

## 数 学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $M=\emptyset$ ,  $N=\{\emptyset\}$ , 则下列说法错误的是

- A.  $M \in N$       B.  $M \subseteq N$       C.  $M \cup N = N$       D.  $\complement_M M = M$

2. 若复数  $z_1, z_2$  满足  $z_1 \bar{z}_2 = 1+i$ , 则  $\bar{z}_1 z_2 =$

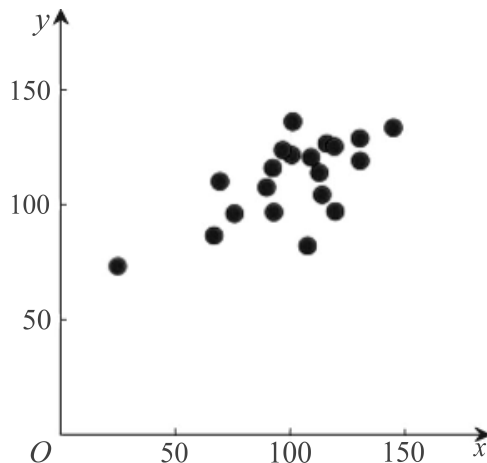
- A.  $1+i$       B.  $1-i$       C.  $-1+i$       D.  $-1-i$

3. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $I$ , 则 “ $\forall a \in \{x|x \in I \text{ 且 } -x \in I\}, f(a)+f(-a)=0$ ” 是 “ $f(x)$  是奇函数” 的

- A. 充分必要条件      B. 既不充分也不必要条件  
C. 充分不必要条件      D. 必要不充分条件

4. 为研究英语成绩与语文成绩之间的相关关系，

某同学收集班里几名同学某次考试的语文成绩和英语成绩，以英语成绩为自变量  $x$ ，以语文成绩为因变量  $y$ ，绘制出散点图如图所示，并得到回归直线方程  $\hat{y}=0.4x+70$ . 若该同学又以语文成绩为自变量  $x$ ，以英语成绩为因变量  $y$ ，得到下列选项中的一个回归直线方程，则该选项是



- A.  $\hat{y}=0.2x+78$       B.  $\hat{y}=0.4x+56$       C.  $\hat{y}=1.1x-21$       D.  $\hat{y}=2.5x-175$

参考公式：对于一组数据  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , 其回归直线  $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$  斜率和

$$\text{截距的最小二乘估计为: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

$$\text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

5. 若函数  $f(x)$  的图象关于过原点的直线  $l$  对称, 且当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) = |\sin x|$ , 则  $l$  倾斜角的最大值为

- A.  $\frac{1}{2}\pi$                       B.  $\frac{5}{8}\pi$                       C.  $\frac{3}{4}\pi$                       D.  $\frac{7}{8}\pi$

6. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $2S_n = a_n^2 + a_n$ , 则  $a_3$  所有可能取值的和是

- A. 3                              B. 4                              C. 5                              D. 6

7. 给定  $\triangle ABC$ ,  $P$  为空间内一动点, 满足  $\angle PAB = \angle PAC$ ,  $\angle ABC = \angle PBC$ . 若一半径为  $|AB|$  的圆与点  $P$  的轨迹有且仅有 4 个公共点, 则  $\angle C$  的取值范围是

- A.  $(0, \frac{\pi}{2})$                       B.  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$                       C.  $(0, \pi)$                       D.  $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

8. 设  $m$  是大于 1 的整数, 离散型随机变量  $X$  的可能取值为  $1, 2, \dots, m$ , 满足对任意一个正整数  $k \leq m-1$ ,  $4^{P(X=k)} - 4^{P(X=k+1)} = P(X=k)$ . 若  $P(X=1) > a$  一定成立, 则  $a$  的最大值是

- A.  $\frac{1}{2}$                               B.  $\frac{1}{e}$                               C.  $\frac{1}{3}$                               D.  $\frac{1}{4}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知向量  $a, b, c$  满足  $(a \cdot b)c = (a \cdot c)b$ ,  $(b \cdot c)a = (b \cdot a)c$ ,  $(c \cdot a)b = (c \cdot b)a$ , 则  $a$  与  $b$ ,  $b$  与  $c$ ,  $c$  与  $a$  中共线的可能有且仅有

- A. 0 组                              B. 1 组                              C. 2 组                              D. 3 组

10. 已知四面体  $ABCD$  的外接球球心为  $O_1$ , 内切球球心为  $O_2$ , 满足  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $BC \perp CD$ ,  $P$  是线段  $AC$  上的动点, 实数  $\mu, \lambda$  满足  $\overrightarrow{PO_1} = \mu \overrightarrow{PA} + \lambda \overrightarrow{PD}$ , 实数  $a, b, c, d$  满足  $a\overrightarrow{O_2A} + b\overrightarrow{O_2B} + c\overrightarrow{O_2C} + d\overrightarrow{O_2D} = \mathbf{0}$ , 则下列说法正确的是

