系 统 科 学与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
39(5) (2019, 5), 804–822

一类超越函数多项式不等式的自动证明*

陈世平[1] 刘 忠[2]

(1. 四川省商贸学校中国民航飞行学院德阳校区, 德阳 618000; 2. 乐山职业技术学院, 乐山 614000)

摘要 讨论了形如 $f(x, \mathrm{trans}_1(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x)) > 0$ 的超越函数多项式不等式的自动证明问题, 运用 Taylor 展开式将目标不等式的证明转化为一系列的一元多项式不等式的验证, 然后借助代数不等式证明工具完成最后的工作. 运用 Maple 实现了上述算法, 算法对常见超越函数多项式不等式十分高效, 并且可以输出 "可读" 的证明过程.

关键词 超越函数多项式不等式, 规范展开, Taylor 替换, 逐次 Taylor 替换.

MR(2000) 主题分类号 68T15, 26D07

Automated Proving for a Class of Transcendental-Polynomial Inequalities

CHEN Shiping[1] LIU Zhong[2]

(1. *Deyang Branch of Civil Aviation Flight University of China-Sichuan Trade School, Deyang* 618000; 2. *Leshan Vocational & Technical College, Leshan* 614000)

Abstract The problem of mechanical proving for transcendental-polynomial inequalities in accordance with the model of $f(x, \mathrm{trans}_1(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x)) > 0$ is discussed. Using Taylor expansion, the proving of the target inequality is reduced to the verification of a series of polynomial inequalities with only one variable, and then completed by algebraic inequality-proving package. The above algorithms are implemented on Maple, and very efficient for the common transcendental-polynomial inequalities, furthermore the procedure is "readable".

Keywords Transcendental-polynomial inequalities, regular expansion, Taylor-substitution, successive Taylor-substitution.

* 德阳市校 (院、所) 市科技合作计划资助课题.
收稿日期: 2018-01-18, 收到修改稿日期: 2018-06-01.
编委: 袁春明.

1 引 言

不等式的自动证明问题, 一直以来都是数学机械化和自动推理领域研究热点和难点问题. 近年来, 代数不等式的自动证明吸引了大批学者研究, 也取得了丰富的成果, 已有专著《不等式机器证明与自动发现》问世, 特别是杨路教授提出了降维算法, 据之编制的通用程序 BOTTEMA 能够成批验证不等式, 但 BOTTEMA 只能处理代数不等式或先把几何不等式转化为代数不等式, 尚不能解决一般的超越不等式自动证明问题 [1−5]. 虽然关于超越不等式已有了大量的研究成果和证明方法, 但这些成果和方法不能适应数学机械化和推理自动化的需要, 故有必要对此类不等式的自动证明进行专门的研究, 探索新的算法.

文 [6–9] 为解决 "类似 $\sin(x) < x < \tan(x)$ 的超越不等式" 的机器证明问题 [4], 对超越不等式的自动证明作了很有意义的探索: 设计并实现了一个完备算法, 解决了形如 $f(x, \tan(\frac{x}{2})) > 0$ 其中 ($f(x, y)$ 为二元有理多项式) 或形如 $f(x, \sin(x), \cos(x)) > 0$ (其中 $f(x, y, z)$ 为三元有理多项式) 的三角函数多项式不等式机器证明, 算法运用超越函数的 Taylor 展开式建立一个逼近目标函数的一元多项式套, 从而将证明转化为一系列的一元多项式不等式的验证, 然后借助代数不等式证明工具 (如 BOTTEMA 的 xprove) 完成最后的工作 (本文将此方案称为 Taylor 替换法).

文 [10] 探讨一种具有形如 $f(x, \mathrm{e}^x) > 0$ (其中 $f(x, y)$ 为二元有理多项式) 的指数多项式不等式的自动判定问题, 设计了一个基于 Taylor 替换的完备算法, 该算法回避了函数根的判定和求解问题, 并且可以输出 "可读" 的证明过程. 文 [11–13] 对指数多项式的性质进行了深入的研究并为其根的自动求解提出了一个基于微分法的算法, 其核心思想是: 要求出指数多项式 $\phi(x)$ 的实根, 先隔离其导数 $\phi'(x)$ 的实根, 然后利用 $\phi(x)$ 被 $\phi'(x)$ 的实根所分割的逐段区间中的单调性再隔离 $\phi(x)$ 的实根, 借助上述算法可以实现指数多项式不等式的自动判定.

文 [14–21] 提出的 "自然方法" (Natural Approach) 运用 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$ 的 Taylor 展开式将目标不等式转化为多项式或有理函数, 解决了大量的含有三角函数的多项式不等式的证明问题.

本文的目标是解决更为广泛形如 $f(x, \mathrm{trans}_1(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x)) > 0$ 的超越函数多项式不等式的自动证明问题 ($f(x, x_1, \cdots, x_n)$ 为 $n+1$ 元代数多项式), 其中 $\mathrm{trans}_i(x)$ 可以为任意基本初等超越函数, 如 $\sin(x)$、$\cos(x)$、$\tan(x)$、$\arcsin(x)$、$\arccos(x)$、$\arctan(x)$、e^x、$\ln(x)$ 等, 也可以为形如 $\mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x))$ 的 "复合" 超越函数.

2 超越函数多项式不等式及其自动证明

本节讨论如何运用 Taylor 替换法建立逼近超越函数的多项式套, 设计超越函数多项式不等式自动证明的算法, 并讨论相关算法的终止性. 若非特别说明, 假定变量都大于 0, 区间 I 和 J 具有 $(0, T]$ 形式.

2.1 Taylor 替换

给定 $(n+1)$ 元实系数多项式环 $R[x, x_1, \cdots, x_n]$, 定义该环上一个映射: hom: $f(x, x_1, \cdots, x_n) \to F(x)$, 将变量 x_i 用某个超越函数 $\mathrm{trans}_i(x)$ 代替.

定义 2.1 给定 $(n+1)$ 元实系数多项式 $f(x, x_1, \cdots, x_n)$, 它在映射 hom下的像 $F(x) =$

$\mathrm{hom}(f)=f(x,\mathrm{trans}_1(x),\cdots,\mathrm{trans}_n(x))$ 称为超越函数多项式, 称 $\mathrm{trans}_i(x)$ 为其超越因子.

如 $x+\sin(x)$、$x+\cos(\sqrt{x})$、$x+\mathrm{e}^{\sin(x)}$、$x+\arctan(x)-\arcsin(x)$ 都是超越函数多项式, $\sin(x)$、$\cos(\sqrt{x})$、$\mathrm{e}^{\sin(x)}$、$\arctan(x)$、$\arcsin(x)$ 是函数的超越因子.

定义 2.2 对于超越函数 $F(x)$, 在某个区间 I, 如果有代数函数列 $\{T_{\min}(n,F)\}$ 和 $\{T_{\max}(n,F)\}$, 存在自然数 n_0, 当 $n\geq n_0$ 时, 满足

1) $T_{\min}(n+1,F)>T_{\min}(n,F)$, 且 $\lim_{n\to\infty}T_{\min}(n,F)=F(x)$;

2) $T_{\max}(n+1,F)<T_{\max}(n,F)$, 且 $\lim_{n\to\infty}T_{\max}(n,F)=F(x)$.

我们称 $\{T_{\min}(n,F)\}$ 和 $\{T_{\max}(n,F)\}$ 分别为 $F(x)$ 在区间 I 的下限多项式列和上限多项式列, $T_{\min}(n,F)$ 为 $F(x)$ 的下限多项式, $T_{\max}(n,F)$ 为 $F(x)$ 的上限多项式, n_0 称为临界值.

$F(x)$ 的下限多项式和上限多项式满足

$T_{\min}(n_0,F)(x)<T_{\min}(n_0+1,F)(x)<T_{\min}(n_0+2,F)(x)<\cdots<F(x)<\cdots<T_{\max}(n_0+2,F)(x)<T_{\max}(n_0+1,F)(x)<T_{\max}(n_0,F)(x)$, 也就是说有一个多项式套来逼近 $F(x)$;

$(T_{\min}(n_0,F)(x),T_{\max}(n_0,F)(x))\supset(T_{\min}(n_0+1,F)(x),T_{\max}(n_0+1,F)(x))\supset(T_{\min}(n_0+2,F)(x),T_{\max}(n_0+2,F)(x))\supset\cdots\supset\{F(x)\}$.

下面我们讨论如何计算超越函数多项式 $F(x)=f(x,\mathrm{trans}(x))$ 的下限多项式和上限多项式 (其中 $f(x,y)$ 为二元多项式).

为方便, 我们将函数 $f(x)$ 在 0 点的 Taylor 展开式中的前 n 项记为 $\mathrm{taylor}(f,n)$. 显然若 $\mathrm{taylor}(f,n)$ 收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)=\mathrm{taylor}(f,n)+o(x^p)$, $p\geq n-1$.

定义 2.3 如果超越函数 $f(x)$ 在某个区间 $(0,T]$ 满足以下条件: 1) $f(x)>0$; 2) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{taylor}(f,n)=f(x)$; 3) $\mathrm{taylor}(f,n)$ 可以表示为 $f_1(x)-f_2(x)+f_3(x)+\cdots+(-1)^{n-1}f_n(x)$, 其中 $f_n(x)=A_n*x^{m_n}$, $0<A_n\leq 1$, $m_{n-1}<m_n$; 4) 存在常数 n_0, 当 $n\geq n_0$ 时, $\mathrm{taylor}(f,n)>0$, $f_n(x)>f_{n+1}(x)>0$. 我们称 $f(x)$ 在区间 $(0,T]$ 内可规范展开, 常数 n_0 称为其临界值. 若还满足 $A_n\leq\frac{1}{(n-1)!}$, 则称 $f(x)$ 在区间 $(0,T]$ 内可强规范展开.

常见的在相应区间内可以规范展开的基本初等超越函数有

$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ $(|x|\leq 1)$, 在区间 $(0,1]$ 可以规范展开, 临界值 $n_0=1$;

$\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$, 在区间 $(0,T]$ (T 为任意正数, 下同) 可以规范展开, 临界值 $n_0=\min\{n\in N$, 当 $0<x\leq T$ 时, $\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-x},n)>0$, $\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-x},n+1)>0\}$;

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\cdots$ $(0<x\leq 1)$, 在区间 $(0,1]$ 是可以规范展开, 临界值 $n_0=1$;

$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\cdots$, 在区间 $(0,T]$ 可以规范展开, 临界值 $n_0=\min\{n\in N$, 当 $0<x\leq$ T 时, $\mathrm{taylor}(\sin(x),n)>0$, $\mathrm{taylor}(\sin(x),n+1)>0$, $2n(2n+1)>T^2\}$, 特别地, 当 $T=\frac{\pi}{2}$ 时, $n_0=1$;

$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots$, 在区间 $(0,T]$ 可以规范展开, 其中 $0<T<\frac{\pi}{2}$, 临界值 $n_0=\min\{n\in N$, 当 $0<x\leq T$ 时, $\mathrm{taylor}(\cos(x),n)>0$, $\mathrm{taylor}(\cos(x),n+1)>0$, $2n(2n-1)>T^2\}$. 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, 对任意 n, $\mathrm{taylor}(\cos(x),2n)<\cos(x)=0$, 所以 $\cos(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 内不能规范展开.

其中 e^{-x}、$\sin(x)$、$\cos(x)$ 在相应区间内还可强规范展开. 也有一些基本初等超越函数不能规范展开, 如 $\arcsin(x)$、$\arccos(x)$、e^x 等.

