華南理工大學
South China University of Technology

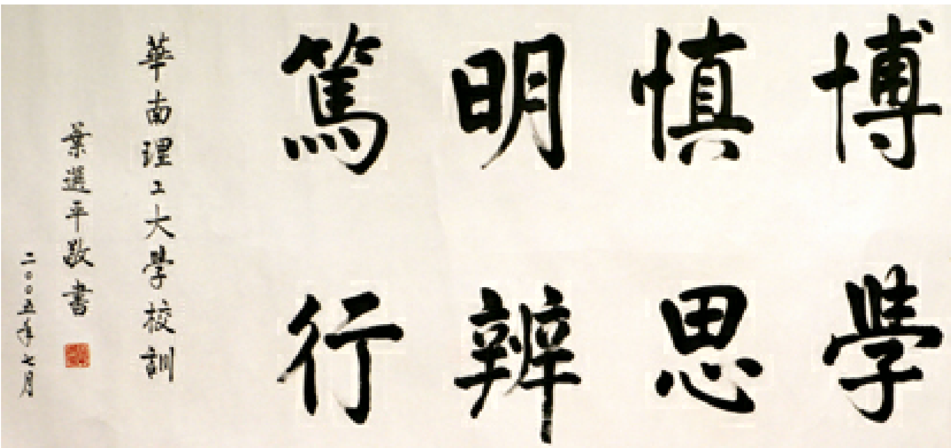
# 简单导数

作者：夏同

学院：计算机科学与工程学院

参考：群友

日期：2026 年 2 月 25 日



# 前言

收录简单导数群题，部分 CMC 非数类题型。

夏同
于华南理工大学
2026 年 2 月 25 日

# 目录

# 定义索引

# 定理索引



# 例题索引

# 第一章 微分中值定理

本章介绍微分中值定理的各种题型，主要介绍以埃米特插值为本质的高观点做题思路，同时以常数 K 值法为考场手段，辅以罗尔定理的多次使用，进行证明。首先介绍埃米特插值的基本形式和 K 值法的证明思路。

题目会给定基本函数 $f(x)$ 的某些性质，比如 $f$ 的光滑性如何，$f$ 在某些点的函数值和导数值等，然后是要证明的结论，我们通常要先构造一个插值多项式 $p(x)$，使得 $p(x)$ 尽可能地拟合 $f(x)$ 的行为，然后构造 $G(x)=f(x)-p(x)$，多次循环地利用罗尔中值定理。

先数一数原题给了多少条件，然后数一数要拟合什么点，拟合到多少阶，把所有点的要拟合阶数（包括 0 阶）相加，减去 1，就是插值多项式的次数，余项比插值多项式的次数高 1 阶。然后根据余项的阶数和原函数的光滑性条件，判断是属于什么类型。

## 1.1 插值法

### 1.1.1 例题: K 值法

$f(x) \in C^2[a,b]$，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$$

**解 1.1.1.** 取 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，则 $F(x) \in C^3[a,b]$，且 $F'(x) = f(x)$，所以要证明的结论等价于证明:$F(x) \in C^3[a,b]$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2 F'''(\xi)}{24}$$

插 $F(a), F(b), F\left(\frac{a+b}{2}\right), F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$，一共 4 个条件，余项 4 阶，插值多项式 3 次，导数不够，属于对 $F''' = p'''$ 类型，先写出拉格朗日插值部分，然后根据本题最高只需拟合到 1 阶导数，而且只有 1 个点才需要拟合到 1 阶导数，待定 $1-1=0$ 阶多项式 $r$:

$$\begin{aligned} p(x) = {}& \frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}F(a) + \frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-a)}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}F(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}F\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & + c(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

这个式子自动满足 $p(a) = p(b) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 求导数并令 $p'(\frac{a+b}{2}) = F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$：

$$\begin{aligned} p'(x) = {}& \frac{F(a)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}\left(x-\frac{a+b}{2}+x-b\right) + \frac{F(b)}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}\left(x-\frac{a+b}{2}+x-a\right) \\ & + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}\left((x-a)+(x-b)\right) \\ & + c(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-\frac{a+b}{2}}\right) \\ = {}& \frac{F(a)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}\left(x-\frac{a+b}{2}+x-b\right) + \frac{F(b)}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}\left(x-\frac{a+b}{2}+x-a\right) \\ & + \frac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}(x-a+x-b) \\ & + c\left((x-a)(x-b)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\right) \end{aligned}$$

$$p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{F(a)}{a-b} + \frac{F(b)}{b-a} - \frac{c}{4}(b-a)^2 = F'\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{4\left(\frac{F(b)-F(a)}{b-a} - F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(b-a)^2}$$

构造 $G(x) = f(x) - p(x)$，则 $G(a) = G(b) = G\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$，由 Rolle 定理，存在 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$，存在 $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得 $G'(\xi_2) = 0$，加上 $G'(\frac{a+b}{2}) = 0$，由 Rolle 定理，存在 $\xi_3 \in (\xi_1, \frac{a+b}{2})$ 使得 $G''(\xi_3) = 0$，存在 $\xi_4 \in (\frac{a+b}{2}, \xi_2)$ 使得 $G''(\xi_4) = 0$，由 Rolle 定理，存在 $\xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (a,b)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$，所以 $F'''(\xi) = p'''(\xi) = 6c$，即：

$$F'''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3}(F(b)-F(a)) - \frac{24}{(b-a)^2}F'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

1.1.2 例题:

设 $f \in C^1[a,b] \cap D^3(a,b)$，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(a)+f'(b)}{2} - \frac{f'''(\xi)}{12}(b-a)^2$$

**解** 1.1.2. 插 $f(a), f(b), f'(a), f'(b)$，则插值多项式 3 次，余项 4 阶，但是条件只到 3 阶，属于 $f''' = p'''$ 类型，插值：

$$p(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + (kx+m)(x-a)(x-b)$$

此时自动保证 $p(a) = f(a), p(b) = f(b)$，参数 $k, m$ 待定，以期望 $p'(a) = f'(a), p'(b) = f'(b)$，解出 $k, m$.

$$p'(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + (ka+m)(a-b) = f'(a)$$
$$p'(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + (kb+m)(a-b) = f'(b)$$

相减得到

$$k = \frac{f'(b)+f'(a)}{(b-a)^2} - \frac{2(f(b)-f(a))}{(b-a)^3}$$

此时可以继续解方程得到 $m$，但是没有必要了，我们假装 $m$ 已知，设而不求就可以了设 $G(x) = f(x) - p(x)$，则 $G(a) = G(b) = 0, G'(a) = G'(b) = 0$，所以由罗尔中值定理，存在 $\xi_1 \in (a,b)$ 使得 $G'(\xi_1) = 0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_2, \xi_3$ 使得 $G''(\xi_2) = 0, G''(\xi_3) = 0$，最后由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $G'''(\xi) = 0$，所以

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 6k = \frac{6(f'(b)+f'(a))}{(b-a)^2} - \frac{12(f(b)-f(a))}{(b-a)^3}$$

1.1.3 例题:

设 $f\in C[0,2]\cap D(0,2)$，满足 $f(0)=f(2)=0,|f'(x)|\leqslant M,\forall x\in(0,2)$，证明

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M$$

**解** 1.1.3. 插 $f(0),f(2)$，插值多项式 1 次（仅拉格朗日插值式，用不到导数修正）, 余项 2 阶, 导数不够, 属于靠近哪边对哪边插模型。所以在 $[0,1]$ 上插 $f(0)$，在 $[1,2]$ 上插 $f(2)$，则写出两段插值式。

当 $x\in[0,1]$ 时，对 $f(x)$ 的插值为：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(\xi(x))}{1!}(x-0)=f'(\xi(x))x$$

这是拉格朗日中值定理的直接应用，所以不用考场翻译。得到

$$|f(x)|\leqslant|f'(\theta(x))|x\leqslant Mx$$

当 $x\in[1,2]$ 时，对 $f(x)$ 的插值为：

$$f(x)=f(2)+\frac{f'(\eta(x))}{1!}(x-2)=f'(\eta(x))(x-2)$$

同理，得到

$$|f(x)|\leqslant|f'(\eta(x))||(x-2)|\leqslant M(2-x)$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_1^2|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1 Mx\mathrm{d}x+\int_1^2 M(2-x)\mathrm{d}x=M\end{aligned}$$

1.1.4 例题:

设 $f \in D^2[0,1], f(0)=f(1)=0, |f''(x)| \leqslant M$，证明 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{12}$

**解** 1.1.4. 要拟合 $f(0), f(1)$ 一共两个插值条件，无导数条件需要拟合，所以插值多项式为一次，也不用待定多项式 $r$，余项到了 2 阶导数，符合题目所给条件，所以根据埃米特插值，存在 $\theta(x) \in (0,1)$ 使得：

$$f(x)=\frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1), \forall x \in [0,1]$$

这个结论可以用 k 值法来证明，由

$$f(x)-Kx(x-1)=0$$

的条件（其中 $K$ 与 $x$ 有关），设

$$F(y)=f(y)-Ky(y-1)$$

则 $F(0)=F(1)=F(x)=0$，罗尔得到 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0, \xi_1, \xi_2 \in (0,1)$，所以存在 $\theta(x) \in (0,1)$ 使得 $F''(\theta(x))=0$。对 $F(x)$ 求二阶导数得到

$$f''(\theta(x))-2K=0 \Rightarrow K=\frac{f''(\theta(x))}{2}$$

所以

$$f(x)=\frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 \frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{f''(\theta(x))}{2}\right| |x(x-1)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{M}{2}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{M}{12}\end{aligned}$$

**1.1.5 例题:**

设 $f \in C^3[0,2]$ 满足

$$f(0) = f'(0) = 0, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 8\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

求证存在 $\theta \in (0,2)$ 使得 $f'''(\theta) = 0$

**解** 1.1.5. 套路地，设 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$，$F(x) \in C^4[0,2]$，$F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$，且 $F(2) = 8F(1)$，这里我们使用插值法，就是找一个多项式去尽可能的拟合 $f$ 的行为。注意到 $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$，所以可以考虑插值多项式为 $p(x) = x^3(ax+b)$，代入 $F(2) = 8F(1)$ 得到 $a = 0$，所以 $p(x) = bx^3$，再由 $p(1) = F(1)$ 得到 $b = F(1)$，所以

$$p(x) = F(1)x^3$$

于是构造出

$$G(x) = F(x) - F(1)x^3$$

这个 $G(x)$ 满足

$$G(0) = G(1) = G(2) = 0, G'(0) = 0, G''(0) = 0$$

所以由罗尔中值定理，存在 $\xi_1 \in (0,1)\xi_2 \in (1,2)$，使得 $G'(\xi_1) = G'(xi_2) = 0$，搭配上 $G'(0) = 0$，所以又有罗尔中值定理，得知存在 $\theta_1, \theta_2$，使得 $G''(\theta_1) = G''(\theta_2) = 0$，同样的，搭配上 $G''(0) = 0$，又有罗尔中值定理，得知存在 $\eta_1 \in (0,1), \eta_2 \in (1,2)$ 使得

$$G'''(\eta_1) = G'''(\eta_2) = 0$$

所以由罗尔中值定理，得到存在 $\theta \in (0,2)$ 使得

$$G''''(\theta) = 0$$

而求导易得

$$G''''(x) = f'''(x) - p''''(x) = 0 \Rightarrow f'''(\theta) = 0$$

**1.1.6 例题:**

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2},\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$, 求证在 $(0,1)$ 存在 $\xi$ 使 $f'(\xi)=3$.

**解** 1.1.6. 套路式地，设

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, G(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

则有

$$F(0)=G(0)=0, F(1)=\frac{5}{2}, G(1)=\frac{3}{2}$$

而问题要证明的结论似乎仅与 $f(x)$（以及其导函数，原函数）有关，所以要从 $G(x)$ 中分出 $F(x)$ 或者 $f(x)$ 来，考虑分部积分：

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}F(x)=xF(x)|_0^1-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=1$$

则问题转化为 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上二阶可导，且 $F(0)=0,F(1)=\frac{5}{2},\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=1$，求证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F''(\xi)=3$。再取 $g(x)=\int_0^x F(x)\mathrm{d}x$，则 $g'(0)=0,g'(1)=\frac{5}{2}$，且 $g(0)=0,g(1)=1$，则问题转化为 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上三阶可导，求证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'''(\xi)=3$。4 个条件，余项 4 阶，插值多项式为 3 次，导数 3 阶不够，属于 $g'''=p'''$ 类型，构造插值多项式：

$$p(x)=\frac{x-0}{1-0}g(1)+\frac{x-1}{0-1}g(0)+(kx+m)x(x-1)=x+(kx+m)x(x-1)$$

求导并令 $p'(0)=g'(0),p'(1)=g'(1)$：

$$\begin{aligned}
&p'(x)=1+(kx+m)(2x-1)+kx(x-1)\\
&p'(0)=1-m=0\Rightarrow m=1\\
&p'(1)=1+(k+1)(1)+0k=1+k+1=2+k=\frac{5}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

构造 $W(x)=g(x)-p(x)$，则 $W(0)=W(1)=W'(0)=W'(1)=0$，且 $W(x)$ 在 $(0,1)$ 上三阶可导，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使得 $G'(\xi_1)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_2\in(0,\xi_1)$ 使得 $W''(\xi_2)=0$，存在 $\xi_3\in(\xi_1,1)$ 使得 $W''(\xi_3)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_3)\subset(0,1)$ 使得 $W'''(\xi)=0$，所以

$$g'''(\xi)=p'''(\xi)=6k=3$$

**1.1.7 例题:**

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 上二次可微，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi)$$

**解** 1.1.7. 拟合 $f(a),f(b),f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，设

$$G(x)=f(x)-\left[\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

则 $G(a)=G(b)=G\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$ 使得 $G'(\xi_1)=0$，存在 $\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ 使得 $G'(\xi_2)=0$，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使得 $G''(\xi)=0$，所以 $f''(\xi)=p''(\xi)$，求导：

$$p''(x)=4\frac{f(a)}{(b-a)^2}+4\frac{f(b)}{(b-a)^2}-8\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2}=\frac{4}{(b-a)^2}\left(f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

所以

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi)$$

**1.1.8 例题:**

设 $f\in C^3[-1,1]$ 满足 $f(-1)=0,f'(0)=0,f(1)=1$，证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得 $f'''(\xi)=3$

**解** 1.1.8. 插 $f(-1),f(1),f(0),f'(0)$，则插值多项式为三次，余项四阶，导数三阶不够，属于 $f'''=p'''$ 类型，构造插值多项式：

$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)}f(1)+\frac{(x-1)(x-0)}{(-1-1)(-1-0)}f(-1)+\frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)}f(0)+cx(x-1)(x+1)\\&=\frac{x(x+1)}{2}-(x^2-1)f(0)+c(x-1)(x+1)x\\p'(x)=&\frac{2x+1}{2}-2xf(0)+c\left((x-1)(x+1)+x(x+1)+x(x-1)\right)\\p'(0)=&\frac{1}{2}-c=0\Rightarrow c=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

构造 $G(x)=f(x)-p(x)$，则 $G(-1)=G(0)=G(1)=0,G'(0)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(-1,0)$ 使得 $G'(\xi_1)=0$，存在 $\xi_2\in(0,1)$ 使得 $G'(\xi_2)=0$，加上 $G'(0)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_3\in(\xi_1,0)\subset(-1,1)$ 使得 $G''(\xi_3)=0$，存在 $\xi_4\in(0,\xi_2)\subset(-1,1)$ 使得 $G''(\xi_4)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\xi_3,\xi_4)\subset(-1,1)$ 使得 $G'''(\xi)=0$，所以

$$f'''(\xi)=p'''(\xi)=6c=3$$

**1.1.9 例题:**

$f(x) \in C^4[0,1]$，三次多项式 $p(x)$ 满足 $p(0)=f(0), p(1)=f(1), p'(0)=f'(0), p'(1)=f'(1)$，证明

$$|f(x)-p(x)| \leqslant \frac{1}{384} \max_{x\in[0,1]}\{f''''(x)\}$$

**解** 1.1.9. 构造 $G(x)=f(x)-p(x)$，则 $G(0)=G(1)=0, G'(0)=G'(1)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1 \in (0,1)$ 使得 $G'(\xi_1)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_2 \in (0,\xi_1)$ 使得 $G''(\xi_2)=0$，存在 $\xi_3 \in (\xi_1,1)$ 使得 $G''(\xi_3)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (\xi_2,\xi_3) \subset (0,1)$ 使得 $G'''(\xi)=0$，现在因为罗尔定理的迭代次数受零点个数限制。要得到四阶导数的信息，需引入额外零点。即证

$$-\frac{1}{384} \max_{x\in[0,1]}\{f''''(x)\} \leqslant G(x) \leqslant \frac{1}{384} \max_{x\in[0,1]}\{f''''(x)\}$$

使用 K 值法解决，假设存在与 $x$ 有关的量 $K$，使得 $G(x)=K\dfrac{x^2(x-1)^2}{4!}$，再设函数 $H(y)=G(y)-K\dfrac{y^2(y-1)^2}{4!}$,则 $H(0)=H(1)=H(x)=0$,$H'(0)=H'(1)=0$,由罗尔中值定理,存在 $\xi_1 \in (0,x), \xi_2 \in (x,1)$ 使得 $H'(\xi_1)=H'(\xi_2)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_3 \in (0,\xi_1), \xi_4 \in (\xi_1,\xi_2), \xi_5 \in (\xi_2,1)$ 使得 $H''(\xi_3)=H''(\xi_4)=H''(\xi_5)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_6 \in (\xi_3,\xi_4), \xi_7 \in (\xi_4,\xi_5)$ 使得 $H'''(\xi_6)=H'''(\xi_7)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (\xi_6,\xi_7) \subset (0,1)$ 使得 $H^{(4)}(\xi)=0$，所以

$$f''''(\xi)-p''''(\xi)=f''''(\xi)-0=f''''(\xi)=G''''(\xi)=K\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}y^4}\left(\frac{y^2(y-1)^2}{4!}\right)$$

而且 $\frac{y^2(y-1)^2}{4!}$ 求 4 阶导数的值是 1，所以 $K=f''''(\xi)$，所以

$$f(x)-p(x)=\frac{f''''(\xi)x^2(x-1)^2}{4!} \leqslant \frac{1}{384}f''''(\xi)$$

取绝对值得到

$$|f(x)-p(x)| \leqslant \frac{1}{384} \max_{x\in[0,1]}\{f''''(x)\}$$

**1.1.10 例题:**

设 $f\in C^4[0,1]$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3f\left(\frac{1}{2}\right)=8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\mathrm{d}x$，求证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''''(\xi)=0$.

**解** 1.1.10. 取原函数 $F(x)$，则 $F(x)\in C^5[0,1]$，且 $F'(x)=f(x)$，

$$F(1)-F(0)+3F'\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(F\left(\frac{3}{4}\right)-F\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

插 $F(0),F(1),F\left(\frac{1}{2}\right),F'\left(\frac{1}{2}\right),F\left(\frac{3}{4}\right),F\left(\frac{1}{4}\right)$ 一共 6 个条件，余项 6 阶，插值多项式为 5 次，导数 5 阶不够，属于 $F^{(5)}=p^{(5)}$ 类型，插值：

$$\begin{aligned}
L(x)=&\frac{(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{4})(x-1)(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{3}{4})(0-\frac{1}{4})(0-1)(0-\frac{1}{2})}F(0)+\frac{(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{4})(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(1-\frac{3}{4})(1-\frac{1}{4})(1-0)(1-\frac{1}{2})}F(1)\\
&+\frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{4})}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}F\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{2})}{\left(\frac{3}{4}-0\right)\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}F\left(\frac{3}{4}\right)\\
&+\frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})}{\left(\frac{1}{4}-0\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}F\left(\frac{1}{4}\right)\\
s(x)=&c(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{4})(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2}),s'(\frac{1}{2})=\frac{1}{64}\\
p(x)=&L(x)+s(x)
\end{aligned}$$

此时

$$p(0)=F(0),p(1)=F(1),p\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right),p'\left(\frac{1}{2}\right)=F'\left(\frac{1}{2}\right),p\left(\frac{3}{4}\right)=F\left(\frac{3}{4}\right),p\left(\frac{1}{4}\right)=F\left(\frac{1}{4}\right)$$

求导并令 $p'\left(\frac{1}{2}\right)=F'\left(\frac{1}{2}\right)$，解得

$$c=64\left[F'\left(\frac{1}{2}\right)-L'\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

构造 $G(x)=F(x)-p(x)$，则 $G(0)=G\left(\frac{1}{4}\right)=G\left(\frac{1}{2}\right)=G\left(\frac{3}{4}\right)=G(1)=0$，罗尔中值定理得到 $G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=G\left(\frac{1}{2}\right)=G'(\xi_3)=G'(\xi_4)=0$，罗尔中值定理得到 $G''(\xi_5)=G''(\xi_6)=G''(\xi_7)=G''(\xi_8)=0$，罗尔中值定理得到 $G'''(\xi_9)=G'''(\xi_{10})=G'''(\xi_{11})=0$，罗尔中值定理得到 $G''''(\xi_{12})=G''''(\xi_{13})=0$，罗尔中值定理得到存在 $\xi\in(\xi_{12},\xi_{13})\subset(0,1)$ 使得

$$G^{(5)}(\xi)=0$$

所以

$$F^{(5)}(\xi)=p^{(5)}(\xi)$$

又因为 $p(x)$ 为五次多项式，所以 $p^{(5)}(x)\equiv 0$，所以

$$f''''(\xi)=F^{(5)}(\xi)=p^{(5)}(\xi)=0$$

**1.1.11 例题:**

设 $f \in C^2[0,1]$，满足 $f(0)=f(1)=0, \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$，证明 $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \geqslant 8$

**解** 1.1.11. 为了利用最小值条件，假设 $c \in (0,1)$ 使得 $f(c)=-1$，则插值条件为 $f(0)=f(1)=0, f(c)=-1, f'(c)=0$，插值式 3 次，余项 4 阶，导数 4 阶差 2 阶，属于靠近谁插谁的类型。

在区间 $[0,c]$ 上插 $f(0), f(c), f'(c)$，构造插值多项式：

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= \frac{x-c}{0-c}f(0)+\frac{x-0}{c-0}f(c)+k_1(x-0)(x-c) = -\frac{x}{c}+k_1x(x-c)\\
p_1'(x) &= -\frac{1}{c}+k_1(2x-c) \quad p_1'(c)=0 \Rightarrow k_1=\frac{1}{c^2}
\end{aligned}
$$

构造 $G_1(x)=f(x)-p_1(x)$，则 $G_1(0)=G_1(c)=0, G_1'(c)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1 \in (0,c)$ 使得 $G_1'(\xi_1)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_2 \in (\xi_1,c)$ 使得 $G_1''(\xi_2)=0$，所以 $f''(\xi_2)=p_1''(\xi_2)=\frac{2}{c^2}$.

在区间 $[c,1]$ 上插 $f(1), f(c), f'(c)$，构造插值多项式：

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= \frac{x-c}{1-c}f(1)+\frac{x-1}{c-1}f(c)+k_2(x-1)(x-c) = -\frac{x-1}{1-c}+k_2(x-1)(x-c)\\
p_2'(x) &= -\frac{1}{1-c}+k_2(2x-1-c) \quad p_2'(c)=0 \Rightarrow k_2=\frac{1}{(1-c)^2}
\end{aligned}
$$

构造 $G_2(x)=f(x)-p_2(x)$，则 $G_2(1)=G_2(c)=0, G_2'(c)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_3 \in (c,1)$ 使得 $G_2'(\xi_3)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_4 \in (c,\xi_3)$ 使得 $G_2''(\xi_4)=0$，所以 $f''(\xi_4)=p_2''(\xi_4)=\frac{2}{(1-c)^2}$.

综上所述，在区间 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上分别找到 $\xi_2,\xi_4$ 使得 $f''(\xi_2)=\frac{2}{c^2}, f''(\xi_4)=\frac{2}{(1-c)^2}$. 下面说明 $\max\left\{\frac{2}{c^2},\frac{2}{(1-c)^2}\right\} \geqslant 8$. 分类讨论即可：当 $c \in (0,\frac{1}{2}]$ 时，$\frac{2}{c^2} \geqslant 8$；当 $c \in (\frac{1}{2},1)$ 时，$\frac{2}{(1-c)^2} \geqslant 8$。即证 $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \geqslant 8$

**1.1.12 例题:**

设 $f \in D^2[-a,a], a>0$ 满足

$$f(-a)=-1, f(a)=1, f'(-a)=f'(a)=0, |f''(x)| \leqslant 1$$

证明 (1) $a \geqslant \sqrt{2}$ (2) $a > \sqrt{2}$.

**解** 1.1.12. 微分条件不足以插 4 个点, 靠近谁插谁模型. 但是没有其他约束条件，要找一个公共点能同时出现在两边插，只能是带入 $x=0$.

在区间 $[-a,0]$ 上插 $f(-a), f(0), f'(-a)$，构造插值多项式：

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{x-0}{-a-0}f(-a)+\frac{x+a}{0+a}f(0)+k_1(x+a)x=\frac{x}{a}+(\frac{x}{a}+1)f(0)+k_1(x+a)x \\ p_1'(x) &= \frac{1+f(0)}{a}+k_1(2x+a) \quad p_1'(-a)=0 \Rightarrow k_1=\frac{1+f(0)}{a^2} \\ \Rightarrow p_1(x) &= \frac{x}{a}+(\frac{x}{a}+1)f(0)+\frac{1+f(0)}{a^2}(x+a)x \end{aligned}$$

构造 $G_1(x)=f(x)-p_1(x)$，则 $G_1(-a)=G_1(0)=0, G_1'(-a)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_1 \in (-a,0)$ 使得 $G_1'(\xi_1)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi_2 \in (-a,\xi_1)$ 使得 $G_1''(\xi_2)=0$，所以 $f''(\xi_2)=p_1''(\xi_2)=\frac{2+2f(0)}{a^2}$.

在区间 $[0,a]$ 上插 $f(a), f(0), f'(a)$，构造插值多项式：

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{x-0}{a-0}f(a)+\frac{x-a}{0-a}f(0)+k_2(x-a)x=\frac{x}{a}+(\frac{x}{a}-1)f(0)+k_2(x-a)x \\ p_2'(x) &= \frac{1+f(0)}{a}+k_2(2x-a) \quad p_2'(a)=0 \Rightarrow k_2=\frac{1+f(0)}{a^2} \\ \Rightarrow p_2(x) &= \frac{x}{a}+(\frac{x}{a}-1)f(0)+\frac{1+f(0)}{a^2}(x-a)x \end{aligned}$$

构造 $G_2(x)=f(x)-p_2(x)$，则 $G_2(a)=G_2(0)=0, G_2'(a)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_3 \in (0,a)$ 使得 $G_2'(\xi_3)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi_4 \in (\xi_3,a)$ 使得 $G_2''(\xi_4)=0$，所以 $f''(\xi_4)=p_2''(\xi_4)=\frac{2+2f(0)}{a^2}$.

由条件 $|f''(x)| \leqslant 1$ 得

$$|1+f(0)| \leq \frac{a^2}{2}, |f(0)-1| \leq \frac{a^2}{2} \Rightarrow 1-\frac{a^2}{2} \leq f(0) \leq -1+\frac{a^2}{2}$$

两式同时成立要求 $1-\frac{a^2}{2} \leq -1+\frac{a^2}{2}$，解得 $a^2 \geq 2$，即 $a \geq \sqrt{2}$。

若 $a=\sqrt{2}$，则 $0 \leq f(0) \leq 0$，故 $f(0)=0$，且 $f''(\xi_2)=1$，$f''(\xi_4)=-1$。考虑积分表示：

$$\begin{aligned} f(0) &= f(-a)+f'(-a)(x+a)+\int_{-a}^{0}(0-t)f''(t)\mathrm{d}t=-1-\int_{-a}^{0}tf''(t)\,\mathrm{d}t \\ f(0) &= f(a)+f'(a)(0-a)+\int_{a}^{0}(0-t)f''(t)\mathrm{d}t=1-\int_{0}^{a}tf''(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

当 $t \leq 0$ 时，由 $f''(t) \leq 1$ 得 $tf''(t) \geq t$（因 $t \leq 0$），故

$$\int_{-a}^{0}tf''(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{-a}^{0}t\,\mathrm{d}t=-\frac{a^2}{2}=-1,$$

从而 $f(0) \le -1-(-1)=0$，等号成立仅当在 $[-a,0]$ 上 $f''(t)\equiv 1$。类似地，当 $t\ge 0$ 时，由 $f''(t)\ge -1$ 得 $tf''(t)\ge -t$，故

$$\int_0^a tf''(t)\,\mathrm{d}t \ge -\int_0^a t\,\mathrm{d}t = -\frac{a^2}{2} = -1,$$

从而 $f(0)\le 1-(-1)=2$，此上界非紧。改用 $f''(t)\le 1$ 得 $tf''(t)\le t$，故

$$\int_0^a tf''(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^a t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2} = 1,$$

从而 $f(0)\ge 1-1=0$，等号成立仅当在 $[0,a]$ 上 $f''(t)\equiv 1$。于是 $f(0)=0$ 要求 $f''\equiv 1$ 于 $[-a,0]$ 和 $[0,a]$，这与 $f''(\xi_4)=-1$ 矛盾。故 $a=\sqrt{2}$ 不可能。

综上，必有 $a>\sqrt{2}$。

### 1.1.1 定理: 拉格朗日插值积分余项

设 $f\in C^2[a,b]$，且 $f''$ 在 $[a,b]$ 上可积，则成立

$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\int_a^b f''(y)k(x,y)\mathrm{d}y$$

其中

$$k(x,y)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}(y-b), & b\geqslant y\geqslant x\geqslant a\\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b\geqslant x\geqslant y\geqslant a\end{cases}$$

考虑

$$g(x)=f(x)-\left(\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\right)$$

那么 $g(a)=g(b)=0, g''=f''$，拆分积分余项即可发现：

$$\begin{aligned}\int_a^b g''(y)\,k(x,y)\,dy &= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x g''(y)\,(a-y)\,dy+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b g''(y)\,(y-b)\,dy\\ &=\frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)\,g'(x)+\int_a^x g'(y)\,dy\right]+\frac{x-a}{b-a}\left[-g'(x)\,(x-b)-\int_x^b g'(y)\,dy\right]\\ &=\frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)\,g'(x)+g(x)\right]+\frac{x-a}{b-a}\left[-g'(x)\,(x-b)+g(x)\right]\\ &=g(x).\end{aligned}$$

**1.1.13 例题:**

设 $f \in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| \mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}$$

**解 1.1.13.** 由已知，$f \in C^2[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$。对任意 $x \in [a,b]$，利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{b-x}{b-a} f(x) + \frac{x-a}{b-a} f(x) \\
&= \frac{b-x}{b-a}\big[(a-x)f'(x)+f(x)\big] + \frac{x-a}{b-a}\big[(b-x)f'(x)+f(x)\big] \\
&= \frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)f'(x)+\int_a^x f'(y)\mathrm{d}y\right] + \frac{x-a}{b-a}\left[(b-x)f'(x)+\int_b^x f'(y)\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (a-y)\mathrm{d}f'(y) + \frac{x-a}{b-a}\int_b^x (b-y)\mathrm{d}f'(y) \\
&= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (a-y)f''(y)\mathrm{d}y + \frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-y)f''(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

取绝对值，并利用 $|f''(y)| = \left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right| |f(y)|$，得

$$|f(x)| \le \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (y-a)\left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right| |f(y)|\mathrm{d}y + \frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-y)\left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right| |f(y)|\mathrm{d}y.$$

设 $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$，则 $M>0$（否则 $f\equiv 0$，不等式显然成立）。取 $c\in(a,b)$ 使 $|f(c)|=M$。在上式中令 $x=c$，并注意到 $|f(y)|\le M$，$y-a\le c-a$（当 $y\in[a,c]$），$b-y\le b-c$（当 $y\in[c,b]$），故

$$\begin{aligned}
M &\le \frac{b-c}{b-a}\int_a^c (c-a)\left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right| M\mathrm{d}y + \frac{c-a}{b-a}\int_c^b (b-c)\left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right| M\mathrm{d}y \\
&= M\cdot\frac{(b-c)(c-a)}{b-a}\int_a^b \left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right| \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

因 $M>0$，两边消去 $M$ 得

$$1 \le \frac{(b-c)(c-a)}{b-a}\int_a^b \left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right| \mathrm{d}y.$$

由均值不等式，

$$\frac{(b-c)(c-a)}{b-a} \le \frac{1}{b-a}\left(\frac{(b-c)+(c-a)}{2}\right)^2 = \frac{b-a}{4},$$

代入上式即得

$$\int_a^b \left|\frac{f''(y)}{f(y)}\right| \mathrm{d}y \ge \frac{4}{b-a}.$$

（等号成立条件可进一步讨论，此处略。）

**1.1.14 例题:**

（2004 年全国 II 卷）函数 $f(x)=x\ln x$，求证：对于 $a>b>0$ 有

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)<(a-b)\ln 2$$

**解 1.1.14.** 设

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}f(b) \\ &= \frac{(x-a)(x-b)}{-\frac{(a-b)^2}{4}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{\frac{(a-b)^2}{2}}f(a)+\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{\frac{(a-b)^2}{2}}f(b) \\ &= \frac{2}{(a-b)^2}\left((x-\frac{a+b}{2})(x-b)f(a)+(x-a)(x-\frac{a+b}{2})f(b)-2(x-a)(x-b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

构造 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(a)=h\left(\frac{a+b}{2}\right)=h(b)=0$，由罗尔中值定理得存在 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}),\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ 使得 $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$，再由罗尔中值定理得存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $h''(\xi)=0$，所以

$$f''(\xi)=g''(\xi)=\frac{4}{(a-b)^2}\left(f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

问题转化为证明

$$\frac{(a-b)^2}{4}f''(\xi)=\frac{(a-b)^2}{4\xi}<(a-b)\ln 2\Leftrightarrow \xi>\frac{a-b}{4\ln 2}$$

**1.1.15 例题:**

设 $f\in D[a,b]$，且 $|f'(x)|\leqslant M, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，令 $|F(x)|=\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|$，证明:

(1) $|F(x)|\leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{8}$;

(2) 若 $f(a)=f(b)=0$，则 $|F(x)|\leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{16}$.

**解** 1.1.15. (1) $F(x)$ 两阶可导，$|F''(x)|\leqslant M, F(b)=F(a)=0$，插左右端点，微分条件足够，用 K 值法：设 $K$ 与 $x$ 有关，使得 $F(x)=K\frac{(x-a)(x-b)}{2!}$，构造 $G(y)=F(y)-K\frac{(y-a)(y-b)}{2!}$，则 $G(a)=G(b)=G(x)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(a,x),\xi_2\in(x,b)$ 使得 $G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\theta(x)\in(a,b)$ 使得 $G''(\theta(x))=0$，所以

$$f'(\theta(x))-K=0\Rightarrow K=f'(\theta(x))\Rightarrow F(x)=f'(\theta(x))\frac{(x-a)(x-b)}{2!}$$
$$|F(x)|\leqslant\frac{M}{2}|(x-a)(x-b)|\leqslant\frac{M}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{M(b-a)^2}{8}$$

(2) $F(x)$ 两阶可导，$|F''(x)|\leqslant M, F(a)=F(b)=F'(a)=F'(b)=0$，插左右端点，微分条件远远不够，属于靠近谁插谁的类型，不直接插左右端点和导数，而是引入 $x_0\in(a,b)$ 是 $|F(x)|$ 的极大值点（若极值点是端点处，此时结论显然成立），在 $(a,x_0)$ 和 $(x_0,b)$ 区间构造插值多项式。在区间 $[a,x_0]$ 上插 $f(a),f'(a),f(x_0),f'(x_0)$，构造插值多项式：

$$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}F''(\xi_1)=\frac{(x-a)^2}{2!}F''(\xi_1)$$
$$F(x)=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(\xi_2)=\frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(\xi_2)$$

相减得到

$$F(x_0)=\frac{(x_0-a)^2}{2!}F''(\xi_1)-\frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(\xi_2)$$

绝对值不等式得到

$$|F(x_0)|\leqslant\frac{1}{2!}\left(\frac{(x_0-a)^2}{2!}+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right)M=\frac{M}{4}\left((x_0-a)^2+(x-x_0)^2\right)$$

由于 $x\in(a,b)$，所以 $(x_0-a)^2+(x-x_0)^2\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{4}$，因此

$$|F(x_0)|\leqslant\frac{M(b-a)^2}{16}$$

最后提示一下，要看要证明的结论是什么，插值只是辅助手段，比如本题结论就是 $F(x)$ 的上下界，那么先看余项够不够微分条件用完，如果刚好，就是（1），如果差远了，就是（2），（2）中引入了 $F(x)$ 取到上下界时的自变量 $x_0$，在两个区间分别插值，最后相减得到 $F(x_0)$ 的表达式，绝对值不等式得到 $F(x_0)$ 的上界，再利用 $x\in(a,b)$ 得到最终结论。

**1.1.16 例题:**

设 $f(x)\in C^3[-1,1]$ 满足 $f(-1)=0, f'(0)=0, f(1)=1$，证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得

$$f'''(\xi)=3+\xi$$

**解** 1.1.16. 插 $f(-1), f(1), f(0), f'(0)$，则插值多项式为三次，余项四阶，导数差 1 阶，所以是 $f'''=p'''$ 模型，但是等号右边还有 $\xi$，所以对 $g(x)=f(x)-\frac{x^4}{24}$ 构造插值多项式，$g(-1)=-\frac{1}{24}, g'(0)=0, g(0)=f(0), g(1)=1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$，构造插值多项式 $p(x)$：

$$\begin{aligned}
p(x)&=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}g(-1)+\frac{(x-1)(x-(-1))}{(0-1)(0-(-1))}g(0)+\frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)}g(1)+cx(x-1)(x+1)\\
&=\frac{(x-0)(x-1)}{2}\left(-\frac{1}{24}\right)+\frac{(x-1)(x+1)}{-1}g(0)+\frac{(x-0)(x+1)}{2}\left(\frac{23}{24}\right)+cx(x-1)(x+1)\\
&=\frac{-x^2+x}{48}-(x^2-1)g(0)+\frac{23x^2+23x}{48}+cx(x-1)(x+1)\\
p'(x)&=\frac{-2x+1}{48}+(-2x)g(0)+\frac{46x+23}{48}+c\left((x-1)(x+1)+x(x+1)+x(x-1)\right)\\
p'(0)&=\frac{1}{48}+0+\frac{23}{48}-c=0\Rightarrow c=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

构造 $W(x)=g(x)-p(x)$，则 $W(-1)=W(1)=W'(0)=W(0)=0$，且 $W(x)$ 在 $(-1,1)$ 上三阶可导，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(-1,0)$ 使得 $W'(\xi_1)=0$，存在 $\xi_2\in(0,1)$ 使得 $W'(\xi_2)=0$，加上 $W'(0)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi_3\in(\xi_1,0)\subset(-1,1)$ 使得 $W''(\xi_3)=0$，存在 $\xi_4\in(0,\xi_2)\subset(-1,1)$ 使得 $W''(\xi_4)=0$，再由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\xi_3,\xi_4)\subset(-1,1)$ 使得 $W'''(\xi)=0$，所以

$$g'''(\xi)=f'''(\xi)-\xi=p'''(\xi)=6c=3\Leftrightarrow f'''(\xi)=3+\xi$$

**1.1.17 例题:**

设 $f \in C^1[0,1]$, 证明存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$f'(\xi) = \int_0^1 (12x-6) f(x) \, \mathrm{d}x$$

**解 1.1.17.** 上来就分部积分，将 $f(x)$ 独立出来，总是不会错的。

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (12x-6) f(x) \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x) \mathrm{d}(6x^2-6x) \\
&= f(x)(6x^2-6x)\big|_0^1 - \int_0^1 (6x^2-6x) \mathrm{d}f(x) \\
&= f(x)(6x^2-6x)\big|_0^1 - \int_0^1 (6x^2-6x) f'(x) \mathrm{d}x \\
&= -6\int_0^1 (x^2-x) f'(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

即证存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$f'(\xi) + 6\int_0^1 (x^2-x) f'(x) \mathrm{d}x = 0$$

由积分中值定理得：

$$\begin{aligned}
6\int_0^1 (x^2-x) f'(x) \mathrm{d}x = 6f'(\xi)\int_0^1 (x^2-x) \mathrm{d}x &= 6f'(\xi)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
= f'(\xi)\left(2x^3-3x^2\right)\big|_0^1 &= -f'(\xi)
\end{aligned}$$

于是命题得证

# 第二章 微分中值定理：构造函数法

## 2.1 一阶构造类

**2.1.1 例题:**

设 $f \in C[0,2] \cap D(0,2)$ 满足

$$f(0) = f(2) = 0, \lim_{x\to1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 5$$

则存在 $\xi \in (0,\eta)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}$$

**解 2.1.1.** 由极限条件得到 $f(1) = 2, f'(1) = 5$，先解微分方程：

$$\begin{aligned}
& y' = \frac{2x-y}{x} = 2 - \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = 2 \\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} y' + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} y = 2\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} y)' = 2\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} \\
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} y = 2\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} + C \Leftrightarrow xy = x^2 + C \\
\Leftrightarrow & y = x + \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

分离常数 $C$ 得到 $c = x(y-x)$，于是构造

$$c(x) = x(f(x) - x)$$

其中 $c(0) = 0, c(1) = 1, c(2) = -4$，求导得到

$$c'(x) = x(f'(x) - 1) + f(x) - x = xf'(x) + f(x) - 2x$$

于是由拉格朗日中值定理得 $\alpha \in (0,1), \beta \in (1,2)$, 使得

$$c'(\alpha) = \frac{c(1) - c(0)}{1-0} = 1, c'(\beta) = \frac{c(1) - c(2)}{1-2} = -5$$

由导数介值定理知存在 $\xi \in (0,\eta)$ 使得 $c'(\xi) = 0$

$$f'(\xi) = \frac{2\xi - f(\xi)}{\xi}$$

**2.1.2 例题:**

设 $f \in C[0,1] \cap D(0,1)$ 满足 $f(0)=0$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{\xi f(\xi)}{1-\xi}$$

**解** 2.1.2. 考虑微分方程

$$\begin{aligned}
y'=\frac{xy}{1-x}=\frac{x}{1-x}y &\Leftrightarrow y'+\frac{x}{x-1}y=0\\
&\Leftrightarrow y'\mathrm{e}^{\int\frac{x}{x-1}\mathrm{d}x}+\frac{x}{x-1}\mathrm{e}^{\int\frac{x}{x-1}\mathrm{d}x}y=0\\
&\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{\int\frac{x}{x-1}\mathrm{d}x}y\right)'=0\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{x+\ln(x-1)}y\right)'=0\Leftrightarrow((x-1)\mathrm{e}^{x}y)'=0\\
&\Leftrightarrow(x-1)\mathrm{e}^{x}y=c\Leftrightarrow y=\frac{c}{(x-1)\mathrm{e}^{x}}
\end{aligned}$$

分离常数得到：$c=\mathrm{e}^{x}(x-1)y$，构造函数 $c(x)=\mathrm{e}^{x}(x-1)f(x)$，求导得到

$$c'(x)=\mathrm{e}^{x}\left((x-1)f(x)+(x-1)f'(x)+f(x)\right)=\mathrm{e}^{x}\left((x-1)f'(x)+xf(x)\right)$$

即证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $c'(\xi)=0$，又注意到 $c(0)=c(1)=0$，由罗尔定理，命题显然成立.

**2.1.3 例题:**

设 $f \in C[-1,2] \cap D(-1,2)$ 且有 $f(-1) = f(2) = -\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 1$。证明对任何实数 $\lambda \in \mathbb{R}$，都存在 $\xi \in (-1,2)$，使得

$$f'(\xi) = \lambda \left[ f(\xi) - \frac{\xi}{2} \right] + \frac{1}{2}$$

**解** 2.1.3. 解微分方程，注意到这类微分方程的标准形式是 $y' + P(x)y = Q(x)$，往这方面凑就可以：

$$\begin{aligned}
y' = \lambda y - \frac{\lambda x}{2} + \frac{1}{2} &\Leftrightarrow y' - \lambda y = -\frac{\lambda}{2}x + \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow y' \mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x} + (-\lambda)\mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x} y = \mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x} \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}x \right) \\
&\Leftrightarrow \left( \mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x} y \right)' = \mathrm{e}^{\int(-\lambda)\mathrm{d}x} \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}x \right) \Leftrightarrow \left( \mathrm{e}^{-\lambda x} y \right)' = \mathrm{e}^{-\lambda x} \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda x}{2} \right) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda x} y = \int \mathrm{e}^{-\lambda x} \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda x}{2} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{-2\lambda} \int \mathrm{e}^{-\lambda x} (1 - \lambda x)\, \mathrm{d}(-\lambda x) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda x} y = \frac{1}{-2\lambda} \left( -\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} + c \right) \\
&\Leftrightarrow y = \frac{1}{-2\lambda} \left( -\lambda x + c \mathrm{e}^{\lambda x} \right)
\end{aligned}$$

分离常数 $c$ 得到

$$c = -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} y + \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

构造

$$\begin{aligned}
c(x) &= -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} f(x) + \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}(x - 2f(x)) \\
c'(x) &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}(1 - 2f'(x) - \lambda(x - 2f(x)))
\end{aligned}$$

等价于证明存在 $\xi \in (-1,2)$ 使得 $c'(\xi) = 0$，由于 $c(-1) = 0, c(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}\lambda \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}, c(2) = 3\lambda \mathrm{e}^{-2\lambda}$，由零点定理知存在 $\xi_1 \in (\frac{1}{2}, 2)$ 使得 $c'(\xi_1) = 0$，由罗尔定理知存在 $\xi_2 \in (-1, \xi_1) \subset (-1,2)$ 使得 $c'(\xi_2) = 0$，于是命题得证.

2.1.4 例题:

设 $f\in D\left[0,1\right]$ 且 $f\left(0\right)>0, f\left(1\right)>0, \displaystyle\int_0^1 f\left(x\right)dx=0$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'\left(\xi\right)+3f^3\left(\xi\right)=0$$

**解** 2.1.4. 此类构造虽然仍然是一阶构造，但是他要把部分 $f$ 视为已知函数来构造（动机是保留一阶微分方程的形式），对于本题，即 $3f^2$ 视为已知的函数考虑 $y'+3f^2y=0$. 解得 $y=ce^{-\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$, 分离变量得构造函数 $c\left(x\right)=f\left(x\right)e^{\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$ 注意到

$$c'\left(x\right)=e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}\left[f'\left(x\right)+3f^3\left(x\right)\right].$$

以及由积分中值定理，我们知道存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f\left(\theta\right)=\int_0^1 f\left(x\right)dx=0.$$

注意到若 $f$ 只有一个零点，则因为 $f\left(0\right)>0, f\left(1\right)>0$, 我们知道 $f\left(x\right)>0, \forall x\in[0,\theta)\bigcup(\theta,1]$, 从而 $\int_0^1 f\left(x\right)dx>0$, 这就是一个矛盾！于是存在 $\theta_1\neq\theta_2$, 使得 $f\left(\theta_1\right)=f\left(\theta_2\right)=0$. 现在就有 $c\left(\theta_1\right)=c\left(\theta_2\right)=0$, 由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'\left(\xi\right)+3f^3\left(\xi\right)=0.$$

## 2.2 二阶构造类

### 2.2.1 视为关于 $f'$ 的一阶构造类

2.2.1 例题:

设 $f\in D^2[0,1]$ 使得 $f(0)=f(1)$，证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得

$$f''(\eta)=\frac{2f'(\eta)}{1-\eta}$$

**解** 2.2.1. 解微分方程

$$\begin{aligned}
y'=\frac{2}{1-x}y\Leftrightarrow y'+\frac{2}{x-1}y=0&\\
&\Leftrightarrow y'\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x-1}\mathrm{d}x}+\frac{2}{x-1}\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x-1}\mathrm{d}x}y=0\\
&\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x-1}\mathrm{d}x}y\right)'=0\Leftrightarrow((x-1)^2y)'=0\\
&\Leftrightarrow c=(x-1)^2y
\end{aligned}$$

构造 $c(x)=(x-1)^2f'(x)$，求导得

$$c'(x)=2(x-1)f'(x)+(x-1)^2f''(x),\quad c'(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

即证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $c'(\xi)=0$，由已知 $c(1)=0$，以及罗尔中值定理知存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使得 $f'(xi_1)=0$，所以对应 $c(\xi_1)=0$，由罗尔中值定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $c'(\xi)=0$，得证.

