数学试题参考答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算。 每小题 4 分, 共 40 分。

1.A　2.C　3.B　4.B　5.C　6.D　7.A　8.D　9.A　10.C

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算。单空题每题 4 分, 多空题每空 3 分, 共 36 分。

11. 3　　12. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　13. 3 ，-5　　14. 672

15. $\frac{3}{7}$，$\frac{8}{5}$　　16. 2　　17. 0，$\sqrt{35}$

18.本题主要考查三角函数及其恒等变换、正弦定理，余弦定理等基础知识,同时考查数学运算素养。 满分 14 分。

(Ⅰ)由正弦定理知　　$a^2+b^2=c^2+ab$，

由余弦定理知　　$\cos C=\frac{a^2+b^2-c}{2ab}=\frac{1}{2}$，

由 $C\in(0,\frac{\pi}{2})$ 得　　$C=\frac{\pi}{3}$.

(Ⅱ)由题意知　　$\cos A+\cos B+\cos C=\cos A+\cos(\frac{2\pi}{3}-A)+\frac{1}{2}$

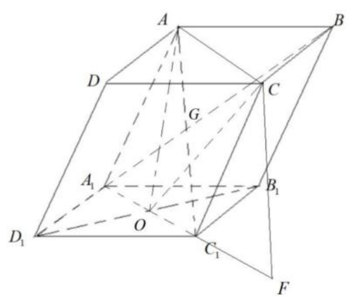
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}=\sin(A+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2},\ A\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}),$$

综上所述，$\cos A+\cos B+\cos C\in(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}]$.

19.本题主要考查空间点、线、面位置关系,直线与平面所成的角等基础知识,同时考查直想象和数学运算等素养。 满分 15 分。

(Ⅰ)因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 也是菱形.连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于 O ,所以

$A_1C_1\perp B_1D_1$，又因为 $AC_1\perp B_1D_1$，所以 $B_1D_1\perp$平面AA_1C_1 ,因为 CC_1 在平面 AA_1C_1 内，所以 $B_1D_1\perp CC_1$.



(Ⅱ)连接 AO,CO .因为 $B_1D_1\perp$平面AA_1C_1，所以

$AO\perp B_1D_1$，$CO\perp B_1D_1$,故$\angle AOC$ 是 $A-B_1D_1-C$ 的平面角.由$\angle ADC=\angle A_1D_1C_1=60^\circ$，

$A_1D_1=C_1D_1=1$,得 $A_1C_1=1$, $B_1D_1=\sqrt{3}$.

因为 $BB//CC_1$,所以 $B_1D_1\perp BB_1$.又 $BB_1=2$,连接 BD_1,得 $BD_1=\sqrt{7}$.又因为 $AB//C_1D_1$,设 AC_1 与 BD_1 相交于 G ,得 $GD_1=\frac{1}{2}BD_1=\frac{\sqrt{7}}{2}$.又

$$\cos\angle BD_1C_1=\frac{GD_1^2+D_1C_1^2-C_1G^2}{2AO\bullet C_1D_1}=\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

故 $C_1G=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC_1=\sqrt{3}$,因为 $AA_1=BB_1=2$, $AA_1^2=A_1C_1^2+AC_1^2$,所以 $AC_1\perp A_1C_1$.所以

$$AO=\sqrt{OC_1^2+AC_1^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

延长 A_1C_1 至 F 使 $AC=C_1F$,有 $CF\perp A_1F$, $CO=\sqrt{CF^2+AF^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.所以

$$\cos\angle AOC=\frac{AO^2+CO^2-AC^2}{2AO\bullet CO}=\frac{5\sqrt{273}}{91}.$$

因此，二面角 $A-B_1D_1-C$ 的余弦值为 $\frac{5\sqrt{273}}{91}$.

20.本题主要考查等差数列、等比数列等基础知识,同时考查数学运算和逻辑推理等素养。满分 15 分。

(Ⅰ)由题意知当 $n\geq 2$ 时有 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=-\frac{1}{2}$,

因为 $a_2=a_1+3, a_3=2a_1+2=6$,

解得 $a_1=2, a_2=5$,

所以，当 $n\geq 2$ 时 $\frac{a_n}{2^n}=-\frac{n}{2}+\frac{9}{4}$,

故 $$a_n=\begin{cases}(-\frac{n}{2}+\frac{9}{4})2^n, n\geq 2,\\ 2, n=1,\end{cases}.$$

由题意知 $2b_n+n+4$ ， $2b_n+4n+8$ ， $2b_n+10n+16$ 成等比数列,

则 $$(2b_n+4n+8)^2=(2b_n+n+4)(2b_n+10n+16),$$

故 $$b_n=n.$$

(Ⅱ)由题意知 $$S_n+7=\frac{11-2n}{2}2^n, T_n=\frac{n(n+1)}{2},$$

由题意知对每一个 $n\in\mathrm{N}^*$ 都有 $\lambda<|\frac{(11-2n)2^n}{n(n+1)}|$ 恒成立,

设 $$P_n=|\frac{(11-2n)2^n}{n(n+1)}|\ (n\in\mathrm{N}^*),$$

当 $n\geq 2$ 时，令 $\begin{cases}P_n\leq P_{n+1},\\ P_n\leq P_{n-1},\end{cases}$ ，解得 $n=5$ ，故 $\lambda<P_5=\frac{16}{15}$.