引理 2.1 如果 $f(x)$ 区间 I 可以规范展开, 临界值为 n_0, 则在区间 I 上

1) 当 $2n-2 \geq n_0$ 时, $\mathrm{taylor}(f, 2n-2) < \mathrm{taylor}(f, 2n) < f(x)$;

2) 当 $2n-1 \geq n_0$ 时, $\mathrm{taylor}(f, 2n-1) > \mathrm{taylor}(f, 2n+1) > f(x)$;

3) 当 $n \to \infty$ 时, $\mathrm{taylor}(f, n) \to f(x)$.

用 f^+ 和 f^- 分别表示多项式 f 展开后的正项和负项, 显然 $f = f^+ + f^-$, 且下面的引理成立:

引理 2.2 假设多项式 $T_1(y) > 0$, $T_2(y) > 0$ 且 $T_1(y) < x < T_2(y)$, 则

$$f^+(T_1(y), y) + f^-(T_2(y), y) < f(x, y) < f^+(T_2(y), y) + f^-(T_1(y), y).$$

定理 2.1 $F(x) = f(x, \mathrm{trans}(x))$, $f(x, y)$ 为二元多项式, $\mathrm{trans}(x)$ 在区间 I 可以规范展开, 则

$T_{\max}(n, F) = f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}(x), 2n-1)) + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}(x), 2n))$ 为 $F(x)$ 的上限多项式;

$T_{\min}(n, F) = f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}(x), 2n)) + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}(x), 2n-1))$ 为 $F(x)$ 的下限多项式.

上述方案运用 Taylor 展开式计算出超越函数 $f(x, \mathrm{trans}(x))$ 的上下限多项式列, 就建立了一个逼近目标函数的一元多项式套, 从而可以将目标不等式的证明转化为一系列的一元多项式不等式的验证, 然后可以借助代数不等式证明工具 (如 BOTTEMA 的xprove) 完成最后的工作, 我们将这种方案称为 Taylor 替换法.

2.2 逐次 Taylor 替换

一般的初等超越函数可能包含多个超越因子, 超越因子可能还是由超越函数或代数函数复合而成, 经过一次 Taylor 替换后的函数可能还是包含超越因子, 还需要再次甚至多次的 Taylor 替换. 我们以 $F(x) = f(x, \mathrm{trans}_1(x), \mathrm{trans}_2(x))$ 和 $F(x) = f(x, \mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))$ 为例来描述这个过程

1) $F(x) = f(x, \mathrm{trans}_1(x), \mathrm{trans}_2(x))$, 其中超越函数 $\mathrm{trans}_1(x)$、$\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 I 内可以规范展开, 临界值分别为 n_1、n_2.

令 $f_1(x, \mathrm{trans}_2(x), m) = f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x), 2m), \mathrm{trans}_2(x)) + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x), 2m-1), \mathrm{trans}_2(x))$;

令 $f_2(x, m, n) = f_1^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n), m) + f_1^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n-1), m)$, 显然当 $m > n_1$ 时, $f_1(x, \mathrm{trans}_2(x), m) < f_1(x, \mathrm{trans}_2(x), m+1) < f(x, \mathrm{trans}_1(x), \mathrm{trans}_2(x))$, 当 $m \to \infty$ 时, $f_1(x, \mathrm{trans}_2(x), m) \to f(x, \mathrm{trans}_1(x), \mathrm{trans}_2(x))$;

当 $n > n_2$ 时, 对任意 $m > n_1$, $f_2(x, m, n) < f_2(x, m, n+1) < f_1(x, \mathrm{trans}_2(x), m)$, 当 $n \to \infty$ 时, $f_2(x, m, n) \to f_1(x, \mathrm{trans}_2(x), m)$;

即当 $m > n_1$, $n > n_2$ 时, $f_2(x, m, n) < f_2(x, m+1, n+1) < f(x, \mathrm{trans}_1(x), \mathrm{trans}_2(x))$, 当 $m \to \infty$, $n \to \infty$ 时, $f_2(x, m, n) \to F(x)$.

特别地, $T_{\min}(n, F) = f_2(x, n, n)$ 就是 $F(x)$ 的下限多项式, $\{T_{\min}(n, F)\}$ 是其下限多项式列, 其临界值 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

类似的方法可以求得 $F(x)$ 的上限多项式列. 同样的办法我们可以计算含更多 “超越因子” 形如 $f(x, \mathrm{trans}_1(x), \mathrm{trans}_2(x), \mathrm{trans}_3(x), \cdots, \mathrm{trans}_m(x))$ 超越函数的上下限多项式列.

2) $F(x) = f(x, \mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))$, 其中 $\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 I 可以规范展开, 其临界值为 n_2, $\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 I 上的值域为区间 J, $\mathrm{trans}_1(x)$ 在 J 内可以规范展开, 其临界值为 n_1.

令 $\mathrm{trans}_2(x) = u$, 得到 $F_1(x,u) = f(x, \mathrm{trans}_1(u))$.

令 $f_1(x,m,u) = f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2m)) + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2m-1))$.

显然, 当 $m > n_1$ 时 $f_1(x,m,u) < f_1(x,m+1,u) < F_1(x,u) = f(x, \mathrm{trans}_1(u))$, 且当 $m \to \infty$ 时, $f_1(x,m,u) \to F_1(x,u)$;

若 $\mathrm{trans}_2(x)$ 是代数函数, 则 $f_1(x,m,\mathrm{trans}_2(x))$ 就是 $F(x)$ 的下限多项式, 否则

令 $f_2(x,m,n) = f_1^+(x,m,\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x),2n)) + f_1^-(x,m,\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x),2n-1))$, 当 $n > n_2$ 时, $f_2(x,m,n) < f_2(x,m,n+1) < f_1(x,m,\mathrm{trans}_2(x)) < F(x) = f(x, \mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))$, 且当 $n \to \infty$ 时, $f_2(x,m,n) \to f_1(x,m,\mathrm{trans}_2(x))$;

从而当 $m \to \infty$, $n \to \infty$ 时, $f_2(x,m,n) \to F(x) = f(x, \mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))$. 特别地, $T_{\min}(n,F) = f_2(x,n,n)$ 是 $F(x)$ 的下限多项式, $\{T_{\min}(n,F)\}$ 是其下限多项式列.

类似的方法可以求得 $F(x)$ 的上限多项式列.

同样的办法我们可以计算含形如 $\mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(\mathrm{trans}_3(x)))$ 经过更多次复合而成的超越因子的超越函数的上下限多项式列.

我们把上述方案称为逐次 Taylor 替换, 一个可以计算一般超越函数多项式 $f(x, \mathrm{trans}_1(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$ 的上下限多项式列的逐次 Taylor 替换法可以描述为如下递归过程

算法 2.1 STS (Successive_Taylor_Substitution)

输入 超越函数多项式 $F(x) = f(x, \mathrm{trans}_1(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$

输出 $F(x)$ 的下 (上) 限多项式列

1) 若 $n = 0$, 即 $F(x)$ 为代数函数

return $[F(x), F(x)]$;

算法结束;

2) 设 $\mathrm{trans}_1(x)$ 是 $F(x)$ 的一个超越因子;

A) 若 $\mathrm{trans}_1(x)$ 可以规范展开

$f_1(x,n) \leftarrow f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x), 2n), \mathrm{trans}_2(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$
$\qquad + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x), 2n-1), \mathrm{trans}_2(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$;

$T_{\min}(n,F) \leftarrow \mathrm{STS}(f_1(x,n))[1]$;

$f_2(x,n) \leftarrow f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x), 2n-1), \mathrm{trans}_2(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$
$\qquad + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x), 2n), \mathrm{trans}_2(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$;

$T_{\max}(n,F) \leftarrow \mathrm{STS}(f_2(x,n))[2]$;

return $[T_{\min}(n,F), T_{\max}(n,F)]$;

B) 若 $\mathrm{trans}_1(x)$ 具有 $\mathrm{trans}_s(\mathrm{trans}_t(x))$ 的复合形式,

令 $F(x) = f(x, \mathrm{trans}_s(u), \mathrm{trans}_2(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$, 其中 $u = \mathrm{trans}_t(x)$, $\mathrm{trans}_s(u)$ 可以规范展开

$f_1(x,n,u) \leftarrow f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_s(u), 2n), \mathrm{trans}_2(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$
$\qquad + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_s(u), 2n-1), \mathrm{trans}_2(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$;

$T_{\min}(n,F) \leftarrow \mathrm{STS}(f_1(x,n,\mathrm{trans}_t(x)))[1]$;

$f_2(x,n,u) \leftarrow f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_s(u), 2n-1), \mathrm{trans}_2(x), \cdots, \mathrm{trans}_n(x))$

$+f^{-}(x,\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_s(u),2n),\mathrm{trans}_2(x),\cdots,\mathrm{trans}_n(x))$;

$T_{\max}(n,F)\leftarrow \mathrm{STS}(f_2(x,n,\mathrm{trans}_t(x)))[2]$;

return $[T_{\min}(n,F),T_{\max}(n,F)]$;

3) END.

目前算法 STS 还不能直接处理类似 $\arcsin(x)$、$\arccos(x)$、e^x 这类不能规范展开的超越因子, 在证明过程中需要结合人工证明或做一些的变量代换.

在后续讨论中, 若未特别指出, $F(x)$ 的上下限多项式 $T_{\max}(n,F)$ 和 $T_{\min}(n,F)$ 均指由算法 STS 生成的.

2.3 超越函数多项式不等式的自动证明及算法的终止性

如果超越函数 $F(x)$ 存在下限多项式列和上限多项式列, 则 $F(x)$ 与 0 的大小关系的判断可由下面的算法 2.2 完成.

算法 2.2 DTP (Decide_Transcendental_Polynomial)

输入 超越函数 $F(x)$, 区间 I

输出 $F(x)$ 在区间 I 内与 0 的大小关系

1) $n\leftarrow n_0$; (n_0 为临界值);

2) 计算 $F(x)$ 的下限多项式 $T_{\min}(n,F)$ 和 $F(x)$ 的上限多项式 $T_{\max}(n,F)$;

3) i) 若 $T_{\min}(n,F)\geq 0$ 在区间 I 内成立, 则不等式 $F(x)>0$ 在区间 I 内成立, return 1, 算法结束;

ii) 若 $T_{\max}(n,F)\leq 0$ 在区间 I 内成立, 则不等式 $F(x)<0$ 在区间 I 内成立, return -1, 算法结束;

iii) 若 $T_{\max}(n,F)>0$ 和 $T_{\min}(n,F)<0$ 在区间 I 内均不成立, 则 $F(x)$ 在区间 I 内与 0 无固定大小关系, return 0, 算法结束;

4) $n\leftarrow n+1$, 转 2);

5) END.

当 $T_{\min}(n,F)$ 和 $T_{\max}(n,F)$ 的系数为实代数数时, BOTTEMA 的 xprove可以判定其和常数 0 的大小关系. 文 [7–10] 运用超越函数多项式重根的理论证明了当 $\mathrm{trans}(x)=\arctan(x)$ $(0<x\leq 1)$ 和 $\mathrm{trans}(x)=\mathrm{e}^{-x}$ $(x>0)$, 且 $f(x,y)$ 为有理多项式时, 算法 2.2 一定终止. 但对于更一般的超越数系数或包含其它 "超越因子" 的多项式不等式, 有关超越函数多项式重根的结论就可能不再成立, 算法 2.2 也就可能不终止. 下面以 $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(x),\mathrm{trans}_2(x))$ 和 $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))$ 为对象讨论算法 2.2 的终止性.

