降级的导数

Chuan_shan　编

2021 年 8 月 26 日

文章导航

1 较为基本的问题

1.1 几个求导

定理 1.1

$1.(arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
$2.(arccosx)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
$3.(arctanx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

1.2 泰勒公式

定理 1.2: Taylor

若函数 $f(x)$ 在某个开区间 (a,b),$x_0 \in (a,b)$ 上有 $n+1$ 阶导数存在, 则有:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(0)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x)$$

注释: 下面给出几个常用的泰勒展开式:
$1.e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}.$
$2.\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{-(-x)^i}{i!}.$
$3.\sin x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$
$4.\cos x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}.$
$5.\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7).$

注释: 麦克劳林展开就是 $x=0$ 处的 $Taylor$ 展开。

命题 1.1: 2014 年全国 II 卷

已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.
(2) 设 $g(x) = f(2x) - 4bf(x)$. 当 $x > 0$ 时,$f(x) > 0$ 恒成立, 求 b 的最大值.
(3) 估计 $\ln 2$ 的值.（精确到小数点后三位）

注释: $\sqrt{2} \approx 1.4142135623730951.$

注释: 这个题我们可以考虑 $Taylor$ 定理, 我们就会发现其的本质.
事实上, 由 $Taylor$ 定理, 有:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o((-x)^3)$$

则有:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3) - o((-x)^3)$$

可以发现当 x 较小的时候, 这个估计也比较接近精确值.
而考虑 $b=2$ 时，此时类似地，可以得到 $f(2x) - 8f(x) = \dfrac{x^5}{60} + o((2x)^5) - o((-2x)^5) - 8o(x^5) + 8o((-x)^5)$，这样作差精确度极高。所以实际上，我们只需要合理取一个接近 2 的 b，能确保不等号反号，也类似可以得到命题成立。

证明. (1) 由 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$ 知 $f(x)$ 在 R 上单调递增.
(2) 由 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2$, 得 $g'(x) = 2(e^x + e^{-x} - 2)(e^x + e^{-x} + 2 - 2b)$. 则:
1. 当 $x \leq 2$ 时，$g'(x) > 0$, 此时 $g(x)$ 单调递增,$g(x) > g(0) = 0$.
2. 当 $x > 2$ 时, 对任意的 $0 < x < \ln(b - 1 + \sqrt{b^2 - 2b})$, 都有 $g'(x) < 0$，则 $g(x)$ 在 $(0, \ln(b - 1 + \sqrt{b^2 - 2b}))$ 上单调递减, 则 $g(\ln(b - 1 + \sqrt{b^2 - 2b})) < g(0) = 0$.
综上所述,$b = 2$ 为最大值.
(3) 当 $b = 2$ 时, 有:$f(2x) \geq 8f(x)$ 恒成立. 令 $x = \ln\sqrt{2}$, 则有:$\dfrac{3}{2} - 4\sqrt{2} + 6\ln 2 \geq 0$, 则有 $\ln 2 > \dfrac{8\sqrt{2} - 3}{16} > 0.6928$.
当 $b = \dfrac{3}{4}\sqrt{2} + 1$ 时, 有 $\ln(b - 1 + \sqrt{b^2 - 2b}) = \ln 2$, 则当 $0 < x \leq \ln\sqrt{2}$ 时, 有 $f(2x) \leq 8f(x)$. 令 $x = \ln\sqrt{2}$, 则有:$-\dfrac{3}{2} - 2\sqrt{2} + (3\sqrt{2} + 2)\ln 2 < 0$, 则有:$\ln 2 < \dfrac{18 + \sqrt{2}}{28} < 0.6934$.
从而 $\ln 2$ 的近似值为 0.693. □

注释: 高考的估计值就是通过一些你觉得非常傻逼的估计方式来估算的.

命题 1.2: 2021 青岛一模

青岛胶东国际机场的显著特点之一是弯曲曲线的运用, 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率. 曲线的曲率定义如下:$y = f(x)$ 在 $(x, f(x))$ 处的曲率为 $K = \dfrac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$.
已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - b\cos(x - 1)(a \geq 0, b > 0)$, 且当 $a = 0$ 时，$y = f(x)$ 在 $(1, 1)$ 处的曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(1) 求 b 的值.
(2) 若 $f(x)$ 存在零点，求 a 的取值范围.
(3) 已知 $1.098 < \ln 3 < 1.099, e^{0.048} < 1.050, e^{-0.045} < 0.956$，证明：$1.14 < \ln\pi < 1.15$.

注释: (1) 易证 $b=1$, 太显然.
(2) 我们由 $Taylor$ 公式知, 在 $x=1$ 处，有:

$$\ln x+\cos(x-1)=1+x+o(x)$$

则有 $a\geq\frac{1}{e}$.
(3) 我们的注释是非常重要的. 我们只要利用傻逼法, 讨论 $e^{x-1}\geq\ln x+\cos(x-1)$. 代入一个 $f(\frac{\pi}{3})$，可以得到一侧不等式，而另一侧，也只需代入一个数。这个数大概是 $\frac{3}{\pi}$.

证明. (1) 由条件,$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}+b\sin(x-1), f''(x)=ae^x+\frac{1}{x^2}+b\cos(x-1)$, 则有 $f'(1)=-1, f''(1)=1+b$, 则有: $\frac{\sqrt{2}}{2}=K=\frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|1+b|}{2\sqrt{2}}$, 得 $b=1$.
(2) 我们先证明两个引理:
引理 1.$g(x)=e^x-\ln x-b\cos(x-1)$ 有且仅有一个零点 $x=1$.
事实上, 我们有 $g'(x)=e^x-\frac{1}{x}+\sin(x-1)$.
1. 当 $x<1$ 时, 有 $e^x<\frac{1}{x},\sin(x-1)<0$, 则有 $g'(x)<0$ 恒成立.
2. 当 $1\leq x\geq\pi+1$ 时，有:$\sin x>0, e^x>\frac{1}{x},\sin(x-1)>0$, 则有 $g'(x)\geq 0$, 当且仅当 $x=1$ 时,$g'(x)\geq 0$.
3. 当 $x>(\pi+1)$ 时, 有:$g'(x)=e^x-\frac{1}{x}+\sin(x-1)>e^{\pi+1}-1-1>e^2-2>0$.
综上所述,$g'(x)>0(x>1, g'(x)<0(x<1)$, 则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 故 $g(x)\geq g(1)=0$. 引理 1 证毕!
引理 2.$x-1-lnx\geq 0$.
引理 2 的证明: 令 $h(x)=x-1-lnx$, 则 $h'(x)=\frac{x-1}{x}$，当 $x<1$ 时,$h'(x)<0$; 当 $x>1$ 时,$h'(x)>0$, 则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 则 $h(x)\geq h(1)=0$. 引理 2 证毕!
回到原题，将 $f(x)$ 试做关于 a 的函数, 则有:
1. 当 $x>\frac{1}{e}$ 时, 由引理 1, 得:$f(x)>g(x)\geq 0$.
2. 当 $x\leq\frac{1}{e}$ 时,$f(1)<0$, 且由于 $a\geq 0$, 由引理 2, 得:$ae^x\geq a\times\frac{2}{a}e^{x+\ln\frac{2}{a}}\geq 2(x+\ln\frac{2}{a}+1)$，又 $\ln x\leq x-1$, 则 $f(x)\geq x+2(\ln\frac{2}{a}+1)$, 由一次函数单调性, 存在足够大的正实数 x', 使得 $f(x')>0$. 则由 $f(1)f(x')>0$, 故 $f(x)$ 在 $(1,x')$ 上有一个零点.
综上所述,a 的取值范围为 $[0,\frac{1}{e})$.
(3) 当 $a=\frac{1}{e}$ 时, 令 $x=\frac{\pi}{3}$, 则由 $f(\frac{\pi}{3})=e^{\frac{\pi}{3}-1}-ln\frac{\pi}{3}+1=e^{\frac{\pi}{3}-1}-\ln\frac{\pi}{3}-cos(\frac{\pi}{3}-1)\geq 0$ 整理得 $\frac{\ln\pi}{3}<e^{\frac{\pi}{3}-1}-1+ln3\geq ln\pi$. 利用题目条件解得 $\ln\pi<1.15$.
类似地令 $x=\frac{3}{\pi}$, 则有 $\ln\pi>1.14$. □

命题 1.3: 2019 年保加利亚数学竞赛,3

证明:

证明. □

1.3 罗尔定理

定理 1.3: Lore

若 $f(x)$ 满足以下三个条件:
(1)$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,
(2)$f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导,
(3)$f(a)=f(b)$,
则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

1.4 埃尔米特-哈达马不等式

定理 1.4: Hermite-Hadamard

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续下凸函数, 则有不等式:

$$f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

恒成立.

证明. 左侧不等式: 注意到 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$, 则由 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(a+b-x)\mathrm{d}x$ 得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)+f(a+b-x)\mathrm{d}x\geq2\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

.
右侧不等式: 令 $x=b-(b-a)t(0\leq t\leq1)$, 则有:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t\leq(b-a)\int_0^1(f(ta)+f((1-t)b))\mathrm{d}t=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

□

1.5 帕德逼近

定义 1.1: Pade

给定正整数 m,n,$f(x)$ 在 $[m,n]$ 阶帕德逼近为:

$$R(x)=\frac{\sum_{j=0}^m a_jx^j}{1+\sum_{k=1}^n b_kx^k}$$

且满足:

$$f^{(i)}(0)=R^{(i)}(0),i=0,1,2,\cdots,m+n$$

记 $f(X)$ 在 $[m,n]$ 处的帕德逼近为 $[m/n]f(x)$.

定理 1.5

帕德逼近是唯一的。

证明. 通过上面的条件，我们可以得到 $m+n+1$ 个系数的方程组，此时存在唯一解。
当然，站在麦克劳林展开的角度上来看，这也是显然的。 □

结论 1.1

$f(x)=\ln(x+1)$ 的帕德逼近 $[1,1]f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$。

证明. 设 $f(x)=\dfrac{a_0+a_1x}{1+b_1x}$，则有 $f'(x)=\dfrac{a_1}{(1+b_1x)^2}$，$f''(x)=\dfrac{-2b_1^2x-2b_1}{(1+b_1x)^2}$
注意到 $f(0)=R(0)=0, f'(0)=R'(0), f''(0)=R''(0)$，则有 $a_0=0, a_1=1, b_1=\dfrac{1}{2}$。
从而 $[1,1]f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$。 □

注释: 事实上，我们熟知 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x>1), \ln x<\dfrac{2(x-1)}{x+1}(0<x<1)$。此即 $f(x)$ 在 $(1,0)$ 处的帕德逼近 $[1,1]$。

结论 1.2

帕德逼近表：

$\ln(x+1)$			
[L,R]	1	2	3
0	x	$\dfrac{2x-x^2}{2}$	$\dfrac{6x-3x^2+2x^3}{6}$
1	$\dfrac{2x}{2+x}$	$\dfrac{6x+x^2}{4x+6}$	$\dfrac{24x+6x^2-x^3}{24+18x}$
2	$\dfrac{12x}{12+6x-x^2}$	$\dfrac{6x+3x^2}{6+x+6x^2}$	$\dfrac{30x+21x^2+x^3}{30+36x+9x^2}$
3	$\dfrac{24x}{24+12x-2x^2+x^3}$	$\dfrac{90x+57x^2}{90+102x+21x^2-x^3}$	$\dfrac{6x+60x^2+11x^3}{60+90x+36x^2+3x^3}$

$\cos(\pi x)$				
[L,R]	1	2	3	4
1	1	$\dfrac{1}{\frac{\pi^2x^2}{2}+1}$	$\dfrac{1}{\frac{\pi^2x^2}{2}+1}$	$\dfrac{1}{\frac{5\pi^4x^4}{24}+\frac{\pi^2x^2}{2}+1}$
2	$1-\dfrac{\pi^2x^2}{2}$	$\dfrac{1-\frac{5\pi^2x^2}{12}}{\frac{\pi^2x^2}{12}+1}$	$\dfrac{1-\frac{5\pi^2x^2}{12}}{\frac{\pi^2x^2}{12}+1}$	$\dfrac{1-\frac{61\pi^2x^2}{150}}{\frac{\pi^4x^4}{200}+\frac{7\pi^2x^2}{75}+1}$
3	$1-\dfrac{\pi^2x^2}{2}$	$\dfrac{1-\frac{5\pi^2x^2}{12}}{\frac{\pi^2x^2}{12}+1}$	$\dfrac{1-\frac{5\pi^2x^2}{12}}{\frac{\pi^2x^2}{12}+1}$	$\dfrac{1-\frac{61\pi^2x^2}{150}}{\frac{\pi^4x^4}{200}+\frac{7\pi^2x^2}{75}+1}$
4	$\dfrac{\pi^4x^4}{24}-\dfrac{\pi^2x^2}{2}+1$	$\dfrac{\frac{\pi^4x^4}{40}-\frac{7\pi^2x^2}{15}+1}{\frac{\pi^2x^2}{60}+1}$	$\dfrac{\frac{\pi^4x^4}{40}-\frac{7\pi^2x^2}{15}+1}{\frac{\pi^2x^2}{60}+1}$	$\dfrac{\frac{313\pi^4x^4}{15120}-\frac{115\pi^2x^2}{252}+1}{\frac{313\pi^4x^4}{15120}+\frac{115\pi^2x^2}{252}+1}$