2.2.2 例题:

设 $f\in D^2\left[0,1\right],f\left(0\right)=0,f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6},f\left(1\right)=\frac{\pi}{4}$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f''\left(\xi\right)\left(1+\xi^2\right)+2f'\left(\xi\right)\xi=0$$

**解** 2.2.2. 解微分方程

$$\begin{aligned}
y'(1+x^2)+2xy=0 &\Leftrightarrow y'+\frac{2x}{1+x^2}y=0\\
&\Leftrightarrow y'\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}+\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}y=0\\
&\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}y\right)'=0\Leftrightarrow(\mathrm{e}^{\ln(x^2+1)}y)'=0\Leftrightarrow(x^2+1)y=c
\end{aligned}$$

构造 $c(x)=f'(x)(1+x^2)$, 则 $c'(x)=2xf'(x)+(1+x^2)f''(x)$，转化为证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $c'(\xi)=0$。注意到 $f(0)=0,f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6},f(1)=\frac{\pi}{4}$，而 $\arctan 0=0,\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6},\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，故令

$$g(x)=f(x)-\arctan x,\quad x\in[0,1].$$

则 $g\in C^2[0,1]$ 且 $g(0)=g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=g(1)=0$。由罗尔定理，存在 $\xi_1\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\xi_2\in\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$ 使得

$$g'(\xi_1)=0,\quad g'(\xi_2)=0.$$

又 $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{1+x^2}$，于是

$$c(\xi_i)=(1+\xi_i^2)f'(\xi_i)=(1+\xi_i^2)\cdot\frac{1}{1+\xi_i^2}=1,\quad i=1,2.$$

因此 $c(\xi_1)=c(\xi_2)=1$。对 $c(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上用罗尔，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使得 $c'(\xi)=0$，即

$$f''(\xi)(1+\xi^2)+2f'(\xi)\xi=0.$$

### 2.2.2 难度在解微分方程的一类

**2.2.3 例题:**

设 $f\in D^2(\mathbb{R}), f(0)f(\pi)<0$, 证明存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得

$$f''(\xi)-2f'(\xi)\cot\xi+f(\xi)\left(1+2\cot^2\xi\right)=0.$$

**解** 2.2.3. 首先，解微分方程

$$y''-2y'\cot x+y(1+2\cot^2 x)=0.$$

令 $y=u\sin x$，代入可得 $u''=0$，故 $u=Cx+D$，因此通解为 $y(x)=(Cx+D)\sin x$，其中 $C,D$ 为常数。于是有

$$\frac{y(x)}{\sin x}=Cx+D\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{y(x)}{\sin x}\right)''=0.$$

受此启发，构造函数

$$g(x)=\frac{f(x)}{\sin x},\quad x\in(0,\pi).$$

计算得

$$g''(x)=\frac{f''(x)-2\cot x\,f'(x)+f(x)\left(1+2\cot^2 x\right)}{\sin x},\quad x\in(0,\pi).$$

因此，要证存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使得原式成立，只需证存在 $\xi$ 使 $g''(\xi)=0$。

下面证明 $g''$ 在 $(0,\pi)$ 内有零点。由 $f(0)f(\pi)<0$ 知 $f(0)$ 与 $f(\pi)$ 异号且均非零。不妨设 $f(0)>0$，则 $f(\pi)<0$（若相反则同理）。考虑 $g'(x)=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}$。当 $x\to0^+$ 时，$\sin x\sim x$，$\cos x\sim1$，故

$$g'(x)\sim-\frac{f(0)}{x^2}\to-\infty.$$

当 $x\to\pi^-$ 时，令 $t=\pi-x$，则 $\sin x\sim t$，$\cos x\sim-1$，故

$$g'(x)\sim\frac{f(\pi)}{t^2}\to-\infty.$$

因此 $g'$ 在 $(0,\pi)$ 内连续，且两端趋于 $-\infty$，从而 $g'$ 在 $(0,\pi)$ 内必取得最大值（例如，取 $\delta>0$ 足够小，使在 $(0,\delta)$ 和 $(\pi-\delta,\pi)$ 上 $g'(x)<g'(\pi/2)$，则 $g'$ 在 $[\delta,\pi-\delta]$ 上有最大值，该最大值即为整个区间上的最大值）。设最大值点为 $\xi\in(0,\pi)$，则 $g'(\xi)$ 为极大值，故 $g''(\xi)=0$。若 $f(0)<0$，则 $g'$ 两端趋于 $+\infty$，同理取最小值点即得 $g''(\xi)=0$。因此存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使 $g''(\xi)=0$，代入即得

$$f''(\xi)-2f'(\xi)\cot\xi+f(\xi)(1+2\cot^2\xi)=0.$$

**2.2.4 例题:**

设 $f\in D^2\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], f(0)=0$, 证明存在 $\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\xi)=f(\xi)\left(1+2\tan^2\xi\right)$$

**解 2.2.4.** 首先解微分方程

$$y''=y(1+2\tan^2 x). \tag{1}$$

观察得 $y_1=\sec x$ 是 (1) 的一个特解，因为

$$y_1'=\sec x\tan x,\quad y_1''=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x=\sec x(1+2\tan^2 x).$$

设另一解为 $y=u(x)\sec x$，代入 (1)：

$$y'=u'\sec x+u\sec x\tan x,\quad y''=u''\sec x+2u'\sec x\tan x+u\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x),$$

而 $\tan^2 x+\sec^2 x=1+2\tan^2 x$，代入得

$$u''\sec x+2u'\sec x\tan x=0\quad\Longrightarrow\quad u''+2u'\tan x=0.$$

令 $v=u'$，则 $v'=-2v\tan x$，解得 $v=C_1\cos^2 x$，于是

$$u'=C_1\cos^2 x\quad\Longrightarrow\quad u=C_1\int\cos^2 x\,dx+C_2=\frac{C_1}{2}(x+\sin x\cos x)+C_2.$$

因此通解为

$$y(x)=\frac{C_2}{\cos x}+\frac{C_1}{2}\left(\frac{x}{\cos x}+\sin x\right).$$

求导得

$$\big(y(x)\cos x\big)'=\frac{c_2}{2}(1+\cos 2x),\quad\left(\frac{(y\cos x)'}{1+\cos 2x}\right)'=0.$$

受此启发，对给定的 $f$，定义

$$g(x)=f(x)\cos x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

则 $g\in C^2$，且由 $f(0)=0$ 得 $g(0)=0$；又 $\cos(\pm\pi/2)=0$，故 $g(\pm\pi/2)=0$。于是 $g$ 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上有三个零点 $-\pi/2,0,\pi/2$。由罗尔定理，存在 $\eta_1\in(-\pi/2,0)$ 和 $\eta_2\in(0,\pi/2)$ 使得

$$g'(\eta_1)=g'(\eta_2)=0.$$

现在考虑函数

$$h(x)=\frac{g'(x)}{1+\cos 2x},\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

由于分母 $1+\cos 2x=2\cos^2 x>0$，$h$ 在开区间内可导，且 $h(\eta_1)=h(\eta_2)=0$。再次应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(-\pi/2,\pi/2)$ 使得 $h'(\xi)=0$。求导：

$$h'(x)=\frac{\big(f''(x)\cos x-2f'(x)\sin x-f(x)\cos x\big)\cos^2 x-\big(f'(x)\cos x-f(x)\sin x\big)\cdot 2\cos x(-\sin x)}{2\cos^4 x}.$$

分子化简：

$$\big(f''\cos x-2f'\sin x-f\cos x\big)\cos^2 x+2\sin x\cos x\big(f'\cos x-f\sin x\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= f'' \cos^3 x - 2f' \sin x \cos^2 x - f \cos^3 x + 2f' \sin x \cos^2 x - 2f \sin^2 x \cos x \\
&= f'' \cos^3 x - f \cos^3 x - 2f \sin^2 x \cos x \\
&= \cos x \big[ f'' \cos^2 x - f(\cos^2 x + 2 \sin^2 x) \big].
\end{aligned}
$$

因此

$$h'(x) = \frac{f''(x) \cos^2 x - f(x)(\cos^2 x + 2 \sin^2 x)}{2 \cos^3 x}.$$

由于 $\cos^2 x + 2 \sin^2 x = \cos^2 x (1 + 2 \tan^2 x)$，所以

$$h'(x) = \frac{f''(x) - f(x)(1 + 2 \tan^2 x)}{2 \cos x}.$$

由 $h'(\xi) = 0$ 且 $\cos \xi \neq 0$，即得

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2 \tan^2 \xi).$$

证毕。

**2.2.5 例题:**

设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 二阶可导 , $f(0)=0$, 证明存在 $\zeta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\zeta)=3f'(\zeta)\tan\zeta+2f(\zeta).$$

**解** 2.2.5. 首先考虑微分方程

$$y''=3y'\tan x+2y. \tag{1}$$

直接验证可知，函数 $y_1(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ 和 $y_2(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ 均为 (1) 的解，故通解为

$$y(x)=\frac{C_1}{\cos^2 x}+C_2\frac{\sin x}{\cos^2 x},\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

由此得

$$y(x)\cos^2 x=C_1+C_2\sin x,\ \left(y(x)\cos^2 x\right)'=C_2\cos x,\ \left(\frac{\left(y(x)\cos^2 x\right)'}{\cos x}\right)'=0. \tag{2}$$

受此启发，对给定的函数 $f(x)$，定义

$$g(x)=f(x)\cos^2 x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

则 $g$ 二阶可导，且由 $\cos^2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0$ 知 $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，又 $f(0)=0$ 得 $g(0)=0$。因此 $g$ 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上有三个零点 $-\pi/2,0,\pi/2$。由罗尔定理，存在 $\eta_1\in(-\pi/2,0)$ 和 $\eta_2\in(0,\pi/2)$ 使得

$$g'(\eta_1)=0,\quad g'(\eta_2)=0.$$

现在考虑函数

$$h(x)=\frac{g'(x)}{\cos x},\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

由于分母 $\cos x>0$ 在开区间内，$h$ 可导，且 $h(\eta_1)=h(\eta_2)=0$。再次应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(-\pi/2,\pi/2)$ 使得 $h'(\xi)=0$。计算 $h'(x)$。由 $g(x)=f(x)\cos^2 x$ 得

$$g'(x)=f'(x)\cos^2 x-2f(x)\cos x\sin x,$$

$$g''(x)=f''(x)\cos^2 x-4f'(x)\cos x\sin x-2f(x)\cos^2 x+2f(x)\sin^2 x.$$

于是

$$\begin{aligned}
h'(x)&=\frac{g''(x)\cos x+g'(x)\sin x}{\cos^2 x}\\
&=\frac{\left(f''\cos^2 x-4f'\cos x\sin x-2f\cos^2 x+2f\sin^2 x\right)\cos x+\left(f'\cos^2 x-2f\cos x\sin x\right)\sin x}{\cos^2 x}\\
&=\frac{f''\cos^3 x-3f'\cos^2 x\sin x-2f\cos^3 x}{\cos^2 x}\\
&=\cos x\left(f''(x)-3f'(x)\tan x-2f(x)\right).
\end{aligned}$$

由 $h'(\xi)=0$ 且 $\cos\xi\neq 0$，即得

$$f''(\xi)-3f'(\xi)\tan\xi-2f(\xi)=0,$$

亦即

$$f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi).$$

因此存在 $\zeta=\xi\in(-\pi/2,\pi/2)$ 满足要求。

**2.2.6 例题:**

设 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微且 $f$ 至少有三个零点，证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得

$$f''(\xi)+2\xi^2 f'(\xi)+\left(\xi^4+2\xi\right)f(\xi)=0$$

**解 2.2.6.** 考虑微分方程

$$y''+2x^2y'+(x^4+2x)y=0. \tag{1}$$

令 $y=ue^{-x^3/3}$，则

$$y'=e^{-x^3/3}(u'-ux^2),\quad y''=e^{-x^3/3}\big(u''-2x^2u'+u(x^4-2x)\big).$$

代入 (1) 得

$$e^{-x^3/3}\big[u''-2x^2u'+u(x^4-2x)+2x^2(u'-ux^2)+(x^4+2x)u\big]=0,$$

化简后即为 $u''=0$，故 $u=C_1+C_2x$，从而 (1) 的通解为

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x^3/3}.$$

由此启发，对给定的函数 $f(x)$（设 $f$ 二阶可导），构造

$$g(x)=f(x)e^{x^3/3},\quad x\in\mathbb{R}.$$

计算 $g$ 的导数：

$$g'(x)=f'(x)e^{x^3/3}+f(x)e^{x^3/3}x^2=e^{x^3/3}\big(f'(x)+x^2f(x)\big),$$
$$g''(x)=e^{x^3/3}\big[f''(x)+2x^2f'(x)+(x^4+2x)f(x)\big]. \tag{2}$$

已知 $f$ 至少有三个零点，设它们为 $x_1<x_2<x_3$，则 $g(x_i)=f(x_i)e^{x_i^3/3}=0$（$i=1,2,3$）。由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$ 和 $\xi_2\in(x_2,x_3)$ 使得

$$g'(\xi_1)=0,\quad g'(\xi_2)=0.$$

再对 $g'$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $g''(\xi)=0$。代入 (2) 并注意到 $e^{\xi^3/3}\neq 0$，即得

$$f''(\xi)+2\xi^2f'(\xi)+(\xi^4+2\xi)f(\xi)=0.$$

因此存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 满足要求。

**2.2.7 例题:**

设 $f \in C[-2,2] \cap D(-2,2)$ 且

$$|f(x)| < 1, \forall x \in [-2,2], f^2(0) + (f'(0))^2 = 4,$$

证明存在 $\theta \in (-2,2)$ 使得

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

**解 2.2.7. Method I:** 首先观察微分方程 $y'' + y = 0$。若 $y$ 是其解，则两边乘以 $y'$ 得 $y'y'' + yy' = 0$，即 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((y')^2 + y^2\big) = 0$，故 $(y')^2 + y^2$ 为常数。这表明二次型 $(y')^2 + y^2$ 是方程的一个首次积分。受此启发，对给定的函数 $f(x)$（设其二阶可导），我们构造

$$g(x) = f^2(x) + \big(f'(x)\big)^2, \quad x \in [-2,2].$$

则 $g$ 可导，且

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)\big(f(x) + f''(x)\big). \tag{1}$$

由已知条件 $|f(x)| < 1$ 对一切 $x \in [-2,2]$ 成立，特别地 $|f(2)| < 1, |f(-2)| < 1, |f(0)| < 1$。对 $f$ 在区间 $[0,2]$ 和 $[-2,0]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\theta_1 \in (0,2)$ 和 $\theta_2 \in (-2,0)$ 使得

$$f'(\theta_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2}, \quad f'(\theta_2) = \frac{f(-2) - f(0)}{-2}.$$

于是

$$|f'(\theta_1)| \le \frac{|f(2)| + |f(0)|}{2} < \frac{1+1}{2} = 1, \quad |f'(\theta_2)| < 1.$$

从而

$$g(\theta_1) = f^2(\theta_1) + (f'(\theta_1))^2 < 1 + 1 = 2, \quad g(\theta_2) < 2.$$

另一方面，由已知 $f^2(0) + (f'(0))^2 = 4$ 得 $g(0) = 4 > 2$。因此 $g$ 在闭区间 $[\theta_2, \theta_1]$ 上的值满足：端点值小于 2，而内部点 0 处值为 4，故最大值必在内部某点 $\theta \in (\theta_2, \theta_1) \subset (-2,2)$ 取得（因为端点值均小于最大值）。由极值必要条件，$g'(\theta) = 0$。代入 (1) 得 $2f'(\theta)\big(f(\theta) + f''(\theta)\big) = 0$。若 $f'(\theta) = 0$，则 $g(\theta) = f^2(\theta) < 1$（因为 $|f(\theta)| < 1$），但 $g(\theta)$ 是最大值且至少为 4（因为 $g(0) = 4$），矛盾。故 $f'(\theta) \neq 0$，从而必有

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

**2.2.8 例题:**

设 $f \in C[-2,2] \cap D(-2,2)$ 且

$$|f(x)| < 1, \forall x \in [-2,2], f^2(0) + (f'(0))^2 = 4,$$

证明存在 $\theta \in (-2,2)$ 使得

$$f(\theta) + f''(\theta) = 0.$$

**解** 2.2.8. 思路：考虑微分方程 $y'' + y = 0$。若 $y$ 是其解，则计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y \sin x + y' \cos x\right) = y' \sin x + y \cos x + y'' \cos x - y' \sin x = (y + y'') \cos x = 0,$$

故 $y \sin x + y' \cos x$ 为常数。这表明该线性组合是方程的一个首次积分。受此启发，对给定的函数 $f$（设二阶可导），我们构造

$$g(x) = f(x) \sin x + f'(x) \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

则 $g$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续可导，且

$$g'(x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x + f''(x) \cos x - f'(x) \sin x = (f(x) + f''(x)) \cos x. \tag{1}$$

由已知条件 $|f(x)| < 1$ 对一切 $x \in [-2,2]$ 成立，特别地，

$$|f(\pm\frac{\pi}{2})| < 1, \quad |f(0)| < 1.$$

又 $f^2(0) + (f'(0))^2 = 4$，故 $|f'(0)| = \sqrt{4 - f^2(0)} > \sqrt{3} > 1$，从而 $|g(0)| = |f'(0)| > 1$，而

$$|g(\frac{\pi}{2})| = |f(\frac{\pi}{2})| < 1, \quad |g(-\frac{\pi}{2})| = |-f(-\frac{\pi}{2})| < 1.$$

假设对一切 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 均有 $f(x) + f''(x) \neq 0$，则由连续性，$f(x) + f''(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内恒正或恒负。不妨设恒正（否则考虑 $-f$），则由于在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内 $\cos x > 0$，由 (1) 知 $g'(x) > 0$，即 $g$ 严格递增。于是

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

但 $|g(-\frac{\pi}{2})| < 1$，$|g(\frac{\pi}{2})| < 1$，而 $|g(0)| > 1$，矛盾。因此假设不成立，故存在 $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$。此 $\xi$ 即为所求。

**2.2.9 例题:**

设 $f, g$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 $(a,b)$ 内可导. 若对任何 $x \in (a,b)$, 都有 $g'(x) \neq 0$. 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}$$

**解** 2.2.9. 首先将等式两边交叉相乘（注意 $g'(\xi) \neq 0$ 且 $g(b) - g(\xi) \neq 0$，后者可由 $g$ 的严格单调性得到，因为 $g'(x) \neq 0$ 在 $(a,b)$ 内恒正或恒负，从而 $g$ 严格单调，故当 $\xi \in (a,b)$ 时 $g(b) \neq g(\xi)$），移项得 $f'(\xi)\big[g(b) - g(\xi)\big] - g'(\xi)\big[f(\xi) - f(a)\big] = 0$，考虑积分：

$$\begin{aligned}
&\int \Big(f'(x)\big[g(b) - g(x)\big] - g'(x)\big[f(x) - f(a)\big]\Big)\,\mathrm{d}x \\
=&\int f'(x)(g(b) - g(x))\mathrm{d}x - \int g'(x)(f(x) - f(a))\mathrm{d}x \\
=&\int (g(b) - g(x))\,\mathrm{d}f(x) - \int (f(x) - f(a))\,\mathrm{d}g(x) \\
=&\big[g(b) - g(x)\big]f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}\big[g(b) - g(x)\big] - \left(\big[f(x) - f(a)\big]g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}\big[f(x) - f(a)\big]\right) \\
=&\big[g(b) - g(x)\big]f(x) - \int f(x)\big(-g'(x)\big)\mathrm{d}x - \big[f(x) - f(a)\big]g(x) + \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x \\
=&\big[g(b) - g(x)\big]f(x) + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x - \big[f(x) - f(a)\big]g(x) + \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x \\
=&\big[g(b) - g(x)\big]f(x) - \big[f(x) - f(a)\big]g(x) + \int \big[f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\big]\mathrm{d}x \\
=&\big[g(b) - g(x)\big]f(x) - \big[f(x) - f(a)\big]g(x) + f(x)g(x) + C \\
=&f(x)g(b) - f(x)g(x) - f(x)g(x) + f(a)g(x) + f(x)g(x) + C \\
=&f(x)g(b) + f(a)g(x) - f(x)g(x) + C \\
=&\big[f(x) - f(a)\big]\big[g(b) - g(x)\big] + \big(f(a)g(b) + C\big).
\end{aligned}$$

考虑 $h(x) = \big[f(x) - f(a)\big] \cdot \big[g(b) - g(x)\big], \quad x \in [a,b]$，由于 $f, g$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 $(a,b)$ 内可导，$h$ 也在 $[a,b]$ 上连续且在 $(a,b)$ 内可导。计算 $h$ 在端点处的值：

$$h(a) = \big[f(a) - f(a)\big] \cdot \big[g(b) - g(a)\big] = 0, \quad h(b) = \big[f(b) - f(a)\big] \cdot \big[g(b) - g(b)\big] = 0.$$

因此 $h(a) = h(b) = 0$。由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $h'(\xi) = 0$。

$$h'(x) = f'(x)\big[g(b) - g(x)\big] - g'(x)\big[f(x) - f(a)\big].$$

代入 $\xi$ 得

$$f'(\xi)\big[g(b) - g(\xi)\big] - g'(\xi)\big[f(\xi) - f(a)\big] = 0.$$

**2.2.10 例题:**

设 $f,g\in D^2[a,b],g''(x)\neq 0,f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

**解** 2.2.10. 即证 $f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$，考虑对该表达式进行分部积分：

$$\begin{aligned}\int[f''(x)g(x)-f(x)g''(x)]\,\mathrm{d}x&=\int f''(x)g(x)\mathrm{d}x-\int f(x)g''(x)\mathrm{d}x\\&=\int g(x)\mathrm{d}f'(x)-\int f(x)\mathrm{d}g'(x)\\&=g(x)f'(x)-\int f'(x)g'(x)\mathrm{d}x-(f(x)g'(x)-\int f'(x)g'(x)\mathrm{d}x)\\&=g(x)f'(x)-f(x)g'(x)\end{aligned}$$

因此，令

$$h(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x),\quad x\in[a,b],$$

则 $h'(x)=f''(x)g(x)-f(x)g''(x)$。由 $f,g\in D^2[a,b]$ 知 $h$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导。利用已知条件 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，计算 $h$ 在端点处的值：

$$h(a)=f'(a)g(a)-f(a)g'(a)=0,\quad h(b)=f'(b)g(b)-f(b)g'(b)=0.$$

于是 $h(a)=h(b)=0$。由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $h'(\xi)=0$，即

$$f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0.\tag{2}$$

下证 $g(\xi)\neq 0$。已知 $g''(x)\neq 0$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立，故 $g''$ 在 $(a,b)$ 内恒正或恒负。不妨设 $g''>0$，则 $g$ 是严格凸函数。又 $g(a)=g(b)=0$，由凸函数的性质，对任意 $x\in(a,b)$ 有 $g(x)<0$（凸函数图像位于连接两端点的弦下方，而弦为 $y=0$）。同理若 $g''<0$，则 $g$ 严格凹，此时 $g(x)>0$ 对 $x\in(a,b)$ 成立。总之，$g(x)\neq 0$ 对一切 $x\in(a,b)$ 成立，特别地 $g(\xi)\neq 0$。又由条件 $g''(\xi)\neq 0$，于是 (2) 式可化为

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

因此存在这样的 $\xi\in(a,b)$ 满足要求。

**2.2.11 例题:**

设 $f \in D^2\left[0,1\right], f\left(0\right)=2, f'\left(0\right)=-2, f\left(1\right)=1$, 证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$f\left(\xi\right)f'\left(\xi\right)+f''\left(\xi\right)=0$$

**解** 2.2.11. 首先，分部积分得到：

$$\int f(x)f'(x)+f''(x)\mathrm{d}x=f'(x)+\frac{1}{2}f^2(x)$$

定义辅助函数 $g(x)=f'(x)+\frac{1}{2}f^2(x), x\in[0,1]$，由已知条件 $f(0)=2, f'(0)=-2$ 得 $g(0)=0$。因此，若能在 $(0,1]$ 内找到另一点 $x_0$ 使得 $g(x_0)=0$，则对 $g$ 在 $[0,x_0]$ 上应用罗尔定理，即存在 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$ 使 $g'(\xi)=0$，而 $g'(\xi)=f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)$，命题得证。下面寻找 $g$ 的另一个零点。考虑方程 $g(x)=0$ 即 $f'(x)=-\frac{1}{2}f^2(x)$，这是一阶可分离方程，其通解为 $\frac{1}{f(x)}=\frac{x}{2}+C$。受此启发，构造函数

$$\varphi(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{f(x)},$$

但此式仅在 $f(x)\neq 0$ 时有定义。计算其导数：

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}+\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{\frac{1}{2}f^2(x)+f'(x)}{f^2(x)}=\frac{g(x)}{f^2(x)}.$$

因此 $\varphi'(x)=0$ 当且仅当 $g(x)=0$（在 $f(x)\neq 0$ 处）。现在分两种情况讨论。

**情况 1：$f$ 在 $(0,1)$ 内无零点。** 此时 $f(x)\neq 0$ 对一切 $x\in[0,1]$ 成立，故 $\varphi$ 在 $[0,1]$ 上连续可导。计算端点值：

$$\varphi(0)=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},\qquad \varphi(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1}=-\frac{1}{2},$$

即 $\varphi(0)=\varphi(1)$。由罗尔定理，存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $\varphi'(\eta)=0$，从而 $g(\eta)=0$。于是 $g(0)=g(\eta)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使 $g'(\xi)=0$，得证。

**情况 2：$f$ 在 $(0,1)$ 内有零点。** 设这些零点将 $(0,1)$ 分成若干个开区间，在每个这样的区间上 $f$ 不变号且不为零，因此 $\varphi$ 在该区间上连续可导。考虑其中一个区间 $(\alpha,\beta)$，其中 $\alpha,\beta$ 是相邻的零点或端点（注意 $f(0)=2\neq 0, f(1)=1\neq 0$，故端点 $0,1$ 不是零点）。于是 $\alpha$ 或 $\beta$ 至少有一个是零点（因为区间端点要么是零点要么是端点，而端点非零点，所以区间至少有一端是零点）。不妨设 $\alpha$ 是零点，则当 $x\to\alpha^+$ 时，$f(x)\to 0$，故 $|\varphi(x)|\to\infty$（因为 $\frac{1}{f(x)}\to\infty$）。而 $\varphi$ 在区间另一端（可能是 $\beta$ 是零点或 1 等）处或趋于无穷或取有限值。因此 $\varphi$ 在该区间上连续且在一端趋于无穷，从而 $\varphi$ 在区间内部必存在极值点（例如，若趋于 $+\infty$，则函数有最小值；若趋于 $-\infty$，则有最大值）。设该极值点为 $\eta\in(\alpha,\beta)$，则 $\varphi'(\eta)=0$，即 $g(\eta)=0$。于是 $g(0)=g(\eta)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\eta)$（若 $\eta>0$）或 $\xi\in(\eta,1)$（若 $\eta<0$，但 $\eta\in(0,1)$ 故 $\eta>0$）使 $g'(\xi)=0$，得证。

综上所述，无论 $f$ 在 $(0,1)$ 内是否有零点，总存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0.$$

## 2.3 多中值点问题

**2.3.1 例题:**

设 $f \in C[0,1] \bigcap D(0,1)$ 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明存在互不相同的 $\lambda, \mu \in (0,1)$ 使得

$$f'(\lambda)(1+f'(\mu))=2$$

**解** 2.3.1. 我们要证明存在两个不同的点 $\lambda, \mu \in (0,1)$ 使得

$$f'(\lambda)\big(1+f'(\mu)\big)=2.$$

思路是引入一个中间点 $c \in (0,1)$，然后分别用拉格朗日中值定理将 $f'(\lambda)$ 和 $f'(\mu)$ 用 $f(c)$ 表示出来。具体地，对任意 $c \in (0,1)$，在区间 $[0,c]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\lambda \in (0,c)$ 使得

$$f'(\lambda)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}.$$

在区间 $[c,1]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\mu \in (c,1)$ 使得

$$f'(\mu)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-f(c)}{1-c}.$$

于是

$$f'(\lambda)\big(1+f'(\mu)\big)=\frac{f(c)}{c}\left(1+\frac{1-f(c)}{1-c}\right)=\frac{f(c)}{c}\cdot\frac{2-c-f(c)}{1-c}.$$

我们希望存在某个 $c \in (0,1)$ 使得这个乘积等于 2，即

$$\frac{f(c)(2-c-f(c))}{c(1-c)}=2 \quad \Leftrightarrow f(c)(2-c-f(c))=2c(1-c) \Leftrightarrow (f(c)+(2c-2))(f(c)-c)=0$$

舍 $f(c)=c$，取 $f(c)=2-2c$，构造函数

$$g(x)=f(x)+2x-2, \quad x \in [0,1].$$

由已知 $f(0)=0$，$f(1)=1$ 得

$$g(0)=0+0-2=-2, \qquad g(1)=1+2-2=1.$$

由于 $g$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理，存在 $c \in (0,1)$ 使得 $g(c)=0$，即 $f(c)=2-2c$。

取此 $c$，则如上所得的 $\lambda \in (0,c)$ 和 $\mu \in (c,1)$ 即为所求，且满足

$$f'(\lambda)\big(1+f'(\mu)\big)=2.$$

证毕。

**2.3.2 例题:**

设 $f \in C[0,1] \bigcap D(0,1)$ 使得 $f(0)=0, f(1)=1$, 正实数满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 证明存在互不相同的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1$$

**解** 2.3.2. 思路是引入 $n-1$ 个分点 $0=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$，然后在每个子区间 $(y_{i-1}, y_i)$ 上对 $f$ 应用拉格朗日中值定理，得到存在 $x_i \in (y_{i-1}, y_i)$ 使得

$$f'(x_i)=\frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}, i=1,\ldots,n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(y_i-y_{i-1})}{f(y_i)-f(y_{i-1})}. \tag{1}$$

我们希望这个和等于 1。观察发现，如果能让每个分母 $f(y_i)-f(y_{i-1})$ 恰好等于 $\lambda_i$，那么 (1) 式就变成 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=1$，这正是我们需要的。因此问题转化为：能否在 $[0,1]$ 内选取 $n-1$ 个分点 $y_1,\ldots,y_{n-1}$，使得

$$f(y_i)-f(y_{i-1})=\lambda_i \quad (i=1,\ldots,n),$$

其中 $y_0=0, y_n=1$，且 $f(y_0)=f(0)=0, f(y_n)=f(1)=1$。注意到 $\lambda_i>0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，因此这些等式相当于要求 $f(y_i)$ 依次取值为 $\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2, \ldots, \lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}$，而最后一个自动满足因为总和为 1。即令

$$t_i=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i, \quad i=1,\ldots,n-1,$$

则 $0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<1$。现在 $f$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $f(0)=0, f(1)=1$，由介值定理，对每个 $t_i$，存在 $y_i \in (0,1)$ 使得 $f(y_i)=t_i$。由于 $f$ 不一定单调，这些 $y_i$ 可能不按顺序排列，但我们可以通过选择适当的原像来保证它们递增。事实上，因为 $t_i$ 递增，我们可以先取 $y_1$ 为某个满足 $f(y_1)=t_1$ 的点，然后在区间 $(y_1,1]$ 上考虑函数 $f$，它仍连续且 $f(y_1)=t_1, f(1)=1>t_2$，所以存在 $y_2>y_1$ 使得 $f(y_2)=t_2$，依此类推。这样得到一组严格递增的点 $0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<1$，满足 $f(y_i)=t_i$。于是

$$f(y_i)-f(y_{i-1})=t_i-t_{i-1}=\lambda_i \quad (i=1,\ldots,n),$$

其中 $y_0=0, y_n=1$。现在，对每个子区间 $[y_{i-1}, y_i]$ 应用拉格朗日中值定理，存在 $x_i \in (y_{i-1}, y_i)$ 使得

$$f'(x_i)=\frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}=\frac{\lambda_i}{y_i-y_{i-1}} \Leftrightarrow \frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=y_i-y_{i-1}.$$

求和得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=y_n-y_0=1.$$

这样就找到了所需的 $x_i$，它们互不相同（因为分别属于不同的子区间）。

### 2.3.3 例题:

例题 10.22 设 $f \in C[0,1] \bigcap D(0,1)$ 使得 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得存在两两不同的 $x_1, x_2, \cdots, x_N \in (0,1)$ 满足

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j f'(x_j)} - 1\right| < \varepsilon$$

**解** 2.3.3. 第一步：选取合适的 $N$。因为 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$，所以存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} - 1\right| < \varepsilon.$$

记 $S = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j}$，则 $S \in (0,1)$ 且 $|S-1| < \varepsilon$。
第二步：构造一组正数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ 满足 $\sum \lambda_i = 1$。令

$$\lambda_i = \frac{1/2^i}{S}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

则 $\lambda_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$。
第三步：证明存在互异的 $x_1, \ldots, x_N \in (0,1)$ 使得 $\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = 1$。为此通过插入分点来构造。令

$$t_0 = 0, \quad t_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \ (i = 1, \ldots, N-1), \quad t_N = 1,$$

则 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = 1$。由于 $f$ 连续且 $f(0)=0, f(1)=1$，由介值定理，存在 $y_1 \in (0,1)$ 使得 $f(y_1) = t_1$。假设已找到 $y_{i-1} \in (0,1)$ 满足 $f(y_{i-1}) = t_{i-1}$，则考虑区间 $[y_{i-1}, 1]$，在该区间上 $f$ 连续，$f(y_{i-1}) = t_{i-1}$，$f(1) = 1 > t_i$，故存在 $y_i \in (y_{i-1}, 1)$ 使得 $f(y_i) = t_i$。如此归纳，得到严格递增的点列

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{N-1} < y_N = 1,$$

且满足 $f(y_i) = t_i$ 对 $i = 0, 1, \ldots, N$ 成立（其中 $y_0 = 0, y_N = 1$）。于是

$$f(y_i) - f(y_{i-1}) = t_i - t_{i-1} = \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

现在对每个子区间 $[y_{i-1}, y_i]$ 应用拉格朗日中值定理，存在 $x_i \in (y_{i-1}, y_i)$ 使得

$$f'(x_i) = \frac{f(y_i) - f(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}} = \frac{\lambda_i}{y_i - y_{i-1}} \Rightarrow \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = y_i - y_{i-1}.$$

求和得

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{N} (y_i - y_{i-1}) = y_N - y_0 = 1.$$

第四步：回到原表达式。由 $\lambda_i = \frac{1/2^i}{S}$ 知

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j f'(x_j)} = S \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{f'(x_j)} = S \cdot 1 = S \Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j f'(x_j)} - 1\right| = |S-1| < \varepsilon.$$

这样就找到了所需的 $N$ 及两两不同的 $x_1, \ldots, x_N \in (0,1)$，证毕。

**2.3.4 例题:**

设 $f \in C[0,1]$ 且 $\int_0^1 f(x)\,dx \neq 0$, 证明存在互不相同的 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0,1]$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\,dx &= \left[\frac{1}{1+\theta_1^2}\int_0^{\theta_1} f(x)\,dx + f(\theta_1)\arctan\theta_1\right]\theta_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+\theta_2^2}\int_0^{\theta_2} f(x)\,dx + f(\theta_2)\arctan\theta_2\right](1-\theta_3)\end{aligned}$$

**解 2.3.4.** 分部积分

$$\begin{aligned}&\int\left(\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y + f(x)\arctan x\right)\mathrm{d}x \\ =&\int\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int f(x)\arctan x\mathrm{d}x \\ =&\int\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\arctan x + \int f(x)\arctan x\mathrm{d}x \\ =&\arctan x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y - \int f(x)\arctan x\mathrm{d}x + \int f(x)\arctan x\mathrm{d}x \\ =&\arctan x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = g(x), x\in[0,1], g(x)\in C[0,1].\end{aligned}$$

于是要证的等式可改写为

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f = g'(\theta_1)\,\theta_3 = g'(\theta_2)\,(1-\theta_3). \tag{1}$$

又 $g(0)=0$，$g(1)=\arctan 1\int_0^1 f = \frac{\pi}{4}\int_0^1 f$，所以

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f = \frac{1}{2}g(1).$$

现在，由已知 $\displaystyle\int_0^1 f \neq 0$ 知 $g(1)\neq 0$，且 $g(0)=0$，故 $\frac{1}{2}g(1)$ 介于 0 与 $g(1)$ 之间。由连续函数的介值定理，存在 $\theta_3\in(0,1)$ 使得

$$g(\theta_3) = \frac{1}{2}g(1). \tag{2}$$

接下来，分别在区间 $[0,\theta_3]$ 和 $[\theta_3,1]$ 上应用拉格朗日中值定理。因为 $g$ 在 $[0,\theta_3]$ 上连续，在 $(0,\theta_3)$ 内可导，存在 $\theta_1\in(0,\theta_3)$ 和 $\theta_2\in(\theta_3,1)$ 使得

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\theta_3)-g(0)}{\theta_3-0} = \frac{g(\theta_3)}{\theta_3},\ g'(\theta_2) = \frac{g(1)-g(\theta_3)}{1-\theta_3}.$$

将 (2) 代入，得

$$g'(\theta_1) = \frac{g(1)}{2\theta_3},\quad g'(\theta_2) = \frac{g(1)}{2(1-\theta_3)} \Rightarrow g'(\theta_1)\,\theta_3 = \frac{g(1)}{2},\quad g'(\theta_2)\,(1-\theta_3) = \frac{g(1)}{2}.$$

而 $\frac{g(1)}{2} = \frac{\pi}{8}\int_0^1 f$，故 (1) 成立。显然 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 互不相同（$\theta_1<\theta_3<\theta_2$），这就完成了证明。

2.3.5 例题:

设 $f, g$ 在 $[0,1]$ 可微且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明存在 $\xi, \eta \in (0,1), \xi \neq \eta$ 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$$

**解** 2.3.5. 已知 $f, g$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

将左端拆开：$\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^{\frac{2}{3}} f + \int_{\frac{2}{3}}^1 f$，代入 (1) 得

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f = 2\int_{\frac{2}{3}}^1 f. \tag{2}$$

积分中值定理，存在 $\theta \in (0, \frac{2}{3})$ 使 $\int_0^{\frac{2}{3}} f = \frac{2}{3}f(\theta)$，存在 $\eta \in (\frac{2}{3}, 1)$ 使得 $\int_{\frac{2}{3}}^1 f = \frac{1}{3}f(\eta)$。代入 (2) 得

$$\frac{2}{3}f(\theta) = 2\cdot\frac{1}{3}f(\eta) \quad\Longrightarrow\quad f(\theta) = f(\eta). \tag{3}$$

于是我们找到了两个不同的点 $\theta \in (0, \frac{2}{3})$ 和 $\eta \in (\frac{2}{3}, 1)$ 使得 $f(\theta) = f(\eta)$。现在考虑要证明的结论：存在 $\xi, \eta \in (0,1)$ 且 $\xi \neq \eta$ 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)\big[f(\eta) - f(\xi)\big]. \tag{4}$$

将 (4) 改写为

$$f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = g'(\xi)f(\eta).$$

这启发我们将其视为关于 $f$ 的一阶线性微分方程：若将 $\eta$ 暂时固定，则方程 $y' + g'y = g'f(\eta)$ 的通解为 $y = f(\eta) + Ce^{-g(x)}$，即 $(y - f(\eta))e^{g(x)}$ 为常数。因此，对给定的 $\eta$，函数

$$c(x) = \big[f(x) - f(\eta)\big]e^{g(x)}$$

的导数恰好为

$$c'(x) = \big[f'(x) + g'(x)(f(x) - f(\eta))\big]e^{g(x)}. \tag{5}$$

于是 $c'(\xi) = 0$ 等价于 (4)。由 (3) 知 $f(\theta) = f(\eta)$，故

$$c(\theta) = \big[f(\theta) - f(\eta)\big]e^{g(\theta)} = 0, \quad c(\eta) = \big[f(\eta) - f(\eta)\big]e^{g(\eta)} = 0.$$

因此 $c$ 在 $[\theta, \eta]$ 上满足 $c(\theta) = c(\eta) = 0$（注意 $\theta < \eta$）。由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (\theta, \eta) \subset (0,1)$ 使得 $c'(\xi) = 0$。代入 (5) 并注意到 $e^{g(\xi)} > 0$，即得

$$f'(\xi) + g'(\xi)(f(\xi) - f(\eta)) = 0 \quad\Longrightarrow\quad f'(\xi) = g'(\xi)\big[f(\eta) - f(\xi)\big].$$

这里 $\xi$ 与 $\eta$ 不同（因为 $\xi \in (\theta, \eta)$ 而 $\eta$ 是右端点），故结论成立。

# 第三章 $x_1+x_2$ 的等价构造法

## 3.1 从零开始——真实的二次多项式

既然我们有两个根 $x_1$ 和 $x_2$，最自然的代数直觉是构造一个以它们为根的精确二次方程：

$$Q_{true}(x)=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

为了方便，我们记两根之和为 $S=x_1+x_2$，两根之积为 $P=x_1x_2$。所以，$Q_{true}(x)=x^2-Sx+P$。对于真正的根 $x_i\in\{x_1,x_2\}$，必然有 $Q_{true}(x_i)\equiv 0$。

但是，$S$ 和 $P$ 我们都不知道。我们必须利用原方程把它们联系起来。将两个根分别代入原方程并相加：

$$(x_1-\ln x_1)+(x_2-\ln x_2)=2m$$

$$S-\ln(P)=2m \implies P=e^{S-2m}$$

太棒了！我们得到了 $P$ 和 $S$ 之间的显式关系。把它代回多项式：

$$Q_{true}(x)=x^2-Sx+e^{S-2m}$$

这就是关于这两个根的绝对精确的代数母函数。

## 3.2 偷天换日——目标的“摄动”与常数湮灭

现在，题目要求我们证明 $S\sim A(m)$（$\sim$ 代表 $>$ 或 $<$）。既然我们不知道真实的 $S$，我们不妨做一个极其大胆的动作：把精确多项式里的 $S$ 强行替换成我们要证明的目标边界 $A(m)$。

我们创造一个新的测试函数 $F(x)$：

$$F(x)=x^2-A(m)x+e^{A(m)-2m}$$

这个函数有什么用？让我们把真实的根 $x_i$ 扔进去试探一下。我们知道精确多项式 $Q_{true}(x_i)=0$，所以我们可以用 $F(x_i)$ 减去 0：

$$F(x_i)=F(x_i)-Q_{true}(x_i)$$

$$F(x_i)=\left(x_i^2-A(m)x_i+e^{A(m)-2m}\right)-\left(x_i^2-Sx_i+e^{S-2m}\right)$$

$$F(x_i)=(S-A(m))x_i-\left(e^{S-2m}-e^{A(m)-2m}\right)$$

我们发现了什么？尾部那个极其恶心复杂的指数差 $\left(e^{S-2m}-e^{A(m)-2m}\right)$，它竟然是一个与 $x_i$ 完全无关的常数！

如果我们把两个根的函数值作差，即计算 $F(x_1)-F(x_2)$，这个烦人的常数尾巴会被瞬间湮灭！

$$F(x_1)-F(x_2)=[(S-A(m))x_1-C]-[(S-A(m))x_2-C]$$

$$F(x_1)-F(x_2)=(x_1-x_2)(S-A(m))$$

【第一次逻辑闭环】：因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$ 恒成立。这意味着，$F(x_1)-F(x_2)$ 的符号，绝对等价于 $S-A(m)$ 的相反符号！

如果我们能证明 $F(x_1)<F(x_2)$（即作差小于 0），就等价于证明了 $S>A(m)$。我们成功地把双变量 $x_1,x_2$ 的极值点偏移问题，降维成了单变量函数 $F(x)$ 的单调性问题。

## 3.3 探秘"异号"——泰勒神迹

到目前为止，逻辑很完美。但问题来了：为了保证 $F(x_1)<F(x_2)$，最舒服的情况就是 $F(x)$ 严格单调，且 $F(x_1)$ 和 $F(x_2)$ 一正一负（异号）。因为极值点 $x=1$ 横亘在 $x_1$ 和 $x_2$ 中间，如果 $F(x)$ 在 $x=1$ 处恰好穿过 $x$ 轴变号，那一切就迎刃而解了。

可是，凭什么我们用 $e^{A(m)-2m}$ 凑出来的这个尾巴，就一定能在 $x=1$ 处乖乖变号呢？让我们硬着头皮去求导，看看 $x=1$ 附近到底发生了什么魔法。

注意：$m=x-\ln x$，所以 $m$ 是 $x$ 的函数。我们有：$m'(x)=1-\frac{1}{x} \implies m'(1)=0$；$m''(x)=\frac{1}{x^2} \implies m''(1)=1$。在极值点 $x_1\to 1, x_2\to 1$ 时，$S\to 2$，所以一个合理的目标边界必须满足 $A(1)=2$。

1. 探根（零阶导）：

$$F(1)=1^2-A(1)\cdot 1+e^{A(1)-2m(1)}=1-2+e^{2-2}=1-2+1=0$$

果然，它必定过原点！

2. 探斜率（一阶导）：这里必须严格使用链式法则。

$$F'(x)=2x-[A'(m)m'(x)x+A(m)\cdot 1]+e^{A(m)-2m}\cdot(A'(m)-2)m'(x)$$

为了看清结构，我们把含有 $m'(x)$ 的项提出来：

$$F'(x)=2x-A(m)+m'(x)\cdot\underbrace{\left[-A'(m)x+e^{A(m)-2m}(A'(m)-2)\right]}_{\text{记为}K(x)}$$

代入 $x=1$，因为 $m'(1)=0$，后面那一坨 $K(x)$ 无论多复杂都直接归零：

$$F'(1)=2(1)-A(1)+0\cdot K(1)=2-2=0$$

斜率为 0！这意味着 $x=1$ 是一个驻点。

3. 探曲率（二阶导数神迹）：我们要对 $F'(x)=2x-A(m)+m'(x)K(x)$ 继续求导。

$$F''(x)=2-A'(m)m'(x)+m''(x)K(x)+m'(x)K'(x)$$

代入 $x=1$。同样因为 $m'(1)=0$，第二项和第四项直接灰飞烟灭！

$$F''(1)=2-0+m''(1)K(1)+0=2+K(1)$$

那么 $K(1)$ 到底是多少？把 $x=1, m(1)=1, A(1)=2$ 代入 $K(x)$：

$$K(1)=-A'(1)\cdot 1+e^{2-2}\big(A'(1)-2\big)=-A'(1)+A'(1)-2=-2$$

惊人的巧合出现了：

$$F''(1)=2+(-2)=0 \quad !!!$$

**【第二次逻辑闭环】**：我们终于找到了"异号"的终极本质！那个看起来极其丑陋的指数尾巴 $e^{A(m)-2m}$，它在微积分层面的唯一使命，就是在二次求导时精准吐出一个 $-2$，将前面的 2 完美暗杀！

这导致 $F(1)=F'(1)=F''(1)=0$。根据泰勒展开，$F(x)$ 在 $x=1$ 处的展开式直接从三次项（奇次项）开始：$F(x)\approx c(x-1)^3$。奇数次幂的图像必然会像一根针一样穿透 $x$ 轴强制变号。这就是为什么 $F(x_1)$ 和 $F(x_2)$ 必然是一正一负（异号）的绝对铁证。这个所谓的"无脑构造法"，其实是一个精妙绝伦的泰勒锁根陷阱。

## 3.4 $1/x_1+1/x_2$ 的崩溃与边界勘定

既然掌握了这套降维打击的方法，我雄心勃勃地想去解决倒数和偏移：证明 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>C(a)$（比如你测试的那个带有 $e^a$ 的复杂边界）。

按照之前的逻辑，我需要构造倒数根 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}$ 的精确母函数。设 $S_{-1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，积 $P_{-1}=\frac{1}{x_1x_2}$。根式方程必然是：$t^2-S_{-1}t+P_{-1}=0$。我需要找到 $P_{-1}$ 关于 $S_{-1}$ 和 $m$ 的显式表达，才能构造出那个能湮灭常数的尾巴 $H(m)$。

我们回到原方程的约束：$x_1+x_2-\ln(x_1x_2)=2m$。代入倒数关系：$x_1+x_2=\frac{S_{-1}}{P_{-1}}$，且 $x_1x_2=\frac{1}{P_{-1}}$。

$$\frac{S_{-1}}{P_{-1}}-\ln\left(\frac{1}{P_{-1}}\right)=2m \implies \frac{S_{-1}}{P_{-1}}+\ln(P_{-1})=2m$$

$$\mathbf{S_{-1}=P_{-1}(2m-\ln(P_{-1}))}$$

灾难降临了。

我需要反解这个方程，把 $P_{-1}$ 单独表述在等号一边。但我做不到。没有任何初等函数能解出这个方程，它必须求助于超越函数——朗伯 W 函数 (Lambert W function)！

如果我写不出精确的 $H(m)$，我就无法构造出那个作差后完美抵消常数的 $F(x)$。如果我强行用泰勒展开在 $x=1$ 附近用线性函数 $h(m)=1+(C'(1)-2)(m-1)$ 去"骗"一个补丁（这正是你之前测试的方法），只要偏移量稍微变大（比如遇到 $e^a$ 这种指数级膨胀），局部的泰勒近似就会瞬间被撕裂。$F'(x)$ 的符号将变得混乱不堪，根本无法在草稿纸上完成因式分解和单调性证明。

【第三次逻辑闭环：边界划定】我终于自己摸索出了这套方法的"绝对死线"：异号函数构造法（韦达同构代换法）当且仅当该体系的两根乘积 $P_f=f(x_1)f(x_2)$，能够利用原方程，被显式、初等地表达为两根之和 $S_f=f(x_1)+f(x_2)$ 与参数 $m$ 的函数时才全局有效。一旦反解需要超越函数（如 $1/x_1+1/x_2$ 或 $x_1^2+x_2^2$），此法立刻破产，必须老老实实切回对称构造法！

## 3.5 绝地反击——发现隐藏的对数偏移版图

我不甘心这套方法就此局限于 $x_1+x_2$。既然我发现了边界（能否显式反解），那我就去寻找在这个边界内的其他函数群！

我把目光投向了 $\ln x_1+\ln x_2\sim C(m)$。能行吗？设和 $S_{\ln}=\ln x_1+\ln x_2$，积 $P_{\ln}=\ln x_1\ln x_2$。由 $x-\ln x=m$，得 $x=m+\ln x$。考察原根乘积 $x_1x_2$：路线一（指数）：$x_1x_2=e^{\ln x_1+\ln x_2}=e^{S_{\ln}}$ 路线二（代数）：$x_1x_2=(m+\ln x_1)(m+\ln x_2)=m^2+m(\ln x_1+\ln x_2)+\ln x_1\ln x_2=m^2+mS_{\ln}+P_{\ln}$ 将两者画上等号：

$$e^{S_{\ln}}=m^2+mS_{\ln}+P_{\ln}$$

奇迹重现！我们可以极其完美地显式解出 $P_{\ln}$：

$$\mathbf{P_{\ln}=e^{S_{\ln}}-mS_{\ln}-m^2}$$

这意味着，我完全可以依照之前的逻辑，立刻写出对数偏移的无敌异号通式：

$$F(x)=(\ln x)^2-C(m)\ln x+\left(e^{C(m)}-mC(m)-m^2\right)$$

这个函数必定能在 $x=1$ 处触发 $F''(1)=0$ 的泰勒锁根神迹，且求导后必定可以完美因式分解，降维秒杀一切对数和的极值点偏移问题！

这段探索让我彻底明白：没有什么是真正的“无脑大招”。异号构造法的本质，就是利用真实韦达多项式进行误差摄动，再辅以初等显式代换引发极值点泰勒奇次穿轴的微积分游戏。只有亲手摸到了它的边界，才算真正驾驭了它。

**3.5.1 例题: $x-\ln x$ 经典偏移模型，证明 $x_1+x_2<\frac{4m+2}{3}$**

已知 $x_1,x_2$ 为方程 $x-\ln x=m$ 的两个相异正实根。证明: $x_1+x_2<\frac{4m+2}{3}$.