定理 2.2 若 $\{T_{\min}(n,F)\}$ 和 $\{T_{\max}(n,F)\}$ 为 $F(x)$ 在区间 I 的下限多项式列和上限多项式列, 对于区间 I 内任意 x_0, $F(x_0)<0$ 当且仅当存在 n_0, 使得 $T_{\max}(n_0,F)(x_0)<0$; $F(x_0)>0$ 当且仅当存在 n_0, 使得 $T_{\min}(n_0,F)(x_0)>0$.

证 先证 $F(x_0)<0$ 当且仅当存在 n_0, 使得 $T_{\max}(n_0,F)(x_0)<0$.

记 $T_{\max}(n,F)$ 为 $F(x)$ 的上限多项式时的临界值为 $n(I)$, 即当 $n>n(I)$ 时, $T_{\max}(n,F)>F$, 所以充分性显然成立; 假设任意 $n\in N$, $T_{\max}(n,F)(x_0)\geq 0$ 均成立, 当 $n\to\infty$ 时, $T_{\max}(n,F)(x_0)\to F(x_0)$, 即 $F(x_0)\geq 0$, 与已知条件矛盾, 所以必要性成立.

同理, $F(x_0)>0$ 当且仅当存在 n_0, 使得 $T_{\min}(n_0,F)(x_0)>0$.

引理 2.3 设 $\{T_{\min}(n,F)\}$ 是超越函数 $F(x)$ 在区间 $(0,T]$ 的下限多项式列, 且存在 $\delta\in(0,T]$ 和 $n_\delta\in N$, 当 $x\in(0,\delta)$ 时, $T_{\min}(n_\delta,F)(x)\geq 0$, 则 $F(x)>0$ 在区间 $(0,T]$ 成立当且仅当存在 n_0 使得 $T_{\min}(n_0,F)(x)\geq 0$ 在区间 $(0,T]$ 成立.

证 设 $\{T_{\min}(n,F)\}$ 是超越函数 $F(x)$ 在区间 $(0,T]$ 的下限多项式列时的临界值为 $n(T)$, 由于对任意 $n\geq n(T)$, $F>T_{\min}(n,F)$, 充分性显然成立. 下证必要性.

设在区间 $(0,T]$ 上 $F(x)>0$, 但是对任意 $n\in N$, 不等式 $T_{\min}(n,F)\geq 0$ 均不成立, 即集合 $W(n)=\{x|T_{\min}(n,F)(x)<0,x\in[0,T]\}\supseteq\{x|T_{\min}(n,F)(x)<0,x\in(0,T]\}\neq\Phi$. 令 $W=\cap W(n)\ (n>n(T))$, 分两种情况讨论

1) 当 $W\neq\Phi$ 时, 设 $x_0\in W$, 因为 $F(x)>0$, 且 F 在 $[0,T]$ 内连续, 所以对任意 $n>n(T)$, $T_{\min}(n,F)(0)=F(0)\geq 0$, 即 $0\notin W$, 所以 $x_0\in(0,T]$, 从而 $F(x_0)>0$. 又因为任意 $n>n(T)$, $x_0\in W(n)$, 即 $T_{\min}(n,F)(x_0)<0$, 当 $n\to\infty$ 时, $T_{\min}(n,F)(x_0)\to F(x_0)\leq 0$, 这与 $F(x_0)>0$ 矛盾;

2) 当 $W=\Phi$ 时, 即对任意 $x_0\in(0,T]$, 存在 $n_0>n(T)$, $x_0\notin W(n_0)$, 即 $T_{\min}(n_0,F)(x_0)\geq 0$, 从而 $T_{\min}(n_0+1,F)(x_0)>0$, 由 $T_{\min}(n_0+1,F)(x)$ 的连续性知存在 x_0 的邻域 $O(x_0,\delta_0)$ (T 的邻域为 $(T-\delta_0,T]$), 满足任意 $x\in O(x_0,\delta_0)$, $T_{\min}(n_0+1,F)(x)>0$.

又存在 $\delta\in(0,T]$, $n_\delta\in N$, 当 $x\in(0,\delta)$ 时, $T_{\min}(n_\delta,F)(x)\geq 0$, 即在 0 的邻域 $[0,\delta)$ 内, $T_{\min}(n_\delta,F)(x))\geq 0$. 由有限覆盖定理知存在有限个点 $\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$, 其邻域之并覆盖区间 $[0,T]$, 对每个 x_i, 存在 n_i, 在 x_i 的该邻域内 $T_{\min}(n_i,F)(x)\geq 0$. 取 $n_0=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}+1$, 则由 $T_{\min}(n,F)(x)$ 关于 n 的单调性知当 $n>n_0$ 时, 在区间 $[0,T]$ 内 $T_{\min}(n,F)(x)\geq 0$, 这与 $W(n)\neq\Phi$ 的假设矛盾.

即是说存在 n_0, $W(n_0)=\{x|T_{\min}(n_0,F)(x)<0,x\in(0,T]\}=\Phi$, 即当 $x\in(0,T]$ 时, $T_{\min}(n_0,F)(x)\geq 0$, 引理成立.

引理 2.4 假设超越函数 $\mathrm{trans}_1(x)$、$\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 $(0,T]$ 可规范展开, $f(x,y,z)$ 为三元多项式, $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(x),\mathrm{trans}_2(x))>0$ 在区间 $(0,T]$ 成立, 则存在 n_0, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(0,\delta)$ 时, $T_{\min}(n_0,F)(x)>0$.

证 记 $s=\mathrm{degree}(f,y)$, $t=\mathrm{degree}(f,z)$. 当 $s=t=0$ 时, 引理显然成立, 下设 s、t 不同时为 0. 设 $\mathrm{trans}_1(x)$、$\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 $(0,T]$ 可规范展开的临界值分别为 n_1、n_2, 还设 $n>\max\{n_1,n_2\}$.

论断 (a) 存在与 n 无关的常数 M, 使得多项式 $T_{\min}(n,F)(x)$ 展开后的每一项系数的绝对值均小于 $M*n^{2s+t+3}$.

证 将 $f(x,y,z)$ 按 y 的升幂排列为 $g_0(x,z)+g_1(x,z)*y+\cdots+g_s(x,z)*y^s$, 其中 $g_i(x,z)$ 为 x、z 的二元多项式, 设 $s\neq 0$.

将 g_i 展开后项数记为 t_i, 系数绝对值的最大值记为 a_i.

将 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x),2n-1)$ 或 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x),2n)$ 替换 y 后, g_i*y^i 展开后合并同类项之前不超过 $t_i*(2n)^i$ 项. 记 $mt=\max\{t_0,t_1,\cdots,t_s\}$, 则 $f_1(x,z,n)=f^+(x,\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x),2n),z)+f^-(x,\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x),2n-1),z)$ 展开后合并同类项之前的项数不超过 $t_0+t_1*(2n)+\cdots+t_s*(2n)^s\leq mt*(1+2n+(2n)^2+\cdots+(2n)^s)<mt*(2n)^{s+1}$.

由于 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x),2n-1)$ 和 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x),2n)$ 中的每一项的系数都小于等于 1, 所以将 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x),2n-1)$ 或 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}(x),2n)$ 替换 y 后, g_i*y^i 展开后合并同类项之

前每一项的系数的绝对值都小于等于 a_i, 记 $ma = \max\{a_0, a_1, \cdots, a_s\}$, 则 $f_1(x, z, n)$ 合并同类项后每一项的系数的绝对值均小于 $ma * mt * (2n)^{s+1}$.

此时若 $t = 0$ 则论断 (a) 成立 (同样的推理知当 $s = 0$、$t \neq 0$ 时论断 (a) 也成立). 下设 $t \neq 0$.

将 $f_1(x, z, n)$ 按 z 的升幂排列为 $h_0(x) + h_1(x) * z + \cdots + h_t(x) * z^t$, 其中 $h_i(x)$ 是 x 为变量的一元多项式. 显然 h_i 展开后项数小于 $mt * (2n)^{s+1}$, 系数绝对值均小于 $ma * mt * (2n)^{s+1}$.

将 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n-1)$ 或 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n)$ 替换 z 后, $h_i * z^i$ 展开后合并同类项之前不超过 $mt * (2n)^{s+1} * (2n)^i$ 项, 所以 $f_2(x, n, n) = f_1^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n), n) + f_1^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n-1), n)$ 展开后合并同类项之前不超过 $mt*(2n)^{s+1}*(1+2n+(2n)^2+\cdots+(2n)^t) < mt*(2n)^{s+1}*(2n)^{t+1}$ 项, 而 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n-1)$ 和 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n)$ 中的每一项的系数都小于等于 1, 所以 $f_2(x, n, n)$ 展开后合并同类项之前每一项的系数的绝对值都小于等于 $ma * mt * (2n)^{s+1}$, 则 $f_2(x, n, n)$ 合并同类项后每一项的系数的绝对值均小于 $mt * (2n)^{s+1} * (2n)^{t+1} * ma * mt * (2n)^{s+1} = M * n^{2s+t+3}$, 其中 $M = mt^2 * ma * 2^{2s+t+3}$, 即论断 (a) 成立.

记一元多项式 g 最低次数项的次数为 $td(g)$, 最低次数项的系数为 $tc(g)$.

论断 (b) 存在 $n_0 \in N$, $td(T_{\min}(n_0, F)) < 2n_0 - 2$.

证 记 $d_n = td(T_{\min}(n, F))$, $cn = tc(T_{\min}(n, F))$, 即 $T_{\min}(n, F) = cn * x^{d_n} + g(x)$, $g(x)$ 中各项关于 x 的次数均大于 d_n, 由论断 (a) 知 cn 以及 $g(x)$ 的每一项系数的绝对值均小于 $M * n^{2s+t+3}$.

令 $\lambda = \min\{T, 1\}$, 则当 $0 < x < \lambda \leq 1$ 时, $|T_{\min}(n, F)| < M * n^{2s+t+3} * x^{d_n} * (1 + x + x^2 + \cdots) < M * n^{2s+t+3} \frac{x^{d_n}}{1-x}$.

假设对任意 $n \in N$, $d_n \geq 2n - 2$. 则 $|T_{\min}(n, F)| < M * n^{2s+t+3} \frac{x^{2n-2}}{1-x}$, 易证当 $n \to \infty$ 时, $|T_{\min}(n, F)(x)| \to 0$, 这和 $T_{\min}(n, F) \to F$ 且 $F(x) > 0$ 的条件矛盾, 即假设不成立, 所以存在 $n_0 \in N$, $d_{n_0} = td(T_{\min}(n_0, F)) < 2n_0 - 2$.

论断 (c) 对于论断 (b) 中的 n_0, $cn_0 = tc(T_{\min}(n_0, F)) > 0$.

证 $F(x) = f(x, \mathrm{trans}_1(x), \mathrm{trans}_2(x)) = f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x), 2n) + o(x^p), \mathrm{trans}_2(x)) + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(x), 2n-1) + o(x^q), \mathrm{trans}_2(x)) = f_1(x, \mathrm{trans}_2(x), n) + o(x^{t_1})$, 其中 $p \geq 2n-1$, $q \geq 2n-2$, $t_1 \geq \min\{p, q\} \geq 2n-2$.

$f_1(x, \mathrm{trans}_2(x), n) = f_1^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n) + o(x^u), n) + f_1^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n-1) + o(x^v), n) = f_2(x, n, n) + o(x^{t_2})$, 其中 $u \geq 2n-1$, $v \geq 2n-2$, $t_2 \geq \min\{u, v\} \geq 2n-2$.

所以 $F(x) = T_{\min}(n, F) + o(x^t)$, 其中 $t \geq \min\{t_1, t_2\} \geq 2n-2$, 令 $n = n_0$, 则 $F(x) = T_{\min}(n_0, F) + o(x^{t_0})$, $t_0 \geq 2n_0 - 2$.

