



华南理工大学  
South China University of Technology

# 工科数学分析 作业

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

班级：1 班

学号：202530451676

日期：2025 年 11 月 3 日

厚德尚学 自强不息  
务实创新 追求卓越

# 目录

<b>第一章 集合, 映射与函数</b>	<b>1</b>
1.1 第1周作业 . . . . .	2
<b>第二章 极限</b>	<b>5</b>
2.1 第2周作业 . . . . .	6
<b>第三章 一元函数微分学</b>	<b>27</b>
3.1 习题3.1 . . . . .	27

# 第一章 集合，映射与函数

## 1.1 第 1 周作业

例题 1.1.1 讨论下列函数的奇偶性

$$\begin{array}{lll} (1) y = 3x - x^3 & (2) 2 + 3x - x^3 & (3) y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} \\ (4) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (5) y = \sqrt{x(2-x)} & (6) y = 2^{-x} \\ (7) f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases} & (8) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{array}$$

解 1.1.1. (1) 由于  $f(x) + f(-x) = 3x + 3(-x) - x^3 - (-x)^3 = 0$ , 故为奇函数

(2) 由于  $f(x) + f(-x) = 2 + 3x + 3(-x) + 2 - x^3 - (-x)^3 = 4$ , 不为奇函数; 而  $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$ , 故为非奇非偶函数

(3) 由于  $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$ , 故为偶函数

(4) 由于  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(-x)$ , 故为偶函数

(5) 由于  $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$ , 故不为偶函数, 由于  $f(x) + f(-x) = \sqrt{x(2-x)} + \sqrt{-x(2+x)} \neq 0$ , 故为非奇非偶函数

(6) 由于  $\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$ , 故为非奇非偶函数

(7) 由于  $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) + f(-x) = x-1+(-x)+1=0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$ , 故为奇函数

(8) 由于  $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln(-x^2 + (x^2 + 1)) = 0$ , 故为奇函数

例题 1.1.2 研究函数的单调性

$$(1) y = ax + b \quad (2) y = ax^2 + bx + c \quad (3) y = x^3 \quad (4) y = a^x$$

解 1.1.2. (1) 若  $a \geq 0$ , 则  $y$  单调递增; 若  $a < 0$ , 则  $y$  单调递减; 若  $a > 0$ , 则  $y$  严格单调递增

(2) 若  $a > 0$ , 则  $y$  先严格单调减后严格单调增, 若  $a < 0$ , 则  $y$  先严格单调增后严格单调减, 若  $a = 0$ , 则当  $b > 0$  时,  $y$  单调递增, 当  $b < 0$  时,  $y$  单调递减; 若  $a = b = 0$ , 则  $y$  非严格单调递增

(3) 若  $x_1 > x_2$ , 则  $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) > x_1 - x_2 > 0$  故单调递增

(4) 需限定  $a > 0$ , 则当  $a > 1$  时,  $y$  单调递增, 当  $a < 1$  时,  $y$  单调递减; 若  $a = 1$ , 则  $y = 1$  非严格单调递增;

例题 1.1.3 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$$\begin{array}{lll} (1) y = \sin^2 x & (2) y = \sin x^2 & (3) y = \cos(x - 2) \\ (4) y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x & (5) y = x - [x] & (6) y = \tan |x| \end{array}$$

解 1.1.3. (1) 是周期函数，周期为  $k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ )，最小正周期为  $\pi$

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 2 \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} \sin \frac{2x+T^2}{2} \neq 0$$

则这样的  $T$  不存在。

(3) 是周期函数，周期为  $2k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ )，最小正周期为  $2\pi$ .

(4)  $y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\lambda x + \arctan \frac{B}{A})$  是周期函数，周期为  $\frac{2k\pi}{\lambda}$ , ( $k \in \mathbb{Z}, \lambda > 0$ )，最小正周期为  $\frac{2\pi}{\lambda}$ , ( $\lambda > 0$ )

(5) 是周期函数，因为  $[x] + 1 = [x + 1]$ ，则  $x + 1 - [x + 1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x]$ ，所以  $y = x - [x]$  是周期函数，周期为  $\mathbb{Z}$ ，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是  $\pi$ ，假设  $\tan |x|$  也是周期函数，则存在  $T > 0$  使得对于定义域内的任意实数  $x$  都有  $|x| + \pi = |x + T|$ ，代入  $x = -\pi$  得到  $T = 3\pi$ ，代入  $x = 0$  得到  $T = \pi$ ，矛盾！所以  $y = \tan |x|$  不是周期函数。

例题 1.1.4 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

解 1.1.4. (1) 设  $f(x), g(x)$  为两个奇函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(-g(-x)) = f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  为偶函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(g(-x)) = -f(-x)g(-x) \Leftrightarrow f(x)g(x) + f(-x)g(-x) = 0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

例题 1.1.5 证明

若函数  $f(x)$  周期为  $T$  ( $T > 0$ )，则函数  $f(-x)$  的周期也是  $T$ .

解 1.1.5. 设  $f(x)$  周期为  $T$ ，则  $f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(-x+T) = f(-x)$ ，故  $f(-x)$  的周期也是  $T$ .

例题 1.1.6 证明

设  $f(x)$  和  $g(x)$  都是定义域为  $R$  的单调函数，求证： $f(g(x))$  也是定义域为  $R$  的单调函数。

解 1.1.6. 由于  $f(x), g(x)$  是定义域为  $R$  的单调函数, 则:

$$\forall x_1, x_2 \in R, (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0, \quad \forall x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在  $x_1 = g(x_3), x_2 = g(x_4)$ , 则相乘

$$(g(x_3) - g(x_4))(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

结合  $x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0$  就有:

$$(x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4))^2(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3 - x_4)(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

故  $f(g(x))$  也是定义域为  $R$  的单调函数.

### 例题 1.1.7 证明

$$(1) \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad (2) \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数  $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 + i \Rightarrow z_1 z_2 = 5 + 5i$ , 则:

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由于  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , 代入  $x = \arcsin x$  即可得到:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

## 第二章 极限

## 2.1 第 2 周作业

例题 2.1.1 2.1-A-3: 给出下列极限的精确定义

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

解 2.1.1. (1) 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x| < \delta$  时,  $|f(x)| < \varepsilon$ .

(2) 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x| < \delta$  时,  $|(1+x)^{\frac{1}{x}} - e| < \varepsilon$ .

