



华南理工大学

South China University of Technology

工科数学分析 作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 9 月 27 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 集合，映射与函数	1
1.1 第 1 周作业	1
第二章 极限	4
2.1 第 2 周作业	4

第一章 集合, 映射与函数

1.1 第1周作业

例题 1.1.1: 讨论下列函数的奇偶性

$$(1)y = 3x - x^3$$

$$(2)2 + 3x - x^3$$

$$(3)y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$$

$$(4)y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(5)y = \sqrt{x(2-x)}$$

$$(6)y = 2^{-x}$$

$$(7)f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

$$(8)y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

解 1.1.1. (1) 由于 $f(x) + f(-x) = 3x + 3(-x) - x^3 - (-x)^3 = 0$, 故为奇函数

(2) 由于 $f(x) + f(-x) = 2 + 3x + 3(-x) + 2 - x^3 - (-x)^3 = 4$, 不为奇函数; 而 $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$, 故为非奇非偶函数

(3) 由于 $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$, 故为偶函数

(4) 由于 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(-x)$, 故为偶函数

(5) 由于 $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$, 故不为偶函数, 由于 $f(x) + f(-x) = \sqrt{x(2-x)} + \sqrt{-x(2+x)} \neq 0$, 故为非奇非偶函数

(6) 由于 $\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$, 故为非奇非偶函数

(7) 由于 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) + f(-x) = x-1 + (-x)+1 = 0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$, 故为奇函数

(8) 由于 $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln(-x^2 + (x^2 + 1)) = 0$, 故为奇函数

例题 1.1.2: 研究函数的单调性

$$(1)y = ax + b \quad (2)y = ax^2 + bx + c \quad (3)y = x^3 \quad (4)y = a^x$$

解 1.1.2. (1) 若 $a \geq 0$, 则 y 单调递增; 若 $a < 0$, 则 y 单调递减; 若 $a > 0$, 则 y 严格单调递增

(2) 若 $a > 0$, 则 y 先严格单调减后严格单调增, 若 $a < 0$, 则 y 先严格单调增后严格单调减,

若 $a = 0$, 则当 $b > 0$ 时, y 单调递增, 当 $b < 0$ 时, y 单调递减; 若 $a = b = 0$, 则 y 非严格单调递增

(3) 若 $x_1 > x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) > x_1 - x_2 > 0$ 故单调递增

(4) 需限定 $a > 0$, 则当 $a > 1$ 时, y 单调递增, 当 $a < 1$ 时, y 单调递减; 若 $a = 1$, 则 $y = 1$ 非严格单调递增;

例题 1.1.3: 哪些是周期函数? 如果是说明其周期, 并说明有无最小周期, 有就求出来

$$(1) y = \sin^2 x$$

$$(2) y = \sin x^2$$

$$(3) y = \cos(x - 2)$$

$$(4) y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$(5) y = x - [x]$$

$$(6) y = \tan |x|$$

解 1.1.3. (1) 是周期函数, 周期为 $k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), 最小正周期为 π

(2) 不是周期函数, 因为

$$\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{2x+T^2}{2} \neq 0$$

则这样的 T 不存在.

(3) 是周期函数, 周期为 $2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), 最小正周期为 2π .

(4) $y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\lambda x + \arctan \frac{B}{A})$ 是周期函数, 周期为 $\frac{2k\pi}{\lambda}$, ($k \in \mathbb{Z}, \lambda > 0$), 最小正周期为 $\frac{2\pi}{\lambda}$, ($\lambda > 0$)

(5) 是周期函数, 因为 $[x] + 1 = [x + 1]$, 则 $x + 1 - [x + 1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x]$, 所以 $y = x - [x]$ 是周期函数, 周期为 \mathbb{Z} , 最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数. 证明: 由于正切函数的一个周期是 π , 假设 $\tan |x|$ 也是周期函数, 则存在 $T > 0$ 使得对于定义域内的任意实数 x 都有 $|x| + \pi = |x + T|$, 代入 $x = -\pi$ 得到 $T = 3\pi$, 代入 $x = 0$ 得到 $T = \pi$, 矛盾! 所以 $y = \tan |x|$ 不是周期函数.

例题 1.1.4: 证明

两个奇函数之积为偶函数, 奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

解 1.1.4. (1) 设 $f(x), g(x)$ 为两个奇函数, 则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(-g(-x)) = f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(g(-x)) = -f(-x)g(-x) \Leftrightarrow f(x)g(x) + f(-x)g(-x) = 0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数.

例题 1.1.5: 证明

若函数 $f(x)$ 周期为 $T(T > 0)$, 则函数 $f(-x)$ 的周期也是 T .

解 1.1.5. 设 $f(x)$ 周期为 T , 则 $f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(-x+T) = f(-x)$, 故 $f(-x)$ 的周期也是 T .

例题 1.1.6: 证明

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义域为 R 的单调函数, 求证: $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

解 1.1.6. 由于 $f(x), g(x)$ 是定义域为 R 的单调函数, 则:

$$\forall x_1, x_2 \in R, (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0, \quad \forall x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在 $x_1 = g(x_3), x_2 = g(x_4)$, 则相乘

$$(g(x_3) - g(x_4))(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

结合 $x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0$ 就有:

$$(x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4))^2(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3 - x_4)(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

故 $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

例题 1.1.7: 证明

$$(1) \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad (2) \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数 $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 + i \Rightarrow z_1 z_2 = 5 + 5i$, 则:

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由于 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 代入 $x = \arcsin x$ 即可得到:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

第二章 极限

2.1 第 2 周作业