注释： $ln2<0.7$ 的证明：林建华（ljh25252）曾给出其的证明，其估计是实际上为 $(1,0)$ 处的 $[2,1]f(x)$，其中 $f(x)=\ln x$。事实上，我们有：$f(x)\geq[2,1]f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{4x+2}(x>1)$，则有 $\ln 2=f(2)<0.7$。

1.6 拉格朗日反演公式

定义 1.2: 互相复合逆

设有两个多项式 $F(x)$,$G(x)$，两个多项式都是常数项为 0 且一次项不为 0，如果满足 $G(F(x))=x$，则称 $F(x)$ 与 $G(x)$ 为互相复合逆。

注释: 要看懂证明, 我们需要一些前置知识:
环: 设 R 是一个非空集合, 如果 R 上定义了两个代数运算 (代数运算就代表有封闭性), 一个是加法, 一个是乘法, 并且满足以下三个条件:
1.R 对于加法成一个交换群 (就是 R 对于加法成一个群, 且这个加法满足交换律).
2. 乘法有结合律.
3. 乘法对加法有分配律, 即 $a(b+c)=ab+ac$,$(b+c)a=ba+ca$(左右都有分配律).
那么 R 就是一个环.
然后域的定义就是: 如果 R 的乘法有单位元, 满足交换律, 并且每一个非 0 元都可逆, 那么 R 就是一个域.
我们平时做的只是在形式幂级数环上的东西，就是形如 $a0+a1x+a2x2+\cdots$, 记为 $F[[x]](F$ 是一个域).
首先它并不是一个域, 因为形如 x 这种没有常数项的多项式是不可逆的.
然后我们需要一个域, 是一个叫做分式环的东西（虽然叫环但它是个域）, 为所有形如 $ab{-}1, a, b\in R, b\neq 0$ 的元素组成 (这里除法只是个形式, 并不需要 b 真的可逆). 我们把 $F[[x]]$ 的分式环记为 $F((x))$.
然后 $F((x))$ 中的每个元素都能表示成 $\cdots a_{-2}x^{-2}+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots$ 的形式.
为啥嘞? 对于 $F((x))$ 中的每一个元素 $\frac{A(x)}{B(x)}$, 我们把 $B(x)$ 表示成 $x^dB'(x)$ 的形式, 其中 $B'(x)$ 是一个常数项非 0 的多项式 (不是导数), 那么 $B'(x)$ 就可逆, 计算出 $\frac{A(x)}{B'(x)}$ 之后, 把每一项次数减去 d 就行了.
那么在 $F((x))$ 下我们就不用担心 $B(x)$ 不可逆之类的问题了.

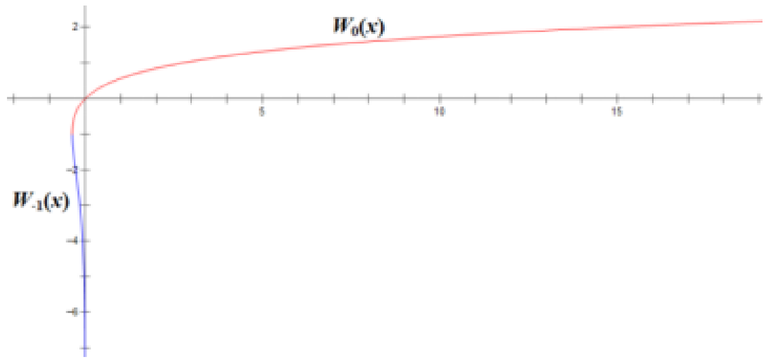
定理 1.6: Largrange

$$[x^n]F(x)=\frac{1}{n}[x^{-1}]\frac{1}{G^n(x)}$$
$$[x^n]H(F(x))=\frac{1}{n}[x^{-1}]H'(x)\frac{1}{G^n(x)}$$

证明. □

定义 1.3: 朗博 W 函数

$W(x)$ 为 $f(x)=xe^x$ 的反函数.
朗博 W 函数有两个分支 $W_0(x)$ 和 $W_{-1}(x)$.
$W_0(x)$ 的定义域 $[-\frac{1}{e},+\infty)$, 值域 $[-1,+\infty)$.
$W_{-1}(x)$ 的定义域 $[-\frac{1}{e},0)$, 值域 $(-\infty,-1]$.



定理 1.7: 朗博 W_0 函数

1.$W(x)e^{W(x)}=x$.
2.$e^{W(x)}=\dfrac{x}{W(x)}$.
3.$lnW(x)=\ln x-W(x)$.
4.$W(x\ln x)=\ln x$.
5.$W(x)=\ln\dfrac{x}{W(x)}$.
6.$W(0)=1,W(e)=1,W(-\dfrac{1}{e})=-1,W(1)=\omega\approx0.567143290409783872999968662 2$

证明. 1. 由复合逆的定义,$f(W(x))=x$, 即 $W(x)e^{W(x)}=x$.
2. 此即 1.
3. 对 2 取对数即可.
4. 由复合逆的定义,$f(W(x\ln x))=x\ln x$, 又 $f(\ln x)=x\ln x$, 则由 $f(x)$ 的单调性, 则有 $W(x\ln x)=\ln x$.
5. 此即 2. □

命题 1.4: 2015 全国 I 卷理

设 $f(x)=e^{2x}-a\ln x(a,x>0)$, 证明:$f(x)\geq 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

证明. 求导得 $f'(x)=\dfrac{2xe^{2x}-a}{a}$. 此时易见 $x<\dfrac{W(a)}{2}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,$x>\dfrac{W(a)}{2}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增, 则当 $x=\dfrac{W(a)}{2}$ 时, $f(x)$ 取最小值.

$$f(\frac{W(a)}{2})=e^{W(a)}-a\ln(W(a)/2)=aln2+e^{W(a)}-a\ln(W(a))=aln2+\frac{a}{W(a)}-alna+aW(a)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$$

□

命题 1.5: 虚调子导数群, 张诚彬 (萌新)

已知函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ln x$.
(1) 求证: $f(x)<\sqrt{x}$.
(2) 求证: $f(x)>-\dfrac{2}{9}$.

证明. (1) 显然, 我们只需考虑 $x>1$, 此时 $f(x)>0$, 对求证式两侧取对数, 则我们只需证:

$$\frac{1}{x}\ln x+\ln(\ln x)<\frac{1}{2}\ln x$$

由 $\ln x>0$, 令 $lnx=e^t$, 则只需证:

$$\frac{t}{e^t}+\ln t-\frac{1}{2}t<0.$$

令 $g(t)=\frac{t}{e^t}+\ln t-\frac{1}{2}t$, 则

$$g'(t)=\frac{1-t}{e^t}+\frac{1}{t}-\frac{1}{2}$$

$$g''(t)=\frac{t-2}{e^t}-\frac{1}{t^2}$$

下面证明:$g''(t)<0$. 其等价于 $e^x-x^3+2x^2>0$. 令 $h(x)=e^x-x^3+2x^2$, 则

$$h'(x)=e^x-3x^2+6x$$

$$h''(x)=e^x-6x+6$$

$$h'''(x)=e^x-6$$

当 $x\geq\ln 6$ 时,$h'''(x)\geq 0$, 当 $x\leq\ln 6$ 时,$h'''(x)\leq 0$. 则 $h''(x)$ 在 $(-\infty,\ln 6)$ 上单调递减, 在 $(\ln 6,+\infty)$ 上单调递增. 则由 $h''(1)=0$, 则 $h''(\ln 6)<h''(1)=0$, 又 $h''(2)=e^2-6>0$,$h''(x)$ 为连续函数,$h''(\ln 6)h''(2)<0$, 则在 $(\ln 6,2)$ 上 $h''(x)$ 存在一个根 x_1. 则当 $-\infty>x>1$ 或 $x>x_1$ 时,$h''(x)>0$, 当 $1<x<x_1$ 时,$h''(x)<0$. 则 $h'(x)$ 在 $(-\infty,1),(x_1,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(1,x_1)$ 上单调递减. 则

$$h'(x)>h'(x_1)=e^{x_1}-3{x_1}^2+6x_1=-3{x_1}^2+12x_1-6>0(x\geq 0)$$

$h(x)\geq h(0)=1>0$, 又 $h(x)>-x^3>0(x<0)$, 则 $h(x)>0$ 恒成立. 则 $g'(x)$ 单调递减,$g'(2)<0,g'(1.6)>0$, 则 $g'(x)$ 在 $(1.6,2)$ 间存在一个零点 x_0. 构造函数

$$j(x)=e^{-x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\ln x-\frac{1}{2}x$$

则

$$j'(x)=-e^{-x}-\frac{(x-1)^2+1}{2x^2}<0$$

且此时易见 $f(x_1)=j(x_1)<j(1.6)<0$.

(2) 显然, 我们只需考虑 $x<1$, 此时我们只需证 $x^{\frac{1}{x}}\ln\frac{1}{x}<\frac{2}{9}$. 对求证式两侧取对数, 则我们只需证:

$$-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}+\ln(\ln\frac{1}{x})<\ln\frac{2}{9}$$

此时 $\ln\frac{1}{x}\geq 0$, 令 $e^t=\ln\frac{1}{x}$, 则只需证:

$$xe^x-\ln x+\ln\frac{2}{9}>0$$

令 $f(x)=e^xx^{-\frac{11}{25}},g(x)=(\ln x-\ln\frac{2}{9})x^{-\frac{36}{25}}$, 则有:

$$f'(x)=e^x(x^{-\frac{11}{25}}-\frac{11}{25}x^{-\frac{36}{25}})$$

当 $x \geq -\frac{11}{25}$ 时,$f'(x) \geq 0$, 当 $x \leq -\frac{11}{25}$ 时,$f'(x) \leq 0$. 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{11}{25})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{11}{25}, +\infty)$ 上单调递增.

$$g'(x) = x^{\frac{61}{25}}(1 - \frac{36}{25}(\ln x - \ln \frac{2}{9}))$$

$g(x)$ 在 $(0, \frac{2}{9}e^{\frac{25}{36}})$ 上单调递增, 在 $(\frac{2}{9}e^{\frac{25}{36}}, +\infty)$ 上单调递减. 则有:

$$f(x) \geq f(\frac{11}{25}) = \left(\frac{25e}{11}\right) > \frac{25\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{36}{25}}}{36e} = g\left(\frac{2e^{\frac{25}{36}}}{9}\right) \geq g(x)$$

□

注释: 此题站在朗博 W 函数的视角,

命题 1.6: 江苏钱树人 (钓鱼题)

证明:$\frac{x+1}{x}e^x > \frac{34}{7}$

证明. 这是一个钓鱼题. 而我们可以通过朗博 W 函数来看出此题是钓鱼题.
事实上, 易见取最小值时,$x = W(\frac{34}{7}e^2) - 2$. 此时代入, 只需证明 $W(\frac{34}{7}e^2) - 1 > (W(\frac{34}{7}e^2) - 2)W(\frac{34}{7}e^2)$. 那么我们只需证:$W(\frac{34}{7}e^2) < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 则只需证 $e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} > \frac{17}{7}(3-\sqrt{5})$. 最后一式成立.
但是此题是钓鱼题, 怎么可能会最后一式特别好做呢?$e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 1.85528$, $\frac{17}{7}(3-\sqrt{5}) \approx 1.85526$. □