而根据论断 (b) 知: $T_{\min}(n_0, F) = cn_0 * x^{dn_0} + o(x^{dn_0})$, 其中 $dn_0 < 2n_0 - 2$, $cn_0 \neq 0$, 从而得到 $F(x) = cn_0 * x^{dn_0} + o(x^{dn_0}) + o(x^{t_0}) = cn_0 * x^{dn_0} + o(x^m)$, 其中 $m = \min\{dn_0, t_0\} = dn_0$.

令函数 $G(x) = \frac{F(x)}{x^{dn_0}} = cn_0 + \frac{o(x^{dn_0})}{x^{dn_0}}$, 则当 $x \to 0^+$ 时, $G(x) \to cn_0$. 因 $F(x) > 0$ 在区间 $(0, \lambda]$ 成立, 所以 $G(x) > 0$ 在区间 $(0, \lambda]$ 成立, 得到 $cn_0 \geq 0$, 而 $cn_0 \neq 0$, 所以 $cn_0 > 0$, 即论断 (c) 成立.

根据论断 (b) 和论断 (c), $T_{\min}(n_0, F) = cn_0 * x^{dn_0} + o(x^{dn_0})$, 其中 $cn_0 > 0$, 则当 $x \to 0^+$ 时, 函数 $H(x) = \frac{T_{\min}(n_0, F)}{x^{dn_0}} = cn_0 + \frac{o(x^{dn_0})}{x^{dn_0}} \to cn_0 > 0$, 所以存在 $\delta \in (0, \lambda)$, 当 $x \in (0, \delta)$ 时,

$H(x)=\frac{T_{\min}(n_0,F)}{x^{dn_0}}>0$, 从而 $T_{\min}(n_0,F)=H(x)*x^{dn_0}>0$, 即引理成立.

由引理 2.3 和引理 2.4 可以得到

定理 2.3 超越函数 $\mathrm{trans}_1(x)$、$\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 $(0,T]$ 可规范展开, $f(x,y,z)$ 为三元多项式, 则 $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(x),\mathrm{trans}_2(x))>0$ 在区间 $(0,T]$ 成立当且仅当存在 n_0 使得 $T_{\min}(n_0,F)(x)\geq 0$ 在区间 $(0,T]$ 成立.

推论 2.1 超越函数 $\mathrm{trans}_1(x)$、$\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 $(0,T]$ 可规范展开, $f(x,y,z)$ 为三元多项式, 则 $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(x),\mathrm{trans}_2(x))<0$ 在区间 $(0,T]$ 成立, 当且仅当存在 n_0 使得 $T_{\max}(n_0,F)(x)\leq 0$ 在区间 $(0,T]$ 成立.

推论 2.2 超越函数 $\mathrm{trans}(x)$ 区间 $(0,T]$ 可规范展开, $f(x,y)$ 为二元多项式, $F(x)=f(x,\mathrm{trans}(x))$, 则 $F(x)>0$ 在区间 $(0,T]$ 成立当且仅当存在 n_0 使得 $T_{\min}(n_0,F)(x)\geq 0$ 在区间 $(0,T]$ 成立; $F(x)<0$ 在区间 $(0,T]$ 成立当且仅当存在 n_0 使得 $T_{\max}(n_0,F)(x)\leq 0$ 在区间 $(0,T]$ 成立.

引理 2.5 设多项式 $P(x)=(\sum p_nx^n)^m$ 和多项式 $Q(x)=(\sum|p_n|x^n)^m$, 则对任意 n, $|\mathrm{coeff}(P(x),x^n)|\leq \mathrm{coeff}(Q(x),x^n)$.

引理 2.6 设超越函数 $\mathrm{trans}(x)$ 在区间 $(0,1]$ 可强规范展开, $H(x)=(\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}(x),n))^m=\sum P_ix^i$, 则对任意 n, $\sum|P_i|\leq \mathrm{e}^m$.

证 根据定义 $\mathrm{trans}(x)=\sum(-1)^{n-1}f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots,\infty)$, 其中 $f_n(x)=A_n*x^{m_n}$, $0<A_n\leq\frac{1}{(n-1)!}$, $m_n>m_{n-1}$, 从而 $m_n\geq n-1$, 所以在 $[0,1]$ 内, 级数 $\sum f_n(x)\leq\sum\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\mathrm{e}^x$, 即是说级数 $\sum f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 收敛, 设收敛于函数 $\overline{\mathrm{trans}}(x)$, 显然 $\overline{\mathrm{trans}}(x)\leq \mathrm{e}^x$.

记 $F_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)$.

令 $G(x)=(\overline{\mathrm{trans}}(x))^m=(F_n(x)+G_n(x))^m=(F_n(x))^m+\sum_1^\infty C_m^i(F_n(x))^{m-i}(G_n(x))^i$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 其中 $G_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots$.

由于 $\overline{\mathrm{trans}}(x)$ 的 Taylor 展开式收敛于 $\overline{\mathrm{trans}}(x)$, 所以 $G(x)$ 的 Taylor 展开式收敛于 $G(x)$, 令 $G(x)=\sum_0^\infty g_ix^i$, $H(x)=(F_n(x))^m=\sum h_ix^i$, 由于 $F_n(x)$ 和 $G_n(x)$ 的每一项系数均大于 0, 所以对任意 i, $h_i\leq g_i$.

又由引理 2.5 知, 对任意 i, $|P_i|\leq h_i$, 从而 $|P_i|\leq g_i$.

又 $G(x)=(\overline{\mathrm{trans}}(x))^m\leq \mathrm{e}^{mx}$, 所以 $\sum_0^\infty g_i=G(1)\leq \mathrm{e}^m$, 从而 $\sum|P_i|\leq\sum g_i\leq \mathrm{e}^m$.

引理 2.7 设 $\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 $(0,T]$ 可强规范展开, 其值域为 $(0,S]$, 临界值为 n_2; $\mathrm{trans}_1(x)$ 在区间 $(0,S]$ 可规范展开, 其临界值为 n_1, 存在常数 k, 其 Taylor 展开式的第 n 项关于 x 的次数不超过 $k*n$. $f(x,y)$ 为二元多项式, $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))>0$ 在区间 $(0,T]$ 成立, 且当 $\mathrm{trans}_2(0)\neq 0$ 时 $F(0)>0$, 则存在 $n_0\in N$ 和 $\delta>0$, 当 $x\in(0,\delta)$ 时, $T_{\min}(n_0,F)(x)>0$.

证 若 $\mathrm{trans}_2(0)\neq 0$, 则对任意 n, $T_{\min}(n,F)(0)=F(0)>0$, 引理显然成立. 下设 $\mathrm{trans}_2(0)=0$, 则 $\mathrm{trans}_2(x)$ 是当 $x\to 0^+$ 时 x 的同阶或高阶无穷小. 记 $s=\mathrm{degree}(f,y)$, $t=\mathrm{degree}(f,x)$, 将 $f(x,y)$ 按 y 的升幂排列为 $g_0+g_1*y+\cdots+g_s*y^s$, 其中 g_i 为 x 的一元多项式. $s=0$ 时, 引理显然成立, 下设 $s>0$, 还假设 $m>n_1$, $n>n_2$.

论断 (i) 存在与 n 无关的常数 M, 使得多项式 $T_{\min}(n,F)(x)$ 展开后的每一项系数的绝对值均小于 $M*n^{s+1}*\mathrm{e}^{2skn}$.

证 设将 g_i 展开后系数绝对值的最大值记为 a_i. 显然其项数不超过 $t+1$.

令 $\mathrm{trans}_2(x)=u$, 得到 $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(u))$, 将 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u),2m-1)$ 或 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1$

$(u), 2m)$ 替换 y 后, $g_i * y^i$ 展开后合并同类项之前不超过 $(t+1)*(2m)^i$ 项, 即 $f_1(x,m,u) = f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2m)) + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2m-1))$ 展开后合并同类项之前的项数不超过 $(t+1)*(1+2m+(2m)^2+\cdots+(2m)^s) < (t+1)*(2m)^{s+1}$.

由于 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2m-1)$ 和 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2m)$ 中的每一项的系数都小于等于 1, 所以将 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2m-1)$ 或 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2m)$ 替换 y 后, $g_i * y^i$ 展开后合并同类项之前每一项的系数的绝对值都小于等于 a_i, 记 $ma = \max\{a_0, a_1, \cdots, a_s\}$, 则 $f_1(x,m,u)$ 合并同类项后每一项的系数的绝对值均小于 $ma*(t+1)*(2m)^{s+1}$.

又 $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2m)$ 关于 u 的最高次数不超过 $2*k*m$, 所以 $f_1(x,m,u)$ 关于 u 的最高次数不超过 $2*s*k*m$.

令 $f_1(x,m,u) = p_0(x) + p_1(x)*u + \cdots + p_q(x)*u^q$, 其中 $p_i(x)$ 为 x 的一元多项式, 次数不超过 t, 系数的绝对值不超过 $ma*(t+1)*(2m)^{s+1}$, $q \le 2*s*k*m$.

又令 $f_2(x,m,n) = f_1^+(x,m,\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n)) + f_1^-(x,m,\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n-1)) = \sum(p_i^+(x)*(\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n))^i + p_i^-(x)*(\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n-1))^i)$, $i = 0, 1, \cdots, q$. ($p_i^+(x)$ 和 $p_i^-(x)$ 分别表示 $p_i(x)$ 的正项和负项部分).

由引理 2.6, 对任意 n, $\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n)^i$ 展开后系数的绝对值之和不超过 e^i, $p_i^+(x) + p_i^-(x) = p_i(x)$ 的项数不超过 $(t+1)$, 每项系数的绝对值不超过 $ma*(t+1)*(2m)^{s+1}$, 所以 $p_i^+(x)*(\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n))^i + p_i^-(x)*(\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x), 2n-1))^i$ 展开后每项系数的绝对值之和不超过 $(t+1)*ma*(t+1)*(2m)^{s+1}*\mathrm{e}^i$, 从而 $f_2(x,m,n)$ 展开后每项系数的绝对值之和不超过 $ma*(t+1)^2*(2m)^{s+1}*(1+\mathrm{e}+\mathrm{e}^2+\cdots+\mathrm{e}^q) < ma*(t+1)^2*(2m)^{s+1}*\mathrm{e}^{q+1} \le ma*(t+1)^2*(2m)^{s+1}\mathrm{e}^{2skm+1}$, 令 $M = ma*(t+1)^2*2^{s+1}\mathrm{e}$, 则 $f_2(x,m,n)$ 展开后系数的绝对值之和不超过 $M*m^{s+1}*\mathrm{e}^{2skm}$.

即 $T_{\min}(n,F)(x) = f_2(x,n,n)$ 展开后系数的绝对值之和不超过 $M*n^{s+1}*\mathrm{e}^{2skn}$, 当然每一项系数绝对值也不超过 $M*n^{s+1}*\mathrm{e}^{2skn}$.

记一元多项式 g 最低次数项的次数为 $td(g)$, 最低次数项的系数为 $tc(g)$.

论断 (ii) 存在 $n_0 \in N$, $td(T_{\min}(n_0,F)) < 2n_0 - 2$.

证 记 $dn = td(T_{\min}(n,F))$, $cn = tc(T_{\min}(n,F))$, 即 $T_{\min}(n,F) = cn*x^{dn} + g(x)$, $g(x)$ 中各项关于 x 的次数均大于 dn, 由论断 (i) 知 cn 以及 $g(x)$ 的每一项系数的绝对值均小于 $M*n^{s+1}*\mathrm{e}^{2skn}$.