- A.  $\mu = \lambda = \frac{1}{2}$                               B.  $b > a, c > d$

- C. 若  $PB \perp PD$ , 则  $PB \perp AD$                               D. 若  $PO_1 \perp AB$ , 则  $PO_1 \parallel$  平面  $BCD$

11. 已知  $F$  是抛物线  $C: y = x^2$  的焦点, 动点  $P$  满足从点  $P$  可以向  $C$  引两条夹角为  $60^\circ$  的切线, 切点分别为  $A, B$ , 过点  $F$  作直线  $AB$  的垂线, 垂足为  $Q$ , 则

- A.  $C$  的准线为  $y = -\frac{1}{4}$                               B. 点  $P$  的轨迹为双曲线

- C. 存在定椭圆总与直线  $AB$  相切                              D. 点  $Q$  的轨迹为圆

12. 已知函数  $f(x) = a^x \sin x - kx$  ( $a > 1, k > 0, |x| < \pi$ ) 有且仅有三个零点  $x_1, x_2, x_3$ , 则

- A.  $x_1 + x_2 + x_3 > 0$       B.  $f'(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}) > 0$   
 C.  $x_1 + x_2 + x_3$  关于  $k$  的导数为正      D.  $x_1 + x_2 + x_3$  关于  $a$  的导数为正

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $(1+x-x^2)^2$  各项系数的绝对值之和为\_\_\_\_\_.
14. 若实数  $a, b$  满足  $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} = 2$ , 则  $a^2 + 4b^2$  的最大值为\_\_\_\_\_.
15. 已知四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  侧棱长相等, 则  $\frac{\angle ABC_1 + \angle ADC_1}{\angle B_1CD_1}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
16. 已知  $O$  为坐标原点,  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  的左、右焦点,  $P$  为  $C$  上的点, 直线  $PF_1$  交  $C$  于另一点  $A$ , 直线  $PF_2$  交  $C$  于另一点  $B$ , 过点  $P$  作  $C$  的切线交  $\triangle PAB$  的外接圆于另一点  $Q$ . 则直线  $PQ, OQ$  的斜率之积为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

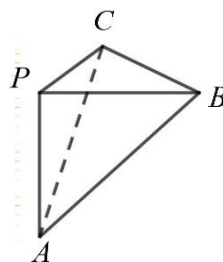
17. (10 分)

已知四边形  $ABCD$  的两条对角线相交, 请从①  $\angle CAD = 2\angle CBD$ , ②  $\angle ACD = 2\angle ABD$ , ③  $\angle BDA = \angle BDC$ , ④  $\angle ACB + \angle ABD = \frac{\pi}{2}$  中任选两个作为条件, 说明能否推出另外两个.

18. (12 分)

如图所示, 正三棱锥  $P-ABC$  的三个侧面两两垂直.

- (1) 证明: 正三棱锥  $P-ABC$  的三条侧棱两两垂直;  
 (2) 求二面角  $P-AB-C$  平面角的余弦值.



19. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项积为  $T_n$ , 满足  $a_1 = 4, a_{n+1} + \frac{1}{T_n^2} = 1$ .

- (1) 证明:  $T_{n+1}^2 > T_n^2 - 2$ ;  
 (2) 求最小正整数  $k$ , 使得  $T_k < 2$ .

20. (12 分)



下雨天, 有  $m(m \geq 3)$  人在食堂内用餐, 在门口都各放有自己的一把伞, 陆续用餐完毕拿伞离开。第一个拿伞的人不记得自己的伞是哪一把, 于是从门口的  $m$  把伞中随便拿了一把; 之后拿伞的人优先拿自己的伞, 如果发现自己的伞已经被别人拿了, 就从剩下的伞中随便拿一把。

- (1) 求最后一个拿伞的人拿到自己伞的概率;
- (2) 证明: 拿到自己伞的人所占比例的期望随  $m$  的增大而增大。

21. (12 分)

已知动点  $P$  在椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上, 过  $C$  的右焦点  $F(1, 0)$  作  $C$  的弦  $AB$ . 当  $AB$  与  $x$  轴垂直时,  $|AB| = 3$ .

- (1) 求  $C$  的方程;
- (2) 求直线  $PA, PB$  斜率之差绝对值的最小值。

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = x - \ln x$ .

- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
- (2) 证明: 曲线  $y = f(x)e^{1-x}$  上不存在不同的两点关于直线  $y = x$  对称。