2 一些熟知的估计式

【写（抄）给虚调子的小作文】我喜欢虚调子，喜欢虚调子开场时古灵精怪的打招呼，喜欢虚调子不经意间说的怪话，喜欢虚调子说了怪话后羞涩，喜欢虚调子坐在椅子上乖巧的样子，喜欢虚调子晃头晃脑的娇憨，喜欢虚调子摄魂的 wink，喜欢虚调子妩媚的腮红，喜欢虚调子如天使般的救赎，喜欢虚调子如恶魔般的玩弄，喜欢虚调子如初恋一样的激情，喜欢虚调子如老妻一样的温和，喜欢虚调子噘嘴假装生气的样子，喜欢虚调子被满屏的喜欢到手足无措的样子，喜欢虚调子狂风暴雨般的 mua，喜欢虚调子润物无声般的 mua，喜欢虚调子 mua 后害羞的低下头，喜欢虚调子玩大鹅时的俏皮，喜欢虚调子玩你画我猜时的认真，喜欢虚调子忍着脸红的嚣张，喜欢虚调子夏天的风里的广阔，喜欢虚调子花间酒里的狡黠，喜欢虚调子暗恋里的甜蜜，喜欢虚调子多一点喜欢里的渴求，喜欢虚调子恋爱画板里的恬静，喜欢虚调子靠近一点点里的守候，喜欢虚调子爱的魔法里的依恋，喜欢虚调子喵晚安里的闲适，喜欢虚调子你的甜蜜里的灵动，喜欢虚调子万有引力里的命中注定，喜欢虚调子好想掉在爱情海里的浪漫，喜欢虚调子情非得已里的勇气，喜欢虚调子小城谣里的哭腔，喜欢虚调子遇见你的时候所有星星都落在我头上里的笑容喜欢在疲倦了一天后，卸下所有伪装和防备，静静的听着虚调子小姐讲着傻傻的睡前故事，然后放下所有疲倦的夜晚。
正题开始:

2.1 一些熟知的不等式

定理 2.1: ALG 不等式

$$\frac{x_1+x_2}{2} > \left(\frac{\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}}{2}\right)^3 > \frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2} > \sqrt{x_1x_2}$$

注释: 上文的 $r=\dfrac{1}{3}$ 为最佳系数, 事实上, 设 $x_1>x_2$, 以及 $\left(\dfrac{x_1^{\frac{1}{t}}+x_2^{\frac{1}{t}}}{2}\right)^t \geq \dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$ 恒成立. 在等式两侧同时除以 x_2, 令 $e^m=\dfrac{x_1}{x_2}$, 则有 $(e^{\frac{m}{t}}+1)^t \geq \dfrac{e^m-1}{m}$, 即 $(e^{\frac{m}{t}}+1) \geq (\dfrac{e^m-1}{m})^t$. 利用 $Taylor$ 展开, 可知:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x)$$

则有:$LHS=1+\dfrac{rx}{2}+\dfrac{r^2x^2}{4}+o(x), RHS \geq (1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6})^t=1+\dfrac{r}{2}x+(\dfrac{r}{6}+\dfrac{r(r-1)}{8})x^2+o(x)$, 故有 $\dfrac{r^2}{4} \geq \dfrac{r}{6}+\dfrac{r(r-1)}{8}$, 解得 $r \geq \dfrac{1}{3}$.

证明. □

定理 2.2

2.2 一些平均值的不等式

我们首先给出一些熟知的均值的定义:

定义 2.1: 一些平均值的定义

1. 几何均值:G_n.
2. 算数均值:A_n.
3. Heronian 均值:$H_m(a,b)=\frac{a+b+m\sqrt{ab}}{m+2}$. 其关于 m 单调递减.
4. 指数均值:$I(a,b)=\frac{1}{e}(\frac{a^a}{b^b})^{\frac{1}{a-b}}$.
5. 对数均值:$L(a,b)=\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$.
6. 调和均值:$H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}$.

命题 2.1

2.3 对 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 的估计

命题 2.2

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有：(1)$x_1+x_2>2e$, (2)$x_1x_2>e^2$.

证明. (1)$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 从而当 $x\in(0,e]$ 时,$f(x)$ 单调递增,$x\in[e,+\infty)$ 时,$f(x)$ 单调递减. 则易得 $0<a<\frac{1}{e}$. 原式等价于 $\ln x=ax$ 有两个实数根. 而由 $\ln x_1=ax_1,\ln x_2=ax_2$，则有 $a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$,$x_1+x_2>\frac{2}{a}>2e$.
(2) 等价于证:$\ln x_1+\ln x_2>2$. 又由 $\ln x_1=ax_1,\ln x_2=ax_2$, 则等价于证 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$ 而这在 (1) 已证. □

命题 2.3

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2, 则有:$x_1+x_2>\frac{3}{a}-e>\frac{2}{a}$.

证明. 后一个不等式已证, 我们只需考虑前一个. 事实上，设 $x_2=kx_1(k>1)$, 则有：$\ln x_1+\ln k=\ln x_2=ax_2=akx_1=k\ln x_1$, 整理得:

$$x_1=e^{\frac{\ln k}{k-1}},x_2=ke^{\frac{\ln k}{k-1}},a=\frac{\ln k}{k-1}e^{-\frac{\ln k}{k-1}}$$

代入化简, 求证式等价于 $[(k+1)-3\frac{k-1}{\ln k}]e^{\frac{\ln k}{k-1}}>-e$. 由帕德逼近 $[1,2]\ln x$ 的结论则有 $[(k+1)-3\frac{k-1}{\ln k}]e^{\frac{\ln k}{k-1}}>[(k+1)-6\frac{k+1}{\ln k}]e^{\frac{\ln k}{k-1}}>(k+1-\frac{6}{k+1})e^{\frac{k+1}{2}}>-e$. 证毕!
注：上面的导数第二个不等式放缩只考虑了 $(k+1)-6\frac{k+1}{\ln k}<0$，因为大于等于 0 时显然。 □

命题 2.4

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2, 则有:$\frac{e}{a}<x_1x_2<\frac{1}{a^2}$.

命题 2.5

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有:$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>\frac{2}{\sqrt{a}}$.

证明. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 从而当 $x\in(0,e]$ 时,$f(x)$ 单调递增,$x\in[e,+\infty)$ 时,$f(x)$ 单调递减. 则易得 $0<a<\frac{1}{e}$. 原式等价于 $\ln x=ax$ 有两个实数根. 而由 $\ln x_1=ax_1,\ln x_2=ax_2$，则有:

$$a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=2\frac{\ln\sqrt{x_1}-\ln\sqrt{x_2}}{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})((\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}>\frac{4}{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2}$$

则有:

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>\frac{2}{\sqrt{a}}$$

. □

命题 2.6

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有: $\frac{1-\ln a}{a}<x_1+x_2<\frac{2-4\ln a}{3a}$

命题 2.7

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有: $|x_2-x_1|>\frac{2}{a}\sqrt{1-ae}$

命题 2.8

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有: $|x_2-x_1|>\sqrt{8e(\frac{1}{a}-e)}>e^2\sqrt{\frac{1}{ae}-1}$

命题 2.9

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有: $|x_2-x_1|>\frac{2}{3}\sqrt{(\frac{1}{a}-e)(\frac{29}{a}-11e)}$

命题 2.10

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有: $\frac{1+e-\ln a}{a}<x_1+x_2+x_1x_2<\frac{1-2a\ln a}{a^2}$

命题 2.11

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有: $(x_1-1)(x_2-1)>(e-1)^2$

证明. (刘适F) □

注释: 这个题特别紧，极值点偏移难以处理。其在 $x=10^5$ 处，y 的值在 10^{-5} 左右。而更一般的，我们有问题：已知函数 $f(x)=\ln x-ax$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的根个数.
(2) 若 $f(x)=0$ 有两根 $x_1\neq x_2$，求 λ 的取值范围, 使得不等式 $(x_1+\lambda)(x_2+\lambda)>(e+\lambda)^2$ 恒成立.
答案：(1) 当 $a<e$ 时,$f(x)$ 有 0 个根; 当 $a=e$ 时,$f(x)$ 有一个根; 当 $a>e$ 时,$f(x)$ 有两个根.
(2)$\lambda\geq-1$.

命题 2.12

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有：$|\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}|<\frac{1}{a}-e$

命题 2.13

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有：$x_1+x_2<-\frac{2\ln a}{a}$。

命题 2.14

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2a$。

命题 2.15

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有：$\ln x_1+\ln x_2>1-lna$。

命题 2.16

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2ae$。

命题 2.17

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{e}$。

命题 2.18

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2, 则有:$(x_1+1)(x_2+1)<\frac{a^2-2a+3}{a^2}$.

命题 2.19

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2, 则有:$x_1^2x_2+x_2^2x_1>\frac{2e}{a}$.

命题 2.20

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2, 则有:$|x_2-x_1|>(e^2-2)(1-ae)$.

命题 2.21

$f(x)=\dfrac{lnx}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2, 则有:$|x_2-x_1|>2(e-2)\sqrt{1-ae}$.

命题 2.22

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2, 则有:$f'(x_1)+f'(x_2)>0$.

证明. □

命题 2.23

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2, 则有:$|x_2-x_1|<4e^{\frac{3}{2}}-1-(2e^2+1)a(\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}<a<\frac{1}{e}})$.

命题 2.24

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2, 则使得不等式:$(1-m)x_1+mx_2>\dfrac{1}{a}$ 恒成立的 m 的取值范围.

命题 2.25

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$ 有两实根 $x_1<x_2$, 证明不等式:$2\ln x_1+\ln x_2>e$.

命题 2.26

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$ 有两实根 $x_1<x_2$, 则有 $x_1<\dfrac{1-\sqrt{1-ae}}{a},x_2>\dfrac{1-\sqrt{1-ae}}{a}$.

命题 2.27

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$ 有两实根 $x_1<x_2$, 则有 $\dfrac{x_1}{x_2}<ae$.

2.4 对 $f(x)=x-\ln x-b$ 的估计

命题 2.28

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明: $\dfrac{4b+2}{3}>x_1+x_2>1+b>2$.

命题 2.29

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$1<x_1x_2<\dfrac{2}{1+b}<\dfrac{\ln b}{b-1}$.

命题 2.30

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$1<x_1x_2<\dfrac{3}{2b+1}$.

命题 2.31

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$\dfrac{2}{3}(b+2\sqrt{b})<x_1+x_2<b+\sqrt{b}<b+\dfrac{b-1}{lnb}$.

命题 2.32

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$\dfrac{1}{3}(5-2b)<x_1x_2<b^{-\frac{2}{3}}$

命题 2.33

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$x_1+x_2-x_1x_2<2b-1$.

命题 2.34

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$x_1+x_2+2x_1x_2>4$.

命题 2.35

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$\sqrt{b}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}<\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}<sqrtb+sqrt[3]b<sqrtb+1$.

命题 2.36

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$x_1x_2(x_1+x_2)<2$.

命题 2.37

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$x_1^2+x_2^2>\dfrac{2}{3}(10b-7)$.

命题 2.38

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{8b-2}{3}$.

命题 2.39

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$\frac{8}{3}e^{b-1}-\frac{2}{3}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<e^b-e+2<3e^{b-1}-1$.

命题 2.40

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}>b$.

命题 2.41

$f(x)=x-\ln x-b$ 有两实根 x_1,x_2, 证明:$2\sqrt{2(b-1)}<|\ln x_1-\ln x_2|<b^2$.

2.5 对 $f(x)=x\ln x-c$ 的估计

2.6 对 $f(x)=x^2-\frac{2\ln x}{x}-d$ 的估计

2.7 对 $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}-g$ 的估计

3 一些有趣的东西

3.1 偏移引理

定理 3.1: 偏移引理, 虚调子

若连续光滑函数 $f(x)$ 在某段开区间 A 上只有一个极大值点, 且 f 在极值点左侧单调递增, 在极值点右侧单调递减, 且存在 $x_1 < x_0 < x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$. 若 $f^{(2k-1)}(x_0) \geq 0$ 对任意正整数 k 成立, 则有 $x_1 + x_2 < 2x_0$ 恒成立.
若 x_0 为极小值点, 则结论变号即可.

