华南理工大学
South China University of Technology

工科数学分析
习题分析与解答

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级： 1 班

学号： 202530451676

日期： 2025 年 12 月 22 日

厚德尚学 自强不息

务实创新 追求卓越

目录

第一章 集合，映射与函数

1.1 第 1 周作业

例题 1.1.1 讨论下列函数的奇偶性

$(1)y=3x-x^3$ $(2)2+3x-x^3$ $(3)y=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$

$(4)y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(5)y=\sqrt{x(2-x)}$ $(6)y=2^{-x}$

$$(7)f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$$

$(8)y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

解 1.1.1. (1) 由于 $f(x)+f(-x)=3x+3(-x)-x^3-(-x)^3=0$，故为奇函数

(2) 由于 $f(x)+f(-x)=2+3x+3(-x)+2-x^3-(-x)^3=4$，不为奇函数；而 $4\neq 2f(x)\Rightarrow f(x)\neq f(-x)$，故为非奇非偶函数

(3) 由于 $f(x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}=f(-x)$，故为偶函数

(4) 由于 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(-x)$，故为偶函数

(5) 由于 $f(x)=\sqrt{x(2-x)}\neq\sqrt{-x(2+x)}=f(-x)$，故不为偶函数，由于 $f(x)+f(-x)=\sqrt{x(2-x)}+\sqrt{-x(2+x)}\neq 0$，故为非奇非偶函数

(6) 由于 $\begin{cases}f(x)+f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x\neq 0\\ f(x)=2^{-x}\neq 2^{-(-x)}=f(-x)\end{cases}$，故为非奇非偶函数

(7) 由于 $\begin{cases}f(0)=0\\ f(x)+f(-x)=x-1+(-x)+1=0\\ f(x)\neq f(-x)\end{cases}$，故为奇函数

(8) 由于 $f(x)+f(-x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln(-x^2+(x^2+1))=0$，故为奇函数

例题 1.1.2 研究函数的单调性

$(1)y=ax+b$ $(2)y=ax^2+bx+c$ $(3)y=x^3$ $(4)y=a^x$

解 1.1.2. (1) 若 $a\geq 0$，则 y 单调递增；若 $a<0$，则 y 单调递减；若 $a>0$，则 y 严格单调递增

(2) 若 $a>0$，则 y 先严格单调减后严格单调增，若 $a<0$，则 y 先严格单调增后严格单调减，

若 $a=0$，则当 $b>0$ 时，y 单调递增，当 $b<0$ 时，y 单调递减；若 $a=b=0$，则 y 非严格单调递增

(3) 若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)>x_1-x_2>0$ 故单调递增

(4) 需限定 $a>0$，则当 $a>1$ 时，y 单调递增，当 $a<1$ 时，y 单调递减；若 $a=1$，则 $y=1$ 非严格单调递增；

例题 1.1.3 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$(1) y=\sin^2 x$	$(2) y=\sin x^2$	$(3) y=\cos(x-2)$
$(4) y=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$	$(5) y=x-[x]$	$(6) y=\tan\lvert x\rvert$

解 1.1.3. (1) 是周期函数，周期为 $k\pi,(k\in\mathbb{Z})$，最小正周期为 π

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2-\sin x^2=2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{(x+T)^2-x^2}{2}=2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{2x+T^2}{2}\neq 0$$

则这样的 T 不存在.

(3) 是周期函数，周期为 $2k\pi,(k\in\mathbb{Z})$，最小正周期为 2π.

(4)$y=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\lambda x+\arctan\dfrac{B}{A})$ 是周期函数，周期为 $\frac{2k\pi}{\lambda},(k\in\mathbb{Z},\lambda>0)$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{\lambda},(\lambda>0)$

(5) 是周期函数，因为 $[x]+1=[x+1]$，则 $x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]$，所以 $y=x-[x]$ 是周期函数，周期为 $\mathbb{Z}$，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是 π，假设 $\tan|x|$ 也是周期函数，则存在 $T>0$ 使得对于定义域内的任意实数 x 都有 $|x|+\pi=|x+T|$，代入 $x=-\pi$ 得到 $T=3\pi$，代入 $x=0$ 得到 $T=\pi$，矛盾！所以 $y=\tan|x|$ 不是周期函数.

例题 1.1.4 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

解 1.1.4. (1) 设 $f(x),g(x)$ 为两个奇函数，则

$$f(x)g(x)=(-f(-x))(-g(-x))=f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设 $f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)g(x)=(-f(-x))(g(-x))=-f(-x)g(-x)\Leftrightarrow f(x)g(x)+f(-x)g(-x)=0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数.

例题 1.1.5 证明

若函数 $f(x)$ 周期为 $T(T>0)$，则函数 $f(-x)$ 的周期也是 T.

解 1.1.5. 设 $f(x)$ 周期为 T，则 $f(x+T)=f(x) \Rightarrow f(-x+T)=f(-x)$，故 $f(-x)$ 的周期也是 T.

例题 1.1.6 证明

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义域为 R 的单调函数，求证：$f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

解 1.1.6. 由于 $f(x), g(x)$ 是定义域为 R 的单调函数，则：

$$\forall x_1, x_2 \in R,\ (x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2)) \geq 0,\ \ \forall x_3, x_4 \in R,\ (x_3-x_4)(g(x_3)-g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在 $x_1=g(x_3), x_2=g(x_4)$，则相乘

$$(g(x_3)-g(x_4))(f(g(x_3))-f(g(x_4))) \geq 0$$

结合 $x_3, x_4 \in R, (x_3-x_4)(g(x_3)-g(x_4)) \geq 0$ 就有：

$$(x_3-x_4)(g(x_3)-g(x_4))^2(f(g(x_3))-f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3-x_4)(f(g(x_3))-f(g(x_4))) \geq 0$$

故 $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

例题 1.1.7 证明

$$(1)\ \arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}. \quad (2)\ \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数 $z_1=2+i, z_2=3+i \Rightarrow z_1z_2=5+5i$，则：

$$\arg(z_1)+\arg(z_2)=\arg(z_1z_2)=\frac{\pi}{4}$$

(2) 由于 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，代入 $x=\arcsin x$ 即可得到：

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

第二章 极限

2.1 习题 2.1

例题 2.1.1 2.1-A-3：给出下列极限的精确定义

（1）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

解 2.1.1.（1）对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时，$|f(x)|<\varepsilon$.
（2）对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时，$|(1+x)^{\frac{1}{x}}-e|<\varepsilon$.

例题 2.1.2 2.1-A-7

利用极限的精确定义证明下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5x)=24$ （2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$ （4）$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x}{x^2-4}=+\infty.$

解 2.1.2.（1）要证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-3|<\delta$ 时，$|(x^2+5x)-24|=|(x+8)(x-3)|<\varepsilon$。已经出现了 $|x-3|$，所以现在只需限定 $|x+8|$，先限定 $|x-3|<1$，那么 $|x+8|<12$，此时还需满足 $|(x+8)(x-3)|<12|x-3|<\varepsilon$，得 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{12}$，故取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{12}\right\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，$|(x^2+5x)-24|=|(x+8)(x-3)|<\varepsilon$。
（2）要证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon$。取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$。
（3）要证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|x|>\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$，因为 $\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{2}{3x^2}\right|$，取 $\delta=\sqrt{\dfrac{2}{3\varepsilon}}$，则当 $|x|>\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2+2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$。
（4）要证对于任意 $G>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<x-2<\delta$ 时，$\dfrac{2x}{x^2-4}>G$，不妨限定 $x+2<5$，则 $x-2<1$，则 $\dfrac{2x}{x^2-4}>\dfrac{4}{(x+2)(x-2)}>\dfrac{4}{5(x-2)}>G$ 解得 $x-2<\dfrac{4}{5G}$，所以取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{4}{5G}\right\}$，当 $0<x-2<\delta$ 时，$\dfrac{2x}{x^2-4}>G$。

例题 2.1.3 2.1-A-10

证明：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$，但反之不然。

解 2.1.3. 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|=<\varepsilon$，所以由绝对值不等式得到 $|f(x)-A|>||f(x)-|-A||=||f(x)|-|A||>0$，故 $||f(x)|-|A||<\varepsilon$，所以由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$. 然后反过来，考虑定义在实数域上的函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ -1, x\notin Q\end{cases}$，其极限

$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=1$，但是 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在。

例题 2.1.4 2.1-B-2(1)：利用极限的精确证明

$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

解 2.1.4. 要证 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$，只需证对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|=2|\cos\frac{x+a}{2}||\sin\frac{x-a}{2}|<\varepsilon$。又因为 $2|\cos\frac{x+a}{2}||\sin\frac{x-a}{2}|<2|\sin\frac{x-a}{2}|<2|\frac{x-a}{2}|=|x-a|$，所以取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|<\varepsilon.$

例题 2.1.5 2.1-B-4

利用极限的精确定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=+\infty$ 是错误的.

解 2.1.5. 要证明存在 $G>0,\forall\delta>0$ 使得当 $x>\delta$ 时，$\frac{x}{x+1}\le G$，则取 $G=1$，便可以满足 $\forall x>0,\frac{x}{x+1}\le 1$，故存在 $G>0,\forall\delta>0$ 使得当 $x>\delta$ 时，$\frac{x}{x+1}\le G$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=+\infty$ 是错误的.（本题本质是找到一个够大的上界）

2.2 习题 2.3

例题 2.2.1 2.3-A-2

(1) $\lim\limits_{x\to2}(3x^2-5x+2)$; (2) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)(1-2x)^2$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-40x^4)$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^5+21x^3)$; (5) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}$; (6) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^4+2}$; (8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3+2x}{x^{10}+x+7}$.

解 2.2.1.（1）$\lim\limits_{x\to2}(3x^2-5x+2)=\lim\limits_{x\to2}(3(2)^2-5(2)+2)=4.$

（2）$\lim\limits_{x\to-1}(x^2+1)(1-2x)^2=\lim\limits_{x\to-1}(1+1)(1-2(-1))^2=18.$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-40x^4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4(x-40)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\lim\limits_{x\to+\infty}(x-40)=+\infty.$

（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^5+21x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5(6+\frac{21}{x^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\lim\limits_{x\to-\infty}(6+\frac{21}{x^2})=-\infty.$

（5）$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty.$

（6）$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^4+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{x+\frac{2}{x^3}}=0.$

（8）$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3+2x}{x^{10}+x+7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}}}{1+\frac{1}{x^9}+\frac{7}{x^{10}}}=0;$

例题 2.2.2 2.3-A-4

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\qquad (2)\ \lim_{x\to-\infty}(\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x})$$

$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x})\qquad (4)\ \lim_{x\to-\infty}(\frac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x})$$

解 2.2.2. （1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

（2） $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{\sqrt{3x^2+x}}{x})=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}=-\sqrt{3}.$

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{9x}+\dfrac{1}{9x^2}}=\dfrac{2}{3}.$

（4） $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x})=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9}{36}+\dfrac{1}{36x}+\dfrac{3}{6x^2}}=-\dfrac{1}{2}.$

例题 2.2.3 2.3-A-8

$$(1)y=\frac{x^2-2x-2}{x-1}\qquad (2)y=\frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

解 2.2.3. （1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-2x+x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=-1$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y=x-1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0^-}(x-\frac{1}{x})=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0^+}(x-\frac{1}{x})=-\infty$$

故该函数在 $x=1$ 处的渐近线为 $x=1$.

（2）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(1-\frac{1}{x})^2}=2$$

故该函数在无穷远处的渐近线为 $y=2$.

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2}{(1-\frac{1}{x})^2}=+\infty$$

故该函数在 $x=2$ 处的渐近线为 $x=2$.

例题 2.2.4 习题 2.3-B 组-1

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$，讨论下列极限的状态：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

解 2.2.4. （1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty+\infty = +\infty$.

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ 不确定，比如当 $f(x)=x$ 时，假如 $g(x)=2x$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = -\infty$，但当 $g(x)=\frac{x}{2}$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2} = +\infty$，当 $f(x)=g(x)$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = 0$.

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\cdot+\infty = +\infty$.

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不确定，比如当 $f(x)=x$ 时，假如 $g(x)=2x$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{2}$，但当 $g(x)=\sqrt{x}$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = \infty$，又当 $g(x)=x^2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

例题 2.2.5 习题 2.3-B 组-4

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$，求 a 和 b.

解 2.2.5.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}\left((1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}\right)}{1} \\
&= \lim_{x\to\infty}(1-a)x-(a+b) = 0
\end{aligned}
$$

必须有 $a=1, b=-1$.

例题 2.2.6 习题 2.3-B 组-5

设a, b, c 是常数, $a\neq 0$, 证明$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$的图形有斜渐近线, 并求出渐近线方程.

解 2.2.6.

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = a\neq 0
$$

由此可知，$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$ 的图形有斜渐近线.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x+1}-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-a)x+c}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{b-a+\frac{c}{x}}{1+\frac{1}{x}}=b-a$$

则渐近线方程为 $y=ax+b-a$.

2.3 习题 2.2

例题 2.3.1 习题 2.2-A-2

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{5n+1}=\dfrac{3}{5}$

解 2.3.1.（1）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时有 $|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$.

$$|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}|=\left|\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right|<\left|\frac{1}{2\sqrt{n-1}}\right|<\varepsilon$$

因此取 $N=\left[2+\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$，则对于任意 $\varepsilon>0$，当 $n\geq N$ 时，有 $\left|\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right|<\varepsilon$.

（2）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\varepsilon$，限定 $n>9$，则 $2^n>n^3$，则有 $\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\left|\dfrac{n^2}{n^3}\right|=2\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\max\left\{9,\left[1+\dfrac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n^2}{2^n}\right|<\varepsilon$.

（3）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{n+1}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

（4）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{3n}{5n+1}-\dfrac{3}{5}\right|=\dfrac{3}{5}\left|\dfrac{1}{5n+1}\right|<\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$，则取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{3n}{5n+1}-\dfrac{3}{5}\right|<\varepsilon$.

例题 2.3.2 习题 2.2-A-4

证明：由 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$ 能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，但反过来不可以.

解 2.3.2. 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$||x_n|-|a||<|x_n-a|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，但是考虑数列 $a_n=(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$，但是去掉绝对值后，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在，所以不能反过来.

例题 2.3.3 习题 2.2-B-1

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{n^2+1}=\infty$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}=\dfrac{1}{2}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.(a>1)$

解 2.3.3. （1）要证明任意 $G>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时有 $\left|\dfrac{n^3-1}{n^2+1}\right|=\dfrac{n^3-1}{n^2+1}>G$，由

$$\frac{n^3-1}{n^2+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^2+1}>\frac{(n-1)(n^2+1)}{n^2+1}=n-1$$

所以取 $N=G+2$，则任意 $G>0$，$\left|\dfrac{n^3-1}{n^2+1}\right|>G.$

（2）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\arctan n-\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}-\arctan n<\varepsilon$，则取 $N=[\tan\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon]+1$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\arctan n-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.$

（3）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2\sqrt{n}+1)}$，取 $N=\left[1+\left(\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]$，任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon.$

（4）要证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq N$ 时，$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|=\dfrac{a^n}{n!}<\varepsilon$，由

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\frac{a}{2}\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{[a]}\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}<\frac{a^{[a]}}{[a]!}\frac{a}{n}$$

所以取 $N=\left[\dfrac{a^{[a+1]}}{[a]!\varepsilon}+1\right]$，则任意 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|<\varepsilon.$

例题 2.3.4 2.3-A-3

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$

解 2.3.4. （1）代数变形：

$$\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{(-2)^{-1}+\dfrac{3^n}{(-2)^{n+1}}}{1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}=\frac{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}{1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{5}{6\left(1+(-\dfrac{3}{2})^{n+1}\right)}$$

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6\left(1+(-\frac{3}{2})^{n+1}\right)}\right)=\frac{1}{3}.$

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

（3）

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

（4）用裂项 $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{k+1-1}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{2}$$

2.4 习题 2.4

例题 2.4.1 2.4-A-5

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}$　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin 3x}$　(5) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta}$　(6) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\tan^2 h}{h}$

(7) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$　(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$　(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$　(12) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$　(14) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$

解 2.4.1. 这里只使用基本极限公式：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}$.　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=2.$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{5}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{3}{5}$.　（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{3}\dfrac{3x}{\sin 3x}=\dfrac{2}{3}$.

（5）$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\theta=0.$　（6）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\tan^2 h}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\tan^2 h}{h^2}h=0.$

（7）$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$.　（8）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=1.$

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec x}{(1+\cos x)}=\dfrac{1}{2}$.

（10）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}2\cos 4x=2.$

（11）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\dfrac{\sin x}{x}=4.$

（12）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$

（13）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=-\sin a.$

（14）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin a}{\cos a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos a\cos(x-a)}=\sec^2 a$，其中 $a\neq$

$(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，$k \in \mathbb{Z}_+$.

例题 2.4.2 2.4-A-6

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/2}$ (2) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x}$ (3) $\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$ $(x\neq 0)$

(4) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}$ (5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4x}$

解 2.4.2. （1）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/3}\right)^{\frac{3}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}.$

（2）$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{-1}{x}}\right)^{\frac{-1}{x}}\right)^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$

（3）$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}(x\neq 0)=\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right)=\mathrm{e}$

vspace0.5em （4）$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^{a}=\lim_{\frac{1}{ax}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^{a}=\mathrm{e}^{a}$

（5）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-4}=\mathrm{e}^{-4}.$

例题 2.4.3 2.4-B-4

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

解 2.4.3. （1）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{x}-5}{\frac{1}{x^3}\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x^3}{\sin x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x^2}\frac{3x^2-5x}{3x^2}=3.$

（2）$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x=\lim_{x\to 0}-\sin x\tan(3x+\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{x}{\tan x}=\frac{1}{3}.$

（3）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}=2\frac{1}{2}=1.$

（4）$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x+1}{1-\tan x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{x(1-\tan x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{x}=2.$

（5）$\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{-1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{1}{x})x\right)^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$

2.5 习题 2.5

例题 2.5.1 2.5-A-2

证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$ 收敛，并求其极限值.

解 2.5.1. 先证数列 $\{a_n\}$ 有界，数列满足 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$，由于 $a_1 = \sqrt{2} < 2$，假设 $a_k < 2, (k \geq 2)$，则有 $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{4} = 2$，所以归纳得到 $a_k < 2$，因此数列 $\{a_n\}$ 有界.
再证明数列 $\{a_n\}$ 单调递增，作商得到 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\dfrac{2}{a_n}} > 1$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调递增.
由单调有界收敛定理得到 $\{a_n\}$ 收敛，极限存在，所以设极限为 A，对 $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ 两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2\lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \Rightarrow A = 2$$

所以数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.
进一步地，设 $b_n = a_n - 2$，所以

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = \sqrt{2a_n} - 2 = \sqrt{2(2+b_n)} - 2 = \sqrt{4+2b_n} - 2$$

泰勒展开得到

$$\sqrt{4+2b_n} = 2\sqrt{1+\frac{b_n}{2}} = 2\left(1+\frac{b_n}{4}-\frac{b_n^2}{32}+O(b_n^3)\right) \Rightarrow b_{n+1} = \frac{b_n}{2} - \frac{b_n^2}{16} + O(b_n^3)$$

对于大的 n , 有 $b_n \to 0$, 主导项为 $\frac{b_n}{2}$, 因此 $b_{n+1} \sim \frac{1}{2}b_n$，这意味着 b_n 以指数速率衰减，即 $b_n \sim C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 其中 $C = b_1 = \sqrt{2} - 2$。因此 $b_n^2 \sim C^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, 因此误差项为 $O\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$$a_n = 2 + (\sqrt{2}-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad (n\to\infty)$$

例题 2.5.2 2.5-A-3

设 $a > 0, 0 < x_1 < \dfrac{1}{a}, x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), n = 1, 2, 3, \cdots$ 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

解 2.5.2. 先证明数列 $\{x_n\}$ 有界，已知 $0 < x_1 < \dfrac{1}{a}$，则假设 $x_k \in (0, \dfrac{1}{a}), k \in \mathrm{N}_+$，则 $ax_k \in (0,1)$，而 $x_k(2-ax_k)$ 是 x_k 的二次函数，在 $(0, \dfrac{1}{a})$ 上单增，在 $(\dfrac{1}{a}, \dfrac{2}{a})$ 上单减，所以 $x_{k+1} = x_k(2-ax_k) > 0$，且 $x_{k+1} < \dfrac{1}{a}(2 - a\dfrac{1}{a}) = \dfrac{1}{a}$，所以 $x_n \in (0, \dfrac{1}{a})$, 数列 $\{x_n\}$ 有界. 再证明数列 $\{x_n\}$ 单调递增，作商得到 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - ax_n > 1$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，极限存在，所以设极限为 A，对 $x_{n+1} = x_n(2-ax_n)$ 两边取极限得到

$$\lim_{x\to\infty} x_{n+1} = \lim_{x\to\infty} x_n(2 - a\lim_{x\to\infty} x_n) \Leftrightarrow A = A(2-aA) \Leftrightarrow A = \frac{1}{a}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{a}$，事实上这个数列的通项公式是 $x_n = \dfrac{1}{a}\left[1-(1-ax_1)^{2^{n-1}}\right]$

例题 2.5.3 2.5-A-4

设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}, n = 1,2,3,\cdots$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}.$

解 2.5.3. （1）当 $x_1 = \sqrt{3}$ 时，假设 $x_k = \sqrt{3}, k \in \mathrm{N}_+$，则

$$x_{k+1} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以 $\{x_n = \sqrt{3}\}$，$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}.$
（2）当 $0 < x_1 < \sqrt{3}$ 时，假设 $0 < x_k < \sqrt{3}, k \in \mathrm{N}_+$，则由函数 $f(x) = \dfrac{3x+3}{3+x} = 3 - \dfrac{6}{3+x}$ 在 $(0, \sqrt{3})$ 上单增，得到：

$$\frac{3+0}{3+0} = 1 < x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} < \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以归纳得到 $x_k \in (0, \sqrt{3})$，且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n-3x_n-x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} > 0$$

则 $\{x_n\}$ 单调递增，由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，设极限为 A，代入递推式得到 $A = \dfrac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}.$
（3）当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时，假设 $x_k > \sqrt{3}, k \in \mathrm{N}_+$，则由函数 $f(x) = \dfrac{3x+3}{3+x} = 3 - \dfrac{6}{3+x}$ 在 $(\sqrt{3}, \infty)$ 上单增，得到：

$$x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} > \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 有下界，又有：

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n-3x_n-x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 收敛，设极限为 A，代入递推式得到 $A = \dfrac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$，那么 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}.$

例题 2.5.4 2.5-B-1

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{x_n+6}, n = 1,2,3,\cdots$，证明 $\{x_n\}$ 极限存在，并求极限.

解 2.5.4. 先证明数列 $\{x_n\}$ 有界，由 $x_1 = 10 > 3$，假设 $x_k > 3$，那么 $x_{k+1} = \sqrt{x_k+6} > \sqrt{9} = 3$，所以 $\{x_n\}$ 有界；再证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减，作商得到

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n+6} - x_n = \frac{x_n+6-x_n^2}{\sqrt{x_n+6}+x_n} = \frac{(3-x_n)(x_n+2)}{\sqrt{x_n+6}+x_n} > 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界收敛定理得到 $\{x_n\}$ 极限存在，设极限为 A，代入递推式得到 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 3$.

例题 2.5.5 2.5-B-2

利用柯西准则，证明下面各数列的收敛性：
(1) $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$，其中 $|a_i| \leqslant M$（$i = 0, 1, 2, \cdots$），且 $|q| < 1$；
(2) $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$.

解 2.5.5.（1）设 $m > n$，则

$$|x_m - x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_m q^m| \leqslant M|q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^m| < M\frac{|q^{n+1}|}{1-|q|}$$

任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N = [\log_q \frac{\varepsilon}{M} + 1]$ 使得任意 $x > N$，$M\frac{|q^{n+1}|}{1-|q|} < M|q^{n+1}| < \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛.（2）设 $m > n$，则

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(m)}{2^m}\right| < \left|\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right| < \frac{1}{2^n}$$

所以任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N = [2 - \log_2 \varepsilon]$ 使得任意 $n > N$，$|x_m - x_n| < \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例题 2.5.6 2.5-B-3

对于数列 $\{x_n\}$，若子列 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k+1}\}$ 都收敛于 a, 试用“$\varepsilon - N$”的语言证明数列 $\{x_n\}$ 也收敛于 a.

解 2.5.6. 任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N, |x_{2n-1} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N, |x_{2n} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a；那么对 $2n-1$ 代入 $n = N_1 + 1$，对 $2n$ 代入 $n = N_2 + 1$，可知取 $N = \max\{2N_1 + 4, 2N_2 + 4\}$，则 $\forall n > N, |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

例题 2.5.7 2.5-B-4

证明：若 $f(x)$ 为定义于 $[a, +\infty)$ 上的单调增加函数，则极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.