综上所述， $\lambda\in(-\infty,\frac{16}{15})$.

21. 本题主要考查抛物线的几何性质,直线与抛物线的位置关系等基础知识,同时考查数学抽象、数学运算与逻辑推理等素养。满分 15 分。

(Ⅰ)设 C_2 上一点坐标为 (x_1,y_1) ，该点到点 $F(1,0)$ 的距离为 d .

若 $a=5,b=1$ ，则 $$C_2\text{:}\ \frac{x^2}{25}+y^2=1.$$

即 $$d=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{\frac{24}{25}x_1^2-2x_1+2}\,(-5\le x_1\le 5),$$

当 $x_1=\dfrac{25}{24}$ 时，d 有最小值 $\dfrac{\sqrt{138}}{12}$.

(Ⅱ)设点 A，G 的坐标为 $(u^2,2u)$，$(x_0,0)$，直线 AB，AC 的方程为 $x=my+1$，$x=ny+x_0$.

将直线 AB，AC 的方程代入抛物线 $y^2=4x$ 得

$$y^2-4m-4=0,y^2-4ny-4x_0=0,$$

故关于点 A,B,C 的纵坐标 y_A,y_B,y_C 有

$$y_Ay_B=-4,\quad y_Ay_C=-4x_0,$$

故点 B,C 的纵坐标 $$y_B=-\frac{2}{u},y_C=-\frac{2x_0}{u},$$

则直线 BC 的斜率 $$k=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{4}{y_A+y_B}=-\frac{2u}{1+x_0},$$

故直线 BC 的方程 $$y=-\frac{2u}{1+x_0}x-\frac{2x_0}{u(1+x_0)},$$

将直线 BC 的方程代入椭圆得

$$[\frac{4u^2a^2}{(1+x_0)^2}+b^2]x^2+\frac{8x_0a^2}{(1+x_0)^2}x+\frac{4a^2x_0^2}{u^2(1+x_0)^2}-a^2b^2=0,$$

故关于点 M,N 的横坐标 x_M,x_N 有

$$x_M+x_N=-\frac{8x_0a^2}{4u^2a^2+b^2(1+x_0)^2},$$

因为点 O 是 ΔAMN 的重心，则

$$x_M+x_N+u^2=0,\ y_M+y_N+2u=0,$$

即 $$|GQ|=x_0+1+\frac{20}{x_0+1}-1\ge 2\sqrt{(x_0+1)\frac{20}{x_0+1}}-1=4\sqrt{5}-1.$$

当 $x_0=\dfrac{u^4+u^2}{2-u^2}=2\sqrt{5}-1$，即 $u^2=\sqrt{3+4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$ 时取等.

综上所述，$|GQ|$ 的最小值为 $4\sqrt{5}-1$，此时点 A 的横坐标为 $\sqrt{3+4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$.

22. 本题考察函数的单调性，导数的运算及其应用，同时考察数学抽象、数学运算与逻辑推理素养。满分 15 分。

(Ⅰ)由题意知 $$f'(x)=\frac{b}{x\ln a}-\frac{a}{x^2}=\frac{bx-a\ln a}{x^2\ln a},$$

（1）若 $b\le 0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 有单调递减区间 $(0,+\infty)$，无单调递增区间；

（2）若 $b>0$，$f(x)$ 有单调递减区间 $(0,\dfrac{a\ln a}{b})$，单调递增区间 $(\dfrac{a\ln a}{b},+\infty)$.

(Ⅱ)(i)由题意 $$x_a=\frac{a\ln a}{b},$$

因为 $f(x)$ 有两个零点，故 $$f(x_a)<0,$$

整理后即 $g(\frac{1}{x_a})>0=g(x_3)=g(x_4)$，

由题意 $g'(x)=\ln x$，故

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	单调递减	极小值 $g(1)$	单调递增

所以 $x_3+x_4<\frac{1}{x_a}+x_3x_4x_a$，

所以只要证 $x_3+x_4>2$， $x_3x_4<1$.

对于 $x_3+x_4>2$，即证 $g(x_4)=g(x_3)>g(2-x_3)$，即 $(2-x_3)\ln(2-x_3)-x_3\ln x_3+2x_3-2<0$，

设 $h_1(x)=(2-x)\ln(2-x)-x\ln x+2x-2$， $0<x<1$，由于 $h_1(x)=\ln\frac{1}{(2-x)x}>0$，

则 $h_1(x)$ 单调递增，即 $h_1(x_3)<h_1(1)=0$.