令 $\lambda = \min\{T, 1, \frac{1}{2\mathrm{e}^{sk}}\}$, 当 $0 < x < \lambda \le 1$ 时, $|T_{\min}(n,F)| < M*n^{s+1}*\mathrm{e}^{2skn}*x^{dn}*(1+x+x^2+\cdots) < M*n^{s+1}*\mathrm{e}^{2skn}\frac{x^{dn}}{(1-x)}$.

假设对任意 $n \in N$, $dn \ge 2n-2$. 当 $0 < x < \lambda \le \frac{1}{2\mathrm{e}^{sk}}$ 时, $|T_{\min}(n,F)| < M*n^{s+1}*\mathrm{e}^{2ksn}*(\frac{1}{2\mathrm{e}^{sk}})^{2n-2}*\frac{1}{1-x} = M*\mathrm{e}^{2ks}*n^{s+1}*(\frac{1}{2})^{2n-2}*\frac{1}{1-x}$, 易证当 $n \to \infty$ 时, $|T_{\min}(n,F)(x)| \to 0$, 这和 $T_{\min}(n,F) \to F$ 且 $F(x) > 0$ 在 $(0,T]$ 内成立 (显然在 $(0,\lambda]$ 内也成立) 的条件矛盾, 即假设不成立, 所以存在 $n_0 \in N$, $dn_0 = td(T_{\min}(n_0,F)) < 2n_0 - 2$.

论断 (iii) 对于论断 (ii) 中的 n_0, $cn_0 = tc(T_{\min}(n_0,F)) > 0$.

证

$$\begin{aligned}&F(x) = f(x, \mathrm{trans}_1(u))\\ =&f^+(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2n) + o(u^p)) + f^-(x, \mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_1(u), 2n-1) + o(u^q))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_1(x,n,u)+o(u^{t_1}), \quad 其中\ p\geq 2n-1,\ q\geq 2n-2,\ t_1\geq \min\{p,q\}\geq 2n-2\\
&= f_1^+(x,n,\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x),2n)+o(x^i))\\
&\quad + f_1^-(x,m,\mathrm{taylor}(\mathrm{trans}_2(x),2n-1)+o(x^j))+o(u^{t_1})\\
&= f_2(x,n,n)+o(x^{t_2})+o(u^{t_1}),
\end{aligned}
$$

其中 $i\geq 2n-1$, $j\geq 2n-2$, $t_2\geq \min\{i,j\}\geq 2n-2$,

而 $u=\mathrm{trans}_2(x)$ 是当 $x\to 0^+$ 时 x 的同阶或高阶无穷小, 所以

$F(x)=T_{\min}(n,F)+o(x^t)$, 其中 $t\geq\min\{t_1,t_2\}\geq 2n-2$.

当 $n=n_0$ 时, $F(x)=T_{\min}(n_0,F)+o(x^{t_0})$, 其中 $t_0\geq 2n_0-2$.

而根据论断 (ii) 知: $T_{\min}(n_0,F)=cn_0*x^{dn_0}+o(x^{dn_0})$, 其中 $dn_0<2n_0-2$.

从而得到 $F(x)=cn_0*x^{dn_0}+o(x^{dn_0})+o(x^{t_0})=cn_0*x^{dn_0}+o(x^m)$, 其中 $m=\min\{t_0,dn_0\}=dn_0$,

令函数 $G(x)=\frac{F(x)}{x^{dn_0}}=cn_0+\frac{o(x^{dn_0})}{x^{dn_0}}$ $(0<x<\lambda)$, 因 $F(x)>0$ 在区间 $(0,\lambda]$ 成立, 所以 $G(x)>0$ 在区间 $(0,\lambda]$ 成立. 当 $x\to 0^+$ 时, $G(x)\to cn_0$, 从而 $cn_0\geq 0$, 而 cn_0 是 $T_{\min}(n_0,F)$ 最低次数项的系数, 不等于 0, 所以 $cn_0>0$, 即论断 (iii) 成立.

根据论断 (ii) 和论断 (iii), $T_{\min}(n_0,F)=cn_0*x^{dn_0}+o(x^{dn_0})$, 其中 $cn_0>0$, 则当 $x\to 0^+$ 时, 函数 $H(x)=\frac{T_{\min}(n_0,F)}{x^{dn_0}}=cn_0+\frac{o(x^{dn_0})}{x^{dn_0}}\to cn_0>0$, 所以存在 $\delta>0$, 当 $x\in(0,\delta)$ 时, $H(x)=\frac{T_{\min}(n_0,F)}{x^{dn_0}}>0$, 从而 $T_{\min}(n_0,F)=H(x)*x^{dn_0}>0$, 即引理成立.

由引理 2.4 和引理 2.7 知

定理 2.4 $\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 $(0,T]$ 可强规范展开, 其值域为 $(0,S]$, $\mathrm{trans}_1(x)$ 在区间 $(0,S]$ 可规范展开, $\mathrm{trans}_1(x)$ 的 taylor 展开式的第 n 项关于 x 的次数不超过 $k*n$ (k 为某个常数). $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))$, 当 $\mathrm{trans}_2(0)\neq 0$ 时 $F(0)\neq 0$, 则 $F(x)>0$ 在区间 $(0,T]$ 成立当且仅当存在 n_0 使得 $T_{\min}(n_0,F)(x)\geq 0$ 在区间 $(0,T]$ 成立.

推论 2.3 $\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 $(0,T]$ 可强规范展开, 其值域为 $(0,S]$, $\mathrm{trans}_1(x)$ 在区间 $(0,S]$ 可规范展开, $\mathrm{trans}_1(x)$ 的 Taylor 展开式的第 n 项关于 x 的次数不超过 $k*n$ (k 为某个常数).$F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))$, 当 $\mathrm{trans}_2(0)\neq 0$ 时 $F(0)\neq 0$, 则 $F(x)<0$ 在区间 $(0,T]$ 成立当且仅当存在 n_0 使得 $T_{\max}(n_0,F)(x)\leq 0$ 在区间 $(0,T]$ 成立.

综合上述讨论, 可将算法 2.2 的终止性描述如下

推论 2.4 1) 超越函数 $\mathrm{trans}(x)$ 区间 $(0,T]$ 可规范展开, $f(x,y)$ 为二元多项式, $F(x)=f(x,\mathrm{trans}(x))$;

2) 越函数 $\mathrm{trans}_1(x)$、$\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 $(0,T]$ 可规范展开, $f(x,y,z)$ 为三元多项式, $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(x),\mathrm{trans}_2(x))$;

3) $\mathrm{trans}_2(x))$ 在区间 $(0,T]$ 可强规范展开, 其值域为 $(0,S]$, $\mathrm{trans}_1(x)$ 在区间 $(0,S]$ 可规范展开, $\mathrm{trans}_1(x)$ 的 Taylor 展开式的第 n 项关于 x 的次数不超过 $k*n$ (k 为某个常数), $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))$, 且当 $\mathrm{trans}_2(0)\neq 0$ 时 $F(0)\neq 0$.

上述三种形式的超越函数多项式 $F(x)$ 运用算法 2.1 (STS) 计算上下限多项式列后再运用算法 2.2 (DTP) 判定其与 0 的大小关系, 终止性如下

1) 若 $F(x)>0$ 在区间 $(0,T]$ 成立, 则算法 2.2 一定终止;

2) 若 $F(x)<0$ 在区间 $(0,T]$ 成立, 则算法 2.2 一定终止;

3) 若存在 x_1、$x_2 \in (0,T]$, $F(x_1)>0$, $F(x_2)<0$, 则算法 2.2 一定终止;

4) 当函数 $F(x) \geq 0$ 成立但 $F(x) > 0$ 却不成立, 算法 2.2 不终止;

5) 当函数 $F(x) \leq 0$ 成立但 $F(x) < 0$ 却不成立, 算法 2.2 不终止.

推论 2.4 表明, 对于一般的超越函数多项式不等式算法 2.2 尚不能判定非严格不等式是否成立, 相关问题值得进一步研究. 虽然如此, 下一节的实例表明算法 2.2 对常见的初等超越函数适用并十分高效.

3 应用实例

文 [22] 将初等超越不等式分类为三角函数不等式、反三角函数不等式、指数与对数不等式、双曲函数不等式, 为描述算法 2.1 和算法 2.2 的运行过程和运行效率, 本节分别选择了上述四类不等式中具有代表性的超越函数多项式不等式进行验证.

3.1 三角函数不等式

常见的三角函数不等式可以转化为如下形式: $f(x,\sin(x),\cos(x),\pi)>0$, 其中 $f(x,x_1,x_2,x_3)$ 为 4 元多项式, 系数为代数数.

首先讨论超越数 π 的有理化.

记 $p_1(n)=\frac{[10^n\pi]}{10^n}$, $p_2(n)=\frac{[10^n\pi]+1}{10^n}$, 其中 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, 则对任意自然数 n, $p_1(n)\leq p_1(n+1)<\pi$, $\pi<p_2(n+1)\leq p_2(n)$, 且当 $n\to\infty$ 时, $p_1(n)\to\pi$, $p_2(n)\to\pi$. 记 $P_i[n]=[p_1(n),p_2(n)]$, 则 $\{P_i[n]\}$ 是逼近 π 的区间套, 如果将超越数 π 视为一个超越函数, 则 $T_{\max}(n,f)=f^+(x,p_1(n))+f^-(x,p_2(n))$ 为 $f(x,\pi)$ 的上限多项式, $T_{\min}(n,F)=f^+(x,p_2(n))+f^-(x,p_1(n))$ 为 $f(x,\pi)$ 的下限多项式.

运用逐次 Taylor 替换, 我们设计了算法 3.1 计算超越函数 $F(x)=f(x,\sin(x),\cos(x),\pi)$ 的上下限多项式.

算法 3.1 STS_Trigonometric

输入 超越函数 $F(x)=f(x,\sin(x),\cos(x),\pi)$ 和自然数 n

输出 $F(x)$ 的上下限多项式

1) $f_1(x,m,\cos(x),\pi) \leftarrow f^+(x,\mathrm{taylor}(\sin(x),2m),\cos(x),\pi)+f^-(x,\mathrm{taylor}(\sin(x),2m-1),\cos(x),\pi)$;

2) $f_2(x,m,n,\pi)\leftarrow f_1^+(x,m,\mathrm{taylor}(\cos(x),2n),\pi)+f_1^-(x,m,\mathrm{taylor}(\cos(x),2n-1),\pi)$;

3) $f_3(x,m,n,t)\leftarrow f_2^+(x,m,n,p_1(t))+f_2^-(x,m,n,p_2(t))$;

4) $T_{\min}(n,F)\leftarrow f_3(x,n,n,n)$;

5) $g_1(x,m,\cos(x),\pi)\leftarrow f^+(x,\mathrm{taylor}(\sin(x),2m-1),\cos(x),\pi)+f^-(x,\mathrm{taylor}(\sin(x),2m),\cos(x),\pi)$;

6) $g_2(x,m,n,\pi)\leftarrow g_1^+(x,m,\mathrm{taylor}(\cos(x),2n-1),\pi)+g_1^-(x,m,\mathrm{taylor}(\cos(x),2n),\pi)$;

7) $g_3(x,m,n,t)\leftarrow g_2^+(x,m,n,p_2(t))+g_2^-(x,m,n,p_1(t))$;

8) $T_{\max}(n,F)\leftarrow g_3(x,n,n,n)$;

9) END.

算法 3.1 生成的有理多项式 $T_{\min}(n,F)$ 和 $T_{\max}(n,F)$ 分别是 $F(x)$ 的下限多项式和上限多项式.

一般的三角函数不等式的定义域区间为 $(0, \frac{\pi}{2}]$ (其它区间可以作相应的变量替换), 右端点是超越数, 需要有理化.