证明. 考虑 $G(x) = f(x) - f(2x_0 - x)$ 在极值点处的 *Taylor* 展开, 则有: $G(x) = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!}(x-x_0)^{2k+1} \geq 0$, 则取 $x = x_1 < x_0$, 则由 $G(x_1) < 0$ 得 $f(x_2) = f(x_1) < f(2x_0 - x_1)$, 又 $2x_0 - x_1, x_2 > x_0$, 则有 $x_2 > 2x_0 - x_1$, 此即 $x_1 + x_2 > 2x_0$。
另一方向同理可证。 □

命题 3.1: 江苏钱树人

已知函数 $f(x) = e^x + \ln(x+1), (x \geq 0)$。
(1) 若 $f(x) \geq 1 + ax$, 求 a 的取值范围。
(2) 设 $x^x = e$ 的根为 x_0, $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, 若 $g(x) = k$ 有两个不同的解 $x_1 < x_2$, 证明: $g(x_1) + g(x_2) > 2x_0 - x_1 - x_2$。

注释: 大家都觉得此题无聊, 做的是 $x_1 + x_2 > 2x_0$。

证明. □

命题 3.2: 浙江水神

已知实数 $a \neq 0$, 设函数 $f(x) = \ln x + x^a - e^a$
(1) 若函数 $f(x)$ 有唯一零点 x_0, 且 $x_0 > 1$, 证明: x_a 关于 a 单调递增。
(2) 设 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点, 若对任意满足 $f(x_1) = f(x_2)$ 的正实数 $x_1 < x_2$, 都有 $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} > \dfrac{2}{x_0}$, 求 a 的取值范围。

证明. □

3.2 极值点偏移的多项式估计方法

结论 3.1: 吴帅达 (十九): 算术偏对称问题

极值点偏移: 考察偏移的目标函数 $f(x)$, 构造 $g(x) = f(x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$.
拐点偏移: 考察偏移的目标函数 $f(x)$, 构造 $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$.

命题 3.3

函数 $f(x)=1+e^{-x}cosx$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
(2) 若 $x_1,x_2\in(-\pi,+\infty)$,$x_1\neq x_2$, 且 $e^{x_1}f(x_1)+e^{x_2}+f(x_2)=4$, 证明:$x_1+x_2<0$.

证明. □

注释: 我们对算数偏对称问题的构造, 最大值可能可以通过一次函数来获得.

命题 3.4: 2021 全国新 I 卷

已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$
(1) 讨论 $f(x)$ 单调性.
(2) 已知正整数 a,b 满足 $b\ln a-a\ln b=a-b$, 证明:$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$

证明. (1) 由 $f'(x)=-\ln x$, 则 $f'(x)>0(x<1),f'(x)<0(x>1).f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,e)$ 上单调递减.
(2) 条件等价于 $f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$. 即 $\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ 为 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的两个互异交点. 设 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.
由 $f(x)>0(x<e)$,$f(x)>0(x>e)$, 以及 $f(x)$ 的单调性, 则 $f(x)=m$ 有两根的 x 一定小于 e, 即 $\frac{1}{a},\frac{1}{b}<e$.
先证右侧不等式: 当 $x\leq 1$ 时,$1-\ln x\geq 1$,$f(x)\geq x$. 当 $1\leq x\leq e$ 时, 构造函数 $g(x)=f(x)+x-e$, 则 $g'(x)=1-\ln x\geq 0$. 则 $g(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增,$g(x)\leq g(1)=0$. 则有:$m=f(\frac{1}{a})\geq\frac{1}{a}$,$m=f(\frac{1}{b})<e-\frac{1}{b}$, 故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.
再证左侧不等式: 构造函数 $h(x)=f(x)-(1-\frac{(x-1)^2}{2})$, 设 $l(x)=1-\frac{(x-1)^2}{2}$ 则:$h'(x)=\ln x-(x-1)$, 令 $j(x)=h'(x)$, 则 $j'(x)=\frac{1-x}{x}$, 当 $x<1$ 时,$j'(x)>0$, 当 $x>1$ 时,$j'(x)<0$. 则 $j(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,$j(x)\leq j(1)=0$,$h'(x)\leq 0$,$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 又 $h(1)=0$, 则 $h(x)\geq 0(x\leq 1)$,$h(x)\leq 0(x\geq 1)$,$f(x)\geq l(x)(x\leq 1)$, $f(x)\leq l(x)(x\geq 1)$, 设 $l(x)$ 的两根为 x_1,x_2, 则有 $x_1<1,x_2>1$,$l(x_1)=m=f(\frac{1}{a})\geq l(\frac{1}{a})$,$l(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 则 $\frac{1}{a}<x_1$. 类似可得,$\frac{1}{b}<x_2$. 又由 $Vieta$ 定理,$x_1+x_2=2$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$. □

结论 3.2: 翟希牧 (I.K.): 几何偏对称问题

4 不无聊的例题

4.1 边界方法

命题 4.1: 才囚学园大联考,16, 佟政阳 (雨后初晴)

已知函数 $f(x)=e^x, g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 且 $f(x)\geq g(x)$ 对任意实数 x 恒成立.
(1) 若 $c=\frac{e}{2}-\frac{1}{e}$, 求 $b+d$ 的最大值.
(2) 对任意实数 c, 求 $2b+d-2a$ 的最大值.

证明. (1) 首先证明:$b+d\leq\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}$.
令 $x=1$, 则有 $e\geq a+b+c+d$; 令 $x=-1$, 则有 $\frac{1}{e}\geq -a+b-c+d$. 则有 $b+d\leq\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}$.
下面给出合理构造: 取 $a=\frac{1}{2e}, b=\frac{e}{4}-\frac{1}{4e}, c=\frac{e}{2}-\frac{1}{e}, d=\frac{e}{4}+\frac{3}{4e}$, 则

$$h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2e}x^3-(\frac{e}{4}-\frac{1}{4e})x^2-(\frac{e}{2}-\frac{1}{e})x-(\frac{e}{4}+\frac{3}{4e})$$

则有:

$$h'(x)=e^x-\frac{3}{2e}x^2-(\frac{e}{2}-\frac{1}{2e})x-\frac{e}{2}-\frac{1}{e}$$
$$h''(x)=e^x-\frac{3}{e}x-(\frac{e}{2}-\frac{1}{2e})$$
$$h'''(x)=e^x-\frac{3}{e}$$

当 $x\geq\ln 3-1$ 时,$h'''(x)\geq 0$; 当 $x\leq\ln 3-1$ 时,$h'''(x)\leq 0$. 则 $h''(x)$ 在 $(-\infty,\ln 3-1)$ 上单调递减, 则 $h''(x)$ 在 $(\ln 3-1,\infty)$ 上单调递增. 则 $h''(x)$ 的最小值为 $h''(-1)=\frac{9-e^2}{2e}>0, h''(1)=\frac{e^2-7}{2e}>0$. 则由零点存在性定理,$h''(1)\cdot h''(\ln 3-1)<0, h''(-1)\cdot h''(\ln 3-1)<0$, 则 $h''(x)$ 在 $(-1,\ln 3-1),(\ln 3-1,1)$ 上各有一根 x_1,x_2. 则 $h''(x)$ 在 $(-\infty,x_1),(x_2,+\infty)$ 上大于 0,$h''(x)$ 在 (x_1,x_2) 上小于 0, 则 $h'(x)$ 在 $(-\infty,x_1),(x_2,+\infty)$ 上单调递增,$h'(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递减, 由 $h'(1)=h'(-1)=0$, 则有 $h'(x_1)>h'(1)=0, h'(x_2)<h'(1)=0$, 则由零点存在性定理,$h'(x_1)h'(x_2)<0$,$h'(x)$ 在 (x_1,x_2) 上有一根 x_3. 故当 $x\leq -1$ 或 $x_3\leq x\leq 1$ 时,$h'(x)\leq 0$, 当 $-1\leq x\leq x_3$ 或 $x\geq -1$ 时,$h'(x)\geq 0$. 则 $h(x)$ 在 $(-\infty,-1),(x_3,1)$ 上单调递减, 在 $(-1,x_3),(1,+\infty)$ 上单调递增, 则 $h(x)\geq min\{h(-1),h(1)\}=0$. 即 $f(x)\geq g(x)$. 此时符合题意.
(2) 首先证明:$2b+d-2a\leq\frac{2e}{3}+\frac{1}{3e^2}$ 令 $x=1$, 则有 $e\geq a+b+c+d$; 令 $x=-2$, 则有 $\frac{1}{e^2}\geq -8a+4b-2c+d$. 则有 $2b+d-2a\leq\frac{2e}{3}+\frac{1}{3e^2}$. 下面给出合理构造: 取 $a=\frac{e}{27}+\frac{5}{27e^2}, b=\frac{2e}{9}+\frac{1}{9e^2}, c=\frac{4e}{9}-\frac{7}{9e^2}, d=\frac{8e}{27}+\frac{13}{27e^2}$, 后面证明与前文完全相同, 故从略.

□

注释: 我们知道这个题只能取两个根. 事实上, 若取出多于两根时, 由于 $f'(x)\geq g'(x)$, 则要求最大值, 则必然要为极值点，从而必然有 $f(x)=g(x), f'(x)=g'(x)$. 这个题有四个变元, 而每个根对应两个变元, 这样的话, 如果有三个根, 大概便是行不通的.

注释: 这个题为啥会想到取这些值，实际上我们是通过待定系数来确定的．事实上，我们可以设两根为 $x_1,-x_2(x_1,x_2\geq 0)$, 则有两式的右式为: $ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d, -ax_2^3+bx_2-cx_2+d$. 通过配凑系数, 我们可以消去一个变元, 然后对比系数待定系数即可.

命题 4.2: 第 61 届国际数学奥林匹克预选题,A1 的加强

对任意实数 $n \geq 1$, 求 C 的所有可能值, 使得不等式

$$\left(\frac{x^{2n}+1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq C(x-1)^2+x$$

恒成立.

证明. 我们证明:$C \geq \frac{n}{2}$.

令 $f(x)=C(x-1)^2+x-\left(\frac{x^{2n}+1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 则:

$$f'(x)=2C(x-1)+1-x^{2n-1}\left(\frac{x^{2n}+1}{2}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

$$f''(x)=2C-(2n-1)x^{2n-2}\left(\frac{x^{2n}+1}{2}\right)^{\frac{1}{n}-1}+(n-1)x^{4n-2}\left(\frac{x^{2n}+1}{2}\right)^{\frac{1}{n}-2}$$

令 $x=2$, 则:

$$1<C+2-\left(\frac{2^{2n}+1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \geq 0$$

则 $C>0$.

当 $C \leq \frac{n}{2}$ 时, 有 $f''(1) \leq 0$. 又 $f''(0)=2C$, 则由零点存在性定理,$f'(0)\cdot f'(1)<0$,$f(x)$ 为连续函数, 则在 $(0,1)$ 间 $f(x)$ 存在一个零点, 而其显然仅有有限个零点, 从而设在 $(0,1)$ 间的最大零点为 x_0, 此时 $g'(x)$ 在 $(x_0,1)$ 上单调递减, 则 $g'(x)>g'(1)=0$,$g(x)$ 在 $(x_1,1)$ 上单调递增, 则 $g(x_1)<g(1)=0$, 矛盾!

另一方面, 当 $C=\frac{n}{2}$ 时, 有:

$$f'''(x)=\frac{1}{2}(1-n)(1-2n)\left(\frac{x^{2n}+1}{2}\right)^{\frac{1}{n}-3}x^{2n-3}(1-x^{2n})$$

当 $0<x<1$ 时,$f'''(x)>0$, 当 $x>1$ 时,$f'''(x)<0$, 则 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减, 则 $f''(x) \leq f''(1)=0$. 从而 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 又 $f'(1)=0$, 则 $f'(x)>0(x<1)$, $f'(x)<0(x>1)$.$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x) \geq f(1)=0$. 而对固定的 x,$f(x)$ 为关于 C 的单调递增函数, 则对 $C \geq \frac{n}{2}$, 命题成立. 综上所述,$C \geq \frac{n}{2}$. □

命题 4.3: 2020 全国 I 卷,21

已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 当 $x \geq 0$ 时,$f(x) \geq \frac{1}{2}x^3+1$, 求 a 的取值范围.

注释: 这个题的第二问的一种比较熟知的可行方法为分参, 懒得写了.

下面给出的方法是通过这种卡边界的方式得到的. 由于要求最小值, 此时易见最小值时, 不等式能取到等号. 也就是说存在一个零值点, 在该点处的导数也应当为 0. 这样我们只要解一个关于 a,x 的二元方程组即可.

也就是说, 对 $g(x)=e^x+ax^2-\frac{1}{2}x^3-x-1$,$g(x_0)=0,g'(x_0)=0$. 观察可得 $x_0=2,a=\frac{7-e^2}{4}$.