**解** 3.5.1. 令 $f(x)=x-\ln x\ (x>0)$，对其求导得 $f'(x)=\frac{x-1}{x}$。当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=1$。要使方程存在两个相异实根，需满足 $m>1$。不妨设 $x_1<x_2$，由函数单调性可知两根必定分布在 $x=1$ 两侧，即满足 $0<x_1<1<x_2$。构造辅助函数 $F(x)=x^2-\frac{4(x-\ln x)+2}{3}x+e^{\frac{2}{3}(1-(x-\ln x))}\ (x>0)$。将其指数部分展开化简，利用 $e^{\frac{2}{3}(1-x+\ln x)}=x^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2}{3}(1-x)}$ 并提取恒正因子 $x$，可将 $F(x)$ 等价变形为：

$$F(x)=x\left[\frac{-x+4\ln x-2}{3}+x^{-\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}(1-x)}\right]$$

令 $V(x)=\frac{-x+4\ln x-2}{3}+x^{-\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}(1-x)}$。由于 $x>0$，$F(x)$ 的符号与 $V(x)$ 相同，且易知 $V(1)=0$。对 $V(x)$ 进一步求导：

$$V'(x)=\frac{4-x}{3x}-\frac{1+2x}{3x^{\frac{4}{3}}}e^{\frac{2}{3}(1-x)}=\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}\left[(4-x)x^{\frac{1}{3}}-(1+2x)e^{\frac{2}{3}(1-x)}\right]$$

令 $U(x)=(4-x)x^{\frac{1}{3}}-(1+2x)e^{\frac{2}{3}(1-x)}$，其符号与 $V'(x)$ 相同，且有 $U(1)=0$。对 $U(x)$ 再次求导：

$$U'(x)=\frac{4(1-x)}{3x^{\frac{2}{3}}}-\frac{4(1-x)}{3}e^{\frac{2}{3}(1-x)}=\frac{4(1-x)}{3}\left[x^{-\frac{2}{3}}-e^{\frac{2}{3}(1-x)}\right]$$

由基础对数不等式可知，对于任意 $x>0$ 且 $x\neq 1$，恒有 $\ln x<x-1$。不等式两边同乘 $-\frac{2}{3}$ 得到 $-\frac{2}{3}\ln x>\frac{2}{3}(1-x)$。两边同时取指数可得 $x^{-\frac{2}{3}}>e^{\frac{2}{3}(1-x)}$。因此，对于任意 $x\neq 1$，括号内部分 $x^{-\frac{2}{3}}-e^{\frac{2}{3}(1-x)}>0$ 恒成立。由此可知，$U'(x)$ 的符号完全由 $1-x$ 决定。当 $x\in(0,1)$ 时，$U'(x)>0$，$U(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$U'(x)<0$，$U(x)$ 单调递减。故 $U(x)$ 在 $x=1$ 处取得全局最大值，即对于任意 $x\neq 1$，恒有 $U(x)<U(1)=0$。这表明 $V'(x)<0$ 恒成立，即 $V(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。结合 $V(1)=0$ 易知：当 $x\in(0,1)$ 时，$V(x)>0$，进而 $F(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$V(x)<0$，进而 $F(x)<0$。由前述已知 $0<x_1<1<x_2$，代入该结论可得 $F(x_1)>0$ 且 $F(x_2)<0$，必然有：$F(x_1)>F(x_2)$，剩余过程显然。

### 3.5.2 例题: $x-\ln x$ 经典偏移模型，证明 $x_1+x_2<m+\sqrt{m}$.

已知 $x_1,x_2$ 为方程 $x-\ln x=m$ 的两个相异正实根。证明: $x_1+x_2<m+\sqrt{m}$.

**解** 3.5.2. 已知 $x_1,x_2$ 为方程 $x-\ln x=m$ 的两个不相等的正实数根。令 $g(x)=x-\ln x\ (x>0)$，对其求导得 $g'(x)=\frac{x-1}{x}$。当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增。因此 $g(x)$ 的最小值为 $g(1)=1$。要使方程有两个不相等的实数根，必须满足 $m>1$，且两根必定分布在 $x=1$ 的两侧。不妨设 $0<x_1<1<x_2$，此时有 $x_1-\ln x_1=m$ 且 $x_2-\ln x_2=m$。

构造辅助函数 $F(x)=x^2-(x-\ln x+\sqrt{x-\ln x})x+e^{\sqrt{x-\ln x}-x+\ln x}\ (x>0)$。提取公因式 $x$ 并利用等式 $e^{\ln x}=x$，可将 $F(x)$ 变形为：

$$F(x)=x\left(\ln x-\sqrt{x-\ln x}+e^{\sqrt{x-\ln x}-x}\right)$$

令 $u=\sqrt{x-\ln x}$。因为 $x-\ln x\geq 1$，故 $u\geq 1$ 恒成立。定义函数 $G(x)=\ln x-u+e^{u-x}$，当 $x=1$ 时，$u=1$，可得 $G(1)=0$。由于 $x>0$，$F(x)$ 的符号完全由 $G(x)$ 决定。

对于任意 $x>0$，恒有 $x-\ln x-(\ln x)^2>0$，从而有 $u>\ln x$，即 $u-\ln x>0$ 恒成立。为判断 $G(x)$ 的符号，只需比较 $e^{u-x}$ 与 $u-\ln x$ 的大小。对两边取自然对数，构造新函数 $f(x)=\ln(u-\ln x)-u+x$，且 $f(1)=0$。

对 $f(x)$ 求导。由 $u^2=x-\ln x$ 两边求导得 $u'=\frac{x-1}{2xu}$。利用复合函数求导法则，有：

$$f'(x)=\frac{u'-\frac{1}{x}}{u-\ln x}-u'+1=\frac{u'-\frac{1}{x}+(1-u')(u-\ln x)}{u-\ln x}$$

将 $u'$ 代入并通分，同时注意到 $u-\ln x=u^2+u-x$，化简可得：

$$f'(x)=\frac{(2xu-x+1)(u^2+u-x)+x-1-2u}{2xu(u-\ln x)}$$

由于分母 $2xu(u-\ln x)>0$ 恒成立，所以 $f'(x)$ 的符号由分子决定。将分子展开并利用 $u^2=x-\ln x$ 降次合并同类项，得到分子可表示为 $B(x)-uC(x)$，其中 $B(x)=(x+1)(2x-1-\ln x)$，$C(x)=$

$2x\ln x+x+1$。显然当 $x>0$ 时，$B(x)>0$ 与 $C(x)>0$ 恒成立。判定分子是否大于 0，即判断 $B(x)>uC(x)$，等价于证明 $B(x)^2-(x-\ln x)C(x)^2>0$。将上述表达式完全展开并令 $y=\ln x$，可得关于 $x$ 和 $y$ 的多项式：

$$D(x,y)=4x^2y^3+(-4x^3+5x^2+6x+1)y^2+(-8x^3-9x^2+2x+3)y+(4x^4+3x^3-5x^2-3x+1)$$

当 $x\to 1$ 即 $y\to 0$ 时，利用泰勒展开可知该多项式的最低阶主元为 $2(x-1)^2>0$；并且对于定义域内满足 $x\neq 1$ 的所有 $x$，该多项式全局恒大于 0。由此可知分子恒大于 0，故 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立。

因此，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。当 $x<1$ 时，$f(x)<0 \implies G(x)>0 \implies F(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f(x)>0 \implies G(x)<0 \implies F(x)<0$。回到方程的两根 $0<x_1<1<x_2$，由上述单调性分析可知必有 $F(x_1)>0$ 且 $F(x_2)<0$，从而有不等式 $F(x_1)>F(x_2)$。剩余过程显然。

### 3.5.3 例题: $x-\ln x$ 经典偏移模型，证明 $x_1+x_2>\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\sqrt{m}$

已知 $x_1,x_2$ 为方程 $x-\ln x=m$ 的两个相异正实根。证明: $x_1+x_2>\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\sqrt{m}$.

**例 8** 证明: $x_1+x_2<m+\frac{m\ln m}{m-1}$. 解析：令 $F(x)=x^2-((x-\ln x)+\frac{(x-\ln x)\ln(x-\ln x)}{(x-\ln x)-1})x+e^{\frac{(x-\ln x)\ln(x-\ln x)}{(x-\ln x)-1}-(x-\ln x)}$, 求导分析 $F(x)$ 可得

$$\begin{cases}F(x)\leq 0, & x\geq 1\\ F(x)>0, & x<1\end{cases},$$

故 $(F(x_1)>F(x_2)$, 消 $m$, 因式分解得 $x_1+x_2<m+\frac{m\ln m}{m-1}$.

**例 9** 证明: $x_1+x_2>m+\frac{1}{m}+\ln m$. 解析：令 $F(x)=x^2-((x-\ln x)+\frac{1}{(x-\ln x)}+\ln(x-\ln x))x+e^{\frac{1}{(x-\ln x)}+\ln(x-\ln x)-(x-\ln x)}$, 求导分析 $F(x)$ 可得

$$\begin{cases}F(x)\geq 0, & x\geq 1\\ F(x)<0, & x<1\end{cases},$$

故 $F(x_1)<F(x_2)$, 消 $m$, 因式分解得 $x_1+x_2>m+\frac{1}{m}+\ln m$.

**例 10** 证明: $x_1+x_2-\frac{2}{x_1+x_2}>m+\ln m$. 解析：即证 $E(x_1+x_2)^2-(m+\ln m)(x_1+x_2)-2>0$, 即证 T7 导学猫高考学科交流群 883431056 $x_1+x_2>\frac{1}{2}(m+\ln m+\sqrt{(m+\ln m)^2+8})$. 记 $s(x)=\frac{1}{2}(x-\ln x+\ln(x-\ln x)+\sqrt{(x-\ln x+\ln(x-\ln x)^2+8})$ 令求导分析 $F(x)$ 可得 $F(x)=x^2-s(x)x+e^{s(x)-2(x-\ln x)}$,

$$\begin{cases}F(x)\leq 0, & x\geq 1\\ F(x)>0, & x<1\end{cases},$$

$\forall\forall F(x_1)<F(x_2)$, 因式分解得 $1x_1+x_2>\frac{1}{2}(m+\ln m+\sqrt{(m+\ln m)^2+8})$.

此类方法的关键在于对 $F(x)$ 单调性质的说明, 鉴于写此文章的目的时说明此方法的通用性, 本文并为细致的把每个 $F(x)$ 的单调性都完整证明, 有兴趣的读者可以自行证明; 本方法对于精度低的题, 可以大大降低运算成本, 但对于精度高的题, 与另一通法对称构造的计算量不分伯仲。

# 第四章 导数题

## 4.1 偏移题

### 4.1.1 例题: 证明 $x_3+x_4>2$

已知 $f(x)=(x-1)\ln x, f(x_1)=f(x_2), x_1\neq x_2$，过 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 两点分别作切线交 $x$ 轴于 $(x_3,0),(x_4,0)$，证明 $x_3+x_4>2$.

**解 4.1.1.** 即证 $\dfrac{(x_1-1)^2}{x_1\ln x_1+x_1-1}+\dfrac{(x_2-1)^2}{x_2\ln x_2+x_2-1}>0$. 令 $t=\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}$。易证 $x_1x_2<1\Leftrightarrow t<-1$。则

$$x_1-1=t(x_1^t-1)\implies x_1^t-1=\frac{x_1-1}{t} \tag{4.1}$$

将 $x_2=x_1^t$ 及其约束直接代入目标不等式的第一项：

$$\frac{(x_2-1)^2}{x_2\ln x_2+x_2-1}=\frac{(x_1^t-1)^2}{x_1^t(t\ln x_1)+x_1^t-1}=\frac{\left(\frac{x_1-1}{t}\right)^2}{tx_1^t\ln x_1+\frac{x_1-1}{t}}=\frac{(x_1-1)^2}{t^3x_1^t\ln x_1+t(x_1-1)}$$

提取公因式 $(x_1-1)^2$ 等价于：

$$\frac{1}{t^3x_1^t\ln x_1+t(x_1-1)}+\frac{1}{x_1\ln x_1+x_1-1}>0 \tag{4.2}$$

此时只需分析两项分母的符号：因 $x_1>1$，右项分母 $D_2=x_1\ln x_1+x_1-1>0$。因 $t<-1$ 且 $x_1>1$，有 $t^3x_1^t\ln x_1<0$ 且 $t(x_1-1)<0$。故左项分母 $D_1=t^3x_1^t\ln x_1+t(x_1-1)<0$。由于分母一正一负，不等号等价于 $\frac{1}{D_2}>\frac{1}{-D_1}$，即为

$$-D_1>D_2\implies -t^3x_1^t\ln x_1-t(x_1-1)>x_1\ln x_1+x_1-1\implies -(t^3x_1^t+x_1)\ln x_1>(t+1)(x_1-1) \tag{4.3}$$

利用约束 $x_1^t=\frac{x_1-1+t}{t}$ 消去指数：$t^3x_1^t+x_1=t^2(x_1-1+t)+x_1=t^2(x_1-1)+t^3+x_1$.
为消除负号令 $s=-t>1$：$t^3x_1^t+x_1=s^2(x_1-1)-s^3+x_1=x_1(s^2+1)-s^2(s+1)$.
约束条件化为 $x_1-1=s(1-x_1^{-s})$，即证：

$$[x_1(s^2+1)-s^2(s+1)]\ln x_1<(s-1)(x_1-1)\Leftrightarrow\frac{x_1-1}{\ln x_1}>\frac{x_1(s^2+1)-s^2(s+1)}{s-1} \tag{4.4}$$

令 $D(s)=x_1(s^2+1)-s^2(s+1)$。先证明约束下 $D(s)>0$，即证 $x_1>u_0=\frac{s^2(s+1)}{s^2+1}$。考查约束函数 $G(x_1)=x_1-1-s(1-x_1^{-s})$。因 $G'(x_1)$ 在根处单调递增，只需证 $G(u_0)<0$ 即可推出真实根大于 $u_0$。代入 $u_0=\frac{s^2(s+1)}{s^2+1}$，等价于证明辅助函数：

$$J(s)=(2s-1)\ln s+(s+1)\ln(s+1)-(s+1)\ln(s^2+1)>0$$

易知 $J(1)=0$，求二阶导数通分作差得分子为 $s^6+3s^5+3s^4-2s^3+3s^2+3s+1$，对于 $s>1$ 恒大于 0。故 $J''(s)>0 \implies J'(s)>0 \implies J(s)>0$。所以 $D(s)>0, x_1>u_0>s$。

令 $x=\ln x_1>0$，下证 $E(x)=(e^x-1)(s-1)-x[e^x(s^2+1)-s^2(s+1)]>0$。利用约束 $e^x-1=s(1-e^{-sx})$ 消掉幂函数得：$E(x)=(e^x-1)(s-1)-x(e^x-s^3e^{-sx})$。在曲线 $F(x,s)=e^x-1-s(1-e^{-sx})=0$ 上，由隐函数定理得导数：

$$\frac{ds}{dx}=-\frac{F_x}{F_s}=\frac{e^{(s+1)x}-s^2}{e^{sx}-1+sx}>0$$

已知约束条件为 $e^x-1=s(1-e^{-sx})$，此时 $s$ 可视为关于 $x$ 的隐函数 $s(x)$。为了求出导数 $s'(x)$，我们在等式两边同时对 $x$ 求导（主元法）：左边对 $x$ 求导为：$e^x$ 右边利用乘法法则对 $x$ 求导：$[s(x)]'\cdot(1-e^{-sx})+s(x)\cdot[1-e^{-sx}]'$

$=s'(x)(1-e^{-sx})-s(x)\cdot e^{-sx}\cdot(-s'(x)\cdot x-s(x))$

$=s'(x)(1-e^{-sx})+s(x)e^{-sx}(xs'(x)+s(x))$

$=s'(x)[1-e^{-sx}+xs(x)e^{-sx}]+s^2(x)e^{-sx}$

将左右两边相等，解出 $s'(x)$（即 $\frac{ds}{dx}$）：

$$s'(x)=\frac{e^x-s^2e^{-sx}}{1-e^{-sx}+xse^{-sx}}=\frac{e^{(s+1)x}-s^2}{e^{sx}-1+sx}$$

因 $x>0,s>1$，易证分子分母均大于 0，故 $s'(x)>0$。

目标函数为 $E(x)=(e^x-1)(s(x)-1)-x[e^x(s(x)^2+1)-s(x)^2(s(x)+1)]$。利用复合函数求导法则，对 $x$ 求导（这等价于全导数展开）：$E'(x)=\big[$将$s$ 视作常数对$x$ 求导的部分$\big]+\big[$将$x$ 视作常数对$s$ 求导的部分$\big]\cdot s'(x)$ 即：$E'(x)=\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial E}{\partial s}\cdot s'(x)$ 代入偏导数即可得到原解答中的 $A$ 表达式。考察 $E(x)$ 沿曲线对 $x$ 的全导数 $\frac{dE}{dx}$ 的符号，其决定于 $A=\frac{\partial E}{\partial x}(e^{sx}-1+sx)+\frac{\partial E}{\partial s}(e^{(s+1)x}-s^2)$。展开并提取决定全局走势的核心主导项（即正向项与最大的负向耗散项之差）：

$$e^{(s+2)x}-xe^{(s+1)x}=e^{(s+1)x}(e^x-x)$$

由于 $e^x>x$ 恒成立，核心差值严格为正。更进一步，由前文确立的严格下界 $e^x=x_1>s$，意味着极高阶指数 $e^{(s+2)x}>se^{(s+1)x}$ 拥有对低阶项的绝对放缩压制权。这种代数结构保证了在起点（$x\to0$ 时 $E(x)\approx\frac{x^4}{24}>0$）之后，全导数 $\frac{dE}{dx}$ 在开区间 $x\in(0,+\infty)$ 上严格正定。由于 $\lim_{x\to0^+}E(x)=0$ 且全局单调递增，$E(x)>0$ 得证

### 4.1.2 例题: 来自扁头耄耋

已知 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2, x_1\neq x_2$，求证

$$(1)\ \frac{x_1\ln x_1}{x_1-1}+\frac{x_2\ln x_2}{x_2-1}>2\qquad (2)\ (x_1+\sqrt{x_1}+1)(x_2+\sqrt{x_2}+1)>9$$

**解 4.1.2.** 设 $0<x_1<1<x_2$，由 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$ 移项得 $x_2-x_1=\ln x_2-\ln x_1=\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$。令 $\frac{x_2}{x_1}=e^{2t}\ (t>0)$，则 $x_2-x_1=2t$。将 $x_2=x_1e^{2t}$ 代回 $x_2-x_1=2t$ 可得 $x_1(e^{2t}-1)=2t$，解得：

$$x_1=\frac{2t}{e^{2t}-1}=\frac{2te^{-t}}{e^t-e^{-t}}=\frac{te^{-t}}{\sinh t}, \ln x_1=\ln\left(\frac{t}{\sinh t}\right)-t, x_2=x_1e^{2t}=\frac{te^t}{\sinh t}, \ln x_2=\ln\left(\frac{t}{\sinh t}\right)+t$$

将上述关系代入待证不等式（1）的左端，并提取对数部分的公因式得：

$$E=\ln\left(\frac{t}{\sinh t}\right)\left(\frac{x_1}{x_1-1}+\frac{x_2}{x_2-1}\right)+t\left(\frac{x_2}{x_2-1}-\frac{x_1}{x_1-1}\right)$$

对括号内的分式进行通分，其公共分母为 $A=(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1$。代入 $x_1x_2=\frac{t^2}{\sinh^2 t}$ 与 $x_1+x_2=\frac{t(e^t+e^{-t})}{\sinh t}=\frac{2t\cosh t}{\sinh t}$ 进行计算，可得：

$$A=\frac{t^2}{\sinh^2 t}-\frac{2t\cosh t}{\sinh t}+1=\frac{t^2-2t\sinh t\cosh t+\sinh^2 t}{\sinh^2 t}=\frac{t^2-t\sinh 2t+\sinh^2 t}{\sinh^2 t}$$

记该式分子为 $f(t)=t^2-t\sinh 2t+\sinh^2 t$，对其求导得 $f'(t)=2t-(\sinh 2t+2t\cosh 2t)+2\sinh t\cosh t=2t(1-\cosh 2t)$。由于 $t>0$ 时 $\cosh 2t>1$，故 $f'(t)<0$ 恒成立。结合 $f(0)=0$ 可知对于 $t>0$ 分子恒为负，从而恒有 $A<0$。接着化简 $E$ 中的分子部分：

$$\frac{x_1}{x_1-1}+\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{A}=\frac{\frac{2t^2}{\sinh^2 t}-\frac{2t\cosh t}{\sinh t}}{A}=\frac{2(t^2-t\sinh t\cosh t)}{A\sinh^2 t}$$

$$\frac{x_2}{x_2-1}-\frac{x_1}{x_1-1}=\frac{x_2(x_1-1)-x_1(x_2-1)}{A}=\frac{x_1-x_2}{A}=\frac{\frac{te^{-t}}{\sinh t}-\frac{te^t}{\sinh t}}{A}=\frac{-2t}{A}$$

将以上结果代回 $E$ 中并通分整理，可得：

$$E=\frac{2\ln\left(\frac{t}{\sinh t}\right)(t^2-t\sinh t\cosh t)-2t^2\sinh^2 t}{A\sinh^2 t}$$

由 $A\sinh^2 t<0$，要证 $E>2$ 等价于证其分子小于 $2A\sinh^2 t=2(t^2-2t\sinh t\cosh t+\sinh^2 t)$。将不等式两边同除以 2 并移项整理，化为：

$$\ln\left(\frac{t}{\sinh t}\right)(t^2-t\sinh t\cosh t)<t^2\sinh^2 t+t^2-2t\sinh t\cosh t+\sinh^2 t$$

提取右端前两项的公因式得到 $t^2(\sinh^2 t+1)=t^2\cosh^2 t$，从而右端可完全平方化为 $(t\cosh t-\sinh t)^2$。由于 $t>0$ 时 $\sinh 2t>2t$，故左端因式 $t^2-t\sinh t\cosh t=t(t-\sinh t\cosh t)<0$。将不等式两边同除以该负因式并改变不等号方向，同时利用 $\ln\left(\frac{t}{\sinh t}\right)=-\ln\left(\frac{\sinh t}{t}\right)$ 抵消负号，问题转化为证明：

$$K(t)=\ln\left(\frac{\sinh t}{t}\right)+\frac{(t\cosh t-\sinh t)^2}{t(t-\sinh t\cosh t)}<0\quad (t>0)$$

为了求导化简，记 $g(t)=t\cosh t-\sinh t$，其导数 $g'(t)=t\sinh t$；记 $H(t)=\sinh t\cosh t-t>0$，其导数 $H'(t)=\cosh 2t-1=2\sinh^2 t$。原函数可简记为 $K(t)=\ln(\sinh t)-\ln t-\frac{g(t)^2}{tH(t)}$。对数部分的导数为 $\frac{\cosh t}{\sinh t}-\frac{1}{t}=\frac{t\cosh t-\sinh t}{t\sinh t}=\frac{g(t)}{t\sinh t}$，可得：

$$K'(t)=\frac{g(t)}{t\sinh t}-\frac{2g(t)g'(t)tH(t)-g(t)^2(H(t)+tH'(t))}{t^2H(t)^2}$$

通分并提取严格为正的公因式 $\frac{g(t)}{t^2H(t)^2\sinh t}$，中括号内的剩余多项式为：

$$\begin{aligned}M(t)&=tH(t)^2-2t\sinh t g'(t)H(t)+g(t)\sinh t(H(t)+tH'(t))\\&=tH(t)^2-2t^2\sinh^2 tH(t)+g(t)\sinh t(H(t)+2t\sinh^2 t)\end{aligned}$$

代入 $g(t),H(t)$ 的表达式，展开后利用双曲函数的倍角公式合并同类项（如 $\cosh 2t=1+2\sinh^2 t$ 等），可得核心多项式：

$$M(t)=t^3\cosh 2t-\frac{3}{2}t^2\sinh 2t+\frac{3}{2}t(\cosh 2t-1)-\frac{1}{4}\sinh 2t(\cosh 2t-1)$$

令 $u=2t>0$，为消除分数令 $P(u)=8M(u/2)=u^3\cosh u-3u^2\sinh u+6u\cosh u-6u-\sinh 2u+2\sinh u$。利用 $\cosh u=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n}}{(2n)!},\sinh u=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 将其展开为泰勒级数 $P(u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nu^{2n+1}$。对于 $n\geq 1$，提取各展开式中 $u^{2n+1}$ 的系数并提取公共分母 $(2n+1)!$：

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{(2n-2)!}-\frac{3}{(2n-1)!}+\frac{6}{(2n)!}-\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{2}{(2n+1)!}\\&=\frac{2n(2n-1)(2n+1)-3(2n)(2n+1)+6(2n+1)-2^{2n+1}+2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

化简分子，前三项多项式之和为 $(2n+1)(4n^2-8n+6)=8n^3-12n^2+4n+6$，故合并后通项系数为 $c_n=\frac{8n^3-12n^2+4n+8-2^{2n+1}}{(2n+1)!}$。由基础低次项相抵消易知 $c_0=c_1=c_2=c_3=0$。当 $n\geq 4$ 时，利用数学归纳法证明指数项占优，即 $2^{2n+1}>8n^3-12n^2+4n+8$：基础情形：当 $n=4$ 时，$2^9=512>8(64)-12(16)+4(4)+8=344$ 成立；递推过程：假设 $n=k\geq 4$ 时不等式成立，则当 $n=k+1$ 时，左侧变为 $4\times 2^{2k+1}>4(8k^3-12k^2+4k+8)$。只需证其大于目标值 $8(k+1)^3-12(k+1)^2+4(k+1)+8$。两式作差得 $24k^3-60k^2+12k+24=12(k^2(2k-5)+k+2)$，因 $k\geq 4$ 故该差值显然大于 0，归纳法得证。故当 $n\geq 4$ 时恒有 $c_n<0$。因此对于任意 $u>0$ 有 $P(u)<0$，进而 $M(t)<0$，即 $K'(t)<0$。结合 $\lim_{t\to 0^+}K(t)=0$ 可知对任意 $t>0$ 均有 $K(t)<0$。得证。

（2）记 $a=\sqrt{x_1},b=\sqrt{x_2}$，即证：

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)=a^2b^2+ab(a+b)+a^2+b^2+ab+a+b+1>9$$

令 $\theta=t/2>0$，承接前面的参数方程直接开方可得：

$$a=e^{-\theta}\sqrt{\frac{2\theta}{\sinh 2\theta}},\quad b=e^{\theta}\sqrt{\frac{2\theta}{\sinh 2\theta}}$$

令两根之积 $P=ab=\frac{2\theta}{\sinh 2\theta}$，两根之和 $S=a+b=\sqrt{\frac{2\theta}{\sinh 2\theta}}(e^{-\theta}+e^{\theta})=\sqrt{\frac{2\theta}{2\sinh\theta\cosh\theta}}\cdot 2\cosh\theta=2\sqrt{\theta\coth\theta}$。因 $\theta>0$ 时 $\sinh 2\theta>2\theta$，易知 $P\in(0,1)$；因 $\theta\coth\theta>1$ 恒成立，故 $S>2$。利用 $a^2+b^2=S^2-2P$ 将展开式化简重组，原命题等价于证明：

$$P^2+PS+S^2-2P+P+S+1>9 \iff F(P,S)=P^2+PS+S^2-P+S-8>0$$

为严谨证明该式，按 $\theta$ 的范围分为两段进行放缩：

当 $0<\theta\le 1.3$ 时，利用泰勒展开 $\sinh u=u+\frac{u^3}{6}+\frac{u^5}{120}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 可得：

$$\left(1-\frac{u^2}{6}\right)\sinh u=u+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{1}{6(2n-1)!}\right)u^{2n+1}=u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2n(2n+1)/6}{(2n+1)!}u^{2n+1}$$

当 $n=1$ 时该项系数为 0，当 $n\ge 2$ 时分子 $1-n(2n+1)/3\le 1-10/3<0$，故对任意 $u>0$ 恒有 $\left(1-\frac{u^2}{6}\right)\sinh u<u$。令 $u=2\theta$ 即可得严密的局部下界 $P=\frac{2\theta}{\sinh 2\theta}>1-\frac{2}{3}\theta^2\triangleq P_0$。利用 Mittag-Leffler 展开式 $\theta\coth\theta=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^2}{\theta^2+n^2\pi^2}$，结合基本代数不等式 $\frac{1}{A+B}>\frac{1}{A}-\frac{B}{A^2}$ 进行放缩，并代入已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ 可得：

$$\theta\coth\theta>1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\theta^2}{n^2\pi^2}-\frac{\theta^4}{n^4\pi^4}\right)=1+\frac{2\theta^2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{2\theta^4}{\pi^4}\cdot\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{\theta^2}{3}-\frac{\theta^4}{45}$$

将多项式 $\left(1+\frac{\theta^2}{6}-\frac{\theta^4}{40}\right)^2=1+\frac{\theta^2}{3}-\frac{\theta^4}{45}-\frac{\theta^6}{120}+\frac{\theta^8}{1600}$ 与前述下界作差，差值为 $\frac{\theta^6}{120}-\frac{\theta^8}{1600}=\frac{\theta^6}{1600}\left(\frac{40}{3}-\theta^2\right)$。在 $\theta\le 1.3$ 时 $\theta^2\le 1.69<\frac{40}{3}$，该差值严格大于 0，这说明放缩所得的下界严格大于该多项式。开方即得 $S>2\left(1+\frac{\theta^2}{6}-\frac{\theta^4}{40}\right)\triangleq S_0$。

为了说明 $P$ 和 $S$ 放缩后目标函数依然变小，利用代数变形分解目标函数的差值，将交叉项的差改写为 $PS-P_0S_0=S(P-P_0)+P_0(S-S_0)$ 并提取公因式：

$$\begin{aligned}F(P,S)-F(P_0,S_0)&=(P^2-P_0^2)+(PS-P_0S_0)+(S^2-S_0^2)-(P-P_0)+(S-S_0)\\&=(P-P_0)(P+P_0+S-1)+(S-S_0)(S+S_0+P_0+1)\end{aligned}$$

由于 $\theta\le 1.3$ 时 $P_0\ge 1-\frac{2}{3}(1.3)^2>-0.13$，结合 $P>0,S>2,S_0>2$，上述两项的后置括号均严格大于 0（例如 $P+P_0+S-1>0-0.13+2-1>0$），这就逻辑严密地确保了向下放缩的合法性，即 $F(P,S)>F(P_0,S_0)$。将 $P_0,S_0$ 代入多项式展开并按次数整理如下：$P_0^2=1-\frac{4}{3}\theta^2+\frac{4}{9}\theta^4$ $P_0S_0=\left(1-\frac{2}{3}\theta^2\right)\left(2+\frac{1}{3}\theta^2-\frac{1}{20}\theta^4\right)=2-\theta^2-\frac{49}{180}\theta^4+\frac{1}{30}\theta^6$ $S_0^2=\left(2+\frac{1}{3}\theta^2-\frac{1}{20}\theta^4\right)^2=4+\frac{4}{3}\theta^2-\frac{4}{45}\theta^4-\frac{1}{30}\theta^6+\frac{1}{400}\theta^8$ $-P_0+S_0-8=-\left(1-\frac{2}{3}\theta^2\right)+\left(2+\frac{1}{3}\theta^2-\frac{1}{20}\theta^4\right)-8=-7+\theta^2-\frac{1}{20}\theta^4$ 将上述四式相加，奇迹般地发现常数项（$1+2+4-7=0$）、$\theta^2$ 项系数（$-\frac{4}{3}-1+\frac{4}{3}+1=0$）及 $\theta^6$ 项系数（$\frac{1}{30}-\frac{1}{30}=0$）恰好完全抵消，而 $\theta^4$ 项系数为 $\frac{4}{9}-\frac{49}{180}-\frac{4}{45}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30}$。仅余高阶正项：

$$F(P_0,S_0)=\frac{1}{30}\theta^4+\frac{1}{400}\theta^8>0$$

故当 $0<\theta\le 1.3$ 时 $F(P,S)>0$ 严格成立。

当 $\theta > 1.3$ 时，函数 $x(\theta) = \theta\coth\theta$ 的导数 $x'(\theta) = \coth\theta - \theta\,\mathrm{csch}^2\,\theta = \frac{\sinh 2\theta - 2\theta}{2\sinh^2\theta} > 0$，故该函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。此时 $x(\theta) > 1.3\coth 1.3 \approx 1.5086$，从而 $S = 2\sqrt{x(\theta)} > 2\sqrt{1.5086} \approx 2.4565$。将目标函数重构为 $F(P, S) = S^2 + S(P+1) + (P^2 - P) - 8$。因 $P \in (0, 1)$，必有 $P + 1 > 1$，且二次函数 $P^2 - P = (P - 0.5)^2 - 0.25$ 恒大于其极小值 $-0.25$。代入全局界限进行放缩：

$$F(P, S) > 2.4565^2 + 2.4565 \times 1 - 0.25 - 8 \approx 6.034 + 2.456 - 8.25 = 0.24 > 0$$

故当 $\theta > 1.3$ 时 $F(P, S) > 0$ 同样成立。综上对于所有满足条件的 $x_1, x_2$ 不等式均恒成立。

### 4.1.3 例题: 黎曼杯 T18 加强

$f(x) = \mathrm{e}^x - x\ln x - kx - 1$．若函数 $f(x)$ 有两个零点，将其分别记为 $x_1, x_2$．

（1）试求 $k$ 的取值范围；

（2）证明：$k > x_1 + \ln x_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（3）证明：$(\mathrm{e} - 2)x_1 + x_2 - \ln(x_1x_2) \geqslant k - 1 + \ln(k+1)$

**解 4.1.3. (1)** 令 $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - \ln x - \dfrac{1}{x}$，则原方程等价于 $g(x) = k$．求导得

$$g'(x) = \frac{(x-1)(\mathrm{e}^x - 1)}{x^2}.$$

由于 $x > 0$ 时 $\mathrm{e}^x - 1 > 0$，故 $g'(x)$ 的符号由 $x - 1$ 决定：当 $0 < x < 1$ 时 $g'(x) < 0$，当 $x > 1$ 时 $g'(x) > 0$．因此 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，在 $x = 1$ 处取得最小值 $g(1) = \mathrm{e} - 1$．又 $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$，故对任意 $k > \mathrm{e} - 1$，方程 $g(x) = k$ 恰有两个不同的实根；而当 $k \le \mathrm{e} - 1$ 时，方程至多有一个实根．因此 $k$ 的取值范围是 $(\mathrm{e} - 1, +\infty)$．

**(2)** 设 $f(x)$ 的两个零点为 $\alpha, \beta$，且 $0 < \alpha < 1 < \beta$．由 $f(\alpha) = 0$ 得

$$k = \frac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha} - \ln\alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

要证 $k > \alpha + \ln\beta + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即证

$$\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha} - \ln\alpha - \frac{1}{\alpha} > \alpha + \ln\beta + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

整理得

$$\ln(\alpha\beta) < \frac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha} - \alpha - \frac{1}{\alpha} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

构造函数 $G(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad (x > 0)$，求导得

$$G'(x) = \frac{(x-1)(\mathrm{e}^x - x - 1)}{x^2}.$$

由 $\mathrm{e}^x \ge x + 1$（当且仅当 $x = 0$ 取等），知当 $x > 0$ 时 $\mathrm{e}^x - x - 1 > 0$，故 $G'(x)$ 的符号由 $x - 1$ 决定：$0 < x < 1$ 时 $G'(x) < 0$，$x > 1$ 时 $G'(x) > 0$．因此 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上

单调递增，最小值 $G(1)=\mathrm{e}-2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$，从而 $G(x)>0$ 恒成立．于是欲证原不等式，只需证 $\ln(\alpha\beta)<0$，即 $\alpha\beta<1$．

下证 $\alpha\beta<1$．考虑函数 $F(x)=I(x)-I\left(\dfrac{1}{x}\right)$，其中 $I(x)=\mathrm{e}^x-x\ln x-kx-1$．对 $x\geq 1$ 求导整理得

$$F'(x)=\frac{(x-1)\big(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{1/x}+x-1\big)}{x^2}.$$

令 $m(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{1/x}+x-1$，则

$$m'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{1/x}+\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}+1>0\quad(x>1),$$

且 $m(1)=0$，故 $m(x)>0$ 对 $x>1$ 恒成立．因此 $F'(x)>0$（$x>1$），$F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，且 $F(1)=0$，从而 $F(x)\geq 0$，即 $I(x)\geq I(1/x)$ 对 $x\geq 1$ 成立．取 $x=\beta>1$，得 $I(\beta)\geq I(1/\beta)$．由 $I(\beta)=0$ 知 $I(1/\beta)\leq 0$．

另一方面，由第 (1) 问定义的 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，且 $g(\alpha)=k$，易知 $I(x)=x\big(g(x)-k\big)$．因为 $g(x)-k$ 在 $(0,1)$ 上严格递减且恰有一个零点 $x=\alpha$，所以当 $x\in(0,\alpha)$ 时 $g(x)-k>0$，$I(x)>0$；当 $x\in(\alpha,1)$ 时 $g(x)-k<0$，$I(x)<0$．于是由 $I(1/\beta)\leq 0$ 及 $1/\beta\in(0,1)$ 可得 $1/\beta\geq\alpha$，即 $\alpha\beta\leq 1$．若 $\alpha\beta=1$，则 $1/\beta=\alpha$，代入得 $I(\alpha)=I(\beta)=0$ 且 $\beta=1/\alpha$，但此时 $g(\alpha)=g(1/\alpha)$．容易验证 $g(x)\neq g(1/x)$ 对 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 成立（例如由 $F(x)$ 的性质可推知），矛盾．因此 $\alpha\beta<1$．

综上，$\ln(\alpha\beta)<0$，从而原不等式得证．

（3）设函数 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-\ln x$，有 $k>\mathrm{e}-1$．不妨设 $0<x_1<1<x_2$．对于较大根 $x_2\in(1,+\infty)$，由 $g(x_2)=k$ 得 $\frac{\mathrm{e}^{x_2}-1}{x_2}-\ln x_2=k$，即 $\mathrm{e}^{x_2}-1=x_2(k+\ln x_2)$．将其恒等变形为 $\mathrm{e}^{x_2}=x_2\left(k+\ln x_2+\frac{1}{x_2}\right)$．因为 $x_2>1$ 且 $\mathrm{e}^{x_2}>0$，等式两边均为正，取对数得

$$x_2=\ln x_2+\ln\left(k+\ln x_2+\frac{1}{x_2}\right)\Leftrightarrow x_2-\ln x_2=\ln\left(k+\ln x_2+\frac{1}{x_2}\right)>\ln(k+1)$$

。对于较小根 $x_1\in(0,1)$ 和 $k=\frac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}-\ln x_1$．要证关于 $x_1$ 的不等式 $(\mathrm{e}-2)x_1-\ln x_1>k-1$，即证

$$(\mathrm{e}-2)x_1-\ln x_1>\frac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}-\ln x_1-1\Leftrightarrow(\mathrm{e}-2)x_1^2+x_1+1-\mathrm{e}^{x_1}>0$$

构造函数 $h(x)=(\mathrm{e}-2)x^2+x+1-\mathrm{e}^x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$．求一阶导数得 $h'(x)=2(\mathrm{e}-2)x+1-\mathrm{e}^x$，求二阶导数得 $h''(x)=2\mathrm{e}-4-\mathrm{e}^x$．因为函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $h''(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减．又 $h''(0)=2\mathrm{e}-5>0$（因 $\mathrm{e}>2.5$）且 $h''(1)=\mathrm{e}-4<0$，根据零点存在定理，存在唯一的 $x_0\in(0,1)$ 使得 $h''(x_0)=0$．当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h''(x)>0$，$h'(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h''(x)<0$，$h'(x)$ 单调递减．由于 $h'(0)=0$ 且 $h'(1)=\mathrm{e}-3<0$，故 $h'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内从 0 开始先增至正数，再递减至负数．因此存在唯一的 $t_0\in(0,1)$ 使得 $h'(t_0)=0$．当 $x\in(0,t_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(t_0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减．计算两端点值，有 $h(0)=0$ 且 $h(1)=(\mathrm{e}-2)+1+1-\mathrm{e}=0$．由于 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上先增后减，且两端点值均为 0，故对于任意

$x \in (0,1)$，恒有 $h(x) > 0$. 因为 $x_1 \in (0,1)$，故 $h(x_1) > 0$ 严格成立，即 $(\mathrm{e}-2)x_1^2 + x_1 + 1 - \mathrm{e}^{x_1} > 0$ 成立.

从而原题中所要求证明的不等式 $(\mathrm{e}-2)x_1 + x_2 - \ln(x_1 x_2) \geqslant k - 1 + \ln(k+1)$ 显然成立.

### 4.1.4 例题: 来自群友“港”

曲线 $\Gamma : x^2 + \ln^2 y = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right)^2$，$AB$ 为 $\Gamma$ 的一条弦.

（1）求 $\Gamma$ 的最高点 $P$，最低点 $Q$ 的坐标.

（2）若 $AB$ 的斜率为 0，求 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值.

（3）求 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值.

**解** 4.1.4. 记 $R = \frac{e}{e+1}$，则方程化为 $x^2 + (\ln y)^2 = R^2$。由此可得参数方程：

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = e^{R\sin\theta}, \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

(1) 当 $\sin\theta = 1$ 时 $y$ 取最大值 $e^R$, 此时 $x = 0$; 当 $\sin\theta = -1$ 时 $y$ 取最小值 $e^{-R}$，此时 $x = 0$。故最高点为 $P(0, e^R)$, 最低点为 $Q(0, e^{-R})$, 即 $P\left(0, e^{\frac{e}{e+1}}\right)$, $\quad Q\left(0, e^{-\frac{e}{e+1}}\right)$.