例题 2.1.2 2.1-A-7

利用极限的精确定义证明下列函数的极限

$$\begin{array}{ll} (1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 5x) = 24 & (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2} = \frac{1}{3} & (4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2 - 4} = +\infty. \end{array}$$

解 2.1.2. (1) 要证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - 3| < \delta$  时,  $|(x^2 + 5x) - 24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$ 。已经出现了  $|x-3|$ , 所以现在只需限定  $|x+8|$ , 先限定  $|x-3| < 1$ , 那么  $|x+8| < 12$ , 此时还需满足  $|(x+8)(x-3)| < 12|x-3| < \varepsilon$ , 得  $|x-3| < \frac{\varepsilon}{12}$ , 故取  $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{12}\right\}$ , 当  $0 < |x-3| < \delta$  时,  $|(x^2 + 5x) - 24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$ 。

(2) 要证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - 1| < \delta$  时,  $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \varepsilon$ 。取  $\delta = \varepsilon$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时,  $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$ 。

(3) 要证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $|x| > \delta$  时,  $\left| \frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$ , 因为  $\left| \frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{2}{3x^2} \right|$ , 取  $\delta = \sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}}$ , 则当  $|x| > \delta$  时,  $\left| \frac{x^2 + 2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$ 。

(4) 要证对于任意  $G > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < x - 2 < \delta$  时,  $\frac{2x}{x^2 - 4} > G$ , 不妨限定  $x+2 < 5$ , 则  $x-2 < 1$ , 则  $\frac{2x}{x^2 - 4} > \frac{4}{(x+2)(x-2)} > \frac{4}{5(x-2)} > G$  解得  $x-2 < \frac{4}{5G}$ , 所以取  $\delta = \min\left\{1, \frac{4}{5G}\right\}$ , 当  $0 < x - 2 < \delta$  时,  $\frac{2x}{x^2 - 4} > G$ 。

例题 2.1.3 2.1-A-10

证明: 由  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  能推出  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$ , 但反之不然。

解 2.1.3. 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时,  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 所以由绝对值不等式得到  $|f(x) - A| > ||f(x)| - |A|| = ||f(x)| - |A|| > 0$ , 故  $||f(x)| - |A|| < \varepsilon$ , 所以由  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

能推出  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$ . 然后反过来, 考虑定义在实数域上的函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$ , 其极限

$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 1$ , 但是  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  不存在。

### 例题 2.1.4 2.1-B-2(1): 利用极限的精确证明

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

解 2.1.4. 要证  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ , 只需证对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时,  $\lim_{x \rightarrow a} |\sin x - \sin a| = 2|\cos \frac{x+a}{2}| |\sin \frac{x-a}{2}| < \varepsilon$ 。又因为  $2|\cos \frac{x+a}{2}| |\sin \frac{x-a}{2}| < 2|\sin \frac{x-a}{2}| < 2|\frac{x-a}{2}| = |x-a|$ , 所以取  $\delta = \varepsilon$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时,  $\lim_{x \rightarrow a} |\sin x - \sin a| < \varepsilon$ .

### 例题 2.1.5 2.1-B-4

利用极限的精确定义证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = +\infty$  是错误的。

解 2.1.5. 要证明存在  $G > 0, \forall \delta > 0$  使得当  $x > \delta$  时,  $\frac{x}{x+1} \leq G$ , 则取  $G = 1$ , 便可以满足  $\forall x > 0, \frac{x}{x+1} \leq 1$ , 故存在  $G > 0, \forall \delta > 0$  使得当  $x > \delta$  时,  $\frac{x}{x+1} \leq G$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = +\infty$  是错误的。(本题本质是找到一个够大的上界)

### 例题 2.1.6 2.3-A-2

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2); & (2) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)(1 - 2x)^2; & (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 40x^4); \\ (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5 + 21x^3); & (5) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}; & (6) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}; \\ (7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 2}; & (8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^{10} + x + 7}. \end{array}$$

解 2.1.6. (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} (3(2)^2 - 5(2) + 2) = 4$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1)(1 - 2x)^2 = \lim_{x \rightarrow -1} (1 + 1)(1 - 2(-1))^2 = 18$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 40x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4(x - 40) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 40) = +\infty$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5 + 21x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5(6 + \frac{21}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \lim_{x \rightarrow -\infty} (6 + \frac{21}{x^2}) = -\infty$ .

(5)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ .

(6)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .

(7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{x + \frac{2}{x^3}} = 0$ .

(8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^{10} + x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5}{x^7} + \frac{2}{x^{10}}}{1 + \frac{1}{x^9} + \frac{7}{x^{10}}} = 0$ ;

## 例题 2.1.7 2.3-A-4

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{3x} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{9x^2 + x + 3}}{6x} \right)$$

解 2.1.7. (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$ .

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \right) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{3}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{9x} + \frac{1}{9x^2}} = \frac{2}{3}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{9x^2 + x + 3}}{6x} \right) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{1}{36x} + \frac{3}{6x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

## 例题 2.1.8 2.3-A-8

$$(1) y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 1} \quad (2) y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

解 2.1.8. (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x + x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = -1$$

故该函数在无穷远处的渐近线为  $y = x - 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - \frac{1}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - \frac{1}{x}) = -\infty$$

故该函数在  $x = 1$  处的渐近线为  $x = 1$ .

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(1 - \frac{1}{x})^2} = 2$$

故该函数在无穷远处的渐近线为  $y = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(1 - \frac{1}{x})^2} = +\infty$$

故该函数在  $x = 2$  处的渐近线为  $x = 2$ .

## 例题 2.1.9 习题 2.3-B 组-1

已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , 讨论下列极限的状态:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

解 2.1.9. (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$  不确定, 比如当  $f(x) = x$  时, 假如  $g(x) = 2x$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$ ,

但当  $g(x) = \frac{x}{2}$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ , 当  $f(x) = g(x)$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  不确定, 比如当  $f(x) = x$  时, 假如  $g(x) = 2x$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$ , 但当  $g(x) = \sqrt{x}$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$ , 又当  $g(x) = x^2$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

## 例题 2.1.10 习题 2.3-B 组-4

设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$ , 求  $a$  和  $b$ .

解 2.1.10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1 - ax^2 - ax - bx - b}{x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + 1 - b}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( (1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x} \right)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1-a)x - (a+b) = 0 \end{aligned}$$

必须有  $a = 1, b = -1$ .

