# Euler常数及其应用

## ——关于一类初等极限

冬列

2023 年 2 月 10 日

# 前言

本文为作者关于Euler常数相关问题的一些入门小结，用于练习与分享.

冬列

2023 年 2 月 10 日

# 目录

# 第一章　Euler常数

## 1.1　e的巧证

我们来考虑一种简洁巧妙的方法证明正整数$n \to \infty$时$e$的极限表达式.

命题:对于$n \in \mathbb{Z}, x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

证明:依均值不等式:

$$x_n \cdot 1 = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left[\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n} \cdot 1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} = \frac{1}{y_{n+1}}$$

显然上述等号均不可取到.

故有:$2 = x_1 < x_n < y_n < y_1 = 4, \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$

即$\{x_n\}, \{y_n\}$均为单调有界数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

该极限的值就记作$e$.

## 1.2　延伸推演

由1.1有:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = x_n$$

$$即\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

$$累加得:\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} > \ln(n+1)$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n$$

$$即\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n}$$

记$c_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln n$，则由上述知:

$$c_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} < 0$$

即:$c_n$单调递减且有下界.

于是有$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$存在.

我们记$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$为$\gamma$，称作$Euler$常数，计算表明，$\gamma \approx 0.5772156649\&\&$

由此可写作:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \lim_{n\to\infty}\ln n + \gamma$$

## 1.3　变形手法与问题解决

例1 :求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

解:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} c_{2n} + \ln(2n) - (c_n + \ln n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \gamma + \ln 2 + \ln n - \gamma - \ln n$$

$$= \ln 2$$

例2 :求极限

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

解:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \ln 2$$

完.(未完待续?)