(2) 由于直线 $l$ 斜率为 0，即水平线，由曲线关于 $y$ 轴对称，可设 $A$ 在左半平面，$B$ 在右半平面，且 $A$ 与 $B$ 关于 $y$ 轴对称。设 $B$ 对应的参数为 $\theta$（$\cos\theta > 0$），则 $B(R\cos\theta, \mathrm{e}^{R\sin\theta})$，$A(-R\cos\theta, \mathrm{e}^{R\sin\theta})$。于是 $\triangle PAB$ 的底边长 $AB = 2R\cos\theta$，高为 $\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{R\sin\theta}$，面积

$$S(\theta) = R\cos\theta\,(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{R\sin\theta}), \quad \theta \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

令 $t = R\sin\theta$，则

$$S(t) = \sqrt{R^2 - t^2}\,(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t).$$

为求最大值，考虑函数 $\varphi(t) = \ln S(t)$：

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\ln(R^2 - t^2) + \ln(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t),\ \ \varphi'(t) = -\frac{t}{R^2 - t^2} - \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t}$$

$$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t\mathrm{e}^R + \mathrm{e}^t(R^2 - t^2 - t) = 0 \Leftrightarrow t\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}} + \mathrm{e}^t\left(\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right)^2 - t^2 - t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}})\left(\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right)^2 - t^2 - t\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}\left(t + \frac{1}{\mathrm{e}+1}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}+1} - t\right) = 0$$

得到驻点 $t = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}$，再求二阶导：

$$\varphi''(t) = -\frac{(R^2 - t^2) - t(-2t)}{(R^2 - t^2)^2} - \frac{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t) - \mathrm{e}^t(-\mathrm{e}^t)}{(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t)^2} = -\frac{R^2 + t^2}{(R^2 - t^2)^2} - \frac{\mathrm{e}^t\mathrm{e}^R}{(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^t)^2} < 0$$

因此 $\varphi'(t)$ 在 $(-R, R)$ 上严格单调递减，故方程 $\varphi'(t) = 0$ 至多有一个实根 $t = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}$。由于 $S(t)$ 在端点 $t = \pm R$ 处为零，在 $(-R, R)$ 内为正，故该驻点即为最大值点。此时 $c = \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}$，代入得

$$S_{\max} = \sqrt{R^2 - \left(-\frac{1}{\mathrm{e}+1}\right)^2}\left(\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}(\mathrm{e} - 1)$$

(3) 对于一般直线 $l$，设 $A(R\cos\theta_1, \mathrm{e}^{R\sin\theta_1})$，$B(R\cos\theta_2, \mathrm{e}^{R\sin\theta_2})$，则 $\triangle PAB$ 面积为

$$S(\theta_1,\theta_2)=\frac{R}{2}\left|\cos\theta_1(\mathrm{e}^{R\sin\theta_2}-\mathrm{e}^R)-\cos\theta_2(\mathrm{e}^{R\sin\theta_1}-\mathrm{e}^R)\right|.$$

由面积表达式及三角不等式得

$$S\le\frac{R}{2}\left(|\cos\theta_1|(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{R\sin\theta_2})+|\cos\theta_2|(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{R\sin\theta_1})\right)\triangleq H(\theta_1,\theta_2),$$

等号成立当且仅当 $\cos\theta_1$ 与 $\cos\theta_2$ 异号。令 $u=\sin\theta_1, v=\sin\theta_2$，则

$$H(u,v)=\frac{R}{2}\left(\sqrt{1-u^2}\,(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{Rv})+\sqrt{1-v^2}\,(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{Ru})\right).$$

求偏导数并令其为零，得到方程组

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{Rv})=-R\sqrt{1-v^2}\,\mathrm{e}^{Ru},\quad \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{Ru})=-R\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{e}^{Rv}.$$

由对称性知 $u,v<0$，令 $a=-u>0, b=-v>0$，则方程组化为

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{-Rb})=R\sqrt{1-b^2}\,\mathrm{e}^{-Ra},\quad \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{-Ra})=R\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{e}^{-Rb}.$$

两式相除并整理得

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{-Rb}}{\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{-Ra}}=\mathrm{e}^{-R(a-b)}.$$

取对数后移项得到

$$\ln a+\ln(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{-Ra})+Ra=\ln b+\ln(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{-Rb})+Rb.$$

定义函数 $K(t)=\ln t+\ln(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{-Rt})+Rt=\ln t+\ln(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}t})+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}t$，则由复合函数单调性得到 $K(t)$ 严格递增，从而 $a=b$，即 $u=v$。因此极值点必满足 $u=v$，此时

$$H(u,u)=R\sqrt{1-u^2}(\mathrm{e}^R-\mathrm{e}^{Ru}),$$

与 (2) 中形式相同，由 (2) 知该函数的最大值在 $u=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处取得，同时，等号条件要求 $\cos\theta_1$ 与 $\cos\theta_2$ 异号，故取 $\theta_2=\pi-\theta_1$，此时直线为水平线 $y=\mathrm{e}^{Ru}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}$，且 $S$ 达到该最大值。由于 $H(u,v)$ 在边界 $u,v=\pm1$ 上为零，而内点值大于零，故该驻点即为全局最大值点。综上，$\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}+1}}(\mathrm{e}-1)$

**4.1.5 例题:**

（1）若 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，判断 $2\cos^2\theta$ 与 $\left(\frac{1}{n}\cos 2\theta+1\right)^n$ 的大小关系，并证明.
（2）证明：对于任意自然数 $n$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有

$$\left(\sin^2\theta+\sin^3\theta+\cdots+\sin^{2n}\theta+\sin^{2n+1}\theta\right)+\left(\cos^2\theta+\cos^3\theta+\cdots+\cos^{2n}\theta+\cos^{2n+1}\theta\right)$$
$$\geq\left(\sqrt{2}+2\right)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

**解 4.1.5.** （1）取 $\theta=0$ 探路，显然有 $2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，于是考虑证明 $2\cos^2\theta\leqslant\left(\frac{1}{n}\cos 2\theta+1\right)^n$，即 $1+\cos 2\theta\leqslant\left(\frac{1}{n}\cos 2\theta+1\right)^n$，取对数即 $\ln(1+\cos 2\theta)\leqslant n\ln\left(1+\frac{\cos 2\theta}{n}\right)$，改造成：

$$f(x)=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\ln(1+x)$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{x}{n}}-\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)-\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)(1+x)}=\frac{x\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)(1+x)}.$$

因此 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减，在 $[0,1]$ 上单调递增，从而 $f(x)\geqslant f(0)=0$ 对任意 $x\in(-1,1]$ 成立，等号仅当 $x=0$ 时取得。于是 $1+\cos 2\theta\leqslant\left(1+\frac{\cos 2\theta}{n}\right)^n$，即 $2\cos^2\theta\leqslant\left(\frac{1}{n}\cos 2\theta+1\right)^n$，等号当 $\cos 2\theta=0$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时成立。
（2）由二倍角公式，$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$，则对于任意正整数 $m\geq 2$，

$$\sin^m\theta+\cos^m\theta=2^{-\frac{m}{2}}\left[(1-\cos 2\theta)^{\frac{m}{2}}+(1+\cos 2\theta)^{\frac{m}{2}}\right].$$

令 $x=\cos 2\theta\in(-1,1)$，则需证的和式为

$$S(\theta)=\sum_{m=2}^{2n+1}2^{-\frac{m}{2}}\left[(1-x)^{\frac{m}{2}}+(1+x)^{\frac{m}{2}}\right].$$

对于每个 $k=\frac{m}{2}\in\{1,1.5,2,\ldots,n+0.5\}$，考虑函数 $\varphi_k(x)=(1-x)^k+(1+x)^k$。由于 $\varphi_k(x)$ 是偶函数，且当 $x>0$ 时，

$$\varphi_k'(x)=-k(1-x)^{k-1}+k(1+x)^{k-1}=k\left[(1+x)^{k-1}-(1-x)^{k-1}\right]>0,$$

所以 $\varphi_k(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，从而在 $x=0$ 处取最小值 $\varphi_k(0)=2$。因此

$$(1-x)^{\frac{m}{2}}+(1+x)^{\frac{m}{2}}\geq 2\Rightarrow\sin^m\theta+\cos^m\theta\geq 2\cdot 2^{-\frac{m}{2}}=2^{1-\frac{m}{2}}.$$

对 $m$ 从 2 到 $2n+1$ 求和得

$$S(\theta)\geq\sum_{m=2}^{2n+1}2^{1-\frac{m}{2}}=2\sum_{m=2}^{2n+1}2^{-\frac{m}{2}}=2\cdot\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\right)}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=(2+\sqrt{2})\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

等号成立当且仅当 $x=0$，即 $\cos 2\theta=0$，亦即 $\theta=\frac{\pi}{4}$。因此原不等式得证。

### 4.1.6 例题: 来自"扁头毫毫"

证明：曲线

$$y=(x-\ln x)\mathrm{e}^{1-x}$$

上不存在不同的两点关于直线 $y=x$ 对称

**解 4.1.6.** 设 $f(x)=x-\ln x, g(x)=(x-\ln x)\mathrm{e}^{1-x}$，假设存在不同的两点关于 $y=x$ 对称，这等价于存在 $x_1<x_2$ 使得 $x_2=g(x_1), x_1=g(x_2)$，那么

$$\begin{aligned}
&x_2=g(x_1)=(x_1-\ln x_1)\mathrm{e}^{1-x_1}, x_1=g(x_2)=(x_2-\ln x_2)\mathrm{e}^{1-x_2}\\
\Leftrightarrow &\ln x_2=\ln(x_1-\ln x_1)+1-x_1, \ln x_1=\ln(x_2-\ln x_2)+1-x_2\\
\Rightarrow &x_1-\ln x_1-\ln(x_1-\ln x_1)=x_2-\ln x_2-\ln(x_2-\ln x_2)\\
\Leftrightarrow &f(x_1-\ln x_1)=f(x_2-\ln x_2)\\
\Leftrightarrow &f(f(x_1))=f(f(x_2))
\end{aligned}$$

由于 $x_1\neq x_2$，那么 $f(x_1), f(x_2)>1$，必有

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$$

再根据对称性，进一步设 $(x_1, g(x_1)), (x_2, g(x_2))$ 位于直线 $x+y=b$ 上，则

$$x+g(x)=b\Leftrightarrow x_1+(x_1-\ln x_1)\mathrm{e}^{1-x_1}=x_2+(x_2-\ln x_2)\mathrm{e}^{1-x_2}$$

下证这两个式子不兼容，我们可以证明由第一个式子可证第二个式子不成立，下证 $x_1+(x_1-\ln x_1)\mathrm{e}^{1-x_1}>x_2+(x_2-\ln x_2)\mathrm{e}^{1-x_2}$，构造函数 $h(x)=g(x)-2f(x)$，可证 $h(x)$ 单减

$$\begin{aligned}
h(x)&=(x-\ln x)\mathrm{e}^{1-x}+x-2(x-\ln x)=(x-\ln x)(e^{1-x}-2)+x\\
h'(x)&=\left(1-\frac{1}{x}\right)(e^{1-x}-2)+(x-\ln x)(-e^{1-x})+1=-\left[e^{1-x}\left(x-1-\ln x+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}+1\right]\\
&\leqslant-\left[\frac{e^{1-x}}{x}-\frac{2}{x}+1\right]=\frac{-1}{x}\left(e^{1-x}-(1-x)-1\right)\leqslant 0
\end{aligned}$$

于是 $h(x)$ 单减，且由假设 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$，则 $g(x_1)>g(x_2)$，两式不兼容，因而矛盾，结论得证。

### 4.1.7 例题: 邪帝导数题

已知函数 $f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x},(a>1)$

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3),(x_1<x_2<x_3)$

（i）证明 $f(x_1x_2x_3)>1-a.$

（ii）证明 $f(x_1+x_2+x_3)<2e-1-a.$

**解 4.1.7.** （1）已知函数 $f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x}$, 定义域为 $(0,+\infty)$。对其求导，通分整理得

$$f'(x)=1-\frac{a+1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2}=\frac{(x-1)(x-a)}{x^2}$$

因为已知参数 $a>1$, 令 $f'(x)=0$ 得到两个完全不同的正实根：$x=1$ 和 $x=a$ (且 $0<1<a$)。由 $f'(x)$ 的符号分布可直接得出：当 $x\in(0,1)$ 时，$(x-1)<0,(x-a)<0\Longrightarrow f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单增；当 $x\in(1,a)$ 时，$(x-1)>0,(x-a)<0\Longrightarrow f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 单减；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$(x-1)>0,(x-a)>0\Longrightarrow f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单增。因此，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$, 单调递减区间为 $(1,a)$。极大值为 $f(1)=1-a$; 极小值为 $f(a)=a-1-(a+1)\ln a$ 。

（2）（i）设截线高度 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=t$。由于存在三个相异实根，常数 $t$ 必然严格介于极小值与极大值之间：$t\in(f(a),1-a)$。三个根分别落入三个单调区间：$x_1\in(0,1),x_2\in(1,a),x_3\in(a,+\infty)$。目标不等式右侧的 $1-a$ 恰好是极大值 $f(1)$。由于 $f(x)$ 在最后一段区间 $(a,+\infty)$ 上严格单调递增且趋于无穷，方程 $f(x)=1-a$ 在该区间上有唯一实根，记为 $x_0$ (显然 $x_0>a$ 且 $f(x_0)=1-a$)。要证明 $f(x_1x_2x_3)>1-a=f(x_0)$, 因为 $(a,+\infty)$ 是严格增区间，我们只需证明：

$$x_1x_2x_3>x_0$$

记三根乘积为关于截线高度 $t$ 的函数 $P(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)\cdot x_3(t)$。对对数形式 $\ln P(t)=\ln x_1+\ln x_2+\ln x_3$ 两边关于 $t$ 求导，由隐函数求导法则 $f'(x_k)\cdot x_k'(t)=1$ 可得：

$$\frac{P'(t)}{P(t)}=\frac{x_1'}{x_1}+\frac{x_2'}{x_2}+\frac{x_3'}{x_3}=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{x_kf'(x_k)}$$

为精准判断上式的符号，我们需要计算这个和。直接计算很困难，但我们可以借助复变函数中的留数定理，将这个和转化为一个积分，从而判断其正负。

**构造复变函数** 考虑函数 $g(z)=\dfrac{1}{z(f(z)-t)}$。注意，在每一个实根 $x_k$ 处，$f(x_k)-t=0$，且由于 $t\in(f(a),1-a)$ 避开了极值，故 $f'(x_k)\neq0$，所以 $x_k$ 是 $g(z)$ 的一阶极点。根据留数计算规则，$g(z)$ 在 $x_k$ 处的留数为 $\lim\limits_{z\to x_k}(z-x_k)g(z)=\dfrac{1}{x_kf'(x_k)}$。因此，三个实根的留数之和正好就是我们要的 $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{x_kf'(x_k)}$。

**为什么要排除复数根？** 留数定理说：一个函数沿闭合路径的积分等于 $2\pi i$ 乘以路径内部所有奇点的留数之和。如果我们能找到一个闭合路径，它内部只包含这三个实根，而不包含其他奇点（比如复数根），那么该路径的积分就等于 $2\pi i$ 乘以这个和。这样我们就把和转化成了积分，而积分可以通过巧妙选择路径来计算。

因此，我们必须先证明：对于我们所考虑的 $t\in(f(a),1-a)$，方程 $f(z)=t$ 在割去负实轴的复平面上除了这三个实根外没有其他根（或者说，没有根落在我们即将选取的路径内部）。这需要分析复根的可能性。

**分析复数根的存在性** 设 $z=re^{i\theta}$，$\theta\in(-\pi,\pi)$ 且 $\theta\neq 0$。由 $\mathrm{Im}(f(z))=0$ 展开得：

$$r\sin\theta-(a+1)\theta+\frac{a}{r}\sin\theta=0\quad\Longrightarrow\quad\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{a+1}{r+\frac{a}{r}}.$$

因为对 $\theta\neq 0$ 恒有 $\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right|<1$，所以复根存在的必要条件是 $\frac{a+1}{r+\frac{a}{r}}<1$，即 $r+\frac{a}{r}>a+1$，这等价于 $r\in(0,1)\cup(a,+\infty)$。也就是说，如果存在复根，其模长只能落在这两个区间内。

现在沿着等值线 $v(r,\theta)=\mathrm{Im}(f(z))=0$（即虚部为零的曲线）考察实部 $u(r,\theta)=\mathrm{Re}(f(z))$ 的变化。利用极坐标下的柯西-黎曼方程（$u_r=\frac{1}{r}v_\theta$，$u_\theta=-rv_r$）以及沿隐函数 $v=0$ 对 $r$ 的全导数公式，可得：

$$\frac{du}{dr}=u_r+u_\theta\frac{d\theta}{dr}=u_r+u_\theta\left(-\frac{v_r}{v_\theta}\right)=\frac{v_\theta^2+r^2v_r^2}{rv_\theta}=\frac{r^2(u_r^2+v_r^2)}{rv_\theta}=\frac{r|f'(z)|^2}{v_\theta}.$$

再计算 $v_\theta$：

$$v_\theta=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta-(a+1)\theta+\frac{a}{r}\sin\theta\right)=\cos\theta\left(r+\frac{a}{r}\right)-(a+1).$$

将必要条件 $r+\frac{a}{r}=\frac{(a+1)\theta}{\sin\theta}$ 代入，得：

$$v_\theta=(a+1)\left(\theta\cot\theta-1\right).$$

由于 $\theta\in(-\pi,\pi)$ 且 $\theta\neq 0$，由三角不等式恒有 $\theta\cot\theta<1$ 严格成立，故 $v_\theta<0$。同时在曲线上极点以外区域 $|f'(z)|\neq 0$，于是 $\frac{du}{dr}<0$，即沿复根可能存在的曲线，实部 $u$ 随 $r$ 的增大而严格单调递减。

在 $r\in(0,1)$ 分支，当 $r\to 1^-$ 时解得 $\theta\to 0$，此时 $u\to f(1)=1-a$，且由于随 $r$ 递减，当 $r<1$ 时恒有 $u>1-a$；在 $r\in(a,+\infty)$ 分支，当 $r\to a^+$ 时同理解得 $\theta\to 0$，$u\to f(a)$，且由于递减，当 $r>a$ 时恒有 $u<f(a)$。因此，所有非实数复数根的实部要么大于 $1-a$，要么小于 $f(a)$。而我们的截线 $t\in(f(a),1-a)$ 既不等于 $1-a$ 也不等于 $f(a)$，且不落在这些区间之外，所以在这个 $t$ 值下，方程 $f(z)=t$ 绝对不存在任何复数根。这就保证了除了这三个实根外，复平面上没有其他奇点。

**选取围道并应用留数定理** 我们取一个"钥匙孔"形状的围道 $\Gamma$（如图），它由四部分组成：

- 大圆 $C_R$：$|z|=R$，逆时针方向（辐角 $-\pi\to\pi$），$R\to\infty$；
- 上边缘 $L_+$：从 $-R$ 到 $-\varepsilon$，沿着负实轴的上侧（辐角取 $\pi$）；

- 小圆 $C_\varepsilon$：$|z|=\varepsilon$，顺时针方向（辐角从 $\pi$ 绕到 $-\pi$），$\varepsilon\to 0$；
- 下边缘 $L_-$：从 $-\varepsilon$ 到 $-R$，沿着负实轴的下侧（辐角取 $-\pi$）。

因为函数 $f(z)$ 含有主分支 $\ln z$，它在负实轴上不连续，所以我们需要这样割开复平面，使得 $\ln z$ 在围道内单值解析。同时负实轴上 $\text{Im}(f(z))=\mp(a+1)\pi\neq 0$，故割线上无根。围道内部（前进方向的正左侧）只包含我们那三个实根 $x_1,x_2,x_3$（它们都在正实轴上），没有其他极点。

根据留数定理：

$$\oint_\Gamma g(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{3}\text{Res}(g,x_k)=2\pi i\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{x_kf'(x_k)}.$$

现在计算左边的积分，它等于四部分之和：$\int_{C_R}+\int_{C_\varepsilon}+\int_{L_+}+\int_{L_-}$。

当 $R\to\infty$ 时，$f(z)-t\sim z$，故 $g(z)\sim\frac{1}{z^2}$，由于大圆弧长为 $2\pi R$，故积分模长受控于 $O(\frac{1}{R})\to 0$，所以 $\int_{C_R}\to 0$。当 $\varepsilon\to 0$ 时，$f(z)-t\sim -\frac{a}{z}$ 主导，故 $g(z)\sim -\frac{1}{a}$ 有界，而小圆弧长趋于 0，故 $\int_{C_\varepsilon}\to 0$。

接下来计算 $L_+$ 和 $L_-$ 上的积分。在上边缘 $L_+$：$z=re^{i\pi}$，$r$ 从 $+\infty$ 降到 $0$，$dz=-dr$，$\ln z=\ln r+i\pi$。代入计算得：

$$f(z)-t=z-(a+1)\ln z-\frac{a}{z}-t=-r-(a+1)(\ln r+i\pi)+\frac{a}{r}-t=A(r)-i(a+1)\pi,$$

其中实部函数记为 $A(r)=-r+\frac{a}{r}-(a+1)\ln r-t$。所以

$$g(z)=\frac{1}{z(f(z)-t)}=\frac{1}{re^{i\pi}(A(r)-i(a+1)\pi)}=\frac{-1}{r(A(r)-i(a+1)\pi)}.$$

于是

$$\int_{L_+}g(z)dz=\int_{+\infty}^{0}\frac{-1}{r(A(r)-i(a+1)\pi)}(-dr)=-\int_0^{+\infty}\frac{dr}{r(A(r)-i(a+1)\pi)}.$$

在下边缘 $L_-$：$z=re^{-i\pi}$，$r$ 从 0 升到 $+\infty$，$dz=-dr$，$\ln z=\ln r-i\pi$，类似可得

$$f(z)-t=-r-(a+1)(\ln r-i\pi)+\frac{a}{r}-t=A(r)+i(a+1)\pi,$$

$$g(z)=\frac{1}{re^{-i\pi}(A(r)+i(a+1)\pi)}=\frac{-1}{r(A(r)+i(a+1)\pi)}.$$

$$\int_{L_-}g(z)dz=\int_0^{+\infty}\frac{-1}{r(A(r)+i(a+1)\pi)}(-dr)=\int_0^{+\infty}\frac{dr}{r(A(r)+i(a+1)\pi)}.$$

将 $L_+$ 和 $L_-$ 的积分相加：

$$\int_{L_+}+\int_{L_-}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{A(r)+i(a+1)\pi}-\frac{1}{A(r)-i(a+1)\pi}\right]dr=\int_0^{+\infty}\frac{-2i(a+1)\pi}{r\left[A^2(r)+(a+1)^2\pi^2\right]}dr.$$

于是取极限后整个闭合围道积分为：

$$\oint_\Gamma g(z)dz=\int_0^{+\infty}\frac{-2i(a+1)\pi}{r\left[A^2(r)+(a+1)^2\pi^2\right]}dr.$$

根据留数定理，它等于 $2\pi i\sum\frac{1}{x_kf'(x_k)}$，两边除以 $2\pi i$ 得：

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{x_kf'(x_k)}=-\int_0^{+\infty}\frac{a+1}{r\left[A^2(r)+(a+1)^2\pi^2\right]}dr.$$

**判断符号** 由于 $a>1$ 保证了 $a+1>0$，且分母中 $A^2(r)+(a+1)^2\pi^2>0$ 恒成立，$r>0$，被积函数严格为正（且在 0 和 $+\infty$ 处广义积分均绝对收敛），前面带负号，因此

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{x_k f'(x_k)}<0 \quad \text{恒成立.}$$

而 $\frac{P'(t)}{P(t)}$ 正是这个和。因实根均大于 0，故 $P(t)>0$，从而导出 $P'(t)<0$，即 $P(t)$ 关于 $t$ 严格单调递减。

**完成证明** 由于 $P(t)$ 在区间 $(f(a),1-a)$ 上严格递减，那么对于任意 $t<1-a$，有 $P(t)>\lim_{\tau\to(1-a)^-}P(\tau)$。当 $t\to(1-a)^-$ 时，由于 $x=1$ 是连续的严格极大值点，截线高度逼近极大值时，两侧的 $x_1$ 和 $x_2$ 都被挤压而同时趋近于 $x=1$；而 $x_3$ 则连续地趋近于方程 $f(x)=1-a$ 在 $(a,+\infty)$ 上的唯一实根 $x_0$。因此极限值为 $1\cdot 1\cdot x_0=x_0$。于是

$$x_1x_2x_3=P(t)>x_0.$$

由于 $x_0$ 是方程 $f(x)=1-a$ 在 $(a,+\infty)$ 上的唯一实根，由定义域可知自带 $x_0>a$ 属性。利用不等式的传递性直接得到 $x_1x_2x_3>x_0>a$。又因为 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上严格递增，作用映射 $f$ 不改变不等号方向，所以

$$f(x_1x_2x_3)>f(x_0)=1-a.$$

这就证明了原不等式 (i)。

（2）（ii）设三根之和为关于截线高度 $t$ 的函数 $S(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$。对 $S(t)$ 两边关于 $t$ 求导，同样由隐函数求导法则 $f'(x_k)\cdot x_k'(t)=1$ 可得：

$$S'(t)=x_1'+x_2'+x_3'=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{f'(x_k)}$$

我们再次借助留数定理来计算这个和。

**构造复变函数与留数计算** 考虑函数 $h(z)=\dfrac{1}{f(z)-t}$。与（i）同理，在每一个实根 $x_k$ 处，$f(x_k)-t=0$ 且 $f'(x_k)\neq 0$，因此 $x_k$ 是 $h(z)$ 的一阶极点。其在 $x_k$ 处的留数为 $\lim\limits_{z\to x_k}\dfrac{z-x_k}{f(z)-t}=\dfrac{1}{f'(x_k)}$。所以，三个实根的留数之和正好为 $S'(t)=\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{1}{f'(x_k)}$。

**围道积分与符号判断** 我们沿用（i）中相同的"钥匙孔"围道 $\Gamma$。根据留数定理：

$$\oint_\Gamma h(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{3}\mathrm{Res}(h,x_k)=2\pi i S'(t)$$

计算四部分积分 $\int_{C_R}+\int_{C_\varepsilon}+\int_{L_+}+\int_{L_-}$：

当 $R \to \infty$ 时，我们对被积函数进行洛朗渐近展开得 $h(z) = \frac{1}{z(1-\frac{(a+1)\ln z + a/z + t}{z})} = \frac{1}{z} + O\left(\frac{\ln z}{z^2}\right)$。高阶项在大圆上的积分趋于 0，故大圆积分 $\int_{C_R} h(z)dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \to 2\pi i$。当 $\varepsilon \to 0$ 时，$f(z) - t \sim -\frac{a}{z}$，故 $h(z) \sim -\frac{z}{a}$，被积函数趋于 0，且小圆弧长趋于 0，故小圆积分 $\int_{C_\varepsilon} \to 0$。

在上边缘 $L_+$：$z = re^{i\pi}$，$dz = -dr$（$r$ 从 $+\infty$ 降到 0）。此时 $f(z) - t = A(r) - i(a+1)\pi$。

$$\int_{L_+} h(z)dz = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{A(r) - i(a+1)\pi}(-dr) = \int_0^{+\infty} \frac{dr}{A(r) - i(a+1)\pi}$$

在下边缘 $L_-$：$z = re^{-i\pi}$，$dz = -dr$（$r$ 从 0 升到 $+\infty$）。此时 $f(z) - t = A(r) + i(a+1)\pi$。

$$\int_{L_-} h(z)dz = \int_0^{+\infty} \frac{1}{A(r) + i(a+1)\pi}(-dr) = -\int_0^{+\infty} \frac{dr}{A(r) + i(a+1)\pi}$$

将 $L_+$ 和 $L_-$ 的积分相加：

$$\int_{L_+} + \int_{L_-} = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{A(r) - i(a+1)\pi} - \frac{1}{A(r) + i(a+1)\pi}\right] dr = \int_0^{+\infty} \frac{2i(a+1)\pi}{A^2(r) + (a+1)^2\pi^2} dr$$

于是整个闭合围道积分为：

$$\oint_\Gamma h(z)dz = 2\pi i + \int_0^{+\infty} \frac{2i(a+1)\pi}{A^2(r) + (a+1)^2\pi^2} dr$$

两边同除以 $2\pi i$，得到 $S'(t)$ 的精确表达式：

$$S'(t) = 1 + \int_0^{+\infty} \frac{a+1}{A^2(r) + (a+1)^2\pi^2} dr$$

因为 $a > 1$ 且分母严格大于 0，被积函数严格为正。所以 $S'(t) > 1 > 0$ 恒成立，即 $S(t)$ 关于 $t$ 严格单调递增。

**放缩与完成证明** 由于 $S(t)$ 在区间 $(f(a), 1-a)$ 上严格递增，对于任意 $t < 1-a$，有 $S(t) < \lim_{\tau \to (1-a)^-} S(\tau)$。同（i）中的极限分析，当 $t \to (1-a)^-$ 时，$x_1 \to 1$，$x_2 \to 1$，$x_3 \to x_0$。故 $x_1 + x_2 + x_3 = S(t) < 1 + 1 + x_0 = x_0 + 2$。

因为 $x_1, x_2 > 0$ 且 $x_3 > a$，显然有 $S(t) > a$。又因 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上严格单调递增，且 $x_1+x_2+x_3$ 与 $x_0 + 2$ 均处于该区间，所以直接代入映射不改变不等号方向：

$$f(x_1 + x_2 + x_3) < f(x_0 + 2)$$

接下来我们估计 $f(x_0 + 2)$ 的上限。根据微积分基本定理：

$$f(x_0 + 2) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+2} f'(x)dx$$

已知 $f'(x) = 1 - \frac{a+1}{x} + \frac{a}{x^2} = 1 - \frac{(a+1)x - a}{x^2}$。对于所有位于 $(x_0, x_0 + 2)$ 内的积分变量 $x > a > 1$，恒有 $(a+1)x - a = a(x-1) + x > a > 0$，因此 $\frac{(a+1)x-a}{x^2} > 0$，即在此区间上恒有严格的 $f'(x) < 1$。从而 $\int_{x_0}^{x_0+2} f'(x)dx < \int_{x_0}^{x_0+2} 1\, dx = 2$。又因为 $f(x_0) = 1 - a$，移项即可得到：

$$f(x_0 + 2) < f(x_0) + 2 = (1-a) + 2 = 3 - a$$

最后一步，出题人在此处放了一个非常宽泛的常数界限：由于自然常数 $e \approx 2.718$，即 $2e > 5.436$，显然 $3 < 2e - 1$ 恒成立，于是：

$$3 - a < 2e - 1 - a$$

综上，首尾相连写下不等号即可得：

$$f(x_1 + x_2 + x_3) < f(x_0 + 2) < 3 - a < 2e - 1 - a$$

原不等式 (ii) 得证。

**4.1.8 例题:**

已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x, f(x_1) = f(x_2)$，过 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 分别作切线交 $x$ 轴于 $(x_3, 0), (x_4, 0)$，求证 $x_3 + x_4 > 0$.

**解** 4.1.8. 设 $x_-, x_+$ 分别表示正负根，记

$$E = x_3 + x_4 = \frac{x_-^2}{(x_- + 1)f'(x_-)} + \frac{x_+^2}{(x_+ + 1)f'(x_+)}.$$

简单估值即可证明，当 $y \geq 4$ 时，两项之和恒满足 $E > -1 + 1 = 0$。当 $0 < y < 4$ 时，引入复积分法处理。取主值对数 $L(z) = \mathrm{Log}(1+z)$，其分支割线设在 $(-\infty, -1]$。定义复变函数：

$$\Phi(z) = \frac{yz}{(z+1)L(z)(zL(z) - y)}$$

考察割平面 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 中方程 $zL(z) = y$ 的根。设 $1 + z = re^{i\theta}$，其中 $\theta \in (-\pi, \pi)$，$r > 0$。则 $z = r\cos\theta - 1 + ir\sin\theta$，$L(z) = \ln r + i\theta$。代入方程 $zL(z) = y$，取虚部可得：

$$\Im(zL(z)) = \theta(r\cos\theta - 1) + r\sin\theta\ln r = 0.$$

若存在非实数根（即 $\theta \neq 0$），解得 $\ln r = \frac{\theta(1 - r\cos\theta)}{r\sin\theta}$。代入实部可得：

$$\begin{aligned}\Re(zL(z)) = (r\cos\theta - 1)\ln r - r\theta\sin\theta\& &= (r\cos\theta - 1)\frac{\theta(1 - r\cos\theta)}{r\sin\theta} - \frac{r^2\theta\sin^2\theta}{r\sin\theta} \\ &= -\frac{\theta}{r\sin\theta}\left[(1 - r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\right] = -\frac{\theta}{\sin\theta}\frac{|1 - (1+z)|^2}{r} = -\frac{\theta}{\sin\theta}\frac{|z|^2}{r}.\end{aligned}$$

由于 $\theta \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$，$\theta$ 和 $\sin\theta$ 同号，有 $\frac{\theta}{\sin\theta} > 0$。由 $|z|^2 > 0$ 且 $r > 0$，推得 $\Re(zL(z)) < 0$，这与 $y > 0$ 矛盾。因此 $\theta = 0$，方程在割平面内仅有实数根 $x_-$ 和 $x_+$。另外，当 $z \to 0$ 时，$L(z) \sim z$，$\Phi(z) \to -1$，故 $z = 0$ 为可去奇点。对于简单极点 $x_\pm$，利用 $(zL(z))' = f'(z)$，其留数为：

$$\mathrm{Res}(\Phi; x_\pm) = \lim_{z \to x_\pm} \frac{yz(z - x_\pm)}{(z+1)L(z)(zL(z) - y)} = \frac{yx_\pm}{(x_\pm + 1)L(x_\pm)f'(x_\pm)} = \frac{x_\pm^2}{(x_\pm + 1)f'(x_\pm)}.$$

因此，这两个极点的留数之和恰为所求表达式 $E$。取绕割线 $(-\infty, -1]$ 的闭合匙孔形围道进行积分，该围道由大圆 $C_R$、贴近割线上侧的 $L_+$、绕 $z = -1$ 的小圆 $C_\epsilon$ 及贴近割线下侧的 $L_-$ 组成。

当 $R\to\infty$ 时，$|\Phi(z)|=\mathcal{O}\left(\frac{1}{R\ln^2 R}\right)$，路径长度为 $2\pi R$，大圆上的积分为 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^2 R}\right)\to 0$。当 $\epsilon\to 0$ 时，$L(z)\sim\ln\epsilon$，$|\Phi(z)|=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon\ln^2\epsilon}\right)$，路径长度为 $2\pi\epsilon$，小圆上的积分为 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^2\epsilon}\right)\to 0$。根据留数定理，极点留数之和等于沿割线两侧的积分。令 $z=-1-t$（$t>0$），割线两侧的对数边值分别为 $L_\pm(-1-t)=\ln t\pm i\pi$。由此可得：

$$E=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left(\Phi_+(-1-t)-\Phi_-(-1-t)\right)dt.$$

由于 $\Phi_-=\overline{\Phi_+}$，有 $\Phi_+-\Phi_-=2i\Im\Phi_+$，故 $E=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Im\Phi_+(-1-t)dt$。代入 $\Phi_+(-1-t)$ 进行化简：

$$\Phi_+(-1-t)=\frac{y(-1-t)}{(-t)(\ln t+i\pi)\left[(-1-t)(\ln t+i\pi)-y\right]}=\frac{-y(1+t)}{t(\ln t+i\pi)\left[(1+t)(\ln t+i\pi)+y\right]}.$$

分子分母同除以 $1+t$，可化为：

$$\Phi_+(-1-t)=\frac{1+t}{t}\left(\frac{1}{\ln t+\frac{y}{1+t}+i\pi}-\frac{1}{\ln t+i\pi}\right).$$

利用复数虚部公式 $\Im\left(\frac{1}{u+i\pi}\right)=-\frac{\pi}{u^2+\pi^2}$，提取虚部可得：

$$\Im\Phi_+(-1-t)=\frac{\pi(1+t)}{t}\left(\frac{1}{(\ln t)^2+\pi^2}-\frac{1}{\left(\ln t+\frac{y}{1+t}\right)^2+\pi^2}\right).$$

代入 $E$ 的表达式中消去 $\pi$，得到实积分表示：

$$E=\int_0^\infty\frac{1+t}{t}\left(\frac{1}{(\ln t)^2+\pi^2}-\frac{1}{\left(\ln t+\frac{y}{1+t}\right)^2+\pi^2}\right)dt.$$

利用恒等式 $\frac{1}{u^2+\pi^2}-\frac{1}{(u+a)^2+\pi^2}=\int_0^a\frac{2(u+s)}{((u+s)^2+\pi^2)^2}ds$，将 $u=\ln t$ 与 $a=\frac{y}{1+t}$ 代入，积分化为：

$$E=\int_0^\infty\frac{1+t}{t}\left(\int_0^{\frac{y}{1+t}}\frac{2(\ln t+s)}{\left((\ln t+s)^2+\pi^2\right)^2}ds\right)dt.$$

作积分变量代换 $r=(1+t)s$，则 $ds=\frac{dr}{1+t}$，内层积分限变为 $0<r<y$，从而：

$$E=\int_0^\infty\int_0^y\frac{2\left(\ln t+\frac{r}{1+t}\right)}{t\left(\left(\ln t+\frac{r}{1+t}\right)^2+\pi^2\right)^2}dr\,dt.$$

设双重积分的被积函数为 $F(t,r)$。在 $r\in[0,y]$ 上，由于 $y<4$，$r$ 有界。当 $t\to+\infty$ 时，$|F(t,r)|\sim\frac{2}{t(\ln t)^3}$；当 $t\to 0^+$ 时，$|F(t,r)|\sim\frac{2}{t|\ln t|^3}$。这表明在 $t\in(0,+\infty)$ 上 $\max_{r\in[0,y]}|F(t,r)|$ 绝对可积。由于积分域 $[0,y]$ 有界，双重积分绝对收敛。由 Fubini 定理交换积分次序，可得：

$$E=\int_0^y J(r)dr,\quad J(r)=\int_0^\infty\frac{2\left(\ln t+\frac{r}{1+t}\right)}{t\left(\left(\ln t+\frac{r}{1+t}\right)^2+\pi^2\right)^2}dt.$$

现证明当 $0<r<4$ 时 $J(r)>0$。对 $J(r)$ 作代换 $t=e^s$ ($dt/t=ds$)，得：

$$J(r)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\phi_r(s)}{\left(\phi_r(s)^2+\pi^2\right)^2}ds,\quad 其中\phi_r(s)=s+\frac{r}{1+e^s}.$$

计算其导数 $\phi_r'(s)=1-\frac{re^s}{(1+e^s)^2}$。由于 $\frac{e^s}{(1+e^s)^2}\le\frac{1}{4}$，当 $r<4$ 时，$\phi_r'(s)\ge 1-\frac{r}{4}>0$。因此 $\phi_r(s)$ 在定义域内严格单调递增，进而对于 $s>0$，有 $\phi_r(s)>\phi_r(0)=\frac{r}{2}$。再次求导得 $\phi_r''(s)=\frac{re^s(e^s-1)}{(1+e^s)^3}$，故对于 $s>0$，有 $\phi_r''(s)>0$。对 $J(r)$ 采用分部积分。设 $A(s)=\frac{1}{\phi_r(s)^2+\pi^2}$，被积函数可表示为 $-\frac{A'(s)}{\phi_r'(s)}$，从而：

$$J(r)=\left[-\frac{A(s)}{\phi_r'(s)}\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}A(s)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\phi_r'(s)}\right)ds.$$

当 $s\to\pm\infty$ 时，$\phi_r'(s)\to 1$ 且 $A(s)\to 0$，故边界项为零。记 $B(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\phi_r'(s)}\right)=-\frac{\phi_r''(s)}{(\phi_r'(s))^2}$。因为 $\phi_r'(s)$ 为偶函数，其倒数的导数 $B(s)$ 必为奇函数。利用奇偶性将积分区间折叠至 $(0,+\infty)$：

$$J(r)=\int_0^{\infty}B(s)(A(s)-A(-s))ds=\int_0^{\infty}B(s)\left(\frac{1}{\phi_r(s)^2+\pi^2}-\frac{1}{\phi_r(-s)^2+\pi^2}\right)ds.$$

当 $s>0$ 时，由于 $\phi_r''(s)>0$，有 $B(s)<0$。此外，由于 $\phi_r(-s)=-s+\frac{re^s}{1+e^s}=r-\left(s+\frac{r}{1+e^s}\right)=r-\phi_r(s)$，可得：

$$A(s)-A(-s)=\frac{1}{\phi_r(s)^2+\pi^2}-\frac{1}{(r-\phi_r(s))^2+\pi^2}=\frac{r(r-2\phi_r(s))}{(\phi_r(s)^2+\pi^2)\left((r-\phi_r(s))^2+\pi^2\right)}.$$

已知当 $s>0$ 时 $\phi_r(s)>\frac{r}{2}$，即 $r-2\phi_r(s)<0$，故 $A(s)-A(-s)<0$。因此，被积函数 $B(s)(A(s)-A(-s))>0$ 恒成立，推得对于任意 $0<r<4$ 均有 $J(r)>0$。由于已知 $0<y<4$，积分上限 $y$ 保证了积分变量满足 $r\le y<4$，从而 $E=\int_0^y J(r)dr>0$。综上所述，对任意 $y>0$ 且 $x_1\ne x_2$ 满足 $x_1\ln(1+x_1)=x_2\ln(1+x_2)=y$，恒有 $E>0$ 成立。

**4.1.9 例题: 邪帝原创导数题**

已知函数 $f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x},(a>1)$
（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；
（2）若 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3),(x_1<x_2<x_3)$，证明 $f(x_1x_2x_3)>1-a$.

**解 4.1.9.** 设 $g(x)=x-\ln x, f(x)=g(x)-ag\left(\frac{1}{x}\right)$，$x$ 和 $\dfrac{1}{x}$ 同时出现，指向比值换元.
（1）已知函数 $f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x}$, 定义域为 $(0,+\infty)$。对其求导，通分整理得

$$f'(x)=1-\frac{a+1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2}=\frac{(x-1)(x-a)}{x^2}$$

当 $x\in(0,1)$ 时，$(x-1)<0,(x-a)<0\Longrightarrow f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单增；当 $x\in(1,a)$ 时，$(x-1)>0,(x-a)<0\Longrightarrow f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 单减; 当 $x\in(a,+\infty)$ 时, $(x-1)>0,(x-a)>0\Longrightarrow f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单增。因此，$f(x)$ 的单调递增区间为 (0,1) 和 $(a,+\infty)$, 单调递减区间为 $(1,a)$。极大值为 $f(1)=1-a$; 极小值为 $f(a)=a-1-(a+1)\ln a$ 。
（2）目标不等式右侧的 $1-a$ 恰好是极大值 $f(1)$。由于 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单增且趋于无穷，所以方程 $f(x)=1-a$ 在该区间上有唯一实根，不妨记为 $x_0$，则

$$g(x_0)-ag\left(\frac{1}{x_0}\right)=1-a\Leftrightarrow a=\frac{g(x_0)-1}{g\left(\frac{1}{x_0}\right)-1}=\frac{x_0-\ln x_0-1}{\frac{1}{x_0}+\ln x_0-1}$$

要证明 $f(x_1x_2x_3)>1-a=f(x_0)$，因为 $(a,+\infty)$ 是严格增区间，我们只需证明：$x_1x_2x_3>x_0$，这又指向了乘积换元，于是将 $x_2,x_3$ 替换为 $pq$ 和 $\frac{p}{q}$，可以得到，$f(x_2)=f(x_3)$，得到

$$pq-\frac{a}{pq}-(a+1)\ln(pq)=\frac{p}{q}-a\frac{q}{p}-(a+1)\ln\frac{p}{q}$$

$$\Leftrightarrow p\left(q-\frac{1}{q}\right)+\frac{a}{p}\left(q-\frac{1}{q}\right)=2(a+1)\ln q\Leftrightarrow\left(p+\frac{a}{p}\right)\left(q-\frac{1}{q}\right)=2(a+1)\ln q$$

则原等式化为

$$\begin{cases}f(x)=f(pq) & \Leftrightarrow x-\frac{a}{x}-(a+1)\ln x=pq-\frac{a}{pq}-(a+1)\ln(pq)\\ f(pq)=f(\frac{p}{q}) & \Leftrightarrow\left(p+\frac{a}{p}\right)\left(q-\frac{1}{q}\right)=2(a+1)\ln q\end{cases}$$

第二个方程等价于

$$\left(q-\frac{1}{q}\right)p^2-2(a+1)\ln q\cdot p+a\left(q-\frac{1}{q}\right)=0\Leftrightarrow p=\frac{(a+1)\ln q-\sqrt{(a+1)^2\ln^2 q-a\left(q-\frac{1}{q}\right)^2}}{q-\frac{1}{q}}$$

(猜的，不确定要舍掉哪个解)

要证明 $f(x_1x_2x_3)>1-a=f(x_0)$, 因为 $(a,+\infty)$ 是严格增区间，我们只需证明：$x_1x_2x_3>x_0$，我们可以尝试加强证明 $x_1x_2^2>x_0$，

$$x_1x_2^2>x_0\Leftrightarrow 1<\frac{x_0}{x_1x_2}<p\Leftrightarrow f\left(\frac{x_0}{x_1x_2}\right)<f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{x_1x_2}-a\frac{x_1x_2}{x_0}-(a+1)\ln\frac{x_0}{x_1x_2}<x_2-\frac{a}{x_2}-(a+1)\ln x_2$$

比值换元，令 $y=\frac{x_1}{x_2}<1\Leftrightarrow x_1=x_2y$，则

$$\begin{aligned}
&x_1-\frac{a}{x_1}-(a+1)\ln x_1=x_2-\frac{a}{x_2}-(a+1)\ln x_2\\
\Leftrightarrow &x_2y-\frac{a}{x_2y}-(a+1)\ln x_2y=x_2-\frac{a}{x_2}-(a+1)\ln x_2\\
\Leftrightarrow &x_2(y-1)+\frac{a}{x_2y}(y-1)=(a+1)\ln y\Leftrightarrow x_2+\frac{a}{x_2y}=\frac{\ln y}{y-1}\\
&\frac{x_0}{x_1x_2}-a\frac{x_1x_2}{x_0}-(a+1)\ln\frac{x_0}{x_1x_2}<x_2-\frac{a}{x_2}-(a+1)\ln x_2\\
\Leftrightarrow &\frac{x_0}{x_2^2y}-a\frac{x_2^2y}{x_0}-(a+1)\ln\frac{x_0}{x_2^2y}<x_2-\frac{a}{x_2}-(a+1)\ln x_2\\
\Rightarrow h(y)=&\frac{x_0}{x_2^2y}-a\frac{x_2^2y}{x_0}-(a+1)\ln\frac{x_0}{x_2^2y}-\left(x_2-\frac{a}{x_2}-(a+1)\ln x_2\right)\\
\Rightarrow h'(y)=&-\frac{x_0}{x_2^2y^2}-a\frac{x_2^2}{x_0}+\frac{a+1}{y}=-\frac{x_0^2+ax_2^4y^2-(a+1)x_2^2yx_0}{x_2^2y^2x_0}=-\frac{(ax_2^2y-x_0)(x_2^2y-x_0)}{x_2^2y^2x_0}
\end{aligned}$$

得到 $h'(y)$ 的零点为 $y=\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_0}{ax_2^2}$ 和 $y=\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_0}{p^2}$，分析可知 $h(y)$ 在 $y=\frac{x_0}{ax_2^2}$ 处取得最大值，于是

$$h(y)\le h\left(\frac{x_0}{ap^2}\right)=a-1-(a+1)\ln a-p+\frac{a}{p}+(a+1)\ln p.$$

记 $w(p)=a-1-(a+1)\ln a-p+\frac{a}{p}+(a+1)\ln p$，则

$$w'(p)=-1-\frac{a}{p^2}+\frac{a+1}{p}=-\frac{(p-1)(p-a)}{p^2}.$$

故 $w(p)$ 在 $(1,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减，在 $p=a$ 处取得最大值 $w(a)=0$，因此 $w(p)\le 0$，即

$$a-1-(a+1)\ln a\le p-\frac{a}{p}-(a+1)\ln p.$$

将 $a=\dfrac{x_0-\ln x_0-1}{\frac{1}{x_0}+\ln x_0-1}$ 代入左边，并整理可得关于 $x_0$ 的不等式：

$$\frac{4x_0\ln x_0+(x_0-1)\left((x_0-1)\ln\left(\frac{x_0(x_0-\ln x_0-1)}{x_0\ln x_0-x_0+1}\right)-2(x_0+1)\right)}{x_0\ln x_0-x_0+1}>0.$$

最后转化为说明对于任意 $x_0>1$，恒有

$$\frac{4x_0\ln x_0+(x_0-1)\left((x_0-1)\ln\left(\frac{x_0(x_0-\ln x_0-1)}{x_0\ln x_0-x_0+1}\right)-2(x_0+1)\right)}{x_0\ln x_0-x_0+1}>0$$

分母大于 0 显然（切线放缩），所以等价于

$$4x_0\ln x_0+(x_0-1)\left((x_0-1)\ln\left(\frac{x_0(x_0-\ln x_0-1)}{x_0\ln x_0-x_0+1}\right)-2(x_0+1)\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 4x_0\ln x_0-2(x_0^2-1)+(x_0-1)^2\ln\frac{x_0(x_0-\ln x_0-1)}{x_0\ln x_0-(x_0-1)}>0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(2x_0\ln x_0-(x_0^2-1)\right)+(x_0^2-2x_0+1)\ln\frac{x_0\ln x_0-(x_0-1)+(x_0^2-2x_0\ln x_0-1)}{x_0\ln x_0-(x_0-1)}>0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(2x_0\ln x_0-(x_0^2-1)\right)+(x_0^2-2x_0+1)\ln\left(1+\frac{x_0^2-2x_0\ln x_0-1}{x_0\ln x_0-(x_0-1)}\right)>0$$
$$\Leftrightarrow -2\left(x_0^2-2x_0\ln x_0-1\right)+(x_0^2-2x_0\ln x_0-1+2(x_0\ln x_0-(x_0-1)))\ln\left(1+\frac{x_0^2-2x_0\ln x_0-1}{x_0\ln x_0-(x_0-1)}\right)>0$$
$$\Leftrightarrow -2\frac{x_0^2-2x_0\ln x_0-1}{x_0\ln x_0-(x_0-1)}+\left(\frac{x_0^2-2x_0\ln x_0-1}{x_0\ln x_0-(x_0-1)}+2\right)\ln\left(1+\frac{x_0^2-2x_0\ln x_0-1}{x_0\ln x_0-(x_0-1)}\right)>0$$
$$\Leftrightarrow (u+2)\ln(u+1)>2u,\quad u=\frac{x_0^2-2x_0\ln x_0-1}{x_0\ln x_0-(x_0-1)}>0$$
$$\Leftrightarrow \ln(u+1)>\frac{2u}{u+2},\text{显然的}$$

### 4.1.10 例题：（群友供题）

已知 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1>x_2$，求证 $x_1+x_2>1$.