解 2.5.7. 必要性：设极限为 A，则存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时，有 $|f(x) - A| < 1$，故

$$|f(x)| - |A| < ||f(x)| - |A|| < |f(x_n) - A| < 1 \Rightarrow |f(x_n)| < 1 + |A|$$

所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.
充分性：若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界，则由确界定理得到 $f(x)$ 有上确界 $\sup_{x\in[a,+\infty)} f(x)$，由确界定义知道，$\forall \varepsilon_n = \frac{1}{n}, (n = 1, 2, \cdots), \exists x_n \in [a, +\infty)$，使得 $|f(x_n) - A| < \frac{1}{n}$，于是得到数列 $\{x_n\}$ 满足

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N$ 使得 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$，由于 $f(x)$ 为定义于 $[a,+\infty)$ 上的单调增加函数，所以任意 $x>x_{N+1}$，均有 $f(x_{N+1})\le f(x)\le A$，于是 $|f(x)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

例题 2.5.8 2.6-B-1

证明：当 $x\to 0$ 时，有 $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3,\arctan x\sim\dfrac{1}{4}\sin 4x$.

解 2.5.8. （1）$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim x\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^3}{2},x\to 0$.

（2）$\arctan x\sim x=\dfrac{4x}{4}\sim\dfrac{\sin 4x}{4}$，由 $\tan x\sim x,x\to 0$ 换元 $x=\arctan y$ 可得 $y\sim\arctan x,x\to 0$.

例题 2.5.9 2.6-B-2

利用等价无穷小求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 5x}{2x},\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n},\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x},\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

解 2.5.9. （1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 5x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{2}{5}$.

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^m}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}x^{m-n}$.

当 $m>n$ 时，$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}=0$；

当 $m=n$ 时，$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}=1$；

当 $m<n$ 时，$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}=\infty$.

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-1}{\frac{1}{2}x^2}=1$.

例题 2.5.10 2.6-B-3

证明：（1）$2x-x^2=O(x)\ (x\to0)$；（2）$\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to0)$；
（3）$2x^3+2x^2=O(x^3)\ (x\to\infty)$；（4）$(1+x)^n=1+nx+o(x)\ (x\to0)$.

解 2.5.10. （1）验证 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}(2-2x)=2$ 为非零常数，故 $2x-x^2=O(x)\ (x\to0)$.

（2）由定义，验证 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-1}{1+\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}=0$，故 $\sqrt{1+x}-1=o(1)\ (x\to0)$.

（3）由定义，验证 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}(2+\dfrac{2}{x})=2$ 为非零常数，故 $2x^3+2x^2=O(x^3)\ (x\to\infty)$.

（4）验证 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^n-1-nx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}x^2+...+x^n}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{n(n-1)}{2}x+..+x^{n-1}\right)=0$，故

$(1+x)^n = 1 + nx + o(x)\ (x \to 0)$.

例题 2.5.11 2.6-B-4

设在某一极限过程中，α 和 β 都是无穷小. 证明：如果 $\alpha \sim \beta$, 则 $\beta - \alpha = o(\alpha)$，反之，如果 $\beta - \alpha = o(a)$, 则 $\alpha \sim \beta$.

解 2.5.11. 如果 $\alpha \sim \beta$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta}{\alpha} - 1 = 1 - 1 = 0$，故 $\beta - \alpha = o(\alpha)$.

如果 $\beta - \alpha = o(a)$，则 $0 = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta}{\alpha} - 1$，所以 $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，故 $\alpha \sim \beta$.

例题 2.5.12 2.6-B-5

证明：当 $x \to 0$ 时，有：

（1）$o(x^n) + o(x^m) = o(x^n), (0 < n < m)$；（2）$o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}), (n, m > 0)$.

解 2.5.12. （1）由定义得到

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)o(1)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} o(1) = 0 \Rightarrow o(g(x)) = g(x)o(1)$$

考虑

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n) + o(x^m)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n o(1) + x^m o(1)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \left(o(1) + x^{m-n} o(1)\right) = \lim_{x\to 0} o(1) = 0$$

故 $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n), (0 < n < m)$；（2）考虑

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n) \cdot o(x^m)}{x^n \cdot x^m} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n o(1) x^m o(1)}{x^n \cdot x^m} = \lim_{x\to 0} \left(o(1) \cdot o(1)\right) = 0$$

由定义得到 $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}), (n, m > 0)$.

例题 2.5.13 2.7-B-2

判断 $x = 0$ 处的间断点类型（1）$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+nx^2}$.

解 2.5.13. （1）$\lim\limits_{x\to 0^-} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} = \dfrac{1}{1} = 1$，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 两侧的极限均存在，但不等于 $f(0)$，且 $f(0^-) \neq f(0^+)$，所以是跳跃间断点.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+nx^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{\frac{1}{n}+x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{0+x^2} = \dfrac{1}{x}$，所以 $x = 0$ 为无穷间断点.

例题 2.5.14 2.7-B-3

设函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，试找出其间断点.

解 2.5.14. 观察发现分母在 $x=1$ 处的变化速度很快，计算 $f(x)$ 的分段函数得到：

$$f(x)=\begin{cases}0, x=-1\\ 0, |x|>1\\ 1+x, |x|<1\\ 1, x=1\end{cases}$$

所以 $f(1^-), f(1), f(1^+)$ 都不等，所以 $x=1$ 为间断点.

例题 2.5.15 2.7-B-4

试确定 a, b 的值, 使 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$, 有可去间断点 $x=1$.

解 2.5.15. （1）由题意得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左极限和右极限至少一个为无穷大，假设 $a\neq 0$，由于 $f(x)$ 为初等函数，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-1)}=\dfrac{1-b}{a}$ 为常数，矛盾，所以 $a=0$；当 $b=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-x}=1$，所以需要同时满足 $a=0, b\neq 1$，下证充分性，当 $a=0, b\neq 1$ 时

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}}{x}+\frac{\mathrm{e}-b}{x-1}=\infty$$

（2）要使得 $f(x)$ 有可去间断点 $x=1$，则 $f(1^-)=f(1^+)$，假设 $b\neq \mathrm{e}$，计算发现

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}-b}{(x-1)(1-a)}=\infty$$

矛盾，所以 $b=\mathrm{e}$ 为必要条件，当 $b=\mathrm{e}$ 时，计算极限并使用等价无穷小替换：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}}{1-a}$$

所以 $a\neq 1$，下面证明充分性。当 $a\neq 1, b=\mathrm{e}$ 时，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{(x-a)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}}{1-a}=\mathrm{e}$，所以此时 $f(1^-)=f(1^+)=\mathrm{e}$，因此 $x=1$ 为可去间断点，等价于 $a\neq 1, b=\mathrm{e}$.
所以答案为 $a=0, b\neq 1; a\neq 1, b=\mathrm{e}$.

例题 2.5.16 2.8-A-3 求极限

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^{3\sec x}$, $\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(\cos^2 x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin x}+(1+x)^x\right]$

解 2.5.16. （1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^{3\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^3=\mathrm{e}^3.$

（2）由于该函数为初等函数，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^1=\frac{\pi}{2}$.

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(\cos^2 x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin x}+(1+x)^x\right]=1+\lim\limits_{x\to0}\ln(\cos^2 x+\sqrt{1-x^2})=1+\ln 2$.

例题 2.5.17 2.8-A-5

证明下列方程在给定区间至少有一个根：$x2^x=1,x\in[0,1];x^3+px-q=0,p>0,x\in R$

解 2.5.17. （1）设初等函数 $f(x)=x2^x-1$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1,f(1)=1$，由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有至少一个根.
（2）设初等函数 $g(x)=x^3+px-q$ 在 R 上连续，

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{p}{x^2}-\frac{q}{x^3}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1+\frac{p}{x^2}-\frac{q}{x^3}\right)=+\infty\end{cases}$$

零点存在性定理知 $g(x)$ 在 R 上有至少一个根.

例题 2.5.18 2.8-A-6

设 $f(x)\in C[0,1]$, 并且 $\forall x\in[0,1],0<f(x)<1$(画-图). 求证：$\exists x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

解 2.5.18. 设连续函数 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(0)=f(0)-0>0,g(1)=f(1)-1<0$，由零点存在性定理知 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有根 x_0，$\exists x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

例题 2.5.19 2.8-B-2

证明: 若$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$与 $\lim_{x\to-\infty}f(x)$都存在, 则$f(x)$必有界.

解 2.5.19. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则任意 $\varepsilon_1>0$，存在 $N_1\in R$ 使得 $\forall x>N_1$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon_1$，即 $A-\varepsilon_1<f(x)<A+\varepsilon_1$，说明 $f(x)$ 在 $(N_1,+\infty)$ 有上界 $A+\varepsilon_1$ 和下界 $A-\varepsilon_1$；设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$，则任意 $\varepsilon_2>0$，存在 $N_2\in R$ 使得 $\forall x<N_2$，有 $|f(x)-B|<\varepsilon_2$，即 $B-\varepsilon_2<f(x)<B+\varepsilon_2$，说明 $f(x)$ 在 $(-\infty,N_2)$ 有上界 $B+\varepsilon_2$ 和下界 $B-\varepsilon_2$；由于 $f(x)$ 在 $[N_2,N_1]$ 上连续，所以在 $[N_2,N_1]$ 上也有上界 C_1，有下界 C_2，则取 $D_1=\max\{C_1,A+\varepsilon_1,B+\varepsilon_2\},D_2=\min\{C_2,A-\varepsilon_1,B-\varepsilon_2\}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有上界 D_1 和下界 D_2；证毕.

例题 2.5.20 2.8-B-3

设 $f(x)\in C(a,b)$，且 $f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 都存在，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

解 2.5.20. 补充定义函数 $g(x)=\begin{cases} f(a^+), x=a \\ f(x), x\in(a,b) \\ f(b^-), x=b \end{cases}$，则 $g(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a^+)=g(a)$，所以 $g(x)$ 在 a 点右连续，同理 $g(b)$ 在 b 点左连续，由此可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

例题 2.5.21 2.8-B-4

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|, \forall x,y\in[a,b]$，$L$ 为常数，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

解 2.5.21. 任意 $\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关的 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$，使得 $\forall x,y\in[a,b], |x-y|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$，有 $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|<L\dfrac{\varepsilon}{L}=\varepsilon$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

例题 2.5.22

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$，试求 $\{a_n\}$ 的渐进.

解 2.5.22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，则有

$$a_{n+1}=\frac{S_n}{T_n}=\frac{S_n}{a_nT_{n-1}}=\frac{S_n}{\frac{S_{n-1}}{T_{n-1}}T_{n-1}}=\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

转化为估计 S_n 的阶，将 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 代入得到：

$$S_1=1, S_2=2, S_{n+1}=S_n+\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

下面估计 S_n 的主阶，先考察它的有界性和单调性，由

$$S_n>0, S_{n+1}-S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}>0\Rightarrow S_{n+1}>S_n$$

可知 S_n 是单调递增的，再次代入递推式有

$$S_{n+1}-S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}>1\Rightarrow S_{n+1}-S_n>1\Rightarrow S_n\geq n$$

所以 S_n 发散到正无穷，无上界，我们再把这个结论代入到递推公式中：

$$S_{n+1}=S_n+\frac{S_n}{S_{n-1}}\Leftrightarrow\frac{S_{n+1}}{S_n}=1+\frac{1}{S_{n-1}}\to 1\ \ (n\to\infty)$$

当 n 趋于无穷时，$S_n\sim n$，构造 $b_n=S_n-n$ 以得到更精确的阶，将 $S_n=n+b_n$ 代入递推公式：

$$S_{n+1}-S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\Leftrightarrow b_{n+1}-b_n=\frac{n+b_n}{n-1+b_{n-1}}-1=\frac{1+\frac{b_n}{n}}{1-\left(\frac{1}{n}-\frac{b_{n-1}}{n}\right)}-1$$

泰勒展开可得：

$$\begin{aligned}
b_{n+1}-b_n&=-1+\left(1+\frac{b_n}{n}\right)\left(1+\left(\frac{1}{n}-\frac{b_{n-1}}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&=-1+\left(1+\frac{b_n}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)-\frac{b_{n-1}}{n}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\frac{1}{n}+\frac{b_n-b_{n-1}}{n}+\frac{b_n(1-b_{n-1})}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
\Rightarrow b_{n+1}-b_n&\sim\frac{1}{n}\Rightarrow b_n\sim\ln n+O(1)\Rightarrow S_n=n+b_n\sim n+\ln n+O(1)
\end{aligned}$$

所以 $\{S_n\}$ 的阶为 $n+\ln n+c+o(1)$，代入 $a_n=\dfrac{S_{n-1}}{S_{n-2}}$ 得到：

$$a_n=\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}=\frac{(n-1)+\ln(n-1)+c+o(1)}{(n-2)+\ln(n-2)+c+o(1)}$$

并利用

$$\ln(n-1)=\ln n-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),\quad \ln(n-2)=\ln n-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

代入：

$$S_{n-1}=n-1+\ln n+c-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=n\left(1+\frac{\ln n+c-1}{n}-\frac{3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$S_{n-2}=n-2+\ln n+c-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=n\left(1+\frac{\ln n+c-2}{n}-\frac{4}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

故技重施：

$$\frac{1}{S_{n-2}}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{\ln n+c-2}{n}+\frac{(\ln n+c-2)^2+4}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

代入得到

$$\begin{aligned}a_n=&\left(1+\frac{\ln n+c-1}{n}-\frac{3}{2n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\ln n+c-2}{n}+\frac{(\ln n+c-2)^2+4}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\=&1-\frac{\ln n+c-2}{n}+\frac{\ln n+c-1}{n}+\frac{(\ln n+c-2)^2+2}{n^2}\\&-\frac{(\ln n+c-1)(\ln n+c-2)}{n^2}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\=&1+\frac{1}{n}+\frac{3-c-\ln n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

例题 2.5.23

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$，找到一个正整数 k，使得 $n\geq k$ 时，$a_n<1+\dfrac{1}{n}$.

解 2.5.23.

例题 2.5.24

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，求 $\{a_n\}$ 的渐进.

解 2.5.24. 解微分方程

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}n}=\frac{1}{a}\Rightarrow a\mathrm{d}a=\mathrm{d}n\Rightarrow a\sim\sqrt{2n}\Rightarrow a_n^2\sim 2n$$

设 $a_n^2=b_n+2n$，代入递推公式得到

$$a_{n+1}=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2\Leftrightarrow 2(n+1)+b_{n+1}=2n+b_n+2+\frac{1}{2n+b_n}$$

化简得到 $b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{2n+b_n}=b_n+\dfrac{\frac{1}{2n}}{1-(-\frac{b_n}{2n})}$，泰勒展开：

$$b_{n+1}-b_n\sim\frac{1}{2n}-\frac{b_n}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\Rightarrow b_n\sim\frac{1}{2}\ln n+c_n$$

再次代入递推公式：

例题 2.5.25

已知 k 为正整数，求积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x$

解 2.5.25.

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}\frac{(x+\pi)\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\\
&=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x+\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x=-I+\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x\\
&=-I+\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x=-I+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x\\
&=-I+2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x=-I+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x\\
&=-I+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}{\sin^{2k}x+\cos^{2k}x}\mathrm{d}x=-I+\frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi^2}{4}.$$

例题 2.5.26

给出 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{12}$，计算 $\displaystyle\int_0^1\int_0^y\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 2.5.26. 根据所给式子，得到 $0\le x\le y$（因为 x 从 0 到 y 积分），再根据外层积分确定 $0\le y\le 1$，所以 $0\le x\le y\le 1$，所以:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^y\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\int_x^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(1-x)\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x-\int_0^1\ln(x+1)\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi^2}{12}-2\ln 2+1
\end{aligned}$$

例题 2.5.27

求积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

解 2.5.27.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x + \cos^6 x} &= \int \frac{\sec^6 x \mathrm{d}x}{1+\tan^6 x} = \int \frac{\sec^6(\arctan t)\mathrm{d}\arctan t}{1+\tan^6(\arctan t)} \\
&= \int \frac{(1+t^2)^3 \mathrm{d}t}{(t^6+1)(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)^2 \mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^4-t^2+1)} \\
&= \int \frac{1+t^2}{t^4-t^2+1}\mathrm{d}t = \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}-1}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+1} = \arctan(t-\frac{1}{t}) + C \\
&= \arctan(\tan x - \frac{1}{\tan x}) + C = \arctan(\frac{\tan^2 x - 1}{\tan x}) \\
&= \arctan(-2\cot 2x) + C = C - \arctan(2\cot 2x).
\end{aligned}$$

例题 2.5.28

求积分 $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$.

解 2.5.28.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)^2} \quad (\text{令} t = \tan x) \\
&= \int \left(\frac{1/4}{1+t} + \frac{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}}{1+t^2} + \frac{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}{(1+t^2)^2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int \frac{1-t}{1+t^2}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\ln|1+t| + \frac{1}{4}\arctan t - \frac{1}{8}\ln(1+t^2) + \frac{1}{4}\cdot\frac{t+1}{1+t^2} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln|1+\tan x| - \frac{1}{4}\ln|\sec x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(\sin x\cos x + \cos^2 x) + C \\
&= \frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 2x + C
\end{aligned}$$

例题 2.5.29

求积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x + 2\sin x}$.

解 2.5.29.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x + 2\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{4\sin t\cos^3 t} = \int \frac{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2\mathrm{d}t}{4\sin t\cos^3 t} = \frac{1}{4}\int \frac{(\tan t^2+1)^2}{\tan t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{(\tan(\arctan\theta)^2+1)^2}{\tan\arctan\theta}\mathrm{d}\arctan\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\theta^2+1}{\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\theta+\frac{1}{\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\theta^2 + \frac{1}{4}\ln|\theta| + C \\
&= \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln|\tan\frac{x}{2}| + C
\end{aligned}
$$

例题 2.5.30

求积分 $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

解 2.5.30.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{x\mathrm{e}^{x}}{(e^{x}+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{\ln t}\ln t}{(\mathrm{e}^{\ln t}+1)^2}\mathrm{d}\ln t = \int \frac{\ln t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int \ln t\mathrm{d}\left(-\frac{1}{1+t}\right) = -\frac{\ln t}{t+1} + \int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}\ln t \\
&= -\frac{\ln t}{t+1} + \int \frac{1}{t(1+t)}\mathrm{d}t = -\frac{\ln t}{t+1} + \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\ln t}{t+1} + \ln t - \ln(t+1) + C = -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C
\end{aligned}
$$

第三章 一元函数微分学

3.1 习题 3.1

例题 3.1.1 3.1-A-3

下列各式可否成为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数的定义？请说明理由.

(1) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内定义,$x_0\in(a,b)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在, 则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数.

(2) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内定义,$x_0\in(a,b)$，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数.

(3) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内定义,$x_0\in(a,b)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在, 则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数.

解 3.1.1. （1）可以，因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0)$$

（2）可以，因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x_0+x-x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

（3）不可以，当 $f'(x_0)$ 存在时，该极限等于 $f'(x_0)$，这是因为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f'(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f'(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\&=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0)\end{aligned}$$

但是当 $f'(x_0)$ 不存在，而左右导数存在时，该极限推出的是左导数和右导数的平均值，并非 $f'(x_0)$，比如当 $f(x)=|x|,x=0$ 导数不存在，但是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{|\Delta x|-|-\Delta x|}{2\Delta x}=0$$

矛盾，所以不可以用作导数的定义.

例题 3.1.2 3.1-A-9

利用定义求函数在 $x=0$ 处的导数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$.

解 3.1.2. 利用定义，有

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

例题 3.1.3 3.1-B-3

求证：偶函数的导数是奇函数，奇函数的导数是偶函数；

解 3.1.3. 设 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)-f(-x)=0$，两边求导得到 $f'(x)+f'(-x)=0$，所以偶函数的导数是奇函数；设 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=0$，两边求导得到 $f'(x)-f'(-x)=0$，所以奇函数的导数是偶函数

我们也可以考虑定义：设 $f(x)$ 是偶函数，所以

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-(-h)}=-f'(-x)$$

所以偶函数的导数是奇函数；设 $f(x)$ 是奇函数，所以

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x)-f(-x-h)}{-(-h)}=f'(-x)$$

所以奇函数的导数是偶函数。

例题 3.1.4 3.1-B-4

求证：周期函数的导数仍然是周期函数

解 3.1.4. 设 $f(x)$ 是周期函数，T 是周期，$f(x+T)=f(x)$，则两边求导得到 $f'(x+T)=f'(x)$，所以 $f'(x)$ 也是周期函数，也可以从定义考虑：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}=f'(x+T)$$

所以 $f'(x)$ 是周期函数.

3.2 习题 3.2

例题 3.2.1 3.2-A-2

求导（1）$y=1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$；（2）$y=\dfrac{1}{x^3+2x+1}$；（3）$y=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$.

解 3.2.1. （1）$y'=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$；（2）$y'=\frac{-3x^2-2}{(x^3+2x+1)^2}$；（3）$y'=-\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^2}$

例题 3.2.2 3.2-A-4

求导（1）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；（2）$y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$；（3）$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

解 3.2.2. （1）$y'=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

（2）$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2}=\frac{a^2}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}$；

（3）$y'=\frac{1+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

例题 3.2.3 3.2-B-1

设 $y=f(x)$ 为严格递增的可导函数，$x=\varphi(y)$ 是它的反函数. 证明：

(1) 当 $h\neq 0$ 时,$f(x+h)-f(x)=k\neq 0$，若记 $f(x+h)=y+k$, 则 $\varphi(y+k)=x+h$.

(2) 当 $k\to 0$ 时，$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k}=\frac{h}{k}=\frac{h}{y+k-y}=\frac{h}{f(x+h)-f(x)}$ 趋于 $\frac{1}{f'(x)}$.

解 3.2.3. （1）由 $x=\varphi(f(x))=f(\varphi(x))$，以及 $y=f(x)$ 为严格递增的可导函数，所以 $\varphi'(x)=\frac{1}{f'(\varphi(x))}>0$，所以 $x=\varphi(y)$ 为严格递增的可导函数，所以

$$f(x+h)=y+k\Rightarrow\varphi(f(x+h))=x+h=\varphi(y+k)$$

（2）$\lim\limits_{k\to 0}\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}=\frac{1}{f'(x)}$，这里 $h\to 0\Leftrightarrow k\to 0$.

例题 3.2.4 3.2-B-2

设$f(x)=x^3+2x^2+3x+1$,用φ表示f 的反函数.求证：$f(1)=7,\varphi(7)=1$.并计算$\varphi'(7)$.

解 3.2.4. 代入得到 $f(1)=1+2+3+1=7$，所以 $\varphi(7)=1$，由 $f(x)=x^3+2x^2+3x+1$ 可得 $f'(x)=3x^2+4x+3$，所以 $\varphi'(7)=\frac{1}{f'(\varphi(7))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{10}$.

例题 3.2.5 3.2-B-3

设$y=(\arcsin x)^2$, 证明$(1-x^2)y''-xy'=2$.

解 3.2.5. 两边求导数得到 $y' = 2\arcsin x \cdot \dfrac{1}{\cos\arcsin x} = 2\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，所以 $\sqrt{1-x^2}y' = 2\arcsin x$，再次两边求导得到 $\sqrt{1-x^2}y'' + \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$，等价变形就有 $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

例题 3.2.6 3.2-B-4

求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$：（1）$y = \frac{1}{1-x^2}$；（2）$y = \sin^2 x$.

解 3.2.6.（1）裂项有 $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right)$，所以 $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} + \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}\right]$，求 n 阶导数有 $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right]$

（2）$y = \sin^x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x), y^{(n)} = \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right]^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$，诱导公式得到 $y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x + \dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)$

3.3 习题 3.3

例题 3.3.1 3.3-A-2

方程 $\mathrm{e}^y+xy+y=2$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $y'(x)'$.

解 3.3.1. 两边求导得到 $y'\mathrm{e}^y+y+xy'+y'=0$ 解得 $y'=-\dfrac{y}{\mathrm{e}^y+x+1}$

例题 3.3.2 3.3-A-3

（1）$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y+xy=0$ （2）$x^2+y^2-\arcsin y=0$ （3）$x^y=y^x$

（4）$\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ （5）$x^2-2xy+y^2=2x$ （6）$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

（7）$xy^2+\mathrm{e}^y=\cos(x+y^2)$ （8）$\ln y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

解 3.3.2. （1）两边求导得 $\mathrm{e}^x-y'\mathrm{e}^y+y+xy'=0$ 解得 $y'=\dfrac{\mathrm{e}^x+y}{\mathrm{e}^y-x}$

（2）两边求导得 $2x+2yy'-\dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}}=0$ 解得 $y'=\dfrac{2x\sqrt{1-y^2}}{1-2y\sqrt{1-y^2}}$

（3）变换得到 $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$，两边求导得到 $y'=\dfrac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$

（4）两边求导得 $\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\dfrac{y'x-y}{x^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$ 解得 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

（5）两边求导得 $2x-2y-2xy'+2yy'=2$ 解得 $y'=\dfrac{x-y-1}{x-y}$

（6）两边求导得 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}=0$，解得 $y'=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

（7）两边求导得 $y^2+2xyy'+\mathrm{e}^yy'=-(1+2yy')\sin(x+y^2)$，解得 $y'=-\dfrac{y^2+\sin(x+y^2)}{\mathrm{e}^y+2xy+2y\sin(x+y^2)}$.