## 例题 2.1.11 习题 2.3-B 组-5

设  $a, b, c$  是常数,  $a \neq 0$ , 证明  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$  的图形有斜渐近线, 并求出渐近线方程.

解 2.1.11.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = a \neq 0$$

由此可知,  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$  的图形有斜渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1} - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b - a)x + c}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b - a + \frac{c}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = b - a$$

则渐近线方程为  $y = ax + b - a$ .

### 例题 2.1.12 习题 2.2-A-2

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) = 0 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5n+1} = \frac{3}{5}$$

解 2.1.12. (1) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时有  $|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$ .

$$|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| = \left| \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \right| < \left| \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \right| < \varepsilon$$

因此取  $N = \left[ 2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \right]$ , 则对于任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $n \geq N$  时, 有  $|\sqrt{n-1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$ .

(2) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \varepsilon$ , 限定  $n > 9$ , 则  $2^n > n^3$ , 则有

$$\left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \left| \frac{n^2}{n^3} \right| = 2 \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon, \text{ 则取 } N = \max \left\{ 9, \left[ 1 + \frac{2}{\varepsilon} \right] \right\}, \text{ 任意 } \varepsilon > 0, \left| \frac{n^2}{2^n} \right| < \varepsilon.$$

(3) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$ , 则取  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ .

(4) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{3n}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5} \left| \frac{1}{5n+1} \right| < \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$ , 则取  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right]$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{3n}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon$ .

### 例题 2.1.13 习题 2.2-A-4

证明: 由  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$  能推出  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ , 但反过来不可以.

解 2.1.13. 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\|x_n - a\| < |x_n - a| < \varepsilon$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ , 但是考虑数列  $a_n = (-1)^n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , 但是去掉绝对值后,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  不存在, 所以不能反过来.

### 例题 2.1.14 习题 2.2-B-1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \infty \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 1} = \frac{1}{2} \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. (a > 1)$$

解 2.1.14. (1) 要证明任意  $G > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时有  $\left| \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} \right| = \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} > G$ , 由

$$\frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^2+1} > \frac{(n-1)(n^2+1)}{n^2+1} = n-1$$

所以取  $N = G + 2$ , 则任意  $G > 0$ ,  $\left| \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} \right| > G$ .

(2) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n < \varepsilon$ , 则取  $N = [\tan \frac{\pi}{2} - \varepsilon] + 1$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$ .

(3) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(2\sqrt{n}+1)}$ , 取  $N = \left[ 1 + \left( \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$ , 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ .

(4) 要证明对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得当  $n \geq N$  时,  $\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$ , 由

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \frac{a}{2} \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{[a]} \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{[a]}}{[a]!} \frac{a}{n}$$

所以取  $N = \left[ \frac{a^{[a+1]}}{[a]! \varepsilon} + 1 \right]$ , 则任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\left| \frac{a^n}{n!} \right| < \varepsilon$ .

### 例题 2.1.15 2.3-A-3

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right]$$

解 2.1.15. (1) 代数变形:

$$\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{(-2)^{-1} + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}}}{1 + \frac{3}{(-2)^{n+1}}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{5}{6 \left(1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{6 \left(1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)} \right) = \frac{1}{3}.$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

(4) 用裂项  $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ , 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{2}$$

## 例题 2.1.16 2.4-A-5

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x}$

(5)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta}$

(6)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h}$

(7)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$

(8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

(10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

(11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

(12)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

(13)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

(14)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$

解 2.1.16. 这里只使用基本极限公式:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{5 \cdot 3x} = \frac{3}{5}.$  (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3 \sin 3x} = \frac{2}{3}.$

(5)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \theta = 0.$  (6)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan^2 h}{h^2} h = 0.$

(7)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \left(\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$  (8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1.$

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^3 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}.$

(10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 4x = 2.$

(11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\sin x}{x} = 4.$

(12)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$

(13)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = -\sin a.$

(14)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin a}{\cos a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a) \cos a \cos(x-a)} = \sec^2 a,$  其中  $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}_+.$

## 例题 2.1.17 2.4-A-6

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x} \quad (3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} (x \neq 0)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{1/x} \quad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x}$$

解 2.1.17. (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/3}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$ .

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{-1}{x}\right)^{\frac{-1}{x}}\right)^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$(3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} (x \neq 0) = \lim_{\frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right) = e$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^a = \lim_{\frac{1}{ax} \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^a = e^a$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-4} = e^{-4}.$$

## 例题 2.1.18 2.4-B-4

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \tan 3x \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

解 2.1.18. (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x} - 5}{\frac{1}{x^3} \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x^3}{\sin x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2} \frac{3x^2 - 5x}{3x^2} = 3.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \tan 3x = \lim_{x \rightarrow 0} -\sin x \tan(3x + \frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x}{\tan x} = \frac{1}{3}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \frac{1}{2} = 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x(1 - \tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x} = 2.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left((1+\frac{1}{x})x\right)^{-1} = \frac{1}{e}.$$

## 例题 2.1.19 2.5-A-2

证明数列  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$  收敛，并求其极限值.

解 2.1.19. 先证数列  $\{a_n\}$  有界，数列满足  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ , 由于  $a_1 = \sqrt{2} < 2$ , 假设  $a_k < 2$ , ( $k \geq 2$ ), 则有  $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{4} = 2$ , 所以归纳得到  $a_k < 2$ , 因此数列  $\{a_n\}$  有界.

再证明数列  $\{a_n\}$  单调递增，作商得到  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > 1$ , 所以数列  $\{a_n\}$  单调递增.

由单调有界收敛定理得到  $\{a_n\}$  收敛，极限存在，所以设极限为  $A$ , 对  $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$  两边取极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}} \Rightarrow A = 2$$

所以数列  $\{a_n\}$  收敛，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

进一步地，设  $b_n = a_n - 2$ , 所以

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = \sqrt{2a_n} - 2 = \sqrt{2(2 + b_n)} - 2 = \sqrt{4 + 2b_n} - 2$$

泰勒展开得到

$$\sqrt{4 + 2b_n} = 2\sqrt{1 + \frac{b_n}{2}} = 2\left(1 + \frac{b_n}{4} - \frac{b_n^2}{32} + O(b_n^3)\right) \Rightarrow b_{n+1} = \frac{b_n}{2} - \frac{b_n^2}{16} + O(b_n^3)$$

对于大的  $n$ , 有  $b_n \rightarrow 0$ , 主导项为  $\frac{b_n}{2}$ , 因此  $b_{n+1} \sim \frac{1}{2}b_n$ , 这意味着  $b_n$  以指数速率衰减，即  $b_n \sim C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ , 其中  $C = b_1 = \sqrt{2} - 2$ . 因此  $b_n^2 \sim C^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ , 因此误差项为  $O\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$$a_n = 2 + (\sqrt{2} - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

## 例题 2.1.20 2.5-A-3

设  $a > 0, 0 < x_1 < \frac{1}{a}$ ,  $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  证明  $\{x_n\}$  收敛并求极限.