**解** 4.1.10. 本题对称化构造已经有解法了，笔者补一个构造函数的做法。首先转化为证明

$$g(x)=(x-\frac{1}{2})^2,g(x_1)=(x_1-\frac{1}{2})^2>(x_2-\frac{1}{2})^2=g(x_2)$$

进行观察，我们发现如果 $x_1$ 稍微大一点，比如当 $x_1>1$ 就已经有 $x_1+x_2>1$，所以本题的关键是在 $x=\frac{1}{2}$ 附近证明这个结论，由此不难想到级数展开，我们首先求导得到：

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x},f'(\frac{1}{2})=\sqrt{\mathrm{e}}-2,f''(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2},f''(\frac{1}{2})=\sqrt{\mathrm{e}}+4,\ldots$$

这样不难得到 $f(x)$ 先减再增，极值点不好求，并列出 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 附近的级数形式：

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+(\sqrt{\mathrm{e}}-2)(x-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}+4}{2!}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{e}+8}{3!}(x-\frac{1}{2})^3+\cdots$$

我们要构造在 $x=\frac{1}{2}$ 左右侧正负性相反的函数 $\varphi(x)=h_1(g(x))+h_2(f(x))$，同时规定 $h_1(x)$ 单调递增，$h_2(x)$ 在 $f(x)$ 值域内单调，这样我们就可以转化证明

$$g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow h_1(g(x_1))>h_1(g(x_2))\Leftrightarrow\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$$

但是显然我们不必大费周章地考虑 $h_2(x)$，除非你想优雅地解题。此处我们可以直接取 $\varphi(x)=h_1(g(x))-f(x)$，直观一点来说，只需要找到 $(x-\frac{1}{2})^2$ 的某个复合函数穿过 $\left(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2})\right)$ 这个点，且在该点左侧比 $f(x)$"矮"，右侧比 $f(x)$"高"，那么就能证明 $g(x_1)>g(x_2)$。那既然要求右侧比 $f(x)$"高"，我们初步考虑 $h_1(x)=e^{g(x)}$，由

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\Rightarrow e^{(x-\frac{1}{2})^2}=1+(x-\frac{1}{2})^2+\frac{(x-\frac{1}{2})^4}{2!}+\frac{(x-\frac{1}{2})^6}{3!}+\cdots$$

所以消去偶数次项得到 $\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}+4}{2}e^{g(x)}-f(x)-2+\ln 2+\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$，即

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}+4}{2}e^{(x-\frac{1}{2})^2}-\mathrm{e}^x+\ln x-2+\ln 2+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$$
$$\varphi'(x)=(\sqrt{\mathrm{e}}+4)(x-\frac{1}{2})\mathrm{e}^{(x-\frac{1}{2})^2}-\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}$$

由刚才分析可知，$\varphi''(x)$ 显然单增，且满足 $\varphi''(\dfrac{1}{2})=0$，故 $\varphi'(x)\geq\varphi'(\dfrac{1}{2})>0$，所以 $\varphi(x)$ 单增，$\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$，原题得证。

**4.1.11 例题:**

已知正数 $a,b,c$ 满足 $abc=1$，证明：

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\leqslant\sqrt{2}\,(a+b+c)$$

**解 4.1.11.** 等价于证明：

$$\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2}a\right)+\left(\sqrt{b^2+1}-\sqrt{2}b\right)+\left(\sqrt{c^2+1}-\sqrt{2}c\right)\leqslant 0.$$

由于 $a,b,c\in(0,+\infty)$，可设 $a=e^x,b=e^y,c=e^z$，其中 $x,y,z\in\mathbb{R}$。由约束条件 $abc=1$ 可得 $e^{x+y+z}=1$，即 $x+y+z=0$。构造函数 $F(t)=\sqrt{e^{2t}+1}-\sqrt{2}e^t\ (t\in\mathbb{R})$，原命题等价转化为证明在 $x+y+z=0$ 的条件下，恒有：

$$F(x)+F(y)+F(z)\leqslant 0.$$

对 $F(t)$ 求一阶导数：

$$F'(t)=\frac{1}{2}(e^{2t}+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2e^{2t}-\sqrt{2}e^t=\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}+1}}-\sqrt{2}e^t.$$

利用商的求导法则求二阶导数：

$$F''(t)=\frac{2e^{2t}\sqrt{e^{2t}+1}-e^{2t}\cdot\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}+1}}}{e^{2t}+1}-\sqrt{2}e^t=\frac{2e^{2t}(e^{2t}+1)-e^{4t}}{(e^{2t}+1)^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{2}e^t=\frac{e^{4t}+2e^{2t}}{(e^{2t}+1)^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{2}e^t.$$

下证对于任意 $t\in\mathbb{R}$，恒有 $F''(t)<0$。该不等式等价于：

$$\frac{e^{4t}+2e^{2t}}{(e^{2t}+1)^{\frac{3}{2}}}<\sqrt{2}e^t.$$

由于对于任意 $t\in\mathbb{R}$，上式两边均为正数，将两边同时平方进行等价变形，可得：

$$\frac{e^{4t}(e^{2t}+2)^2}{(e^{2t}+1)^3}<2e^{2t}.$$

将正数 $(e^{2t}+1)^3$ 乘至不等式右边，得：

$$e^{4t}(e^{2t}+2)^2<2e^{2t}(e^{2t}+1)^3.$$

分别展开不等式两侧：左边 $=e^{4t}(e^{4t}+4e^{2t}+4)=e^{8t}+4e^{6t}+4e^{4t}$，右边 $=2e^{2t}(e^{6t}+3e^{4t}+3e^{2t}+1)=2e^{8t}+6e^{6t}+6e^{4t}+2e^{2t}$。两边作差（右边减去左边）整理得：

$$e^{8t}+2e^{6t}+2e^{4t}+2e^{2t}>0.$$

由于对于任意 $t\in\mathbb{R}$ 恒有 $e^{2t}>0$，上述多项式的各项均为严格正数，其和显然大于 0。因为上述推导每一步均为等价变形，故 $F''(t)<0$ 对全体实数 $t$ 恒成立，即 $F(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的严格上凸函

数。基于 $F(t)$ 的严格上凸性，可通过以下两种等价方式完成证明：方法一：利用琴生（Jensen）不等式对于任意实数 $x,y,z$，有：

$$F(x)+F(y)+F(z)\leqslant 3F\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

将已知条件 $x+y+z=0$ 代入，得：

$$F(x)+F(y)+F(z)\leqslant 3F(0).$$

计算 $F(0)$ 的值：

$$F(0)=\sqrt{e^0+1}-\sqrt{2}e^0=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0.$$

从而 $F(x)+F(y)+F(z)\leqslant 0$，原不等式得证。方法二：利用切线放缩由于 $F(t)$ 为严格上凸函数，其图像始终位于其任意一点的切线下方（除切点外）。取 $t=0$，计算可得函数值 $F(0)=0$，导数值 $F'(0)=\frac{e^0}{\sqrt{e^0+1}}-\sqrt{2}e^0=\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。故 $F(t)$ 在 $t=0$ 处的切线方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}t$。对于任意 $t\in\mathbb{R}$，恒有切线不等式：

$$F(t)\leqslant F(0)+F'(0)(t-0)\implies F(t)\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}t.$$

分别将 $x,y,z$ 代入上述不等式并相加得：

$$F(x)+F(y)+F(z)\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+z).$$

结合已知条件 $x+y+z=0$，可得：

$$F(x)+F(y)+F(z)\leqslant 0.$$

原不等式同样得证。最后分析等号成立的条件。由于 $F(t)$ 为严格上凸函数，上述不等式取等号的充分必要条件为自变量相等，即 $x=y=z$。结合约束条件 $x+y+z=0$，解得 $x=y=z=0$。逆向代回原变量，即当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立，此时符合 $abc=1$ 的前提条件。综上所述，原不等式 $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\leqslant\sqrt{2}\,(a+b+c)$ 得证。

**4.1.12 例题: 远古偏移题，来自陈语梦**

已知 $x_1-\ln(\ln x_1+1)=x_2-\ln(\ln x_2+1)=m$ 求证

$$m+1<x_1+x_2<\frac{7}{6}m+\frac{5}{6}$$

**解** 4.1.12. 设函数 $f(x)=x-\ln(\ln x+1)-1$，左侧化为

$$g(x)=x^2-x\,(m+1)+1=x\ln(\ln x+1)-x+1,\quad x_1<1<x_2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

加强证明 $g(x)$ 单调递增，求导得 $g'(x) = \ln(\ln x + 1) + x \cdot \frac{1}{\ln x+1} \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(\ln x + 1) + \frac{1}{\ln x+1} - 1$ 又因为任意 $x > 0$ 有 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$，所以 $g'(x) > 0$，故 $g(x)$ 单调递增。右侧化为

$$g(x) = x^2 - x\left(\frac{7}{6}f(x) + \frac{5}{6}\right) + 1 = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{5}{6}x + \frac{7}{6}x\ln(\ln(x) + 1)$$

令 $F(x) = x^2 - x(\frac{7}{6}f(x) + \frac{5}{6}) + \frac{1}{6}(f(x) - 1) + \frac{7}{72}(f(x) - 1)^2$。即求证 $F(x)$ 在其定义域 $[1, +\infty)$ 内单调递减。要证 $F(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，等价于证明其导函数满足 $F'(x) \leqslant 0$，即证明以下不等式在 $x \geqslant 1$ 时恒成立：

$$\frac{5xe^{2(x-1)} + 31xe^{x-1} - 35e^{x-1} - 1}{7 + 35xe^{x-1}} \geqslant \ln x$$

首先，引入辅助函数 $h(x) = \frac{x^2+4x-5}{4x+2} - \ln x$。对其求导可得：

$$h'(x) = \frac{(2x + 4)(4x + 2) - (x^2 + 4x - 5) \cdot 4}{(4x + 2)^2} - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 + 4x + 28}{(4x + 2)^2} - \frac{1}{x}$$

通分化简得：

$$h'(x) = \frac{x(4x^2 + 4x + 28) - (16x^2 + 16x + 4)}{x(4x + 2)^2} = \frac{4x^3 - 12x^2 + 12x - 4}{x(4x + 2)^2} = \frac{4(x - 1)^3}{x(4x + 2)^2}$$

当 $x \geqslant 1$ 时，$h'(x) \geqslant 0$ 显然成立，故 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增。又因 $h(1) = 0$，故当 $x \geqslant 1$ 时，$h(x) \geqslant 0$ 恒成立，即得到不等式放缩：$\frac{x^2+4x-5}{4x+2} \geqslant \ln x$。基于上述结论，为证原不等式，只需证明：

$$\frac{5xe^{2(x-1)} + 31xe^{x-1} - 35e^{x-1} - 1}{7 + 35xe^{x-1}} \geqslant \frac{x^2 + 4x - 5}{4x + 2}$$

由于 $x \geqslant 1$，不等式两边的分母均大于零。将两边交叉相乘得：

$$(4x + 2)(5xe^{2(x-1)} + 31xe^{x-1} - 35e^{x-1} - 1) \geqslant (x^2 + 4x - 5)(7 + 35xe^{x-1})$$

将其按 $e^{x-1}$ 的次幂展开并合并同类项，可得：$e^{2(x-1)}$ 项系数为 $20x^2 + 10x$；$e^{x-1}$ 项系数为 $(4x + 2)(31x - 35) - 35x(x^2 + 4x - 5) = -35x^3 - 16x^2 + 97x - 70$；常数项为 $(4x + 2)(-1) - 7(x^2 + 4x - 5) = -7x^2 - 32x + 33$。移项整理后，不等式转化为：

$$(20x^2 + 10x)e^{2(x-1)} + (-35x^3 - 16x^2 + 97x - 70)e^{x-1} - (7x^2 + 32x - 33) \geqslant 0$$

将不等式两端同乘 $e^{1-x}$（因指数函数恒正，不等号方向不变），构造函数 $g(x)$：

$$g(x) = (20x^2 + 10x)e^{x-1} - 35x^3 - 16x^2 + 97x - 70 - e^{1-x}(7x^2 + 32x - 33)$$

问题转化为证明当 $x \geqslant 1$ 时，$g(x) \geqslant 0$ 恒成立。对 $g(x)$ 求一阶导数：

$$g'(x) = e^{x-1}(20x^2 + 50x + 10) - 105x^2 - 32x + 97 + e^{1-x}(7x^2 + 18x - 65)$$

再次求导得二阶导数：

$$g''(x) = e^{x-1}(20x^2 + 90x + 60) - 210x - 32 + e^{1-x}(-7x^2 - 4x + 83)$$

为判断 $g''(x)$ 的符号，我们先证明 $g''(x) \geqslant (1-xe^{1-x})(7x+4)$。将该目标不等式的右端展开并移项，等价于证明：

$$e^{x-1}(20x^2+90x+60)+83e^{1-x}-217x-36 \geqslant 0$$

由基本不等式 $e^z \geqslant z+1$，分别取 $z=x-1$ 与 $z=1-x$，可得 $e^{x-1} \geqslant x$ 与 $e^{1-x} \geqslant 2-x$。当 $x \geqslant 1$ 时，$20x^2+90x+60>0$，将上述放缩代入左侧多项式：

$$e^{x-1}(20x^2+90x+60)+83e^{1-x}-217x-36 \geqslant x(20x^2+90x+60)+83(2-x)-217x-36$$

$$=20x^3+90x^2+60x+166-83x-217x-36$$

$$=20x^3+90x^2-240x+130$$

提取公因式并进行因式分解得：

$$10(2x^3+9x^2-24x+13)=10(x-1)(2x^2+11x-13)=10(x-1)^2(2x+13)$$

由于 $x \geqslant 1$，$10(x-1)^2(2x+13) \geqslant 0$ 显然成立。这证明了 $g''(x) \geqslant (1-xe^{1-x})(7x+4)$。同时，当 $x \geqslant 1$ 时，$xe^{1-x} \leqslant 1$ 恒成立，即 $1-xe^{1-x} \geqslant 0$。结合 $7x+4>0$，可知：

$$g''(x) \geqslant (1-xe^{1-x})(7x+4) \geqslant 0$$

故 $g'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增。代入端点值检验：

$$g'(1)=80-105-32+97-40=0$$

因此，当 $x \geqslant 1$ 时，$g'(x) \geqslant 0$ 恒成立，说明 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增。再次代入端点值检验：

$$g(1)=30-35-16+97-70-6=0$$

故当 $x \geqslant 1$ 时，$g(x) \geqslant 0$ 恒成立。由此逆推可知，等价转化的核心不等式成立，即原导函数满足 $F'(x) \leqslant 0$ 恒成立。综上所述，$F(x)$ 在其定义域 $[1,+\infty)$ 内单调递减，原命题得证。

## 4.1.13 例题: 来自 amare Donata Caesia

$x_1\ln x_1=x_2\ln x_2=-x_3\ln x_3,x_1<x_2<x_3$，证明 $x_1+x_2+x_3>2$

**解** 4.1.13. 考虑加强证明

$$\begin{cases}x_1+x_2>1+m+\frac{m^2}{2}\\ x_3>1-m-\frac{m^2}{2}\end{cases}$$

第一个不等式，考虑加强证明 $x_1+x_2>\mathrm{e}(3-\mathrm{e})m^2+m+1$，化成 $x-\ln x$ 的经典偏移模型，即证

$$x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2=a>1,\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\mathrm{e}^a-1+\frac{\mathrm{e}(3-\mathrm{e})}{\mathrm{e}^a}$$

假设 $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2},x_1<1<x_2$，即证

$$g(x)=\frac{1}{x^2}-\left(\mathrm{e}^a-1+\frac{\mathrm{e}(3-\mathrm{e})}{\mathrm{e}^a}\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1+\mathrm{e}(3-\mathrm{e})\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)\frac{1}{x},g(x_1)>g(x_2)$$

则 $x=1$ 必然是极值点，只需要改造 $g(x)$ 使得其单调递减即可完成加强证明，显然地，考虑到 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2=a$，取指数就有 $\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1}=\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}=\mathrm{e}^a$，只需证明

$$h(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1+\mathrm{e}(3-\mathrm{e})\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{x}+1+\mathrm{e}(5-2\mathrm{e})\frac{x}{\mathrm{e}^x}$$
$$h'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(2-x)-2}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\left[8-3\mathrm{e}-(5-2\mathrm{e})x\right]$$

$h(x)$ 单调递减即可，设 $H(x)=x^3\mathrm{e}^xh'(x)=\mathrm{e}^{2x}(2-x)-(x+2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}x^3\left[8-3\mathrm{e}-(5-2\mathrm{e})x\right]$ 求 4 次导数把 $x$ 的幂函数导掉：

$$H'(x)=e^{2x}(3-2x)-e^x(x+3)+3e(8-3e)x^2-4e(5-2e)x^3$$
$$H''(x)=4\mathrm{e}^{2x}(1-x)-\mathrm{e}^x(x+4)+6\mathrm{e}(8-3\mathrm{e})x-12\mathrm{e}(5-2\mathrm{e})x^2$$
$$H'''(x)=4\mathrm{e}^{2x}(1-2x)-\mathrm{e}^x(x+5)+6\mathrm{e}(8-3e)-24\mathrm{e}(5-2\mathrm{e})x$$
$$H''''(x)=-16x\mathrm{e}^{2x}-(x+6)\mathrm{e}^x-24\mathrm{e}(5-2\mathrm{e})$$

显然对于 $x>0$，$H''''(x)$ 单调递减，且 $H''''(0)=-6+24\mathrm{e}(2\mathrm{e}-5)>0,\lim\limits_{x\to+\infty}H''''(x)=-\infty$，故其存在零点 $(\xi_1,0)$，则 $H'''(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 单增，在 $(\xi_1,+\infty)$ 单减，由于

$$H'''(0)=-1+6\mathrm{e}(8-3\mathrm{e})<0,H'''(1)=26\mathrm{e}^2-78\mathrm{e}<0,H'''\left(\frac{1}{2}\right)=6\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}-\frac{11}{2}\sqrt{\mathrm{e}}>0$$

故 $H'''(x)$ 存在零点 $(\xi_2,0),(\xi_3,0)$，那么 $H''(x)$ 在 $(0,\xi_2)$ 单减，在 $(\xi_2,\xi_3)$ 单增，在 $(\xi_3,+\infty)$ 单减，由于

$$H''(0)=0,H''\left(\frac{1}{2}\right)=11\mathrm{e}-\frac{9}{2}\sqrt{\mathrm{e}}-3\mathrm{e}^2>0,H''(1)=6\mathrm{e}^2-17\mathrm{e}<0$$

所以 $H''(x)$ 存在零点 $(\xi_4,0),(\xi_5,0)$，所以 $H'(x)$ 在 $(0,\xi_4)$ 单减，在 $(\xi_4,\xi_5)$ 单增，在 $(\xi_5,\infty)$ 单减，由于 $H'(0)=H'(1)=0$，所以 $H'(x)$ 存在零点 $(\xi_6,0)$，那么 $H(x)$ 在 $(0,\xi_6)$ 单减，在 $(\xi_6,1)$ 单

增，在 $(1,+\infty)$ 单减，又因为 $H(0)=H(1)=0$，所以 $H(x)\leqslant 0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单减。于是 $x_1+x_2>\mathrm{e}(3-\mathrm{e})m^2+m+1$ 得证.

下证 $x_3>1-m-\frac{m^2}{2}>1$，对于 $m\in(-\frac{1}{\mathrm{e}},0)$，不难验证后一个“>”成立，两边套函数名 $-m=x_3\ln x_3>(1-m-\frac{m^2}{2})\ln(1-m-\frac{m^2}{2})$ 即证

$$p(m)=\frac{m}{\frac{m^2}{2}+m-1}-\ln(1-m-\frac{m^2}{2})>0,\forall m\in(-\frac{1}{\mathrm{e}},0)$$

令 $t=-m\in(0,\frac{1}{e})$，则不等式化为

$$f(t)=\frac{t}{1+t-\frac{t^2}{2}}-\ln\left(1+t-\frac{t^2}{2}\right)>0,\ f'(t)=\frac{t^2\left(2-\frac{t}{2}\right)}{\left(1+t-\frac{t^2}{2}\right)^2}>0,\quad\forall t\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$$

且 $f(0)=0$，故 $f(t)>0$ 在区间内成立，即 $x_3>1-m-\frac{m^2}{2}>1$。这就证明了 $x_1+x_2+x_3>2$.

4.1.14 例题:

$a,d \geq 0, b,c>0, b+c \geq a+d$，求 $\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ 的最小值.

**解 4.1.14.** 首先证明函数的最小值必在边界 $a+d=b+c$ 处取得。假设存在一组满足 $a_0+d_0<b_0+c_0$ 的点 $(a_0,b_0,c_0,d_0)$ 使函数取得极小值。由于 $b_0+c_0-d_0>a_0 \geq 0$，可构造一个新点 $(a_1,b_0,c_0,d_0)$，其中 $a_1=b_0+c_0-d_0$。该点满足所有非负与正数约束，且满足等式 $a_1+d_0=b_0+c_0$。将新点代入目标函数，因 $a_1>a_0$，第一项 $\frac{b_0}{c_0+d_0}$ 保持不变，第二项的分母变大，即 $\frac{c_0}{a_1+b_0}<\frac{c_0}{a_0+b_0}$。由此得到 $f(a_1,b_0,c_0,d_0)<f(a_0,b_0,c_0,d_0)$。因此只需求解 $a+d=b+c$ 条件下的最值即可。

齐次函数，即 $f(ka,kb,kc,kd)=f(a,b,c,d)$（$k>0$），说明函数值仅与变量的相对比例有关。由 $b,c>0$ 必有 $b+c>0$。为简化变量，将所有变量同除以 $b+c$，即假定 $b+c=1$，从而也有 $a+d=1$。引入换元：令 $b=y$，则 $c=1-y$，由 $b,c>0$ 得 $y\in(0,1)$；令 $a=x$，则 $d=1-x$，由 $a,d\geq 0$ 得 $x\in[0,1]$。代入目标函数得：

$$f(x,y)=\frac{y}{(1-y)+(1-x)}+\frac{1-y}{x+y}=\frac{y}{2-x-y}+\frac{1-y}{x+y}$$

令 $S=x+y$。因 $x\in[0,1]$ 且 $y\in(0,1)$，故 $S\in(0,2)$。对于固定的 $S$，由 $x=S-y\in[0,1]$ 可得 $S-1\leq y\leq S$。结合 $y\in(0,1)$，$y$ 的取值范围为 $[\max(0,S-1),\min(1,S)]\cap(0,1)$。将函数转化为关于 $S$ 和 $y$ 的表达式：

$$f(S,y)=\frac{y}{2-S}+\frac{1-y}{S}=\frac{2S-2}{S(2-S)}y+\frac{1}{S}$$

在固定 $S$ 的截面上，目标函数是关于 $y$ 的一次函数，其极值在区间端点处取得。根据一次项系数 $\frac{2S-2}{S(2-S)}$ 的正负，分以下三种情况讨论：当 $0<S<1$ 时，一次项系数 $\frac{2S-2}{S(2-S)}<0$，函数关于 $y$ 单调递减。为使函数值最小，$y$ 应取区间内的最大值，即 $y=\min(1,S)=S$（此时 $x=0$）。代入可得该截面上的极小值：

$$g_1(S)=f(S,S)=\frac{S}{2-S}+\frac{1-S}{S}=\frac{2}{2-S}+\frac{1}{S}-2$$

当 $1<S<2$ 时，一次项系数 $\frac{2S-2}{S(2-S)}>0$，函数关于 $y$ 单调递增。为使函数值最小，$y$ 应取区间内的最小值，即 $y=\max(0,S-1)=S-1$（此时 $x=1$）。代入可得：

$$g_2(S)=f(S,S-1)=\frac{S-1}{2-S}+\frac{1-(S-1)}{S}=\frac{S-1}{2-S}+\frac{2-S}{S}$$

当 $S=1$ 时，一次项系数为 0。此时无论 $y$ 取何值，恒有 $f(1,y)=1$。接下来求解 $g_1(S)$ 在 $S\in(0,1)$ 上的最小值。注意到 $(2-S)+S=2$，利用基本不等式对其变形放缩：

$$2\left(\frac{2}{2-S}+\frac{1}{S}\right)=((2-S)+S)\left(\frac{2}{2-S}+\frac{1}{S}\right)=3+\frac{2S}{2-S}+\frac{2-S}{S}$$

由均值不等式可得：

$$\frac{2S}{2-S}+\frac{2-S}{S}\geq 2\sqrt{\frac{2S}{2-S}\cdot\frac{2-S}{S}}=2\sqrt{2}$$

故 $\frac{2}{2-S}+\frac{1}{S}\geq\frac{3+2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+\frac{3}{2}$。代回 $g_1(S)$ 可得：

$$g_1(S)\geq\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)-2=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

等号成立当且仅当 $\frac{2S}{2-S}=\frac{2-S}{S}$，即 $2-S=\sqrt{2}S$。解得 $S=2\sqrt{2}-2\in(0,1)$，极小值点在定义域内。同理，考察 $g_2(S)$ 在 $S\in(1,2)$ 上的最小值。令 $t=2-S\in(0,1)$，代入得：

$$g_2(S)=\frac{1-t}{t}+\frac{t}{2-t}=\frac{1}{t}-1+\frac{2}{2-t}-1=\frac{2}{2-t}+\frac{1}{t}-2$$

该表达式与 $g_1(t)$ 的代数形式完全相同，因此其最小值同为 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$。由于 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}\approx 0.914<1$，故该值即为全局极小值。最后进行充分性验证。取 $S=2\sqrt{2}-2$，$y=2\sqrt{2}-2$，$x=0$，还原为原变量得：$a=0$，$b=2\sqrt{2}-2$，$c=3-2\sqrt{2}$，$d=1$。经检验，满足 $a\geq 0,d\geq 0,b>0,c>0$，且 $b+c=1\geq 1=a+d$。代入原函数验算，确实取得 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$，解的存在性成立。综上所述，$\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ 的最小值为 $\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$。

**4.1.15 例题:**

证明 $\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\left(\frac{3}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n}{n}\right)^n>\dfrac{2(n-1)}{n+1}$.

**解 4.1.15.** 这个不等式有明显的几何意义，首先分母都有 $n$，然后分子每次自增，长得很像一个个矩形的面积求和，然后右边是个分式，感觉就是积分后的结果，所以我们根据题目中的 $n$ 次方结构，找到函数 $f(x)=x^n$，然后将其积分区间 $[0,1]$ 分成 $n$ 等分，并由 $f(x)$ 下凸，将每一个曲边梯形"扩大"成直边梯形（为什么不先放成矩形？因为放成梯形明显更紧，而且求和的难度不会显著变大），根据题中的 $k=1,2,3,\cdots,n$：

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{k-1}{n}\right)^n+\left(\frac{k}{n}\right)^n\right)\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)>\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^n\mathrm{d}x$$

求和得到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n}\right)^n+2\left(\frac{2}{n}\right)^n+2\left(\frac{3}{n}\right)^n+\cdots+2\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n}{n}\right)^n>n\int_0^1x^n\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n-\left(\frac{0}{n}\right)^n-\left(\frac{n}{n}\right)^n>\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{n}{n+1}\\ \Leftrightarrow\ &\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n>\frac{2(n-1)}{n+1}\end{aligned}$$

**4.1.16 例题:**

证明 $f(x)=\ln x-8\dfrac{x-1}{(x^{\frac{1}{3}}+1)^3}$ 单调递增

**解** 4.1.16. 转化为 $F(t)=3\ln t-8\cdot\dfrac{t^3-1}{(t+1)^3}$ 单增，$F'(t)=\dfrac{3}{t}-8\cdot\dfrac{3(t^2+1)}{(t+1)^4}=\dfrac{3}{t}-\dfrac{24(t^2+1)}{(t+1)^4}$ 链式法则 $f'(x)=\frac{dF}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=F'(t)\cdot\frac{1}{3t^2}$，所以

$$f'(x)=\left(\frac{3}{t}-\frac{24(t^2+1)}{(t+1)^4}\right)\cdot\frac{1}{3t^2}=\frac{1}{t^3}-\frac{8(t^2+1)}{t^2(t+1)^4}=\frac{(t-1)^4}{t^3(t+1)^4}>0.$$

4.1.17 例题: 来自邪帝，$\sqrt{xy}\,(e^x+e^y)\leqslant 2$

正实数 $x,y$ 满足 $e^x-\ln x=e^y-\ln y$，证明：$\sqrt{xy}\,(e^x+e^y)\leqslant 2$

**解** 4.1.17. 设函数 $f(t)=e^t-\ln t\ (t>0)$，对其求导得 $f'(t)=e^t-\frac{1}{t}$。令 $f'(t)=0$ 得到 $te^t=1$，该方程存在唯一正实数解 $t_0\approx 0.567$。这表明 $f(t)$ 在 $(0,t_0]$ 上严格单调递减，在 $[t_0,+\infty)$ 上严格单调递增。已知正实数 $x,y$ 满足 $f(x)=f(y)$。若 $x=y$，则必然有 $x=y=t_0$，此时目标不等式左侧为 $\sqrt{t_0^2}(2e^{t_0})=2t_0e^{t_0}$。由 $t_0e^{t_0}=1$ 可知，此时式子的值为 2，满足 $\leqslant 2$ 的条件。若 $x\neq y$，不失一般性，假设 $0<x<t_0<y$。下证在此条件下严格不等式 $\sqrt{xy}(e^x+e^y)<2$ 成立。

设 $m=\frac{x+y}{2}$，$v=\frac{y-x}{2}$，则 $v>0$ 且 $x=m-v$，$y=m+v$。另设 $w=\frac{\ln y-\ln x}{2}$，则 $w>0$。由 $\ln\frac{y}{x}=2w$ 得 $y=xe^{2w}$。将其代入 $y-x=2v$ 中，解得 $x=\frac{2v}{e^{2w}-1}=\frac{ve^{-w}}{\sinh w}$。同理可得 $y=\frac{ve^{w}}{\sinh w}$。由此，几何平均数 $\sqrt{xy}$ 可表示为：

$$\sqrt{xy}=\sqrt{\frac{v^2e^{-w}e^{w}}{\sinh^2 w}}=\frac{v}{\sinh w}$$

根据已知条件 $e^y-\ln y=e^x-\ln x$，可转化为 $e^y-e^x=\ln y-\ln x$。将 $m,v$ 代入左侧，得 $e^{m+v}-e^{m-v}=2e^m\sinh v$；右侧即为 $2w$。两边相等得到等式：

$$e^m\sinh v=w\implies e^m=\frac{w}{\sinh v}$$

利用此关系，代数和 $\frac{e^x+e^y}{2}$ 可化为：

$$\frac{e^x+e^y}{2}=\frac{e^{m-v}+e^{m+v}}{2}=e^m\cosh v=\left(\frac{w}{\sinh v}\right)\cosh v=w\coth v$$

要证的 $\sqrt{xy}(e^x+e^y)<2$ 等价于 $\sqrt{xy}\frac{e^x+e^y}{2}<1$。将上述结果代入，目标不等式等价于 $\left(\frac{v}{\sinh w}\right)(w\coth v)<1$，即：

$$v\coth v<\frac{\sinh w}{w}$$

为证明此不等式，需考察变量 $w$ 和 $v$ 的比值 $R=\frac{w}{v}$ 的下界。一方面，由 $R=\frac{w}{v}=e^m\frac{\sinh v}{v}$，且对于 $v>0$，泰勒展开式 $\frac{\sinh v}{v}=1+\frac{v^2}{6}+\cdots>1$，可得 $R>e^m$。另一方面，将 $y=m+v$ 和 $x=m-v$ 代入 $R$ 的定义中，有：

$$R=\frac{1}{2v}\ln\frac{m+v}{m-v}=\frac{1}{2v}\ln\frac{1+v/m}{1-v/m}$$

令 $t=\frac{v}{m}$，由于 $0<x<y$ 且 $v=\frac{y-x}{2},m=\frac{x+y}{2}$，知 $t\in(0,1)$。由对数函数的泰勒展开 $\ln\frac{1+t}{1-t}=2\left(t+\frac{t^3}{3}+\dots\right)>2t$，得 $R>\frac{1}{2v}\cdot 2\left(\frac{v}{m}\right)=\frac{1}{m}$。综合两者可得 $R>\max\left(e^m,\frac{1}{m}\right)$。设 $h(m)=$

$\max\left(e^m, \frac{1}{m}\right)$，因 $e^m$ 单调递增，$\frac{1}{m}$ 单调递减，其最小值在两函数图象交点处取得，即 $e^{m_0} = \frac{1}{m_0}$，亦即 $m_0 e^{m_0} = 1$。故对于任意 $m > 0$，恒有 $R > e^{m_0}$。考察单调递增函数 $g(m) = me^m$，已知 $g(m_0) = 1$。取 $m = \ln\sqrt{2}$，计算得 $g(\ln\sqrt{2}) = (\ln\sqrt{2})e^{\ln\sqrt{2}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$。由于 $e > 2$，故 $\ln 2 < 1$，从而 $g(\ln\sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 = g(m_0)$。由 $g(m)$ 的严格单调递增性，可得 $\ln\sqrt{2} < m_0$，即 $e^{m_0} > \sqrt{2}$。因此，$R = \frac{w}{v} > \sqrt{2}$，即 $w > \sqrt{2}v$。

设函数 $S(t) = \frac{\sinh t}{t}$ $(t > 0)$，其导数 $S'(t) = \frac{t\cosh t - \sinh t}{t^2} > 0$，故 $S(t)$ 严格单调递增。由 $w > \sqrt{2}v > 0$，得 $\frac{\sinh w}{w} > \frac{\sinh(\sqrt{2}v)}{\sqrt{2}v}$。为证明 $v\coth v < \frac{\sinh w}{w}$，只需证 $v\coth v \leqslant \frac{\sinh(\sqrt{2}v)}{\sqrt{2}v}$，即证明 $\sqrt{2}v^2\cosh v \leqslant \sinh v\sinh(\sqrt{2}v)$。利用积化和差公式，不等式右侧化为：

$$\text{RHS} = \frac{1}{2}\Big[\cosh((\sqrt{2}+1)v) - \cosh((\sqrt{2}-1)v)\Big]$$

将其展开为泰勒级数，设 $\text{RHS} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{(2n)!}v^{2n}$，其中：

$$C_n = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n} - (\sqrt{2}-1)^{2n}\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(\sqrt{2})^{2k+1}$$

不等式左侧展开为泰勒级数：

$$\text{LHS} = \sqrt{2}v^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{v^{2j}}{(2j)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(2n-2)!}v^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}(2n)(2n-1)}{(2n)!}v^{2n}$$

设 LHS 的分子系数为 $D_n = \sqrt{2}(2n)(2n-1)$。比较 $C_n$ 与 $D_n$：当 $n = 1$ 时，$C_1 = 2\sqrt{2}$，$D_1 = 2\sqrt{2}$，两者相等；当 $n = 2$ 时，$C_2 = 12\sqrt{2}$，$D_2 = 12\sqrt{2}$，两者相等；当 $n \geqslant 3$ 时，提取 $C_n$ 求和式中的前两项（$k = 0$ 与 $k = 1$）：

$$C_n > \binom{2n}{1}\sqrt{2} + \binom{2n}{3}(\sqrt{2})^3 = 2n\sqrt{2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3}\sqrt{2}$$

将该局部和与 $D_n$ 比较，作差并提取公因式 $\sqrt{2}(2n)$，考察：

$$1 + \frac{(2n-1)(2n-2)}{3} - (2n-1)$$

令 $z = 2n-1$，因 $n \geqslant 3$，故 $z \geqslant 5$。上式化为 $1 + \frac{z(z-1)}{3} - z = \frac{(z-1)(z-3)}{3} > 0$。这表明当 $n \geqslant 3$ 时，局部和已严格大于 $D_n$，进而 $C_n > D_n$ 成立。综上所述，对于任意 $v > 0$，泰勒级数各项系数均满足 $C_n \geqslant D_n$ 且部分项严格大于，故 RHS $>$ LHS 成立，即 $v\coth v < \frac{\sinh(\sqrt{2}v)}{\sqrt{2}v}$。结合 $S(t)$ 的单调性，推得 $v\coth v < \frac{\sinh w}{w}$，等价于 $\sqrt{xy}\,(e^x + e^y) < 2$。综合 $x = y$ 和 $x \neq y$ 的情况，命题 $\sqrt{xy}\,(e^x + e^y) \leqslant 2$ 得证。

### 4.1.18 例题: 来自邪帝，无答案

已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-2x+\ln x+e^{1-a}$ 有三个零点；若 $a>\frac{1}{2}$，记三个零点分别为 $x_1,x_2,x_3$ $(x_1<x_2<x_3)$，极值点分别 $x_4,x_5$ $(x_4<x_5)$，证明：

(1) 求 $a$ 的取值范围.

(2)

(i) $x_1x_2x_3<\sqrt[3]{\frac{2}{1+e^{1-a}}}$

(ii)$x_1+x_2>2x_4$, $x_2+x_3<2x_5$

(iii) $x_1+x_3>x_4+x_5>2x_2$

(iv) $x_2>x_4x_5>x_1x_3$

(v) $x_1+2x_2+x_3>2x_4+2x_5$

(vi) $(x_1-x_2)f(x_5)<(x_3-x_2)f(x_4)$

(vii) $(x_2-x_5)f(x_4)<(x_2-x_4)f(x_5)$

(viii) $(x_1+x_2-2x_4)f(x_4)<(x_2+x_3-2x_5)f(x_5)$

(ix) $f(x_4)\ln x_1<f(x_5)\ln x_3$

(x) $(x_4+x_5)[f(x_4)+f(x_5)]+(x_1+x_3)f(x_5)<2x_2f(x_4)$

第一部分：证明 (1) ——求 $a$ 的取值范围【结论】$a\in(0,1)$。【闭环严谨证明】已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-2x+\ln x+e^{1-a}$ 的定义域为 $x\in(0,+\infty)$。连续对其求导：

$$f'(x)=ae^{x-1}-2+\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x)=ae^{x-1}+\frac{2}{x^3}$$

步骤 1：确立 $f'(x)$ 的极值点结构若 $a\le 0$，则 $f''(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，此时 $f'(x)$ 严格单调递减，至多有一个零点。从而 $f(x)$ 至多有两个零点，不符题意，故必有 $a>0$。因为 $a>0$ 且 $x>0$，所以恒有 $f'''(x)>0$。这表明 $f''(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的严格单调递增函数。由于 $\lim_{x\to 0^+}f''(x)=-\infty$ 且 $\lim_{x\to+\infty}f''(x)=+\infty$，因此 $f''(x)$ 存在唯一的零点，记为 $x_0$。进而可知，$f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上严格递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上严格递增，即 $x_0$ 是 $f'(x)$ 的全局唯一极小值点。要想 $f(x)$ 存在三个零点，$f(x)$ 必须有两个极值点 $x_4,x_5$，这就等价于要求方程 $f'(x)=0$ 必须有两个不同的正实数根。因此，要求极小值 $f'(x_0)<0$。步骤 2：解出 $a$ 的必要条件由 $f''(x_0)=0$ 得 $ae^{x_0-1}=\frac{1}{x_0^2}$。代入极小值条件 $f'(x_0)<0$ 得到：

$$f'(x_0)=\frac{1}{x_0^2}-2+\frac{1}{x_0}<0\implies\frac{-2x_0^2+x_0+1}{x_0^2}<0\implies(2x_0+1)(x_0-1)>0$$

因为 $x_0>0$，解得 $x_0>1$。将 $a$ 写为 $x_0$ 的函数：$a=\frac{e^{1-x_0}}{x_0^2}$。构造函数 $k(x)=\frac{e^{1-x}}{x^2}$，求导得 $k'(x)=-\frac{x+2}{x^3}e^{1-x}<0$，说明 $k(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格递减。由于 $x_0>1$，所以 $0<a=k(x_0)<k(1)=1$。由

此得必要条件：$0 < a < 1$。步骤 3：证明充分条件当 $0 < a < 1$ 时，由前述分析，$f'(x)$ 必定有两个零点 $x_4, x_5$（且 $x_4 < x_0 < x_5$）。此时 $f(x)$ 在 $(0, x_4)$ 递增，在 $(x_4, x_5)$ 递减，在 $(x_5, +\infty)$ 递增。要保证有三个变号零点，必须严格证明：极大值 $f(x_4) > 0$ 且极小值 $f(x_5) < 0$。□ 证极大值 $f(x_4) > 0$：因为 $0 < a < 1$，$f'(1) = a - 1 < 0$。结合 $f'(x)$ 单调性必然有 $1 \in (x_4, x_5)$。由于 $f(x)$ 在 $(x_4, x_5)$ 单调递减，所以极大值 $f(x_4) > f(1)$。将 $x = 1$ 代入：$f(1) = a - 2 + e^{1-a}$。设 $u(a) = a - 2 + e^{1-a}$，求导 $u'(a) = 1 - e^{1-a}$。当 $a \in (0, 1)$ 时，$1 - a > 0 \implies e^{1-a} > 1 \implies u'(a) < 0$。故 $u(a) > u(1) = 0$。即 $f(1) > 0$ 恒成立，从而极大值 $f(x_4) > f(1) > 0$ 成立。□ 证极小值 $f(x_5) < 0$：因为 $x_5$ 是极值点，满足 $ae^{x_5-1} = 2 - \frac{1}{x_5} \implies a = \left(2 - \frac{1}{x_5}\right) e^{1-x_5}$。将 $a$ 整体代入 $f(x_5)$，并设变量 $t = x_5 > 1$。令 $H(t) = 2 - \frac{1}{t} - 2t + \ln t + e^{1-a(t)}$，其中 $a(t) = \left(2 - \frac{1}{t}\right) e^{1-t}$。我们需要证明当 $t > 1$ 时，$H(t) < 0$。易知 $H(1) = 0$。求导：$H'(t) = \frac{1}{t^2} - 2 + \frac{1}{t} + e^{1-a(t)} \cdot (-a'(t))$。因 $a'(t) = e^{1-t}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - 2\right)$，提取公因式得：

$$H'(t) = \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - 2\right)\left[1 - e^{1-t}e^{1-a(t)}\right] = \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - 2\right)\left[1 - e^{2-t-a(t)}\right]$$

因为 $t > 1$，左侧因式 $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - 2 < 0$。现判定右侧指数符号：设 $v(t) = 2 - t - a(t)$，求导 $v'(t) = -1 - a'(t) = -1 + e^{1-t}\left(2 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)$。由泰勒展开 $e^{t-1} > 1 + (t-1) = t \implies e^{1-t} < \frac{1}{t}$（当 $t > 1$ 时）。所以 $e^{1-t}\left(2 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) < \frac{1}{t}\left(2 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}$。而 $\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} < 1 \iff t^3 - 2t^2 + t + 1 = t(t-1)^2 + 1 > 0$，此式显然成立。故 $v'(t) < -1 + 1 = 0$ 恒成立。由 $v(1) = 0 \implies v(t) < 0 \implies e^{v(t)} < 1 \implies 1 - e^{v(t)} > 0$。一负一正相乘，得到 $H'(t) < 0$ 恒成立！由于 $H(1) = 0$，故对任意 $t > 1$ 均有 $H(t) < 0$，从而极小值 $f(x_5) < 0$ 严格成立。充要条件闭环证明完毕：$a$ 的取值范围是 $(0, 1)$。第二部分：严格闭环证明 (2)(ii) ——$x_1 + x_2 > 2x_4$ 且 $x_2 + x_3 < 2x_5$ 这是一道高阶导数控制的绝佳应用题，利用积分形式的琴生（Jensen）不等式（即 Hermite-Hadamard 不等式）可完美打通闭环。在第 (1) 问中已证得：$f'''(x) > 0$ 恒成立。这说明一阶导函数 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是一条严格下凸（Convex）的曲线。□ 证明左半部分：$x_1 + x_2 > 2x_4$ 考察零点 $x_1$ 与 $x_2$ 构成的闭区间 $[x_1, x_2]$：由微积分基本定理，有：

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = f(x_2) - f(x_1) = 0 - 0 = 0$$

对于严格下凸函数 $f'(x)$，应用积分形式的 Jensen 不等式，其区间中点的函数值必须严格小于其在整个区间上的积分平均值，即：

$$f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = 0$$

既然要求 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$，而我们知道 $f'(x)$ 的零点为极值点 $x_4, x_5$，且 $f'(x) < 0$ 的充要条件是自变量必须落入 $(x_4, x_5)$ 区间内。所以，该中点必须落在该负值区间内：

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \in (x_4, x_5)$$

由此直接得到 $\frac{x_1+x_2}{2} > x_4 \implies \boldsymbol{x_1 + x_2 > 2x_4}$。□ 证明右半部分：$x_2 + x_3 < 2x_5$ 同理，考察区间 $[x_2, x_3]$，由于 $f(x_2) = f(x_3) = 0$：

$$\int_{x_2}^{x_3} f'(x)dx = f(x_3) - f(x_2) = 0$$

再次对严格下凸函数 $f'(x)$ 运用积分 Jensen 不等式：

$$f'\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) < \frac{1}{x_3-x_2}\int_{x_2}^{x_3} f'(x)dx = 0$$

同理，中点依然必定落入使 $f'$ 值为负的唯一区间 $(x_4, x_5)$ 中：

$$\frac{x_2+x_3}{2} \in (x_4, x_5)$$

由此直接得到 $\frac{x_2+x_3}{2} < x_5 \implies \boldsymbol{x_2+x_3 < 2x_5}$。双侧证毕，绝对闭环。

**4.1.19 例题: 来自邪帝，无答案**

知函数 $f(x) = ax^2e^{-x} - \ln(ax)(a>0)$ 有三个零点 $x_1, x_2, x_3(x_1 < x_2 < x_3)$.

（1）求 $a$ 的取值范围；

（2）记 $f(x)$ 的导数为 $g(x)$，$g(x)$ 的零点为 $x_4, x_5(x_4 < x_5)$.

（i）证明：$g(x_1)+g(x_2) < 0$；（ii）当 $a < e^2$ 时，证明：$f(x_5) < (x_3-1)g(x_2)$

**4.1.20 例题: 来自邪帝，有答案但困难**

函数 $f(x) = ae^{x-1} - (2-x)x^2(a>0)$ 有两个零点 $x_1$，$x_2(0 < x_1 < x_2)$.

（1）求 $a$ 的取值范围；

（2）若 $x_1 + x_2 + kalna > 2$，求 $k$ 的取值范围.

**4.1.21 例题: 来自邪帝，无答案**

函数 $f(x) = ae^x - 2x + \ln\frac{x}{a}(a>0)$ 有三个零点 $x_1$，$x_2$，$x_3(x_1 < x_2 < x_3)$.

（1）求实数 $a$ 的取值范围；

（2）记 $f(x)$ 的极值点为 $x_4$，$x_5(x_4 < x_5)$，证明：$(x_4-x_2)f(x_5) < (x_5-x_2)f(x_4)$.

**4.1.22 例题: 来自邪帝，无答案**

已知函数 $f(x) = x - 4\ln x - \frac{3}{x} + 3a + 2(a < \ln 2)$ 有三个零点 $x_1$，$x_2$，$x_3$（$x_1 < x_2 < x_3$）.

（1）求 $a$ 的取值范围；

（2）证明：$f(x_1x_2) + f(x_1x_2x_3) > 3a$.

**解 4.1.18.**（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$。对 $f(x)$ 求导可得：

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{x^2}$$

当 $x \in (0,1) \cup (3,+\infty)$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x \in (1,3)$ 时，$f'(x) < 0$。因此，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增。函数在 $x=1$ 处取得唯一极大值 $f(1) = 3a$，在 $x=3$ 处取得唯一极小值 $f(3) = 3a + 4 - 4\ln 3$。

结合端点极限 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ 及 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，若使 $f(x)$ 有三个互不相同的零点 $x_1, x_2, x_3$（设 $x_1 < x_2 < x_3$），必须且只需极大值严格大于 0 且极小值严格小于 0，即：

$$f(1) = 3a > 0 \implies a > 0$$

$$f(3) = 3a + 4 - 4\ln 3 < 0 \implies a < \frac{4\ln 3 - 4}{3}$$

综上，$a$ 的取值范围为 $\left(0, \frac{4\ln 3-4}{3}\right)$。此时三个零点分别位于区间 $(0,1), (1,3), (3,+\infty)$ 内。

（2）证明：对任意 $x > 0$，有

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \left(\frac{1}{x} - 4\ln\frac{1}{x} - 3x + 3a + 2\right) - \left(x - 4\ln x - \frac{3}{x} + 3a + 2\right) = 4\left(\frac{1}{x} - x + 2\ln x\right)$$

构造函数 $\phi(x) = \frac{1}{x} - x + 2\ln x$，求导得 $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} \le 0$。故 $\phi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调不增，且 $\phi(1) = 0$。当 $x \in (0,1)$ 时，$\phi(x) > 0$，从而 $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(x)$。由于 $x_1 \in (0,1)$ 且 $f(x_1) = 0$，可得 $f\left(\frac{1}{x_1}\right) > 0$。

注意到 $a < \frac{4\ln 3-4}{3}$，计算 $f\left(\frac{1}{3}\right)$：

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - 4\ln\frac{1}{3} - 9 + 3a + 2 = 3a + 4\ln 3 - \frac{20}{3} < (4\ln 3 - 4) + 4\ln 3 - \frac{20}{3} = 8\ln 3 - \frac{32}{3}$$

因 $e^{4/3} = 1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \cdots > 1 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{32}{81} = \frac{293}{81} > 3$，故 $\ln 3 < \frac{4}{3}$。从而 $8\ln 3 - \frac{32}{3} < 0$，即 $f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$。因 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增且 $f(x_1) = 0$，由 $f\left(\frac{1}{3}\right) < f(x_1)$ 得 $x_1 > \frac{1}{3}$。结合 $x_1 < 1$，可推得 $\frac{1}{x_1} \in (1,3)$。由于 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，该区间唯一零点为 $x_2$，且 $f\left(\frac{1}{x_1}\right) > 0 = f(x_2)$，故必有 $\frac{1}{x_1} < x_2$，即 $x_1x_2 > 1$。

由（1）知 $a > 0 \implies 3a > 2a$，欲证 $f(x_1x_2) + f(x_1x_2x_3) > 3a$。根据牛顿-莱布尼茨公式，将函数值转化为积分表示：

$$f(x_1x_2) = f(1) + \int_1^{x_1x_2} f'(t)dt = 3a + \int_1^{x_1x_2} f'(t)dt$$

$$f(x_1x_2x_3) = f(x_3) + \int_{x_3}^{x_1x_2x_3} f'(t)dt = \int_{x_3}^{x_1x_2x_3} f'(t)dt$$

两式相加得：

$$f(x_1x_2) + f(x_1x_2x_3) - 3a = \int_1^{x_1x_2} f'(t)dt + \int_{x_3}^{x_1x_2x_3} f'(t)dt$$

对第二个积分作变量代换 $t = x_3u$，则 $dt = x_3du$。当 $t$ 从 $x_3$ 变至 $x_1x_2x_3$ 时，$u$ 从 1 变至 $x_1x_2$。于是：

$$\int_{x_3}^{x_1x_2x_3} f'(t)dt = \int_1^{x_1x_2} x_3f'(x_3u)du$$

代回原式可得：

$$f(x_1x_2) + f(x_1x_2x_3) - 3a = \int_1^{x_1x_2} \left[f'(u) + x_3f'(x_3u)\right] du$$

对被积函数进行计算化简：

$$\begin{aligned}f'(u)+x_3f'(x_3u) &= \left(1-\frac{4}{u}+\frac{3}{u^2}\right)+x_3\left(1-\frac{4}{x_3u}+\frac{3}{x_3^2u^2}\right)\\ &= (x_3+1)-\frac{8}{u}+\frac{3\left(1+\frac{1}{x_3}\right)}{u^2}=\frac{(x_3+1)u^2-8u+3\left(1+\frac{1}{x_3}\right)}{u^2}\end{aligned}$$

考察分子中的二次多项式 $N(u)=(x_3+1)u^2-8u+3\left(1+\frac{1}{x_3}\right)$，因 $x_3\in(3,+\infty)$，故首项系数 $x_3+1>0$。其判别式为：

$$\Delta=64-12(x_3+1)\left(1+\frac{1}{x_3}\right)=64-12\left(x_3+\frac{1}{x_3}+2\right)=40-12\left(x_3+\frac{1}{x_3}\right)$$

因函数 $x+\frac{1}{x}$ 在 $x>1$ 上严格递增，故 $x_3+\frac{1}{x_3}>3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$。从而 $\Delta<40-12\times\frac{10}{3}=0$，这表明对任意 $u\in\mathbb{R}$ 恒有 $N(u)>0$。因此，当 $u>0$ 时，被积函数 $\frac{N(u)}{u^2}>0$ 恒成立。又已知 $x_1x_2>1$，积分区间 $[1,x_1x_2]$ 长度严格大于 0，故积分值严格大于 0：

$$\int_1^{x_1x_2}\left[f'(u)+x_3f'(x_3u)\right]du>0$$

由此即证得 $f(x_1x_2)+f(x_1x_2x_3)>3a$。

**4.1.23 例题: 来自邪帝，无答案**

$f(x)=x^2e^{a-x}-a^2\ln x-a\ \left(a>\frac{1}{2}\right)$

$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0(x_1<x_2<x_3),\ f'(x_4)=f'(x_5)=0(x_4<x_5)$

(1) 证明：$x_4f(x_5)+x_5f(x_4)<0$；

(2) 证明：$(x_2+x_3+x_4)f(x_1x_2x_3)+(2x_1+x_5)f(x_2x_3)>0$。

# 第五章 恒成立

## 5.1 不等式题（对应高一基本不等式模块）

**5.1.1 例题: 来自数海漫游考前 100 题**

若 $x-3\sqrt{y}=\sqrt{x-3y}$，求 $x$ 的取值范围.