（8）两边求导得 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$，解得 $y'=-\dfrac{y}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

例题 3.3.3 3.3-A-4 求下列由参数方程表示的函数的导数:

1) $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; (2) $x=\sin^2 t, y=\cos^2 t$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(3) $x=1+t^3, y=e^{2t}$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}$; (4) $x=1+t^2, y=\cos t$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(5) $x=e^t\sin t, y=e^{-t}\cos t$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 3.3.3. 使用链式法则，分别求导得：

$$（1）\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{t}}{2\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}\frac{\frac{2}{3}(1-\sqrt{t})^{\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\frac{\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[3]{t^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$$

（2）$x+y=1 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1.$　（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{3t^2}$，代入 $x=2,t=1$ 得到 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^2.$

（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\sin t}{2t}.$　（5）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}(-\sin t-\cos t)}{\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)}=-\mathrm{e}^{2t}.$

例题 3.3.4 3.3-A-5: 用对数求导法求导数

（1）$y=x^{\sin x},(x>0)$；（2）$y=(\sqrt{x})^{\ln x},(x>0)$；（3）$y=a^{\sin x},(a>0)$；
（4）$y=(1+x)^{\frac{1}{x}},(x>0)$；（5）$y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$；（6）$y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

解 3.3.4. （1）$\ln y=(\sin x)\ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=\dfrac{\sin x}{x}+(\cos x)\ln x \Rightarrow y'=x^{\sin x}\left((\cos x)\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

（2）$\ln y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}2\ln x\dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y\ln x}{x}$

（3）$\ln y=\sin x\ln a \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x\ln a \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a^{\sin x}\cos x\ln a$

（4）$\ln y=\dfrac{\ln(x+1)}{x} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ 解得：

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$$

（5）定义域为 $(-4,-2)\cup(-2,+\infty)$，取绝对值，然后取对数

$$\ln|y|=\ln\left(\frac{(x+5)^2|x-4|^{\frac{1}{3}}}{|x+2|^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\right)=2\ln|x+5|+\frac{1}{3}\ln|x-4|-5\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln(x+4)$$

两边对 x 微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|y|=\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\cdot\frac{1}{x+5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-4}-5\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}$$

解得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right)$$

（6）定义域为 $(-1,1]$，$|y|=|x|\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \Rightarrow \ln|y|=\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln|1-x|-\dfrac{1}{2}\ln|1+x|$，两边对 x 微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|y|=\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}\right)$$

例题 3.3.5 3.3-A-6

下列参数方程给出函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$
(1)$x=a\cos t,y=a\sin t$;　(2)$x=2t-t^2,y=3t-t^3$;
(3)$x=\ln(1+t^2),y=\arctan t$;　(4)$x=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),y=t^2$.

解 3.3.5. （1）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cot t)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\csc^2 t}{-a\sin t}=-\dfrac{1}{a\sin^3 t}$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{3}{2}(1+t)\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3}{4(1-t)}$

（3）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{1+t^2}{2t}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{(1+t^2)}{4t^3}$

（4）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2t\sqrt{t^2+1}\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{4t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}\sqrt{t^2+1}=4t^2+2.$

例题 3.3.6 3.3-A-7 求下列隐函数的二阶导数 y''

（1）$x^3+y^3-3axy=0,(a>0)$；（2）$y^2+2\ln y=x^4$；（3）$xy=\mathrm{e}^{x+y}$；（4）$y=1-x\mathrm{e}^y$

解 3.3.6. （1）两边求导数得

$$3x^2+3y^2y'=3a(y+xy')\Rightarrow(ax-y^2)y'=x^2-ay\Rightarrow(a-2yy')y'+(ax-y^2)y''=2x-ay'$$

解得

$$y''=\frac{1}{y^2-ax}\left[\frac{2a(ay-x^2)}{y^2-ax}-2y\left(\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)^2-2x\right]$$

（2）两边求导数得

$$2yy'+\frac{2y'}{y}=4x^3\Rightarrow(y^2+1)y'=2x^3y\Rightarrow(2yy')y'+(y^2+1)y''=2(3x^2y+x^3y')$$

解得

$$y''=\frac{2x^2y}{(1+y^2)^2}\left[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)\right]$$

（3）两边求导数得 $xy'+y=\mathrm{e}^{x+y}(1+y')\Rightarrow(\mathrm{e}^{x+y}-x)y'=y-\mathrm{e}^{x+y}\Leftrightarrow(xy-x)y'=y-xy$，再次在两边求导

$$(xy'+y-1)y'+(xy-x)y''+y=0\Rightarrow y''=\frac{y}{x-xy}+\frac{(x+y-2)(xy-y)}{(x-xy)^2}+\frac{x(xy-y^2)}{(x-xy)^3}$$

（4）两边求导数得 $y'=-x\mathrm{e}^yy'-\mathrm{e}^y\Rightarrow y'(1+x\mathrm{e}^y)=-\mathrm{e}^y\Rightarrow y'(y-2)=\mathrm{e}^y$，再次求导有

$$y''=\mathrm{e}^{2y}[\frac{1}{(y-2)^2}-\frac{1}{(y-2)^3}]\Leftrightarrow y''=\frac{2\mathrm{e}^{2y}}{(1+x\mathrm{e}^y)^2}-\frac{x\mathrm{e}^{3y}}{(1+x\mathrm{e}^y)^3}$$

例题 3.3.7 3.3-A-9

求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：（1）$r^2=2a^2\cos 2\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处

（2）$r=a\mathrm{e}^{m\theta}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 以及 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$ 为极坐标.

解 3.3.7.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{\frac{\mathrm{d}r(\theta)\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}r(\theta)\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$$

（1）参数方程为 $r^2(\theta)=2a^2\cos 2\theta, r'(\theta)r(\theta)=2a^2(-\sin 2\theta), r(\frac{\pi}{6})=a^2, r(\theta)=a, r'(\theta)=-\sqrt{3}a$，代入

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=0$$

（2）参数方程为 $\begin{cases}x=a\mathrm{e}^{m\theta}\cos\theta\\ y=a\mathrm{e}^{m\theta}\sin\theta\end{cases}$ $, r(\theta)=a\mathrm{e}^{m\theta}, r'(\theta)=am\mathrm{e}^{m\theta}$，代入就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=\frac{\cos\theta+m\sin\theta}{-\sin\theta+m\cos\theta}=\tan\left(\theta+\arctan\frac{1}{m}\right)$$

例题 3.3.8 3.3-B-1

求导：$y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ $\quad y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$ $\quad y=3^x\ln x$

解 3.3.8. （1）$y'=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x$；

（2）$\ln y=x\ln\left(\frac{a}{b}\right)+a\ln\left(\frac{b}{x}\right)+b\ln\left(\frac{x}{a}\right)=x\ln\left(\frac{a}{b}\right)+(b-a)\ln x$，两边求导得

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{b-a}{x}, y'=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{b-a}{x}\right)$$

（3）$y'=3^x\ln 3\ln x+\frac{3^x}{x}$

3.4 习题 3.4

例题 3.4.1 3.4-A-5

利用一阶微分的形式不变性求微分：$(1)y=\arctan\mathrm{e}^x$ $\quad (2)y=\mathrm{e}^{\sin x}$

解 3.4.1. （1）$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；（2）$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}\sin x=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$

例题 3.4.2 3.4-B-1

求下列函数的二阶微分 $\mathrm{d}^2y:(1)y=\sqrt{1+x^2}$ $\quad (2)y=\frac{\ln x}{x}$

解 3.4.2. （1）$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x^2$

（2）$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\right)=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}\mathrm{d}x^2=\frac{2\ln x-3}{x^3}\mathrm{d}x^2$

3.5 习题 3.5

例题 3.5.1 3.5-A-5

拉格朗日中值定理证明的关键是构造辅助函数，试利用下列辅助函数来证明这个定理：

（1）$\Phi(x) = [f(x) - f(a)](b-a) - (x-a)[f(b) - f(a)]$;

（2）$\Phi(x) = f(x)(b-a) - x[f(b) - f(a)]$.

解 3.5.1.（1）过 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的直线方程对应的一次函数为 $g(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$，所以构造

$$\begin{aligned} h(x) = f(x) - g(x) &= f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) \\ &= \frac{(b-a)f(x) - (f(b)-f(a))(x-a) - (b-a)f(a)}{b-a} \\ &= \frac{(b-a)(f(x)-f(a)) - (f(b)-f(a))(x-a)}{b-a} = \frac{\Phi(x)}{b-a} \end{aligned}$$

且 $h(a) = h(b) = 0$，所以根据罗尔定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = g'(\xi)$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

（2）设 $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，容易发现 $\varphi'(x) = h'(x)$，这表明 $\varphi(x)$ 是 $h(x)$ 向上平移得到的，所以尽管此时没有 $h(a) = h(b) = 0$，但是 $h(a) = h(b)$ 却仍然成立，仍可利用罗尔定理得到存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\varphi'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = g'(\xi)$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

例题 3.5.2 3-5-A-6

(1) 证明：如果 $\forall x \in [a.b]$, 有 $f'(x) \geqslant m, m$ 是某常数，则有 $f(b) \geqslant f(a) + m(b-a)$;

(2) 证明：如果 $\forall x \in [a,b]$, 有 $f'(x) \leqslant M, M$ 是某常数，则有 $f(b) \leqslant f(a) + M(b-a)$;

(3) 如果 $\forall x \in [a,b]$, 有 $|f'(x)| \leqslant M$, 试写出一个类似的定理.

解 3.5.2.（1）根据导数存在，得知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，符合拉格朗日定理使用条件，于是存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，又因为 $f'(\xi) \geq m$，代入就有 $f(b) \geqslant f(a) + m(b-a)$

（2）根据导数存在，得知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，符合拉格朗日定理使用条件，于是存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，又因为 $f'(\xi) \leqslant M$，代入就有 $f(b) \leqslant f(a) + M(b-a)$

（3）根据导数存在，得知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，符合拉格朗日定理使用条件，于是存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即 $|f'(\xi)| = \left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$，又因为 $|f'(\xi)| \leqslant M$，代入就有 $|f(b)-f(a)| \leqslant M(b-a)$，即 $|f(b)| \leqslant |f(a)| + M(b-a)$

例题 3.5.3 3-5-A-7

证明: 无论m是什么数, 多项式函数$f(x)=x^3-3x+m$在$[0,1]$内决不会有两个零点.

解 3.5.3. 用反证法，假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 存在两个零点 x_1 和 x_2，则由于罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$，但是 $f'(x)=3x^2-3$ 在 $(0,1)$ 上小于 0，矛盾，所以 $f(x)=x^3-3x+m$ 在 $[0,1]$ 内决不会有两个零点.

例题 3.5.4 3-5-A-8

设 $f(x)\in\mathbb{C}[0,1]$ 且可微；对于每个 $x, f(x)$ 的值都在 (0,1) 内；并且 $\forall x\in(0,1), f'(x)\neq 1$.求证：存在唯一的一个数 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

解 3.5.4. 构造函数 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续可微，且 $g(0)=f(0)-0>0, g(1)=f(1)-1<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上必有零点，假设有两个及以上个零点，则根据罗尔定理得到必然存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$，矛盾，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上只有一个零点，即存在唯一的一个数 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

例题 3.5.5 3-5-A-10

证明：(1) $|\sin b-\sin a|\leqslant|b-a|$;　(2)$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}\quad(a>b>0)$.

解 3.5.5. （1）由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{\sin b-\sin a}{b-a}$
且 $|f'(\xi)|=\left|\dfrac{\sin b-\sin a}{b-a}\right|\leq 1$，变形即可得到 $|\sin b-\sin a|\leq|b-a|$
（2）等价于证明 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{\ln a-\ln b}{b-a}<\dfrac{1}{b}$，根据 Lagrange 中值定理，对于函数 $f(x)=\ln x$，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{\ln a-\ln b}{b-a}$ 且由于 $\ln x$ 的导函数在 (a,b) 上单调递减，所以 $f'(a)<f'(\xi)<f(b)$，即 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{\ln a-\ln b}{b-a}<\dfrac{1}{b}$.

例题 3.5.6 3-5-A-11

证明：若 $f(x)\in C[a,b]$, 在 (a,b) 内可导，则必存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$$

解 3.5.6. 等价于证明 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a^2-b^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$，根据柯西中值定理，对于 $f(x)$ 和 $g(x)=x^2$，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，即 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a^2-b^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$.

例题 3.5.7 3-5-A-12

设 $f(x) \in C[a,b]$. 在 (a,b) 内可导，$0 < a < b$. 求证: 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

解 3.5.7. 等价于证明 $\dfrac{\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$，对于 $f(x)$ 和 $g(x) = \dfrac{1}{x}$，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

例题 3.5.8 3-5-B-2

设函数$f(x)$满足$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^n, n > 1$,通过考虑$f'$证明$f$ 是常数.

解 3.5.8. 变形得到 $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq |x - y|^{n-1}$，由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in (x, y)$ 使得 $|f'(\xi)| = \left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|$，则 $|f'(\xi)| < |x - y|^{n-1}$，由于 x, y 的任意性，$|f'(\xi)| = 0$，所以 f 是常数.

例题 3.5.9 3-5-B-10

设 h>0, $f'(x)$ 在 $(a - h, a + h)$ 内存在. 求证:

(1) $\dfrac{f(a + h) - f(a - h)}{h} = f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h) \quad (0 < \theta < 1)$;

(2) $\dfrac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h} = f'(a + \theta h) - f'(a - \theta h) \quad (0 < \theta < 1)$.

解 3.5.9.（1）由 Lagrange 中值定理得到，若 $f'(x)$ 在 $(x, x + h)$ 内存在，那么存在 $\xi \in (x, x + h)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$，这里可以换元，令 $\xi = x + \theta h$，其中 $\theta \in (0, 1)$，则存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得 $f'(x + \theta h) = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$，使用这个定理就可以得到:

$$\begin{aligned}\frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} &= \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a - h)}{h} \\ &= f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h)\end{aligned}$$

（2）同理，若 $f'(x)$ 在 $(x, x + h)$ 内存在，那么存在 $\xi \in (x, x + h)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$，这里可以换元，令 $\xi = x + \theta h$，其中 $\theta \in (0, 1)$，则存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得 $f'(x + \theta h) = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$，使用这个定理就可以得到:

$$\begin{aligned}\frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h} &= \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \frac{f(a) - f(a - h)}{h} \\ &= f'(a + \theta h) - f'(a - \theta h)\end{aligned}$$

例题 3.5.10 3-5-B-11

由拉格朗日中值定理知, $\ln(1+x)-0=x\cdot\frac{1}{1+\theta x}(0<\theta<1)$, 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

解 3.5.10. 解得 $\theta=\dfrac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}$，转化为求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}$，由

$$\frac{(x-\ln(x+1))'}{(x\ln(x+1))'}=\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)}=\frac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}$$

则由于导函数之比在 0 处的极限存在，分母不为 0，当 $x\to 0$ 时，分子分母趋近于 0，所以洛必达法则有效，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}$$

发现分子分母趋近于 0，对 $\dfrac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}$ 分子分母上下分别求导得到 $\dfrac{1}{2+\ln(x+1)}$，由于导函数之比在 0 处的极限存在，分母不为 0，则洛必达法则有效，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\ln(x+1)}=\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$

例题 3.5.11 3-5-B-12

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$, 并设 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=17$. 求 $f'(0)$.

解 3.5.11. 利用导数的定义：已知 $f(0)=0$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h^2}$$

又因为 $g'(x),g''(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有定义，所以使用洛必达法则得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)-g'(0)}{h}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{17}{2}$$

可导一定连续，所以 $f'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{g''(h)}{2}=\dfrac{17}{2}$

例题 3.5.12 3-5-B-14

设 $f(x)$ 一阶可导，且 $f''(x_0)$ 存在，求证：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

解 3.5.12. 发现分子分母都趋近于 0，先分子分母上下分别求导得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0+h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0+h)}{h}$$

，发现此时极限仍然存在，分母仍不是 0，所以洛必达法则有效，于是有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0+h)}{h}$$

再利用 $f''(x_0)$ 的存在性，以及导数的定义，得到

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0+h)}{h}&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0)-(f'(x_0+h)-f'(x_0))}{h}\\&=2f''(x_0)-f''(x_0)=f''(x_0)\end{aligned}$$

即证.

3.6 泰勒公式

例题 3.6.1 3.6-A-2

按 x 的正整数幂, 写出下列函数的展开式至含有指定阶数的项 (带皮亚诺余项) :
(1) $\frac{1}{1-x}$ 到含 x^7 的项；(2) $\arctan x$ 到含 x^4 的项
(3) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 到含 x^4 的项；(4) $\tan x$ 到含 x^4 的项.

解 3.6.1.（1）先求 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 的在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$，由于 $(1-x)f(x)=1$ 两边求 n 阶导数，并利用莱布尼兹公式，得到

$$(1-x)f^{(n)}(x)+(-1)C_n^1f^{(n-1)}(x)=0\Leftrightarrow f^{(n)}(0)=nf^{(n-1)}(0)$$

又 $f'(0)=1$，所以 $f^{(n)}(0)=n!$，于是展开到含 x^7 的项就是：

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+o(x^7)$$

（2）令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-(-x^2)}$，展开得到：

$$f'(x)=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+o(x^4)=1-x^2+x^4-x^6+o(x^6)$$

保留到到含 x^4 的项就是

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

（3）直接使用广义二项式展开：

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1+C^1_{-\frac{1}{2}}x+C^2_{-\frac{1}{2}}x^2+C^3_{-\frac{1}{2}}x^3+C^4_{-\frac{1}{2}}x^4+o(x^4)\\&=1-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3+\frac{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{24}x^4+o(x^4)\\&=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

（4）反复求导过程复杂，可以先建立微分方程：

$$y'=(\tan x)'=1+\tan^2 x=1+y^2$$

两边求导得到：

$$\begin{aligned}y''&=2yy'=2y(1+y^2)=2y+2y^3\\y'''&=2y'+6y^2y'=2(1+y^2)+6y^2(1+y^2)=2+8y^2+6y^4\\y^{(4)}&=16yy'+24y^3y'=16y(1+y^2)+24y^3(1+y^2)=16y+40y^3+24y^5\end{aligned}$$

代入 $y=0$，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)\quad(x\to 0)$ 于是得到展开式：

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

例题 3.6.2 3.6-A-5

求函数$f(x)=xe^x$ 的n 阶麦克劳林公式, 带拉格朗日余项.

解 3.6.2. 设 $f(x)=xe^x$，其泰勒展开式展开到含 x^n 的项的式子，都可以由 x, e^x 展开式的乘积确定：

$$\begin{aligned} f(x)=xe^x &= x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) \\ &= x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

再加上 $\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}, \theta\in(0,1)$，即可得到

$$f(x)=xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}(\theta x+n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

例题 3.6.3 3.6-A-6

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$;(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{(\sin 2x)^6}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac12\right)\ln\left(1+\frac1x\right)$;(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac1x-\frac{1}{e^x-1}\right)$; (6) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$

解 3.6.3. （1） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x+\frac12x^2+o(x^2)-1-x}{x^2}=\dfrac12$

（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x+\frac12x^2+\frac16x^3+o(x^3)-1-x-\frac12x^2}{x^3}=\dfrac16$

（3） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{(\sin 2x)^6}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^3+\frac12x^6+o(x^6)-1-x^3}{64x^6}=\dfrac{1}{128}$

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac12\right)\ln\left(1+\dfrac1x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac1x+\dfrac12\right)\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x+2}{2}\ln(x+1)}{x}=1$

（5） $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac1x-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\dfrac{1-x+\frac12x^2+o(x^2)-1-x}{x^2}=\dfrac12$

（6） $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+x+\frac12x^2+o(x^2)-1-x}{1-\frac12x-\frac18x^2+o(x^2)-(1-\frac12x+\frac1{24}x^2)}=\dfrac{\frac12}{-\frac16}=-3$

3.7 函数性态的研究

例题 3.7.1 3.7-A-3

证明函数$y=x+\sin x$严格上升.

解 3.7.1. $y'=1-\cos x\geq0$，故 y 严格上升.

例题 3.7.2 3.7-A-7

设$f(x)=axe^{bx}$, 试确定常数a,b, 使得$f(\frac{1}{3})=1$, 且函数在$x=\frac{1}{3}$处有极大值.

解 3.7.2. $f'(x)=ae^{bx}(bx+1)$, $f'(\frac{1}{3})=ae^{b\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{3}b)=0$, $f(\frac{1}{3})=a\dfrac{1}{3}e^{b\frac{1}{3}}=1$，得到由必要条件引出的方程组 $a\left(b+\dfrac{1}{3}\right)=0, ae^{b\frac{1}{3}}=3$，由第二个方程得到 $a\neq 0$，所以 $b=-3, a=3e$
下面证明充分性，当 $b=-3, a=3e$ 时，$f(x)=3xe\cdot e^{-3x}=3xe^{1-3x}$, $f(\dfrac{1}{3})=1$, $f'(x)=e\dfrac{1-3x}{e^{3x}}=0$，导函数的正负性取决于一次函数 $y=1-3x$，当 $x<\dfrac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时，$f'(x)=0$，当 $x>\dfrac{1}{3}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\frac{1}{3}$ 处的极大值是 $f(\frac{1}{3})=1$.

例题 3.7.3 3.7-A-8

(1) $\sin x>\frac{2}{\pi}x \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$; (2) $\cos x>1-\frac{x^2}{2} \quad (x\neq 0)$;
(3) $x>\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2} \quad (x>0)$;(4) $\ln(1+x)\geqslant\frac{\arctan x}{1+x} \quad (x\geqslant 0)$.

解 3.7.3.（1）对于 $y=\sin x$，$y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，y 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为凹函数。根据凹函数的定义，设 $x_1=0$，$x_2=\frac{\pi}{2}$，$f(x)=\sin x$，有：

$$f(tx_1+(1-t)x_2)=f\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)\geq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)=1-t$$

令 $x=\frac{\pi}{2}(1-t)\in(0,\frac{\pi}{2})$，则有 $\sin x>\frac{2}{\pi}x \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$.
（2）考虑函数 $f(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$，则 $f(0)=0$。计算导数：

$$f'(x)=-\sin x+x, \quad f''(x)=-\cos x+1\geq 0$$

因此 $f'(x)$ 单调递增，又 $f'(0)=0$，故当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$。所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值 $f(0)=0$，且当 $x\neq 0$ 时 $f(x)>0$，即 $\cos x>1-\frac{x^2}{2} \quad (x\neq 0)$.
（3）先证左边不等式：令 $f(x)=x-\ln(1+x)$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0 \quad (x>0)$，故 $f'(x)>0$，又因为 $f(x)>f(0)=0$，故 $f(x)>0$，即 $x>\ln(1+x)$
再证右边不等式：令 $g(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$，则 $g(0)=0$，$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0 \quad (x>0)$，故 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，又因为 $g(x)>g(0)=0$，故 $g(x)>0$，即 $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$
（4）令 $h(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则 $h(0)=0$。计算导数：

$$h'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}$$

当 $x\geq 0$ 时，$\ln(1+x)\geq 0$，且 $1-\frac{1}{1+x^2}\geq 0$，故 $h'(x)\geq 0$，$h(x)$ 单调递增，因此 $h(x)\geq h(0)=0$，即 $(1+x)\ln(1+x)\geq\arctan x$，亦即 $\ln(1+x)\geq\frac{\arctan x}{1+x} \quad (x\geq 0)$.

例题 3.7.4 3.7-B-3

用函数的凹凸性证明下列不等式: (1) $\ln x \leqslant x-1\ (x>0)$;
(2) $2\arctan\frac{a+b}{2} \geqslant \arctan a+\arctan b\ (a,b\geqslant 0)$;
(3) $1+x^2 \leqslant 2^x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$;
(4) $\frac{x^n+y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n\ (x>0, y>0, x\neq y, n>1)$.

解 3.7.4. （1）考虑函数 $f(x)=\ln x$，其定义域为 $(0,+\infty)$。计算导数：

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凹函数。根据凹函数的性质，对于任意 $x>0$，有：

$$f(x)\leq f(1)+f'(1)(x-1)$$

代入 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，得：

$$\ln x\leq 0+1\cdot(x-1)=x-1$$

即 $\ln x\leqslant x-1\ (x>0)$.
（2）考虑函数 $f(x)=\arctan x$，其定义域为 $[0,+\infty)$。计算导数：

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\leq 0$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是凹函数。根据凹函数的性质，对于任意 $a,b\geq 0$，有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

即：

$$2\arctan\frac{a+b}{2}\geq\arctan a+\arctan b\quad(a,b\geq 0)$$

（3）考虑函数 $g(x)=2^x-1-x^2$，我们需要证明在 $[0,1]$ 上 $g(x)\geq 0$。计算导数：

$$g'(x)=2^x\ln 2-2x,\quad g''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$$

在 $[0,1]$ 上，由于 $2^x\leq 2$ 且 $(\ln 2)^2<1$，所以 $g''(x)<2-2=0$，即 $g(x)$ 是凹函数。由凹函数的性质，对于任意 $x\in[0,1]$，有：

$$g(x)\geq(1-x)g(0)+xg(1)$$

代入 $g(0)=0$，$g(1)=0$，得：

$$g(x)\geq 0$$

即 $2^x-1-x^2\geq 0$，所以 $1+x^2\leqslant 2^x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$。
（4）考虑函数 $f(x)=x^n\ (n>1)$，其定义域为 $(0,+\infty)$。计算导数：

$$f'(x)=nx^{n-1},\quad f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$$

因此 $f(x)$ 是凸函数。根据凸函数的性质，对于 $x>0, y>0, x\neq y$，有：

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

即：

$$\frac{x^n+y^n}{2}>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0, y>0, x\neq y, n>1)$$

3.8 习题 3.8

例题 3.8.1 3.8-A-6

求从点$M(p,p)$到抛物线$y^2=2px$ 的最短距离.

