反函数与偏移一题

失序者*

（B 站大学卡塞尔学院, 尼伯龙根, -110011）

2021 年 8 月 27 日

摘要： 对称的不等式可能蕴含偏移。

关键字： 反函数

例 1 (by Cardinal) 若令 $g(x)=2\left(\frac{\ln(x+1)}{x}-1\right)$，讨论 x 与 $g(g(x))$ 之间的大小关系。

证明:(by 失序者) 注意到 $\frac{1}{x}+\ln x\geq 1$, 那么有

$$g'(x)=\frac{2}{x^2}\left(\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)\right)<0$$

这说明 $g(x)$ 递减，于是 $g(x)$ 必存在反函数，设为 $g^{-1}(x)$. 。于是可以得到一个对称关系：

$$x<0,g^{-1}(x)<g(x)\Leftrightarrow x>0,g(x)<0,g^{-1}(g(x))=x<g(g(x))$$

另外一部分同理。于是我们只需要判断 g 与其反函数的关系即可。同时注意到 $g(0)=0=g^{-1}(0)$, 我们只需证明 $x<0,\left(g^{-1}(x)\right)'>g'(x)$ 即可。另外一部分同理。

如果断言 $g^{-1}(x),g(x)\geq -x$ 且 $g'(x)$ 递增，我们有

$$\begin{aligned}x<0,\left(g^{-1}(x)\right)'>g'(x)&\Leftrightarrow x<0,\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}>g'(x)\\&\Leftrightarrow x<0,g'(x)g'\left(g^{-1}(x)\right)>1\\&\Leftarrow x<0,g'(x)g'(-x)>1\end{aligned}$$

另一部分由对称性也就可以得到。下面证明前面的断言，由于 $g'(0)=-1$, 所以我们只需证明 $g''(x)>0$ 即可。

$$\begin{gathered}g''(x)=2\left(\frac{2\ln(1+x)}{x^3}-\frac{3x+2}{x^2(1+x)^2}\right)>0\\ \Leftarrow\frac{2}{1+x}>\frac{2+4x}{(1+x)^3}\Leftrightarrow(x+1)^2>1+2x\end{gathered}$$

于是得证。然后我们利用切线放缩：

$$\ln\left(-g'(x)\right)\geq -\frac{4}{3}x$$

---

*Email: 1205207650@qq.com

可以得到：

$$\ln\left(g'(x)\,g'(-x)\right) > -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x = 0 \Leftrightarrow g'(x)\,g'(-x) > 1$$

故原命题得证。有：

$$\frac{g(g(x))}{x} > 1$$

$\square$