2023 甲卷理科数学（记忆版）

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|x=3k+1,k\in Z\}$，$B=\{x|x=3k+2,k\in Z\}$，U为整数集，则 $C_U(A\cup B)=$ A

A. $\{x|x=3k,k\in Z\}$　　B. $\{x|x=3k-1,k\in Z\}$

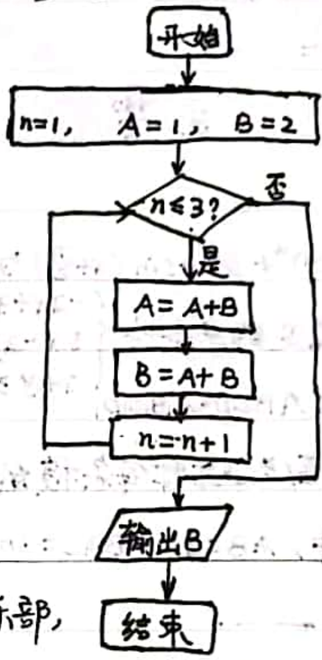
C. $\{x|x=3k-2,k\in Z\}$　　D. ϕ

2. 若复数 $(a+i)(1-ai)=2$，则 $a=$ C

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 执行下面的程序框图，输出的 $B=$ B

A. 21　　B. 34　　C. 55　　D. 89



4. 向量 $|\vec a|=|\vec b|=1$，$|\vec c|=\sqrt2$，且 $\vec a+\vec b+\vec c=\vec 0$，

则 $\cos\langle\vec a-\vec c,\ \vec b-\vec c\rangle=$ D

A. $-\frac15$　　B. $-\frac25$　　C. $\frac25$　　D. $\frac45$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，S_n为 $\{a_n\}$ 前 n 项和，

$S_5=5S_3-4$，则 $S_4=$ C

A. 7　　B. 9　　C. 15　　D. 30

6. 有50人报名足球俱乐部，60人报名乒乓球俱乐部，

70人报名足球或乒乓球俱乐部，若已知某人报足球俱乐部，则其报乒乓球俱乐部的概率为 A

A. 0.8　　B. 0.4　　C. 0.2　　D. 0.1

7. “$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”的 B

A. 充分条件但不是必要条件　　B. 必要条件但不是充分条件

C. 充要条件　　D. 既不是充分条件也不是必要条件

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt5$，其中一条渐近线与圆

$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$ D

A. $\frac15$　　B. $\frac{\sqrt5}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt5}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt5}{5}$

9. 有五名志愿者参加社区服务，共服务星期六、星期天两天，每天从中任选两人参加服务，则~~两天中~~恰有1人连续参加两天服务的选择种数为 B

A. 120　　B. 60　　C. 40　　D. 30

10. 已知 $f(x)$ 为函数 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数，则

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的交点个数为 C

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 在四棱锥P-ABCD中，底面ABCD为正方形，AB=4，PC=PD=3，$\angle PCA=45°$，则$\triangle$~~PCA~~PBC的面积为 C

A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $5\sqrt{2}$

12. 已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$，$F_1$、$F_2$为两个焦点，O为原点，P为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则$|PO|=$ B

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

二、填空题

13. 若$y=(x-1)^2+ax+\sin(x+\frac{\pi}{2})$为偶函数，则$a=$ 2.

14. 设x，y满足约束条件$\begin{cases}-2x+3y\le 3\\3x-2y\le 3\\x+y\ge 1\end{cases}$，设$z=3x+2y$，则z的最大值为 15.

15. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为CD，A_1B_1的中点，则以EF为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为 12.

16. 在△ABC中，AB=2，∠BAC=60°，BC=$\sqrt{6}$，D为BC上一点，AD为∠BAC的平分线，则AD= 2.

三、解答题

17. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，设S_n为$\{a_n\}$前n项和，$2S_n=na_n$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；　(2) 求数列$\{\frac{a_n+1}{2^n}\}$的前n项和T_n.

解：(1) $2S_n=na_n$ ①

$n\ge 2$时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$ ②

①-②得，$2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$.

$\therefore (n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n$

当$n\ge 3$时，$\frac{a_{n-1}}{n-2}=\frac{a_n}{n-1}$.

$\{\frac{a_n}{n-1}\}$是从第2项开始的常数数列.

$\frac{a_n}{n-1}=\frac{a_2}{1}=1$.　$\therefore a_n=n-1\ (n\ge 2)$.

$n=1$时，$2a_1=a_1$，$a_1=0=1-1$.

$\therefore a_n=n-1\ (n\in N^*)$.