解 3.8.1. 设函数 $f(y)=\left(\frac{y^2}{2p}-p\right)^2+(y-p)^2, f'(y)=2\left(\frac{y^2}{2p}-p\right)\frac{y}{p}+2(y-p)=0$，导函数可以化为

$$\frac{f'(y)}{p}=2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{p}\right)^2-1\right)\frac{y}{p}+2\frac{y}{p}-2=\left(\frac{y}{p}\right)^3-2$$

单调递增，那么 $f'(y)=0\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{2}p$，则 $f(y)$ 在 $(-\infty,\sqrt[3]{2}p)$ 单调递减，在 $(\sqrt[3]{2}p,+\infty)$ 上单调递增，最小值为 $p\sqrt{\left((2^{-\frac{1}{3}}-1)^2+(2^{\frac{1}{3}}-1)^2\right)}=p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}+2}{2}}$.

例题 3.8.2 3.8-A-7

从面积为常数 S 的一切矩形中, 求其周长为最小者

解 3.8.2. 设 $ab=S$，则 $a+b\geq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{S}$，当且仅当 $a=b$，即正方形时取等号，所以最小者为边为 $\sqrt{S}$ 的正方形

例题 3.8.3 3.8-A-8

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形，求此矩形的边长

解 3.8.3. 设第一象限的点 $P(x,y)$，使用基本不等式，矩形面积为 $S=4xy\leq 2ab\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=2ab$，解方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{b}{a}\end{cases}$ 当且仅当矩形的边长为 $\sqrt{2}a,\sqrt{2}b$ 时取等号

例题 3.8.4 3.8-B-5

求由 y 轴上的一个给定点 $(0,b)$ 到抛物线 $x^2=4y$ 上的点的最短距离.

解 3.8.4. 设距离的平方为 $f(x)=x^2+\left(\frac{x^2}{4}-b\right)^2$，则

$$f'(x)=2x+2\left(\frac{x^2}{4}-b\right)\frac{x}{2}=x\left(\frac{x^2}{4}-(b-2)\right)$$

当 $b\leq 2$ 时，$f'(x)$ 在 $x\leq 0$ 时小于等于 0，在 $x>0$ 时大于 0，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，最小值为 $f(0)=b^2$；
当 $b>2$ 时，$f'(x)$ 的根为 $x_1=-2\sqrt{b-2},x_2=0,x_3=2\sqrt{b-2}$，$f'(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 小于 0，在 $[x_1,0]$ 上大于等于 0，在 $(0,x_2)$ 上小于 0，在 $[x_2,+\infty)$ 上大于等于 0
所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 单调递减，在 $[x_1,0]$ 上单调递增，在 $(0,x_2)$ 上单调递减，在 $[x_2,+\infty)$ 上单调递增，又由于 $f(x)$ 为偶函数，所以最小值为 $f(-2\sqrt{b-2})=f(2\sqrt{b-2})=4(b-1)$，则距离的最小值为 $\begin{cases}|b|,b\leq 2\\ 2\sqrt{b-1},b>2\end{cases}$

例题 3.8.5 3.8-B-6

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分求一点 P, 使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小 (其中 $a>0,b>0$).

解 3.8.5. 取 $P(x,y)$，切线斜率为 $k=-\frac{b^2x^2}{a^2y^2}$，切线方程为 $Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x)$，横截距和纵截距为 $\frac{a^2}{x},\frac{b^2}{y}$，三角形面积为 $\frac{a^2b^2}{2xy}=\frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}}$，则设 $f(x)=x^2(a-x^2),f'(x)=2a^2x-4x^3=2x(a^2-2x^2)=0$，又因为 $x>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,\frac{a}{\sqrt{2}})$ 大于 0，在 $[\frac{a}{\sqrt{2}},+\infty)$ 小于等于 0，所以最小值为 $f(\frac{a}{\sqrt{2}})$，所以所求的 P 坐标为 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$，三角形的面积是 $S=\frac{a^2b^2}{2xy}=ab$

第四章 一元函数积分学

例题 4.0.1 4.1-B-2

利用定积分的几何意义，求下列定积分：
(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x$; (2) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$; (3) $\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x$.

解 4.0.1.（1）几何意义为梯形面积

$$\int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{(a+b)(b-a)}{2}$$

（2）由于函数 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 在区间 (a,b) 上图像为一条以 $(a,0),(b,0)$ 为顶点的半圆，所以

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{b-a}{2}\cdot\frac{b-a}{2} = \frac{\pi(b-a)^2}{8}$$

（3）函数 $y=\left|x-\frac{a+b}{2}\right|$ 在区间 $[a,b]$ 上图像是两个对称的等腰直角三角形，所以

$$\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x = 2\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

例题 4.0.2 4.1-B-3

设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 求证:
(1) 若 $f(x)\geqslant 0,\forall x\in[a,b]$, 且 $\int_a^b f(x)dx=0$, 则在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$;
(2) 若 $f(x)\leqslant g(x),\forall x\in[a,b]$, 且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$, 则在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv g(x)$.

解 4.0.2.（1）由于 $f(x)$ 连续非负，反设存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)>0$，则由连续性知，存在区间 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$，使得 $f(x)\geq\frac{1}{2}f(x_0)>0$，则由积分中值定理：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\geq \int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{b_1}^b f(x)\mathrm{d}x\\ &\geq \int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x_0)(b_1-a_1)>0\end{aligned}$$

（2）设 $h(x)=g(x)-f(x)$, 则 $h(x)\geqslant 0,\forall x\in[a,b]$，且 $\int_a^b h(x)dx=0$，则由（1）知 $h(x)\equiv 0$，即 $f(x)\equiv g(x)$.

例题 4.0.3 4.1-B-4

应用柯西-许瓦兹不等式证明：$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

解 4.0.3. 根据柯西-施瓦兹不等式，对于任意在区间 $[a,b]$ 上可积的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，有：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2\,dx$$

特别地，取 $g(x)=1$，则有：

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot 1\,dx\right)^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b 1^2\,dx$$

计算右侧积分：

$$\int_a^b 1^2\,dx = \int_a^b 1\,dx = b-a$$

代入上式得：

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$$

当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)=1$ 线性相关，即 $f(x)$ 为常数函数时等号成立。

例题 4.0.4 4.1-B-5

函数 $f(x)\in C[0,1]$, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0)$. 证明: $\exists c\in(0,1)$, 使得 $f'(c)=0$.

解 4.0.4. 改写成 $\dfrac{\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\frac{2}{3}} = f(0)$，又由于 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，所以存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=\dfrac{\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\frac{2}{3}}$，假如在区间 $[0,1]$ 上有且仅有一个点 $\xi=0$ 使得 $f(\xi)=f(0)=\dfrac{\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\frac{2}{3}}$，则由于 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上恒大于 $f(0)$ 或恒小于 $f(0)$，不妨设 $f(x)>f(0),\forall x\in(0,1)$，则 $\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x > \int_{\frac{2}{3}}^1 f(0)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}f(0)$，矛盾，同理另一种情况也矛盾。所以存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=f(0)$，由罗尔定理以及 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，知存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f'(c)=0$.

例题 4.0.5 4.2-A-5

$$(1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t\right);\quad (2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x+a}^{x+b}(t+1)^2\mathrm{d}t\right)$$

解 4.0.5. （1）设函数 $\sqrt{1+t^2}$ 的原函数是 $F(t)$，则 $F'(t)=\sqrt{1+t^2}$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x^2)-F(0)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x^2)\\&=\frac{\mathrm{d}F(x^2)}{x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+(x^2)^2}\cdot 2x=2x\sqrt{1+x^4}\end{aligned}$$

（2）设函数 $(t+1)^2$ 的原函数是 $F(t)$，则 $F'(t)=(t+1)^2$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x+a}^{x+b}(t+1)^2\mathrm{d}t\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x+b)-F(x+a)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x+b)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x+a)\\&=\frac{\mathrm{d}F(x+b)}{\mathrm{d}(x+b)}\cdot\frac{\mathrm{d}(x+b)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}F(x+a)}{\mathrm{d}(x+a)}\cdot\frac{\mathrm{d}(x+a)}{\mathrm{d}x}\\&=(x+b+1)^2-(x+a+1)^2\end{aligned}$$

例题 4.0.6 4.2-A-6

求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \mathrm{sin}x^2\mathrm{d}x$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b \mathrm{sin}x^2\mathrm{d}x$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b \mathrm{sin}x^2\mathrm{d}x$.

解 4.0.6. （1）设函数 $\mathrm{sin}x^2$ 的原函数是 $F(x)$，则 $F'(x)=\mathrm{sin}x^2$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b\mathrm{sin}x^2\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(b)-F(a)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(b)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(a)\\&=\frac{\mathrm{d}F(b)}{\mathrm{d}b}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}=0\end{aligned}$$

（2）设函数 $\mathrm{sin}x^2$ 的原函数是 $F(x)$，则 $F'(x)=\mathrm{sin}x^2$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b\mathrm{sin}x^2\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(F(b)-F(a)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}F(b)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}F(a)\\&=\frac{\mathrm{d}F(b)}{\mathrm{d}b}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}-\frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}a}=-\sin a^2\end{aligned}$$

（3）设函数 $\mathrm{sin}x^2$ 的原函数是 $F(x)$，则 $F'(x)=\mathrm{sin}x^2$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b\mathrm{sin}x^2\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(F(b)-F(a)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}F(b)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}F(a)\\&=\frac{\mathrm{d}F(b)}{\mathrm{d}b}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}b}-\frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b}=\sin b^2\end{aligned}$$

例题 4.0.7 4.2-A-7

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}};\quad (2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\sqrt{t+\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}.$$

解 4.0.7. （1）当 $x \to +\infty$ 时，$\int_0^x (\arctan t)^2 \mathrm{d}t$ 趋于无穷大，$\sqrt{x^2+1}$ 也趋于无穷大，两者均对 x 可导，所以可以使用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 \mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (\arctan t)^2 \mathrm{d}t}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \arctan^2 x = \frac{\pi^2}{4}$$

（2）当 $x \to +\infty$ 时，$\int_1^x \sqrt{t+\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$ 趋于无穷大，$x\sqrt{x}$ 也趋于无穷大，两者均对 x 可导，所以可以使用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \sqrt{t+\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x \sqrt{t+\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{3\sqrt{x}} = \frac{2}{3}$$

例题 4.0.8 4.2-B-3

设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_{1/x}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$, 求 $F'(x)$.

解 4.0.8. 由题意知 $f(x)$ 在 $(1/x, \ln x)$ 上连续，设 $f(t)$ 的原函数是 $G(t)$，则 $G'(t) = f(t)$，所以

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(G(\ln x) - G(1/x)) = \frac{G'(\ln x)}{x} + \frac{G'(1/x)}{x^2} \\ &= \frac{f(\ln x)}{x} + \frac{f(1/x)}{x^2} \end{aligned}$$

例题 4.0.9 4.2-B-4

设 $f(x) \in C^{(1)}[0,1]$, 即 $f'(x) \in C[0,1]$, 且 $f(1) - f(0) = 1$, 证明 $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 1$.

解 4.0.9. $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(0) = 1$，所以由柯西施瓦兹不等式知：

$$\int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x \int_0^1 1^2 \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 = 1$$

又因为 $\int_0^1 1^2 \mathrm{d}x = 1$，所以 $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant 1$.

例题 4.0.10 4.2-B-5

设 $f(x) \in \mathbb{C}[0,+\infty)$, 并且 $x \in [0,+\infty)$ 时 , $f(x) > 0$. 证明函数 $F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加的函数。

解 4.0.10. 只需证明 $F'(x) \geq 0$，由商法则，有：

$$F'(x) = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$= \frac{xf(x)\cdot\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\cdot f(x)}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$
$$= \frac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right]}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}.$$

由于 $f(x)>0$ 且 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t>0$（因为 $f(t)>0$），分母恒正，故 $F'(x)$ 的符号取决于分子中的表达式：

$$x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

对于 $x>0$ 和 $t\in[0,x]$，有 $x-t\geq 0$ 且 $f(t)>0$，因此被积函数 $f(t)(x-t)\geq 0$。当 $t<x$ 时，$x-t>0$，故：

$$\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

因此，$F'(x)\geq 0$ 对于 $x>0$，这意味着 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

例题 4.0.11　4.3-B-1

(1) $\int\left(e^x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$　(2) $\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$　(3) $\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(4) $\int\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}$　(6) $\int\frac{2x^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(7) $\int(x^2-1)^2\mathrm{d}x$　(8) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　(9) $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

(10) $\int(2^x+3^x)\,\mathrm{d}x$　(11) $\int\frac{3x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$　(12) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$

解 4.0.11.（1）$\int\left(e^x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(e^x-2x^{-\frac13}\right)\mathrm{d}x=e^x-3x^{\frac23}+C$

（2）$\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac1x+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|+\arctan x+C$

（3）$\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int(x^2-1)\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C$

（4）$\int\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int x^{\frac34}\mathrm{d}x=\frac47x^{\frac74}+C$

（5）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}=\int x^{-\frac52}\mathrm{d}x=-\frac23x^{-\frac32}+C$

（6）$\int\frac{2x^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int 2x^{\frac32}\mathrm{d}x=\frac45x^{\frac52}+C$

（7）$\int(x^2-1)^2\mathrm{d}x=\int(x^4-2x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+C$

（8）$\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac12}+x^{-\frac12})\mathrm{d}x=\frac23x^{\frac32}+2x^{\frac12}+C$

（9）$\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int(e^{2x}-e^x+1)\mathrm{d}x=\frac12e^{2x}-e^x+x+C$

（10） $\int (2^x+3^x)\mathrm{d}x = \int 2^x\mathrm{d}x + \int 3^x\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

（11） $\int \frac{3x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(3 - \frac{3}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = 3x - 3\arctan x + C$

（12） $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \arctan x + C$

例题 4.0.12 4.3-B-2

(1) $\int \cos(t+1)\,\mathrm{d}t$; (2) $\int (2\sin\theta - 3\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$; (3) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}$; (5) $\int \sqrt{1-\sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$; (6) $\int \frac{3+\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \cos^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$; (8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$; (9) $\int \sec x(\sec x - \tan x)\,\mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x$; (11) $\int 3^x e^x\,\mathrm{d}x$; (12) $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$.

解 4.0.12. （1） $\int \cos(t+1)\,\mathrm{d}t = \sin(t+1) + C$

（2） $\int (2\sin\theta - 3\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = -2\cos\theta - 3\sin\theta + C$

（3） $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = -\cot x - \tan x + C$

（4） $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}} = \int \frac{4}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = -4\cot t + C$

（5） $\int \sqrt{1-\sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int |\cos\theta - \sin\theta|\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \sin\theta + \cos\theta + C, & \cos\theta \geq \sin\theta \\ -(\sin\theta + \cos\theta) + C, & \cos\theta < \sin\theta \end{cases}$

（6） $\int \frac{3+\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int (3\sec^2 x + \tan^2 x)\,\mathrm{d}x = \int (4\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = 4\tan x - x + C$

（7） $\int \cos^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos t}{2}\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin t}{2} + C$

（8） $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x} = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan x + C$

（9） $\int \sec x(\sec x - \tan x)\,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - \sec x\tan x)\,\mathrm{d}x = \tan x - \sec x + C$

（10） $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x = \int (\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C$

（11） $\int 3^x e^x\,\mathrm{d}x = \int (3e)^x\,\mathrm{d}x = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$

（12） $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x = \int \left(2 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)\mathrm{d}x = 2x - \frac{5}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C$

例题 4.0.13 4.4-A-3

(1) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$; (2) $\int_{-1}^3 (x^3+5x)\mathrm{d}x$; (3) $\int_0^\pi \sin\theta(\cos\theta+5)^7\mathrm{d}\theta$;

(4) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$; (5) $\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}\mathrm{d}x$; (6) $\int_0^{\pi/12} \sin 3t\mathrm{d}t$;

(7) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x$; (8) $\int_1^4 x\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x$; (9) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$;

(10) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$; (11) $\int_{-2}^0 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$; (12) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x$;

(13) $\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$; (14) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta-\cos^3\theta}\mathrm{d}\theta$; (15) $\int_1^2 \mathrm{e}^{x^3}x^2\mathrm{d}x$;

(16) $\int_2^3 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x$; (17) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \tan\theta\sec^2\theta\mathrm{d}\theta$; (18) $\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

解 4.0.13. （1）

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

（2）

$$\int_{-1}^3 (x^3+5x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{5x^2}{2}\right)\bigg|_{-1}^3 = \frac{81-1}{4}+5\cdot\frac{8}{2} = 40$$

（3）令 $u=\cos\theta+5$，则 $\mathrm{d}u=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$，当 $\theta=0$ 时 $u=6$，$\theta=\pi$ 时 $u=4$，故

$$\int_0^\pi \sin\theta(\cos\theta+5)^7\mathrm{d}\theta = \int_6^4 u^7(-\mathrm{d}u) = \int_4^6 u^7\mathrm{d}u = \frac{u^8}{8}\bigg|_4^6 = \frac{6^8-4^8}{8}$$

（4）

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \arctan y\big|_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

（5）令 $u=1+5x^2$，则 $\mathrm{d}u=10x\mathrm{d}x$，当 $x=0$ 时 $u=1$，$x=1$ 时 $u=6$，故

$$\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}\mathrm{d}x = \int_1^6 \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{10}\mathrm{d}u = \frac{1}{10}\ln|u|\big|_1^6 = \frac{\ln 6}{10}$$

（6）

$$\int_0^{\pi/12} \sin 3t\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cos 3t\bigg|_0^{\pi/12} = -\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

（7）

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right)\bigg|_1^2 = (2+\ln 2)-\left(\frac{1}{2}+\ln 1\right) = \frac{3}{2}+\ln 2$$

（8）令 $u=x^2+4$，则 $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$，当 $x=1$ 时 $u=5$，$x=4$ 时 $u=20$，故

$$\int_1^4 x\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x = \int_5^{20} \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\bigg|_5^{20} = \frac{1}{3}\left(20^{3/2}-5^{3/2}\right) = \frac{35\sqrt{5}}{3}$$

（9）

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1} = \int_0^1 (x+1)^{-2}\mathrm{d}x = -(x+1)^{-1}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

（10）令 $x^2 = \sin\theta$，则 $2x\mathrm{d}x = \cos\theta\mathrm{d}\theta$，当 $x=0$ 时 $\theta=0$，$x = 1/\sqrt{2}$ 时 $\theta = \pi/6$，故

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\frac{1}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

（11）令 $u = x^2+4x+5$，则 $\mathrm{d}u = (2x+4)\mathrm{d}x$，当 $x=-2$ 时 $u=1$，$x=0$ 时 $u=5$，故

$$\int_{-2}^0 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|\Big|_1^5 = \ln 5$$

（12）令 $u = 1-x$，则 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$，$x = 1-u$，当 $x=1$ 时 $u=0$，$x=9$ 时 $u=-8$，故

$$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^{-8} (1-u)u^{1/3}(-\mathrm{d}u) = \int_{-8}^0 (u^{1/3}-u^{4/3})\mathrm{d}u = \left(\frac{3}{4}u^{4/3} - \frac{3}{7}u^{7/3}\right)\Big|_{-8}^0 = -\frac{468}{7}$$

（13）令 $u = 1+\ln x$，则 $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，当 $x=1$ 时 $u=1$，$x=\mathrm{e}^2$ 时 $u=3$，故

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^3 u^{-1/2}\mathrm{d}u = 2u^{1/2}\Big|_1^3 = 2(\sqrt{3}-1)$$

（14）

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta - \cos^3\theta}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\sqrt{\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

令 $u = \cos\theta$，则 $\mathrm{d}u = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$，故

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\sqrt{\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 2\int_1^0 \sqrt{u}(-\mathrm{d}u) = 2\int_0^1 u^{1/2}\mathrm{d}u = 2\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

（15）令 $u = x^3$，则 $\mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x$，当 $x=1$ 时 $u=1$，$x=2$ 时 $u=8$，故

$$\int_1^2 \mathrm{e}^{x^3}x^2\mathrm{d}x = \int_1^8 \mathrm{e}^u\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^u\Big|_1^8 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^8-\mathrm{e})$$

（16）令 $u = 1/x$，则 $\mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$，当 $x=2$ 时 $u=1/2$，$x=3$ 时 $u=1/3$，故

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1/3} \mathrm{e}^u(-\mathrm{d}u) = \int_{1/3}^{1/2} \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u\Big|_{1/3}^{1/2} = \mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^{1/3}$$

（17）令 $u = \tan\theta$，则 $\mathrm{d}u = \sec^2\theta\mathrm{d}\theta$，当 $\theta = \pi/6$ 时 $u = 1/\sqrt{3}$，$\theta = \pi/4$ 时 $u=1$，故

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \tan\theta\sec^2\theta\mathrm{d}\theta = \int_{1/\sqrt{3}}^1 u\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}\Big|_{1/\sqrt{3}}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

（18）令 $u = \cos\theta$，则 $\mathrm{d}u = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$，当 $\theta=0$ 时 $u=1$，$\theta=\pi/2$ 时 $u=0$，故

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_1^0 u^5(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^5\mathrm{d}u = \frac{u^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

例题 4.0.14 4.4-A-4

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; (2) $\displaystyle\int_0^{a/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{3/2}}(\mathrm{a}>0)$; (3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1+x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; (5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

(7) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$; (9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(10) $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

解 4.0.14. （1）

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{a^2\sin^2\theta \mathrm{d}a\sin\theta}{a\sqrt{1-\sin^2\theta}} = a^2\int \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = a^2\int \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta - \frac{a^2}{2}\int \cos 2\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\theta - \frac{a^2}{4}\sin 2\theta + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + C \\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C\end{aligned}$$

（2）

$$\int_0^{a/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}a\sin\theta}{(a^2-a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{a^2}\tan\theta|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{a^2}$$

（3）

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x}{1+x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x &= \int \frac{t\mathrm{d}t^2}{\sqrt{1+t^3}} = \int \frac{2t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} = \frac{2}{3}\int \frac{3t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t^3}{\sqrt{1+t^3}} \\ &= \frac{2}{3}\frac{(1+t^3)^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{3}\sqrt{1+t^3} + C = \frac{4}{3}\sqrt{1+x\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= 2\left(t-\ln|1+t|\right) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

（5）

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin(\mathrm{e}^x) + C$$

（6）

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$$

对后一项积分，令 $x=\sin t$，$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int\cot^2 t\mathrm{d}t=\int(\csc^2 t-1)\mathrm{d}t\\&=-\cot t-t+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C\end{aligned}$$

代回得

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}&=-\frac{1}{x}-\left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x\right)+C\\&=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+\arcsin x+C\end{aligned}$$

（7）

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x&\xlongequal{x=\tan t}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t}{\tan t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^3 t}{\tan t}\mathrm{d}t\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\csc t\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\csc t\mathrm{d}t\\&=[\sec t+\ln|\csc t-\cot t|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\&=\left(2+\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)\right)\\&=2-\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)\right)\end{aligned}$$

（8）

$$\begin{aligned}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&\xlongequal{x=a\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{a^4}{8}\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^4}{16}\end{aligned}$$

（9）

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\sec t}\int\frac{\sec t\tan t}{\sec t\cdot\tan t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t=t+C=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)+C$$

（10）

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x}} \int \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=\arctan t} 2\int u\mathrm{d}u = u^2 + C = (\arctan t)^2 + C = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$$

例题 4.0.15 4.4-B-1

(1) $\int x\sqrt[3]{1-5x^2}\,\mathrm{d}x$;　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x}$;　(3) $\int \frac{1+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;　(5) $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$;　(6) $\int \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x$;　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$;　(9) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+19}\mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$;　(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$;　(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

解 4.0.15. (1)

$$\int x\sqrt[3]{1-5x^2}\,\mathrm{d}x \overset{令t=1-5x^2}{=} \int t^{1/3}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{4}t^{4/3} + C$$

$$= -\frac{3}{40}(1-5x^2)^{4/3} + C$$

(2)

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{1-x} = \int\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x = -x - \ln|1-x| + C$$

(3)

$$\int \frac{1+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x \overset{令u=x+\mathrm{e}^x}{=} \int \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\sqrt{u} + C$$

$$= 2\sqrt{x+\mathrm{e}^x} + C$$

(4)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x \overset{令t=\mathrm{e}^x}{=} \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \arctan t + C$$

$$= \arctan(\mathrm{e}^x) + C$$

(5)

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y \overset{令t=\sqrt{y}}{=} \int \frac{\mathrm{e}^t}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^t + C$$

$$= 2\mathrm{e}^{\sqrt{y}} + C$$

(6)

$$\int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \overset{令 u=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{=} \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C$$
$$= \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + C$$

(7)

$$\int \frac{x^3}{9+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x - \frac{9x}{9+x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x - 9\int \frac{x}{9+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln(9+x^2) + C$$

(8)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)} \overset{令 t=x^3}{=} \int \frac{1}{t(t^2+4)} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{4t} - \frac{t}{4(t^2+4)}\right)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{12}\ln|t| - \frac{1}{24}\ln(t^2+4) + C$$
$$= \frac{1}{12}\ln|x^3| - \frac{1}{24}\ln(x^6+4) + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\ln(x^6+4) + C$$

(9)

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+19}\,\mathrm{d}x \overset{令 u=x^2+2x+19}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+19) + C$$

(10)

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,\mathrm{d}x \overset{令 t=\sin x-\cos x}{=} \int t^{-1/3}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}t^{2/3} + C$$
$$= \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{2/3} + C$$

(11)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{1}{2\cos^2(x/2)}\,\mathrm{d}x = \int \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{令 t=x/2}{=} \int \sec^2 t\,\mathrm{d}t = \tan t + C$$
$$= \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

(12)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - \sec x \tan x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \tan x - \sec x + C$$

例题 4.0.16 4.4-B-2

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}$; (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$; (3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$ (令 $x=\frac{1}{t}$);

(4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; (5) $\displaystyle\int \frac{1}{4}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int_a^0 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x$ (令 $x=a\sin t$).