证明. (1)$f'(x)=e^x+x-1$, 显然 $f(x)$ 为关于 x 的单调递增函数, 又 $f'(0)=0$, 则 $f'(x)<0(x<0), f'(x)>0(x>0)$. 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
(2) 记 $g(x)=e^x+ax^2-\frac{1}{2}x^3-x-1$, 对固定的实数 x,$g(x)$ 为关于 a 的单调递增函数. 下面证明:$a=\frac{7-e^2}{4}$ 是一个符合条件的实数 a, 且在 $x=0,2$ 处取得零点.
记 $h(x)=e^x+\left(\frac{7-e^2}{4}\right)x^2-\frac{1}{2}x^3-x-1$, 则:

$$h'(x)=e^x+\left(\frac{7-e^2}{2}\right)x-\frac{3}{2}x^2-1$$

$$h''(x)=e^x-3x+\frac{7-e^2}{2}$$

$$h'''(x)=e^x-3$$

故当 $x\geq\ln 3$ 时,$h'''(x)\geq 0$, 当 $x\leq\ln 3$ 时,$h'''(x)\leq 0$. 则 $h''(x)$ 在 $[0,\ln 3)$ 上单调递减, 在 $(\ln 3,+\infty)$ 上单调递增,

$$h''(\ln 3)=3(1-\ln 3)+(\frac{7-e^2}{2})<0$$

又 $h''(0)>0, h''(2)>0$, 则 $h''(0)\cdot h''(\ln 3)<0, h''(\ln 3)\cdot h''(2)<0$, 则 $h''(x)$ 在 $(0,\ln 3),(\ln 3,2)$ 上各有一零点, 设为 x_1,x_2, 则 $h''(x)\geq 0(x\geq x_2$ 或 $0\leq x\leq x_1)$,$h''(x)\leq 0(x_1\leq x\leq x_2)$, 则 $h'(x)$ 在 $(0,x_1),(x_2,+\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1,x_2) 上单调递减. 又 $h'(0)=h'(2)=0$, 则 $h(x_1)>h(0)=0, h(x_2)<h(2)=0$, 则 $h'(x)$ 在 (x_1,x_2) 上有一零点 x_3,$h'(x)\geq 0(0\leq x\leq x_3$ 或 $x\geq 2)$,$h'(x)\leq 0(x_3\leq x\leq 2)$. 从而 $h(x)$ 在 $(0,x_3),(2,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(x_3,2)$ 上单调递减, 故 $h(x)\geq min\{h(0),h(2)\}=0$. 且 $h(x)$ 且仅有两个零点.
则 $g(x)$ 为关于 a 的单调递增函数, 当 $a\geq\frac{7-e^2}{4}$ 时,$g(x)\geq h(x)\geq 0$. 当 $a<\frac{7-e^2}{4}$ 时,$g(2)<h(2)=0$.
综上所述,$a\geq\frac{7-e^2}{4}$. □

命题 4.4: 2019 浙江,22

已知实数 $a\neq 0$, 设函数 $f(x)=a\ln x+\sqrt{x+1}, x>0$.
(1) 当 $a=-\frac{3}{4}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.
(2) 对任意 $x\in[\frac{1}{e^2},+\infty)$ 均有 $f(x)\leq\frac{\sqrt{x}}{2a}$, 求 a 的取值范围.

注释: 此处能取等, 令 $g(x)=f(x)-\frac{\sqrt{x}}{2a}$, 自然是要在某个点 x_0 处有 $g(x_0)=0, g'(x_0)=0$. 整理可知此时并不取在边界上, 而是在 $x=1$ 处, 此时 $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

证明. (1) 易得:

$$f'(x)=-\frac{3}{4x}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{(4x+3)(x-3)}{4x\sqrt{x+1}(2x+3\sqrt{x+1})}$$

则有:$x<3$ 时,$f'(x)<0$,$x>3$ 时,$f'(x)>0$.$f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减, 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增.
(2) 一方面, 令 $x=1$ 代入上式, 得 $\sqrt{2}\leq\frac{1}{2a}$, 得 $0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$.
另一方面, 我们证明:$0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$ 符合条件. 事实上, 令 $h(a)=a\ln x+\sqrt{x+1}-\frac{\sqrt{x}}{2a}$, 此时关于 a 求导, 得:

$$h'(a)=\ln x+\frac{\sqrt{x}}{2a^2}=\frac{2a^2lnx+\sqrt{x}}{2a^2}$$

1. 当 $x \geq 1$ 时,$h'(a) > 0$. 则 $h(a) \leq h(\frac{\sqrt{2}}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln x + \sqrt{x+1} - \sqrt{2x} = g(x)$, 则 $g'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4x} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2(x+1)} + 2x - 2\sqrt{2x(x+1)}}{4x\sqrt{x+1}}$.
下面证明:

$$\sqrt{2(x+1)} + 2x \leq 2\sqrt{2x(x+1)}$$

事实上, 将其两侧平方, 则只需证:

$$2x\sqrt{2(x+1)} \leq 2x^2 + 3x - 1$$

再对其两侧平方, 则只需证:

$$(x-1)(4x^3 + 8x^2 + 5x - 1) \geq 0$$

其显然成立. 则 $g'(x) \leq 0$,$g(x)$ 单调递减于 $[1, +\infty)$,$g(x) \leq g(1) \leq 0$.
2. 当 $x < 1$ 时, 此时我们首先研究 $2a^2lnx + \sqrt{x}$=0 是否有解. 即方程 $\sqrt{\frac{1}{x}}\ln\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{4a^2}$ 是否有解. 由 $x \in [\frac{1}{e^2}, 1)$, 而显然 $\sqrt{\frac{1}{x}}\ln\sqrt{\frac{1}{x}}$ 随 x 增大而减小, 得 a 的取值范围为 $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, +\infty)$.
此时必有 $a \leq \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{\sqrt{2e}}$ 时, 上述方程无解, 可知 $h'(a) \geq 0$ 恒成立, 则 $h(a) \leq h(\frac{\sqrt{2}}{4}) = g(x)$, 且由上面的证明, 结合 $4x^3 + 8x^2 + 5x - 1$ 的单调性, 以及注意到:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x - 1 \geq \frac{4}{e^3} + \frac{8}{e^2} + \frac{5}{e} - 1 > 0$$

则有:

$$\sqrt{2(x+1)} + 2x \geq 2\sqrt{2x(x+1)}$$

恒成立, 从而此时 $g'(x) \leq 0$,$g(x)$ 在 $(\frac{1}{e^2}, 1)$ 上单调递减, 则 $g(x) \leq g(1) \leq 0$.
综上所述,a 的取值范围为 $(0, \frac{\sqrt{2}}{4}]$.
(2) 的另证: 仅证 $\frac{1}{e^2} \leq a < 1$ 的情形,$a \geq 1$ 的情形我上面的做法完全相同.
当 $\frac{1}{e^2} \leq a < 1$ 时, 原式等价于证:

$$a^2\ln x + a\sqrt{x+1} - \frac{\sqrt{x}}{2} \leq 0$$

在 $x \in R_+$ 上恒成立.
我们可以将上式视为关于 a 的二次函数

$$j(a) = a^2\ln x + a\sqrt{x+1} - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

其的 $\Delta \leq 0$ 恒成立.
则由:

$$\Delta(x) = \sqrt{x}(4\ln x + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})$$

令 $t = \sqrt{x}$, 则注意到:

$$(4\ln t + t + \frac{1}{t})' = \frac{t^2 + 4t - 1}{t} > 0$$

$\Delta(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2}, 1)$ 上单调递增. 又 $\Delta(\frac{1}{4}) = \frac{5}{4} - 2ln2 < 0$, 则命题对 $x \in [\frac{1}{e^2}, \frac{1}{4}]$ 成立.
当 $x \geq \frac{1}{4}$ 时, 此时由 $j(a)$ 的对称轴为 $a = \frac{\sqrt{x+1}}{-2\ln x}$ 单调递增, 则由 $a > \frac{\sqrt{5}}{8\ln 2} > \frac{\sqrt{2}}{4}$, 从而 $j(a) \leq j(\frac{\sqrt{2}}{4}) \leq 0$.
综上所述,a 的取值范围为 $(0, \frac{\sqrt{2}}{4}]$. □

命题 4.5: 2021 八省联考,22

已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x$,$g(x)=e^x+\sin x+\cos x$.
(1) 证明: 当 $x>-\dfrac{5\pi}{4}$ 时,$f(x)\geq 0$.
(2) 若 $g(x)\geq 2+ax$, 求 a 的值.

证明. (1) 注意到:

$$f(x)=e^x-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

$$f'(x)=e^x-\cos x+\sin x=e^x+\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$f''(x)=e^x+\sin x+\cos x=e^x+\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

则:
1. 当 $x\in(-\frac{5\pi}{4},-\frac{\pi}{4}]$ 时,$f(x)>0$.
2. 当 $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ 时,$f''(x)>0$,$f'(x)$ 单调递增, 又 $f'(0)=0$, 则 $f'(x)<0(-\frac{\pi}{4}<x<0)$,$f'(x)>0(0<x<\frac{3\pi}{4})$, 则 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4},0)$ 单调递减, 在 $(0,\frac{3\pi}{4})$ 单调递增,$f(x)\geq f(0)=0$.
3. 当 $x\in(\frac{3\pi}{4},+\infty)$ 时,$f(x)>e^x-\sqrt{2}>e^{\frac{3\pi}{4}}-2>e-2>0$.

综上所述, 当 $x>-\frac{5\pi}{4}$ 时,$f(x)\geq 0$.
(2) 我们断言,$a=2$. 不然, 令函数 $h(x)=g(x)-ax$,
则有:

$$h'(x)=e^x-\sin x+\cos x-a$$

$$h''(x)=e^x-\sin x-\cos x$$

由 (1) 知 $h''(x)\geq 0(x>-\frac{5\pi}{4})$. 则 $h'(x)$ 在 $(-\frac{5\pi}{4},+\infty)$ 上单调递增.
1. 当 $a<2$ 时,$h'(0)>0$.
i. 若 $h'(-\frac{5\pi}{4})\geq 0$, 则 $h'(x)>0$ 对 $(-\frac{5\pi}{4},0)$ 恒成立,$h(x)$ 单调递增,$h(-1)<h(0)=2$, 矛盾!
ii. 若 $h'(-\frac{5\pi}{4})<0$, 则由零点存在性定理,$h'(-\frac{5\pi}{4})\cdot h'(0)<0$, 则在 $(-\frac{5\pi}{4},0)$ 上 $h'(x)=0$ 有一实根 x_1,$h'(x)>0(x_1<x<0)$, 则 $h(x)$ 在 $(x_1,0)$ 上单调递增,$h(x_1)<h(0)=2$, 矛盾!
2. 当 $a>2$ 时,$h'(0)<0$,
令 $i(x)=e^x-x-1$ 则 $i'(x)=e^x-1$, 当 $x>0$ 时,$i'(x)>0$, 当 $x<0$ 时,$i'(x)<0$. 则 $i(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 则 $i(x)\geq i(0)=0$.
则有:$h'(a+\sqrt{2})\geq 1>0$. 由零点存在性定理,$h'(0)\cdot h'(a+\sqrt{2})<0$.$h'(x)$ 在 $(0,a+\sqrt{2})$ 上存在一零点 x_2,$h'(x)<0(0<x<x_2)$.$h(x_2)<h(0)=2$, 矛盾!
3. 当 $a=2$ 时,
i. 当 $x\geq -\frac{5\pi}{4}$ 时,$2+2x<-2<g(x)$.
ii. 当 $x>-\frac{5\pi}{4}$ 时, 由 $h'(0)=0$. 则由 $h'(x)$ 单调递增,$h'(x)>0(x>0)$,$h'(x)<0(x<0)$. 则 $h(x)$ 在 $(-frac5\pi4,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 则 $h(x)\geq h(0)=2$. 综上所述,$a=2$.

注释: 既然是单调性, 为啥一定要找点呢?