对于 $x_3x_4<1$，即证 $g(\frac{1}{x_3})>g(x_4)=g(x_3)=0$，整理后即证 $\ln x_3^2<\frac{2(x_3^2-1)}{x_3^2+1}$，

设 $h_2(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$， $0<x<1$，由于 $h_2'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

故 $h_2(x)$ 单调递增，则 $h_2(x_3)<h_2(1)=0$ 得证.

综上所述， $2<x_3+x_4<x_a+\frac{1}{x_a}$.

(ii)（1）若 $\frac{1}{x_a}>x_4>1>x_2>x_a>x_1$，则 $x_2x_3<1$，

根据 $f(x_1)=g(x_4)=0$，有

$$g(x_4)=x_4\ln x_4-x_4-c=\frac{1}{x_a}\ln\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1}-c<g(\frac{1}{x_1})=\frac{1}{x_1}\ln\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1}-c,$$

即 $x_4<\frac{1}{x_1}$， $x_1x_4<1$.

(2)若 $\frac{1}{x_a}<x_3<1<x_1<x_a<x_2$，则 $x_1x_4>1$，

根据 $f(x_2)=g(x_3)=0$，有

$$g(x_3)=x_3\ln x_3-x_3-c=\frac{1}{x_a}\ln\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_2}-c<g(\frac{1}{x_2})=\frac{1}{x_2}\ln\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_2}-c,$$

即 $x_3>\frac{1}{x_2}$， $x_2x_3>1$.

故 $g(x_1x_4)=g(x_2x_3)$ 等价于 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_4}{x_3}>1$，

首先证明 $\frac{x_4}{x_3}>2c+3$，

因为 $g(x_3)=0$，所以 $c=x_3\ln x_3-x_3$，

对于 $\frac{x_4}{x_3}>2a+3$，先证 $x_4>e^{\sqrt{c+1}}$， $x_3<\frac{1}{e^{\sqrt{c+1}}}$，即证

$$g(e^{\sqrt{c+1}})<0,\quad g(e^{-\sqrt{c+1}})<0,$$

设 $\lambda=\sqrt{c+1}$，代入后整理得要证 $e^{\lambda}>\lambda+1$， $(\lambda-1)e^{\lambda}<-1$，

设 $h_3(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，$h_4(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+1$，$0<x<1$，则

$$h_3'=\mathrm{e}^x-1>0,\quad h_4'(x)=x\mathrm{e}^x>0,$$

即 $h_3(x)$ 单调递增，$h_4(x)$ 单调递增，则

$$h_3(\lambda)>h_3(0)=0,\quad h_4(\lambda)>h_4(0)=0,$$

下证 $\dfrac{x_4}{x_3}>\mathrm{e}^{2\sqrt{c+1}}>2c+3$，即证 $\mathrm{e}^{2\sqrt{c+1}}>\dfrac{1}{2}(2\sqrt{c+1})^2+1$，

设 $h_5(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}-1$，$x>0$，因为 $h_5'(x)=\mathrm{e}^x-x>0$，

故 $h_5(x)$ 单调递增，则 $h_5(2\sqrt{c+1})>h_5(0)=0$.

设 $p(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\ln x$，$x>1$，则 $p'(x)=\dfrac{-2\ln x+x-\dfrac{1}{x}}{x(x-1)^2}$，

设 $q(x)=-2\ln x+x-\dfrac{1}{x}$，$x>1$，则 $q'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}>0$，

故 $q(x)$ 单调递增，则 $q(x)>q(1)=0$，

则 $p(x)$ 单调递增，则

由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 知

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_a}\frac{(\frac{x_4}{x_3}+1)}{(\frac{x_4}{x_3}-1)}\ln(\frac{x_4}{x_3})>\frac{1}{x_a}\frac{(2c+3)+1}{(2c+3)-1}\ln(2c+3)$$

故根据题意要证

$$\ln(2c+3)>\frac{2[(2c+3)-1]}{(2c+3)+1}+\frac{8[(2c+3)-1]^3[2(2c+3)-1]}{15[(2c+3)+1]^4},$$

设 $F(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}-\dfrac{8(x-1)^3(2x-1)}{15(x+1)^4}$，$x>1$，则

$$F'(x)=\frac{(x-1)^2(5x^3-25x^2+39x+5)}{5x(x+1)^5}>0,$$

则 $F(x)$ 单调递增，故

$$F(2c+3)>F(1)=0.$$

综上所述，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{x_a}+\dfrac{4(c+1)^2(4c+5)}{15x_a(c+2)^3}$.

命题：茶发女孩灰原哀 陈澈
审核：茶发女孩灰原哀 仙鹤
陈澈 日常昏迷的谋杀者
浙江省柯南命题组