解 4.0.16. (1)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}} &\overset{令 t=\sqrt{1+e^x}}{=} \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C\\ &= x - 2\ln(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^x}) + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}} &\overset{令 x=\sin\theta}{=} \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}(\theta+\ln|\sin\theta+\cos\theta|)+C\\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x &\overset{令 x=\frac{1}{t}}{=} \int \frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int t\sqrt{a^2t^2-1}\,\mathrm{d}t\\ &\overset{令 u=a^2t^2-1}{=} -\frac{1}{2a^2}\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3a^2}u^{3/2}+C\\ &= -\frac{1}{3a^2}\left(a^2t^2-1\right)^{3/2}+C = -\frac{1}{3a^2}\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)^{3/2}+C\\ &= -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3a^2x^3}+C.\end{aligned}$$

(4)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \overset{令 x=\tan\theta}{=} \int\frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \sin\theta + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

(5)

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x \overset{令 t=\arcsin\sqrt{x}}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\sin t\cos t}\cdot 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{d}t$$

$$= t^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{144}\pi^2$$

(6)

$$\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x\ln x)^2}\,\mathrm{d}x\ln x = -\frac{1}{x\ln x} + C.$$

(7)

$$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\,\mathrm{d}x \overset{令 t=\ln\tan x}{=} \int \frac{t\,\mathrm{d}\arctan \mathrm{e}^t}{\frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2t}}}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2t}}}}$$
$$= \int t\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C.$$

(8)

$$\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x \overset{令 x=a\sin t}{=} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = a\int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin t}{\cos t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= a\int_0^{\pi/2}(1-\sin t)\,\mathrm{d}t = a\left[t+\cos t\right]_0^{\pi/2} = a\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

例题 4.0.17 4.4-B-3

设 $f(x)\in C[0,\pi]$，证明：

(1) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$，并由此计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 4.0.17. （1）

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin(x+\frac{\pi}{2})\right)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x$$

（2）

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+\frac{\pi}{2})\sin(x+\frac{\pi}{2})}{1+\cos^2(x+\frac{\pi}{2})}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+\frac{\pi}{2})\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x}$$
$$= \pi\times\arctan(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

例题 4.0.18 4.4-B-4

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，证明积分 $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关。

解 4.0.18.

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^T f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x+T)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^T f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例题 4.0.19 4.4-B-5

若 $f(t)$ 连续且为奇函数, 证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数；若 $f(t)$ 连续且为偶函数, 证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数

解 4.0.19. （1）若 $f(t)$ 连续且为奇函数: 由 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t = 0$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = -\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$$

所以 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数。

（2）若 $f(t)$ 连续且为偶函数: 由 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$ 得到:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t &= -\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t &= 0\end{aligned}$$

所以 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数。

例题 4.0.20 4.4-B-6

设 $f(x)$ 是连续函数, 证明 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) + f(x+1)]\mathrm{d}x$.

解 4.0.20.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x+1)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 [f(x) + f(x+1)]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例题 4.0.21　4.5-A-5

求 $I_n=\int x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

解 4.0.21.

$$\begin{aligned}I_n=\int x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-x^n\mathrm{e}^{-x}+\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x^n\\ =-x^n\mathrm{e}^{-x}+n\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x^{n-1}=-x^n\mathrm{e}^{-x}+nI_{n-1}\\ =-x^n\mathrm{e}^{-x}-nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x}-n(n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}-\cdots-n!x\mathrm{e}^{-x}+n!I_0\\ =-e^{-x}\left(x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n!x+n!\right)+C\end{aligned}$$

例题 4.0.22　4.5-B-3

(1) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$;　(2) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;　(3) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$;　(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$;　(6) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$;　(8) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$;　(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int \frac{x+\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$;　(11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x$;　(12) $\displaystyle\int_0^{1/2} x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$;

(13) $\displaystyle\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$;　(14) $\displaystyle\int x\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$;　(15) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5-x}}\,\mathrm{d}x$;

(16) $\displaystyle\int (t+2)\sqrt{2+3t}\,\mathrm{d}t$;　(17) $\displaystyle\int \frac{t+7}{\sqrt{5-t}}\,\mathrm{d}t$.

解 4.0.22. (1)

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x&=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &=x\ln(1+x^2)-2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\overset{u=\sqrt{x}}{=}2\int u\arctan u\,\mathrm{d}u=u^2\arctan u-\int\frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\ =u^2\arctan u-\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u\\ =u^2\arctan u-u+\arctan u+C=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{2\cos^2(x/2)}\,\mathrm{d}x + \int \tan(x/2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int x\,\mathrm{d}\tan(x/2) + 2\ln|\cos(x/2)| \\
&= x\tan(x/2) - \int \tan(x/2)\,\mathrm{d}x + 2\ln|\cos(x/2)| \\
&= x\tan(x/2) + 2\ln|\cos(x/2)| - 2\ln|\cos(x/2)| + C \\
&= x\tan(x/2) + C.
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \tan^2 x\sec x\,\mathrm{d}x &= \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x - \int \sec x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) - \ln|\sec x + \tan x| + C \\
&= \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \overset{u=\mathrm{e}^x}{=} \int \frac{1}{u(1+u)^2}\,\mathrm{d}u &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \ln|u| - \ln|1+u| + \frac{1}{1+u} + C \\
&= x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + C.
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right) &= -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} \\
&= -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int \left(1 - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C \\
&= \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C.
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x &\overset{u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{=} 2\int \ln(u^2+1)\,\mathrm{d}u \\
&= 2\left(u\ln(u^2+1) - \int \frac{2u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2u\ln(u^2+1) - 4\int\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= 2u\ln(u^2+1) - 4u + 4\arctan u + C \\
&= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + 4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C.
\end{aligned}
$$

(8)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &\overset{x=\tan\theta}{=} \int \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} + C \\
&= \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2(1+x^2)} + C.
\end{aligned}
$$

(9)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\ln(1+x)}{2-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln 2 - \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \ln 2 - \frac{1}{3}\left[-\ln|2-x| + \ln|1+x|\right]_0^1 \\
&= \ln 2 - \frac{1}{3}(\ln 2 + \ln 2) = \frac{1}{3}\ln 2.
\end{aligned}
$$

(10)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x - \frac{\ln x}{1+x} + \int \frac{1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln|1+x| + \frac{1}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \ln|1+x| + \frac{1}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} + \ln|x| - \ln|1+x| + C \\
&= \ln x + \frac{1-\ln x}{1+x} + C = \frac{1+x\ln x}{1+x} + C.
\end{aligned}
$$

(11)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{(由对称性)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{1-2x}}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{u=\mathrm{e}^{-x}}{=} \frac{1}{2}\int_1^{e^{-1}} \frac{u}{1+\mathrm{e}u^2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{e^{-1}}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{e}u^2} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\left[\arctan(\sqrt{\mathrm{e}}u)\right]_{e^{-1}}^{1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\left(\arctan\sqrt{\mathrm{e}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right).
\end{aligned}
$$

(12)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{1/2} x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2} x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x)\right]_0^{1/2} \\
&\quad - \left[\frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1-x)\right]_0^{1/2} \\
&= \ln 2 - \frac{3}{8}\ln 3 - \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

(13)

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \quad (\text{因为} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} = \arctan\sqrt{x}) \\
&\overset{u=\sqrt{x}}{=} 2\int_0^{\sqrt{3}} u\arctan u\,\mathrm{d}u \\
&= \left[u^2\arctan u\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \pi - \left[u - \arctan u\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \pi - (\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

(14)

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x &\overset{u=x+3}{=} \int (u-3)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \int (u^{3/2} - 3u^{1/2})\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{5}u^{5/2} - 2u^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+3)^{5/2} - 2(x+3)^{3/2} + C.
\end{aligned}
$$

(15)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{5-x}}\,\mathrm{d}x &\overset{u=5-x}{=} \int \frac{5-u}{\sqrt{u}}(-\mathrm{d}u) = \int (u-5)u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int (u^{1/2} - 5u^{-1/2})\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{3/2} - 10u^{1/2} + C \\
&= \frac{2}{3}(5-x)^{3/2} - 10\sqrt{5-x} + C.
\end{aligned}
$$

(16)

$$\begin{aligned}\int (t+2)\sqrt{2+3t}\,\mathrm{d}t &\overset{u=2+3t}{=} \int \left(\frac{u-2}{3}+2\right)\sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{9}\int (u+4)u^{1/2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{9}\int (u^{3/2}+4u^{1/2})\,\mathrm{d}u = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{5}u^{5/2}+\frac{8}{3}u^{3/2}\right)+C \\ &= \frac{2}{45}(2+3t)^{5/2}+\frac{8}{27}(2+3t)^{3/2}+C.\end{aligned}$$

(17)

$$\begin{aligned}\int \frac{t+7}{\sqrt{5-t}}\,\mathrm{d}t &\overset{u=5-t}{=} \int \frac{5-u+7}{\sqrt{u}}(-\mathrm{d}u) = \int \frac{u-12}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int (u^{1/2}-12u^{-1/2})\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{3/2}-24u^{1/2}+C \\ &= \frac{2}{3}(5-t)^{3/2}-24\sqrt{5-t}+C.\end{aligned}$$

例题 4.0.23　4.5-B-4

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right)$.

解 4.0.23. 每道题利用定义，提取 $\Delta x=\frac{1}{n}, x_k=\frac{k}{n}$，然后找出来 $f(x_k)$：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{k}{n}=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$

例题 4.0.24　4.6-A-2

（1）$\int\cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x$　（2）$\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$　（3）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$　（4）$\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$

解 4.0.24.（1）

$$\begin{aligned}\int\cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x &= -\int\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}\cos x = \int(\cos^2 x-1)\cos^4 x\mathrm{d}\cos x \\ &= \int\cos^6 x\mathrm{d}\cos x-\int\cos^4 x\mathrm{d}\cos x \\ &= \frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+C\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{2\tan x}{\tan^2 x + 2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2t}{t^2+2}\mathrm{d}\arctan t = \int \frac{\mathrm{d}t^2}{(t^2+1)(t^2+2)} \\
&= \int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t^2 \\
&= \ln\frac{t^2+2}{t^2+1} + C = \ln\frac{\tan^2 x+2}{\tan^2 x+1} + C
\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x + 2\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x\cos x + 2\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(1+\cos x)} \\
&\overset{令 t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{4t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}+t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\ln|t| + \frac{t^2}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &\overset{令 t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{2}{2(1+t^2)+2t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

例题 4.0.25 4.6-A-3

（1）$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ （2）$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$

解 4.0.25. （1）

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int\sqrt{t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\sec\theta=t}{=} 2\int \tan\theta\cdot\sec\theta\tan\theta\mathrm{d}\theta = 2\int \tan^2\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int(\sec^2\theta-1)\sec\theta\mathrm{d}\theta = 2\int(\sec^3\theta-\sec\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta+\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|-\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)+C \\
&= \sec\theta\tan\theta-\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C \\
&= t\sqrt{t^2-1}-\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+C \\
&= \sqrt{x}\sqrt{x-1}-\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})+C
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}} &\overset{t=\sqrt[3]{x+2}}{=} \int\frac{1}{1+t}\cdot 3t^2\mathrm{d}t = 3\int\frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= 3\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\
&= 3\left(\frac{1}{2}t^2-t+\ln|1+t|\right)+C \\
&= \frac{3}{2}t^2-3t+3\ln|1+t|+C \\
&= \frac{3}{2}(x+2)^{2/3}-3(x+2)^{1/3}+3\ln|1+(x+2)^{1/3}|+C
\end{aligned}
$$

例题 4.0.26 4.6-B

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$; (2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$; (3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$;

(4) $\displaystyle\int\tan^3x\,\mathrm{d}x$; (5) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\cos x}$; (6) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$;

(7) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; (8) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$.

解 4.0.26. (1)

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x \\
&\quad -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) \\
&\quad -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)+C
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1)\right] + C.$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right) + C \quad (\text{利用恒等式} \arctan u + \arctan v = \arctan\frac{u+v}{1-uv}).
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \,\mathrm{d}x &= \int \tan x \cdot \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \int \tan x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \tan x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int \tan x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x - (-\ln|\cos x|) + C \\
&= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos x}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int \sec x \,\mathrm{d}x + \int \cot x \csc x \,\mathrm{d}x \\
&= \ln|\sec x + \tan x| - \csc x + C.
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x} &\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{3(1+t^2)+(1-t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{2}{2t^2+4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} &\overset{t=\sqrt[6]{x}}{=} \int \frac{1}{(1+t^2)\cdot t^3} \cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 6\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 6\left(t-\arctan t\right) + C \\
&= 6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}\right) + C.
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(1-\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}\right)\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{t=\sqrt{x+1}}{=} x - 2\int \frac{1}{t+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = x - 4\int \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= x - 4\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= x - 4\left(t - \ln|t+1|\right) + C \\
&= x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right) + C.
\end{aligned}$$

例题 4.0.27 4.7-A

用定义判别下列反常积分的敛散性, 如果积分收敛, 则计算反常积分的值

(1) $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$; (3) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$; (5) $\int_x^{+\infty} \sin y\,\mathrm{d}y$; (6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+25}$;

(7) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$; (8) $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-x^2}}$; (9) $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$;

(10) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$; (11) $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x}\,\mathrm{d}x$; (12) $\int_4^{20} \frac{1}{y^2-16}\,\mathrm{d}y$;

(13) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$; (14) $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$; (15) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(16) $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$; (17) $\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$; (18) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln \pi}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(19) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,\ a>0$; (20) $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

解 4.0.27. (1)

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_1^b\right)\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2b}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}\quad (\text{收敛}).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(4+x^2)\Big|_1^b\right)\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(4+b^2)-\frac{1}{2}\ln 5\right) = +\infty\quad (\text{发散}).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^b\right)\\ &= \lim_{b\to+\infty}(-b\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-b}+1) = 1\quad (\text{收敛}).\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\left(\ln(1+\mathrm{e}^x)\Big|_a^0\right)\\ &= \ln 2 - \lim_{a\to-\infty}\ln(1+\mathrm{e}^a) = \ln 2\quad (\text{收敛}).\end{aligned}$$

(5)

$$\int_x^{+\infty} \sin y\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to+\infty}\int_x^b \sin y\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to+\infty}\left(-\cos y\Big|_x^b\right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(-\cos b+\cos x)\quad \text{极限不存在，故发散.}$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+25} &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\mathrm{d}z}{z^2+25}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}z}{z^2+25}\\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\arctan\frac{z}{5}\Big|_a^0\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\arctan\frac{z}{5}\Big|_0^b\right)\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2}-\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{5}\arctan\frac{a}{5}+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{5}\arctan\frac{b}{5}-\frac{1}{5}\cdot 0\\
&= \frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{5}\quad(\text{收敛}).
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x \overset{u=\cos x}{=\!=\!=} \int_{\sqrt{2}/2}^{0}\frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} &= \int_0^{\sqrt{2}/2}u^{-1/2}\,\mathrm{d}u\\
&= 2\sqrt{u}\Big|_0^{\sqrt{2}/2}=2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2^{3/4}\quad(\text{收敛}).
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\int_0^4\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-x^2}} &= \lim_{b\to4^-}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-x^2}}=\lim_{b\to4^-}\left(\arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^b\right)\\
&= \lim_{b\to4^-}\arcsin\frac{b}{4}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}\quad(\text{收敛}).
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{t} &= \lim_{a\to0^-}\int_{-1}^a\frac{\mathrm{d}t}{t}+\lim_{b\to0^+}\int_b^1\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&= \lim_{a\to0^-}\left(\ln|t|\Big|_{-1}^a\right)+\lim_{b\to0^+}\left(\ln|t|\Big|_b^1\right)\\
&= \lim_{a\to0^-}(\ln|a|-\ln 1)+\lim_{b\to0^+}(\ln 1-\ln|b|)\\
&= \lim_{a\to0^-}\ln|a|-\lim_{b\to0^+}\ln|b|=-\infty-(-\infty)\quad\text{不存在，故发散.}
\end{aligned}$$

(10)

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}>\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x^2}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=+\infty\quad(\text{发散}).$$

(11)

$$\int_0^1\frac{x^4+1}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^3+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\left(x^3+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to0^+}\left(\frac{x^4}{4}+\ln x\Big|_a^1\right) = \left(\frac14+0\right) - \lim_{a\to0^+}\left(\frac{a^4}{4}+\ln a\right) = +\infty \quad (\text{发散}).$$

(12)

$$\begin{aligned}\int_4^{20}\frac{1}{y^2-16}\,\mathrm{d}y &= \lim_{a\to4^+}\int_a^{20}\frac{1}{(y-4)(y+4)}\,\mathrm{d}y\\ &= \lim_{a\to4^+}\frac18\left(\ln\left|\frac{y-4}{y+4}\right|\Big|_a^{20}\right)\\ &= \frac18\left(\ln\frac{16}{24} - \lim_{a\to4^+}\ln\frac{a-4}{a+4}\right) = +\infty \quad (\text{发散}).\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to0^+}\left(\frac12(\ln x)^2\Big|_a^1\right)\\ &= \lim_{a\to0^+}\left(0-\frac12(\ln a)^2\right) = -\infty \quad (\text{发散}).\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} &= \lim_{b\to+\infty}\left(\ln(\ln x)\Big|_2^b\right)\\ &= \lim_{b\to+\infty}(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)) = +\infty \quad (\text{发散}).\end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{\pi}}\frac1t\mathrm{e}^{-t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t &= 2\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\left(-\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{\sqrt{\pi}}\right) = 2\left(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{\pi}}\right) \quad (\text{收敛}).\end{aligned}$$

(16)

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} &= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_3^b\right)\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{\ln 3} \quad (\text{收敛}).\end{aligned}$$

(17)

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \lim_{a\to1^+}\int_a^2\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} &= \lim_{a\to1^+}\left(\ln|\ln x|\Big|_a^2\right)\\ &= \ln(\ln 2) - \lim_{a\to1^+}\ln|\ln a| = -\infty \quad (\text{发散}).\end{aligned}$$

(18)

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln\pi}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\pi\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}\,\mathrm{d}x = \ln\pi\lim_{b\to+\infty}\left(-x^{-1}\Big|_1^b\right)$$

$$= \ln \pi \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = \ln \pi \quad (\text{收敛}).$$

(19)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x &= \lim_{B\to+\infty}\int_0^{B} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{B\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ax}(-a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}\bigg|_0^B\right) \\
&= 0-\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{b}{a^2+b^2} \quad (\text{收敛}).
\end{aligned}$$

(20)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x &\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \int_{+\infty}^{0}\frac{(1/u)\ln(1/u)}{(1+1/u^2)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{-\ln u}{u(1+1/u^2)^2}\cdot\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{-\ln u}{u^3\cdot\frac{(u^2+1)^2}{u^4}}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\frac{-u\ln u}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^{+\infty}\frac{u\ln u}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u = -I.
\end{aligned}$$

所以 $2I=0$，即 $I=0$，故积分收敛，值为 0。

例题 4.0.28 4.7-B-1

已知 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$，若 $\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-x^2-x}\mathrm{d}x=1$，求 A。

解 4.0.28.

$$\begin{aligned}
1 = \int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-x^2-x}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}+\ln A}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{4}+\ln A}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{4}+\ln A}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}(x+\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}+\ln A}\sqrt{\pi} \\
\Rightarrow A = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}} &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

例题 4.0.29 4.7-B-2

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$$

解 4.0.29.

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}} &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}} \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\sin^2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^4\theta}} + \int_{0}^{\arctan\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^4\theta-\sec^2\theta}} \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \int_{0}^{\arctan\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{2\tan\theta\sec^2\theta\mathrm{d}\theta}{\tan\theta\sec\theta} \\
&= \frac{\pi}{2} + 2\int_{0}^{\arctan\sqrt{\frac{1}{2}}} \sec\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2} + \ln\left(\sec\theta+\tan\theta\right)^2\Big|_{0}^{\arctan\sqrt{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

例题 4.0.30 4.7-B-3

$$
\int_{0}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}
$$

解 4.0.30.

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} &= \int_{1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{x}\ln x\mathrm{d}\ln x}{(1+\frac{1}{x})^2} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \\
&= -\int_{1}^{+\infty} \ln x\mathrm{d}\frac{1}{1+x} = -\frac{\ln x}{x+1}\Big|_{1}^{+\infty} + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}\ln x \\
&= \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}\ln x = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = 0 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2
\end{aligned}
$$

例题 4.0.31 4.7-B-4

$$
\int_{0}^{+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots
$$

解 4.0.31.

$$
\begin{aligned}
I_n = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x &= -\int_{0}^{+\infty} x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} \\
&= -x^n\mathrm{e}^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x^n \\
&= x\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x = nI_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$I_0 = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = \mathrm{e}^{-x}\Big|_{+\infty}^{0} = 1, I_1 = 1I_0 = 1$$

$$\Rightarrow I_n = nI_{n-1} = n!$$

例题 4.0.32 4.8-A-1

求下列曲线所围图形的面积：(1)$y = x^2$ 与 $y = 2x + 3$; (2)$y = \sqrt{x}$ 与 $y = x$; (3)$y^2 = 2x$ 与 $x = 5$;
(4)$y = x$ 与 $y = x + \sin^2 x, (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ (5) $x^2 + 9y^2 = 1$; (6)$y^2 = 1 + 2x - x^2$ 与 $x^2 + y^2 = 1$.

解 4.0.32. （1）联立 $y = x^2$ 和 $y = 2x + 3$，得 $x = -1, x = 3$，则所围成的面积为

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\mathrm{d}x &= x^2\Big|_{-1}^{3} + 3x\Big|_{-1}^{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} \\ &= 9 - 1 + (9-(-3)) - \frac{1}{3}(27+1) = \frac{32}{3}\end{aligned}$$

（2）联立 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = x$，得 $x = 0, x = 1$，则所围成的面积为

$$\begin{aligned}\int_0^1(\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

（3）联立 $y^2 = 2x$ 和 $x = 5$，得则所围成的面积为

$$\begin{aligned}2\int_0^5 \sqrt{2x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\int_0^5 \sqrt{x}\mathrm{d}x &= 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^5 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot 5\sqrt{5} = \frac{20\sqrt{10}}{3}\end{aligned}$$

（4）则所围成的面积为

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

（5）椭圆面积为

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\mathrm{d}\sin\theta = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} + \frac{\sin 2x}{4}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

（6）等效于一个半圆加一个拱形的面积

$$S = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\pi - 1 = \pi - 1$$

例题 4.0.33 4.8-A-2

求下列极坐标表示的图形围成的面积：（1）$r = 2a\cos\theta$；（2）$r = 3\cos\theta$ 和 $r = 1+\cos\theta$ 围成的公共部分的面积

解 4.0.33. （1）曲线 $r = 2a\cos\theta$ 表示一个圆，圆心在 $(a,0)$，半径为 $|a|$。其面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2a\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = a^2\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a^2(\pi/2-(-\pi/2)) = \pi a^2.$$

（2）先求两曲线的交点：由 $3\cos\theta = 1+\cos\theta$ 得 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，故 $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$。由于图形关于极轴对称，只需计算上半部分再乘以 2。在上半平面，当 $\theta\in[0,\pi/3]$ 时，$1+\cos\theta \le 3\cos\theta$，公共部分的边界为 $r = 1+\cos\theta$；当 $\theta\in[\pi/3,\pi/2]$ 时，$3\cos\theta \le 1+\cos\theta$，公共部分的边界为 $r = 3\cos\theta$。于是上半部分的面积为

$$A_{上半} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}(3\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta.$$

计算第一个积分：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/3}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{16}.\end{aligned}$$

计算第二个积分：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}9\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta &= \frac{9}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{9}{4}\int_{\pi/3}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{9}{4}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}\\ &= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}-\frac{9\sqrt{3}}{16}.\end{aligned}$$

所以

$$A_{上半} = \left(\frac{\pi}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{16}\right)+\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{9\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{5\pi}{8},$$

总面积

$$A = 2A_{上半} = \frac{5\pi}{4}.$$

例题 4.0.34 4.8-A-3

曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解 4.0.34. 曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 与 x 轴的交点为 $x = 1$ 和 $x = 2$。在区间 $[1, 2]$ 上，$y \le 0$，故所求平面图形为 x 轴下方，由曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 与 x 轴围成的区域。

将此区域绕 y 轴旋转，采用柱壳法。在 x 处取厚度为 $\mathrm{d}x$ 的竖直窄条，其高度为 $|y| = -(x-1)(x-2)$，旋转生成的柱壳半径为 x，故体积微元为

$$\mathrm{d}V = 2\pi x \cdot |y| \, \mathrm{d}x = 2\pi x \cdot [-(x-1)(x-2)] \, \mathrm{d}x.$$

于是旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 2\pi x \cdot [-(x-1)(x-2)] \, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) \, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_1^2 \\ &= 2\pi \left(\left(-\frac{16}{4} + 8 - 4 \right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1 \right) \right) \\ &= 2\pi \left(0 + \frac{1}{4} \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

故所求旋转体的体积为 $\frac{\pi}{2}$。

例题 4.0.35 4.8-B-4

求由曲线$y = \sqrt{x}$及$y = x^2$ 所围平面图形绕x 轴旋转所得旋转体的体积.