解 2.1.20. 先证明数列  $\{x_n\}$  有界，已知  $0 < x_1 < \frac{1}{a}$ , 则假设  $x_k \in (0, \frac{1}{a})$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , 则  $ax_k \in (0, 1)$ , 而  $x_k(2 - ax_k)$  是  $x_k$  的二次函数，在  $(0, \frac{1}{a})$  上单增，在  $(\frac{1}{a}, 1)$  上单减，所以  $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k) > 0$ , 且  $x_{k+1} < \frac{1}{a}(2 - a\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$ , 所以  $x_n \in (0, \frac{1}{a})$ , 数列  $\{x_n\}$  有界. 再证明数列  $\{x_n\}$  单调递增，作商得到  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - ax_n > 1$ , 所以数列  $\{x_n\}$  单调递增. 由单调有界收敛定理得到  $\{x_n\}$  收敛，极限存在，所以设极限为  $A$ , 对  $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$  两边取极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(2 - a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \Leftrightarrow A = A(2 - aA) \Leftrightarrow A = \frac{1}{a}$$

所以数列  $\{x_n\}$  收敛，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a}$ , 事实上这个数列的通项公式是  $x_n = \frac{1}{a} [1 - (1 - ax_1)^{2^{n-1}}]$

## 例题 2.1.21 2.5-A-4

设  $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$  证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ .

解 2.1.21. (1) 当  $x_1 = \sqrt{3}$  时, 假设  $x_k = \sqrt{3}, k \in \mathbb{N}_+$ , 则

$$x_{k+1} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以  $\{x_n = \sqrt{3}\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ .

(2) 当  $0 < x_1 < \sqrt{3}$  时, 假设  $0 < x_k < \sqrt{3}, k \in \mathbb{N}_+$ , 则由函数  $f(x) = \frac{3x+3}{3+x} = 3 - \frac{6}{3+x}$  在  $(0, \sqrt{3})$  上单增, 得到:

$$\frac{3+0}{3+0} = 1 < x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} < \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以归纳得到  $x_k \in (0, \sqrt{3})$ , 且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n - 3x_n - x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} > 0$$

则  $\{x_n\}$  单调递增, 由单调有界收敛定理得到  $\{x_n\}$  收敛, 设极限为  $A$ , 代入递推式得到  $A = \frac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ .

(3) 当  $x_1 > \sqrt{3}$  时, 假设  $x_k > \sqrt{3}, k \in \mathbb{N}_+$ , 则由函数  $f(x) = \frac{3x+3}{3+x} = 3 - \frac{6}{3+x}$  在  $(\sqrt{3}, \infty)$  上单增, 得到:

$$x_{k+1} = \frac{3(1+x_k)}{3+x_k} > \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

所以数列  $\{x_n\}$  有下界, 又有:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n - 3x_n - x_n^2}{3+x_n} = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0$$

所以  $\{x_n\}$  单调递减, 由单调有界收敛定理得到  $\{x_n\}$  收敛, 设极限为  $A$ , 代入递推式得到  $A = \frac{3+3A}{3+A} \Rightarrow A = \sqrt{3}$ , 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ .

## 例题 2.1.22 2.5-B-1

设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}, n = 1, 2, 3, \dots$ , 证明  $\{x_n\}$  极限存在, 并求极限.

解 2.1.22. 先证明数列  $\{x_n\}$  有界, 由  $x_1 = 10 > 3$ , 假设  $x_k > 3$ , 那么  $x_{k+1} = \sqrt{x_k + 6} > \sqrt{9} = 3$ , 所以  $\{x_n\}$  有界; 再证明数列  $\{x_n\}$  单调递减, 作商得到

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 6} - x_n = \frac{x_n + 6 - x_n^2}{\sqrt{x_n + 6} + x_n} = \frac{(3-x_n)(x_n+2)}{\sqrt{x_n + 6} + x_n} > 0$$

所以  $\{x_n\}$  单调递减, 由单调有界收敛定理得到  $\{x_n\}$  极限存在, 设极限为  $A$ , 代入递推式得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

### 例题 2.1.23 2.5-B-2

利用柯西准则, 证明下面各数列的收敛性:

$$(1) x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n, \text{ 其中 } |a_i| \leq M \ (i = 0, 1, 2, \dots), \text{ 且 } |q| < 1;$$

$$(2) x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

解 2.1.23. (1) 设  $m > n$ , 则

$$|x_m - x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_mq^m| \leq M|q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^m| < M \frac{|q^{n+1}|}{1 - |q|}$$

任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = [\log_q \frac{\varepsilon}{M} + 1]$  使得任意  $x > N$ ,  $M \frac{|q^{n+1}|}{1 - |q|} < M|q^{n+1}| < \varepsilon$ , 则数列  $\{x_n\}$  收敛. (2) 设  $m > n$ , 则

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(m)}{2^m} \right| < \left| \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^m} \right| < \frac{1}{2^n}$$

所以任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = [2 - \log_2 \varepsilon]$  使得任意  $n > N$ ,  $|x_m - x_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , 则数列  $\{x_n\}$  收敛.

### 例题 2.1.24 2.5-B-3

对于数列  $\{x_n\}$ , 若子列  $\{x_{2k}\}$  与  $\{x_{2k+1}\}$  都收敛于  $a$ , 试用 “ $\varepsilon - N$ ” 的语言证明数列  $\{x_n\}$  也收敛于  $a$ .

解 2.1.24. 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1 \in \mathbb{N}$  使得  $\forall n > N_1, |x_{2n-1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_2 \in \mathbb{N}$  使得  $\forall n > N_2, |x_{2n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 则数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ ; 那么对  $2n-1$  代入  $n = N_1 + 1$ , 对  $2n$  代入  $n = N_2 + 1$ , 可知取  $N = \max\{2N_1 + 4, 2N_2 + 4\}$ , 则  $\forall n > N, |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , 则数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ .

### 例题 2.1.25 2.5-B-4

证明: 若  $f(x)$  为定义于  $[a, +\infty)$  上的单调增加函数, 则极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在的充要条件是  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有上界.

解 2.1.25. 必要性: 设极限为  $A$ , 则存在  $N > 0$  使得当  $n > N$  时, 有  $|f(x) - A| < 1$ , 故

$$|f(x)| - |A| < ||f(x)| - |A|| < |f(x_n) - A| < 1 \Rightarrow |f(x_n)| < 1 + |A|$$

所以  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有上界.

充分性: 若  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有上界, 则由确界定理得到  $f(x)$  有上确界  $\sup_{x \in [a, +\infty)} f(x)$ , 由确界定义知道,  $\forall \varepsilon_n = \frac{1}{n}, (n = 1, 2, \dots), \exists x_n \in [a, +\infty)$ , 使得  $|f(x_n) - A| < \frac{1}{n}$ , 于是得到数列  $\{x_n\}$  满足

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ , 所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  使得  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ , 由于  $f(x)$  为定义于  $[a, +\infty)$  上的单调增加函数, 所以任意  $x > x_{N+1}$ , 均有  $f(x_{N+1}) \leq f(x) \leq A$ , 于是  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

## 例题 2.1.26 2.6-B-1

证明: 当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$ ,  $\arctan x \sim \frac{1}{4}\sin 4x$ .

解 2.1.26. (1)  $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim x \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}, x \rightarrow 0$ .

(2)  $\arctan x \sim x = \frac{4x}{4} \sim \frac{\sin 4x}{4}$ , 由  $\tan x \sim x, x \rightarrow 0$  换元  $x = \arctan y$  可得  $y \sim \arctan x, x \rightarrow 0$ .

## 例题 2.1.27 2.6-B-2

利用等价无穷小求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$ .

解 2.1.27. (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-n}$ .

当  $m > n$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = 0$ ;

当  $m = n$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = 1$ ;

当  $m < n$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n} = \infty$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - 1}{\frac{1}{2}x^2} = 1$ .

## 例题 2.1.28 2.6-B-3

证明: (1)  $2x - x^2 = O(x) (x \rightarrow 0)$ ; (2)  $\sqrt{1+x} - 1 = o(1) (x \rightarrow 0)$ ;

(3)  $2x^3 + 2x^2 = O(x^3) (x \rightarrow \infty)$ ; (4)  $(1+x)^n = 1 + nx + o(x) (x \rightarrow 0)$ .

解 2.1.28. (1) 验证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 2x) = 2$  为非零常数, 故  $2x - x^2 = O(x) (x \rightarrow 0)$ .

(2) 由定义, 验证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{1+\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} = 0$ , 故  $\sqrt{1+x} - 1 = o(1) (x \rightarrow 0)$ .

(3) 由定义, 验证  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{2}{x}) = 2$  为非零常数, 故  $2x^3 + 2x^2 = O(x^3) (x \rightarrow \infty)$ .

(4) 验证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots + x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{n(n-1)}{2}x + \dots + x^{n-1} \right) = 0$ , 故

$(1+x)^n = 1 + nx + o(x) (x \rightarrow 0)$ .

### 例题 2.1.29 2.6-B-4

设在某一极限过程中,  $\alpha$  和  $\beta$  都是无穷小. 证明: 如果  $\alpha \sim \beta$ , 则  $\beta - \alpha = o(\alpha)$ , 反之, 如果  $\beta - \alpha = o(a)$ , 则  $\alpha \sim \beta$ .

解 2.1.29. 如果  $\alpha \sim \beta$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 1 - 1 = 0$ , 故  $\beta - \alpha = o(\alpha)$ .

如果  $\beta - \alpha = o(a)$ , 则  $0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} - 1$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 故  $\alpha \sim \beta$ .

### 例题 2.1.30 2.6-B-5

证明: 当  $x \rightarrow 0$  时, 有:

(1)  $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n), (0 < n < m)$ ; (2)  $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}), (n, m > 0)$ .

解 2.1.30. (1) 由定义得到

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)o(1)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} o(1) = 0 \Rightarrow o(g(x)) = g(x)o(1)$$

考虑

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) + o(x^m)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n o(1) + x^m o(1)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} (o(1) + x^{m-n} o(1)) = \lim_{x \rightarrow 0} o(1) = 0$$

故  $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n), (0 < n < m)$ ; (2) 考虑

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) \cdot o(x^m)}{x^n \cdot x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n o(1) x^m o(1)}{x^n \cdot x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} (o(1) \cdot o(1)) = 0$$

由定义得到  $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m}), (n, m > 0)$ .

### 例题 2.1.31 2.7-B-2

判断  $x = 0$  处的间断点类型 (1)  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + nx^2}$ .

解 2.1.31. (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} = \frac{0+1}{0-1} = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} = \frac{1}{1} = 1$ , 所以  $f(x)$  在  $x = 0$  两侧的极限均存在, 但不等于  $f(0)$ , 且  $f(0^-) \neq f(0^+)$ , 所以是跳跃间断点.

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{n} + x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{0 + x^2} = \frac{1}{x}$ , 所以  $x = 0$  为无穷间断点.

### 例题 2.1.32 2.7-B-3

设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ , 试找出其间断点.

解 2.1.32. 观察发现分母在  $x = 1$  处的变化速度很快, 计算  $f(x)$  的分段函数得到:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = -1 \\ 0, & |x| > 1 \\ 1 + x, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

所以  $f(1^-), f(1), f(1^+)$  都不等, 所以  $x = 1$  为间断点.

### 例题 2.1.33 2.7-B-4

试确定  $a, b$  的值, 使  $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$  有无穷间断点  $x = 0$ , 有可去间断点  $x = 1$ .