(2). $\frac{a_n+1}{2^n}=n\cdot(\frac{1}{2})^n$

$T_n=1\times(\frac{1}{2})^1+2\times(\frac{1}{2})^2+3\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+n\cdot(\frac{1}{2})^n$ ③

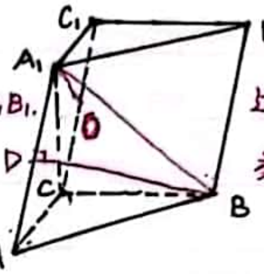
$\frac{1}{2}T_n=1\times(\frac{1}{2})^2+2\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+(n-1)\cdot(\frac{1}{2})^n+n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$ ④

③-④，$\frac{1}{2}T_n=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$

$\therefore T_n=2-(2+n)\cdot(\frac{1}{2})^n$.

18. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$A_1C\perp$ 底面 ABC，$\angle ACB=90^\circ$，A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.

(1) 求证：$AC=A_1C$；(2) 若直线 AA_1 与 BB_1 距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



(1) 证明：∵ $A_1C\perp$ 底面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC.

∴ $A_1C\perp BC$.

∵ $\angle ACB=90^\circ$，即 $BC\perp AC$.

且 A_1C，$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，$A_1C\cap AC=C$.

∴ $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

∵ $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1.

∴ 平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BCC_1B_1.

过 A_1 作 $A_1O\perp CC_1$ 交 CC_1 于 O.

且平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $BCC_1B_1=CC_1$，$A_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1.

∴ $A_1O\perp$ 平面 BCC_1B_1.

∵ A_1 到平面 BCC_1B_1 距离为 1.

∴ $A_1O=1$. 在 $Rt\triangle A_1CC_1$ 中，

$A_1C\perp A_1C_1$，$CC_1=AA_1=2$，$A_1C=AC$.

设 $CO=x$，则 $C_1O=2-x$.

$1+x^2+1+(2-x)^2=4$.

解得 $x=1$. ∴ $AC=A_1C=A_1C_1=\sqrt{2}$.

(2) 解：∵ $AC=A_1C_1$，$BC\perp A_1C$，$BC\perp AC$

∴ $BA=BA_1$.

过 B 作 $BD\perp AA_1$ 交 AA_1 于 D. 则 D 为 AA_1 中点.

$A_1D=1$，$A_1B=\sqrt{5}$.

∴ $BC=\sqrt{3}$.

∴ $AB_1=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$

且 A 到平面 BCC_1B_1 距离也为 1. 则 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角正弦值为 $\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

19. 为探究某药物对小鼠的生长作用，将 40 只小鼠均分为两组，分别为对照组（不加药物）和实验组（加药物）.

(1) 设其中两只小鼠中对照组小鼠数目为 X，求 X 的分布列和数学期望；

(2) 测得 40 只小鼠体重如下（单位：g）：（已按从小到大排好）

对照组：17.3_{13}　18.4_{14}　20.1_{16}　20.4_{18}　21.5_{19}　$\underline{23.2}_{20}$　24.6　24.8　25.0　25.4

26.1　26.3　26.4　26.5　26.8　27.0　27.4　27.5　27.6　28.3

实验组：5.4　6.6　6.8　6.9　7.8　8.2　9.4　10.0　10.4　11.2

14.4_{11}　17.3_{12}　19.2_{15}　20.2_{17}　$\underline{23.6}_{21}$　23.8　24.5　25.1　25.2　26.0

(i) 求 40 只小鼠体重的中位数 m，并完成下面 2×2 列联表：

	$<m$	$\geq m$
对照组	6	14
实验组	14	6

(ii) 根据 2×2 列联表，能否有 95% 的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用. 参考数据：

k_0	0.10	0.05	0.010
$P(K^2\geq k_0)$	2.706	3.841	6.635

解：(1) X 的取值有 0, 1, 2.

$P(X=0)=\frac{C_{20}^2}{C_{40}^2}=\frac{19}{78}$.

$P(X=1)=\frac{C_{20}^1C_{20}^1}{C_{40}^2}=\frac{20}{39}$.

$P(X=2)=\frac{C_{20}^2}{C_{40}^2}=\frac{19}{78}$.

∴ X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{19}{78}$	$\frac{20}{39}$	$\frac{19}{78}$

$E(X)=0\times\frac{19}{78}+1\times\frac{20}{39}+2\times\frac{19}{78}=1$.

(2) (i) $m=23.4$.

(ii) $k=\frac{40\times(6\times6-14\times14)^2}{20\times20\times20\times20}=6.400>3.841$.