引理 3.1 有理系数多项式 $f(x)>0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 内成立当且仅当存在 n, $f(x)>0$ 在 $(0, \frac{p_2(n)}{2}]$ 内成立; 有理系数多项式 $f(x)>0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 内不成立当且仅当存在 n, $f(x)>0$ 在 $(0, \frac{p_1(n)}{2}]$ 内不成立.

算法 3.2 DTP_Transcendental_Endpoint

输入 超越函数多项式 $F(x)$;

输出 $F(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 内与 0 的大小关系

1) $n \leftarrow n_0$; (n_0 是 $\{T_{\min}(n, F)\}$ 和 $\{T_{\max}(n, F)\}$ 为 $F(x)$ 的下限和上限多项式时的临界值, 多项式 $\{T_{\min}(n, F)\}$ 和 $\{T_{\max}(n, F)\}$ 无超越数系数);

2) 计算 $F(x)$ 的下限多项式 $T_{\min}(n, F)$ 和 $F(x)$ 的上限多项式 $T_{\max}(n, F)$;

3) i) 若 $T_{\min}(n, F) \geq 0$ 在 $(0, \frac{p_2(n)}{2}]$ 内成立, 则不等式 $F(x)>0$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 内成立, return 1), 算法结束;

ii) 若 $T_{\max}(n, F) \leq 0$ 在 $(0, \frac{p_2(n)}{2}]$ 内成立, 则不等式 $F(x)<0$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 内成立, return -1, 算法结束;

iii) 若 $T_{\max}(n, F)>0$ 和 $T_{\min}(n, F)<0$ 在 $(0, \frac{p_1(n)}{2}]$ 内均不成立, 则 $F(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 内与 0 无固定大小关系, return 0, 算法结束;

4) $n \leftarrow n+1$, 转 2);

5) END.

当 $F(x)$ 中含有 "超越因子" $\cos(x)$ 且讨论区间为 $(0, T]$ 时, 由于 $\cos(x)$ 在区间 $(0, T]$ $(0<T<\frac{\pi}{2})$ 可以规范展开, 所以此时可直接用算法 2.2 或算法 3.2; 当 $T=\frac{\pi}{2}$ 时, $\cos(x)$ 不能规范展开, 此时可将 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 分为两个区间, 比如 $(0, x_0]$ 和 $(x_0, \frac{\pi}{2}]$, 对第二个区间再做变量代换 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 转而证明 $F(x)$ 在区间 $(0, x_0]$ 和 $F(\frac{\pi}{2}-x)$ 在区间 $(0, \frac{p_2(n)}{2}-x_0]$ 上成立.

又由推论 2.4 知, 若 $F(x)>0$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 成立, 则算法 2.2 可终止, 即算法 "允许" $F(0)=0$ 但 "不允许" $F(\frac{\pi}{2})=0$. 但常见的三角函数不等式可能出现 $F(\frac{\pi}{2})=0$, 此时若 $F(0)\neq 0$, 可作代换 $x=\frac{\pi}{2}-t$; 若 $F(0)=0$, 则可将区间 $(x_0, \frac{\pi}{2}]$ 分为 $(0, x_0]$ 和 $(x_0, \frac{\pi}{2}]$ 两个区间讨论.

例 3.1 Kober 不等式 $1-\frac{2x}{\pi}<\cos(x)<1-\frac{x^2}{\pi}$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$.

$\cos(x)<1-\frac{x^2}{\pi}$ 等价于 $F(x)=\pi-x^2-\pi\cos(x)>0$. 将区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 分成 $(0, 1]$ 和 $(1, \frac{\pi}{2})$ 两个区间.

容易证明 $T_{\min}(F, 2)=\frac{57x^2}{100}-\frac{21x^4}{160}$ 在区间 $(0, 1]$ 成立, 即 $\cos(x)<1-\frac{x^2}{\pi}$ 在区间 $(0, 1]$ 成立; 令 $G(x)=F(\frac{\pi}{2}-x)=\pi-(\frac{\pi}{2}-x)^2-\sin(x)\pi$, 容易证明 $G(x)$ 的下限多项式 $T_{\min}(G, 2)=\frac{211}{320}+\frac{157x^3}{300}-x^2-\frac{21x^5}{800}$ 在区间 $(0, \frac{p_2(2)}{2}-1]$ 上成立, 即 $\cos(x)<1-\frac{x^2}{\pi}$ 在区间 $(1, \frac{\pi}{2})$ 成立. 所以 $\cos(x)<1-\frac{x^2}{\pi}$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 成立.

$1-\frac{2x}{\pi}<\cos(x)$ 等价于 $F(x)=\pi\cos(x)-\pi+2x>0$, 我们将区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 分成 $(0, 1]$ 和 $(1, \frac{\pi}{2})$ 两个区间: 容易证明 $F(x)$ 的下限多项式 $T_{\min}(F, 2)=\frac{157x^4}{1200}+2x-\frac{63x^2}{40}-\frac{7x^6}{1600}$ 在区间 $(0, 1]$ 成立; 令 $G(x)=F(\frac{\pi}{2}-x)=\pi\sin(x)-2x$, 容易证明 $G(x)$ 的下限多项式 $T_{\min}(G, 2)=\frac{57x}{50}+\frac{157x^5}{6000}-\frac{21x^3}{40}-\frac{x^7}{1600}$ 在区间 $(0, \frac{p_2(2)}{2}-1]$ 上成立. 所以 $1-\frac{2x}{\pi}<\cos(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 成立.

即原不等式成立.

例 3.2 $\cos(\frac{x}{\sqrt{3}}) < \frac{\sin(x)}{x}$ $(0 < x \le \frac{\pi}{2})$.

令 $F(x) = \sin(x) - x\cos(u)$, 其中 $u = \frac{x}{\sqrt{3}}$. $\sin(x)$ 和 $\cos(\frac{x}{\sqrt{3}})$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 可规范展开, 且临界值均为 1.

将 $F(x)$ 的 $\sin(x)$ 用 $\mathrm{taylor}(\sin(x), 4) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$ 替换, $\cos(u)$ 用 $\mathrm{taylor}(\cos(u), 3) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}$ 替换, 得到 $F_1(x, u) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^7}{5040} + \frac{xu^2}{2} - \frac{xu^4}{24}$, 再将 $u = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 代入 $F_1(x, u)$ 得到 $F(x)$ 的下限多项式 $T_{\min}(F(x), 2) = \frac{x^5}{270} - \frac{x^7}{5040}$, 在区间 $(0, \frac{p_2(2)}{2}]$ 上成立, 即原不等式在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 成立.

例 3.3 Wilker 不等式 $\frac{16x^3\tan(x)}{\pi^4} < \frac{\sin^2(x)}{x^2} + \frac{\tan(x)}{x} - 2$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$.

不等式等价于 $F(x) = \pi^4\cos(x)\sin^2(x) + \pi^4 x\sin(x) - 2\pi^4x^2\cos(x) - 16x^5\sin(x) > 0$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$, 由于 $F(0) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$, 我们将区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 分为 $(0, 1]$ 和 $(1, \frac{\pi}{2})$.

当 $x \in (0, 1]$ 时, $F(x)$ 的下限多项式由算法 3.1 计算, 算法 3.2 在 $n = 2$ 时正向终止, 即 $T_{\min}(F(x), 2) > 0$ 在 $(0, 1]$ 内成立.

当 $x \in (1, \frac{\pi}{2})$ 时, 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 令 $G(t) = F(\frac{\pi}{2} - t) = \pi^4\cos^2(t)\sin(t) + \pi^4(\frac{\pi}{2} - t)\cos(t) - 2\pi^4(\frac{\pi}{2} - t)^2\sin(t) - 16(\frac{\pi}{2} - t)^5\cos(t)$, $G(t)$ 的下限多项式由算法 3.1 计算, 算法 3.2 在 $n = 4$ 时正向终止, 即 $T_{\min}(G(t), 4) > 0$ 在 $(0, \frac{p_2(4)}{2} - 1]$ 内成立, 所以原不等式成立.

例 3.4 $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(\sin(x))$ $(x > 0)$.

不等式等价于 $F(x) = \cos(\sin(x)) - (1 - \frac{x^2}{2}) > 0$, 显然当 $x > \sqrt{2}$ 时, 不等式成立. 下设 $0 < x \le \frac{3}{2}$.

令 $\sin(x) = u$, 则 $0 < u \le 1$, 此时 $\cos(u)$ 可规范展开且临界值为 1.

再令 $f_1(x, m, u) = \mathrm{taylor}(\cos(u), 2m) - (1 - \frac{x^2}{2})$, 对任意 $m > 1$, $f_1(x, m, u) < f_1(x, m + 1, u) < F(x)$.

令 $f_2(x, m, n) = f_1^+(x, m, \mathrm{taylor}(\sin(x), 2n)) + f_1^-(x, m, \mathrm{taylor}(\sin(x), 2n-1))$, 对任意 $m > 1$ 和任意 $f_2(x, m, n) < f_2(x, m, n+1) < f_1(x, m, u)$. 当 $m \to \infty, n \to \infty$ 时, $f_2(x, m, n) \to F(x)$, 即 $T_{\min}(n, F) = f_2(x, n, n)$ 为 $F(x)$ 的下限多项式.

可以证明 $T_{\min}(2, F)$ 在区间 $(0, \frac{3}{2}]$ 成立, 即原不等式在区间 $(0, \frac{3}{2}]$ 成立. 所以原不等式成立.

3.2 反三角函数不等式

例 3.5[19] $\frac{\arcsin(x)^2}{x^2} + \frac{\arctan(x)}{x} < 2 + \frac{(\pi^2+\pi-8)x^3\arctan(x)}{\pi}$ $(0 < x < 1)$.

令 $F(x) = 2x^2p + x^5\arctan(x)p^2 + x^5\arctan(x)p - 8x^5\arctan(x) - \arcsin(x)^2p - \arctan(x)p$. (原不等式中的超越数 π 用变量 p 替换), 由于超越函数 $\arcsin(x)$ 不能规范展开, 所以不能直接使用算法 2.1 计算下限多项式.

令 $\arcsin(x) = y$ $(0 < y < \frac{\pi}{2})$, 得到 $F(x) = f(x, y, p) = 2x^2p + x^5\arctan(x)p^2 + x^5\arctan(x)p - 8x^5\arctan(x) - y^2p - \arctan(x)p$.

当 $x = 1$, 即 $y = \frac{\pi}{2}$ 时, $F(x) = 0$, 我们将 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 分成 $(0, \frac{3\pi}{8}]$ 和 $(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}]$ 两个区间讨论.

先设 $y \in (0, \frac{3\pi}{8}]$ (即 $x \in (0, \sin(\frac{3\pi}{8})]$).

$\arctan(x)$ 在 $(0, \sin(\frac{3\pi}{8})]$ 内可规范展开, 临界值为 1; $\sin(y)$ 在 $(0, \frac{3\pi}{8}]$ 内可规范展开, 临界值为 1.

令 $f_1(x,y,p) = f^+(\text{taylor}(\arctan(x),4),y,p) + f^-(\text{taylor}(\arctan(x),3),y,p)$, 其中 $x = \sin(y)$;

令 $f_2(y,p) = f_1^+(\text{taylor}(\sin(y),4),y,p) + f_1^-(\text{taylor}(\sin(y),3),y,p)$;

令 $f_3(y) = f_2^+(y,p_1(2)) + f_2^-(y,p_2(2))$.

BOTTEMA 的xprove可以证明 $f_3(y)>0$ 在 $(0,\frac{3}{8}p_2(2)]$ 成立, 即 $f_3(y)>0$ 在 $(0,\frac{3\pi}{8}]$ 成立, 从而 $F(x)>0$ 在区间 $(0,\sin(\frac{3\pi}{8})]$ 成立.

