华南理工大学
South China University of Technology

工科数学分析
作业

作者：夏同
学院：计算机科学与工程学院
班级： 1 班
学号： 202530451676
日期： 2025 年 10 月 8 日

厚德尚学 自强不息
务实创新 追求卓越

目录

第一章 集合，映射与函数

1.1 第 1 周作业

例题 1.1.1: 讨论下列函数的奇偶性

(1)$y = 3x - x^3$ (2)$2 + 3x - x^3$ (3)$y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$

(4)$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (5)$y = \sqrt{x(2-x)}$ (6)$y = 2^{-x}$

(7)$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ (8)$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

解 1.1.1. (1) 由于 $f(x) + f(-x) = 3x + 3(-x) - x^3 - (-x)^3 = 0$，故为奇函数

(2) 由于 $f(x) + f(-x) = 2 + 3x + 3(-x) + 2 - x^3 - (-x)^3 = 4$，不为奇函数；而 $4 \neq 2f(x) \Rightarrow f(x) \neq f(-x)$，故为非奇非偶函数

(3) 由于 $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(-x)$，故为偶函数

(4) 由于 $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = f(-x)$，故为偶函数

(5) 由于 $f(x) = \sqrt{x(2-x)} \neq \sqrt{-x(2+x)} = f(-x)$，故不为偶函数，由于 $f(x) + f(-x) = \sqrt{x(2-x)} + \sqrt{-x(2+x)} \neq 0$，故为非奇非偶函数

(6) 由于 $\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \neq 0 \\ f(x) = 2^{-x} \neq 2^{-(-x)} = f(-x) \end{cases}$，故为非奇非偶函数

(7) 由于 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) + f(-x) = x - 1 + (-x) + 1 = 0 \\ f(x) \neq f(-x) \end{cases}$，故为奇函数

(8) 由于 $f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln(-x^2 + (x^2+1)) = 0$，故为奇函数

例题 1.1.2: 研究函数的单调性

(1)$y = ax + b$ (2)$y = ax^2 + bx + c$ (3)$y = x^3$ (4)$y = a^x$

解 1.1.2. (1) 若 $a \geq 0$，则 y 单调递增；若 $a < 0$，则 y 单调递减；若 $a > 0$，则 y 严格单调递增

(2) 若 $a > 0$，则 y 先严格单调减后严格单调增，若 $a < 0$，则 y 先严格单调增后严格单调减，若 $a = 0$，则当 $b > 0$ 时，y 单调递增，当 $b < 0$ 时，y 单调递减；若 $a = b = 0$，则 y 非严格单调递增

(3) 若 $x_1 > x_2$，则 $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) > x_1 - x_2 > 0$ 故单调递增

(4) 需限定 $a > 0$，则当 $a > 1$ 时，y 单调递增，当 $a < 1$ 时，y 单调递减；若 $a = 1$，则 $y = 1$ 非严格单调递增；

例题 1.1.3: 哪些是周期函数？如果是说明其周期，并说明有无最小周期，有就求出来

$(1) y = \sin^2 x$ $(2) y = \sin x^2$ $(3) y = \cos(x-2)$
$(4) y = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$ $(5) y = x - [x]$ $(6) y = \tan|x|$

解 1.1.3. (1) 是周期函数，周期为 $k\pi, (k \in \mathbb{Z})$，最小正周期为 π

(2) 不是周期函数，因为

$$\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{(x+T)^2-x^2}{2} = 2\cos\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\sin\frac{2x+T^2}{2} \neq 0$$

则这样的 T 不存在.

(3) 是周期函数，周期为 $2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$，最小正周期为 2π.

(4)$y = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\lambda x + \arctan\dfrac{B}{A})$ 是周期函数，周期为 $\frac{2k\pi}{\lambda}, (k \in \mathbb{Z}, \lambda > 0)$，最小正周期为 $\frac{2\pi}{\lambda}, (\lambda > 0)$

(5) 是周期函数，因为 $[x]+1 = [x+1]$，则 $x+1-[x+1] = x+1-[x]-1 = x-[x]$，所以 $y = x-[x]$ 是周期函数，周期为 $\mathbb{Z}$，最小正周期为 1.