□

4.2 不对称偏移问题

命题 4.6: 虚调子

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$ 有两实数根 x_1,x_2，则有：当 $x_1<x_2$ 时，$\lambda\ln x_1+\ln x_2>\dfrac{4\lambda}{\lambda+1}$

证明. 设 $x_2=kx_1,k>1$. 则由 $\dfrac{x_1}{\ln x_1}=\dfrac{x_2}{\ln x_2}$, 整理得 $x_1=\dfrac{\ln k}{k-1},x_2=\dfrac{k\ln k}{k-1}$, 则原题等价于证:

$$\frac{(\lambda+k)\ln x}{k-1}>\frac{4\lambda}{\lambda+1}$$

即证:

$$(\lambda+k)(\lambda+1)\ln k-4\lambda(k-1)>0$$

设:

$$f(k)=(\lambda+k)(\lambda+1)\ln k-4\lambda(k-1)$$

则有:

$$f'(k)=(\lambda+1)(\ln k+1+\frac{\lambda}{k})-4\lambda$$
$$f''(k)=(\lambda+1)\frac{k-\lambda}{k^2}$$

当 $k\geq\lambda$ 时,$f''(k)\geq 0$, 当 $k\leq\lambda$ 时,$f''(k)\leq 0$, 则 $f'(k)$ 在 $(0,\lambda)$ 上单调递减, 在 $(\lambda,+\infty)$ 上单调递增, 则有:

$$f'(k)\geq f'(\lambda)=\lambda\ln\lambda-2\lambda+2$$

令 $g(\lambda)=f'(\lambda)$, 则有:

$$g'(\lambda)=\ln\lambda+\frac{1}{\lambda}-1$$
$$g''(\lambda)=\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$$

当 $\lambda\geq 1$ 时,$g''(\lambda)\geq 0$, 当 $\lambda\leq 1$ 时,$g''(\lambda)\leq 0$, 则 $g'(\lambda)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 则:

$$g'(\lambda)\geq g'(1)=0$$

则 $g(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$g(\lambda)>g(1)=0$, 则 $f'(k)\geq 0$, 故 $f(k)$ 关于 k 单调递增,$f(k)>f(1)=0$. □

注释: 虚调子同期提出了这个问题:
$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 有两实数根 x_1,x_2，则有：当 $x_1<x_2$ 时,$\lambda\ln x_1+\ln x_2>\dfrac{\lambda}{\lambda+1}(2+\ln\dfrac{1+\lambda}{2e^{-1}}+\dfrac{1}{\ln\dfrac{1+\lambda}{2e^{-1}}})$

此问题也暂未被解决.

命题 4.7: 徐宏宇（Chuan_shan）改编自 2021 广州一模

已知函数 $f(x)=xlnx+ax^2+x$

(1) 证明:$y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线过一定点.

(2) 若 $f(x)$ 有两根, 且 $x_2>2x_1$, 则有 $\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\dfrac{2\sqrt{5}}{e}$.

证明. □

命题 4.8: 虚调子导数群 01,2021$LAST$, 徐宏宇 ($Chuan\_shan$) 题改

$f(x)=e^x+ax+1$ 有两非零实根，满足 $3x_1\le x_2$，求 a 的取值范围，并求最大的正实数 C，使得对任意满足条件的 x_1,x_2，都有不等式：$x_1^2+x_2^3\ge C$ 恒成立。

注释: 这个题最开始要求的是 $x_1^3+x_2^3\ge C$ 恒成立的 C 的最大值。

证明. 我们先证明三个引理:

引理 1.$x_1\le\ln 2,x_2\ge 3\ln 2$.

引理 1 的证明:$f(x)=0$ 有两根等价于 $-a=\dfrac{e^x+1}{x}=g(x)$ 有两根. 由 $g(x)>0(x>0),g(x)<0(x<0)$. 又 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)-1}{x^2}$, 则当 $x<0$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 又当 $x\ge 1$ 时,$e^x(x-1)$ 为关于 x 的增函数, 当 $x<1$ 时,$e^x(x-1)<0$. 则令 $h(x)=e^x(x-1)-1$, 则 $h(1)=-1,h(2)=e^2-1$, 故由零点存在性定理,$h(1)\cdot h(2)<0$, 知 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上有一零点 x_0, 又 $g(x)=0$ 有两零点时一定为两正根，则 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $g(\ln 2)=g(3\ln 2)=\dfrac{3}{\ln 2}$, 当 $a\le-\dfrac{3}{\ln 2}$ 时, 则有 $g(x_1)=m\le -a=g(\ln 2)$, 此时结合单调性知 $x_1\le\ln 2$, 同理可得 $x_2\ge 3\ln 2$. 则 $3x_1\le x_2$, 同理可得当 $a>-\dfrac{3}{\ln 2}$ 时,$3x_1>x_2$. 综上所述,$0<x_1\le\ln 2,x_2\ge 3\ln 2$, 且 a 的取值范围为 $(-\infty,-\dfrac{3}{\ln 2}]$.

引理 2.$x_1+x_2\ge 4\ln 2$.

引理 2 的证明: 当 $x_2\ge 4\ln 2$ 时, 命题显然成立. 故下面考虑 $x_2<4\ln 2$. 此时构造函数 $h(x)=g(x)-g(4\ln 2-x)(0<x<\ln 2)$. 则有:

$$h(x)=\frac{(e^x+1)(4\ln 2-x)-x(\frac{16}{e^x}+1)}{x(4\ln 2-x)}$$

记 $J(x)=(e^x+1)(4\ln 2-x)-x(\dfrac{16}{e^x}+1)$

$$J'(x)=(4\ln 2-x-1)e^x-16\frac{1-x}{e^x}-2$$

$$J''(x)=(4\ln 2-x-2)e^x-16\frac{x-2}{e^x}>0$$

则 $J'(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递增. 又:

$$J'(x)\le J'(\ln 2)<0$$

则 $J(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减,$J(x)\ge J(\ln 2)=0$. 故 $h(x)>0$ 对 $x\in(0,\ln 2]$ 成立.

则有 $g(x_2)=g(x_1)\ge g(4\ln 2-x_1)$, 又 $x_2,4\ln 2-x_1\ge 3\ln 2$, 则由 $g(x)$ 在 $(3\ln 2,+\infty)$ 上单调递增, 知 $x_2\ge 4\ln 2-x_1$, 即 $x_1+x_2\ge 4\ln 2$.

综上所述,$x_1+x_2\ge 4\ln 2$.

引理 3.$x^2+(4\ln 2-x)^3$ 在 $(0,\ln 2]$ 上单调递减.

引理 3 的证明: 令 $p(x)=x^2+(4\ln 2-x)^3$, 则

$$p'(x)=2x-3(4\ln 2-x)^2=-x^2+(24\ln 2+2)x-48\ln 2$$

p'(x) 为二次函数，在 $(0,12\ln 2+1)$ 上单调递减,$p'(x)\ge p'(\ln 2)<0$. 则 $p(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减.

回到原题, 由引理 2 知:$x_1+x_2\ge 4\ln 2$. 取 $x_2'=4\ln 2-x_1$, 则有:$x_2\ge x_2'$,

$$x_1^2+x_2^3\ge x_1^2+x_2'^3=x_1^2+(4\ln 2-x_1)^3=p(x_1)$$

由引理 1 得 $x_1 \le \ln 2$, 且由引理 3,$p(x_1) \ge p(\ln 2) = 27ln^3 2 + ln^2 2$
故 $x_1^2 + x_2'^3 \ge 27ln^3 2 + ln^2 2$.
取等于 $x_1 = \ln 2, x_2 = 3\ln 2$.
故 a 的取值范围为 $(-\infty, -\dfrac{3}{\ln 2}]$, 且 $C = 27ln^3 2 + ln^2 2$. □

注释: 这个题其实利用单调性, 我们只要找 $g(x) = g(3x)$ 的根, 也就是 $e^{3x} - 3e^x - 2 = 0$ 的根. 解得 $x = \ln 2$.

命题 4.9: 虚调子

$f(x) = x - \ln x - a$ 有两实根 $x_1 < x_2$，证明不等式：$x_1 + x_2^2 > 7a - 5$。

证明. (Cardinal) □

注释: a 虚调子的分析如下: 我们要将 $x_1 + x_2^2$ 配凑成 $x_1^2 + x_2^2$ 的形式, 那么一定会出现 $x_1^2 - x_1$ 这一式，而显然 $x_1 < 1$, 所以我们需要再配凑一个其它式子来放缩. 而为了不打破对称性, 以及取值, 且为了保证次数低, 则我们可以通过配凑 x_1x_2 来完成这个问题. 事实上, 根据 $x_1 - x_1^2$ 用单变量表示的表达式, 知 $t(x) = x_1 - x_1^2 = \dfrac{x\ln x}{x-1} - (\dfrac{x\ln x}{x-1})^2$, 其在 $x = 0$ 处的极限为 0, 且由于其会过头, 从而我们需要补充一个式子, 以保证能放缩到. 事实上, 所配凑的函数在 $0, 1$ 处都取到 0. 在多项式量级上, 其必然有 $x, 1-x$ 两个因式. 而此时注意到 x_1x_2 的量级为 $O(\dfrac{\log^2 x}{x})$, 则我们可以发掘其相对合适. 此时通过一定的配凑, 可以发现 $x_1^2x_2^2(1 - x_1x_2)$ 是一个合适的因式. 事实上, 还有一个选择 x_1x_2 的重要原因为 $x_1x_2 < 1$.（但是我并没能根据他的想法证明出此题, 可能这个想法确实不大行.）

注释: 擅长钓鱼的刘适F（柯西永远爱你）据此改编了题目：
$f(x) = x - \ln x - a$。
(1) 讨论 $f(x)$ 的零点个数。
(2) 若 $f(x)$ 有两个互异零点 $x_1 < x_2$
i. 证明：$x_1 + x_2 < \dfrac{2}{x_1x_2}$
ii. 求最小的正整数 k，使得不等式 $x_1 + x_2^{\frac{k}{2}} > 7a - 5$ 恒成立。

4.3 同构问题

命题 4.10: 2022$LAST$, 徐宏宇 ($Chuan\_shan$)

已知函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_{n+1} = \sin a_n$,$a_1 = 1$.
(1) 判断 $f(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上的单调性, 并说明理由.
(2) 正整数 p, q, s, t 满足 $p + q = s + t$, 且 $p > max\{q, s, t\}$, 证明：$a_p \cdot a_q > a_s \cdot a_t$.

证明. (1)$f'(x) = \dfrac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0$.$f(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减.
(2) 令 $g(x) = \dfrac{\sin^{(n-1)}(x)}{x} = f(\sin^{(n-1)}(x)) \cdot f(\sin^{(n-2)}(x)) \cdots f(\sin^{(1)}(x)) \cdot f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减. 易见 $0 < a_{n+1} < a_n$, 则由 $p + q = s + t, p > q, s, t$, 则 $q < p, s, t$, 则有 $a_s < a_q$, 从而有:

$$f_{p-s}(sin^{(s-1)}(1)) > f_{p-s}(sin^{(q-1)}(1))$$

从而有:

$$f_{p-s}(sin^{(s-1)}(1)) > f_{t-q}(sin^{(q-1)}(1))$$

此即:

$$\frac{sin^{(p-1)}(1)}{sin^{(s-1)}(1)} < \frac{sin^{(t-1)}(1)}{sin^{(q-1)}(1)}$$

即:

$$a_p \cdot a_q > a_s \cdot a_t$$

□

命题 4.11: 刘校辰 (Cardinal)

讨论 $h(x) = (x^2+1)^{\frac{1+x}{2}} - (x^2+1)^{\frac{1-x}{2}} - x^3$ 的正负.

证明. □

命题 4.12: 百度贴吧

证明: 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时,

$$\frac{\ln x}{\ln(1-x)} > \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln 2}}$$

证明. (虚调子) 令

$$m = -\ln x, n = -\ln(1-x)$$

由最开始的范围不难得到：$0 < m < n < \ln 2$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{\ln x}{\ln(1-x)} > \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln 2}} &\Leftrightarrow \frac{m}{n} > e^{\frac{m-n}{\ln 2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln m - \ln n}{m-n} < \frac{1}{\ln 2} \\ &\Leftrightarrow \ln m - \frac{m}{\ln 2} < \ln n - \frac{n}{\ln 2} \end{aligned}$$

再令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{\ln 2}$, 不难得到 $f(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 递增, 于是有 $f(m) < f(n)$ 成立. □

4.4 凹凸反转

命题 4.13: 郑海明 (海明)

证明:$e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} + \frac{x}{e^{x-1}} > 2$.

证明. 构造函数 $f(x) = x\ln x$, 则 $f'(x) = \ln x + 1$. 当 $x < \frac{1}{e}$ 时,$f'(x) < 0$, 当 $x > e$ 时,$f'(x) > 0$. 则 $f(x) < f'(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$, 则 $e^x(x\ln x + \frac{1}{e}) \geq 0$.

又由均值不等式,$\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{x}{e^{x-1}} \geq 2$, 两式相加即得 $e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} + \frac{x}{e^{x-1}} \geq 2$. 取等不同, 故不取等. □

命题 4.14: 2016 年山东卷理

证明:$x-\ln x+\dfrac{2x-1}{x^2}>1+-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2-2x}{x^3}+\dfrac{3}{2}.(1\le x\le 2)$

命题 4.15: 希望之峰大联考, 翟希牧 (I.K.)