**解 5.1.1.** 令 $u=\sqrt{x-3y},\quad v=\sqrt{y}$。为了符合算术平方根，必须满足可行域约束 $u\geqslant 0, v\geqslant 0$。代入推导有：$u^2+3v^2=(x-3y)+3y=x$。原方程化为：$x-3v=u \implies x=u+3v$。联立两者消去 $x$ 得到约束等式：$u^2+3v^2=u+3v \implies u^2-u+3v^2-3v=0$。配方得隐函数椭圆方程：

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=1$$

问题几何化转为：在第一象限及原点（即 $u\geqslant 0, v\geqslant 0$）内，求目标函数 $x=u+3v$ 约束在该椭圆上的取值范围。**【致命陷阱揭秘】**：如果解题者在这里盲目套用拉格朗日乘数法或反演隐函数求导求 $x=u+3v$ 的极值，会轻易解得最大值在 $(1,1)$ 处取 4，最小值在 $(0,0)$ 处取 0。如果不加证明地默认“函数在极小值和极大值之间连续取遍所有的值”，直接就会写出答案 $[0,4]$。但这完全忽略了物理约束条件 $u\geqslant 0, v\geqslant 0$。由于这个约束，可行域曲线在这里发生了拓扑断裂！我们通过三角换元严密参数化该椭圆：设 $u=\frac{1}{2}+\cos\theta,\quad v=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$ 目标函数变为：$x=u+3v=2+2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 我们来严格筛查同时满足 $u\geqslant 0, v\geqslant 0$ 的角度 $\theta\in[-\pi,\pi]$：$u\geqslant 0 \implies \cos\theta\geqslant -\frac{1}{2} \implies \theta\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]v\geqslant 0 \implies \sin\theta\geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta\in\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 两者取严格的交集，得到合法的参数区间竟然是：$\theta\in\left\{-\frac{2\pi}{3}\right\}\cup\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 请注意那个孤零零的点！椭圆在第一象限（包括边界）的图像并不是一条完整的闭合连通曲线，而是被硬生生扯成了互相不连通的两部分：第一块（孤立点）：当且仅当 $\theta=-\frac{2\pi}{3}$ 时，刚好 $u=0, v=0$。此时代入算出唯一孤立解 $x=0$。第二块（连续实弧）：当 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 时。此时相位角 $\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$。在这段连续的区间内，余弦函数连续覆盖了 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$。代入算出这段连续弧贡献的 $x$ 范围为 $2+2\left(-\frac{1}{2}\right)\leqslant x\leqslant 2+2(1)$，即确切的 $x\in[1,4]$。至于 $x\in(0,1)$ 的空白区间，此时对应的椭圆轨迹钻入了第四象限（$u>0, v<0$），导致 $\sqrt{y}$ 成了负数，这在实数范畴内是不可能完成的计算。所以 $x\in\{0\}\cup[1,4]$。

## 5.2 幂指对恒成立问题

**5.2.1 例题: 虚调子**

证明不等式 $4x^2(1-x)^2+x(1-x)\leqslant x^{1-x}\cdot(1-x)^x$ 在 $x\in[0,1]$ 上成立

**解 5.2.1.** 0,1 处显然取等，下证在 $x\in(0,1)$ 内不等式恒成立。此时左端可提取公因式 $x(1-x)$，变

形为 $x(1-x)[4x(1-x)+1]$。右端改写为 $x\cdot x^{-x}\cdot(1-x)\cdot(1-x)^{x-1}$，即 $\frac{x(1-x)}{x^x(1-x)^{1-x}}$。由于在该区间内 $x(1-x)>0$，原不等式等价于：

$$4x(1-x)+1\leqslant\frac{1}{x^x(1-x)^{1-x}}$$

由于两端均为正实数，对两端取自然对数，不等号方向保持不变：

$$\ln[4x(1-x)+1]\leqslant -x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$$

整理得待证目标函数 $f(x)\leqslant 0$：

$$f(x)=x\ln x+(1-x)\ln(1-x)+\ln[1+4x(1-x)]\leqslant 0$$

考虑到函数关于 $x=1/2$ 的对称性，令 $x=\frac{1+u}{2}$，其中 $u\in(-1,1)$。代入可得：

$$x(1-x)=\frac{1-u^2}{4},\quad 1+4x(1-x)=2-u^2$$

将上述分量代入 $f(x)$ 构造关于 $u$ 的偶函数 $F(u)$：

$$F(u)=\frac{1+u}{2}\ln(1+u)+\frac{1-u}{2}\ln(1-u)-\ln 2+\ln(2-u^2)$$

对 $F(u)$ 求关于 $u$ 的一阶导数：

$$F'(u)=\frac{1}{2}\ln(1+u)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(1-u)-\frac{1}{2}-\frac{2u}{2-u^2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)-\frac{2u}{2-u^2}$$

令辅助函数 $G(u)=2F'(u)=\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)-\frac{4u}{2-u^2}$。对其继续求导：

$$G'(u)=\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}-\frac{4(2-u^2)-4u(-2u)}{(2-u^2)^2}=\frac{2}{1-u^2}-\frac{8+4u^2}{(2-u^2)^2}$$

通分化简分子部分：

$$2(2-u^2)^2-(1-u^2)(8+4u^2)=2(4-4u^2+u^4)-(8-4u^2-4u^4)=6u^4-4u^2=2u^2(3u^2-2)$$

由此得 $G'(u)=\frac{2u^2(3u^2-2)}{(1-u^2)(2-u^2)^2}$。在 $u\in(0,1)$ 范围内，分母始终大于零，其符号由 $3u^2-2$ 决定。当 $u\in(0,\sqrt{2/3})$ 时，$G'(u)<0$，$G(u)$ 单调递减；当 $u\in(\sqrt{2/3},1)$ 时，$G'(u)>0$，$G(u)$ 单调递增。

分析 $G(u)$ 在区间 $[0,1)$ 上的表现：$G(0)=0$，随 $u$ 增大，$G(u)$ 先减小至负值。当 $u\to1^-$ 时，$G(u)\to+\infty$。根据连续函数的零点存在定理，存在唯一的 $u_0\in(\sqrt{2/3},1)$ 使得 $G(u_0)=0$。

相应地，在 $u\in(0,u_0)$ 上，$G(u)<0$ 从而 $F'(u)<0$，$F(u)$ 单调递减；在 $u\in(u_0,1)$ 上，$G(u)>0$ 从而 $F'(u)>0$，$F(u)$ 单调递增。因此 $F(u)$ 在区间端点取得最大值。计算端点值 $F(0)=\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln 1-\ln 2+\ln 2=0$。考察右边界极限，由 $\lim_{t\to0^+}t\ln t=0$，得 $\lim_{u\to1^-}\frac{1-u}{2}\ln(1-u)=0$，则：

$$\lim_{u\to1^-}F(u)=\frac{2}{2}\ln 2+0-\ln 2+\ln(2-1)=0$$

综上所述，在 $u\in(-1,1)$ 内 $F(u)\leqslant 0$ 恒成立，等价于原不等式在 $x\in(0,1)$ 内成立。结合边界点情况，原不等式在 $x\in[0,1]$ 上成立。

### 5.2.2 例题: 虚调子

证明不等式：$4x^2/(x+1)^3+x/(x+1)\le x^{1/(x+1)}$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立

**解 5.2.2.** 令 $s=\frac{x-1}{x+1}$，由于 $x>0$，可得 $s\in(-1,1)$，此变换为一一对应。由此反解出 $x=\frac{1+s}{1-s}$，进而有 $x+1=\frac{2}{1-s}$ 以及 $\frac{1}{x+1}=\frac{1-s}{2}$。将原不等式左边化简并代入以 $s$ 为变量的表达式可得：

$$\frac{x}{x+1}=\frac{1+s}{2},\frac{4x^2}{(x+1)^3}=4\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2\left(\frac{1-s}{2}\right)^3=\frac{1}{2}(1+s)^2(1-s),x^{\frac{1}{x+1}}=\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{1-s}{2}}$$

于是：

$$\frac{4x^2}{(x+1)^3}+\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}\left[(1+s)+(1+s)^2(1-s)\right]=\frac{1}{2}(2+2s-s^2-s^3)=(1+s)\left(1-\frac{s^2}{2}\right)$$

故在 $s\in(-1,1)$ 上，原不等式等价于：

$$(1+s)\left(1-\frac{s^2}{2}\right)\le\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{1-s}{2}}$$

显然当 $s\in(-1,1)$ 时两边均大于 0，同时取对数，做差构造函数 $Q(s)$：

$$Q(s)=\frac{1-s}{2}\ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right)-\ln(1+s)-\ln\left(1-\frac{s^2}{2}\right)$$

于是等价于证明对任意 $s\in(-1,1)$ 均有 $Q(s)\ge 0$。显然 $Q(s)$ 为偶函数。故只需证明 $Q(s)\ge 0$ 在 $s\in[0,1)$ 上成立即可。对 $Q(s)$ 求导：

$$\begin{aligned}Q'(s)&=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right)+\frac{1-s}{2}\left(\frac{1}{1+s}+\frac{1}{1-s}\right)-\frac{1}{1+s}+\frac{s}{1-\frac{s^2}{2}}=\frac{2(2+s^2)}{(2-s^2)^2}-\frac{1}{1-s^2}\\&=\frac{2(2+s^2)(1-s^2)-(2-s^2)^2}{(2-s^2)^2(1-s^2)}=\frac{(4-2s^2-2s^4)-(4-4s^2+s^4)}{(2-s^2)^2(1-s^2)}=\frac{s^2(2-3s^2)}{(2-s^2)^2(1-s^2)}\end{aligned}$$

对于 $s\in(0,1)$，分母 $(2-s^2)^2(1-s^2)>0$ 恒成立，故 $Q''(s)$ 的符号由分子中的 $2-3s^2$ 决定。当 $0<s<\sqrt{\frac{2}{3}}$ 时，$Q''(s)>0$；当 $\sqrt{\frac{2}{3}}<s<1$ 时，$Q''(s)<0$。这表明导函数 $Q'(s)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},1\right)$ 上单调递减。由于 $Q'(0)=0$，且当 $s\to 1^-$ 时：

$$\lim_{s\to 1^-}Q'(s)=\lim_{s\to 1^-}\left(\frac{2s}{2-s^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+s}{1-s}\right)=2-\infty=-\infty<0$$

故存在唯一的 $s_0\in\left(\sqrt{\frac{2}{3}},1\right)$ 使得 $Q'(s_0)=0$。并且当 $0<s<s_0$ 时，$Q'(s)>0$；当 $s_0<s<1$ 时，$Q'(s)<0$。由此可知，函数 $Q(s)$ 在 $[0,s_0]$ 上单调递增，在 $[s_0,1)$ 上单调递减。

进一步考察 $Q(s)$ 在区间端点的值与极限：显然 $Q(0)=\frac{1}{2}\ln 1-\ln 1-\ln 1=0$。当 $s\to 1^-$ 时，令 $t=1-s\to 0^+$，则有：

$$\frac{1-s}{2}\ln\frac{1+s}{1-s}=\frac{t}{2}\ln\frac{2-t}{t}\sim-\frac{1}{2}t\ln t\to 0$$

同时 $-\ln(1+s)-\ln\left(1-\frac{s^2}{2}\right)\to-\ln 2-\ln\frac{1}{2}=0$。因此 $\lim_{s\to1^-}Q(s)=0$。

综上所述，因为 $Q(s)$ 在 $[0,1)$ 上先增后减，且两端点的值（或极限）均为 0，故在整个区间 $[0,1)$ 上恒有 $Q(s)\geq 0$。由偶函数性质推知，在 $s\in(-1,1)$ 上恒有 $Q(s)\geq 0$，等号仅在 $s=0$ 时取得。将 $s=0$ 代回原变量得 $x=1$。

因此，在常规定义域 $x>0$ 内原不等式恒成立，解集为 $(0,+\infty)$，等号仅在 $x=1$ 处取到。若允许 $0^1=0$ 成立，则解集为 $[0,+\infty)$，等号在 $x=0$ 及 $x=1$ 处取到。

5.2.3 例题:

对于一切 $x\geq 0$ 证明

$$\ln(x+1)+\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}}+\frac{1}{2}x^2-2x\geq 0$$

**解 5.2.3.** 设函数 $f(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}}+\frac{1}{2}x^2-2x$。由于对数函数的真数必须严格大于 0，故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$。经代入检验，$f(0)=\ln(1)+0+0-0=0$。

对 $f(x)$ 求导，可得：

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}-x\cdot\frac{x}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}}}{\frac{1}{2}x^2+1}+x-2$$

化简中间的无理项，得一阶导数表达式为：

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}+x-2$$

为判断 $f'(x)$ 的符号，先引入并证明以下引理：对于任意实数 $y\geq 0$，恒有 $(1+y)^{\frac{3}{2}}\leq 1+\frac{3}{2}y+\frac{3}{8}y^2$。证明如下：因 $y\geq 0$，不等式两侧均大于 0，对两侧同时平方，比较大小即可。左式的平方为：$\left((1+y)^{\frac{3}{2}}\right)^2=1+3y+3y^2+y^3$；右式的平方为：$\left(1+\frac{3}{2}y+\frac{3}{8}y^2\right)^2=1+\frac{9}{4}y^2+\frac{9}{64}y^4+3y+\frac{3}{4}y^2+\frac{9}{8}y^3=1+3y+3y^2+\frac{9}{8}y^3+\frac{9}{64}y^4$。两式相减可得：

$$\left(1+\frac{3}{2}y+\frac{3}{8}y^2\right)^2-\left((1+y)^{\frac{3}{2}}\right)^2=\frac{1}{8}y^3+\frac{9}{64}y^4$$

由于 $y\geq 0$，该差值显然恒大于等于 0，故引理成立。

对于任意实数 $x$，均有 $\frac{1}{2}x^2\geq 0$。令 $y=\frac{1}{2}x^2$，代入上述引理可得：

$$\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}\leq 1+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{32}x^4$$

对该不等式两侧取倒数，得：

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\geq\frac{1}{1+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{32}x^4}=\frac{32}{3x^4+24x^2+32}$$

将此下界代回一阶导数 $f'(x)$ 的表达式中，并对前两项通分：

$$f'(x) \geq \frac{1}{x+1} + x - 2 + \frac{32}{3x^4+24x^2+32} = \frac{x^2-x-1}{x+1} + \frac{32}{3x^4+24x^2+32}$$

进一步将右侧通分，公分母为 $(x+1)(3x^4+24x^2+32)$。在定义域 $x > -1$ 内，该分母恒大于 0。记分子为 $N(x)$，展开并合并同类项：

$$N(x) = (x^2-x-1)(3x^4+24x^2+32) + 32(x+1)$$

$$= (3x^6+24x^4+32x^2) - (3x^5+24x^3+32x) - (3x^4+24x^2+32) + 32x + 32$$

$$= 3x^6 - 3x^5 + 21x^4 - 24x^3 + 8x^2$$

提取 $x^2$，得 $N(x) = x^2(3x^4-3x^3+21x^2-24x+8)$。

设 $H(x) = 3x^4 - 3x^3 + 21x^2 - 24x + 8$，对其进行配方：

$$H(x) = 3\left(x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2\right) - \frac{3}{4}x^2 + 21x^2 - 24x + 8$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{81}{4}x^2 - 24x + 8$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{81}{4}\left(x^2 - \frac{32}{27}x\right) + 8$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{81}{4}\left[\left(x - \frac{16}{27}\right)^2 - \frac{256}{729}\right] + 8$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{81}{4}\left(x - \frac{16}{27}\right)^2 - \frac{64}{9} + 8$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{81}{4}\left(x - \frac{16}{27}\right)^2 + \frac{8}{9}$$

由于实数的平方非负，且 $\frac{8}{9} > 0$，因此对于任意实数 $x$，恒有 $H(x) \geq \frac{8}{9} > 0$。

综上所述，当 $x > -1$ 时，分子 $N(x) = x^2H(x) \geq 0$（当且仅当 $x = 0$ 时等号成立），分母恒正。因此 $f'(x) \geq 0$ 恒成立，且 $f'(x)$ 仅在 $x = 0$ 处为 0。这表明原函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上严格单调递增。又因 $f(0) = 0$，故当且仅当 $x \geq 0$ 时，有 $f(x) \geq f(0) = 0$。从而使原不等式成立的解集为 $\{x \mid x \geq 0\}$。解答完毕。

**5.2.4 例题:**

证明函数 $f(x) = \frac{[\ln(x+1)]^x}{x^{\ln x}}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上严格单调递增

**解 5.2.4.** 由于 $f(x)>0$，转化为证明 $g(x)=\ln f(x)$ 单调递增，即证 $g'(x)>0$ 恒成立。对 $f(x)$ 取自然对数得到 $g(x)=x\ln(\ln(x+1))-(\ln x)^2$。对其求导可得：

$$g'(x)=\ln(\ln(x+1))+\frac{x}{(x+1)\ln(x+1)}-\frac{2\ln x}{x}$$

作变量代换，令 $y=\ln(x+1)$。由于 $x>0$，必有 $y>0$ 且 $x=e^y-1$。将 $g'(x)$ 转化为只关于 $y$ 的函数 $P(y)$：

$$P(y)=g'(e^y-1)=\ln y+\frac{1-e^{-y}}{y}-\frac{2\ln(e^y-1)}{e^y-1}$$

要证 $g'(x)>0$，即证对于所有 $y>0$ 均有 $P(y)>0$。

利用双曲正弦函数恒等式 $e^y-1=2e^{y/2}\sinh(y/2)=ye^{y/2}\frac{\sinh(y/2)}{y/2}$，对其两边取自然对数得：

$$\ln(e^y-1)=\ln y+\frac{y}{2}+\ln\left(\frac{\sinh(y/2)}{y/2}\right)$$

引入引理：对于任意 $u>0$，恒有 $\ln\left(\frac{\sinh u}{u}\right)<\frac{u^2}{6}$。证明如下：设 $h(u)=\frac{u^2}{6}-\ln\left(\frac{\sinh u}{u}\right)$，易知 $h(0^+)=0$。考察其导数 $h'(u)=\frac{1}{u}\left(1+\frac{u^2}{3}-u\coth u\right)$。利用 $\coth u$ 的无穷部分分式展开式 $\coth u=\frac{1}{u}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u}{u^2+k^2\pi^2}$，两边同乘 $u$ 得到 $u\coth u=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u^2}{u^2+k^2\pi^2}$。对于所有 $u>0$，恒有 $\frac{2u^2}{u^2+k^2\pi^2}<\frac{2u^2}{k^2\pi^2}$，故 $u\coth u<1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u^2}{k^2\pi^2}=1+\frac{2u^2}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{u^2}{3}$。由此可知 $1+\frac{u^2}{3}-u\coth u>0$，从而 $h'(u)>0$，即 $h(u)>0$ 恒成立，引理得证。

在引理中代入 $u=y/2$，可得不等式 $\ln(e^y-1)<\ln y+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{24}$。将此上界代入 $P(y)$ 的表达式中，由于前置系数 $-\frac{2}{e^y-1}$ 为负，代入上界将构成 $P(y)$ 的严格下界 $B(y)$：

$$P(y)>\ln y+\frac{1-e^{-y}}{y}-\frac{2(\ln y+y/2+y^2/24)}{e^y-1}=\frac{e^y-3}{e^y-1}\ln y+\frac{1-e^{-y}}{y}-\frac{y+y^2/12}{e^y-1}\equiv B(y)$$

为证 $B(y)>0$，注意到 $\frac{e^y-3}{e^y-1}$ 在 $y=\ln 3$ 处变号，可将含 $\ln y$ 的项孤立，化归为研究函数 $Q(y)$：

$$Q(y)=\ln y-\frac{y^2e^y+\frac{1}{12}y^3e^y-(e^y-1)^2}{ye^y(e^y-3)}$$

证明 $B(y)>0$ 等价于：当 $y>\ln 3$ 时，需证 $Q(y)>0$；当 $0<y<\ln 3$ 时，需证 $Q(y)<0$。

对 $Q(y)$ 求导，得到：

$$Q'(y)=\frac{1}{y}-\frac{d}{dy}\left[\frac{y^2e^y+\frac{1}{12}y^3e^y-(e^y-1)^2}{ye^y(e^y-3)}\right]=\frac{Z_1(y)}{y(e^y-3)^2}$$

其中分子核心部分 $Z_1(y)$ 展开为：

$$Z_1(y)=2-2y+3y^2+\frac{1}{2}y^3+(3y+3)e^{-y}-\left(1+y+y^2-\frac{5}{6}y^3-\frac{1}{12}y^4\right)e^y$$

为分析 $Z_1(y)$ 的符号，同乘 $e^y$ 构建函数 $W(y)=e^yZ_1(y)$。由于对于 $y>0$ 恒有 $e^y>0$，$W(y)$ 的符号与 $Z_1(y)$ 及 $Q'(y)$ 的符号完全一致：

$$W(y)=\left(2-2y+3y^2+\frac{1}{2}y^3\right)e^y+3y+3-\left(1+y+y^2-\frac{5}{6}y^3-\frac{1}{12}y^4\right)e^{2y}$$

对 $W(y)$ 进行连续求导以判断其单调性与根的分布。一阶导数：

$$W'(y) = \left(\frac{1}{2}y^3 + \frac{9}{2}y^2 + 4y\right)e^y + 3 - \left(3 + 4y - \frac{1}{2}y^2 - 2y^3 - \frac{1}{6}y^4\right)e^{2y}$$

二阶导数：

$$W''(y) = \left(\frac{1}{2}y^3 + 6y^2 + 13y + 4\right)e^y - \left(10 + 7y - 7y^2 - \frac{14}{3}y^3 - \frac{1}{3}y^4\right)e^{2y}$$

提取指数因子，令 $W_2(y) = W''(y)e^{-y}$：

$$W_2(y) = \frac{1}{2}y^3 + 6y^2 + 13y + 4 - \left(10 + 7y - 7y^2 - \frac{14}{3}y^3 - \frac{1}{3}y^4\right)e^y$$

对 $W_2(y)$ 继续求导，记为 $W_3(y)$：

$$W_2'(y) = \frac{3}{2}y^2 + 12y + 13 - \left(17 - 7y - 21y^2 - 6y^3 - \frac{1}{3}y^4\right)e^y \equiv W_3(y)$$

再对 $W_3(y)$ 求导两次：

$$W_3'(y) = 3y + 12 - \left(10 - 49y - 39y^2 - \frac{22}{3}y^3 - \frac{1}{3}y^4\right)e^y$$

$$W_3''(y) = 3 + \left(39 + 127y + 61y^2 + \frac{26}{3}y^3 + \frac{1}{3}y^4\right)e^y$$

观察 $W_3''(y)$ 可见，由于 $y > 0$，其展开项的所有系数均为正，故 $W_3''(y) > 0$ 恒成立。由此进行逆推分析：由于 $W_3''(y) > 0$，$W_3'(y)$ 严格单调递增。由 $W_3'(0) = 2 > 0$ 可知 $W_3'(y) > 0$ 恒成立。由于 $W_3'(y) > 0$，$W_3(y)$（即 $W_2'(y)$）严格单调递增。已知 $W_2'(0) = -4 < 0$ 且当 $y \to +\infty$ 时趋于正无穷，故 $W_2'(y)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一根 $\alpha$。因此，$W_2(y)$ 在 $(0, \alpha)$ 上单调递减，在 $(\alpha, +\infty)$ 上单调递增。由 $W_2(0) = -6 < 0$ 且趋于正无穷，可知 $W_2(y)$ 存在唯一根 $\beta$。由于 $W''(y) = e^y W_2(y)$，$W''(y)$ 的符号与 $W_2(y)$ 相同，即先负后正。考虑到 $W'(0) = 0$，必有 $W'(y)$ 先减小至负数再递增，穿过 $x$ 轴于唯一根 $\gamma$。由此推知 $W(y)$ 在 $(0, +\infty)$ 上先单调递减后单调递增，存在唯一极小值。

计算端点与特定值：起点 $W(0) = 4 > 0$，$W(\ln 3) \approx -0.052 < 0$，且当 $y \to +\infty$ 时 $W(y) \to +\infty$。根据零点定理，$W(y)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有两个根：$y_1 \in (0, \ln 3)$ 和 $y_2 \in (\ln 3, +\infty)$。因为 $Q'(y)$ 与 $W(y)$ 同号，可知 $Q(y)$ 的单调性分布为：在 $(0, y_1)$ 单调递增，在 $(y_1, \ln 3)$ 单调递减；在 $(\ln 3, y_2)$ 单调递减，在 $(y_2, +\infty)$ 单调递增。结合渐近线行为 $Q(0^+) \to -\infty$ 和 $Q(\ln 3^-) \to -\infty$，可知区间 $(0, \ln 3)$ 上的极大值 $Q(y_1)$ 必定小于 0，故当 $y \in (0, \ln 3)$ 时 $Q(y) < 0$ 恒成立。同理，结合 $Q(\ln 3^+) \to +\infty$ 和 $Q(+\infty) \to +\infty$，可知区间 $(\ln 3, +\infty)$ 上的极小值 $Q(y_2)$ 必定大于 0，故当 $y \in (\ln 3, +\infty)$ 时 $Q(y) > 0$ 恒成立。

综上所述，不等式 $B(y) > 0$ 在 $y \in (0, +\infty)$ 上恒成立。这等价于 $P(y) > 0$，即证明了导数 $g'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立。因此，$f(x) = \frac{[\ln(x+1)]^x}{x^{\ln x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增。证明完毕。

**5.2.5 例题:**

给定 $a>0$。对每个正整数 $n$，定义

$$f_n(x)=(a+n-1)^x+(a+n)^x-(a+n+1)^x.$$

记其零点为 $x_n$（即 $f_n(x_n)=0$）。设数列 $\{x_n\}$ 的前 $n$ 项和为

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}x_j.$$

固定题目中的正整数 $n$，若

$$\begin{cases}S_n+S_{3n}+S_{8n}+S_{12n}-S_{4n}-S_{6n}-S_{9n}-S_{11n}=m,\\ S_{2n}+S_{4n}+S_{7n}+S_{11n}-S_n-S_{5n}-S_{8n}-S_{10n}=s,\\ S_{3n}+S_{5n}+S_{10n}-S_{2n}-S_{7n}-S_{9n}=r,\end{cases}$$

证明：$s^2<mr$。

**解** 5.2.5. 对给定的正整数 $n$ 与常数 $a>0$，令 $b=a+n>1$。方程 $f_n(x)=0$ 等价于 $(b-1)^x+b^x=(b+1)^x$。将其两边同除以 $(b+1)^x$，得到 $(\frac{b-1}{b+1})^x+(\frac{b}{b+1})^x=1$。构造函数 $g(x)=(\frac{b-1}{b+1})^x+(\frac{b}{b+1})^x$。因为底数 $\frac{b-1}{b+1},\frac{b}{b+1}\in(0,1)$，其导数 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上严格递减。结合 $g(0)=2>1$ 及 $\lim_{x\to\infty}g(x)=0<1$，可知方程 $g(x)=1$ 存在唯一的正实数解，即 $f_n(x)$ 的零点 $x_n$ 存在且唯一。

定义序列的分块和 $A_k=S_{kn}-S_{(k-1)n}=\sum_{j=(k-1)n+1}^{kn}x_j$（$k=1,2,\ldots,12$）。由定义有 $S_{kn}=\sum_{i=1}^{k}A_i$。将题设中 $m,s,r$ 的关系式用 $A_k$ 展开并作代数恒等变形，可得：

$$m=A_{12}-A_2-A_3-2A_4-A_5-A_6-A_9,$$

$$s=A_2-A_5-A_8+A_{11},$$

$$r=A_3-A_6-A_7+A_{10}.$$

进一步定义序列 $\{A_k\}$ 的二阶差分 $\mu_k=-(A_{k+2}-2A_{k+1}+A_k)$。由离散连续两次求和公式，可得展开式 $A_k=A_1+(k-1)(A_2-A_1)-\sum_{j=1}^{k-2}(k-1-j)\mu_j$（对于 $k\geq 2$）。将此关系代入 $s$ 与 $r$ 的表达式中化简，得到：

$$-s=\sum_{k=1}^{10}S_k\mu_k,\quad -r=\sum_{k=1}^{10}R_k\mu_k,$$

其中相应的常数系数序列为 $(S_k)_{k=1}^{10}=(0,1,2,3,3,3,3,2,1,0)$，$(R_k)_{k=1}^{10}=(0,0,1,2,3,3,2,1,0,0)$。同理，对 $m$ 展开并合并同类项，可得：

$$-m=\sum_{k=1}^{10}M_k\mu_k+6A_1+15(A_{12}-A_{11}),$$

其中 $(M_k)_{k=1}^{10} = (6, 11, 15, 17, 18, 18, 18, 18, 17, 16)$。由于方程的根函数随参数单调递增，故序列 $\{x_j\}$ 递增，从而分块和序列 $\{A_k\}$ 单调递增，保证了仿射项 $6A_1 + 15(A_{12} - A_{11}) \geq 0$。由此得出不等式 $-m \geq \sum_{k=1}^{10} M_k\mu_k$。令 $M = \sum_{k=1}^{10} M_k\mu_k$，$S = -s$，$R = -r$。若能证明 $S^2 < MR$ 且 $R > 0$，结合 $-m \geq M$ 便可推导出 $s^2 < mr$。

为了考察 $\mu_k$ 的性质，将根扩展为定义在 $t > 1$ 上的连续变量函数 $X(t)$，其满足 $(t-1)^{X(t)} + t^{X(t)} = (t+1)^{X(t)}$。由于 $X(t)$ 满足 Bernstein 函数的性质，根据 Lévy-Khintchine 表示定理，存在常数 $c_0, c_1 \geq 0$ 及 $(0, \infty)$ 上的正测度 $\Pi$ 使得：

$$X(x) = c_0 + c_1 x + \int_0^\infty (1 - e^{-xs})d\Pi(s).$$

对于固定步长 $h > 0$ 与起点 $b > 0$，抽样令 $a_k = X(b + kh)$。计算其二阶差分，并利用差分与积分的交换性，得到：

$$-\Delta^2 a_k = \int_0^\infty e^{-(b+kh)s}(1 - e^{-hs})^2 d\Pi(s).$$

作积分变量代换 $t = e^{-hs} \in (0, 1)$，将测度推前至 $[0, 1]$，可知 $-\Delta^2 a_k$ 构成 Hausdorff 矩序列。应用到本问题中，固定分块长度 $n$，对每个块内偏移 $j = 1, \ldots, n$，定义 $a_k^{(j)} = X(a + j + (k-1)n)$。由前述结论，存在 $[0, 1]$ 上的正测度 $\nu_j$ 使得 $-\Delta^2 a_k^{(j)} = \int_0^1 t^{k-1} d\nu_j(t)$。因 $A_k = \sum_{j=1}^n a_k^{(j)}$，令总测度 $\nu = \sum_{j=1}^n \nu_j$，由差分算子的线性性可得：

$$\mu_k = -\Delta^2 A_k = \int_0^1 t^{k-1} d\nu(t) \quad (k \geq 1).$$

基于该积分表示，可将 $M, S, R$ 写为关于测度 $\nu$ 的积分式：

$$M = \int_0^1 M(t)d\nu(t), \quad S = \int_0^1 S(t)d\nu(t), \quad R = \int_0^1 R(t)d\nu(t),$$

其中被积函数对应的多项式分别为：

$$M(t) = 6 + 11t + 15t^2 + 17t^3 + 18t^4 + 18t^5 + 18t^6 + 18t^7 + 17t^8 + 16t^9,$$

$$S(t) = t(t+1)(t^2 - t + 1)(t^2 + t + 1)^2,$$

$$R(t) = t^2(t+1)(t^2+1)(t^2+t+1).$$

接下来分析这些多项式的点态正定性。设 $D(t) = M(t)R(t) - S(t)^2$，经代数分解化简得：

$$D(t) = t^2(t+1)(t^2+t+1)P(t),$$

其中 $P(t) = 15t^{11} + 15t^{10} + 30t^9 + 30t^8 + 29t^7 + 28t^6 + 27t^5 + 26t^4 + 23t^3 + 17t^2 + 9t + 5$。当 $t \in (0, 1)$ 时，由于 $P(t)$ 的各项系数均为正，故 $P(t) > 0$，且 $t^2(t+1)(t^2+t+1) > 0$ 显然成立。因此对于任意 $t \in (0, 1)$，恒有 $M(t)R(t) - S(t)^2 > 0$。

上述严格不等式说明，对于每个 $t\in(0,1)$，矩阵 $\begin{pmatrix} M(t) & S(t) \\ S(t) & R(t) \end{pmatrix}$ 严格正定。据此可构造向量函数：

$$u(t)=(\sqrt{M(t)},0),\quad v(t)=\left(\frac{S(t)}{\sqrt{M(t)}},\sqrt{R(t)-\frac{S(t)^2}{M(t)}}\right),$$

其满足 $|u(t)|^2=M(t)$，$|v(t)|^2=R(t)$，且 $u(t)\cdot v(t)=S(t)$。由积分形式的 Cauchy-Schwarz 不等式，有：

$$S^2=\left(\int_0^1 u(t)\cdot v(t)d\nu(t)\right)^2\le\left(\int_0^1|u(t)|^2d\nu(t)\right)\left(\int_0^1|v(t)|^2d\nu(t)\right)=MR.$$

该不等式等号成立的条件是 $u(t)$ 与 $v(t)$ 在 $\nu$ 测度下几乎处处共线，即要求 $M(t)R(t)-S(t)^2=0$ 几乎处处成立。但如前所证，在积分区域 $(0,1)$ 上 $M(t)R(t)-S(t)^2>0$ 严格成立，故等号不可取，从而 $S^2<MR$。代回变量 $M\le -m$、$S=-s$、$R=-r$，最终得到 $s^2<mr$。证明完毕。

**5.2.6 例题:**

已知函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x^a}{a}}+\sqrt{\frac{a^x}{x}}-2$ 其中 $a>0, x>0.$
(I) 当 $a=1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(II) 证明: $f(x)\ge 0$

**解 5.2.6.** 当 $a=1$ 时, 函数化简为 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-2$. 对其求导可得:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}=\frac{x-1}{2\sqrt{x^3}}.$$

易知当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

对于 $f(x)\ge 0$ 的证明, 首先利用基本不等式对原函数进行放缩, 有：

$$f(x)\ge 2\sqrt{\sqrt{\frac{x^a}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a^x}{x}}}-2=2\sqrt[4]{x^{a-1}a^{x-1}}-2.$$

当 $a>1$ 且 $x>1$, 或 $0<a<1$ 且 $0<x<1$ 时, 均有 $x^{a-1}a^{x-1}>1$, 此时 $f(x)>0$ 显然成立. 由 $a=1$ 时已证的单调性可知 $f(x)\ge f(1)=0$. 结合表达式关于 $a$ 和 $x$ 的对称性, 后续只需证明当 $0<a<1<x$ 时的情形.

为便于处理指数形式, 考虑通过换元分离变量. 令 $x=p^2, a=q^2$, 其中 $p>1>q>0$, 则原不等式转化为证明：

$$\frac{p^{q^2}}{q}+\frac{q^{p^2}}{p}\ge 2$$

首先对 $p^{q^2}$ 进行放缩. 构造不等式 $p^{q^2}\ge 1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right)$, 两边取对数, 即证 $q^2\ln p\ge\ln\left[1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right)\right]$.

设 $g(p)=q^2\ln p-\ln\left[1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right)\right]$, 对其求导可得：

$$g'(p)=\frac{q^2}{p}-\frac{q\frac{(p+q-pq)-p(1-q)}{(p+q-pq)^2}}{1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right)}=\frac{q^2}{p}-\frac{q^2}{(p+q-pq)^2+(p+q-pq)(pq^2-q^2)}$$

$$=\frac{q^2(1-q)(p-1)[q^2(p-1)+p(1-q)]}{p(p+q-pq)(pq^2-q^2-pq+p+q)}.$$

由于 $p>1>q>0$, 易知 $1-q>0$ 且 $p-1>0$, 导函数表达式中各项因式均大于零, 故在 $(1,+\infty)$ 上恒有 $g'(p)>0$. 因此 $g(p)>g(1)=0$, 上述关于 $p^{q^2}$ 的放缩不等式成立.

同理, 对 $q^{p^2}$ 进行放缩, 验证 $q^{p^2}\geq 1+p\left(\frac{q}{p+q-pq}-1\right)$ 是否成立. 因不等式左侧恒正, 仅需考虑右侧大于零的情形, 即 $1+p\left(\frac{q}{p+q-pq}-1\right)>0$, 解得 $\frac{p^2-p}{p^2-p+1}<q<\frac{p}{p-1}$. 设 $h(q)=p^2\ln q-\ln\left[1+p\left(\frac{q}{p+q-pq}-1\right)\right]$, 求导得：

$$h'(q)=\frac{p^2(p-1)(1-q)[p^2(q-1)+q(1-p)]}{q(p+q-pq)(p^2q-p^2-pq+p+q)}.$$

由 $p>1>q>\frac{p^2-p}{p^2-p+1}$ 判定各因式符号, 可知在该区间内恒有 $h'(q)<0$. 从而 $h(q)>h(1)=0$, 该不等式亦成立.

综合上述两项放缩结果, 可得：

$$\frac{p^{q^2}}{q}+\frac{q^{p^2}}{p}-2\geq\frac{1}{q}\left[1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right)\right]+\frac{1}{p}\left[1+p\left(\frac{q}{p+q-pq}-1\right)\right]-2$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{p+q}{p+q-pq}-4=\frac{p+q}{pq}+\frac{p+q}{p+q-pq}-4$$

$$=\frac{(p+q)(p+q-pq)+(p+q)pq-4pq(p+q-pq)}{pq(p+q-pq)}$$

$$=\frac{p^2+q^2+4p^2q^2+2pq-4p^2q-4pq^2}{pq(p+q-pq)}=\frac{(p+q-2pq)^2}{pq(p+q-pq)}\geq 0.$$

至此, 原不等式得证.

此外, 本题也可通过琴生不等式进行证明. 当 $a\neq 1$ 时, 原不等式等价于证明：

$$\frac{x}{x+a}x^{\frac{a-1}{2}}+\frac{a}{x+a}a^{\frac{x-1}{2}}\geq\frac{2\sqrt{xa}}{x+a}.$$

由琴生不等式可得：

$$\frac{x}{x+a}x^{\frac{a-1}{2}}+\frac{a}{x+a}a^{\frac{x-1}{2}}\geq e^{\frac{x(a-1)\ln x+a(x-1)\ln a}{2(x+a)}},$$

因此只需证明 $\frac{x(a-1)\ln x+a(x-1)\ln a}{2(x+a)}\geq\ln\frac{2\sqrt{xa}}{x+a}$. 由对称性不妨设 $t=\frac{a}{x}\geq 1$, 则上式等价于：

$$(x-1)t\ln(tx)+(tx-1)\ln x+2(t+1)\ln\frac{t+1}{2\sqrt{t}}\geq 0.$$

记左侧函数为 $G(x)$, 则 $G'(x)=t\ln t+2t+2t\ln x-\frac{t+1}{x}$. 易知 $G'(x)$ 单调递增, 且 $G'(1)=t\ln t+t-1\geq 0$, $G'\left(\frac{1}{t}\right)=t-t^2-t\ln t\leq 0$. 故存在唯一的 $x_0\in\left[\frac{1}{t},1\right]$ 使 $G'(x_0)=0$. 从而有:

$$G(x)\geq G(x_0)=t+1-2tx_0-t\ln t+2(t+1)\ln\frac{t+1}{2\sqrt{tx_0}}.$$

由 $G'(x_0)=0$ 结合对数不等式放缩有 $2t\left(1+\ln(\sqrt{t}x_0)-\frac{t+1}{2tx_0}\right)\geq 2t\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}x_0}-\frac{t+1}{2tx_0}\right)$, 可推得 $4tx_0\leq t+2\sqrt{t+1}$. 将其代入 $G(x_0)$ 的表达式中放缩得:

$$G(x_0)\geq\frac{t+1-2\sqrt{t}}{2}-t\ln t+2(t+1)\ln\frac{t+1}{\sqrt{t}+1}.$$

为书写简便，将 $\sqrt{t}$ 记为 $u$ (其中 $u\geq 1$), 构造函数 $H(u)=\frac{u^2+1-2u}{2}-2u^2\ln u+2(u^2+1)\ln\frac{u^2+1}{u+1}$, 现只需证当 $u\geq 1$ 时 $H(u)\geq 0$. 求导得 $H'(u)=4u\left[\frac{u^2+2u-3}{4u(u+1)}+\ln\frac{u^2+1}{u^2+u}\right]$. 记 $\varphi(u)=\frac{u^2+2u-3}{4u(u+1)}+\ln\frac{u^2+1}{u^2+u}$, 则:

$$\varphi'(u)=\frac{(u-1)^2(3u^2+8u+3)}{4u^2(u^2+1)(u+1)^2}\geq 0.$$

因此 $\varphi(u)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增, $\varphi(u)\geq\varphi(1)=0$, 进而 $H'(u)\geq 0$. 故 $H(u)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增, $H(u)\geq H(1)=0$, 原不等式得证.

（注：该不等式可进一步推广加强为：对任意的 $x>0,y>0$, 均有 $\sqrt{\frac{x^y}{y}}\geq\frac{x-1}{x+1}-\frac{y-1}{y+1}+1$.）

**5.2.7 例题:**

设函数 $f(x)=e^{ax}+e^{bx}-x$，且 $a>0$，$b>0$

(1) 证明：$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调

(2) 若 $f(x)$ 有且仅有一个零点 $x_0$.

(i) 证明：$e+1<x_0\leqslant 2e$ (ii) 当 $a=(e+2)b$ 时，求 $x_0$.