再考虑 $y\in(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}]$, 令 $y=\frac{\pi}{2}-t$, 此时 $x=\cos(t)$, $t\in(0,\frac{\pi}{8}]$. 我们需要证明 $F(t) = ((\pi^2+\pi-8)\cos(t)^4-\pi)*\cos(t)*\arctan(\cos(t))-\pi(\frac{\pi}{2}-t)^2+2\pi\cos^2(t)>0$ 在区间 $(0,\pi/8]$ 成立.

由于当 $t\to 0^+$ 时, $\cos(t)\to 1\neq 0$, 但 $F(0)=0$, 由定理 2.4 知不能直接使用算法 2.2 或算法 3.2.

因 $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, 容易证明 $(\pi^2+\pi-8)(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})^4-\pi>0$ 成立, 从而在区间 $(0,\frac{\pi}{8}]$ 内 $(\pi^2+\pi-8)\cos^4(t)-\pi>0$; 同时容易证明在区间 $(0,\frac{\pi}{8}]$ 内 $\arctan(\cos(t))\geq\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}$, 所以 $F(t)>G(t)=((\pi^2+\pi-8)\cos^4(t)-\pi)\cos(t)(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})-\pi(\frac{\pi}{2}-t)^2+2\pi\cos^2(t)$, 下证 $G(t)>0$.

令 $g_1(t,p)=\text{subs}(\cos(t)=\text{taylor}(\cos(t),4),G^+(t))-\text{subs}(\cos(t)=\text{taylor}(\cos(t),3),G^-(t))$; (其中 π 由 p 代替).

令 $g_2(t)=g_1^+(t,p_1(2))+g_1^-(t,p_2(2))$;

BOTTEMA 的 xprove可以证明 $g_2(t)>0$ 在 $(0,\frac{p_2(2)}{8}]$ 成立, 即 $F(t)>G(t)>0$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{8}]$ 成立. 所以原不等式成立.

例 3.6 $\arcsin(\frac{x}{6})+\arcsin(\frac{2}{3}\sin(\frac{x}{4}))<\frac{x}{3}$ $(0<x<\pi)$.

不等式等价于 $F(x)=\frac{x}{3}-\arcsin(\frac{x}{6})-\arcsin(\frac{2}{3}\sin(\frac{x}{4}))>0$. $F(0)=0$, 下面证明其导数大于 0.

$F'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{36-x^2}}-\frac{1}{2}\frac{\cos(\frac{x}{4})}{\sqrt{9-4\sin^2(\frac{x}{4})}}$, 由于 $\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{36-x^2}}>0$, 所以 $F'(x)>0$ 等价于 $(\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{36-x^2}})^2-\frac{1}{4}\frac{\cos^2(\frac{x}{4})}{9-4\sin^2(\frac{x}{4})}>0$.

不等式左边去掉分母后得到 $f(x)=1620-36x^2-720\sin^2(\frac{x}{4})+16\sin^2(\frac{x}{4})x^2-216\sqrt{36-x^2}+96\sqrt{36-x^2}\sin^2(\frac{x}{4})-324\cos^2(\frac{x}{4})+9\cos^2(\frac{x}{4})x^2$; 令 $x=4y$, 得到 $f(x)=f_1(y)=1620-576y^2-720\sin^2(y)+256\sin^2(y)y^2-216\sqrt{36-16y^2}+96\sqrt{36-16y^2}\sin^2(y)-324\cos^2(y)+144\cos^2(y)y^2$, 其中 $y<\frac{\pi}{4}$;

$\sin(y)$、$\cos(y)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4}]$ 内均可规范展开, 临界值均为 1.

令 $f_2(y)=\text{subs}(\sin(y)=\text{taylor}(\sin(y),4),f_1^+(y))-\text{subs}(\sin(y)=\text{taylor}(\sin(y),3),f_1^-(y))$;

令 $f_3(y)=\text{subs}(\cos(y)=\text{taylor}(\cos(y),4),f_1^+(x))-\text{subs}(\cos(y)=\text{taylor}(\cos(y),3),f_1^-(y))$;

BOTTEMA 的 xprove可以证明 $f_3(y)>0$ 在 $y<\frac{p_2(2)}{4}$ 时成立, 所以 $F'(x)>0$, 即原不等式成立.

3.3 指数与对数不等式

例 3.7 Toader 不等式 $\frac{(x+y)}{2}<\frac{(x-1)\mathrm{e}^x-(y-1)\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}$.

不等式等价于 $f(x,y)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x-(y-1)\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}-\frac{(x+y)}{2}>0$.

显然 $x\neq y$, 不妨设 $y>x$, 并令 $y=x+t$ $(t>0)$, 则 $f(x,y)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x-(x+t-1)\mathrm{e}^{x+t}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x+t}}-x-\frac{t}{2}=$

$\frac{x+t-1-(x-1)\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}-x-\frac{t}{2}$, 去掉恒为正的分母, 得到 $F(t)=2\mathrm{e}^{-t}+t-2+t\mathrm{e}^{-t}$, 显然 $F(t)$ 的最大正根不超过 2, e^{-t} 在 $(0,2]$ 内可规范展开的临界值 $n(2)=\min\{n\in N$, 当 $0<t\leq 2$ 时, $\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-t},n)(2)>0, \mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-t},n+1)(2)>0\}=5$.

xprove 可以证明在 $(0,2]$ 内 $T_{\min}(3,F)(t)=\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-t},6),F^{+}(t))+\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-t},5),F^{-}(t))>0$ 成立, 从而原不等式成立.

例 3.8 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin(x)}$ $(0<x<1)$.

原不等式等价于 $\frac{\ln^2(1+x)}{\arcsin^2(x)}-\frac{1-x}{1+x}>0$, 令 $F(x)=\ln^2(1+x)+x\ln^2(1+x)+x\arcsin^2(x)-\arcsin^2(x)$, 令 $\arcsin(x)=y$, 得到 $f(x,y)=\ln^2(1+x)+x\ln^2(1+x)+xy^2-y^2$, 令 $f_1(x,y,m)=\mathrm{subs}(\ln(1+x)=\mathrm{taylor}(\ln(1+x),2m-1)),f^{+}(x,y))+\mathrm{subs}(\ln(1+x)=\mathrm{taylor}(\ln(1+x),2m)),f^{-}(x,y))$, 令 $f_2(y,m,n)=f_1^{+}(\mathrm{taylor}(\sin(x),2n),x,n)+f_1^{-}(\mathrm{taylor}(\sin(x),2n-1),x,n)$;

用 BOTTEMA 的 xprove 可以证明当 $0<y<\frac{p_2(2)}{2}$ 时, $T_{\min}(F,2)=f_2(y,2,2)>0$, 即不等式 $F(x)>0$ 成立.

例 3.9 Karamata 不等式 $\frac{\ln(x)}{x-1}<\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}$ $(x\neq 1)$.

令 $x=\mathrm{e}^{3y}$, 不等式等价于 $\frac{3y}{\mathrm{e}^{3y}-1}<\frac{1+\mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{3y}+\mathrm{e}^{y}}$, 等价于 $F(y)=\frac{1+\mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{3y}+\mathrm{e}^{y}}-\frac{3y}{\mathrm{e}^{3y}-1}>0$.

首先假设 $y>0$, 即 $x>1$.

去掉恒为正的分母得到 $F(y)=\mathrm{e}^{3y}-1+\mathrm{e}^{4y}-\mathrm{e}^{y}-3y\mathrm{e}^{3y}-3y\mathrm{e}^{y}$, 用文 [10] 的算法 2.1 可以求出 $F(y)$ 正根的上界, 过程如下: 若 $F(y)=0$ 则, $\mathrm{e}^{4y}\leq \mathrm{e}^{3y}+1+\mathrm{e}^{y}+3y\mathrm{e}^{3y}+3y\mathrm{e}^{y}$, 两边乘以 e^{-3y}, 得到 $\mathrm{e}^{y}\leq 1+\mathrm{e}^{-3y}+\mathrm{e}^{-2y}+3y+3y^{e-2y}<3+6y$, 又因为 $\mathrm{e}^{y}>1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^6}{6}$, 所以 $1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^6}{6}<3+6y$, 得到 y 不超过 8 (当然 8 不一定是最优的).

由于 e^{y} 不能规范展开但 e^{-y} 在区间 $(0,T]$ $(T>0)$ 能够规范展开, 所以我们需要将 $F(y)$ 变形为 $f(y,\mathrm{e}^{-y})$ 的形式, 即是说 $F(y)>0$ 等价于 $G(y)=\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{4y}+1-\mathrm{e}^{-3y}-3y\mathrm{e}^{-y}-3y\mathrm{e}^{-3y}>0$, e^{-y} 在 $(0,8]$ 内可规范展开的临界值 $n(8)=\min\{n\in N$, 当 $0<y\leq 8$ 时, $\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-y},n)(8)>0,\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-y},n+1)(8)>0\}=27$, BOTTEMA 的 xprove 可以证明在 $(0,8]$ 内, $T_{\min}(14,G)(y)=\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{-y}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-y},28),G^{+}(y))+\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{-y}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-y},27),G^{-}(y))>0$ 成立, 即原不等式在 $x>1$ 时成立.

当 $y<0$ 时, 令 $y=-t$, 类似的推理可以证明原不等式成立.

3.4 双曲函数不等式

例 3.10 $a\,\mathrm{th}(x)>\sin(ax)$ $(a\geq\sqrt{2})$.

不等式等价于 $a\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}-\sin(ax)>0$. 先估算不等式不成立时 x 的上界: 假设 $a\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}<\sin(ax)\leq 1$, 因 $a\geq\sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{2}(1-\mathrm{e}^{-2x})<1+\mathrm{e}^{-2x}$ 成立, 得到 $\mathrm{e}^{-2x}>\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, 从而 $x<\frac{\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})}{2}<1$, 即当 $x\geq 1$ 时原不等式成立, 所以我们只需证明原不等式在 $(0,1)$ 也成立即可. 下设 $0<x<1$, 此时 e^{-2x} 可规范展开的临界值为 5.

令 $y=ax$, 则 $0<y<a$, 且原不等式等价于 $F(y)=a(1-\mathrm{e}^{\frac{-2y}{a}})-\sin(y)(1+\mathrm{e}^{\frac{-2y}{a}})>0$.

首先假设 $0<y\leq\frac{\pi}{2}$,

令

$$\begin{aligned}f_1(y,m)=&\mathrm{subs}(\sin(y)=\mathrm{taylor}(\sin(y),2m-1),F^{+}(y))\\&+\mathrm{subs}(\sin(y)=\mathrm{taylor}(\sin(y),2m),F^{-}(y));\end{aligned}$$

令

$$
\begin{aligned}
f_2(y,m,n) =&\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{\frac{-2y}{a}}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{\frac{-2y}{a}},2n-1),f_1^+(y,m))\\
&+\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{\frac{-2y}{a}}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{\frac{-2y}{a}},2n),f_1^-(y,m)),
\end{aligned}
$$

则 $T_{\min}(n,F)=f_2(y,n,n)$ 即是 $F(y)$ 的下限不等式, BOTTEMA 的 xprove 可以证明当 $a\geq\sqrt{2}$ 和 $y<\frac{p_2(4)}{2}$ 时, $T_{\min}(4,F)>0$ 成立, 即原不等式成立.