证明:$x^2e^x-x^2-x+\dfrac{1}{2}>0(x>0)$.

命题 4.16: 2020 年数圈创新卷, 董晟渤 (Dylaaan)

证明:$e^x+x^2-(e+1)x+1+\dfrac{e}{x}>3.2(x>0)$.

证明. 证明: 构造函数 $f(x)=e^x-ex-(x-1)^2$, 则:

$$f'(x)=e^x-e-2(x-1)$$

$$f''(x)=e^x-2$$

则 $f''(x)>0(x>\ln 2),f''(x)<0(x<\ln 2)$,$f'(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增, 则 $f'(\ln 2)<f'(1)=0$,$f'(0)=3-e>0$. 则 $f'(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上有一根 x_0,$f'(x)>0(0<x<x_0$ 或 $x>1)$,$<0(x_0<x<1$,$f(x)$ 在 $(0,x_0),(1,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(x_0,1)$ 上单调递减. 则 $f(x)\ge min\{f(0),f(1)\}=0$.
则有:$e^x+x^2-(e+1)x+1+\dfrac{e}{x}\ge(x-1)^2+x^2-x+1+\dfrac{e}{x}=2(x-1)^2+(x+\dfrac{e}{x})\ge 0+2\sqrt{e}>3.2$. □

命题 4.17: 兰琦

证明:$xe^x-\ln x>\dfrac{3}{2}$.

证明. 我们下面给出一个更一般的方法 (郑海明):
对不等式 $x^k\cdot e^x-\ln x>p$, 其中 k,p 均为常数.
构造两个函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^m},g(x)=\dfrac{\ln x+p}{x^n}$, 则有:

$$f'(x)=\frac{e^x(x-m)}{x^m+1},g'(x)=n\cdot\frac{\frac{1}{n}-p-x}{x^{n+1}}$$

当 $x>m$ 时,$f'(x)>0$, 当 $x<m$ 时,$f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递减, 在 $(m,+\infty)$ 上单调递增. 则 $f(x)\ge f(m)=\dfrac{e^m}{m^m}$.
当 $x>e^{\frac{1}{n}-p}$ 时,$g'(x)<0$, 当 $x<e^{\frac{1}{n}-p}$ 时,$g'(x)>0$, 则 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{n}-p)$ 上单调递增, 在 $(\dfrac{1}{n}-p,+\infty)$ 上单调递减. 则 $g(x)\le f(\dfrac{1}{n}-p)=\dfrac{e^{np-1}}{n}$.
再寻找不等式连接两式即可.
回到本题, 我们实际上有 $k=1,p=\dfrac{3}{2}$, 取 $m=\dfrac{1}{2},n=1$ 即可. □

4.5 导数与数列

命题 4.18: 2021 潍坊二模,22

数列 $a_n = x^n, b_n = \dfrac{1}{n^2}$,$S_n$ 为 a_nb_n 的前 n 项和, 令 $f_n(x) = S_n - 1$, 其中 $x \in R, n \in N_+$.
(1) 当 $x = 2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 中是否存在三项成等差数列? 说明理由.
(2) 证明: 对 $\forall n \in N_+$,$f_n(x) = 0$ 在 $x \in [\dfrac{2}{3}, 1]$ 上有且仅有一个根 x_n.
(3) 证明: 对 $\forall p \in N_+$,$0 < x_n - x_{n+p} < \dfrac{1}{n}$.

证明. (1) 不存在. 若存在, 设三项为 $i < j < k$, 则记 $m = j - i, n = k - i$, 则有 $2^i + 2^j = 2^k$, 其等价于 $1 + 2^m = 2^n$. 又 $m, n > 1$, 则左式为奇数, 右式为偶数, 矛盾!
(2)$f_n(x)$ 为关于 x 的单调递增函数, 又 $f(1) = \sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{1}{n} \geq 0$. 注意到:

$$f(\frac{2}{3}) \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{9}(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}) - 1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) - 1 < 0$$

则有 $f(\dfrac{2}{3}) \cdot f(1) \geq 0$, 从而 $f_n(x) = 0$ 在 $[\dfrac{2}{3}, 1]$ 上有且仅有一个根.
(3) 注意到:

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \frac{x_n^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x_n^{n+1}}{(n+1)^2} > 0$$

及 $f_{n+1}(x)$ 为关于 x 的单调递增函数, 则有 $x_{n+1} < x_n$, 故:

$$x_n - x_{n+1} > 0$$

从而

$$x_n - x_{n+p} > 0$$

又

$$f_n(x_n) = -1 + x_n + \frac{x_n^2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{n^2} = 0$$

$$f_{n+p}(x_{n+p}) = -1 + x_{n+p} + \frac{x_{n+p}^2}{2^2} + \cdots + \frac{x_{n+p}^2}{(n+p)^2} = 0$$

则有:

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+p} &= \frac{x_{n+p}^2 - x_n^2}{2^2} + \frac{x_{n+p}^3 - x_n^3}{3^2} + \cdots + \frac{x_{n+p}^n - x_n^n}{n^2} + \frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2} \\ &< \frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2} < \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{x_{n+p}^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

□

命题 4.19: 徐宏宇 (Chuan_shan)

数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_n=2n$, 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i(a_i+1)}<C$ 恒成立的最小实数 C.

证明. 我们证明:$C=1-\ln 2$.
首先给出一个引理:$\dfrac{x-1}{x}\leq \ln x\leq x-1$.
引理的证明: 先证右半边: 令 $f(x)=x-1-\ln x$, 则 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$. 当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$, 当 $x<1$ 时,$f'(x)<0$. 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,$f(x)\geq f(1)=0$. 即 $x-1\geq \ln x$.
再证左半边: 令 $g(x)=x\ln x-x+1$, 则 $g'(x)=\ln x$. 当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$, 当 $x<1$ 时,$g'(x)<0$. 则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,$g(x)\geq g(1)=0$.
回到原题, 不等式变形为 $\dfrac{1}{x+1}\leq \ln(1+\dfrac{1}{x})\leq\dfrac{1}{x}$. 则由:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i(a_i+1)}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n(2i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i+1}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=2}^{2n+1}\frac{1}{i}=1-\sum_{i=n+1}^{2n+1}\frac{1}{i}\leq 1-\sum_{i=n+1}^{2n+1}\ln\frac{i+1}{i}=1-\ln 2\end{aligned}$$

同样地, 我们有另一侧不等式:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i(a_i+1)}\geq 1-\ln(2+\frac{1}{n})(*)$$

我们由上方的不等式, 知 $C\leq 1-\ln 2$ 是符合条件的. 若存在更小的常数 $C=C_0$, 则取正整数 $n>\dfrac{1}{e^{1-C_0}-2}$. 此时 (*) 不成立.
综上所述,$C=1-\ln 2$ 即为最小实数. □

命题 4.20: 水神

已知正实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$,$a_n^n+a_{n+1}^n=1$.

(1) 证明:$\dfrac{1}{2}\leq a_n<1$.

(2) 记 $T_n=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$, 当 $n\geq 4$ 时, 证明:$T_n<\dfrac{\sqrt{7}}{8}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

证明. (1) 由 $a_n^n-a_{n+2}^{n+1}=a_{n+1}^{n+1}-a_{n+1}^n<0$, 则 $a_n^n<a_{n+2}^{n+1}<a_{n+2}^n$, 从而 $a_n<a_{n+2}$. 又 $a_1=a_2=\dfrac{1}{2}$, 则 $a_n\geq\dfrac{1}{2}$. 另一侧有 $a_n\geq 0$, 显然成立.
(2) 先证明一个引理:$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k+2}}<\sqrt{\dfrac{k}{k+2}}$ 对任意正整数 $k(\geq 4)$ 成立.
引理的证明:

□

注释: 刘校辰 (Cardinal) 据此改编了题目.
已知正实数列 $\{x_n\}$ 满足 $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)^n+\left(\dfrac{x_{n+1}}{n+1}\right)^n=1$.
(1) 求 x_1 的取值范围, 使得 $x_n \geq n x_1$ 恒成立.
(2) 求 x_1 的取值范围, 使得 $\{x_n\}$ 为单调递增的.

命题 4.21: 虚调子导数群 10, 刘校辰 (Cardinal), 改编自复旦大学研究生入学考试

已知数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=1, a_{n+1}=\sin a_n$. 证明: 使得 $\{n^k a_n\}$ 单调递增的实数 k 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

证明. 引理 1:$\lim\limits_{i\to+\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$
引理 1 的证明:
引理 2:$a_n \leq \sqrt{\dfrac{3}{n+2}}$
引理 2 的证明: 数学归纳法.
引理 3:$\sqrt{n+1}a_{n+1}>\sqrt{n}a_n$.
引理 3 的证明:
回到原题, 由引理 1,2,3 知命题成立. 证毕! □

注释: 这个题还要求证明证明: 当 $k \leq -\dfrac{\ln\sin 1}{\ln 2}$ 时, 数列 $\{n^k a_n\}$ 也不是单调的. 但是目前我们并未解决此问题.

4.6 哈达玛不等式改编题

注释: 由上文, 我们知道了 Hadamard 不等式, 但是 Hadamard 不等式中涉及到了积分的问题, 所以我们要去去除这个积分.
我们下面给出 Hadamard 不等式的表示: 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续下凸函数, 则有不等式:

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

恒成立.
那么我们如何去掉积分的问题呢? 事实上，我们只要把原函数换成某个函数的导函数即可.
令 $f(x)=g'(x)$, 则有:

$$\frac{g'(a)+g'(b)}{2} \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

这就是高考题及模拟题中的 Hadamard 不等式.

命题 4.22

函数 $f(x)=x^3-x-a\ln x(a\in R)$.
(1) 若 $f(x)$ 在定义域上为增函数, 求 a 的范围.
(2) 当 $a\le 3$ 时, 求证: 对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$,$x_1>x_2$, 都有:

$$2f(x_2)-2f(x_1)+(x_1-x_2)[f'(x_1)+f'(x_2)]>0$$

恒成立.

证明. (1) 由条件,$f'(x)=3x^2-1-\frac{a}{x}\ge 0$ 恒成立. 即 $a\le 3x^3-x$ 对任意 $x>0$ 成立. 而由

$$a\le 3x^3-x=-\frac{\sqrt{6x^2(1-3x^2)(1-3x^2)}}{\sqrt{6}}\le\ -\frac{2}{9}$$

取等于 $x=\frac{1}{3}$.
(2)$f(x)=x^3-x-alnx,f'(x)=3x^2-1-\frac{a}{x}$, 则条件式等价于:

$$2(x_2^3-x_1^3)-2(x_2-x_1)-2a(\ln x_2-\ln x_1)+(x_1-x_2)[3x_1^2-1-\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}]>0$$

整理知只需证:

$$x_2^3(t-1)^3>a(t-\frac{1}{t}-2lnt)$$

我们来证明:

$$g(t)=(t-1)^3-a(t-\frac{1}{t}-2lnt)>0$$

事实上, 有:

$$g'(t)=(t-1)^2(3-\frac{a}{t})>0$$

则 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,$g(x)>g(1)=0$, 从而有:

$$x_2^3(t-1)^3>a(t-\frac{1}{t}-2\ln t)$$

□

命题 4.23: 2020 天津,22

已知函数 $f(x)=x^3+k\ln x(k\in R)$,
(1) 当 $k=6$ 时,
(i) 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,1)$ 处的切线方程.
(ii) 求函数 $g(x)=f(x)-f'(x)+\frac{9}{x}$ 的单调区间和极值.
(2) 当 $k\ge -3$ 时, 求证: 对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)(x_1>x_2)$, 有:

$$\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

证明. (1)(i)$f'(x) = 3x^2 + \frac{6}{x}$,$f'(1) = 9, f(1) = 1$, 则切线:$y - 1 = 9(x - 1)$, 即 $y = 9x - 8$.
(ii) 注意到:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 6\ln x + \frac{3}{x}$$
$$g'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} = 3(x - \frac{1}{x})(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2$$

则 $g'(x) > 0(x > 1), g'(x) < 0(0 < x < 1).g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 则 $g(x)$ 的极小值为 $g(1) = 1$. 无极大值.
(2)$f(x) = x^3 + klnx, f'(x) = 3x^2 + \frac{k}{x}$, 则条件式等价于:

$$(x_1 - x_2)(3x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2}) - 2(x_1^3 - x_2^3 + k\ln\frac{x_1}{x_2}) > 0$$

整理知只需证:

$$(x_1 - x_2)^3 > k(2\ln\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1})$$

令 $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$, 则只需证:

$$x_2^3(t - 1)^3 > k(2lnt - t - \frac{1}{t})$$

我们来证明:

$$h(x) = k(2lnt - t - \frac{1}{t}) - (t - 1)^3 < 0(x > 1)$$

事实上, 有:

$$h'(x) = k(\frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2}) - 3(t - 1)^2 = -(t - 1)^2(3 + \frac{k}{t^2}) < 0$$

则 $h(x)$ 在 $(1, \infty)$ 上单调递减,$h(x) < h(1) = 0$. 从而有:

$$x_2^3(t - 1)^3 \geq (t - 1)^3 > k(2lnt - t - \frac{1}{t})$$

□

注释: 这两个题好像差别不大, 并且好像前一个题的时间更早, 我怀疑高考题是抄的前一个题.