解 4.0.35. 两条曲线的交点为 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = x^2$ 的解：

$$\sqrt{x} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = x^4 \quad \Longrightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0,$$

得 $x = 0$ 或 $x = 1$，对应 $y = 0$ 和 $y = 1$，即交点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$。

在区间 $[0, 1]$ 上，有 $\sqrt{x} \ge x^2$。绕 x 轴旋转，用圆盘法（或称为“切片法”），体积微元为

$$\mathrm{d}V = \pi \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right] \mathrm{d}x = \pi (x - x^4) \, \mathrm{d}x.$$

积分得

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) \, \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \pi \cdot \frac{3}{10} = \frac{3\pi}{10}.$$

故所求旋转体的体积为 $\frac{3\pi}{10}$。

例题 4.0.36 4.8-A-5

求曲线 $y = \ln(-x^2+1)$ 上相应于 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 的弧长

解 4.0.36.

$$\begin{aligned} L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{x^2-1} \right)^2} \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-1+x^2+2}{1-x^2} \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (-1 + \frac{2}{1-x^2}) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+x} \right) \mathrm{d}x \\ &= -x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \ln|x-1|\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln|1+x|\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} = \ln 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例题 4.0.37 4.8-A-6

求曲线 $y = \int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin\theta} \mathrm{d}\theta$ 的全长，其中 $0 \leqslant x \leqslant n\pi$

解 4.0.37.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin\theta} \mathrm{d}\theta \right)^2} = \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \left(n \cdot \sqrt{\sin\frac{x}{n}} \frac{1}{n} \right)^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \sin\frac{x}{n}} \mathrm{d}x = n \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \sin\frac{x}{n}} \mathrm{d}\frac{x}{n} = n \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x} \mathrm{d}x \\ &= n \int_0^{\pi} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right) \mathrm{d}x = n \left(-2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} + 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} \right) = 4n \end{aligned}$$

例题 4.0.38 4.8-A-8

求心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ 的全长 n

解 4.0.38.

$$S = \int_0^{2\pi} r^2(\theta) \mathrm{d}\theta = a^2 \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = a^2\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= a^2(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2
\end{aligned}
$$

例题 4.0.39 4.8-B-2

一立体的底面为一半径为 R 的圆盘, 其垂直于 x 轴的截面是一等边三角形，求这个立体的体积.

解 4.0.39.

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^R \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{R^2-x^2})^2\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}\int_0^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{3}(R^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^R = \frac{4}{3}\sqrt{3}R^3
\end{aligned}
$$

例题 4.0.40 4.8-B-6

求下列平面曲线绕指定轴旋转所得旋转体的侧面积：

(1) $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$, 绕$x$ 轴；

(2) $x=a(t-\sin t)\ , y=a(1-\cos t)\ , 0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 绕直线 $y=2a$

(3) $r=a(1+\cos\theta)\ , 0\leq\theta\leq 2\pi$, 绕极轴。

解 4.0.40. (1) 曲线 $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, 绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积为

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\
&= 2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \\
&= 2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+u^2}(-du) \quad (\text{令} u=\cos x) \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}\,du = 4\pi\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,du \\
&= 4\pi\cdot\frac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^1 \\
&= 2\pi\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right).
\end{aligned}
$$

(2) 曲线为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 绕直线 $y=2a$ 旋转. 旋转半径 $R=|y-2a|=a(1+\cos t)$, 弧微分为

$$
ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt,
$$

故侧面积为

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{2\pi} 2\pi R\,ds = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1+\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt \quad (\text{利用}1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}) \\ &= 8\pi a^2\cdot\frac{4}{3} = \frac{32\pi}{3}a^2.\end{aligned}$$

(3) 曲线为心形线 $r = a(1+\cos\theta), 0\le\theta\le 2\pi$, 绕极轴旋转. 由对称性, 仅需计算上半部分 $(0\le\theta\le\pi)$ 的侧面积，上半部分上, $y = r\sin\theta$, $ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$, 故

$$\begin{aligned}S_{\text{上}} &= \int_0^{\pi} 2\pi y\,ds = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \\ &= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \quad (\text{化简得}) \\ &= 16\pi a^2\cdot\frac{2}{5} = \frac{32\pi}{5}a^2,\end{aligned}$$

所以整个侧面积为

$$S = S_{\text{上}} = \frac{32\pi}{5}a^2.$$

第五章 自用

定理 5.0.1 双元第一公式

若 $x^2+y^2=a^2$，则

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0 \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{y}=\arctan\frac{x}{y}+C$$

若 $x^2-y^2=a^2$ 或 $x^2-y^2=-a^2$，则

$$x\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{y}=\ln(x+y)+C$$

若 $x^2+y^2=a^2$，则 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0 \Rightarrow \dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{xy}=\dfrac{\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}y}{x}=0$，所以

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{y}=\int \frac{y\mathrm{d}x}{y^2}=\int \frac{-\mathrm{d}y}{x}=\int \frac{-x\mathrm{d}y}{x^2}\\ =\int \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int \frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}\\ =\int \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\mathrm{d}\frac{x}{y}=\arctan\frac{x}{y}+C\end{aligned}$$

若 $x^2-y^2=a^2$ 或 $x^2-y^2=-a^2$，则 $x\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x}$，所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y}=\int \frac{\mathrm{d}y}{x}=\int \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}=\int \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y}=\ln(x+y)+C$$

定理 5.0.2 双元第二公式

形如

$$y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y \quad y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

等都可以用 $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$ 或 $x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y$ 消元，化归成第一公式的适用情形，同样的，第一公式也可以向第二公式转化，若 $x^2 + y^2 = a^2$：

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = -\frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{y\mathrm{d}x}{y^2} = -\frac{x\mathrm{d}y}{x^2} = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2 + x^2}$$

若 $x^2 - y^2 = a^2$ 或 $x^2 - y^2 = -a^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{y\mathrm{d}x}{y^2} = \frac{x\mathrm{d}y}{x^2} = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2 - x^2}$$

若 $x^2 + y^2 = a^2$，则

$$\begin{aligned} y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y &= y\mathrm{d}x - x\left(-\frac{x\mathrm{d}x}{y}\right) = (x^2 + y^2)\frac{\mathrm{d}x}{y} \\ y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y &= y\left(\frac{-y\mathrm{d}y}{x}\right) - x\mathrm{d}y = -(x^2 + y^2)\frac{\mathrm{d}y}{x} \end{aligned}$$

若 $x^2 - y^2 = a^2$ 或 $x^2 - y^2 = -a^2$，则

$$\begin{aligned} y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y &= y\mathrm{d}x - x\left(\frac{x\mathrm{d}x}{y}\right) = (y^2 - x^2)\frac{\mathrm{d}x}{y} \\ y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y &= y\left(\frac{y\mathrm{d}y}{x}\right) - x\mathrm{d}y = (y^2 - x^2)\frac{\mathrm{d}y}{x} \end{aligned}$$

定理 5.0.3 双元第三公式

单独的 $y\mathrm{d}x$ 和 $x\mathrm{d}y$ 都可以用“加一项，减一项”的方法化归成 $\mathrm{d}(xy)$ 和公式二的情形

这里只给出其中一种：

$$\begin{aligned} y\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(y\mathrm{d}x + y\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) \\ &= \frac{1}{2}[\mathrm{d}(xy) + (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)] \end{aligned}$$

定理 5.0.4 双元第四公式

形如 $\dfrac{\mathrm{d}x}{y^3}$ 的式子可以通过第二公式化成含有 $\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的形式

若 $x^2 + y^2 = a^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^3} = \frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{1}{y^2}\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{x^3}=\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{1}{x^2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$$

若 $x^2-y^2=a^2$ 或 $x^2-y^2=-a^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^3}=\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{1}{y^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x^2-y^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{x^3}=\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{1}{x^2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2-y^2}=\frac{1}{x^2-y^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$$

例题 5.0.1

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上三阶可导，且 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=a\neq 1$，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$.

解 5.0.1. 首先由 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$ 得知 $f'(x), f(x)$ 均单调递增，所以

$$f(x+h)>f(x)+f'(\xi)(x+h-x)>f(x)+f'(x)h$$

令 $h\to+\infty$，得 $f(x)\to+\infty$，现在对已知极限变形：

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f''(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right)=1-a\neq 0$，同样可以对所求极限变形：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)$$

问题在于如何沟通 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right)=1-a$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)$，观察到它们是微分形式，所以不妨反方向利用洛必达法则。须知，洛必达法则在 $\dfrac{*}{\infty}$ 的情形中是适用的，即若 $f\to\infty, f, g$ 在 a 的某个去心邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'}{f'}$ 存在（或为无穷大，但分母不等于 0），那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g}{f}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'}{f'}$；相关证明可以参阅数分教材（如陈纪修的，卓里奇的，等等）.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f'(x)}{f''(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{xf''(x)}$$

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=A, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)=1-A, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f'(x)}{f''(x)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}=1-a$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

由于 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}=1-a\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\dfrac{xf''(x)}{f'(x)}=\dfrac{1}{1-a}$ 即 $\dfrac{1-A}{1-a}=A$，解得

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{1}{2-a}$$

例题 5.0.2 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} n^x \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$$

解 5.0.2. 根据做差的形式不难想到拉格朗日中值定理，但是如果直接凑分母 $1 = n+1-n$，那就会导致 $\xi \in (n, n+1)$ 的东西出现，而没有很好的利用上

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to 0, n \to +\infty$$

所以先化为 e 指数，用取对数之后的差分形式作为分母 $\mathrm{e}^f - \mathrm{e}^g = \mathrm{e}^\xi (f-g), \xi \in (f, g)$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^x \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} n^x \left[\mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})} - \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^x \left[\frac{\mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})} - \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}}{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1}) - n\ln(1+\frac{1}{n})}\right]\left[(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1}) - n\ln(1+\frac{1}{n})\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^x \mathrm{e}^\xi \left[(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1}) - n\ln(1+\frac{1}{n})\right]
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{e}^\xi \in \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)$，当 $n \to +\infty$ 时，$\xi \to 1$，所以:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \mathrm{e}\left[(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1}) - n\ln(1+\frac{1}{n})\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \mathrm{e}\left[\left(1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{3(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) - \left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \mathrm{e}\left[-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3(n+1)^2}-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \mathrm{e}\left[\frac{1}{2n(n+1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \mathrm{e}\left[\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{2n+1}{3n^2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \mathrm{e}\left[\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}}{2}\lim_{n\to+\infty} n^{x-2}
\end{aligned}$$

因此，极限为：

$$\lim_{n\to+\infty} n^x \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] = \begin{cases} 0 & \text{如果} x < 2 \\ \frac{\mathrm{e}}{2} & \text{如果} x = 2 \\ +\infty\text{或不存在} & \text{如果} x > 2 \end{cases}$$

例题 5.0.3

设 $f(x)=\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)\left(\tan\frac{\pi x^2}{4}-1\right)\left(\tan\frac{\pi x^3}{4}-1\right)\cdots\left(\tan\frac{\pi x^n}{4}-1\right)$，求 $f^{(n)}(x)$

解 5.0.3. 等价于给定函数 $f(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{\pi x^k}{4}-1\right)$，求 $f^{(n)}(1)$。由于当 $x=1$ 时，每个因子 $\tan\frac{\pi x^k}{4}-1=0$，因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 n 重零点。由泰勒公式，在 $x=1$ 处展开：

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+O((x-1)^{n+1}).$$

计算 $h(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^n}$。由于 $f(x)$ 是乘积形式，我们将每个因子除以 $x-1$ 有

$$\frac{f(x)}{(x-1)^n}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\tan\frac{\pi x^k}{4}-1}{x-1}.$$

取极限 $x\to 1$，每个因子的极限为导数：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi x^k}{4}-1}{x-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tan\frac{\pi x^k}{4}\right)\bigg|_{x=1}=\frac{\pi}{4}\cdot kx^{k-1}\sec^2\frac{\pi x^k}{4}\bigg|_{x=1}=\frac{\pi}{4}\cdot k\cdot 1\cdot 2=\frac{\pi k}{2}.$$

所以

$$h(1)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi^n}{2^n}\prod_{k=1}^{n}k=\frac{\pi^n}{2^n}n!\quad f^{(n)}(1)=n!\cdot h(1)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n(n!)^2.$$

当然本题目还可以先代入泰勒展开，再相乘，结果是一样的，对于第 k 个因子 $\tan\left(\frac{\pi x^k}{4}\right)-1$ 直接泰勒展开得：

$$\tan\left(\frac{\pi x^k}{4}\right)-1=\frac{\pi k}{2}(x-1)+O((x-1)^2)$$

将各因子相乘，注意每个因子都包含 $(x-1)$ 的一阶项：

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(\tan\left(\frac{\pi x^k}{4}\right)-1\right)=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\pi k}{2}(x-1)+O((x-1)^2)\right]=\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}[k(x-1)+O((x-1)^2)]$$

实际上我们只关心 $(x-1)^n$ 项的系数（因为高阶项对 $f^{(n)}(1)$ 无贡献），可得：

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)(x-1)^n+O((x-1)^{n+1})=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n n!(x-1)^n+O((x-1)^{n+1})$$

由泰勒公式：

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+O((x-1)^{n+1})$$

比较 $(x-1)^n$ 的系数：

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n n!\quad\Rightarrow\quad f^{(n)}(1)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n(n!)^2$$

例题 5.0.4

$f(x)=(x-1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[n]{x}-1)$，求 $f^{(n)}(1)$。

解 5.0.4. 由于当 $x=1$ 时，每个因子 $x^{1/k}-1=0$，因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 n 重零点。在 $x=1$ 处展开：

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+O((x-1)^{n+1}).$$

现在计算 $g(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^n}$。由于 $f(x)$ 是乘积，我们有

$$\frac{f(x)}{(x-1)^n}=\prod_{k=1}^{n}\frac{x^{1/k}-1}{x-1}.$$

取极限 $x\to 1$，每个因子的极限为导数：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{1/k}-1}{x-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{1/k}\right)\Big|_{x=1}=\frac{1}{k}\cdot x^{1/k-1}\Big|_{x=1}=\frac{1}{k}.$$

因此

$$g(1)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}=\frac{1}{n!}\quad f^{(n)}(1)=n!\cdot\frac{1}{n!}=1.$$

例题 5.0.5

函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明对于任意的 $\xi\in(0,1)$:

$$\left|\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$$

解 5.0.5. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，根据牛顿-莱布尼茨公式，对于任意 $\xi\in(0,1)$，考虑积分

$$\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\xi\left(f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=f(0)\xi+\int_0^\xi\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

交换积分次序，

$$\int_0^\xi\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^\xi\int_t^\xi f'(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^\xi(\xi-t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

所以

$$\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=f(0)\xi+\int_0^\xi(\xi-t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

代入 $\xi=1$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(0)=-\int_0^1(1-t)f'(t)\mathrm{d}t$，所以代入并分区间讨论，利用绝对值不等式，有

$$\left|\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x\right|=\begin{cases}\left|\int_0^\xi(\xi-1)tf'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left|\int_0^\xi(\xi-1)t\mathrm{d}t\right|, & 0\leqslant t\leqslant\xi\\ \left|\int_\xi^1\xi(t-1)f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left|\int_\xi^1\xi(t-1)\mathrm{d}t\right|, & \xi\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

去绝对值，只需分别计算：

$$\int_0^\xi(1-\xi)t\mathrm{d}t=(1-\xi)\cdot\frac{1}{2}\xi^2=\frac{1}{2}(1-\xi)\xi^2\qquad\int_\xi^1\xi(1-t)\mathrm{d}t=\xi\cdot\frac{1}{2}(1-\xi)^2=\frac{1}{2}\xi(1-\xi)^2.$$

利用 $\dfrac{\left|\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x\right|}{\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|}\leqslant\begin{cases}\left|\int_0^\xi(\xi-1)t\mathrm{d}t\right|, & 0\leqslant t\leqslant\xi\\ \left|\int_\xi^1\xi(t-1)\mathrm{d}t\right|, & \xi\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$ 相加得

$$\frac{\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|}{\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|}\leqslant\frac{1}{2}(1-\xi)\xi^2+\frac{1}{2}\xi(1-\xi)^2=\frac{1}{2}\xi(1-\xi)\left(\xi+(1-\xi)\right)=\frac{1}{2}\xi(1-\xi)\leqslant\frac{1}{8}.$$

这就完成了证明。

例题 5.0.6

$a_1=5, a_{n+1}=\dfrac{(1+a_n)^3-5}{3}$，计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-1}{a_n^2+a_n+1}$

解 5.0.6. 关键在于不动点方程的多重根，因为对于 $a_{n+1}=f(a_n)$，若方程 $f(x)-x=0$ 有二重根（甚至多重根）r，那么设 $g(x)=f(x)-x$，则其可以被分解出一个因式 $(x-r)^2$，此时不妨设

$$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n=(a_n-r)^2h(a_n)$$

然后就是等式两边减去 r，此时：

$$a_{n+1}-r=f(a_n)-r=(a_n-r)^2h(a_n)+a_n-r=(a_n-r)(1+(a_n-r)h(a_n))$$

在尝试裂项求和时，常常考虑 $\dfrac{1}{a_n-r}$ 的差分形式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n-r}-\frac{1}{a_{n+1}-r}&=\frac{a_{n+1}-a_n}{(a_n-r)(a_{n+1}-r)}=\frac{(a_n-r)^2h(a_n)}{(a_n-r)(a_n-r)(1+(a_n-r)h(a_n))}\\&=\frac{h(a_n)}{1+(a_n-r)h(a_n)}\end{aligned}$$

此时分母的次数一定低于 $f(a_n)$ 的次数，反观如果是一重零点，就变成

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n-r}-\frac{1}{a_{n+1}-r}&=\frac{a_{n+1}-a_n}{(a_n-r)(a_{n+1}-r)}=\frac{(a_n-r)h(a_n)}{(a_n-r)^2(1+h(a_n))}\\&=\frac{h(a_n)}{(a_n-r)(1+h(a_n))}\end{aligned}$$

此时分母次数一定等于 $f(a_n)$ 的次数，不符合题干结构。所以关注多重根，不妨通过做差来解：

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{(1+a_n)^3-3a_n-5}{3}=\frac{a_n^3+3a_n^2-4}{3}=\frac{(a_n+2)^2(a_n-1)}{3}\\
\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}-a_n}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}&=\frac{(a_n+2)^2(a_n-1)}{3(a_n+2)(a_{n+1}+2)}=\frac{a_n+2}{a_{n+1}+2}\frac{a_n-1}{3}\\
\Leftrightarrow\frac{1}{a_n+2}-\frac{1}{a_{n+1}+2}&=\frac{a_n+2}{\frac{(1+a_n)^3-5}{3}+2}\frac{a_n-1}{3}=(a_n-1)\frac{a_n+2}{(1+a_n)^3+1}\\
&=\frac{(a_n+2)(a_n-1)}{(a_n+1+1)((a_n+1)^2-(a_n+1)+1)}=\frac{a_n-1}{a_n^2+a_n+1}\\
\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-1}{a_n^2+a_n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+2}-\frac{1}{a_{n+1}+2}\right)=\frac{1}{a_1+2}=\frac{1}{7}\end{aligned}$$

第一行找出来了 -2 是多重根，之后直接除以 $(a_n+2)(a_{n+1}+2)$ 强行凑裂项，之后就出现了 $\dfrac{a_n-r}{a_{n+1}-r}$ 结构，直接代入递推公式就可以，这就是通法了。

定理 5.0.5

设 $\lambda > 1, a_0 \neq 0, a_1 = \dfrac{\lambda+\lambda^{-1}}{2}a_0$，递推关系 $a_{n+2}-(\lambda+\lambda^{-1})a_{n+1}+a_n=0$，则

$$a_n = \frac{a_0}{2}(\lambda^n+\lambda^{-n})$$

进一步的

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{a_{2^n}^2} = \frac{4}{a_0^2}\frac{1}{(\lambda-\lambda^{-1})^2}$$

注意到恒等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{(a+a^{-1})^2} = \frac{(a-a^{-1})^2}{(a^2-a^{-2})^2} &= \frac{(a+a^{-1})^2-4}{(a^2-a^{-2})^2}\\ &= \frac{(a+a^{-1})^2}{(a^2-a^{-2})^2}-\frac{4}{(a^2-a^{-2})^2}\\ &= \frac{1}{(a-a^{-1})^2}-\frac{4}{(a^2-a^{-2})^2}\end{aligned}$$

代入 $a=\lambda^{2^n}$ 得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(\lambda^{2^n}+\lambda^{-2^n})^2} = \frac{1}{(\lambda^{2^n}-\lambda^{-2^n})^2}-\frac{4}{(\lambda^{2^{n+1}}-\lambda^{-2^{n+1}})^2}\\ \Leftrightarrow &\frac{4^n}{(\lambda^{2^n}+\lambda^{-2^n})^2} = \frac{4^n}{(\lambda^{2^n}-\lambda^{-2^n})^2}-\frac{4^{n+1}}{(\lambda^{2^{n+1}}-\lambda^{-2^{n+1}})^2}\\ \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{a_{2^n}^2} = \frac{4}{a_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{(\lambda^{2^n}-\lambda^{-2^n})^2}-\frac{4^{n+1}}{(\lambda^{2^{n+1}}-\lambda^{-2^{n+1}})^2}\right) = \frac{4}{a_0^2}\frac{1}{(\lambda-\lambda^{-1})^2}\end{aligned}$$

定理 5.0.6

设 a_0 为已知量，数列 $\{a_n\}$ 满足通项公式 $a_n = C(\lambda^n - \lambda^{-n})$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{2^n}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_k}\left(\frac{1}{\lambda^k} - \frac{a_{1-k}}{a_1}\right)$$

注意到对任意整数 k，成立恒等式：

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^k - \lambda^{-k}}{\lambda^{2n} - \lambda^{-2n}} &= \frac{\lambda^n\lambda^{-n}\lambda^k - \lambda^n\lambda^{-n}\lambda^{-k}}{\lambda^{2n} - \lambda^{-2n}} \\
&= \frac{\lambda^n\lambda^{-n}\lambda^k - \lambda^n\lambda^{-n}\lambda^{-k} - (\lambda^{2n}\lambda^{-k} - \lambda^{-2n}\lambda^k) + (\lambda^{2n}\lambda^{-k} - \lambda^{-2n}\lambda^k)}{\lambda^{2n} - \lambda^{-2n}} \\
&= \frac{\lambda^n\lambda^{-n}\lambda^k + \lambda^{-2n}\lambda^k - \lambda^n\lambda^{-n}\lambda^{-k} - \lambda^{2n}\lambda^{-k} + (\lambda^{2n}\lambda^{-k} - \lambda^{-2n}\lambda^k)}{\lambda^{2n} - \lambda^{-2n}} \\
&= \frac{(\lambda^n + \lambda^{-n})(\lambda^{-n}\lambda^k) - \lambda^n\lambda^{-k}(\lambda^n + \lambda^{-n}) + (\lambda^{2n}\lambda^{-k} - \lambda^{-2n}\lambda^k)}{\lambda^{2n} - \lambda^{-2n}} \\
&= \frac{(\lambda^n + \lambda^{-n})(\lambda^{-n}\lambda^k - \lambda^n\lambda^{-k}) + (\lambda^{2n}\lambda^{-k} - \lambda^{-2n}\lambda^k)}{\lambda^{2n} - \lambda^{-2n}} \\
&= -\frac{\lambda^n\lambda^{-k} - \lambda^{-n}\lambda^k}{\lambda^n - \lambda^{-n}} + \frac{\lambda^{2n}\lambda^{-k} - \lambda^{-2n}\lambda^k}{\lambda^{2n} - \lambda^{-2n}} \\
&= \frac{\lambda^{2n-k} - \lambda^{-(2n-k)}}{\lambda^{2n} - \lambda^{-2n}} - \frac{\lambda^{n-k} - \lambda^{-(n-k)}}{\lambda^n - \lambda^{-n}}
\end{aligned}$$

赋值 $n = 2^{n-1}$，保留 k，那么

$$\frac{\lambda^k - \lambda^{-k}}{\lambda^{2^n} - \lambda^{-2^n}} = \frac{\lambda^{2^n-k} - \lambda^{-(2^n-k)}}{\lambda^{2^n} - \lambda^{-2^n}} - \frac{\lambda^{2^{n-1}-k} - \lambda^{-(2^{n-1}-k)}}{\lambda^{2^{n-1}} - \lambda^{-2^{n-1}}}$$

所以当数列的通项是 $a_n = C(\lambda^n - \lambda^{-n})$ 时，即:

$$\begin{aligned}
\frac{a_k}{a_{2^n}} = \frac{a_{2^n-k}}{a_{2^n}} - \frac{a_{2^{n-1}-k}}{a_{2^{n-1}}} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{2^n}} &= \frac{1}{a_k}\left(\frac{a_{2^n-k}}{a_{2^n}} - \frac{a_{2^{n-1}-k}}{a_{2^{n-1}}}\right) \\
\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{2^n}} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{2^n-k}}{a_{2^n}} - \frac{a_{2^{n-1}-k}}{a_{2^{n-1}}}\right) \\
\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{2^n}} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_k}\left(\frac{1}{\lambda^k} - \frac{a_{1-k}}{a_1}\right)
\end{aligned}$$