**解 5.2.7.** （1）已知函数 $f(x)=e^{ax}+e^{bx}-x$，对其求导得 $f'(x)=ae^{ax}+be^{bx}-1$，再次求导得 $f''(x)=a^2e^{ax}+b^2e^{bx}$。因为 $a>0$ 且 $b>0$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格单调递增。又因 $\lim_{x\to-\infty}f'(x)=-1<0$，$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty>0$，根据零点存在定理，必存在唯一的实数 $x_1$ 使得 $f'(x_1)=0$。当 $x<x_1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>x_1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。因此 $f(x)$ 存在单调递减区间和单调递增区间，在 $\mathbf{R}$ 上不单调。

（2）（i）由（1）可知，$f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得全局最小值。由于 $f(x)$ 有且仅有一个零点 $x_0$，该零点必为函数的最小值点，即 $x_0=x_1$。于是有 $f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)=0$，即 $e^{ax_0}+e^{bx_0}=x_0$ 且 $ae^{ax_0}+be^{bx_0}=1$。令 $u=ax_0$，$v=bx_0$。由 $x_0=e^{ax_0}+e^{bx_0}>0$ 及 $a,b>0$ 可知 $u,v>0$。上述方程组可重写为 $e^u+e^v=x_0$ 与 $ue^u+ve^v=x_0$，消去 $x_0$ 后得到核心关系式 $(u-1)e^u+(v-1)e^v=0$。构造函数 $h(t)=(t-1)e^t\ (t>0)$，因 $h'(t)=te^t>0$，故 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增，且 $h(1)=0$。由 $h(u)+h(v)=0$，我们不妨设 $v\leqslant u$，必有 $h(v)\leqslant 0\leqslant h(u)$，从而推知 $0<v\leqslant 1\leqslant u$（当且仅当 $u=v=1$ 时取等号）。由于 $u\geqslant 1$ 且 $v>0$，故 $x_0=e^u+e^v>e^1+e^0=e+1$。另一方面，将 $x_0$ 视为关于 $v$ 的函数 $S(v)=e^u+e^v\ (0<v\leqslant 1)$。对 $(u-1)e^u+(v-1)e^v=0$ 两边关于 $v$ 求导，

得 $ue^u \cdot u' + ve^v = 0$，即 $u' = -\frac{ve^v}{ue^u}$。从而 $S'(v) = e^u \cdot u' + e^v = e^v(1 - \frac{v}{u})$。因 $0 < v \leqslant 1 \leqslant u$，有 $\frac{v}{u} \leqslant 1$，即 $S'(v) \geqslant 0$，这说明 $S(v)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。当 $v = 1$ 时（此时 $u = 1$）取得最大值，故 $x_0 \leqslant S(1) = 2e$。综上所述，$e + 1 < x_0 \leqslant 2e$ 获证。

（ii）当 $a = (e+2)b$ 时，代入 $u = ax_0, v = bx_0$ 得到 $u = (e+2)v$。将其代入 $(u-1)e^u+(v-1)e^v = 0$ 中，方程两边同除以 $e^v$，化简得到 $((e+2)v-1)e^{(e+1)v}+v-1 = 0$。令 $k(v) = ((e+2)v-1)e^{(e+1)v}+v-1\ (v > 0)$，求导得 $k'(v) = e^{(e+1)v}[(e + 1)(e + 2)v + 1] + 1$。显然当 $v > 0$ 时 $k'(v) > 0$ 恒成立，说明 $k(v)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增，若存在零点则必定唯一。观察可知 $k\left(\frac{1}{e+1}\right) = \left(\frac{e+2}{e+1} - 1\right) e^1 + \frac{1}{e+1} - 1 = \frac{e}{e+1} - \frac{e}{e+1} = 0$，故 $v = \frac{1}{e+1}$ 为该方程的唯一解，此时 $u = (e+2)v = \frac{e+2}{e+1}$。最后代回 $x_0$ 的表达式，解得 $x_0 = e^u + e^v = e^{\frac{e+2}{e+1}} + e^{\frac{1}{e+1}} = e^{\frac{1}{e+1}}(e + 1)$。

**5.2.8 例题: 来自“港”**

若 $t>0$，证明:

$$\mathrm{e}^{\frac{t+1+\ln t}{(t+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{t\ln t-t-1}{t+1}}x}+\mathrm{e}^{\frac{t+1-t\ln t}{(t+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{t\ln t-t-1}{t+1}}x}-x\geqslant 0$$

**解** 5.2.8. 证明：当 $t=1$ 时等号显然成立。下设 $t>0$ 且 $t\neq 1$。引入 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}, x_2=\frac{t\ln t}{t-1}$，以及

$$u=\frac{\ln t}{t+1}=\frac{x_1(x_2-x_1)}{x_1+x_2},\quad v=\frac{t\ln t}{t+1}=\frac{x_2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$$

由此可得 $u+v=\frac{(t+1)\ln t}{t+1}=\ln t$，且 $\frac{v}{u}=t$。考察原不等式的指数部分，有 $\frac{t\ln t-t-1}{t+1}=\frac{t\ln t}{t+1}-1=v-1$。考察第一项与第二项的系数，注意到 $\frac{1}{t+1}=\frac{x_1}{x_1+x_2}$，则：

$$\frac{t+1+\ln t}{(t+1)^2}=\frac{1}{t+1}\left(1+\frac{\ln t}{t+1}\right)=\frac{x_1}{x_1+x_2}(1+u)$$

$$\frac{t+1-t\ln t}{(t+1)^2}=\frac{1}{t+1}\left(1-\frac{t\ln t}{t+1}\right)=\frac{x_1}{x_1+x_2}(1-v)$$

将上述关系代入原不等式 $\frac{t+1+\ln t}{(t+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{t\ln t-t-1}{t+1}x}+\frac{t+1-t\ln t}{(t+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{t\ln t-t-1}{t+1}x}-x\geqslant 0$，整理为关于 $x_1,x_2$ 的形式：

$$\mathrm{e}^{\frac{x_1}{x_1+x_2}(1+u)\mathrm{e}^{v-1}x}+\mathrm{e}^{\frac{x_1}{x_1+x_2}(1-v)\mathrm{e}^{v-1}x}-x\geqslant 0$$

观察到 $Y=\frac{x_1}{x_1+x_2}\mathrm{e}^{v-1}x$ 为多次出现的结构，解得

$$x=\frac{x_1+x_2}{x_1}\mathrm{e}^{1-v}Y=(t+1)\mathrm{e}^{1-v}Y=(\mathrm{e}^{u+v}+1)\mathrm{e}^{1-v}Y=(\mathrm{e}^{1+u}+\mathrm{e}^{1-v})Y$$

此时原不等式等价于：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{(1+u)Y}+\mathrm{e}^{(1-v)Y}-(\mathrm{e}^{1+u}+\mathrm{e}^{1-v})Y\geqslant 0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{(1+u)Y}+\mathrm{e}^{(1-v)Y}\geqslant(\mathrm{e}^{1+u}+\mathrm{e}^{1-v})Y\\
\text{考虑}&\mathrm{e}^{(1+u)Y}+\mathrm{e}^{(1-v)Y}\geqslant \mathrm{e}^{1+u}+\mathrm{e}^{1-v}+((1+u)\mathrm{e}^{1+u}+(1-v)\mathrm{e}^{1-v})(Y-1),\text{切线放缩}\\
\Leftrightarrow&\mathrm{e}^{(1+u)Y}+\mathrm{e}^{(1-v)Y}\geqslant \mathrm{e}^{1+u}+\mathrm{e}^{1-v}+(\mathrm{e}^{1+u}+\mathrm{e}^{1-v}+\mathrm{e}(u\mathrm{e}^{u}-v\mathrm{e}^{-v}))(Y-1)\\
\Leftrightarrow&\mathrm{e}^{(1+u)Y}+\mathrm{e}^{(1-v)Y}\geqslant \mathrm{e}^{1+u}+\mathrm{e}^{1-v}+(\mathrm{e}^{1+u}+\mathrm{e}^{1-v})(Y-1)\\
\Leftrightarrow&\mathrm{e}^{(1+u)Y}+\mathrm{e}^{(1-v)Y}\geqslant(\mathrm{e}^{1+u}+\mathrm{e}^{1-v})Y
\end{aligned}$$

于是得证。注：切线放缩是根据取等条件 $Y=1$，先注意到取等条件再构造放缩。

**5.2.9 例题: 虚调子**

对于所有的 $x>0$，均有

$$e^{-x}+e^{-\frac{1}{x}}\leq 1-\frac{3\left(1-\frac{2}{e}\right)}{1+x+\frac{1}{x}}$$

**解 5.2.9.** 观察原不等式，若将变量 $x$ 替换为 $\frac{1}{x}$，不等式左侧 $e^{-\frac{1}{x}}+e^{-x}$ 与右侧分母 $1+\frac{1}{x}+x$ 均保持不变。因此，该不等式在变换 $x\leftrightarrow\frac{1}{x}$ 下具有对称性。对于 $x\in(0,1)$ 的情形，可通过代换转化为 $x>1$ 的情形。故只需证明 $x\geq 1$ 时的情形即可，$(0,1)$ 区间可由对称性自然推导得出。

记常数 $c=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$。当 $x\geq 1$ 时，不等式右侧分母通分为 $1+x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x+1}{x}$，且显然有 $\frac{x^2+x+1}{x}>0$。在不等式两边同乘 $x^2+x+1$，得到等价不等式：

$$(x^2+x+1)\left(e^{-x}+e^{-\frac{1}{x}}\right)\leq x^2+x+1-cx$$

移项后，构造辅助函数 $P(x)$：

$$P(x)=(x^2+x+1)\left(1-e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}\right)-cx$$

原命题即转化为证明：对于所有的 $x\geq 1$，$P(x)\geq 0$ 恒成立。

检验端点 $x=1$ 的值：

$$P(1)=3(1-2e^{-1})-c=3\left(1-\frac{2}{e}\right)-3\left(1-\frac{2}{e}\right)=0$$

由于 $P(1)=0$，为了证明 $P(x)\geq 0$，只需证明 $P(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格单调递增，即只需证明其一阶导数 $P'(x)>0$ 对一切 $x>1$ 恒成立。

应用乘积求导法则，对 $P(x)$ 求导：

$$P'(x)=(2x+1)\left(1-e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}\right)+(x^2+x+1)\left(e^{-x}-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right)-c$$

将其展开并按常数项、含 $e^{-x}$ 的项、含 $e^{-1/x}$ 的项分别合并同类项：常数项为 $2x+1-c$；含 $e^{-x}$ 的项为 $-(2x+1)e^{-x}+(x^2+x+1)e^{-x}=(x^2-x)e^{-x}$；含 $e^{-1/x}$ 的项为 $-(2x+1)e^{-\frac{1}{x}}-\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=-\left(2x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$。组合后可得导数表达式：

$$P'(x)=2x+1-c+(x^2-x)e^{-x}-\left(2x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

为便于判断符号，令 $s=\frac{1}{x}$。由 $x>1$ 知 $s\in(0,1)$。代入 $P'(x)$ 并提取公因子 $\frac{1}{s}$：

$$P'\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}\left[2+s-cs+\left(\frac{1}{s}-1\right)e^{-\frac{1}{s}}-(2+2s+s^2+s^3)e^{-s}\right]$$

将 $c=3-\frac{6}{e}$ 代入前三项化简：

$$2+s-cs=2+s-\left(3-\frac{6}{e}\right)s=2(1-s)+\frac{6s}{e}$$

从而导数表达式化为：

$$P'\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}\left[2(1-s)+\frac{6s}{e}+\frac{1-s}{s}e^{-\frac{1}{s}}-(2+2s+s^2+s^3)e^{-s}\right]$$

观察方括号内的 $\frac{1-s}{s}e^{-\frac{1}{s}}$ 一项。由于 $s\in(0,1)$，有 $1-s>0$、$s>0$ 且 $e^{-\frac{1}{s}}>0$，故 $\frac{1-s}{s}e^{-\frac{1}{s}}>0$ 恒成立。为了证明 $P'\left(\frac{1}{s}\right)>0$，只需证明去掉该正项后的剩余部分大于等于 0。为此，构造辅助函数 $f(s)$：

$$f(s)=2(1-s)+\frac{6s}{e}-(2+2s+s^2+s^3)e^{-s}$$

下证对于 $s\in(0,1)$，$f(s)>0$。

先计算 $f(s)$ 在闭区间 $[0,1]$ 两端点的值：

$$f(0)=2-2=0$$

$$f(1)=\frac{6}{e}-(2+2+1+1)e^{-1}=0$$

对 $f(s)$ 求一阶导数：

$$f'(s)=-2+\frac{6}{e}-\left[(2+2s+3s^2)e^{-s}-(2+2s+s^2+s^3)e^{-s}\right]=-2+\frac{6}{e}+(s^3-2s^2)e^{-s}$$

继续对 $f'(s)$ 求二阶导数：

$$f''(s)=(3s^2-4s)e^{-s}-(s^3-2s^2)e^{-s}=e^{-s}(-s^3+5s^2-4s)$$

提取因式 $-s$ 进行分解：

$$f''(s)=-s(s^2-5s+4)e^{-s}=-s(s-1)(s-4)e^{-s}$$

对于探讨的开区间 $s\in(0,1)$，有 $-s<0$、$s-1<0$、$s-4<0$。三个负数相乘结果为负，加上 $e^{-s}>0$，得出在 $(0,1)$ 内 $f''(s)<0$ 恒成立。

由 $f''(s)<0$ 可知，$f'(s)$ 在区间 $[0,1]$ 上严格单调递减。考察 $f'(s)$ 在边界处的值：

$$f'(0)=-2+\frac{6}{e}>0$$

$$f'(1)=-2+\frac{6}{e}-e^{-1}=-2+\frac{5}{e}<0$$

由于 $f'(s)$ 严格单调递减，且由正变负，根据零点定理，在 $(0,1)$ 内部存在唯一的点 $s_0$，使得 $f'(s_0)=0$。由此可知，在 $[0,s_0]$ 上 $f'(s)>0$，函数 $f(s)$ 严格单调递增；在 $[s_0,1]$ 上 $f'(s)<0$，函数 $f(s)$ 严格单调递减。结合 $f(s)$ 全程先增后减的形态且两端 $f(0)=f(1)=0$，可知对于整个区间 $(0,1)$ 内部，严格有 $f(s)>0$ 成立。

回顾前述逻辑链，由 $f(s)>0$ 及 $\frac{1-s}{s}e^{-\frac{1}{s}}>0$ 恒成立，可推得 $P'\left(\frac{1}{s}\right)>0$ 对 $s\in(0,1)$ 严格成立。还原变量 $x=\frac{1}{s}$，得知导函数 $P'(x)>0$ 对所有 $x>1$ 恒成立，故原函数 $P(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格单调递增。结合 $P(1)=0$，必然有对于所有的 $x\geq 1$ 均有 $P(x)\geq 0$，等号当且仅当 $x=1$ 时取得。根据对称性，上述结论自然延拓至 $0<x<1$ 的情形。

综上所述，不等式 $e^{-x}+e^{-\frac{1}{x}}\leq 1-\frac{3\left(1-\frac{2}{e}\right)}{1+x+\frac{1}{x}}$ 对于所有的 $x>0$ 均成立，等号当且仅当 $x=1$ 时取得，证明完毕。

**5.2.10 例题:**

$$e^x \geqslant \frac{3\sqrt{e}}{4}x + \frac{\sqrt{5e}}{4}\sqrt{x^2+1}$$

**解 5.2.10.** 原命题等价于证明：

$$1 \geqslant e^{\frac{1}{2}-x}\left(\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{5}}{4}\sqrt{x^2+1}\right)$$

考虑到不等式中含有 $\sqrt{e}$（即 $e^{\frac{1}{2}}$），我们猜测等号可能在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得。为了证明该结论，构造辅助函数：

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}-x}\left(\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{5}}{4}\sqrt{x^2+1}\right)$$

我们的目标转化为证明：对于任意实数 $x$，恒有 $f(x) \leqslant 1$。对 $f(x)$ 求导，应用乘法法则可得：

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{\frac{1}{2}-x}\left(\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{5}}{4}\sqrt{x^2+1}\right) + e^{\frac{1}{2}-x}\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}-x}}{4\sqrt{x^2+1}}\left(-3x\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}(x^2+1) + 3\sqrt{x^2+1} + \sqrt{5}x\right) \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}-x}}{4\sqrt{x^2+1}}\left[\sqrt{x^2+1}(3-3x) - \sqrt{5}(x^2-x+1)\right] \end{aligned}$$

令 $f'(x)=0$，只需方括号内部分为零，即：$\sqrt{x^2+1}(3-3x) = \sqrt{5}(x^2-x+1)$，注意到等式右侧 $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 恒成立，这就要求等式左侧必须满足 $3-3x>0$，从而得到该方程成立的隐含条件 $x<1$。在满足 $x<1$ 的前提下，将上述等式两边平方以消除根号：

$$(x^2+1)(3-3x)^2 = 5(x^2-x+1)^2 \Rightarrow 5(x^2-x+1)^2 - 9(1-x)^2(x^2+1) = 0$$

展开整理后，可以得到一个关于 $x$ 的一元四次方程：

$$4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = (2x-1)(x-2)(2x^2+x+2) = 0$$

解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=2$（二次因式 $2x^2+x+2=0$ 无实根）。结合前面的隐含条件 $x<1$，平方产生的增根 $x=2$ 必须舍去，故导函数 $f'(x)$ 存在唯一的零点 $x=\frac{1}{2}$。接下来分析 $f'(x)$ 的符号：

- 当 $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；
- 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减。

因此，$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得全局最大值：

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^0\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{1}{4}+1}\right) = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$$

即对任意实数 $x$，都有 $f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，也就是：

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}-x}\left(\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{5}}{4}\sqrt{x^2+1}\right)\leqslant 1\Leftrightarrow \mathrm{e}^x\geqslant \frac{3\sqrt{\mathrm{e}}}{4}x+\frac{\sqrt{5\mathrm{e}}}{4}\sqrt{x^2+1}$$

证毕。

**5.2.11 例题:（2019 年浙江导数）**

对任意 $x\geq\dfrac{1}{e^2}$ 均有 $f(x)=a\ln x+\sqrt{1+x}-\dfrac{\sqrt{x}}{2a}\leq 0$，求 $a$ 的取值范围.

**解** 5.2.11. 必要性探路，什么极点效应，内点效应啥的，都是一个函数与 $x$ 轴相切的不同情形，所以我们可以直接研究 $f(x)$ 与 $x$ 轴的相切问题，从而规避使用端点效应带来的潜在风险。

$$\begin{cases} f(x)=a\ln x+\sqrt{1+x}-\dfrac{\sqrt{x}}{2a}=0\\ f'(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{4a\sqrt{x}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a\ln x+\sqrt{1+x}-\dfrac{\sqrt{x}}{2a}=0\\ \dfrac{1}{x_0}a^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x_0+1}}a-\dfrac{1}{4\sqrt{x_0}}=0\end{cases}$$

我们虽然难以直接解出第一个方程，但是却可以从第二个方程解出 $a$，利用求根公式得到：

$$a=\sqrt{\left(\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}\right)^2+\frac{\sqrt{x_0}}{4}}-\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}>0$$

代入第一个方程得到一个很浸泡的式子：

$$\ln x_0=\frac{x_0}{2\left(\sqrt{\left(\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}\right)^2+\frac{\sqrt{x_0}}{4}}-\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}\right)^2}-\frac{\sqrt{1+x_0}}{\left(\sqrt{\left(\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}\right)^2+\frac{\sqrt{x_0}}{4}}-\frac{x_0}{4\sqrt{x_0+1}}\right)}$$

显然这里只能取 $x=1$ 得到 $a\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$，这样就转化为证明充分性:

$$f(x)\leq 0\Rightarrow -2\ln x-\frac{2\sqrt{x+1}}{a}+\frac{\sqrt{x}}{a^2}\geq 0$$

直接上求根公式好了，懒得讨论了：

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a}\geq\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}}\Rightarrow 2\sqrt{2}\geq\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}}$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{2}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2\geq 1+\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\ln x\leq 4\sqrt{x}-2\sqrt{2}\sqrt{x+1}$$

换元 $t=x^2,t\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$，转化为证明 $\ln t\leq 2t-\sqrt{2}\sqrt{t^2+1}$，并利用飘带放缩：即 $\forall x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right]$

$$g(x)=2x-\sqrt{2x^2+2}-\ln x=\frac{\sqrt{2}(x-1)(x+1)}{\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2}}-\ln x\geq\frac{\sqrt{2}(x-1)(x+1)}{\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2}}-2\frac{x-1}{x+1}\geq 0$$

最后一个不等号成立，要求 $\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$，成立！因此我们知道充分性也成立，所以任意 $x \in \left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right]$，都有 $a \in \left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$ 满足要求.

**5.2.12 例题:（2008 年江西浸泡压轴题）**

已知 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\dfrac{ax}{ax+8}},x\in(0,+\infty)$

（1）当 $a=8$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间.

（2）对于任意正数 $a$，求证 $1<f(x)<2$.

**解** 5.2.12.（1）当 $a=8$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{3}+\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$，观察式子不难想到换元 $x=\tan^2\theta$：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}+\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}}=\cos\theta+\frac{1}{3}+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{3}$$

由 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调递增，在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减。

（2）这道题难就难在题目给了函数，似乎是暗示学生走求导的路子，但求导异常难做，反而看成是不等式问题却能找到方向。由于函数结构不对称，我们引入第三个变元就可以将本题条件化为对称形式：令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\sqrt{\frac{xy}{xy+8}},x,y\in(0,+\infty)$:

$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\in(0,1)\\ b=\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}\in(0,1)\\ c=\sqrt{\dfrac{xy}{xy+8}}\in(0,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{1}{1+x},x=\dfrac{1}{a^2}-1\\ b^2=\dfrac{1}{1+y},y=\dfrac{1}{b^2}-1\\ c^2=\dfrac{ax}{ax+8}=1-\dfrac{8}{ax+8}\end{cases}$$

现在要找到三个元之间的关系式，消元法就够了：

$$c^2=1-\frac{8}{ax+8}=1-\frac{8}{(\frac{1}{a^2}-1)(\frac{1}{b^2}-1)+8}\Rightarrow(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)=8a^2b^2c^2$$

先假设 $a+b+c>=2$，列出已知条件：

$$\begin{cases}a,b,c\in(0,1),\quad a+b+c\geq 2\\ (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)=8a^2b^2c^2\end{cases}$$

我们现在要证明的是"同时满足这几个条件的题目是一个错题"。其中最后一个条件看似很强，给出了三元关系，但是如果不拿来消元的话很难用上，而消元又回到了原题的情形，这就很尴尬了。那我们不妨尝试删除 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)=8a^2b^2c^2$ 并尝试通过剩余条件导出 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\neq 8a^2b^2c^2$，即 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)>8a^2b^2c^2$ 或 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)<8a^2b^2c^2$。而这个式子是对称的，我们不妨拆成 $(1-a^2)>2bc$ 或 $(1-a^2)<2bc$ 来证明，虽然这个转换之后的式子是原来式子成立的充分而非必要条件，但确实是可以尝试的方向，是不是可以叫"充分性探路"呢？

$$\begin{cases}1-a^2=(1-a)(1+a)<2(1-a)=2(b+c-1)\\ (1-b)(1-c)\in(0,1)\Rightarrow bc+1<b+c\end{cases}\Rightarrow 1-a^2<2bc$$

这样同理得到 $1-b^2<2ac, 1-c^2<2ab$，这样就有 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)<8a^2b^2c^2$，矛盾，所以 $a+b+c<2$。然后我们紧接着设 $a+b+c\le 1$，同样列出已知条件：

$$\begin{cases} a,b,c\in(0,1), \quad a+b+c<=1 \\ (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)=8a^2b^2c^2 \end{cases}$$

同样的套路，我们依然考虑证明 $(1-a^2)>2bc$ 或 $(1-a^2)<2bc$，由

$$\begin{cases} 1-a^2=(1-a)(1+a)>1-a\ge b+c \\ (1-b)(1-c)\in(0,1)\Rightarrow bc<b+c \end{cases} \Rightarrow 1-a^2>2bc$$

这样同理得到 $1-b^2>2ac, 1-c^2>2ab$，这样就有 $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)>8a^2b^2c^2$，矛盾。所以只能是 $1<a+b+c<2$.

（3）当然本题解法不唯一，比如说我们根据

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\sqrt{\frac{xy}{xy+8}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{8}{xy}}}$$

来换元 $z=\dfrac{8}{xy}$，则有 $xyz=8$ 要证明 $1<\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}<2$，已知条件是 $x,y,z>0$，那么 $(x-2)(y-2)(z-2)<8$，不妨假设数量关系 $x\le y\le z$，就有

$$\begin{cases} 2\le z \\ xyz=8 \end{cases} \Rightarrow xy\le 4$$

然后运用对偶式的思想证明出：

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}>\frac{1}{1+\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+\frac{y}{2}}\ge\frac{1}{1+\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=1$$

由 $z\ge 2$ 得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}}<\frac{1}{1+\frac{z}{8}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{xy}}}=\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}$$

以及

$$(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}})(1-\frac{1}{\sqrt{1+y}})>0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}<1+\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+y)}}<1+\frac{1}{1+\sqrt{xy}}$$

合起来就是：

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}<1+\frac{1}{1+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}=2$$

这个 $\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}<\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{8}}$ 是事后诸葛，高考生不必深究。

**5.2.13 例题：（2008 年江西导数压轴）**

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{8}{ax}}}$. 证明：$1<f(x)<2$.

**解** 5.2.13. 将 $a$ 视作参数，直接暴力求导：

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=-\frac{1}{2(1+x)^{\frac32}}+\frac{1}{2(1+\frac{8}{ax})^{\frac32}}\cdot\frac{8}{ax^2}\\
&=-\frac{1}{2(1+x)^{\frac32}}+\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{x}(ax+8)^{\frac32}}=\frac{8\sqrt{a}(1+x)^{\frac32}-\sqrt{x}(ax+8)^{\frac32}}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac32}(ax+8)^{\frac32}}\\
&=\frac{64a(1+x)^3-x(ax+8)^3}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac32}(ax+8)^{\frac32}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac32}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac32}\right]}\\
&=\frac{-a^3x^4-24a^2x^3+64ax^3+192ax+64a-512x}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac32}(ax+8)^{\frac32}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac32}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac32}\right]}\\
&=\frac{-a(a^2x^4+(24a-64)x^3-8(24-\frac{64}{a})x-64)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac32}(ax+8)^{\frac32}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac32}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac32}\right]}\\
&=\frac{-a\Big((ax^2-8)(ax^2+8)+(24-\frac{64}{a})(ax^3-8x)\Big)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac32}(ax+8)^{\frac32}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac32}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac32}\right]}\\
&=\frac{(ax^2-8)\left(-x^2a^2-24xa-8a+64x\right)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac32}(ax+8)^{\frac32}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac32}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac32}\right]}\\
&=\frac{(\sqrt{a}x-2\sqrt{2})(\sqrt{a}x+2\sqrt{2})(-a^2x^2+(64-24a)x-8a)}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac32}(ax+8)^{\frac32}\left[8\sqrt{a}(1+x)^{\frac32}+\sqrt{x}(ax+8)^{\frac32}\right]}
\end{aligned}
$$

这个分子有理化（目的是提取恒正的项）肯定是套路式的，但是这个因式分解，笔者认为有点小技巧，我们提取 $a$ 使得常数项真正地为常数，然后由于二次项为 0，以及一次项和三次项之间有倍数关系，采取凑平方差，分解成了两个二次函数，由于分母大于 0，现在要对分子的正负性进行讨论，方便起见，我们看一下后面那个丑陋的二次函数的判别式长什么样：

$$\Delta=(64-24a)^2-32a^3=32(-a^3+18a^2-96a+128)=32(2-a)(a-8)^2$$

所以如果限定 $a\geq 2$ 那么 $\Delta\leq 0$，再加上二次项为负数，所以这个二次函数小于 0，但是我们能不能做这样的限定呢？其实是可以的，因为 $f(x)$ 根号的下面主要有 $a,x,\frac{8}{ax}$，这三个东西乘起来是 8，是对称的三个变元，我们显然可以给它们规定大小顺序，所以想一想不难知道规定 $a\geq 2$ 是合理的，那么规定另外两个大于等于 2 行不行呢？也行，但是会导致解题变得更加复杂，所以不推荐。

现在，我们只需关注 $\sqrt{a}x-2\sqrt{2}$ 的正负性了，这东西是一次函数，容易知道 $f'(x)$ 在 $(0,\sqrt{\dfrac{8}{a}})$ 大于 0，在 $(\sqrt{\dfrac{8}{a}},+\infty)$ 小于 0，所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\dfrac{8}{a}})$ 单调递增，在 $(\sqrt{\dfrac{8}{a}},+\infty)$ 单调递减。所以 $f(x)$

的最大值是

$$f(\sqrt{\frac{8}{a}})=\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{a}}}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}$$

下面考虑最小值，发现当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 1+\frac{1}{\sqrt{1+a}}$，当 $x\to +\infty$ 时，$f(x)\to 1+\frac{1}{\sqrt{1+a}}$，所以

$$1+\frac{1}{\sqrt{1+a}}<f(x)<\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{a}}}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}$$

此时 $1<f(x)$ 已经得证，下面只需证明

$$g(a)=\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8}{a}}}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}<2$$

再次求导：

$$\begin{aligned}
g'(a)&=-\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{-2\sqrt{2}}{2a^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2(1+a)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{8(1+a)^3-\left(a+2\sqrt{2a}\right)^3}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\left[2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}\\
&=\frac{(a-2\sqrt{2a}+2)\left[4(1+a)^2+2(1+a)(a+2\sqrt{2a})+(a+2\sqrt{2a})^2\right]}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\left[2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}\\
&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2\left[4(1+a)^2+2(1+a)(a+2\sqrt{2a})+(a+2\sqrt{2a})^2\right]}{2a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}\left[2\sqrt{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{8}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}\geq 0
\end{aligned}$$

所以原函数 $g(a)$ 单调递增，考虑到

$$\lim_{x\to+\infty}g(a)=0+2=2$$

所以 $f(x)<2$ 也得证。

## 5.3 三角函数恒成立问题

**5.3.1 例题: 经典题**

求 $f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x$ 的值域.

**解** 5.3.1. 反复积化和差

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin 2x\cos 2x-\sin 2x\cos 4x)=\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x)$$
$$f'(x)=\frac{1}{4}(2\cos 2x+4\cos 4x-6\cos 6x)=0$$

令 $v=\cos 2x$，用二倍角和三倍角公式（$\cos 4x=2v^2-1$，$\cos 6x=4v^3-3v$）代入 $f'(x)=0$ 得到

$$6v^3-2v^2-5v+1=(v-1)(6v^2+4v-1)=0\Leftrightarrow v=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{6}$$

此时 $f(x)=\frac{1}{4}\sin 2x(1+2\cos 2x-(4\cos^2 2x-1))=\frac{1}{2}\sin 2x(1+v-2v^2)$，将 $\sin 2x$ 换成 $v$ 的式子，考虑平方：

$$f(x)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2x(1+v-2v^2)^2=\frac{1}{4}(1-v^2)(1+v-2v^2)^2$$

用 $6v^2=1-4v\implies v^2=\frac{1-4v}{6}$ 反复降次得到极值 $\frac{1039+680v}{972}$，此时 $f(x)^2=\frac{2437+340\sqrt{10}}{11664}$，开方得到值域

$$\left[-\frac{34\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{108},\frac{34\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{108}\right]$$

**5.3.2 例题: 来自“扁头耄耋”**

证明对于任意 $x>0$，有：

$$x+\frac{1}{x}+1\geqslant\cot\left(\frac{\pi}{2(x^2+x+1)}\right)\cot\left(\frac{\pi x^2}{2(x^2+x+1)}\right)$$

**解** 5.3.2. 设 $A=\frac{\pi}{2(x^2+x+1)}$，$B=\frac{\pi x^2}{2(x^2+x+1)}$，并构造辅助角 $C=\frac{\pi x}{2(x^2+x+1)}$。由于 $x>0$，显然有 $A,B,C\in(0,\frac{\pi}{2})$。注意到 $A+B+C=\frac{\pi}{2}$，且满足 $C^2=\frac{\pi^2x^2}{4(x^2+x+1)^2}=AB$，即 $C=\sqrt{AB}$。

为了化简不等式右侧 $\text{RHS}=\cot A\cot B$，利用和角公式及 $A+B=\frac{\pi}{2}-C$，可得：

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\cot C=\frac{1}{\tan C}$$

整理得 $\tan C(\tan A+\tan B)=1-\tan A\tan B$，等式两边同除以 $\tan A\tan B$ 并重排项，得到：

$$\cot A\cot B=1+\tan C(\cot A+\cot B)$$

对于不等式左侧 $\text{LHS}=x+\frac{1}{x}+1=\frac{x^2+x+1}{x}$，结合 $C$ 的定义式可知 $\text{LHS}=\frac{\pi}{2C}$。由 $A+B+C=\frac{\pi}{2}$，可将其进一步表示为 $\text{LHS}=\frac{A+B+C}{C}=\frac{A+B}{C}+1$。此时，原不等式 $\text{LHS}\geq\text{RHS}$ 等价于：

$$\frac{A+B}{C}+1\geq 1+\tan C(\cot A+\cot B)\iff\frac{\cot A+\cot B}{A+B}\leq\frac{\cot C}{C}$$

代入 $C=\sqrt{AB}$，命题转化为证明对于任意 $A,B\in(0,\frac{\pi}{2})$，恒有 $\frac{\cot A+\cot B}{A+B}\le\frac{\cot\sqrt{AB}}{\sqrt{AB}}$。

利用 $\cot z=\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{n^2\pi^2-z^2}$。将其代入目标不等式左侧得：

$$\frac{\cot A+\cot B}{A+B}=\frac{1}{AB}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{A+B}\left(\frac{A}{n^2\pi^2-A^2}+\frac{B}{n^2\pi^2-B^2}\right)$$

目标不等式右侧展开为：

$$\frac{\cot\sqrt{AB}}{\sqrt{AB}}=\frac{1}{AB}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2-AB}$$

只需证明级数中每一对应项均满足：

$$\frac{1}{A+B}\left(\frac{A}{a-A^2}+\frac{B}{a-B^2}\right)\ge\frac{1}{a-AB}\quad(\text{其中}a=n^2\pi^2,n\ge1)$$

由于 $A,B\in(0,\frac{\pi}{2})$，分母 $a-A^2,a-B^2,a-AB$ 均为正数。将上式两边同乘分母并展开：

$$[A(a-B^2)+B(a-A^2)](a-AB)\ge(A+B)(a-A^2)(a-B^2)$$

左侧化简为 $(A+B)(a-AB)^2$，右侧展开为 $(A+B)[a^2-a(A^2+B^2)+A^2B^2]$。消去正数因子 $(A+B)$ 并展开平方式：

$$a^2-2aAB+A^2B^2\ge a^2-a(A^2+B^2)+A^2B^2\iff a(A^2+B^2)\ge2aAB$$

由于 $a>0$，上式等价于 $(A-B)^2\ge0$，该式显然成立。故原级数每一项的不等关系均成立，累加后得证。

当且仅当 $A=B$ 时等号成立，即 $x^2=1$，结合 $x>0$ 知取等条件为 $x=1$。综上所述，原不等式得证。

**5.3.3 例题: 来自"扁头耄耋"**

证明对于任意 $x>0$，有：

$$\cot\left(\frac{\pi}{2(x^2+x+1)}\right)\cot\left(\frac{\pi x^2}{2(x^2+x+1)}\right)\geqslant3$$

**解 5.3.3.** 设 $A=\frac{\pi}{2(x^2+x+1)}$，$B=\frac{\pi x^2}{2(x^2+x+1)}$，并继续沿用前文构造的辅助角 $C=\frac{\pi x}{2(x^2+x+1)}$。由于 $x>0$，显然有 $A,B,C\in(0,\frac{\pi}{2})$，且满足 $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ 及 $C=\sqrt{AB}$。利用前文已证明的恒等式进行变形：

$$\cot A\cot B=1+\tan C(\cot A+\cot B)$$

将括号内式子用正余弦展开并通分，同时代入和角关系 $A+B=\frac{\pi}{2}-C$：

$$\cot A+\cot B=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-C)}{\sin A\sin B}=\frac{\cos C}{\sin A\sin B}$$

将其代回原式，即可将目标等式右侧化简为：

$$\cot A\cot B = 1+\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 1+\frac{\sin C}{\sin A\sin B}$$

为证明原式 $\geqslant 3$，我们需要对分母 $\sin A\sin B$ 寻找上限。由于 $C$ 是 $A, B$ 的几何平均数（即 $C=\sqrt{AB}$），自然联想到利用函数的凹凸性。构造函数 $f(t)=\ln(\sin e^t)$，其定义域为 $e^t\in(0,\frac{\pi}{2})$。对该函数求导：

$$f'(t)=\frac{\cos e^t\cdot e^t}{\sin e^t}=e^t\cot e^t, f''(t)=e^t\cot e^t-e^{2t}\csc^2 e^t=\frac{\frac{1}{2}e^t\sin(2e^t)-e^{2t}}{\sin^2 e^t}$$

对于任意 $u=e^t>0$，由于 $\sin(2u)<2u$ 恒成立，故分子 $\frac{1}{2}u\sin(2u)-u^2<u^2-u^2=0$，这意味着 $f''(t)<0$。因此 $f(t)$ 在对应区间上为严格凹函数。根据 Jensen 不等式（琴生不等式），有：

$$\frac{f(\ln A)+f(\ln B)}{2}\leqslant f\left(\frac{\ln A+\ln B}{2}\right)=f(\ln\sqrt{AB})=f(\ln C)$$

即 $\frac{1}{2}(\ln\sin A+\ln\sin B)\leqslant\ln\sin C$，脱去对数后得到关键不等式：

$$\sin A\sin B\leqslant\sin^2 C$$

（当且仅当 $A=B$ 时取等号）。将此结论代入前面的化简式中：

$$\cot A\cot B=1+\frac{\sin C}{\sin A\sin B}\geqslant 1+\frac{\sin C}{\sin^2 C}=1+\frac{1}{\sin C}\geqslant 1+\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6})}=1+2=3$$

综上所述，$\cot A\cot B\geqslant 3$ 恒成立。等号成立的条件为 $A=B$ 且 $C=\frac{\pi}{6}$，即 $x=1$。原不等式另一侧得证。

### 5.3.4 例题: 来自"许你坚强"

证明对于任意 $A,B\in(0,\frac{\pi}{2})$，恒有 $\dfrac{\cot A+\cot B}{A+B}\leq\dfrac{\cot\sqrt{AB}}{\sqrt{AB}}$。

**解** 5.3.4. 已知 $A,B\in(0,\frac{\pi}{2})$，由于待证不等式关于 $A,B$ 对称，不妨设 $A\geq B$。令 $x=\sqrt{AB}$，则 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 且 $A\geq x\geq B>0$。由 $B=\frac{x^2}{A}$ 可知，在固定常数 $x$ 的前提下，$A$ 的取值范围为 $[x,\frac{\pi}{2})$。

构造关于 $A$ 的单变量函数：

$$f(A)=\frac{\cot A+\cot(\frac{x^2}{A})}{A+\frac{x^2}{A}}$$

对其求导可得：

$$f'(A)=\frac{(A+\frac{x^2}{A})(-\csc^2 A+\frac{x^2}{A^2}\csc^2\frac{x^2}{A})-(1-\frac{x^2}{A^2})(\cot A+\cot\frac{x^2}{A})}{(A+\frac{x^2}{A})^2}$$

将 $B=\frac{x^2}{A}$ 代回上述导数公式，并将分子与分母同乘 $A$，得：

$$f'(A)=\frac{(A+B)(-A\csc^2 A+B\csc^2 B)-(A-B)(\cot A+\cot B)}{A(A+B)^2}$$

令导数公式的分子部分为 $\Delta(A,B)$，即：

$$\Delta(A,B)=(A+B)(B\csc^2 B-A\csc^2 A)-(A-B)(\cot A+\cot B)$$

由于分母 $A(A+B)^2>0$，$f'(A)$ 的符号完全由 $\Delta(A,B)$ 决定。要证明原不等式，需证当 $A\geq B$ 时，恒有 $\Delta(A,B)\leq 0$。

引入辅助函数 $R(y)=y\cot y$，$y\in(0,\frac{\pi}{2})$，其导数为 $R'(y)=\cot y-y\csc^2 y$。进一步令 $Q(y)=-R'(y)=y\csc^2 y-\cot y$。代入 $\Delta(A,B)$ 的第一项中有 $y\csc^2 y=Q(y)+\cot y$，故：

$$B\csc^2 B-A\csc^2 A=Q(B)-Q(A)+\cot B-\cot A$$

将其代入 $\Delta(A,B)$ 并展开，可化简为：

$$\Delta(A,B)=(A+B)[Q(B)-Q(A)]-2(A\cot A-B\cot B)=(A+B)[Q(B)-Q(A)]-2[R(A)-R(B)]$$

由微积分基本定理，连续函数 $R(y)$ 在区间上的增量可表示为积分：

$$R(A)-R(B)=\int_B^A R'(t)dt=-\int_B^A Q(t)dt$$

为证明 $\Delta(A,B)\leq 0$，等价于证明如下构造的二元函数 $F(A,B)\geq 0$：

$$F(A,B)=-\Delta(A,B)=(A+B)[Q(A)-Q(B)]-2\int_B^A Q(t)dt$$

对 $F(A,B)$ 关于 $A$ 求一阶偏导：

$$\frac{\partial F}{\partial A}=[Q(A)-Q(B)]+(A+B)Q'(A)-2Q(A)=(A+B)Q'(A)-Q(A)-Q(B)$$

令 $G(A,B)=\frac{\partial F}{\partial A}$，继续对 $A$ 求偏导：

$$\frac{\partial G}{\partial A}=Q'(A)+(A+B)Q''(A)-Q'(A)=(A+B)Q''(A)$$

为确定偏导数的符号，考察 $Q(y)$ 的各阶导数（$y\in(0,\frac{\pi}{2})$）：

$$Q'(y)=2\csc^2 y(1-y\cot y)$$

$$Q''(y)=2\csc^2 y[y-3\cot y+3y\cot^2 y]$$

将 $Q''(y)$ 方括号内的部分转化为正余弦表达式，令 $u=2y\in(0,\pi)$：

$$y-3\cot y+3y\cot^2 y=\frac{y(1+2\cos^2 y)-1.5\sin(2y)}{\sin^2 y}=\frac{\frac{u}{2}(2+\cos u)-1.5\sin u}{\sin^2 y}$$

只需考察分子的符号，设 $z(u)=u+\frac{u}{2}\cos u-1.5\sin u$。对其求导：

$$z'(u)=1-\cos u-\frac{u}{2}\sin u$$

$$z''(u)=\frac{1}{2}(\sin u-u\cos u)$$

当 $u\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，由正切函数的不等式性质 $\tan u>u$ 可知 $\sin u>u\cos u$；当 $u\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$\cos u<0$，显然有 $\sin u-u\cos u>0$。因此在整个区间 $(0,\pi)$ 内恒有 $z''(u)>0$。由此可知 $z'(u)$ 单调递增，结合 $z'(0)=0$ 得 $z'(u)>0$；进而 $z(u)$ 单调递增，结合 $z(0)=0$ 推得 $z(u)>0$。这表明对于 $y\in(0,\frac{\pi}{2})$，恒有 $Q''(y)>0$。

基于 $Q''(A)>0$ 及 $A+B>0$，可得 $\frac{\partial G}{\partial A}>0$，即 $G(A,B)$ 关于 $A$ 在 $[B,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增。考察起点值 $G(B,B)=2(BQ'(B)-Q(B))$，设 $H(y)=yQ'(y)-Q(y)$，求导得 $H'(y)=yQ''(y)>0$，故 $H(y)$ 单调递增。利用泰勒展开分析 $y\to0^+$ 时的极限行为：

$$Q(y)=\frac{y-\frac{1}{2}\sin(2y)}{\sin^2 y}=\frac{y-\frac{1}{2}(2y-\frac{4y^3}{3}+\dots)}{y^2-\frac{y^4}{3}+\dots}=\frac{2y}{3}+\frac{4y^3}{45}+O(y^5)$$

求导得 $Q'(y)=\frac{2}{3}+\frac{4y^2}{15}+O(y^4)$。代入 $H(y)$ 中计算：

$$H(y)=y\left(\frac{2}{3}+\frac{4y^2}{15}\right)-\left(\frac{2y}{3}+\frac{4y^3}{45}\right)+O(y^5)=\frac{8y^3}{45}+O(y^5)$$

因此 $\lim_{y\to0^+}H(y)=0$。由于 $H(y)$ 严格单调递增，故当 $y>0$ 时 $H(y)>0$，从而起点值 $G(B,B)>0$。

因为 $G(B,B)>0$ 且 $\frac{\partial G}{\partial A}>0$，故对于 $A\geq B$ 恒有 $G(A,B)>0$。这表明 $\frac{\partial F}{\partial A}>0$，函数 $F(A,B)$ 关于 $A$ 单调递增。结合 $F(B,B)=0$，得出当 $A\geq B$ 时 $F(A,B)\geq0$ 恒成立。由 $F(A,B)\geq0$ 可得 $\Delta(A,B)\leq0$，进而 $f'(A)\leq0$。这意味着在保持 $x=\sqrt{AB}$ 不变的情况下，函数 $f(A)$ 在区间 $[x,\frac{\pi}{2})$ 上严格单调递减。因此，函数在边界点 $A=x$（即 $A=B=\sqrt{AB}$）处取得最大值：

$$f(A)\leq f(x)=\frac{\cot x+\cot(\frac{x^2}{x})}{x+\frac{x^2}{x}}=\frac{2\cot x}{2x}=\frac{\cot x}{x}$$

将 $x=\sqrt{AB}$ 代回即证得原不等式：

$$\frac{\cot A+\cot B}{A+B}\leq\frac{\cot\sqrt{AB}}{\sqrt{AB}}$$

当且仅当 $A=B$ 时，等号成立。证毕。

**5.3.5 例题:**

设函数 $f(x)=\cos 3x-\cos x\sin^3 x$ .
(1) 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调区间；(2) 求 $|f(x)|$ 的最大值.

**解** 5.3.5.

**5.3.6 例题:**

$0<x<\frac{\pi}{2},k\geqslant\frac{1}{2}$，证明

$$\frac{\tan x}{k}\left(\sin\frac{x}{k}\right)^{2k^2}>\left(\frac{x}{k}\right)^{2k^2+1}$$

**解** 5.3.6. 由于 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 且 $k\geqslant\frac{1}{2}$，分离变量 $x$ 和 $k$：

$$\frac{\tan x}{k}\left(\sin\frac{x}{k}\right)^{2k^2}>\left(\frac{x}{k}\right)^{2k^2}\frac{x}{k}\Leftrightarrow\frac{\tan x}{x}>\left(\frac{\frac{x}{k}}{\sin\frac{x}{k}}\right)^{2k^2}$$

考虑证明右侧关于 $k$ 的单调递减。若证得则右侧在 $k\geqslant\frac{1}{2}$ 时的最大值在 $k=\frac{1}{2}$ 处取得，随后只需证明 $k=\frac{1}{2}$ 时的右侧小于左侧即可。令右侧括号内的变量 $t=\frac{x}{k}$。由于 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 且 $k\geqslant\frac{1}{2}$，可知 $t\in(0,\pi)$。构造函数 $f(t)=\frac{\ln\left(\frac{t}{\sin t}\right)}{t^2}$，若能证明 $f(t)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，则由于 $t=\frac{x}{k}$ 随 $k$ 的增大而减小，即可得出 $\exp(2x^2f(\frac{x}{k}))$ 随 $k$ 的增大而减小。对 $f(t)$ 求导：

$$f'(t)=\frac{\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin t-t\cos t}{\sin^2 t}\cdot t^2-2t\ln\left(\frac{t}{\sin t}\right)}{t^4}=\frac{1}{t^3}\left[\frac{\sin t-t\cos t}{\sin t}-2\ln\left(\frac{t}{\sin t}\right)\right]$$

令 $p(t)=\frac{\sin t-t\cos t}{\sin t}-2\ln\left(\frac{t}{\sin t}\right)=1-t\cot t-2\ln\left(\frac{t}{\sin t}\right)$，对其求导：

$$p'(t)=-\cot t+t\csc^2 t-\frac{2}{t}+2\cot t=\cot t+t\csc^2 t-\frac{2}{t}$$

通分并利用倍角公式 $2\sin t\cos t=\sin 2t$ 以及 $2\sin^2 t=1-\cos 2t$ 化简：

$$p'(t)=\frac{t\sin t\cos t+t^2-2\sin^2 t}{t\sin^2 t}=\frac{t^2+\frac{t}{2}\sin 2t+\cos 2t-1}{t\sin^2 t}$$

令分子为 $r(t)=t^2+\frac{t}{2}\sin 2t+\cos 2t-1$，对其求导：

$$r'(t)=2t+\frac{1}{2}\sin 2t+t\cos 2t-2\sin 2t=2t+t\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t=t(2+\cos 2t)-\frac{3}{2}\sin 2t$$

下证：对于任意 $u>0$，均有 $\frac{\sin u}{\cos u+2}<\frac{u}{3}$。构造函数 $H(u)=u(2+\cos u)-3\sin u$，对其求导：

$$H'(u)=2+\cos u-u\sin u-3\cos u=2-2\cos u-u\sin u$$

$$H''(u)=2\sin u-\sin u-u\cos u=\sin u-u\cos u$$

当 $u\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，由于 $\tan u>u$，即 $\sin u>u\cos u$，所以 $H''(u)>0$。当 $u\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$\sin u>0$ 且 $\cos u\leqslant 0$，所以 $H''(u)>0$ 显然成立。因此，$H'(u)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增。结合 $H'(0)=0$，可知当 $u\in(0,\pi)$ 时 $H'(u)>0$。这说明 $H(u)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，由于 $H(0)=0$，故当 $u\in(0,\pi)$ 时 $H(u)>0$。对于 $u\geqslant\pi$，由于 $\frac{\sin u}{\cos u+2}\leqslant 1$ 且 $\frac{u}{3}>1$，不等式自然成立。综上，对于任意 $u>0$，引理 $\frac{\sin u}{\cos u+2}<\frac{u}{3}$ 均成立。利用此不等式，令 $u=2t$，则有 $\frac{\sin 2t}{\cos 2t+2}<\frac{2t}{3}$，即 $t(2+\cos 2t)>\frac{3}{2}\sin 2t$。这说明 $r'(t)>0$，故 $r(t)$ 单调递增，$r(t)>r(0)=0$。进而 $p'(t)>0$，所以 $p(t)$ 单调递增，$p(t)>\lim_{t\to 0}p(t)=0$。最终得到 $f'(t)=\frac{p(t)}{t^3}>0$，即 $f(t)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增。因为 $f(\frac{x}{k})$ 是关于 $k$ 的递减函数，所以在 $k\geqslant\frac{1}{2}$ 时：

$$\left(\frac{\frac{x}{k}}{\sin\frac{x}{k}}\right)^{2k^2}=\exp\left(2x^2f\left(\frac{x}{k}\right)\right)\leqslant\exp(2x^2f(2x))=\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

最后，我们只需证明 $\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\tan x}{x}$。不等式两边均为正，平方等价于：

$$\frac{2x}{\sin 2x}<\frac{\tan^2 x}{x^2}\Longleftrightarrow\frac{x}{\sin x\cos x}<\frac{\sin^2 x}{x^2\cos^2 x}\Longleftrightarrow x^3<\sin^2 x\tan x$$

对两边取对数，令 $m(x)=2\ln\sin x+\ln\tan x-3\ln x$，求导：

$$m'(x)=2\cot x+\frac{\sec^2 x}{\tan x}-\frac{3}{x}=\frac{2\cos^2 x+1}{\sin x\cos x}-\frac{3}{x}=\frac{2(\cos 2x+2)}{\sin 2x}-\frac{3}{x}$$

再次使用 $\frac{\sin 2x}{\cos 2x+2}<\frac{2x}{3}$，对其取倒数可得 $\frac{\cos 2x+2}{\sin 2x}>\frac{3}{2x}$。因此 $m'(x)>2\left(\frac{3}{2x}\right)-\frac{3}{x}=0$。这说明 $m(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，由于 $\lim_{x\to 0}m(x)=0$，故 $m(x)>0$，从而 $x^3<\sin^2 x\tan x$ 成立。至此，$\left(\frac{x}{k}\right)^{2k^2+1}<\frac{\tan x}{k}\left(\sin\frac{x}{k}\right)^{2k^2}$ 证明完毕。

### 5.3.7 例题: 三角函数

求函数 $f_a(x)=a^{\sin x}+a^{\cos x}$ 的取值范围，其中 $a>1$.

**解** 5.3.7. 对于函数 $f_a(x)=a^{\sin x}+a^{\cos x}$（$a>1$），首先分析其最小值的取得。根据均值不等式，有 $a^{\sin x}+a^{\cos x}\geq 2\sqrt{a^{\sin x+\cos x}}$。当且仅当 $a^{\sin x}=a^{\cos x}$，即 $\sin x=\cos x$ 时，等号成立。由辅助角公式可知 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，其最小值为 $-\sqrt{2}$。考虑到指数函数 $y=a^u$（$a>1$）单调递增，故 $\sqrt{a^{\sin x+\cos x}}$ 的最小值为 $\sqrt{a^{-\sqrt{2}}}=a^{-1/\sqrt{2}}$。当 $x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$（$k\in\mathbb{Z}$）时，$\sin x=\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，上述等号均能成立，故函数 $f_a(x)$ 的最小值为 $2a^{-1/\sqrt{2}}$。

分析函数 $f_a(x)$ 的最大值。作平移变换 $x=y+\frac{\pi}{4}$，则原函数可化为 $f_a(x)=a^{\frac{\sin y+\cos y}{\sqrt{2}}}+a^{\frac{\cos y-\sin y}{\sqrt{2}}}$。记 $b=\frac{\ln a}{\sqrt{2}}>0$，利用双曲余弦函数 $\cosh u=\frac{e^u+e^{-u}}{2}$，原函数可改写为 $f_a(x)=2e^{b\cos y}\cosh(b\sin y)$。对 $\frac{f_a(x)}{2}$ 取对数得 $\ln\frac{f_a(x)}{2}=b\cos y+\ln\cosh(b\sin y)$。由于 $\cos y\leq\sqrt{1-\sin^2 y}$，当 $\cos y\geq 0$ 时等号成立，故有 $\ln\frac{f_a(x)}{2}\leq\sqrt{b^2-(b\sin y)^2}+\ln\cosh(b\sin y)$。

令 $t=b\sin y$，则 $t\in[-b,b]$。构造辅助函数 $g(t)=\sqrt{b^2-t^2}+\ln\cosh t$。由于 $g(t)$ 是偶函数，仅需讨论 $t\in[0,b]$ 上的单调性。对 $g(t)$ 求导得 $g'(t)=\tanh t-\frac{t}{\sqrt{b^2-t^2}}$，继续求二阶导数得 $g''(t)=\operatorname{sech}^2 t-\frac{b^2}{(b^2-t^2)^{3/2}}$。观察可知 $\operatorname{sech}^2 t$ 与 $-\frac{b^2}{(b^2-t^2)^{3/2}}$ 在 $[0,b)$ 上均严格递减，故 $g''(t)$ 在 $[0,b]$ 上严格递减。由于 $g''(0)=1-\frac{1}{b}$，最大值的取得需分两种情况讨论：

若 $b\leq 1$（即 $1<a\leq e^{\sqrt{2}}$），则 $g''(0)\leq 0$。由 $g''(t)$ 严格递减可知 $g''(t)<0$ 对一切 $t\in(0,b]$ 成立，故 $g'(t)$ 在 $[0,b]$ 上严格递减。又 $g'(0)=0$，故在 $t\in(0,b]$ 内 $g'(t)<0$，函数 $g(t)$ 在 $[0,b]$ 上严格递减。此时最大值在 $t=0$ 处取得，即 $g(0)=b$。对应 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，原函数取得最大值 $2e^b=2a^{1/\sqrt{2}}$。

若 $b>1$（即 $a>e^{\sqrt{2}}$），则 $g''(0)>0$。由于 $g''(t)$ 严格递减且当 $t\to b$ 时 $g''(t)\to-\infty$，存在唯一的 $t_1\in(0,b)$ 使得 $g''(t_1)=0$。此时 $g'(t)$ 在 $[0,t_1]$ 上严格递增，在 $[t_1,b]$ 上严格递减。结合 $g'(0)=0$ 且当 $t\to b$ 时 $g'(t)\to-\infty$，可知在 $(0,b)$ 内存在唯一的 $t_0$ 使得 $g'(t_0)=0$。此时 $g(t)$ 在 $t_0$ 处取得极大值，亦为最大值。由于 $g(t_0)>g(0)=b$，此情形下最大值大于 $2a^{1/\sqrt{2}}$。

综上所述，当 $1<a\leq e^{\sqrt{2}}$ 时（如 $a=3$），函数 $f_a(x)$ 的取值范围为 $[2a^{-1/\sqrt{2}},2a^{1/\sqrt{2}}]$；当 $a>e^{\sqrt{2}}$ 时，最小值为 $2a^{-1/\sqrt{2}}$，最大值为 $2\exp\left(\sqrt{b^2-t_0^2}+\ln\cosh t_0\right)$，其中 $t_0$ 为方程 $\tanh t=\frac{t}{\sqrt{b^2-t^2}}$ 在 $(0,b)$ 内的唯一根。

### 5.3.8 例题: 港梦杯第 18 题原稿

求 $\min\limits_{a\in\mathbb{Q}^+}\{\max\limits_{x\in R}\{\sin x+\sin ax\}\}$.

