数学笔记

高等数学与线性代数

作者：你的名字

版本：第 1 版

日期： 2025 年 9 月 15 日

[数学笔记封面图片]

前言

本笔记记录了我在学习高等数学和线性代数过程中的重点内容和个人总结。笔记内容主要包括定义、定理、证明以及典型例题。

笔记的编写使用了 LaTeX 排版系统，以确保数学公式的精确性和排版的优美性。

作者简介

作者是一名数学爱好者，专注于高等数学和线性代数的研究。本笔记是作者在学习过程中的总结和思考。

作者

2025 年 9 月 15 日

目录

极限与连续

0.1 极限的定义

定义 0.1.1 (函数的极限). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（无论多么小），总存在正数 δ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

例 0.1.1. 证明 $\lim_{x\to 1}(2x+1) = 3$.

证明. 对于任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$，则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，

$$|(2x+1) - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$$

因此，由定义可知 $\lim_{x\to 1}(2x+1) = 3$. □

0.2 连续函数

定义 0.2.1 (连续). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

定理 0.2.1 (连续函数的性质). 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续，则它们的和、差、积、商（分母不为零）都在点 x_0 处连续。

导数与微分

0.3 导数的定义

定义 0.3.1 (导数). 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地函数取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$。如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$。

例 0.3.1. 求函数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 处的导数。

解 0.3.1. 直接求导即可

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0}(2 + h) = 2$$

0.4 微分的定义

定义 0.4.1 (微分). 设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义，如果函数的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微，而 $A\Delta x$ 叫做函数在点 x 处相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y = A\Delta x$。