此时需将 a_n 的定义域延拓至整数集合，相应地，若 $a_n = C(\lambda^n - (-\lambda^{-1})^n)$，则只需取 k 为偶数 $2k$，这样就回到了本题的情形：

定理 5.0.7

设 a_0 为已知量，数列 $\{a_n\}$ 满足通项公式 $a_n = C(\lambda^n - (-\lambda^{-1})^n)$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{2^n}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{2k}}\left(\frac{1}{\lambda^{2k}} - \frac{a_{1-2k}}{a_1}\right)$$

例题 5.0.7

$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，求

例题 5.0.8

$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x = \xi f(\xi)$$

解 5.0.7. 设 $f(x)$ 的原函数是 $F(x)$，则要证明的结论等价为：

$$\begin{aligned}\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x = \xi F(\xi) \Leftrightarrow F(1) - F(\xi) &= \xi F'(\xi) \\ \Leftrightarrow \xi F'(\xi) + F(\xi) &= F(1) \\ \Leftrightarrow (\xi F(\xi))' &= F(1)\end{aligned}$$

所以辅助函数就是 $g(x) = xF(x)$，它在 $[0,1]$ 内也连续，要证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $g'(\xi) = g(1)$，即：

$$g'(\xi) = \frac{g(1) - 0}{1 - 0} = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}$$

这正是拉格朗日中值定理的应用。

例题 5.0.9

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1) = 0$，$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = 1$，证明：至少存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi) = 2$。

解 5.0.8.

$$1 = \int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}f(x) = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -1$$

所以设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则有 $F(1) - F(0) = -1$，使用泰勒公式，存在 $\xi \in (0,1)$ 使得:

$$F(0) = F(1) + F'(1)(0-1) + \frac{1}{2}F''(\xi) \Rightarrow F''(\xi) = f'(\xi) = 2$$

例题 5.0.10

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x}\mathrm{d}x$$

解 5.0.9.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x^2-x^0}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^2 x^y\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2\int_0^1 x^y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \ln|y+1|\Big|_0^2 \\
&= \ln 3
\end{aligned}
$$

例题 5.0.11

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

解 5.0.10.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\arctan(\cos x)\\ &= -x\arctan\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\cos x\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\sin x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan a\sin x\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}I'(a) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan a\sin x\mathrm{d}x\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\arctan a\sin x\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+a^2\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(a^2+1)-a^2\cos^2 x}\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\cos x}{(a^2+1)-a^2\cos^2 x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+1)-a^2t^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\frac{a^2+1}{a^2}-t^2}\\ &= \frac{1}{2a\sqrt{a^2+1}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}+t}{\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}-t}\right|\Big|_0^1 = \frac{\ln\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)}{a\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}I(1) &= \int_0^1 I'(a)\mathrm{d}a\\ &= \int_0^1 \frac{\ln\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)}{a\sqrt{a^2+1}}\mathrm{d}a\\ &= -\ln(\sqrt{1+a^2}+a)\ln\left(\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{a}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{a}\right)}{\sqrt{1+a^2}}\mathrm{d}a\\ &= -\ln^2(1+\sqrt{2}) + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{a}\right)}{\sqrt{1+a^2}}\mathrm{d}a\\ &= -\ln^2(1+\sqrt{2}) + \int_1^{\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)}{a\sqrt{1+a^2}}\mathrm{d}a\\ &= -\ln^2(1+\sqrt{2}) + I(\infty) - I(1)\end{aligned}$$

于是

$$I(1) = -\frac{1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2}) + \frac{I(\infty)}{2} = -\frac{1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi^2}{8}$$

例题 5.0.12

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

解 5.0.11.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\arctan(\cos x)\\
&= -x\arctan\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\cos x\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{\cos x}{1+y^2\cos^2 x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+y^2\cos^2 x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\sin x}{1+y^2(1-\sin^2 x)}\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\sin x}{(\sqrt{1+y^2})^2-(y\sin x)^2}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2y\sqrt{1+y^2}}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}+y\sin x}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}-y\sin x}\right)\mathrm{d}\sin x\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 \frac{\ln(y+\sqrt{1+y^2})}{y\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y \xlongequal{y=\frac{t^2-1}{2t}(\text{万能代换})} 2\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \ln t\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{1+\sqrt{2}} \ln t\,\mathrm{d}\ln\frac{t-1}{t+1}\\
&= -\ln^2(1+\sqrt{2}) - \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{t}\ln\frac{t-1}{t+1}\mathrm{d}t \quad \text{令}\frac{t-1}{t+1}=m\\
&= -\ln^2(1+\sqrt{2}) - \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1-m}{1+m}\ln\frac{\frac{1+m}{1-m}-1}{\frac{1+m}{1-m}+1}\mathrm{d}\frac{1+m}{1-m}\\
&= -\ln^2(1+\sqrt{2}) - 2\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{\ln m}{1-m^2}\mathrm{d}m = -\ln^2(1+\sqrt{2}) - 2\int_{+\infty}^{\sqrt{2}+1} \frac{\ln\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}}\mathrm{d}\frac{1}{u}\\
&= -\ln^2(1+\sqrt{2}) - 2\int_{+\infty}^{\sqrt{2}+1} \frac{\ln u}{u^2-1}\mathrm{d}u = -\ln^2(1+\sqrt{2}) + 2\int_{\sqrt{2}+1}^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2-1}\mathrm{d}u\\
&= -\ln^2(1+\sqrt{2}) + 2\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t - 2\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2}) + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t \xlongequal{t\leftarrow\frac{1}{t}} -\frac{1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2}) - \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\ln t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2}) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\\
&= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\ln^2(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

第六章 积分表

6.1 含有 $ax+b$ 的积分

例题 6.1.1

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

例题 6.1.2

$$\int (ax+b)^n \mathrm{d}x$$

$$\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int (ax+b)^n \mathrm{d}(ax+b) = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

例题 6.1.3

$$\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{ax+b}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}\int \mathrm{d}x - \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} \\ &= \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C.\end{aligned}$$

例题 6.1.4

$$\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{ax^2}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{ax^2+bx-bx}{ax+b}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a}\int\left(x-\frac{bx}{ax+b}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int\left(x-\frac{bx+\frac{b^2}{a}-\frac{b^2}{a}}{ax+b}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int\left(x-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a}\frac{1}{ax+b}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int x\mathrm{d}x-\frac{b}{a^2}\int\mathrm{d}x+\frac{b^2}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b} \\
&= \frac{x^2}{2a}-\frac{bx}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}\ln|ax+b|+C.
\end{aligned}
$$

例题 6.1.5

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)}$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)} &= \frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{ax+b}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b}\left(\ln|x|-\ln|ax+b|\right)+C = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|+C.
\end{aligned}
$$

例题 6.1.6

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)}$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)} &= \int\left(\frac{-\frac{a}{b^2}x+\frac{1}{b}}{x^2}+\frac{\frac{a^2}{b^2}}{ax+b}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b}\int\left(\frac{a}{x}-\frac{a^2}{ax+b}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b}\left(a\ln|x|-a\ln|ax+b|+\frac{1}{x}\right)+C \\
&= \frac{a}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|+\frac{1}{bx}+C.
\end{aligned}
$$

例题 6.1.7

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(ax+b)^2}$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{x\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} &= \int\frac{x+\frac{b}{a}-\frac{b}{a}}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int\frac{1}{a}\left(\frac{1}{ax+b}-\frac{b}{(ax+b)^2}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} - \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} \\
&= \frac{1}{a^2}\ln|ax+b| + \frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{ax+b} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.1.8

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(ax+b)^2}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2x^2\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2x^2+2abx+b^2-2abx-b^2}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}\int \left(1-\frac{2abx+b^2}{(ax+b)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \left(1-\frac{2abx+2b^2-b^2}{(ax+b)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}\int \left(1-\frac{2b}{ax+b}+\frac{b^2}{(ax+b)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{a^2} - \frac{2b}{a^3}\ln|ax+b| - \frac{b^2}{a^3}\cdot\frac{1}{ax+b} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.1.9

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)^2}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)^2} &= \frac{1}{b^2}\int \frac{b^2}{x(ax+b)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2}\int \left(\frac{1}{x}-\frac{a^2x+2ab}{(ax+b)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b^2}\int \left(\frac{1}{x}-\frac{a^2x+ab+ab}{(ax+b)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2}\int \left(\frac{1}{x}-\frac{a}{ax+b}-\frac{ab}{(ax+b)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b^2}\left(\ln|x|-\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right)+C \\
&= \frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + \frac{1}{b(ax+b)} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.1.10

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(ax+b)}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b} + C.$$

例题 6.1.11

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(ax+b)}{(ax+b)^3} = -\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{(ax+b)^2} + C.$$

6.2 含有$\sqrt{ax+b}$的积分

例题 6.2.1

$$\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{1/2}\,\mathrm{d}(ax+b) = \frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2} + C.$$

例题 6.2.2

$$\int x\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a^2}\int ax\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a^2}\int (ax+b-b)\sqrt{ax+b}\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a^2}\int \left((ax+b)^{3/2} - b(ax+b)^{1/2}\right)\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\frac{2}{5}(ax+b)^{5/2} - \frac{2b}{3}(ax+b)^{3/2}\right) + C \\
&= \frac{2(ax+b)^{3/2}(3ax-2b)}{15a^2} + C.
\end{aligned}$$

例题 6.2.3

$$\int x^2\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int x^2\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}ax \\
&= \int \left(\frac{ax+b-b}{a}\right)^2\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a}\int \left(\frac{(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2}{a^2}\right)\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a^3}\int \left((ax+b)^{5/2} - 2b(ax+b)^{3/2} + b^2(ax+b)^{1/2}\right)\mathrm{d}(ax+b)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^3}\left(\frac{2}{7}(ax+b)^{7/2} - \frac{4b}{5}(ax+b)^{5/2} + \frac{2b^2}{3}(ax+b)^{3/2}\right) + C \\
&= \frac{2(ax+b)^{3/2}(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)}{105a^3} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.2.4

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{ax+b}{x\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x = \int \frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} + \int \frac{b\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} \\
&= 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} \\
&= 2\sqrt{ax+b} + b\int \left(\frac{\sqrt{ax+b}}{x} - \frac{a}{\sqrt{ax+b}}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

对于后一项积分，需分情况讨论：
当 $b>0$ 时，令 $\sqrt{ax+b}=t$，则 $x=\frac{t^2-b}{a}$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{a}\mathrm{d}t$，有

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} &= \int \frac{1}{\frac{t^2-b}{a}}\cdot\frac{2t}{a}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-b} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\dfrac{t-\sqrt{b}}{t+\sqrt{b}}\right| + C, & b>0, \\ -\dfrac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\dfrac{t}{\sqrt{-b}} + C, & b<0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此原积分为

$$
\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{ax+b} + b\cdot\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C_1, & b>0, \\ -\dfrac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\dfrac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{-b}} + C_1, & b<0. \end{cases}
$$

若 $b=0$，则积分简化为 $\int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{a}\sqrt{x}+C$.

例题 6.2.5

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} + C.$$

后一项积分同上讨论。

例题 6.2.6

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{-1/2}\,\mathrm{d}(ax+b) = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C.$$

例题 6.2.7

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} &= \frac{1}{a}\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\,\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{\frac{ax+b-b}{a}}{\sqrt{ax+b}}\,\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a^2}\int \left(\sqrt{ax+b} - \frac{b}{\sqrt{ax+b}}\right)\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\frac{2}{3}(ax+b)^{3/2} - 2b\sqrt{ax+b}\right) + C \\
&= \frac{2(ax-2b)\sqrt{ax+b}}{3a^2} + C.
\end{aligned}$$

例题 6.2.8

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} &= \frac{1}{a}\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}\,\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{\frac{(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2}{a^2}}{\sqrt{ax+b}}\,\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a^3}\int \left((ax+b)^{3/2} - 2b\sqrt{ax+b} + b^2(ax+b)^{-1/2}\right)\mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a^3}\left(\frac{2}{5}(ax+b)^{5/2} - \frac{4b}{3}(ax+b)^{3/2} + 2b^2\sqrt{ax+b}\right) + C \\
&= \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{ax+b}}{15a^3} + C.
\end{aligned}$$

例题 6.2.9

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C, & b>0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{-b}} \arctan\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} + C, & b<0. \end{cases}$$

注：当 $b>0$ 时，令 $t=\sqrt{ax+b}$，则 $x=\frac{t^2-b}{a}$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{a}\mathrm{d}t$，代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} = \int \frac{1}{\frac{t^2-b}{a}} \cdot \frac{2t}{a} \cdot \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-b} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{b}}{t+\sqrt{b}}\right| + C.$$

当 $b<0$ 时，类似可得反正切形式。

例题 6.2.10

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} + C.$$

其中后一项积分如上所述。

6.3 含有 x^2+a^2 的积分

例题 6.3.1

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad (a>0).$$

例题 6.3.2

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

例题 6.3.3

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+a^2)}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+a^2)} &= \frac{1}{a^2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+a^2}\right)\mathrm{d}x\\&= \frac{1}{a^2}\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\right)+C\\&= \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right|+C.\end{aligned}$$

例题 6.3.4

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2+a^2)}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2+a^2)} &= \frac{1}{a^2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)\mathrm{d}x\\&= \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)+C\\&= -\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a}+C.\end{aligned}$$

例题 6.3.5

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a>0,\ |x|\neq a).$$

例题 6.3.6

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2|+C.$$

例题 6.3.7

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-a^2)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-a^2)} = \frac{1}{a^2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2-a^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2|\right) + C \\
&= \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{|x^2-a^2|}}\right| + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.3.8

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-a^2)}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-a^2)} &= \frac{1}{a^2}\int\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-a^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right) + C \\
&= \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.3.9

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(x^2-a^2)}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(x^2-a^2)} &= \frac{1}{a^2}\int\left(-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^2x} + \frac{x}{a^2(x^2-a^2)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{a^2}\ln|x| + \frac{1}{2a^2}\ln|x^2-a^2|\right) + C \\
&= \frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{a^4}\ln|x| + \frac{1}{2a^4}\ln|x^2-a^2| + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.3.10

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

利用递推公式：

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

其中

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例题 6.3.11

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n}$$

$$J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

利用递推公式：

$$J_n = -\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} J_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

其中

$$J_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

6.4 含有 ax^2+bx+c 的积分

例题 6.4.1

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} &= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.\end{aligned}$$

令 $t = x + \frac{b}{2a}$，$\Delta = b^2 - 4ac$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

分情况讨论：

1. 若 $\Delta < 0$，则 $4ac - b^2 > 0$，记 $k^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{k}\arctan\frac{t}{k} + C = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C.$$

2. 若 $\Delta = 0$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{at} + C = -\frac{2}{2ax+b} + C.$$

3. 若 $\Delta>0$，则分母可分解为两个不同实根 x_1,x_2，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right|+C.$$

例题 6.4.2

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}&=\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x-\frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}.\end{aligned}$$

其中

$$\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\ln|ax^2+bx+c|+C_1,$$

而 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$ 的结果如上所述。因此

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c|-\frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}+C.$$

具体形式根据判别式代入即可。

6.5 含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ 的积分

例题 6.5.1

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}&\xlongequal{x=a\tan t}\int\frac{a\sec^2 t}{\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}}\mathrm{d}t=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t\\&=\int\sec t\,\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C\\&\xlongequal{t=\arctan(x/a)}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C'\quad(C'=C-\ln a).\end{aligned}$$

例题 6.5.2

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \xlongequal{u=x^2+a^2} \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}+C = \sqrt{x^2+a^2}+C.$$

例题 6.5.3

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} &\xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{a^2\tan^2 t\cdot a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = a^2\int \tan^2 t\sec t\,\mathrm{d}t \\
&= a^2\int (\sec^2 t-1)\sec t\,\mathrm{d}t = a^2\left(\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t - \int \sec t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= a^2\left(\frac{1}{2}\sec t\tan t + \frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t| - \ln|\sec t+\tan t|\right)+C \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\sec t\tan t - \ln|\sec t+\tan t|\right)+C \\
&\xlongequal{t=\arctan(x/a)} \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\cdot\frac{x}{a} - \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|\right)+C \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C'.
\end{aligned}$$

例题 6.5.4

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} &\xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{a\sec^2 t}{a\tan t\cdot a\sec t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int \frac{\sec t}{\tan t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int \csc t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\ln|\csc t-\cot t|+C \\
&\xlongequal{t=\arctan(x/a)} \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}-\frac{a}{x}\right|+C \\
&= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x}\right|+C.
\end{aligned}$$

例题 6.5.5

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} \xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{a\sec^2 t}{a^2\tan^2 t\cdot a\sec t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int \frac{\sec t}{\tan^2 t}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int \csc t \cot t \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a^2}\csc t + C \\
&\xlongequal{t=\arctan(x/a)} -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.5.6

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} &\xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{a\sec^2 t}{(a^3\sec^3 t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int \cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a^2}\sin t + C \xlongequal{t=\arctan(x/a)} \frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.5.7

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} &\xlongequal{u=x^2+a^2} \frac{1}{2}\int u^{-3/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot(-2)u^{-1/2} + C = -\frac{1}{\sqrt{u}} + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.5.8

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} &\xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{a^2\tan^2 t\cdot a\sec^2 t}{(a^3\sec^3 t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int \frac{\tan^2 t}{\sec t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int \sin t \tan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int (\sec t - \cos t)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}(\ln|\sec t + \tan t| - \sin t) + C \\
&\xlongequal{t=\arctan(x/a)} \frac{1}{a}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{a}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| - \frac{x}{a\sqrt{x^2+a^2}} + C'.
\end{aligned}
$$

例题 6.5.9

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\tan t} \int a\sec t\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}(\sec t\tan t+\ln|\sec t+\tan t|)+C\\ &\xlongequal{t=\arctan(x/a)} \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\cdot\frac{x}{a}+\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|\right)+C\\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C'.\end{aligned}$$

例题 6.5.10

$$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=x^2+a^2} \frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C = \frac{1}{3}(x^2+a^2)^{3/2}+C.$$

例题 6.5.11

$$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\tan t} \int a^2\tan^2 t\cdot a\sec t\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t = a^4\int\tan^2 t\sec^3 t\,\mathrm{d}t\\ &= a^4\int(\sec^2 t-1)\sec^3 t\,\mathrm{d}t = a^4\left(\int\sec^5 t\,\mathrm{d}t-\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

利用递推公式或分部积分，最终可得：

$$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

例题 6.5.12

$$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\tan t} \int\frac{a\sec t}{a\tan t}\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t = a\int\frac{\sec^3 t}{\tan t}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= a\int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t = a\int \frac{1}{\cos^2 t\sin t}\mathrm{d}t \\
&= a\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t\sin t}\mathrm{d}t = a\int\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{\cos t}{\sin t}\right)\mathrm{d}t \\
&= a\left(\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t + \int \cot t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= a\left(\sec t + \ln|\sin t|\right) + C \\
&\xlongequal{t=\arctan(x/a)} a\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right|\right) + C \\
&= \sqrt{x^2+a^2} + a\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.5.13

$$
\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{a\sec t}{a^2\tan^2 t}\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int\frac{\sec^3 t}{\tan^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int\frac{1}{\cos t\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\sin^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int\left(\frac{\sin t}{\cos t}+\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\left(\int \tan t\,\mathrm{d}t + \int \cot t\csc t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(-\ln|\cos t| - \csc t\right) + C \\
&\xlongequal{t=\arctan(x/a)} \frac{1}{a}\left(-\ln\left|\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\right| - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{ax} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.5.14

$$
\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \int (x^2+a^2)^{3/2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\tan t} \int (a^2\sec^2 t)^{3/2}\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= a^4\int \sec^5 t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

利用递推公式：

$$\int \sec^n t\,\mathrm{d}t = \frac{\sec^{n-2} t\tan t}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} t\,\mathrm{d}t,$$

可得：

$$\begin{aligned}\int \sec^5 t\,\mathrm{d}t &= \frac{\sec^3 t\tan t}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sec^3 t\tan t}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sec t\tan t}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t|\right) + C.\end{aligned}$$

代回并整理得：

$$\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

例题 6.5.15

$$\int \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x}\mathrm{d}x \xlongequal{u=x^2+a^2} \frac{1}{2}\int \frac{u^{3/2}}{u-a^2}\mathrm{d}u.$$

然后进行有理化代换或分部积分，最终可得：

$$\int \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x^2+a^2)^{3/2} + a^2\sqrt{x^2+a^2} - a^3\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C.$$

例题 6.5.16

$$\int \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{a^3\sec^3 t}{a^2\tan^2 t}\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{\sec^5 t}{\tan^2 t}\mathrm{d}t \\ &= a^2\int \frac{\sec^3 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1}{\cos^3 t\sin^2 t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

该积分较为复杂，最终表达式为：

$$\int \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

例题 6.5.17

$$\int x\sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=x^2+a^2} \frac{1}{2}\int u^{3/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}u^{5/2}+C = \frac{1}{5}(x^2+a^2)^{5/2}+C.$$

例题 6.5.18

$$\int x^2\sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \int x^2(x^2+a^2)^{3/2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\tan t} \int a^2\tan^2 t\cdot a^3\sec^3 t\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= a^6\int \tan^2 t\sec^5 t\,\mathrm{d}t = a^6\int(\sec^2 t-1)\sec^5 t\,\mathrm{d}t \\ &= a^6\left(\int\sec^7 t\,\mathrm{d}t-\int\sec^5 t\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

利用递推公式，最终可得：

$$\int x^2\sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{48}(8x^4+26a^2x^2+33a^4)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{5a^6}{16}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

6.6 含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的积分

例题 6.6.1

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &\xlongequal{x=a\sec t} \int\frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}} = \int\frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t \\ &= \int\sec t\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t+\tan t|+C \\ &\xlongequal{t=\arccos(a/x)} \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C \\ &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C' \quad (C'=C-\ln a).\end{aligned}$$

注意：通常写作 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$

例题 6.6.2

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{u=x^2-a^2} \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u}+C = \sqrt{x^2-a^2}+C.$$

例题 6.6.3

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &\xlongequal{x=a\sec t} \int \frac{a^2\sec^2 t\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}} = \int \frac{a^3\sec^3 t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t \\ &= a^2\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{1}{2}\sec t\tan t+\frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t|\right)+C \\ &\xlongequal{t=\arccos(a/x)} a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|\right)+C \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C'.\end{aligned}$$

例题 6.6.4

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} &\xlongequal{x=a\sec t} \int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\sec t\cdot a\tan t} = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}t = \frac{t}{a}+C \\ &\xlongequal{t=\arccos(a/x)} \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C.\end{aligned}$$

也可写作：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+C.$

例题 6.6.5

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} &\xlongequal{x=a\sec t} \int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a^2\sec^2 t\cdot a\tan t} = \frac{1}{a^2}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\sin t+C \\ &\xlongequal{t=\arccos(a/x)} \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C.\end{aligned}$$

例题 6.6.6

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} \xlongequal{x=a\sec t} \int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{(a^3\tan^3 t)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\sec t}{\tan^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2}\int \csc t \cot t \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a^2}\csc t + C \\
&\xlongequal{t=\arccos(a/x)} -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + C = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.6.7

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} &\xlongequal{u=x^2-a^2} \frac{1}{2}\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot(-2)u^{-1/2} + C = -\frac{1}{\sqrt{u}} + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.6.8

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} &\xlongequal{x=a\sec t} \int \frac{a^2\sec^2 t\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{(a^3\tan^3 t)} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^3 t}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\cos t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int \left(\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(\int \tan t\,\mathrm{d}t + \int \cot t\csc t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{a}(-\ln|\cos t| - \csc t) + C \\
&\xlongequal{t=\arccos(a/x)} \frac{1}{a}\left(-\ln\left|\frac{a}{x}\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a}\right| - \frac{x}{a\sqrt{x^2-a^2}} + C \\
&= \frac{1}{a}\ln|x| - \frac{x}{a\sqrt{x^2-a^2}} + C'.
\end{aligned}
$$

例题 6.6.9

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sec t} \int \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2}\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t = \int a\tan t\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t \\
&= a^2\int \sec t\tan^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \sec t(\sec^2 t - 1)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$= a^2\left(\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t - \int \sec t\,\mathrm{d}t\right).$$

利用 $\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sec t\tan t + \ln|\sec t + \tan t|) + C$ 和 $\int \sec t\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t + \tan t| + C$，得

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = a^2\left(\frac{1}{2}\sec t\tan t - \frac{1}{2}\ln|\sec t + \tan t|\right) + C.$$

代回 $t = \arccos(a/x)$，$\sec t = x/a$，$\tan t = \sqrt{x^2-a^2}/a$：

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x &= a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|\right) + C \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C'.\end{aligned}$$

例题 6.6.10

$$\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=x^2-a^2} \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{3/2} + C.$$

例题 6.6.11

$$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sec t} \int a^2\sec^2 t\cdot a\tan t\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t = a^4\int \sec^3 t\tan^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= a^4\int \sec^3 t(\sec^2 t - 1)\,\mathrm{d}t = a^4\left(\int \sec^5 t\,\mathrm{d}t - \int \sec^3 t\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

