2 + (\mathrm{e} - 3)m - \frac{m^2}{2} - \frac{2}{3}m^3$$

3.1.7 例题: 来自 amare Donata Caesia

$x_1\ln x_1=x_2\ln x_2=-x_3\ln x_3,x_1<x_2<x_3$，证明 $x_1+x_2+x_3>2$

解 3.1.7. 考虑加强证明

$$\begin{cases} x_1+x_2>1+m+\frac{m^2}{2} \\ x_3>1-m-\frac{m^2}{2} \end{cases}$$

第一个不等式，考虑加强证明 $x_1+x_2>\mathrm{e}(3-\mathrm{e})m^2+m+1$，化成 $x-\ln x$ 的经典偏移模型，即证

$$x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2=a>1,\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\mathrm{e}^a-1+\frac{\mathrm{e}(3-\mathrm{e})}{\mathrm{e}^a}$$

假设 $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2},x_1<1<x_2$，即证

$$g(x)=\frac{1}{x^2}-\left(\mathrm{e}^a-1+\frac{\mathrm{e}(3-\mathrm{e})}{\mathrm{e}^a}\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1+\mathrm{e}(3-\mathrm{e})\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)\frac{1}{x},g(x_1)>g(x_2)$$

则 $x=1$ 必然是极值点，只需要改造 $g(x)$ 使得其单调递减即可完成加强证明，显然地，考虑到 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2=a$，取指数就有 $\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1}=\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}=\mathrm{e}^a$，只需证明

$$\begin{aligned} h(x)&=\frac{1}{x^2}-\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1+\mathrm{e}(3-\mathrm{e})\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{x}+1+\mathrm{e}(5-2\mathrm{e})\frac{x}{\mathrm{e}^x} \\ h'(x)&=\frac{\mathrm{e}^x(2-x)-2}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\left[8-3\mathrm{e}-(5-2\mathrm{e})x\right] \end{aligned}$$

$h(x)$ 单调递减即可，设 $H(x)=x^3\mathrm{e}^xh'(x)=\mathrm{e}^{2x}(2-x)-(x+2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}x^3\left[8-3\mathrm{e}-(5-2\mathrm{e})x\right]$ 求 4 次导数把 x 的幂函数导掉：

$$\begin{aligned} H'(x)&=e^{2x}(3-2x)-e^x(x+3)+3e(8-3e)x^2-4e(5-2e)x^3 \\ H''(x)&=4\mathrm{e}^{2x}(1-x)-\mathrm{e}^x(x+4)+6\mathrm{e}(8-3\mathrm{e})x-12\mathrm{e}(5-2\mathrm{e})x^2 \\ H'''(x)&=4\mathrm{e}^{2x}(1-2x)-\mathrm{e}^x(x+5)+6\mathrm{e}(8-3e)-24\mathrm{e}(5-2\mathrm{e})x \\ H''''(x)&=-16x\mathrm{e}^{2x}-(x+6)\mathrm{e}^x-24\mathrm{e}(5-2\mathrm{e}) \end{aligned}$$

显然对于 $x>0$，$H''''(x)$ 单调递减，且 $H''''(0)=-6+24\mathrm{e}(2\mathrm{e}-5)>0,\lim\limits_{x\to+\infty}H''''(x)=-\infty$，故其存在零点 $(\xi_1,0)$，则 $H'''(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 单增，在 $(\xi_1,+\infty)$ 单减，由于

$$H'''(0)=-1+6\mathrm{e}(8-3\mathrm{e})<0,H'''(1)=26\mathrm{e}^2-78\mathrm{e}<0,H'''\left(\frac{1}{2}\right)=6\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}-\frac{11}{2}\sqrt{\mathrm{e}}>0$$

故 $H'''(x)$ 存在零点 $(\xi_2,0),(\xi_3,0)$，那么 $H''(x)$ 在 $(0,\xi_2)$ 单减，在 (ξ_2,ξ_3) 单增，在 $(\xi_3,+\infty)$ 单减，由于

$$H''(0)=0,H''\left(\frac{1}{2}\right)=11\mathrm{e}-\frac{9}{2}\sqrt{\mathrm{e}}-3\mathrm{e}^2>0,H''(1)=6\mathrm{e}^2-17\mathrm{e}<0$$

所以 $H''(x)$ 存在零点 $(\xi_4,0),(\xi_5,0)$，所以 $H'(x)$ 在 $(0,\xi_4)$ 单减，在 (ξ_4,ξ_5) 单增，在 (ξ_5,∞) 单减，由于 $H'(0)=H'(1)=0$，所以 $H'(x)$ 存在零点 $(\xi_6,0)$，那么 $H(x)$ 在 $(0,\xi_6)$ 单减，在 $(\xi_6,1)$ 单

增，在 $(1,+\infty)$ 单减，又因为 $H(0)=H(1)=0$，所以 $H(x)\leqslant 0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单减。于是 $x_1+x_2>\mathrm{e}(3-\mathrm{e})m^2+m+1$ 得证.

下证 $x_3>1-m-\frac{m^2}{2}>1$，对于 $m\in(-\frac{1}{\mathrm{e}},0)$，不难验证后一个"$>$"成立，两边套函数名 $-m=x_3\ln x_3>(1-m-\frac{m^2}{2})\ln(1-m-\frac{m^2}{2})$ 即证

$$p(m)=\frac{m}{\frac{m^2}{2}+m-1}-\ln(1-m-\frac{m^2}{2})>0,\forall m\in(-\frac{1}{\mathrm{e}},0)$$

令 $t=-m\in(0,\frac{1}{e})$，则不等式化为

$$f(t)=\frac{t}{1+t-\frac{t^2}{2}}-\ln\left(1+t-\frac{t^2}{2}\right)>0,\ f'(t)=\frac{t^2\left(2-\frac{t}{2}\right)}{\left(1+t-\frac{t^2}{2}\right)^2}>0,\quad \forall t\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$$

且 $f(0)=0$，故 $f(t)>0$ 在区间内成立，即 $x_3>1-m-\frac{m^2}{2}>1$。这就证明了 $x_1+x_2+x_3>2$.

第四章 插入中间函数