解 2.1.33. (1) 由题意得到  $f(x)$  在  $x = 0$  处左极限和右极限至少一个为无穷大, 假设  $a \neq 0$ , 由于  $f(x)$  为初等函数, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)} = \frac{1-b}{a}$  为常数, 矛盾, 所以  $a = 0$ ; 当  $b = 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$ , 所以需要同时满足  $a = 0, b \neq 1$ , 下证充分性, 当  $a = 0, b \neq 1$  时

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} + \frac{e-b}{x-1} = \infty$$

(2) 要使得  $f(x)$  有可去间断点  $x = 1$ , 则  $f(1^-) = f(1^+)$ , 假设  $b \neq e$ , 计算发现

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e-b}{(x-1)(1-a)} = \infty$$

矛盾, 所以  $b = e$  为必要条件, 当  $b = e$  时, 计算极限并使用等价无穷小替换:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{1-a}$$

所以  $a \neq 1$ , 下面证明充分性. 当  $a \neq 1, b = e$  时,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x-a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{1-a} = e$ , 所以此时  $f(1^-) = f(1^+) = e$ , 因此  $x = 1$  为可去间断点, 等价于  $a \neq 1, b = e$ . 所以答案为  $a = 0, b \neq 1; a \neq 1, b = e$ .

### 例题 2.1.34 2.8-A-3 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^{3 \sec x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x)^{\cos \frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(\cos^2 x + \sqrt{1-x^2})}{e^x + \sin x} + (1+x)^x \right]$$

解 2.1.34. (1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^{3 \sec x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^3 = e^3$ .

(2) 由于该函数为初等函数, 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x)^{\cos \frac{1}{x}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \frac{\pi}{2}$ .

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(\cos^2 x + \sqrt{1 - x^2})}{e^x + \sin x} + (1+x)^x \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 - x^2}) = 1 + \ln 2.$$

### 例题 2.1.35 2.8-A-5

证明下列方程在给定区间至少有一个根:  $x2^x = 1, x \in [0, 1]; x^3 + px - q = 0, p > 0, x \in R$

解 2.1.35. (1) 设初等函数  $f(x) = x2^x - 1$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = -1, f(1) = 1$ , 由零点存在性定理知  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有至少一个根.

(2) 设初等函数  $g(x) = x^3 + px - q$  在  $R$  上连续,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} - \frac{q}{x^3}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} - \frac{q}{x^3}\right) = +\infty \end{cases}$$

零点存在性定理知  $g(x)$  在  $R$  上有至少一个根.

### 例题 2.1.36 2.8-A-6

设  $f(x) \in C[0, 1]$ , 并且  $\forall x \in [0, 1], 0 < f(x) < 1$  (画-图). 求证:  $\exists x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

解 2.1.36. 设连续函数  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(0) = f(0) - 0 > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$ , 由零点存在性定理知  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上有根  $x_0$ ,  $\exists x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

### 例题 2.1.37 2.8-B-2

证明: 若  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  都存在, 则  $f(x)$  必有界.

解 2.1.37. 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则任意  $\varepsilon_1 > 0$ , 存在  $N_1 \in R$  使得  $\forall x > N_1$ , 有  $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ , 即  $A - \varepsilon_1 < f(x) < A + \varepsilon_1$ , 说明  $f(x)$  在  $(N_1, +\infty)$  有上界  $A + \varepsilon_1$  和下界  $A - \varepsilon_1$ ; 设  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ , 则任意  $\varepsilon_2 > 0$ , 存在  $N_2 \in R$  使得  $\forall x < N_2$ , 有  $|f(x) - B| < \varepsilon_2$ , 即  $B - \varepsilon_2 < f(x) < B + \varepsilon_2$ , 说明  $f(x)$  在  $(-\infty, N_2)$  有上界  $B + \varepsilon_2$  和下界  $B - \varepsilon_2$ ; 由于  $f(x)$  在  $[N_2, N_1]$  上连续, 所以在  $[N_2, N_1]$  上也有上界  $C_1$ , 有下界  $C_2$ , 则取  $D_1 = \max\{C_1, A + \varepsilon_1, B + \varepsilon_2\}, D_2 = \min\{C_2, A - \varepsilon_1, B - \varepsilon_2\}$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有上界  $D_1$  和下界  $D_2$ ; 证毕.

### 例题 2.1.38 2.8-B-3

设  $f(x) \in C(a, b)$ , 且  $f(a^+)$  与  $f(b^-)$  都存在, 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续.

解 2.1.38. 补充定义函数  $g(x) = \begin{cases} f(a^+), & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \\ f(b^-), & x = b \end{cases}$ ，则  $g(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+) = g(a)$ ，所以  $g(x)$  在  $a$  点右连续，同理  $g(b)$  在  $b$  点左连续，由此可知  $g(x)$  在  $[a, b]$  上一致连续，那么  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续。

**例题 2.1.39 2.8-B-4**

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [a, b]$ ， $L$  为常数，证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续。

解 2.1.39. 任意  $\varepsilon > 0$ ，存在仅与  $\varepsilon$  有关的  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ ，使得  $\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$ ，有  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$ ，即  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续。

## 例题 2.1.40

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$ , 试求  $\{a_n\}$  的渐进.

解 2.1.40. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 前  $n$  项积为  $T_n$ , 则有

$$a_{n+1} = \frac{S_n}{T_n} = \frac{S_n}{a_n T_{n-1}} = \frac{S_n}{\frac{S_{n-1}}{T_{n-1}} T_{n-1}} = \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

转化为估计  $S_n$  的阶, 将  $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  代入得到:

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_{n+1} = S_n + \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

下面估计  $S_n$  的主阶, 先考察它的有界性和单调性, 由

$$S_n > 0, S_{n+1} - S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} > 0 \Rightarrow S_{n+1} > S_n$$

可知  $S_n$  是单调递增的, 再次代入递推式有

$$S_{n+1} - S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} > 1 \Rightarrow S_{n+1} - S_n > 1 \Rightarrow S_n \geq n$$

所以  $S_n$  发散到正无穷, 无上界, 我们再把这个结论代入到递推公式中:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{S_n}{S_{n-1}} \Leftrightarrow \frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{1}{S_{n-1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

当  $n$  趋于无穷时,  $S_n \sim n$ , 构造  $b_n = S_n - n$  以得到更精确的阶, 将  $S_n = n + b_n$  代入递推公式:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{n + b_n}{n - 1 + b_{n-1}} - 1 = \frac{1 + \frac{b_n}{n}}{1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{b_{n-1}}{n}\right)} - 1$$

泰勒展开可得:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= -1 + \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) \left(1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{b_{n-1}}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -1 + \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) - \frac{b_{n-1}}{n} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{b_n - b_{n-1}}{n} + \frac{b_n(1 - b_{n-1})}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \Rightarrow b_{n+1} - b_n &\sim \frac{1}{n} \Rightarrow b_n \sim \ln n + O(1) \Rightarrow S_n = n + b_n \sim n + \ln n + O(1) \end{aligned}$$