利用递推公式计算，最终可得：

$$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

例题 6.6.12

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sec t} \int \frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t = a\int \tan^2 t\,\mathrm{d}t = a\int (\sec^2 t - 1)\,\mathrm{d}t \\ &= a(\tan t - t) + C\end{aligned}$$

$$\xlongequal{t=\arccos(a/x)} a\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}-\arccos\frac{a}{x}\right)+C$$
$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

也可写作：$\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-a^2}-a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+C.$

例题 6.6.13

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sec t}\int\frac{a\tan t}{a^2\sec^2 t}\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int\frac{\tan^2 t}{\sec t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{a}\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int(\sec t-\cos t)\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{a}(\ln|\sec t+\tan t|-\sin t)+C\\ &\xlongequal{t=\arccos(a/x)}\frac{1}{a}\left(\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)+C\\ &=\frac{1}{a}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax}+C'.\end{aligned}$$

例题 6.6.14

$$\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x &=\int(x^2-a^2)^{3/2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\sec t}\int(a^2\tan^2 t)^{3/2}\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t\\ &=\int a^3|\tan^3 t|\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t\quad(\text{假设}x>a>0,\text{则}\tan t>0)\\ &=a^4\int\tan^4 t\sec t\,\mathrm{d}t=a^4\int\tan^2 t\cdot\tan^2 t\sec t\,\mathrm{d}t\\ &=a^4\int(\sec^2 t-1)\sec t\tan^2 t\,\mathrm{d}t=a^4\left(\int\sec^3 t\tan^2 t\,\mathrm{d}t-\int\sec t\tan^2 t\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

利用递推，最终可得：

$$\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

例题 6.6.15

$$\int\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sec t} \int \frac{a^3\tan^3 t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$
$$= a^3\int \tan^4 t\,\mathrm{d}t = a^3\int (\sec^2 t-1)^2\,\mathrm{d}t = a^3\int (\sec^4 t - 2\sec^2 t + 1)\,\mathrm{d}t.$$

计算各项：

$$\int \sec^4 t\,\mathrm{d}t = \int \sec^2 t\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}(\tan t) = \tan t + \frac{1}{3}\tan^3 t + C,$$
$$\int \sec^2 t\,\mathrm{d}t = \tan t + C, \qquad \int 1\,\mathrm{d}t = t + C.$$

所以

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{x}\,\mathrm{d}x = a^3\left(\tan t + \frac{1}{3}\tan^3 t - 2\tan t + t\right) + C = a^3\left(t - \tan t + \frac{1}{3}\tan^3 t\right) + C.$$

代回 $t=\arccos(a/x)$，$\tan t = \sqrt{x^2-a^2}/a$：

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{x}\,\mathrm{d}x = a^3\left(\arccos\frac{a}{x} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)^3\right) + C$$
$$= a^3\arccos\frac{a}{x} - a^2\sqrt{x^2-a^2} + \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{3/2} + C.$$

例题 6.6.16

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{3}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

例题 6.6.17

$$\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=x^2-a^2} \frac{1}{2}\int u^{3/2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}u^{5/2} + C = \frac{1}{5}(x^2-a^2)^{5/2} + C.$$

例题 6.6.18

$$\int x^2\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \int x^2(x^2-a^2)^{3/2}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x=a\sec t} \int a^2\sec^2 t\cdot a^3\tan^3 t\cdot a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t \\
&= a^6\int \sec^3 t\tan^4 t\,\mathrm{d}t = a^6\int \sec^3 t(\sec^2 t-1)^2\,\mathrm{d}t \\
&= a^6\int \sec^3 t(\sec^4 t-2\sec^2 t+1)\,\mathrm{d}t \\
&= a^6\left(\int \sec^7 t\,\mathrm{d}t - 2\int \sec^5 t\,\mathrm{d}t + \int \sec^3 t\,\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}
$$

利用递推公式，可得最终表达式，但较冗长。通常用分部积分或递推，此处略去详细步骤。

例题 6.6.19

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} &\xlongequal{x=a\sin t} \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}} = \int \frac{a\cos t}{a\cos t}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C \\
&\xlongequal{t=\arcsin(x/a)} \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (|x|<a).
\end{aligned}
$$

也可以表示为：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

例题 6.6.20

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \xlongequal{u=a^2-x^2} \frac{1}{2}\int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u = -\sqrt{u}+C = -\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例题 6.6.21

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} &\xlongequal{x=a\sin t} \int \frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}} = \int \frac{a^3\sin^2 t\cos t}{a\cos t}\mathrm{d}t \\
&= a^2\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{2}(t-\sin t\cos t)+C \\
&\xlongequal{t=\arcsin(x/a)} \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.
\end{aligned}
$$

例题 6.6.22

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}} &\xlongequal{x=a\sin t} \int\frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a\sin t\cdot a\cos t}=\frac{1}{a}\int\csc t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\ln|\csc t-\cot t|+C \\
&\xlongequal{t=\arcsin(x/a)} \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.
\end{aligned}
$$

也可写作：$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.$

例题 6.6.23

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} &\xlongequal{x=a\sin t} \int\frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t}=\frac{1}{a^2}\int\csc^2 t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2}\cot t+C \\
&\xlongequal{t=\arcsin(x/a)} -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C.
\end{aligned}
$$

例题 6.6.24

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} &\xlongequal{x=a\sin t} \int\frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{(a^3\cos^3 t)}=\frac{1}{a^2}\int\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\tan t+C \\
&\xlongequal{t=\arcsin(x/a)} \frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.
\end{aligned}
$$

例题 6.6.25

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\xlongequal{u=a^2-x^2}\frac{1}{2}\int\frac{-\mathrm{d}u}{u^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\cdot(-2)u^{-1/2}+C$$
$$=\frac{1}{\sqrt{u}}+C=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

例题 6.6.26

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\xlongequal{x=a\sin t}\int\frac{a^2\sin^2t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t}{(a^3\cos^3t)}=\frac{1}{a}\int\frac{\sin^2t}{\cos^2t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int\tan^2t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{a}\int(\sec^2t-1)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}(\tan t-t)+C$$
$$\xlongequal{t=\arcsin(x/a)}\frac{1}{a}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}\right)+C.$$

例题 6.6.27

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\sin t}\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t=\int a\cos t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$=a^2\int\cos^2t\,\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$$
$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$
$$\xlongequal{t=\arcsin(x/a)}\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例题 6.6.28

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{u=a^2-x^2}\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,(-\mathrm{d}u)=-\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C$$
$$=-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}+C.$$

例题 6.6.29

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sin t} \int a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = a^4\int \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= a^4\int \frac{1}{4}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C \\
&= \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\cdot 2\sin 2t\cos 2t\right)+C = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\cos 2t\right)+C.
\end{aligned}$$

利用 $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$，$\cos 2t = 1-2\sin^2 t = 1-2\frac{x^2}{a^2}$，代入化简得：

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{a^4}{8}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\cdot\left(1-2\frac{x^2}{a^2}\right)\right)+C \\
&= \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2}\,(a^2-2x^2)+C.
\end{aligned}$$

也可整理为：

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

例题 6.6.30

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sin t} \int\frac{a\cos t}{a\sin t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = a\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&= a\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = a\int(\csc t-\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= a\left(\ln|\csc t-\cot t|+\cos t\right)+C \\
&\xlongequal{t=\arcsin(x/a)} a\left(\ln\left|\frac{a}{x}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C \\
&= a\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+\sqrt{a^2-x^2}+C.
\end{aligned}$$

例题 6.6.31

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sin t} \int \frac{a\cos t}{a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int \cot^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int (\csc^2 t - 1)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}(-\cot t - t) + C \\
&\xlongequal{t=\arcsin(x/a)} -\frac{1}{a}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \arcsin\frac{x}{a}\right) + C \\
&= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{ax} - \frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a} + C.
\end{aligned}
$$

例题 6.6.32

$$
\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \int (a^2-x^2)^{3/2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin t} \int (a^2\cos^2 t)^{3/2}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int a^3\cos^3 t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = a^4\int \cos^4 t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

利用 $\cos^4 t = \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t) = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right) = \frac{1}{8}(3+4\cos 2t+\cos 4t)$，所以

$$
\int \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int (3+4\cos 2t+\cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left(3t+2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right) + C.
$$

又 $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$，$\sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t = 2\cdot\frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\cdot\left(1-2\frac{x^2}{a^2}\right)$，代入并整理得：

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{a^4}{8}\left(3\arcsin\frac{x}{a} + \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\left(5-\frac{2x^2}{a^2}\right)\right) + C \\
&= \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2}(5a^2-2x^2) + C.
\end{aligned}
$$

也可写作：

$$
\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.
$$

例题 6.6.33

$$
\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x}\,\mathrm{d}x
$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin t} \int \frac{a^3\cos^3 t}{a\sin t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= a^3\int \frac{\cos^4 t}{\sin t}\mathrm{d}t = a^3\int \frac{(1-\sin^2 t)^2}{\sin t}\mathrm{d}t \\
&= a^3\int \left(\csc t - 2\sin t + \sin^3 t\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

计算各项：

$$\begin{aligned}
&\int \csc t\,\mathrm{d}t = \ln|\csc t - \cot t|, \\
&\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t, \\
&\int \sin^3 t\,\mathrm{d}t = \int (1-\cos^2 t)\sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x}\mathrm{d}x &= a^3\left(\ln|\csc t-\cot t| + 2\cos t - \cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right) + C \\
&= a^3\left(\ln|\csc t-\cot t| + \cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right) + C.
\end{aligned}$$

代回 $t=\arcsin(x/a)$，$\cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，$\csc t = \frac{a}{x}$，$\cot t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x}\mathrm{d}x &= a^3\left(\ln\left|\frac{a}{x} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^3\right) + C \\
&= a^3\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + a^2\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

整理得：

$$\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2} + a^2\sqrt{a^2-x^2} + a^3\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C.$$

例题 6.6.34

$$\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^2}\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sin t} \int \frac{a^3\cos^3 t}{a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t = a^2\int \frac{\cos^4 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= a^2\int \frac{(1-\sin^2 t)^2}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = a^2\int \left(\csc^2 t - 2 + \sin^2 t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= a^2\left(-\cot t - 2t + \int \sin^2 t\, \mathrm{d}t\right).$$

而 $\int \sin^2 t\, \mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} = \frac{t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2}$，所以

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= a^2\left(-\cot t - 2t + \frac{t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2}\right) + C\\ &= a^2\left(-\cot t - \frac{3t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

代回 $t = \arcsin(x/a)$，$\cot t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$，$\sin t = \frac{x}{a}$，$\cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$：

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= a^2\left(-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C\\ &= -\frac{a^2\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.\end{aligned}$$

整理得：

$$\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\left(a^2 + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

例题 6.6.35

$$\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{u=a^2-x^2} \frac{1}{2}\int u^{3/2}(-\mathrm{d}u) = -\frac{1}{2}\int u^{3/2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}u^{5/2} + C\\ &= -\frac{1}{5}(a^2-x^2)^{5/2} + C.\end{aligned}$$

例题 6.6.36

$$\int x^2\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \int x^2(a^2-x^2)^{3/2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin t} \int a^2\sin^2 t\cdot a^3\cos^3 t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= a^6\int \sin^2 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t = a^6\int \sin^2 t(1-\sin^2 t)^2\,\mathrm{d}t\\ &= a^6\int(\sin^2 t - 2\sin^4 t + \sin^6 t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这些积分可以通过递推公式或利用三角恒等式计算，但过程较长。最终结果为：

$$\int x^2\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{3a^6}{16}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}(2x^2-3a^2)\right) + C.$$

为简洁，通常用递推公式或分部积分得出，代入前面 $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$ 的结果可得完整表达式。

$$\int x^2\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{6}(a^2-x^2)^{5/2} + \frac{a^2}{6}\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x + C.$$

6.7 含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 和的积分

例题 6.7.1

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{a}\int\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\,\mathrm{d}x \quad (\text{假设}a>0) \\ &\overset{u=x+\frac{b}{2a},\ \Delta=4ac-b^2}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \sqrt{a}\int\sqrt{u^2+\frac{\Delta}{4a^2}}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

记 $k=\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2|a|}$。分情况讨论：

1. 若 $\Delta>0$，则 $\sqrt{a}\int\sqrt{u^2+k^2}\,\mathrm{d}u$，其中 $k=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$。利用公式：

$$\int\sqrt{u^2+k^2}\,\mathrm{d}u = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+k^2}+\frac{k^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+k^2}\right|+C.$$

2. 若 $\Delta=0$，则积分简化为 $\sqrt{a}\int|u|\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{a}}{2}u|u|+C$，但注意 $u=x+b/(2a)$，原被积函数为 $\sqrt{a}|u|$。

3. 若 $\Delta<0$，则 $\sqrt{a}\int\sqrt{u^2-k^2}\,\mathrm{d}u$，其中 $k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$。利用公式：

$$\int\sqrt{u^2-k^2}\,\mathrm{d}u = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-k^2}-\frac{k^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-k^2}\right|+C.$$

最终结果用 x 表示，这里不展开全部。若 $a<0$，则被开方数为负，积分可能仅在定义域内实数，此时通常提取 $-a$ 并处理为 $\sqrt{-a}\sqrt{-\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}$，转化为第二种类型。

例题 6.7.2

$$\int \sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x&=\int\sqrt{-a\left(x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}\right)}\,\mathrm{d}x\quad(\text{假设}a>0)\\&=\sqrt{a}\int\sqrt{-\left(x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\sqrt{a}\int\sqrt{k^2-\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中完成平方后，设 $k^2=\frac{b^2+4ac}{4a^2}$（需保证被开方数非负）。令 $u=x-\frac{b}{2a}$，则积分化为

$$\sqrt{a}\int\sqrt{k^2-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{a}\left(\frac{u}{2}\sqrt{k^2-u^2}+\frac{k^2}{2}\arcsin\frac{u}{k}\right)+C,$$

其中 $|u|\le k$。代回 u 和 k 即得结果。

例题 6.7.3

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2a}\int(2ax+b-b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2a}\int(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x-\frac{b}{2a}\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对于第一项，令 $u=ax^2+bx+c$，则 $\mathrm{d}u=(2ax+b)\mathrm{d}x$，所以

$$\int(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{3}u^{3/2}=\frac{2}{3}(ax^2+bx+c)^{3/2}.$$

第二项即为上一个积分的结果。因此

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3a}(ax^2+bx+c)^{3/2}-\frac{b}{2a}\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x+C.$$

例题 6.7.4

$$\int x\sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{-2a}\int(-2ax+b-b)\sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2a}\int(-2ax+b)\sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x+\frac{b}{2a}\int\sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对于第一项，令 $u=-ax^2+bx+c$，则 $\mathrm{d}u=(-2ax+b)\mathrm{d}x$，所以

$$\int(-2ax+b)\sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{3}u^{3/2}.$$

因此

$$\int x\sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3a}(-ax^2+bx+c)^{3/2}+\frac{b}{2a}\int\sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x+C.$$

例题 6.7.5

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}\quad(\text{假设}a>0)$$

$$\xlongequal{u=x+\frac{b}{2a},\ \Delta=4ac-b^2}\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+\frac{\Delta}{4a^2}}}.$$

分情况：

1. 若 $\Delta>0$，记 $k=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}>0$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+k^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+k^2}\right|+C.$$

2. 若 $\Delta=0$，则积分简化为 $\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{\mathrm{d}u}{|u|}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|u|+C$。

3. 若 $\Delta<0$，记 $k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}>0$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-k^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2-k^2}\right|+C.$$

统一形式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C\quad(a>0).$$

若 $a<0$，则需用反正弦函数等形式。

例题 6.7.6

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}&=\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x-\frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.\end{aligned}$$

第一项：令 $u=ax^2+bx+c$，则 $\mathrm{d}u=(2ax+b)\mathrm{d}x$，所以

$$\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}=2\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

因此

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+C.$$

例题 6.7.7

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}&=\frac{1}{a}\int\frac{ax^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{a}\int\frac{ax^2+bx+c-bx-c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{a}\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x-\frac{b}{a}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}-\frac{c}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.\end{aligned}$$

前两个积分已知，代入即可。

例题 6.7.8

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}&=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{b^2+4ac}{4a^2}-\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}}\quad(\text{假设}a>0)\\&\overset{u=x-\frac{b}{2a},\ k^2=\frac{b^2+4ac}{4a^2}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k^2-u^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{u}{k}+C=\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.\end{aligned}$$

例题 6.7.9

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}} &= \frac{1}{-2a}\int \frac{-2ax+b-b}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2a}\int \frac{-2ax+b}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x + \frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}.
\end{aligned}$$

第一项：令 $u=-ax^2+bx+c$，则 $\mathrm{d}u=(-2ax+b)\mathrm{d}x$，所以

$$\int \frac{-2ax+b}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{-ax^2+bx+c}.$$

因此

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{a}\sqrt{-ax^2+bx+c} + \frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}} + C.$$

例题 6.7.10

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}} &= \frac{1}{-a}\int \frac{-ax^2}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{a}\int \frac{-ax^2+bx+c-bx-c}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{a}\int \sqrt{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x + \frac{b}{a}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}} + \frac{c}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}.
\end{aligned}$$

6.8 含有 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}, \sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分

例题 6.8.1

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\,\mathrm{d}x$$

解 6.8.1. 设 $t=\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$，则 $t^2=\frac{x-a}{x-b}$，解得 $x=\frac{a-bt^2}{1-t^2}$。微分得

$$\mathrm{d}x = \frac{2(b-a)t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

于是

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\,\mathrm{d}x = \int t\cdot\frac{2(b-a)t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2(b-a)\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

将被积函数分解为部分分式：

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right).$$

积分得

$$\begin{aligned}\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{4}\left(-\ln|1-t|+\ln|1+t|\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)+C\\&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{t}{1-t^2}+C.\end{aligned}$$

代回 $t=\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$，并利用 $1-t^2=\frac{b-a}{x-b}$，$t/(1-t^2)=\frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{b-a}$，以及

$$\frac{1+t}{1-t}=\frac{\sqrt{x-b}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-b}-\sqrt{x-a}},$$

可得

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\,\mathrm{d}x&=2(b-a)\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x-b}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-b}-\sqrt{x-a}}\right|+\frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{b-a}\right)+C\\&=\sqrt{(x-a)(x-b)}+\frac{b-a}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x-b}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-b}-\sqrt{x-a}}\right|+C.\end{aligned}$$

利用恒等式 $\ln\left|\frac{\sqrt{x-b}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-b}-\sqrt{x-a}}\right|=2\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)+$ 常数，可进一步写为

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{(x-a)(x-b)}+(b-a)\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)+C',$$

其中 C' 为常数。通常假设 $x>b>a$，故可略去绝对值。

例题 6.8.2

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,\mathrm{d}x$$

解 6.8.2. 设 $t=\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$，则 $t^2=\frac{x-a}{b-x}$，解得 $x=\frac{a+bt^2}{1+t^2}$。微分得

$$\mathrm{d}x=\frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

于是

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,\mathrm{d}x=\int t\cdot\frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=2(b-a)\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

计算 $\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$，令 $t=\tan u$，则 $\mathrm{d}t=\sec^2 u\,\mathrm{d}u$，且

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\int \frac{\tan^2 u}{\sec^4 u}\sec^2 u\,\mathrm{d}u=\int \sin^2 u\,\mathrm{d}u=\frac{u}{2}-\frac{\sin 2u}{4}+C=\frac{1}{2}\arctan t-\frac{t}{2(1+t^2)}+C.$$

因此

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,\mathrm{d}x=2(b-a)\left(\frac{1}{2}\arctan t-\frac{t}{2(1+t^2)}\right)+C=(b-a)\left(\arctan t-\frac{t}{1+t^2}\right)+C.$$

代回 $t=\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$，注意 $\frac{t}{1+t^2}=\frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{b-a}$，且 $\arctan t=\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$（因为当 $t\geq 0$ 时，$\arctan t=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$）。所以

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,\mathrm{d}x=(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

也可写为

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{(x-a)(b-x)}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C,$$

其中符号差异可并入常数。通常采用后一种形式。

例题 6.8.3

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

解 6.8.3. 注意到 $(x-a)(b-x)=-(x-a)(x-b)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$。令 $u=x-\frac{a+b}{2}$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-u^2}}=\arcsin\frac{2u}{b-a}+C=\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+C.$$

另一种常见形式：令 $t=\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$，可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

两种形式等价，因为 $\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\frac{\pi}{2}$，相差常数。

例题 6.8.4

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$$

解 6.8.4. 完成平方：

$$(x-a)(b-x)=-\left[x^2-(a+b)x+ab\right]=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

令 $u=x-\frac{a+b}{2}$，则

$$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

利用公式 $\int\sqrt{k^2-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{u}{2}\sqrt{k^2-u^2}+\frac{k^2}{2}\arcsin\frac{u}{k}+C$，其中 $k=\frac{b-a}{2}$，得

$$\begin{aligned}\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x&=\frac{u}{2}\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-u^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\arcsin\frac{u}{(b-a)/2}+C\\&=\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{8}\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+C.\end{aligned}$$

也可写为

$$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{8}\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+C.$$

6.9 含有三角函数的积分

例题 6.9.1

$$\int\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$\int\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C.$$

例题 6.9.2

$$\int\cot x\,\mathrm{d}x$$

$$\int\cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C.$$

例题 6.9.3

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x$$

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

例题 6.9.4

$$\int\csc x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \csc x \, \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

例题 6.9.5

$$\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1) \, \mathrm{d}x = \tan x - x + C.$$

例题 6.9.6

$$\int \cot^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \cot^2 x \, \mathrm{d}x = \int (\csc^2 x - 1) \, \mathrm{d}x = -\cot x - x + C.$$

例题 6.9.7

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C.$$

例题 6.9.8

$$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C.$$

例题 6.9.9

$$\int \sin ax \cos bx \, \mathrm{d}x$$

$$\int \sin ax \cos bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin((a+b)x) + \sin((a-b)x)) \, \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos((a+b)x)}{a+b} + \frac{\cos((a-b)x)}{a-b}\right) + C \quad (a \neq b).$$

例题 6.9.10

$$\int \sin ax \sin bx \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int \sin ax \sin bx \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((a-b)x)}{a-b} - \frac{\sin((a+b)x)}{a+b}\right) + C \quad (a \neq b).\end{aligned}$$

例题 6.9.11

$$\int \cos ax \cos bx \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int \cos ax \cos bx \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\cos((a+b)x) + \cos((a-b)x)) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((a+b)x)}{a+b} + \frac{\sin((a-b)x)}{a-b}\right) + C \quad (a \neq b).\end{aligned}$$

例题 6.9.12

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} &\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=} \int \frac{1}{a + b\cdot\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{a(1+t^2)+2bt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{2}{at^2+2bt+a}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{2b}{a}t+1} \\ &= \frac{2}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+\frac{b}{a})^2 + \frac{a^2-b^2}{a^2}}.\end{aligned}$$

记 $\Delta = a^2 - b^2$。若 $\Delta > 0$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\left(\frac{at+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + C.$$

若 $\Delta < 0$，则用对数表示。当 $a^2 > b^2$ 时，结果如上。

例题 6.9.13

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{1}{a+b\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{(a+b)+(a-b)t^2}\,\mathrm{d}t.$$

分情况：

1. 若 $a^2 > b^2$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

2. 若 $a^2 < b^2$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}}\right|+C.$$

例题 6.9.14

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(a^2\tan^2 x+b^2)} \xlongequal{t=\tan x} \int \frac{\mathrm{d}t}{a^2t^2+b^2}\\ &= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{at}{b}\right)+C = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right)+C.\end{aligned}$$

例题 6.9.15

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x-b^2\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x-b^2\cos^2 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(a^2\tan^2 x-b^2)} \xlongequal{t=\tan x} \int \frac{\mathrm{d}t}{a^2t^2-b^2}\\ &= \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{at-b}{at+b}\right|+C = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a\tan x-b}{a\tan x+b}\right|+C.\end{aligned}$$

例题 6.9.16

$$\int x\sin ax\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{a}\cos ax+\frac{1}{a}\int\cos ax\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{a}\cos ax+\frac{1}{a^2}\sin ax+C.$$

例题 6.9.17

$$\int x\cos ax\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{x}{a}\sin ax-\frac{1}{a}\int\sin ax\,\mathrm{d}x=\frac{x}{a}\sin ax+\frac{1}{a^2}\cos ax+C.$$

例题 6.9.18

$$\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x&=-\frac{x^2}{a}\cos ax+\frac{2}{a}\int x\cos ax\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{x^2}{a}\cos ax+\frac{2}{a}\left(\frac{x}{a}\sin ax+\frac{1}{a^2}\cos ax\right)+C\\&=-\frac{x^2}{a}\cos ax+\frac{2x}{a^2}\sin ax+\frac{2}{a^3}\cos ax+C.\end{aligned}$$

例题 6.9.19

$$\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x&=\frac{x^2}{a}\sin ax-\frac{2}{a}\int x\sin ax\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{a}\sin ax-\frac{2}{a}\left(-\frac{x}{a}\cos ax+\frac{1}{a^2}\sin ax\right)+C\\&=\frac{x^2}{a}\sin ax+\frac{2x}{a^2}\cos ax-\frac{2}{a^3}\sin ax+C.\end{aligned}$$