21.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分.

令 $f(x)=\ln x$，取点 $(a_1,f(a_1))$ 过其曲线 $y=f(x)$ 做切线交 $y$ 轴于 $(0,a_2)$，取点 $(a_2,f(a_2))$ 过其做切线交 $y$ 轴于 $(0,a_3)$，若 $a_3<0$ 则停止,以此类推,得到数列 $\{a_n\}$.

(1)若正整数 $m\geq 2$，证明 $a_m=\ln a_{m-1}-1$；

(2)若正整数 $m\geq 2$，试比较 $a_m$ 与 $a_{m-1}-2$ 大小;

(3)若正整数 $k\geq 3$，是否存在 $k$ 使得 $a_1,a_2\cdots a_k$ 依次成等差数列?若存在,求出 $k$ 的所有取值,若不存在,试说明理由.

(1) $f'(x)=\frac{1}{x}$

$y-\ln a_n=\frac{1}{a_n}(x-a_n)$

可得 $a_{n+1}=-1+\ln a_n$

得证.

(2). $a_m-(a_{m-1}-2)$

$=\ln a_{m-1}-a_{m-1}+1\leq 0$

(利用 $\ln x\leq x-1$).

(3).

由题意.

$a_1+a_3=2a_2$

$\Leftrightarrow \quad e^{a_2+1}+\ln a_2-1=2a_2$

$f(x)=e^{x+1}+\ln x-1-2x.$

$f'(x)=e^{x+1}+\frac{1}{x}-2$

$\geqslant x+2+\frac{1}{x}-2$

$=x+\frac{1}{x}$

$>0.$

故 $f(x)$ 单调增.

又 $f(1)>0 \quad f\left(\frac{1}{e^{100}}\right)<0.$

$\exists$ 唯一 $x_0\in\left(\frac{1}{e^{100}},1\right)$ 使 $f(x_0)=0.$

此时 $a_1=e^{x_0+1}$

$a_2=x_0$

$a_3=\ln x_0-1$

故 $k=3$ 满足

且 $a_3 = \ln x_0 - 1 < 0$.

故仅有 $k=3$ 满足