再设 $\frac{\pi}{2}<y\leq\pi$, 令 $y=\frac{\pi}{2}+t$ $(t\in(0,\frac{\pi}{2}])$, 得到 $G(t)=F(\frac{\pi}{2}+t)=a(1-\mathrm{e}^{\frac{-2(\frac{\pi}{2}+t)}{a}})-\sin(\frac{\pi}{2}+t)(1+\mathrm{e}^{\frac{-2(\frac{\pi}{2}+t)}{a}})$, 再令 $u=\frac{2(\frac{\pi}{2}+t)}{a}$, 得到 $f(u,t)=a(1-\mathrm{e}^{-u})-\cos(t)(1+\mathrm{e}^{-u})$.

由于 $\cos(t)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 不能规范展开, 我们将 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 分成 $(0,\frac{\pi}{4}]$ 和 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 两个区间来讨论. 当 $t\in(0,\frac{\pi}{4}]$ 时,

令 $f_1(u,t,m)=\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{-u}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-u},2m),f^+(u,t))+\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{-u}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-u},2m-1),f^-(u,t))$, 将 $u=\frac{2(\frac{\pi}{2}+t)}{a}$ 代入得到 $f_2(t,m)=f_1(\frac{2(\frac{\pi}{2}+t)}{a},t,m)$.

再令

$$
\begin{aligned}
f_3(t,m,n) =&\mathrm{subs}(\cos(t)=\mathrm{taylor}(\cos(t),2n),f_2^+(t,m))\\
&+\mathrm{subs}(\cos(t)=\mathrm{taylor}(\cos(t),2n-1),f_2^-(t,m));
\end{aligned}
$$

将多项式 $f_3(t,m,n)$ 系数中的超越数 π 用变量 p 替换得到 $f_3(p,t,m,n)$.

令 $f_4(t,m,n,v)=\mathrm{subs}(p=p_1(v),f_3^+(p,t,m,n))+\mathrm{subs}(p=p_2(v),f_3^-(p,t,m,n))$;

则 $T_{\min}(n,G)=f_4(t,n,n,n)$ 即是 $G(t)=F(\frac{\pi}{2}+t)$ 的下限多项式, 此时 $G(t)$ 中 t 和 a 满足: 1) $a\geq\sqrt{2}$; 2) $0<t\leq\frac{\pi}{4}$; 3) $y=t+\frac{\pi}{2}<a$. 调用 BOTTEMA 的 xprove($T_{\min}(4,G)>0,[a\geq\sqrt{2},t<\frac{p_2(4)}{4},t+\frac{p_2(4)}{2}<a]$) 可以证明 $G(t)>0$;

当 $t\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 时, 令 $s=\frac{\pi}{2}-t$, 其中 $0<s\leq\frac{\pi}{4}$, 类似的推理可以证明 $G(t)>0$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 内成立. 从而 $G(t)>0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 成立, 即 $F(y)>0$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi]$ 内成立.

类似的变量替换可以证明原不等式在整个实轴上成立.

例 3.11 Lazarevic 不等式 $\mathrm{ch}(x)<(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x})^3$.

不等式等价于 $(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x})^3-\mathrm{ch}(x)>0$, 等价于 $\frac{1}{8}\frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)^3}{x^3}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}>0$, 等价于 $F(x)=\mathrm{e}^{6x}-3\mathrm{e}^{4x}+3\mathrm{e}^{2x}-1-4x^3\mathrm{e}^{4x}-4x^3\mathrm{e}^{2x}>0$, 用文 [10] 的算法 2.1 可以计算出 $F(x)$ 的最大正根不超过 $\frac{15}{4}$. e^{-x} 在 $(0,\frac{15}{4}]$ 可规范展开的临界值为 11.

$F(x)>0$ 等价于 $F_1(x)=1-3\mathrm{e}^{-2x}+3\mathrm{e}^{-4x}-\mathrm{e}^{-6x}-4x^3\mathrm{e}^{-2x}-4x^3\mathrm{e}^{-4x}>0$, $F_1(x)$ 的下限多项式 $T_{\min}(n,F_1(x))=\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-x},2n-1),F_1^+(x))+\mathrm{subs}(\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{taylor}(\mathrm{e}^{-x},2n),F_1^-(x))$, BOTTEMA 的 xprove 可以证明当 $x<\frac{15}{4}$ 时, $T_{\min}(6,F_1(x))$ 成立.

所以原不等式成立.

4 结束语

本文讨论了形如 $f(x,\mathrm{trans}_1(x),\cdots,\mathrm{trans}_n(x))>0$ 的超越函数多项式不等式自动证明问题, 借助 Taylor 展开式建立一个逼近目标函数的多项式套, 从而可将原不等式的证明转化为一系列的一元多项式不等式的验证. 算法回避了函数根的判定和求解问题, 简单易行, 对常见的超越函数多项式不等式 [22] 十分高效, 能够判断目标函数和常数 0 的大小关系, 也能够输出可以理解的证明过程, 是不等式的一种 “可读” 证明.

有关算法的一些说明

1) 本文提出的逐次 Taylor 替换算法, 可以处理含多个不同超越因子且满足如下条件的一类超越函数多项式不等式: 超越因子 $\mathrm{trans}_i(x)$ 可规范展开, 或者为形如 $\mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x))$ 的复合超越因子, $\mathrm{trans}_1(x)$ 在相应区间可规范展开且其 Taylor 展开式的第 n 项关于 x 的次数不超过 $k*n$ (k 为某个常数), $\mathrm{trans}_2(x)$ 在相应区间可强规范展开. 但算法还不能直接处理类似 $\arcsin(x)$、$\arccos(x)$、e^x 这类不能规范展开的超越因子, 在证明过程中需要结合人工证明或做一些变量代换;

2) 在区间 $(0,T]$ 内, 若 $F(x)$ 中的超越因子满足 1) 中的条件, 则 $F(x)>0$ 或 $F(x)<0$ 成立, 或者 $F(x)$ 在 $(0,T]$ 内同时存在大于 0 和小于 0 的点, 算法均一定终止. 但 Taylor 替换法还不能处理非严格不等式, 要解决这一问题需要进一步讨论超越函数多项式重根的性质. 文 [7–13] 证明了当 $\mathrm{trans}(x)=\arctan(x)$ $(0<x\le 1)$ 和 $\mathrm{trans}(x)=\mathrm{e}^{-x}$ $(x>0)$, 且 $f(x,y)$ 为不可约有理多项式时, 超越函数多项式 $f(x,\mathrm{trans}(x))$ 在相应区间无重根, 但对更一般的超越函数多项式重根的性质还需要进一步的研究;

3) 算法将超越数 π 视为一个超越函数, 从而突破了文 [6–9] 的多项式系数必须为有理数的限制, 进而也突破了文 [6–9] 关于三角函数多项式定义域只能在区间 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 内的限制. 当然这种方法可以类似地处理任何超越数系数;

4) 在定理 2.4 中, 当 $F(x)=f(x,\mathrm{trans}_1(\mathrm{trans}_2(x)))$, 在讨论算法 2.2 的终止性时要求 $\mathrm{trans}_2(x)$ 在区间 $(0,T]$ 可强规范展开, 强规范展开是否是必要条件还需进一步讨论.

参 考 文 献

[1] 吴文俊. 初等几何定理机器证明的基本原理. 系统科学与数学, 1984, **4**(3): 207–235.
(Wu W T. Basic Principles of mechanical theorem proving in elementary geometries. *Journal of Systems Science and Mathematical Science*, 1984, **4**(3): 207–235.)

[2] Yang L, Zhang J. A practical program of automated proving for a class of geometric inequalities. Proceedings of the Automated Deduction in Geometry, Berlin: Springer Verlag, 2001, 41–57.

[3] 杨路, 夏壁灿. 不等式机器证明与自动发现. 北京: 科学出版社, 2008.
(Yang L, Xia B C. Inequality Automated Proving and Discovery. Beijing: Science Press, 2008.)

[4] 杨路, 郁文生. 常用基本不等式的机器证明. 智能系统学报, 2011, **6**(5): 377–390.
(Yang L, Yu W S. Automated proving of some fundamental applied inequalities. *Transactions on Intelligent Systems*, 2011, **6**(5): 377–390.)

[5] 杨路, 夏时洪. 一类构造性几何不等式的机器证明. 计算机学报, 2003, **26**(7): 769–778.
(Yang L, Xia S H. Automated Proving for a class of constructive geometric inequalities. *Chinese Journal of Computers*, 2003, **26**(7): 769–778.)

[6] 陈世平. 三角函数不等式的自动证明. 四川大学学报 (自然科学版), 2013, **50**(3): 537–540.
(Chen S P. Automated proving of trigonometric inequalities. *Journal of Sichuan University* (*Engineering Science Edition*), 2013, **50**(3): 537–540.)

[7] 陈世平, 刘忠. Taylor 展开式与三角函数不等式的自动证明. 系统科学与数学, 2016, **36**(8): 1339–1348.
(Chen S P, Liu Z. Automated proving of trigonometric function inequalities using Taylor expansion. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2016, **36**(8): 1339–1348.)

[8] 陈世平, 刘忠. 三角函数多项式不等式的自动证明. 汕头大学学报 (自然科学版), 2015, **3**: 43–55.
(Chen S P, Liu Z. Automated proving of trigonometric function polynomial inequalities. *Journal of Shantou University* (*Engineering Science Edition*), 2015, **3**: 43–55.)

[9] 陈世平, 刘忠. 三角函数多项式的实根分离. 汕头大学学报 (自然科学版), 2016, **3**: 25–39.
(Chen S P, Liu Z. Real root isolation of trigonometric function polynomial. *Journal of Shantou University* (*Engineering Science Edition*), 2016, **3**: 25–39.)

[10] 陈世平, 刘忠. 指数多项式不等式的自动证明. 系统科学与数学, 2017, **37**(7): 1692–1703.
(Chen S P, Liu Z. Automated proving of exponent polynomial inequalities. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2017, **37**(7): 1692–1703.)

[11] 徐鸣. 程序验证与系统分析的若干符号计算问题. 博士论文, 华东师范大学, 上海, 2010.
(Xu M. Some symbolic computation issues in program verification and system analysis. Doctoral Dissertation, East China Normal University, Shanghai, 2010.)

[12] Scott M, Volker W. Deciding polynomial-transcendental problems. *Journal of Symbolic Computation*, 2012, **47**: 16–31.

[13] Achatz M, McCallum S, Weispfenning V. Deciding Polynomial-Exponential Problem. ISSAC 2008, ACM press, New York, 2008.

[14] Parshin A N, Shafarevivh I R. Number Theory IV: Transcendental Numbers. Beijing: Science Press, 2009.

[15] Mortici C. The natural approach of Wilker-Cusa-Huygens inequalities. *Math. Inequal. Appl.*, 2011, **14**(3): 535–541.

[16] Chen C P. Sharp Wilker and Huygens type inequalities for inverse trigonometric and inverse hyperbolic functions. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2012, **23**(12): 65–873.

[17] Bercu G. Padé approximant related to remarkable inequalities involving trigonometric functions. *J. Inequal. Appl.*, 2016, **99**: 1–12.

[18] Malesevic B M. A method for proving some inequalities on mixed trigonometric polynomial functions. *J. Math. Inequal.*, 2016, **10**(3): 849–876.

[19] Malesevic B B. A proof of two conjectures of Chao-Ping Chen for inverse trigonometric functions. *J. Math. Inequal.*, 2017, **11**(1): 151–162.

[20] Bercu. The natural approach of trigonometric inequalities - Padé approximant. *J. Math. Inequal.*, 2017, **11**(1): 181–191.

[21] Tatjana L, Branko M. The natural algorithmic approach of mixed trigonometric-polynomial problems, *Journal of Inequalities and Applications*, 2017, **116**: 1–16.

[22] 匡继昌. 常用不等式. 济南: 山东科学技术出版社, 2010.
(Kuang J C. Applied Inequalities. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2010.)