所以  $\{S_n\}$  的阶为  $n + \ln n + c + o(1)$ , 代入  $a_n = \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}$  得到:

$$a_n = \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} = \frac{(n-1) + \ln(n-1) + c + o(1)}{(n-2) + \ln(n-2) + c + o(1)}$$

并利用

$$\ln(n-1) = \ln n - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \ln(n-2) = \ln n - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

代入：

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= n - 1 + \ln n + c - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = n \left(1 + \frac{\ln n + c - 1}{n} - \frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ S_{n-2} &= n - 2 + \ln n + c - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = n \left(1 + \frac{\ln n + c - 2}{n} - \frac{4}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \end{aligned}$$

故技重施：

$$\frac{1}{S_{n-2}} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln n + c - 2}{n} + \frac{(\ln n + c - 2)^2 + 4}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

代入得到

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{\ln n + c - 1}{n} - \frac{3}{2n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\ln n + c - 2}{n} + \frac{(\ln n + c - 2)^2 + 4}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 - \frac{\ln n + c - 2}{n} + \frac{\ln n + c - 1}{n} + \frac{(\ln n + c - 2)^2 + 2}{n^2} \\ &\quad - \frac{(\ln n + c - 1)(\ln n + c - 2)}{n^2} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{3 - c - \ln n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

### 例题 2.1.41

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$ , 找到一个正整数  $k$ , 使得  $n \geq k$  时,  
 $a_n < 1 + \frac{1}{n}$ .

解 2.1.41.

### 例题 2.1.42

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ , 求  $\{a_n\}$  的渐进.

解 2.1.42. 解微分方程

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} \Rightarrow \frac{da}{dn} = \frac{1}{a} \Rightarrow a da = dn \Rightarrow a \sim \sqrt{2n} \Rightarrow a_n^2 \sim 2n$$

设  $a_n^2 = b_n + 2n$ , 代入递推公式得到

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 \Leftrightarrow 2(n+1) + b_{n+1} = 2n + b_n + 2 + \frac{1}{2n + b_n}$$

化简得到  $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2n+b_n} = b_n + \frac{\frac{1}{2n}}{1 - (-\frac{b_n}{2n})}$ , 泰勒展开:

$$b_{n+1} - b_n \sim \frac{1}{2n} - \frac{b_n}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \Rightarrow b_n \sim \frac{1}{2} \ln n + c_n$$

再次代入递推公式:

### 例题 2.1.43

已知  $k$  为正整数, 求积分  $\int_0^\pi \frac{x \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx$

解 2.1.43.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = \int_{-\pi}^0 \frac{(x + \pi) \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \frac{x \sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx + \pi \int_0^\pi \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + \pi \int_0^\pi \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= -I + \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= -I + 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx \\ &= -I + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x} dx = -I + \frac{\pi^2}{2} \\ \Rightarrow I &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

### 例题 2.1.44

给出  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$ , 计算  $\int_0^1 \int_0^y \frac{\ln(1+x)}{x} dx dy$ .

解 2.1.44. 根据所给式子, 得到  $0 \leq x \leq y$  (因为  $x$  从 0 到  $y$  积分), 再根据外层积分确定  $0 \leq y \leq 1$ , 所以  $0 \leq x \leq y \leq 1$ , 所以:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^y \frac{\ln(1+x)}{x} dx dy &= \int_0^1 \int_x^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{(1-x) \ln(1+x)}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \int_0^1 \ln(x+1) dx \\ &= \frac{\pi^2}{12} - 2 \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

## 例题 2.1.45

求积分  $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

解 2.1.45.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} &= \int \frac{\sec^6 x dx}{1 + \tan^6 x} = \int \frac{\sec^6(\arctan t) d \arctan t}{1 + \tan^6(\arctan t)} \\ &= \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{(t^6+1)(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{(t^2+1)(t^4-t^2+1)} \\ &= \int \frac{1+t^2}{t^4-t^2+1} dt = \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}-1} dt \\ &= \int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+1} = \arctan(t-\frac{1}{t}) + C \\ &= \arctan(\tan x - \frac{1}{\tan x}) + C = \arctan(\frac{\tan^2 x - 1}{\tan x}) \\ &= \arctan(-2 \cot 2x) + C = C - \arctan(2 \cot 2x). \end{aligned}$$

## 例题 2.1.46

求积分  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x + \cos x}.$

解 2.1.46.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x + \cos x} &= \int \frac{dx}{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1)} \\ &= \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)^2} \quad (\text{令 } t = \tan x) \\ &= \int \left( \frac{1/4}{1+t} + \frac{-\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}}{1+t^2} + \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{(1+t^2)^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+t} dt + \frac{1}{4} \int \frac{1-t}{1+t^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1-t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \ln |1+t| + \frac{1}{4} \arctan t - \frac{1}{8} \ln(1+t^2) + \frac{1}{4} \cdot \frac{t+1}{1+t^2} + C \\ &= \frac{1}{4} \ln |1+\tan x| - \frac{1}{4} \ln |\sec x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(\sin x \cos x + \cos^2 x) + C \\ &= \frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x + C \end{aligned}$$

## 例题 2.1.47

求积分  $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$ .

解 2.1.47.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin x(1 + \cos x)} = \int \frac{dx}{4 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{8 \sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{dt}{4 \sin t \cos^3 t} = \int \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 dt}{4 \sin t \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{(\tan t^2 + 1)^2}{\tan t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(\tan(\arctan \theta)^2 + 1)^2}{\tan \arctan \theta} d \arctan \theta = \frac{1}{4} \int \frac{\theta^2 + 1}{\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \left( \theta + \frac{1}{\theta} \right) d\theta = \frac{1}{8} \theta^2 + \frac{1}{4} \ln |\theta| + C \\ &= \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln |\tan \frac{x}{2}| + C \end{aligned}$$

## 例题 2.1.48

求积分  $\int \frac{x e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx$ .