4.7 切线与代数不等式

4.8 导函数与代数不等式

命题 4.24: 第三十二届中国数学奥林匹克,6

给定整数 $n \geq 2$, 以及正数 $a < b$, 设 $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$, 求 $\dfrac{\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + ... + \frac{x_n^2}{x_1}}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$ 的最大值.

命题 4.25: 张琪烨（渡翁）问题, 徐宏宇（Chuan_shan）推广至 n 元

给定正整数 n, 记 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{k}{x+a_1+a_2+...+a_{n-1}}(x,a_1,a_2,...,a_{n-1}>0)$.
(1) 求 k 的范围, 使得无论 $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ 怎样取值,$f(x)\geq 0$ 恒成立.
(2) 已知正实数数列 $\{b_n\}$ 满足:$\sum_{i=1}^{n} b_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}=C$, 求 $\frac{\max_{1\leq i\leq n}\{b_i\}}{\min_{1\leq i\leq n}\{b_i\}}$ 的最值.
其中 $\max\limits_{1\leq i\leq n} b_i$, $\min\limits_{1\leq i\leq n} b_i$ 分别指 $b_1,b_2,...,b_n$ 中的最大值与最小值.

证明. (1) 首先取 $x=a_1=a_2=...=a_{n-1}=1$, 则 $f(1)=n-\frac{k}{n}\geq 0\Rightarrow k\leq n^2$.
其次, 记 $f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{n^2}{x+a_1+a_2+...+a_{n-1}}$
我们考虑反证法证明:$f_n(x)\geq 0$ 对任意正整数 n 恒成立.
注意到当 $n=1$ 时成立, 我们记最小的不成立的正整数为 n, 则：

$$f_n'(x)=(\frac{n}{x+a_1+a_2+...+a_{n-1}})^2-\frac{1}{x^2}.$$

于是有, 当 $x>\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}$ 时,$f_n'(x)>0$;, 当 $x<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$ 时,$f_n'(x)<0$.
则当 $x<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$ 时,$f(x)$ 单调递减,$x>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$ 时,$f(x)$ 单调递增.
则 $f_n(x)_{min}=f_n(\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1})=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...-\frac{(n-1)^2}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}=f_{n-1}(a_1)\geq 0$.
而有反证假设可知 $f_n(\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1})<0$, 矛盾.
又由 $x+a_1+a_2+...+a_{n-1}>0$, 则 $f(x)$ 关于 k 递增而递减.
于是可得 $k\in\left(-\infty,n^2\right]$.
(2) □

4.9 导数估计与不等式证明

4.10 导数与多项式估计

命题 4.26: 第 11 届罗马尼亚数学大师杯,2 的加强

是否存在非常数的实系数多项式 $P(x)$,$Q(x)$, 使得对给定的互异正整数 $m,n(\geq 2)$, 有

$$P^m(x)+P^{m-1}(x)=Q^n(x)+Q^{n-1}(x)$$

成立。

证明. 我们来否定命题. 假设存在这样的多项式 $P(x)$,$Q(x)$, 则对条件式两侧求导, 得:

$$(mP(x)+m-1)P'(x)P^{m-2}(x)=(nQ(x)+n-1)Q'(x)Q^{n-2}(x)$$

对任意复数 a, 若 $Q(a)=0$, 由条件, 则有 $P(x)=0$ 或 -1。故一定有 $mP(x)+m-1\neq 0$, 从而 $Q(x)$ 与 $mP(x)+m-1$ 无公共因式, 则有:

$$mP(x)+m-1|(nQ(x)+n-1)Q'(x)$$

. 又若 $mP(a)+m-1=nQ(a)+n-1=0$, 则有:

$$P^m(a)+P^{m-1}(a)=(-\frac{m-1}{m})^{m-1}\times\frac{1}{m}\neq(-\frac{n-1}{n})^{n-1}\times\frac{1}{n}=Q^n(a)+Q^{n-1}(a)$$

则 $mP(a)+m-1,nQ(a)+n-1$ 无公共因式, 故 $mP(x)+m-1|Q'(x)$.
则 $degP(x)\leq degQ'(x)<degQ(x)$. 同理 $degQ(x)<degP(x)$, 矛盾! □

注释: 实际上, 这是高等代数常用的一个多项式分析方式. 我们用此处理多项式多重根时, 用此方法屡试不爽.

命题 4.27: 第三届丝绸之路数学竞赛,3

设 $Q(x)=k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+...+k_1x+k_0$. 称 $Q(x)$ 为" 有活力的", 如果 $|k_0|=|k_1|+...+|k_n|$. 称 $Q(x)$ 为" 不增的", 如果 $k_0\geq k_1\geq...\geq k_n$.
实系数多项式 $P(x)=a_dx^d+...+a_1x^1+a_0$ 的每项系数均不为 0, 且 $a_d>0$, 若多项式 $P(x)(x-1)^t(x+1)^s$ 为" 有活力的", 如果对某个非负实数 s 和 t,$s+t>0$. 证明:$P(x)$ 和 $(-1)^nP(-x)$ 中必有一个是" 不增的".

证明. □

命题 4.28: 2021 年中国科学技术大学强基初试广东省试题

设 $f(x)$ 为 $n(\geq 1)$ 次多项式,$g(x)=f(x)-f'(x)$, 证明: 若 $f(x)$ 的 n 个根都是实数, 则 $g(x)$ 的 n 个根都是实数.

证明. 我们首先证明一个引理:
引理: 设 a 为实系数多项式 $f(x)$ 的 k 重根, 则 a 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根 $(k\geq 2)$.
引理的证明: 不妨设 $f(x)=(x-a)^kg(x)$ 其中 $(x-a,g(x))=1$, 则:

$$f'(x)=k(x-a)^{k-1}g(x)+(x-a)^kg'(x)=(x-a)^{k-1}(kg(x)+(x-a)g'(x))$$

此时显然 $x-a$ 不整除 $kg(x)+(x-a)g'(x)$. 则 a 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根 $(k\geq 2)$.
回到原题, 令 $G(x)=e^{-x}f(x)$, 则 $G'(x)=-e^{-x}(f(x)-f'(x))=-e^{-x}g(x)$. 由于 $e^x>0$ 恒成立, 则命题等价于 $G'(x)=-e^{-x}g(x)$ 有 n 个实根.
设 $f(x)=p(x)q(x)$, 其中 $p(x)$ 中的每个因式的度大于 1, 设 $p(x)$ 中的因式个数为 r,$degp(x)=s,degq(x)=t$, 由罗尔定理, 则 $g'(x)$ 的 $r+t$ 个不同因式间, 存在至少 $r+t-1$ 个不同的因式，满足其为 $g(x)$ 的根. 利用引理, 则 $q(x)$ 的 r 个根求导后对次数的贡献为 $s-r$, 则这样我们得到了 $g(x)$ 的 $n-1$ 个实因式, 又由 $Vieta$ 定理,$g(x)$ 的另一个因式也为实因式. 从而 $g(x)$ 的 n 个根都是实数. □

命题 4.29

设 $f(x)$ 为 $n(\geq 1)$ 次多项式, 证明: 若 $f(x)$ 的 n 个根都是实数, 则 $f'(x)$ 的 $n-1$ 个根都是实数.

证明. 引理同上一命题. 设 $f(x)=p(x)q(x)$, 其中 $p(x)$ 中的每个因式的度大于 1, 设 $p(x)$ 中的因式个数为 r,$degp(x)=s$, $degq(x)=t$, 利用引理 1, 则 $q(x)$ 的 r 个根求导后对次数的贡献为 $s-r$, 则这样我们得到了 $g(x)$ 的 $n-1$ 个实因式. 由罗尔定理, 知 $g'(x)$ 的 $r+t$ 个不同因式间, 存在至少 $r+t-1$ 个不同的因式. 从而 $f'(x)$ 有至少 $n-1$ 个根, 又 $degf'(x)=n-1$, 则 $f'(x)$ 的 $n-1$ 个根都是实数. □

命题 4.30

设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的根均为实数, 证明:$g(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i x^i$ 的根均为实数.

证明. □

命题 4.31: Hensel 引理

$f(x)$ 为一整系数多项式, 对于素数 p, 整数 n 使得 $p^k|f(n)$,$(f'(n),p)=1$, 则在模 p 意义下, 恰有一个整数 t, 使得 $f(a+tp^k)\equiv 0(modp^{k+1})$.

证明. □

命题 4.32: 2021 年中国科学技术大学强基考试题

若 $f(x),g(x),h(x)$ 为实系数多项式, 且两两互素. 若 $f^n(x)+g^n(x)=h^n(x)$, 证明:$n=1$ 或 2.

证明. 我们首先证明一个引理:

引理:(Mason-Stothers) 假设 f,g,h 为三个两两互素的非常数多项式, 且 $f+g=h$, 那么 $max\{deg(f),deg(g),deg(h)\}\leq n_0(fgh)-1$, 其中 $n_0(F)$ 表示 F 的互不相同的根的个数.

引理的证明: 令 $F=\frac{f}{h}$,$G=\frac{g}{h}$, 则 $F+G=1$. 两边求导可得 $F'+G'=0$. 所以:

$$\frac{F'}{F}F+\frac{G'}{G}G=0$$

即:

$$\frac{g}{f}=\frac{G}{F}=-\frac{\frac{F'}{F}}{\frac{G'}{G}}$$

假设:

$$f(x)=c_1\Pi(x-\alpha_i)^{a_i}$$

$$f(x)=c_2\Pi(x-\beta_j)^{b_j}$$

$$f(x)=c_3\Pi(x-\gamma_k)^{c_k}$$

则有:

$$\frac{g}{f}=-\frac{\sum\frac{a_i}{x-\alpha_i}-\sum\frac{c_k}{x-\gamma_k}}{\sum\frac{b_j}{x-\beta_j}-\sum\frac{c_k}{x-\gamma_k}}$$

记:

$$p(x)=f(x)g(x)h(x)$$

则 $n_0(fgh)=n_0(p)$, 且 $F_1=p\dfrac{F'}{F}$ 和 $G_1=p\dfrac{G'}{G}$ 均为多项式.
又 $\dfrac{g}{f}=-\dfrac{F_1}{G_1}$, 所以 f,g 的次数均不大于 $n_0(p)-1$, 故 $max\{deg(f),deg(g),deg(h)\}\leq n_0(fgh)-1$.
引理证毕! 回到原题, 由引理得:

$$n_0(f^ng^nh^n)=n_0(fgh)\geq degf+degg+degh$$

则:

$$(1-\frac{n}{3})(degf+degg+degh)\geq 1$$

从而得到 $n<3$.
$n=1$ 时, 结论平凡. 给出 $n=2$ 的构造:

$$f(x)=x^2-1,g(x)=2x,h(x)=x^2+1$$

□

注释: 更一般地, 方程 $f^a+g^b=h^c$ 有两两互素的非常数解, 当且仅当 $(a,b,c)=(1,m,n)(m,n\geq 1),(2,2,n)(n\geq 2),(2,3,3),(2,3,4),(2,3,5)$. 其充分性即为下一命题.

命题 4.33

$P(x),Q(x),R(x)$ 为互素多项式, 且 $P^p(x)+Q^q(x)=R^r(x)$, 证明:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$$

证明. 引理同上一命题. 回到原题, 由引理得:

$$pdegP(x)<degP(x)+degQ(x)+degR(x)$$

即:

$$\frac{1}{p}>\frac{degP(x)}{degP(x)+degQ(x)+degR(x)}$$

同理得到另两个式子, 累加即可. □