(6) 不是周期函数。证明：由于正切函数的一个周期是 π，假设 $\tan|x|$ 也是周期函数，则存在 $T > 0$ 使得对于定义域内的任意实数 x 都有 $|x| + \pi = |x+T|$，代入 $x = -\pi$ 得到 $T = 3\pi$，代入 $x = 0$ 得到 $T = \pi$，矛盾！所以 $y = \tan|x|$ 不是周期函数.

例题 1.1.4: 证明

两个奇函数之积为偶函数，奇函数和偶函数之积仍然是奇函数。

解 1.1.4. (1) 设 $f(x), g(x)$ 为两个奇函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(-g(-x)) = f(-x)g(-x)$$

故两个奇函数之积为偶函数

(2) 设 $f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)g(x) = (-f(-x))(g(-x)) = -f(-x)g(-x) \Leftrightarrow f(x)g(x) + f(-x)g(-x) = 0$$

故奇函数和偶函数之积仍然是奇函数.

例题 1.1.5: 证明

若函数 $f(x)$ 周期为 $T(T > 0)$，则函数 $f(-x)$ 的周期也是 T.

解 1.1.5. 设 $f(x)$ 周期为 T，则 $f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(-x+T) = f(-x)$，故 $f(-x)$ 的周期也是 T.

例题 1.1.6: 证明

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义域为 R 的单调函数，求证：$f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

解 1.1.6. 由于 $f(x), g(x)$ 是定义域为 R 的单调函数，则：

$$\forall x_1, x_2 \in R,\ (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0,\ \ \forall x_3, x_4 \in R,\ (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0,$$

那么一定存在 $x_1 = g(x_3), x_2 = g(x_4)$，则相乘

$$(g(x_3) - g(x_4))(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

结合 $x_3, x_4 \in R, (x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4)) \geq 0$ 就有：

$$(x_3 - x_4)(g(x_3) - g(x_4))^2(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0 \Rightarrow (x_3 - x_4)(f(g(x_3)) - f(g(x_4))) \geq 0$$

故 $f(g(x))$ 也是定义域为 R 的单调函数.

例题 1.1.7: 证明

$$(1)\ \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad (2)\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

解 1.1.7. (1) 构造复数 $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 + i \Rightarrow z_1 z_2 = 5 + 5i$，则：

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$$

(2) 由于 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，代入 $x = \arcsin x$ 即可得到：

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

第二章 极限

2.1 第 2 周作业

例题 2.1.1: 给出下列极限的精确定义

（1）$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

解 2.1.1. （1）对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时，$|f(x)| < \varepsilon$.

（2）对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时，$|(1+x)^{\frac{1}{x}} - e| < \varepsilon$.

例题 2.1.2: 利用极限的精确定义证明下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5x) = 24$ （2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

解 2.1.2. （1）要证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x-3| < \delta$ 时，$|(x^2+5x)-24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$。已经出现了 $|x-3|$，所以现在只需限定 $|x+8|$，先限定 $|x-3| < 1$，那么 $|x+8| < 12$，此时还需满足 $|(x+8)(x-3)| < 12|x-3| < \varepsilon$，得 $|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{12}$，故取 $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{12}\}$，当 $0 < |x-3| < \delta$ 时，$|(x^2+5x)-24| = |(x+8)(x-3)| < \varepsilon$.

（2）要证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，$|\frac{x^2-1}{x-1} - 2| = |x-1| < \varepsilon$。取 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，$|\frac{x^2-1}{x-1} - 2| < \varepsilon$.

例题 2.1.3: 证明

由 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |A|$，但反之不然。

解 2.1.3. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x)-A| =< \varepsilon$，所以由绝对值不等式得到 $|f(x)-A| > ||f(x)-|-A|| = ||f(x)|-|A|| > 0$，故 $||f(x)|-|A|| < \varepsilon$，所以由 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 能推出 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |A|$. 然后反过来，考虑定义在实数域上的函数 $f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ -1, x \notin Q \end{cases}$，其极限 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = 1$，但是 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在。

例题 2.1.4: 利用极限的精确证明

$\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$

解 2.1.4. 要证 $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$，只需证对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x - \sin a| = 2|\cos\dfrac{x+a}{2}||\sin\dfrac{x-a}{2}| < \varepsilon$。又因为 $2|\cos\dfrac{x+a}{2}||\sin\dfrac{x-a}{2}| < 2|\sin\dfrac{x-a}{2}| < 2|\dfrac{x-a}{2}| = |x-a|$，所以取 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$\lim\limits_{x\to a}|\sin x - \sin a| < \varepsilon$.