20. 设抛物线 $C: y^2=2px\ (p>0)$，$x-2y+1=0$ ~~$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$~~ 与 C 交于 A,B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{15}$.

(1) 求 p；(2) 设 C 的焦点为 F，M,N 为 C 上两点，$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$，求 $\triangle MNF$ 面积的最小值.

解：(1) $\begin{cases} x=2y-1 \\ y^2=2px \end{cases}$

$y^2-4py+2p=0$.

$\Delta=16p^2-8p>0$. 且 $p>0$.

$\therefore\ p>\frac{1}{2}$.

$|AB|=\sqrt{1+4}\,|y_1-y_2|$

$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{16p^2-8p}=4\sqrt{15}$.

$p=-\frac{3}{2}$(舍)，$p=2$.

$\therefore p=2$. …… 5.

(2) $F(1,0)$. 设 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$.

$l_{MN}: x=my+n$. $\begin{cases} x=my+n \\ y^2=4x \end{cases}$

得 $y^2-4my-4n=0$.

$\Delta=16m^2+16n>0$

$y_1+y_2=4m \quad y_1y_2=-4n$.

$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2$

$=(my_1+n-1)(my_2+n-1)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+m(n-1)(y_1+y_2)+(n-1)^2$

$=-4m^2n-4n+4m^2n-4m^2+n^2-2n+1=0$.

$\therefore 4m^2=n^2-6n+1\geq 0$.

$S_{\triangle MNF}=\frac{1}{2}MF\cdot NF=\frac{1}{2}(x_3+1)(x_4+1)$

$=\frac{1}{2}(my_3+n+1)(my_4+n+1)$

$=\frac{1}{2}[m^2(-4n)+(mn+m)\cdot 4m+(n+1)^2]$

$=n^2-2n+1=(n-1)^2$

$\Delta=n^2-6n+1+4n>0$.

$\therefore n\neq 1$.

$\therefore\ n\leq 3-2\sqrt{2}$ 或 $n\geq 3+2\sqrt{2}$

当 $n=3-2\sqrt{2}$ 时，

$S_{\triangle MNF}=(3-2\sqrt{2}-1)^2$

$=12-8\sqrt{2}$.

21. 已知 $f(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

(1) 若 $a=8$，求讨论 $f(x)$ 的单调性；(2) 若 $f(x)<\sin 2x$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解：(1) $a=8$ 时 $f(x)=8x-\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$.

$f'(x)=\frac{(4\cos^2 x+3)(2\cos^2 x-1)}{\cos^4 x}$

$f'(x)>0$ 时，$\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$，$0<x<\frac{\pi}{4}$.

$f'(x)<0$ 时，$\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 为增函数，$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 为减函数.

(2) $g(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x}-\sin 2x$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$.

且 $g(0)=0$.

$\therefore g(x)<0$ 的必要条件是 $g'(0)\leq 0$.

$g'(x)=a-\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x}-2\cos 2x$

$\therefore$ 必有 $g'(0)=a-3\leq 0$.

$\therefore a\leq 3$.

下面证明：$a\leq 3$ 时，$g(x)<0$.

充分性成立.

$\therefore a\leq 3$.

四、选做题

22. 已知 $P(2,1)$，直线 l: $\begin{cases} x=2+t\cos\alpha \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$（$t$为参数），$l$与$x$轴，$y$轴正半轴交于A，B两点，$|PA|\cdot|PB|=4$.

(1) 求 α 的值；(2) 以原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求l的极坐标方程.

解：(1) 令 $x=0$，$t_1=-\frac{2}{\cos\alpha}$.

令 $y=0$，$t_2=-\frac{1}{\sin\alpha}$.

$\therefore |PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\left|\frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}\right|=4$.

$\therefore \sin2\alpha=\pm1$. $\alpha=\frac{\pi}{4}$（舍）或 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

$\therefore \alpha=\frac{3\pi}{4}$.

(2) l: $k=-1$.

$y-2=-(x-1)$

即 $x+y-3=0$.

$\therefore$ 极坐标方程为

$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=3$.

23. 已知 $f(x)=2|x-a|-a$，$a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)<x$；(2) 若 $y=f(x)$ 与坐标轴围成的面积为2，求a.

解：(1) 当 $x\le a$ 时，$f(x)=a-2x<x$.

$\therefore \frac{a}{3}<x\le a$.

当 $x>a$，$2x-3a<x$.

$\therefore a<x<3a$.

$\therefore$ 不等式的解集为 $\{x|\frac{a}{3}<x<3a\}$.

(2) $S=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a=2$.

$\therefore a=2\sqrt{2}$.