解 2.1.48.

$$\begin{aligned} \int \frac{x e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx &= \int \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \int \frac{e^{\ln t} \ln t}{(e^{\ln t} + 1)^2} d \ln t = \int \frac{\ln t}{(t + 1)^2} dt \\ &= \int \ln t d \left( -\frac{1}{1+t} \right) = -\frac{\ln t}{t+1} + \int \frac{1}{1+t} d \ln t \\ &= -\frac{\ln t}{t+1} + \int \frac{1}{t(t+1)} dt = -\frac{\ln t}{t+1} + \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= -\frac{\ln t}{t+1} + \ln t - \ln(t+1) + C = -\frac{x}{e^x + 1} + x - \ln(e^x + 1) + C \end{aligned}$$

## 第三章 一元函数微分学

### 3.1 习题 3.1

#### 例题 3.1.1 3.1-A-3

下列各式可否成为  $f(x)$  在  $x_0$  点的导数的定义？请说明理由。

- (1)  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内定义,  $x_0 \in (a, b)$ , 若极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$  存在, 则称该极限为  $f(x)$  在  $x_0$  点的导数。
- (2)  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内定义,  $x_0 \in (a, b)$ , 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  存在, 则称该极限为  $f(x)$  在  $x_0$  点的导数。
- (3)  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内定义,  $x_0 \in (a, b)$ , 若极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$  存在, 则称该极限为  $f(x)$  在  $x_0$  点的导数。

解 3.1.1. (1) 可以, 因为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = f'(x_0)$$

(2) 可以, 因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

(3) 不可以, 当  $f'(x_0)$  存在时, 该极限等于  $f'(x_0)$ , 这是因为

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \frac{1}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2}f'(x_0) = f'(x_0) \end{aligned}$$

但是当  $f'(x_0)$  不存在, 而左右导数存在时, 该极限推出的是左导数和右导数的平均值, 并非  $f'(x_0)$ , 比如当  $f(x) = |x|, x = 0$  导数不存在, 但是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x| - |-\Delta x|}{2\Delta x} = 0$$

矛盾, 所以不可以用作导数的定义。

## 例题 3.1.2 3.1-A-9

利用定义求函数在  $x = 0$  处的导数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

解 3.1.2. 利用定义, 有

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

## 例题 3.1.3 3.1-B-3

求证: 偶函数的导数是奇函数, 奇函数的导数是偶函数;

解 3.1.3. 设  $f(x)$  是偶函数, 所以  $f(x) - f(-x) = 0$ , 两边求导得到  $f'(x) + f'(-x) = 0$ , 所以偶函数的导数是奇函数; 设  $f(x)$  是奇函数, 所以  $f(x) + f(-x) = 0$ , 两边求导得到  $f'(x) - f'(-x) = 0$ , 所以奇函数的导数是偶函数

我们也可以考虑定义: 设  $f(x)$  是偶函数, 所以

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-(-h)} = -f'(-x)$$

所以偶函数的导数是奇函数; 设  $f(x)$  是奇函数, 所以

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(-x-h)}{-(-h)} = f'(-x)$$

所以奇函数的导数是偶函数。

## 例题 3.1.4 3.1-B-4

求证: 周期函数的导数仍然是周期函数

解 3.1.4. 设  $f(x)$  是周期函数,  $T$  是周期,  $f(x+T) = f(x)$ , 则两边求导得到  $f'(x+T) = f'(x)$ , 所以  $f'(x)$  也是周期函数, 也可以从定义考虑:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = f'(x+T)$$

所以  $f'(x)$  是周期函数.

## 例题 3.1.5 3.2-A-2

求导 (1)  $y = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ; (2)  $y = \frac{1}{x^3 + 2x + 1}$ ; (3)  $y = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$ .

解 3.1.5. (1)  $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ ; (2)  $y' = \frac{-3x^2 - 2}{(x^3 + 2x + 1)^2}$ ; (3)  $y' = -\frac{1 + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2}$

## 例题 3.1.6 3.2-A-4

求导 (1)  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ; (2)  $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ; (3)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ .

$$\text{解 3.1.6. (1)} y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2) y' = \frac{\sqrt{a^2-x^2} - x \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \frac{a^2}{(\sqrt{a^2-x^2})^3};$$

$$(3) y' = \frac{1 + \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

## 例题 3.1.7 3.2-B-1

设  $y = f(x)$  为严格递增的可导函数,  $x = \varphi(y)$  是它的反函数. 证明:

(1) 当  $h \neq 0$  时,  $f(x+h) - f(x) = k \neq 0$ , 若记  $f(x+h) = y+k$ , 则  $\varphi(y+k) = x+h$ .

(2) 当  $k \rightarrow 0$  时,  $\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \frac{h}{k} = \frac{h}{y+k-y} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)}$  趋于  $\frac{1}{f'(x)}$ .

**解 3.1.7.** (1) 由  $x = \varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$ , 以及  $y = f(x)$  为严格递增的可导函数, 所以  $\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} > 0$ , 所以  $x = \varphi(y)$  为严格递增的可导函数, 所以

$$f(x+h) = y+k \Rightarrow \varphi(f(x+h)) = x+h = \varphi(y+k)$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}, \text{ 这里 } h \rightarrow 0 \Leftrightarrow k \rightarrow 0.$$

## 例题 3.1.8 3.2-B-2

设  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ , 用  $\varphi$  表示  $f$  的反函数. 求证:  $f(1) = 7$ ,  $\varphi(7) = 1$ . 并计算  $\varphi'(7)$ .

**解 3.1.8.** 代入得到  $f(1) = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$ , 所以  $\varphi(7) = 1$ , 由  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$  可得  $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ , 所以  $\varphi'(7) = \frac{1}{f'(\varphi(7))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{10}$ .

## 例题 3.1.9 3.2-B-3

设  $y = (\arcsin x)^2$ , 证明  $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ .

**解 3.1.9.** 两边求导数得到  $y' = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\cos \arcsin x} = 2 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ , 所以  $\sqrt{1-x^2}y' = 2 \arcsin x$ , 再次两边求导得到  $\sqrt{1-x^2}y'' + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ , 等价变形就有  $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ .

## 例题 3.1.10 3.2-B-4

求下列函数的  $n$  阶导数  $y^{(n)}$ : (1)  $y = \frac{1}{1-x^2}$ ; (2)  $y = \sin^2 x$ .

解 3.1.10. (1) 裂项有  $y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$ , 所以  $y^{(n)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1+x} \right)^{(n)} + \left( \frac{1}{1-x} \right)^{(n)} \right]$ , 求  $n$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right]$$

$$(2) y = \sin^x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), y^{(n)} = \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right]^{(n)} = -2^{n-1} \cos \left( 2x + \frac{n\pi}{2} \right), \text{ 诱导公式得到} \\ y^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left( 2x + \frac{(n-1)\pi}{2} \right)$$