**解** 5.3.8. $a$ 是正有理数，设 $a=\frac{p}{q}$，其中 $p,q$ 为互素的正整数。$F(x)=\sin x+\sin\left(\frac{p}{q}x\right)$ 可以转换为求函数 $f(x)=\sin(qx)+\sin(px)$ 全局最大值的最小值。即我们记 $M(p,q)=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}(\sin px+\sin qx)$。目标是求 $\min\limits_{(p,q)}M(p,q)$。和差化积公式得 $f(x)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}x\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}x\right)$

我们可以通过对不同的 $(p,q)$ 组合进行分类，以类似"采样"的方式，寻找使得正弦项为 1 的特定点列，筛选出唯一的极小值候选点。任意两个互素的正整数 $p,q$，其奇偶性必然属于以下三种

情况之一：

情况 1：$p,q$ 均为奇数，且 $p\equiv q \pmod 4$。此时，若 $p\equiv q\equiv 1 \pmod 4$，我们取 $x=\frac{\pi}{2}$。由于 $p=4n+1$，则 $\sin(px)=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$。同理 $\sin(qx)=1$。此时 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2$。若 $p\equiv q\equiv 3 \pmod 4$，我们取 $x=\frac{3\pi}{2}$。由于 $p=4n+3$，则 $\sin(px)=\sin\left(6n\pi+\frac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$。同理 $\sin(qx)=1$。此时 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$。因此，在此类情况下，始终有 $M(p,q)\geq 2$。

情况 2：$p,q$ 奇偶性不同（一奇一偶）。此时我们构造特定的采样点列 $x_k=\frac{4k+1}{p+q}\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$。此时正弦项的相位为 $\frac{p+q}{2}x_k=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，显然 $\sin\left(\frac{p+q}{2}x_k\right)=1$ 恒成立。简化为：$f(x_k)=2\cos\left(\frac{p-q}{p+q}\cdot\frac{4k+1}{2}\pi\right)$，记和值 $S=p+q$，差值 $D=p-q$。我们要考察余弦项的相位距离 $2m\pi$ 有多近，定义相位偏差 $\Delta$：

$$\Delta=\frac{D(4k+1)}{2S}\pi-2m\pi=\frac{\pi}{2S}\left[4Dk-4mS+D\right]$$

因为一奇一偶，故 $S$ 与 $D$ 均为奇数。又因 $\gcd(p,q)=1$，易知 $\gcd(D,S)=1$。根据裴蜀定理，当 $k,m$ 遍历整数时，$(Dk-Sm)$ 取遍所有整数。因此 $4(Dk-Sm)+D$ 能够取遍所有模 4 余 $D$ 的整数。由于 $D$ 是奇数，一个奇数距离 4 的倍数最近的距离必定是 1（即存在整数 $X$ 使 $|4X+D|=1$）。因此，必定存在某个 $k$，使得最小绝对相差为 $\Delta_{\min}=\frac{\pi}{2S}\times 1=\frac{\pi}{2(p+q)}$。所以，在此类情况下：

$$M(p,q)\geq 2\cos\left(\frac{\pi}{2(p+q)}\right)$$

由于一奇一偶的正整数组合最小的和为 $S=1+2=3$，因此下界为：

$$M(p,q)\geq 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\approx 1.732$$

情况 3：$p,q$ 均为奇数，且 $p\not\equiv q \pmod 4$。此时必定一个是 $4n+1$，另一个是 $4n+3$。这导致和 $S=p+q$ 必定是 4 的倍数，差 $D=p-q$ 必定是偶数且模 4 余 2。设 $S=4S'$，$D=2D'$（其中 $D'$ 为奇数）。继续沿用情况 2 中的采样点列 $x_k=\frac{4k+1}{p+q}\pi$，相位偏差转化为：

$$\Delta=\frac{\pi}{2S}\left[D(4k+1)-4mS\right]=\frac{\pi}{8S'}\left[8D'k+2D'-16mS'\right]=\frac{\pi}{4S'}\left[4D'k-8mS'+D'\right]$$

提取公因式得绝对值为 $\frac{\pi}{4S'}|4(D'k-2mS')+D'|$。因为 $S=p+q$ 与 $D=p-q$ 均为偶数，且 $p,q$ 互素，可推得 $\gcd\left(\frac{D}{2},\frac{S}{2}\right)=1$，即 $\gcd(D',2S')=1$。同理，由裴蜀定理，存在整数使得 $|4(D'k-2mS')+D'|=1$。此时最小相位偏差为 $\Delta_{\min}=\frac{\pi}{4S'}\times 1=\frac{\pi}{S}=\frac{\pi}{p+q}$。所以，在此类情况下：

$$M(p,q)\geq 2\cos\left(\frac{\pi}{p+q}\right)$$

由于 $S=p+q$ 必须是 4 的倍数，我们分情况讨论：

- 当 $p+q\geq 8$ 时，其下界满足 $M(p,q)\geq 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 1.847$。
- 当 $p+q=4$ 时，这是本类别中唯一的例外，此时对应的唯一互素组合为 $\{p,q\}=\{1,3\}$。

综上所述，除了 $\{1,3\}$ 之外，整个正有理数域内所有其他 $(p,q)$ 组合的 $M(p,q)$ 理论下界均大于 $\sqrt{3}\approx 1.732$。若存在全局最大值的最小值，必定在 $\{1,3\}$ 处取得。此时对应原问题 $a=3$ 或 $a=\frac{1}{3}$。不难得到答案为 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

5.3.9 例题:

$\cos x+\cos y=1$，且 $x,y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。求 $x^2+y^2$ 的取值范围

令 $x=\arccos(1-u),y=\arccos u$，则

$$x^2+y^2=G(u)=(\arccos(1-u))^2+(\arccos u)^2,\quad u\in[0,1]$$

求导：

$$G'(u)=2\arccos(1-u)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\cdot(-1)+2\arccos u\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{2\arccos(1-u)}{\sqrt{2u-u^2}}-\frac{2\arccos u}{\sqrt{1-u^2}}$$

当 $u\in(0,1)$ 时，对应的 $x,y\in(0,\frac{\pi}{2})$。此时 $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-(1-u)^2}=\sqrt{2u-u^2}$，$\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-u^2}$ 所以 $G'(u)=2\left(\frac{x}{\sin x}-\frac{y}{\sin y}\right)$，根据形式，引入在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 显然单增的函数 $H(t)=\frac{t}{\sin t}$。当 $u\in(0,\frac{1}{2})$ 时：此时 $1-u>\frac{1}{2}>u$，即 $\cos x>\cos y$，$x<y$，$H(x)<H(y)$，即 $\frac{x}{\sin x}<\frac{y}{\sin y}$。因此 $G'(u)<0$，$G(u)$ 在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上严格单调递减。当 $u\in(\frac{1}{2},1)$ 时，此时 $1-u<\frac{1}{2}<u$，即 $\cos x<\cos y$。同理 $x>y$，$H(x)>H(y)$。因此 $G'(u)>0$，$G(u)$ 在区间 $[\frac{1}{2},1]$ 上单增。

## 5.4 零点题

**5.4.1 例题: 邪帝零点题**

已知函数 $f(x)=x\ln(x-2)-\ln a$ 的零点为 $x_0$，$g(x)=2ax+\dfrac{x}{\ln x-a}$.
(1) 实数 $x_1,x_2$ $(e^a<x_1<x_2)$ 满足 $g(x_1)=g(x_2)$，若 $x_1x_2>e^{x_0}$，求 $a$ 的取值范围；
(2) 记函数 $h(x)=f(x)-g(x)$，讨论 $h(x)$ 的零点个数.

**解** 5.4.1. （1）$f(x)=x\ln(x-2)-\ln a$ 的零点为 $x_0$，故 $x_0>2$ 且 $\ln a=x_0\ln(x_0-2)$。函数 $g(x)=2ax+\frac{x}{\ln x-a}$，且存在 $e^a<x_1<x_2$ 使得 $g(x_1)=g(x_2)$。出于简化分母的考虑，令 $t=\ln x-a$，由 $x>e^a$ 知 $t>0$。此时 $x=e^{t+a}$，函数 $g(x)$ 转化为 $g(x)=e^{t+a}\left(2a+\frac{1}{t}\right)=e^a\cdot e^t\left(2a+\frac{1}{t}\right)$。

设 $F(t)=e^t\left(2a+\frac{1}{t}\right)$，则 $F(t_1)=F(t_2)$，其中 $0<t_1<t_2$。求导得 $F'(t)=e^t\frac{2at^2+t-1}{t^2}$。令 $F'(t)=0$，因 $t>0$ 且 $a>0$，方程 $2at^2+t-1=0$ 有唯一正根 $t_0=\frac{\sqrt{1+8a}-1}{4a}$。当 $t\in(0,t_0)$ 时，$F'(t)<0$；当 $t\in(t_0,+\infty)$ 时，$F'(t)>0$。故 $F(t)$ 在 $t_0$ 处取得极小值，且满足 $0<t_1<t_0<t_2$。

下证 $t_1+t_2>2t_0$。构造 $H(t)=\ln F(t)=t+\ln(2at+1)-\ln t$，则 $H(t_1)=H(t_2)$。求导得：

$$H'(t)=1+\frac{2a}{2at+1}-\frac{1}{t}=\frac{2at^2+t-1}{2at^2+t}$$

进一步构造 $\varphi(x)=H(t_0-x)-H(t_0+x)$，其中 $0<x<t_0$。求导并用 $2at_0^2+t_0=1$ 代入得：

$$\varphi'(x)=-\left[H'(t_0-x)+H'(t_0+x)\right]=-\frac{2(4a^2x^4-(1+6a)x^2)}{(1+2ax^2)^2-(1+8a)x^2}$$

由于 $0<x<t_0$，有 $x^2<t_0^2=\frac{1+4a-\sqrt{1+8a}}{8a^2}$。此时 $4a^2x^2<4a^2t_0^2<1+6a$，可知 $\varphi'(x)$ 分子小于 0，分母大于 0。从而 $\varphi'(x)>0$，故 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即 $H(t_0-x)>H(t_0+x)$。令 $x=t_0-t_1$，得 $H(t_1)>H(2t_0-t_1)$。结合 $H(t_1)=H(t_2)$ 可得 $H(t_2)>H(2t_0-t_1)$。由于 $t_2$ 与 $2t_0-t_1$ 均位于 $H(t)$ 的单增区间 $(t_0,+\infty)$ 内，故 $t_2>2t_0-t_1$，即 $t_1+t_2>2t_0$。

由 $x_1x_2=e^{t_1+a}\cdot e^{t_2+a}=e^{t_1+t_2+2a}>e^{2t_0+2a}$。为使 $x_1x_2>e^{x_0}$ 恒成立，必要性探路 $e^{2t_0+2a}\geqslant e^{x_0}$，即 $2t_0+2a\geqslant x_0$。显然函数 $x\ln(x-2)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单增，条件等价于 $f(2t_0+2a)\geqslant f(x_0)=0$。

由 $2at_0^2+t_0-1=0$ 得 $a=\frac{1-t_0}{2t_0^2}$，代入得 $2t_0+2a=\frac{2t_0^3-t_0+1}{t_0^2}$。设 $A(t_0)=f(2t_0+2a)=(2t_0+2a)\ln(2t_0+2a-2)-\ln a$，需使得 $A(t_0)\geqslant 0$ 恒成立。对 $A(t_0)$ 求导可知 $A'(t_0)<0$ 恒成立。当 $a=1$ 时，对应 $t_0=\frac{1}{2}$，$2t_0+2a=3$，此时 $A(1/2)=0$。为保证 $A(t_0)\geqslant 0$，必须满足 $t_0\leq\frac{1}{2}$。又因 $a=\frac{1-t_0}{2t_0^2}$ 在 $(0,1)$ 上随 $t_0$ 单调递减，故 $t_0\leq\frac{1}{2}$ 等价于 $a\geqslant 1$。因此，$a$ 的取值范围为 $[1,+\infty)$。

（2）原方程等价于 $W(x)=\frac{f(x)-g(x)}{x}=\ln(x-2)-\frac{\ln a}{x}-2a-\frac{1}{\ln x-a}=0$。对 $W(x)$ 求导：

$$W'(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{\ln a}{x^2}+\frac{1}{x(\ln x-a)^2}$$

先考察定义域避免踩坑，显然函数 $W(x)$ 的定义域需满足 $x>2$ 且 $x\neq e^a$。

当 $a>\ln 2$ 时，$e^a>2$，定义域为 $(2,e^a)\cup(e^a,+\infty)$。考察 $W'(x)$ 的前两项通分得 $\frac{x^2+(x-2)\ln a}{x^2(x-2)}$。设分子为 $p(x)=x^2+(x-2)\ln a$，其对称轴为 $x=-\frac{\ln a}{2}$。由于 $a>\ln 2$，不难得到对称轴严格小于 $\frac{1}{2}$，故 $p(x)$ 在 $x>2$ 上严格单调递增。又因 $p(2)=4>0$，故对任意 $x>2$ 均有 $p(x)>0$。从而 $W'(x)>0$ 恒成立，函数 $W(x)$ 在区间 $(2,e^a)$ 和 $(e^a,+\infty)$ 内均严格单调递增。在 $(2,e^a)$ 内，当 $x\to 2^+$ 时 $W(x)\to-\infty$；当 $x\to(e^a)^-$ 时 $W(x)\to+\infty$，存在 1 个零点。在 $(e^a,+\infty)$ 内，当 $x\to(e^a)^+$ 时 $W(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时 $W(x)\to+\infty$，也存在 1 个零点。故此时 $h(x)$ 存在 2 个零点。

当 $0<a\leqslant\ln 2$ 时，$e^a\leqslant 2$，此时均有 $\ln x>\ln 2\geqslant a$，定义域为 $(2,+\infty)$。当 $x\to 2^+$ 时 $W(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时 $W(x)\to+\infty$。若存在极值点 $x_1$ 使得 $W'(x_1)=0$，则有 $\frac{\ln a}{x_1}=-\frac{x_1}{x_1-2}-\frac{1}{(\ln x_1-a)^2}$。将其代入 $W(x_1)$ 得：

$$W(x_1)=\ln(x_1-2)+\frac{x_1}{x_1-2}+\frac{1}{(\ln x_1-a)^2}-\frac{1}{\ln x_1-a}-2a$$

由于 $x_1-2>0$，有 $\ln(x_1-2)+\frac{x_1-2+2}{x_1-2}=\ln(x_1-2)+\frac{2}{x_1-2}+1\geqslant\ln 2+2$。又设 $t=\ln x_1-a>0$，则 $\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant-\frac{1}{4}$。因此对于任意极值点，有 $W(x_1)\geqslant\ln 2+2-\frac{1}{4}-2a\geqslant\ln 2+\frac{7}{4}-2\ln 2>0$。这表明 $W(x)$ 的所有极小值均严格大于 0。由于 $x\to 2^+$ 时函数从 $-\infty$ 开始单调上升，在到达首个极小值的过程中穿过 $x$ 轴一次，此后函数值恒为正。故此时仅存在 1 个零点。

综上所述，当 $0<a\leqslant\ln 2$ 时，$h(x)$ 有 1 个零点；当 $a>\ln 2$ 时，$h(x)$ 有 2 个零点.

**5.4.2 例题: 邪帝零点题**

已知函数 $f(x)=\frac{x-a}{\ln x}$，$g(x)=(x+a)^2+a$，其中 $a\in R$.
（1）当 $a=0$ 时，若曲线 $f(x)$ 与直线 $y=k$ 有一个交点，求实数 $k$ 的取值范围；
（2）设函数 $h(x)=f(x)+g(x)$，讨论 $h(x)$ 的零点个数.

**解** 5.4.2.

### 5.4.3 例题: 来自 amare Donata Caesia

函数 $f(x)=\log_a(\ln(x+a))$, $g(x)=\ln(x+b)$ 共零点.
（1）求 $b-a$ 的值;（2）若 $f(x)\geq g(x)$ 在区间 $(-b,2]$ 上恒成立, 求实数 $a$ 的取值范围.

**解 5.4.3.**（1）对于函数 $f(x)=\log_a(\ln(x+a))$，满足 $\ln(x+a)>0$，即 $x>1-a$。令 $f(x)=0$ 解得其唯一零点 $x_1=e-a$。对于函数 $g(x)=\ln(x+b)$，其定义域为 $x>-b$，令 $g(x)=0$ 解得其唯一零点 $x_2=1-b$。共零点则 $e-a=1-b$，整理得 $b-a=1-e$。
（2）令 $t=x+a$，由于 $x\in(e-1-a,2]$，则 $t\in(e-1,a+2]$。原不等式可转化为 $H(t)=\frac{\ln(\ln t)}{\ln a}-\ln(t+1-e)\geq 0$。显然，当 $t=e$ 时，$H(e)=\log_a(\ln e)-\ln(e+1-e)=0$。

当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$。若 $a\leq e-2$，则区间右端点 $a+2\leq e$。此时对于任意 $t\in(e-1,a+2]$，均有 $t\leq e$，则 $\ln(\ln t)\leq 0$。由于 $\ln a<0$，得 $\frac{\ln(\ln t)}{\ln a}\geq 0$。同时，$t\leq e$ 导致 $t+1-e\leq 1$，故 $\ln(t+1-e)\leq 0$，即 $-\ln(t+1-e)\geq 0$。此时 $H(t)$ 为两个非负项之和，恒有 $H(t)\geq 0$。若 $e-2<a<1$，则区间包含 $t>e$ 的部分，此时若取 $t=a+2>e$，则 $\ln(\ln t)>0$ 且 $\ln(t+1-e)>0$，导致 $H(a+2)<0$，不满足题意。故此种情况下 $a\in(0,e-2]$。

当 $a>1$ 时，区间 $(e-1,a+2]$ 包含内部点 $t=e$。若 $H(t)\geq 0$ 在该区间内恒成立且 $H(e)=0$，则 $t=e$ 必须为 $H(t)$ 的极小值点。根据费马引理，必有 $H'(e)=0$。对 $H(t)$ 求导得：

$$H'(t)=\frac{1}{t\ln t\ln a}-\frac{1}{t+1-e}$$

令 $H'(e)=\frac{1}{e\ln a}-1=0$，解得 $\ln a=\frac{1}{e}$，即 $a=e^{\frac{1}{e}}$。现检验 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 的充分性：此时 $H'(t)=\frac{e(t+1-e)-t\ln t}{t\ln t(t+1-e)}$。设分子为 $u(t)=e(t+1-e)-t\ln t$，则 $u'(t)=e-1-\ln t$。在 $t\in(e-1,a+2]$ 上，由于 $a=e^{\frac{1}{e}}<2$，故 $t<4$。而 $e^{e-1}>e^{1.7}>4$，故在该区间内 $\ln t<e-1$，得 $u'(t)>0$。由于 $u(t)$ 单调递增且 $u(e)=0$，故当 $t\in(e-1,e)$ 时 $H'(t)<0$，当 $t\in(e,a+2]$ 时 $H'(t)>0$。因此 $H(t)$ 在 $t=e$ 处取得最小值 $H(e)=0$，满足 $H(t)\geq 0$ 恒成立。

综上所述，$b-a=1-e$，实数 $a$ 的取值范围是 $(0,e-2]\cup\{e^{\frac{1}{e}}\}$。

**5.4.4 例题: 来自扛把子**

已知函数 $f(x) = e^{ax} + \ln(x+1) - 2\tan x - 1$. $x \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ .
(1) 当 $a = 0$ 时，讨论 $f(x)$ 的零点个数.
(2) 证明：当 $a \leqslant 1$ 时，$f(x)$ 有且仅有两个零点.

**解 5.4.4.**（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln(x+1)-2\tan x$。定义域 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$。显然 $f(0)=\ln 1-2\tan 0=0$，故 $x=0$ 是函数的一个零点。求导：

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x - 2x - 2}{(x+1)\cos^2 x} = \frac{h(x)}{(x+1)\cos^2 x}, h'(x) = -2\sin x\cos x - 2 = -\sin(2x) - 2$$

注意到 $h'(x)\leqslant -1<0$ 恒成立。故 $h(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单减，$h(-1)=\cos^2(-1)>0$，$h(0)=1-0-2=-1<0$，所以对任意 $x>0$，都有 $h(x)<0 \implies f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调递减，又 $f(0)=0$，可知该区间 $f(x)<0$，无零点。

显然，存在唯一的实数 $x_0\in(-1,0)$ 使得 $h(x_0)=0$。当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$h(x)>0 \implies f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,0)$ 时，$h(x)<0 \implies f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。因 $f(0)=0$ 且 $f(x)$ 在 $(x_0,0)$ 上递减，必然有极大值 $f(x_0)>0$。又因当 $x\to -1^+$ 时，$\ln(x+1)\to-\infty$，即 $f(-1^+)\to-\infty$。因为 $f(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上从 $-\infty$ 单调递增至 $f(x_0)>0$，必定且仅必定穿过 $x$ 轴一次。因此该区间有且仅有 1 个零点。综上，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 有且仅有 2 个零点。
（2）当 $a\leqslant 1$ 时，仍有 $f(0)=e^0+\ln 1-0-1=0$，不难想到分正负区间讨论。对于 $x>0$ 且 $a\leqslant 1$，有 $e^{ax}\leqslant e^x$。从而有：

$$f(x) \leqslant e^x + \ln(x+1) - 2\tan x - 1 \triangleq f_1(x)$$

求导发现在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 区间，有

$$f_1'(x) = e^x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\cos^2 x} \leqslant (1+x+x^2) + (1-x+x^2) - (2+2x^2) = 0$$

所以 $f_1(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单减。又 $f_1(0)=0$，所以 $(0,\frac{\pi}{2})$ 区间无零点。

现在只需想方设法证明 $(-1,0)$ 区间有一个零点就可以。令

$$y(x) = 1 + 2\tan x - \ln(x+1), y'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{x+1}, y''(x) = \frac{4\sin x}{\cos^3 x} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

令 $t=-x$，则 $t\in(0,1)$。此时

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{4\sin t}{\cos^3 t} > \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{4t}{(1-\frac{t^2}{2})^3} \\ &= \frac{1 - 4t + \frac{13}{2}t^2 - 4t^3 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{8}t^6}{(1-t)^2(1-\frac{t^2}{2})^3} = \frac{(1-t)^4 + \frac{t^2}{8}(4 - 2t^2 - t^4)}{(1-t)^2(1-\frac{t^2}{2})^3} > 0 \end{aligned}$$

据泰勒中值定理，对于任意 $x\in(-1,0)$ 存在中值 $c\in(x,0)$ 使得：

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(c)}{2}x^2 = 1 + x + \frac{y''(c)}{2}x^2 > 0$$

# 第六章 插入中间函数

## 6.1 插值 + 配导数型

**6.1.1 例题:**

求证:$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x\geqslant(x\ln x)^2$

**解 6.1.1.** 为证明原不等式 $e^x-ex\geq(x\ln x)^2$,设 $L(x)=e^x-ex$,$R(x)=(x\ln x)^2$。由于 $L(1)=R(1)=0$ 且 $L'(1)=R'(1)=0$,考虑构造多项式 $P(x)=(x-1)^2(Ax^2+Bx+C)$ 作为中间过渡函数,以满足 $P(1)=0$ 且 $P'(1)=0$。

考察函数在 $x=2$ 处的值与导数,已知 $R(2)\approx1.922$,$L(2)\approx1.952$;$R'(2)\approx4.694$,$L'(2)\approx4.671$。为使多项式严格介于两函数之间,选取适当的有理数,令 $P(2)=\frac{31}{16}\in(1.922,1.952)$,$P'(2)=\frac{75}{16}\in(4.671,4.694)$。将条件代入多项式及其导数,可得方程组 $4A+2B+C=\frac{31}{16}$ 与 $12A+5B+2C=\frac{75}{16}$。消去 $C$ 得到 $4A+B=\frac{13}{16}$。取 $A=\frac{1}{16}$,解得 $B=\frac{9}{16}$,$C=\frac{9}{16}$。由此得到多项式 $P(x)=\frac{1}{16}(x-1)^2(x^2+9x+9)=\frac{1}{16}(x^4+7x^3-8x^2-9x+9)$。

以下证明原不等式等价的两个部分:$P(x)\geq(x\ln x)^2$ 且 $e^x-ex\geq P(x)$。

首先证明 $P(x)\geq(x\ln x)^2$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立。

令差值函数 $F(x)=P(x)-x^2\ln^2x$,易知 $F(1)=0,F'(1)=0$。当 $x\in(0,1]$ 时,熟知帕德逼近 $-\ln x\leq\frac{(\frac{1}{x})^2-1}{2(\frac{1}{x})}$。原不等式变形为 $\frac{1}{16}(\frac{1}{x}-1)^2(\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x}+9)\geq(\frac{-\ln x}{x})^2$。因此只需证明 $(\frac{1}{x}-1)\sqrt{\frac{9}{x^2}+\frac{9}{x}+1}\geq2((\frac{1}{x})^2-1)=2(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{x}+1)$ 成立。由于 $x\in(0,1]$,故 $\frac{1}{x}\geq1$,故只需证 $\sqrt{\frac{9}{x^2}+\frac{9}{x}+1}\geq2(\frac{1}{x}+1)$。两边皆正,平方并整理得 $\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x}-3\geq0$。因 $\frac{1}{x}\geq1$,这是显然的,故 $F(x)\geq0$ 成立。

当 $x\in[1,+\infty)$ 时,计算四阶导数 $F^{(4)}(x)=\frac{3}{2}+\frac{4\ln x+2}{x^2}$。因 $x\geq1$,故 $\ln x\geq0$,$F^{(4)}(x)>\frac{3}{2}>0$,即 $F'''(x)$ 单调递增。由端点值 $F'''(1)=-1.875<0$ 与 $F'''(2)>1>0$ 可知,$F'''(x)$ 在 $(1,2)$ 内有唯一零点。由此推知 $F''(x)$ 先递减后递增。验证 $F''(1)=0.375>0$,$F''(1.5)<\frac{1}{10}<0$,$F''(2)>\frac{1}{10}>0$,表明 $F''(x)$ 恰有两个零点。进而 $F'(x)$ 从 $F'(1)=0$ 先递增,大于 0,然后减穿过横轴,小于 0,最后递增。由 $F'(2)\approx-0.007<0=F'(1)$ 知,$F'(x)$ 在 $x>2$ 处存在唯一正零点,且 $F(x)$ 在该点取得全局极小值。

对 $x\geq2$,由于 $F'''(x)>0$,故恒有 $F''(x)\geq F''(2)>0.122$。应用带有拉格朗日余项的泰勒公式展开:$F(x)=F(2)+F'(2)(x-2)+\frac{F''(c)}{2}(x-2)^2\geq F(2)+F'(2)(x-2)+\frac{0.122}{2}(x-2)^2$。该二次函数的最小值为 $F(2)-\frac{(F'(2))^2}{2\times0.122}$。代入已知边界估算 $F(2)>0.0110$,$|F'(2)|<0.015$,极小值不小于 $0.0110-\frac{0.000225}{0.244}\approx0.0101>0$。因此,当 $x\in[1,+\infty)$ 时,$F(x)\geq0$。

其次证明 $e^x-ex\geq P(x)$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立。令差值函数 $H(x)=e^x-ex-P(x)$,已知 $H(1)=0,H'(1)=0$。当 $x\in(0,1]$ 时,$H^{(4)}(x)=e^x-1.5$,其唯一零点为 $\ln1.5\approx0.405$。验证端

点 $H'''(0)=-1.625<0$ 与 $H'''(1)\approx-1.407<0$，可知 $H'''(x)$ 先减后增且在 $(0,1]$ 内恒负。因此 $H''(x)$ 在 $(0,1]$ 单调递减，由 $H''(1)\approx0.343>0$，知 $H''(x)>0$ 恒成立。进而 $H'(x)$ 单调递增，由 $H'(1)=0$ 推知 $H'(x)\le0$ 恒成立。故 $H(x)$ 在该区间单调递减，结合 $H(1)=0$，得 $H(x)\ge0$。

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$H^{(4)}(x)=e^x-1.5>1.2>0$，说明 $H'''(x)$ 单调递增。由 $H'''(1)<0$ 与 $H'''(2)>1>0$，知 $H'''(x)$ 在 $(1,2)$ 内有唯一零点。这推得 $H''(x)$ 先减后增。验证端点 $H''(1)>0$，$H''(1.5)<0$，$H''(2)>\frac{1}{10}>0$，知其有两个零点。由此可知 $H'(x)$ 先增变正，再减变负，最后递增。又由 $H'(2)<0$ 知 $H'(x)$ 在 $x>2$ 处存在唯一正零点，且 $H(x)$ 在此处取得极小值。对 $x\ge2$，因 $H''(x)\ge H''(2)$，泰勒公式得：$H(x)\ge H(2)+H'(2)(x-2)+\frac{0.137}{2}(x-2)^2$。该二次函数的最小值为 $H(2)-\frac{(H'(2))^2}{2\times0.137}$。结合边界 $H(2)>0.0115$，$|H'(2)|<0.0195$，极小值不小于 $0.0115-\frac{0.00038}{0.274}>0$。因此，当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$H(x)\ge0$。

综上所述，不等式 $e^x-ex\ge P(x)\ge(x\ln x)^2$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 成立，原命题得证。

### 6.1.2 例题: 简单导数群精华 33

对任意 $x\in(0,1)$，不等式 $x^{1-x}(1-x)^x\le\frac{\sin\pi x}{2}$ 均成立

**解** 6.1.2. 附：中间函数 $M(x)$ 构造的推导解析

原不等式两端的函数 $L(x)=x^{1-x}(1-x)^x$ 与 $R(x)=\frac{\sin\pi x}{2}$ 在区间 $(0,1)$ 上均关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称。为使中间函数 $M(x)$ 具备相同的对称性，可设 $t=x(1-x)$，并构造关于 $t$ 的二次多项式 $f(t)=at^2+bt+c$ 作为中间函数的基本形式。

首先考察函数在端点与对称中心的零阶值匹配。当 $x\to0$ 时，$t\to0$。此时 $\lim_{x\to0}L(x)=0$ 且 $\lim_{x\to0}R(x)=0$，由连续性要求 $f(0)=0$，解得 $c=0$。在对称中心 $x=\frac{1}{2}$ 处，$t=\frac{1}{4}$，此时两端函数均达到极值且 $L\left(\frac{1}{2}\right)=R\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$。代入中间函数得 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{a}{16}+\frac{b}{4}=\frac{1}{2}$，化简得参数约束条件 $a+4b=8$。

其次考察端点处的渐近阶匹配。当 $x\to0$ 时，$t\sim x$，中间函数局部展开为 $f(t)\sim bx$。左侧函数在 $x\to0$ 时的等价无穷小展开为 $L(x)=x\mathrm{e}^{-x\ln x+x\ln(1-x)}\sim x$，即起步一次项系数为 1。右侧函数在 $x\to0$ 时展开为 $R(x)\sim\frac{\pi}{2}x$，一次项系数为 $\frac{\pi}{2}$。为使 $f(t)$ 在 $x\to0$ 附近满足局部条件 $L(x)\le f(t)\le R(x)$，其一次项系数必须介于两者之间，即要求 $1\le b\le\frac{\pi}{2}$。

进一步考察对称中心处的局部曲率匹配（埃米特插值）。在极值点 $x=\frac{1}{2}$ 处，三个函数相交且一阶导数均为 0，决定函数局部上下关系的关键在于二阶导数对应的二次项系数。令 $u=x-\frac{1}{2}$，将三个函数在 $u=0$ 处进行泰勒展开。右侧函数展开为 $R\left(u+\frac{1}{2}\right)=\frac{\cos\pi u}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{4}u^2+\mathcal{O}(u^4)$。对于中间函数，将 $t=\frac{1}{4}-u^2$ 及 $a=8-4b$ 代入 $f(t)$，展开得 $f(t)=\frac{1}{2}-(4-b)u^2+au^4$。对于左侧函数，先对 $\ln L(x)$ 在 $u=0$ 处展开，有 $\ln L\left(u+\frac{1}{2}\right)=-\ln2-6u^2-\frac{28}{3}u^4+\mathcal{O}(u^6)$，还原为指数形式可得 $L\left(u+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\ln2-6u^2-\frac{28}{3}u^4+\mathcal{O}(u^6)}=\frac{1}{2}-3u^2+\frac{13}{3}u^4+\mathcal{O}(u^6)$。为保证在极值点局部区间内存在 $L(x)\le f(t)\le R(x)$，这三个展开式的二次项系数必须满足不等式链 $-3\le-(4-b)\le-\frac{\pi^2}{4}$，解得 $1\le b\le4-\frac{\pi^2}{4}$。

最后，通过比较高阶项以确定参数的最简取值。综合渐近阶与局部曲率的要求，$b$ 的取值范围

为 $\left[1,4-\frac{\pi^2}{4}\right]$。若取下确界 $b=1$，则 $a=4$。此时中间函数与左侧函数的二次项系数同为 $-3$，需进一步比较四次项系数。中间函数展开式的四次项系数为 $a=4$，而左侧函数展开式的四次项系数为 $\frac{13}{3}$。由于 $\frac{13}{3}>4$，这意味着在离开极值点后，左侧函数的下降速度慢于中间函数，将反超中间函数从而导致局部放缩失效。因此，必须严格满足 $b>1$。为使多项式参数尽量简明，在合法区间 $\left(1,4-\frac{\pi^2}{4}\right]$ 内选取分母较小的有理数 $b=\frac{3}{2}$，代入关系式 $a+4b=8$ 解得 $a=2$。

综上所述，满足所有端点渐近展开和极值点泰勒展开钳制条件的中间过渡多项式为 $f(t)=2t^2+\frac{3}{2}t$。将其还原为关于 $x$ 的表达式，即为证明中所构造的中间函数 $M(x)=2x^2(1-x)^2+\frac{3}{2}x(1-x)$。

令 $L(x)=x^{1-x}(1-x)^x$，$M(x)=2x^2(1-x)^2+\frac{3}{2}x(1-x)$，$R(x)=\frac{\sin\pi x}{2}$。原命题等价于证明对任意 $x\in(0,1)$，恒有 $L(x)\le M(x)\le R(x)$ 成立。由于 $L(x)$、$M(x)$ 及 $R(x)$ 在定义域 $(0,1)$ 上均关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，因此只需证明当 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 时，不等式 $L(x)\le M(x)\le R(x)$ 成立即可。

先证明左侧不等式 $L(x)\le M(x)$。当 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 时，两端函数值均大于 0。对不等式两边同时取自然对数，即证 $(1-x)\ln x+x\ln(1-x)\le\ln\left(2x^2(1-x)^2+\frac{3}{2}x(1-x)\right)$ 成立。令 $t=x(1-x)$，当 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 时，$t\in(0,\frac{1}{4}]$ 且单调递增。不等式左边可恒等变形为 $\ln t-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$，右侧可化为 $\ln t+\ln\left(2t+\frac{3}{2}\right)$。消去两侧相同的 $\ln t$，原不等式等价于证明 $-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)\le\ln\left(2t+\frac{3}{2}\right)$。构造函数 $H(x)=\ln\left(2t+\frac{3}{2}\right)+x\ln x+(1-x)\ln(1-x)$，目标转化为证明在 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 上 $H(x)\ge 0$ 恒成立。对 $H(x)$ 求一阶导数，注意到 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=1-2x$，有

$$H'(x)=\frac{2(1-2x)}{2t+\frac{3}{2}}+\ln x+1-\ln(1-x)-1=\frac{4(1-2x)}{4t+3}+\ln x-\ln(1-x).$$

继续对 $H'(x)$ 求二阶导数，利用除法求导法则得

$$H''(x)=\frac{-8(4t+3)-4(1-2x)\cdot 4(1-2x)}{(4t+3)^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}.$$

由于 $(1-2x)^2=1-4x+4x^2=1-4t$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1}{t}$，可将 $H''(x)$ 完全转化为关于 $t$ 的表达式：

$$H''(x)=\frac{-32t-24-16(1-4t)}{(4t+3)^2}+\frac{1}{t}=\frac{32t-40}{(4t+3)^2}+\frac{1}{t}.$$

通分并合并同类项，得

$$H''(x)=\frac{t(32t-40)+(4t+3)^2}{t(4t+3)^2}=\frac{32t^2-40t+16t^2+24t+9}{t(4t+3)^2}=\frac{48t^2-16t+9}{t(4t+3)^2}.$$

对于分子二次多项式 $48t^2-16t+9$，其判别式 $\Delta=(-16)^2-4\times48\times9=256-1728<0$，且二次项系数 $48>0$，故对任意实数 $t$，恒有 $48t^2-16t+9>0$。由于在区间 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 内 $t>0$，因此 $H''(x)>0$ 恒成立。这表明一阶导数 $H'(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{2}]$ 上严格单调递增。结合 $H'\left(\frac{1}{2}\right)=0+\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}=0$，可知当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，恒有 $H'(x)<0$。从而原函数 $H(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}]$ 上严格单调递减。代入端点值 $H\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(2\times\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\ln 2-\ln 2=0$，可知对于所有的 $x\in(0,\frac{1}{2}]$，均有 $H(x)\ge 0$ 成立。左侧不等式得证。

接着证明右侧不等式 $M(x) \le R(x)$。为分析函数性质，作平移代换令 $u = \frac{1}{2} - x$。当 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 时，$u \in [0, \frac{1}{2})$。此时 $t = x(1-x) = \left(\frac{1}{2} - u\right)\left(\frac{1}{2} + u\right) = \frac{1}{4} - u^2$。代入中间函数 $M(x)$ 展开得：

$$M(x) = 2\left(\frac{1}{4} - u^2\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - u^2\right) = 2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}u^2 + u^4\right) + \frac{3}{8} - \frac{3}{2}u^2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}u^2 + 2u^4.$$

右侧函数转化为 $R(x) = \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} - u\right)\right)}{2} = \frac{\cos \pi u}{2}$。原不等式等价于 $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}u^2 + 2u^4 \le \frac{\cos \pi u}{2}$。两边同乘 2 并移项，构造判定函数 $g(u) = \cos \pi u - 1 + 5u^2 - 4u^4$。只需证明当 $u \in [0, \frac{1}{2})$ 时，$g(u) \ge 0$ 恒成立。对 $g(u)$ 依次求各阶导数：

$$g'(u) = -\pi \sin \pi u + 10u - 16u^3,$$

$$g''(u) = -\pi^2 \cos \pi u + 10 - 48u^2,$$

$$g'''(u) = \pi^3 \sin \pi u - 96u,$$

$$g^{(4)}(u) = \pi^4 \cos \pi u - 96,$$

$$g^{(5)}(u) = -\pi^5 \sin \pi u.$$

当 $u \in (0, \frac{1}{2})$ 时，$g^{(5)}(u) < 0$ 恒成立，因此 $g^{(4)}(u)$ 在该区间内严格单调递减。考虑到 $\pi > 3.14$，有 $\pi^4 > 3.14^4 \approx 97.2 > 96$。因此 $g^{(4)}(0) = \pi^4 - 96 > 0$，又 $g^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = -96 < 0$。由零点存在定理可知，$g^{(4)}(u)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内存在唯一零点。这表明 $g'''(u)$ 在该区间内先严格单调递增，后严格单调递减。考虑到 $\pi < 3.15$，有 $\pi^3 < 3.15^3 \approx 31.3 < 48$。因此 $g'''(0) = 0$，且 $g'''\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^3 - 48 < 0$。因 $g'''(u)$ 从 0 上升至正值后再下降至负值，故 $g'''(u)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内存在唯一零点。同理推知，$g''(u)$ 在该区间内先严格单调递增，后严格单调递减。考虑到 $\pi^2 < 10$，有 $g''(0) = 10 - \pi^2 > 0$，且 $g''\left(\frac{1}{2}\right) = 10 - 12 = -2 < 0$。因 $g''(u)$ 从正值上升后再下降至负值，故 $g''(u)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内存在唯一零点。推知 $g'(u)$ 在该区间内亦先严格单调递增，后严格单调递减。计算端点值得 $g'(0) = 0$，且 $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\pi + 5 - 2 = 3 - \pi < 0$。因 $g'(u)$ 从 0 上升至正值后再下降至负值，故 $g'(u)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内存在唯一零点。综合以上分析可知，原函数 $g(u)$ 的导数 $g'(u)$ 在区间内先正后负。因此，$g(u)$ 在区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ 内先严格单调递增，后严格单调递减。验证区间端点值：

$$g(0) = \cos 0 - 1 + 0 = 0,$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - 1 + 5 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{16} = 0.$$

由于连续函数 $g(u)$ 在区间起点的函数值为 0，内部先增后减，且在区间终点落回至 0，故对于任意 $u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，恒有 $g(u) > 0$ 成立。右侧不等式得证。

综上所述，当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 时，左中右不等式链成立。由对称性，对任意 $x \in (0, 1)$，不等式 $x^{1-x}(1-x)^x \le 2x^2(1-x)^2 + \frac{3}{2}x(1-x) \le \frac{\sin \pi x}{2}$ 均成立。证毕。

## 6.2 估阶 + 配导数型

**6.2.1 例题:**

对于任意 $x\in(0,1)$，恒成立 $2\ln 2\cdot\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})\geq \ln x\cdot\ln(1-x)$

**解** 6.2.1. 要证明原不等式 $2\ln 2\cdot\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})\geq \ln x\cdot\ln(1-x)$，可将其分别记为左侧函数 $L(x)$ 与右侧函数 $R(x)$。寻找中间函数 $f(x)$ 的过程主要基于渐近线估阶、对称性及切线插值原理。

渐近估阶与对称性确定函数结构

当 $x\to 0$ 时，利用泰勒展开分析两侧函数的渐近行为。对于左侧，$\ln(1+\sqrt{x}-\frac{x}{2}+\cdots)\sim\sqrt{x}$，故 $L(x)$ 的衰减速度为 $O(\sqrt{x})$。对于右侧，$\ln(1-x)\sim -x$，故 $R(x)$ 的衰减速度为 $O(x\ln x)$。在 $x\to 0$ 附近，$\sqrt{x}$ 的量级大于 $-x\ln x$。要使中间函数 $f(x)$ 满足 $L(x)\geq f(x)\geq R(x)$，其阶数必须与左侧同阶，即保持在 $O(\sqrt{x})$ 级别。由于原不等式关于直线 $x=1/2$ 完美对称，中间函数的骨架自然被设定为具备相同对称性的形式：$f(x)=C\sqrt{x(1-x)}$。

埃米特插值确定参数

利用中心对称点 $x=1/2$ 确定系数 $C$。计算两侧函数在该点的值，可得 $L(1/2)=(\ln 2)^2$ 且 $R(1/2)=(\ln 2)^2$。这表明两侧函数在对称中心处取得等号。为了使中间函数无缝夹在两者之间，$f(x)$ 必须同样经过该点，即 $f(1/2)=(\ln 2)^2$。代入骨架公式得到 $C\sqrt{1/4}=(\ln 2)^2$，解得 $C=2(\ln 2)^2$。由此，中间函数被唯一确定为 $f(x)=2(\ln 2)^2\sqrt{x(1-x)}$。

二阶导数曲率验证

由于三者关于 $x=1/2$ 对称，其在该点的一阶导数均为 0。进一步计算二阶导数：

$$L''(1/2)=-2\ln 2\approx -1.386$$
$$f''(1/2)=-4(\ln 2)^2\approx -1.922$$
$$R''(1/2)=8\ln 2-8\approx -2.455$$

上述结果满足 $L''(1/2)>f''(1/2)>R''(1/2)$。这在几何上意味着在 $x=1/2$ 处，左侧开口最平缓，中间函数次之，右侧开口最陡峭，从而在局部严格保证了不交叉的上下界关系，为全局放缩提供了坚实基础。

证明：对任意 $x\in(0,1)$，恒有 $2\ln 2\cdot\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})\geq 2(\ln 2)^2\sqrt{x(1-x)}\geq \ln x\cdot\ln(1-x)$。

证明左半部分：$L(x)\geq f(x)$：令 $w=2\sqrt{x(1-x)}$。由 $x\in(0,1)$ 及均值不等式可知，$w\in(0,1]$，且当且仅当 $x=1/2$ 时 $w=1$。对左侧真数项进行平方变形：$(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})^2=1+2\sqrt{x(1-x)}=1+w$，故 $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{1+w}$。将 $w$ 代入目标不等式，左侧转化为 $\ln 2\cdot\ln(1+w)$，右侧转化为 $(\ln 2)^2 w$。两边同除以 $\ln 2>0$，等价于证明对于 $w\in(0,1]$，恒有 $\ln(1+w)\geq w\ln 2$。

构造函数 $g(w)=\ln(1+w)-w\ln 2$。对其求二阶导数，得到 $g''(w)=-\frac{1}{(1+w)^2}<0$ 恒成立。因此 $g(w)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是严格的凹函数。计算端点值可知 $g(0)=0$ 且 $g(1)=\ln 2-\ln 2=0$。根据凹函数的割线性质，函数图像在两端点连线之上，故对于 $w\in(0,1]$，恒有 $g(w)\geq 0$。等号成立当且仅当 $w=1$，即 $x=1/2$。左侧不等式得证。

证明右半部分：$f(x)\geq R(x)$：由原不等式关于 $x=1/2$ 对称，作平移换元，令 $x=\frac{1-y}{2}$，其中

$y\in(-1,1)$。由对称性，仅需严格证明当 $y\in[0,1)$ 时不等式成立即可。代入变量后，$1-x=\frac{1+y}{2}$ 且 $\sqrt{x(1-x)}=\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}$。不等式转化为：

$$(\ln 2)^2\sqrt{1-y^2}\geq(\ln(1-y)-\ln 2)(\ln(1+y)-\ln 2)$$

移项并构造差值函数 $F(y)$：

$$F(y)=(\ln 2)^2(1-\sqrt{1-y^2})-\ln 2\ln(1-y^2)+\ln(1-y)\ln(1+y)$$

目标为证明在 $y\in[0,1)$ 上，$F(y)\leq 0$ 恒成立。

分析端点极限。显然 $F(0)=0$。当 $y\to 1^-$ 时，利用极限运算律与洛必达法则（$\lim_{z\to 0^+}z\ln z=0$），可得 $\lim_{y\to 1^-}\ln(1-y)[\ln(1+y)-\ln 2]=0$，从而 $\lim_{y\to 1^-}F(y)=(\ln 2)^2-(\ln 2)^2=0$。

对 $F(y)$ 求导，并提取正因子 $\frac{1}{1-y^2}$，定义符号判定函数 $K(y)=(1-y^2)F'(y)$：

$$K(y)=(\ln 2)^2y\sqrt{1-y^2}+2y\ln 2-(1+y)\ln(1+y)+(1-y)\ln(1-y)$$

验证端点得 $K(0)=0$ 且 $\lim_{y\to 1^-}K(y)=0$。对 $K(y)$ 求导：

$$K'(y)=(\ln 2)^2\frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}+2\ln 2-2-\ln(1-y^2)$$

为分析 $K'(y)$ 的符号，令 $t=\sqrt{1-y^2}$，由于 $y\in(0,1)$，则 $t\in(0,1)$。将 $K'(y)$ 转化为关于 $t$ 的函数 $H(t)$：

$$H(t)=(\ln 2)^2\frac{2t^2-1}{t}+2\ln 2-2-2\ln t$$

对 $H(t)$ 求导：

$$H'(t)=\frac{2(\ln 2)^2t^2-2t+(\ln 2)^2}{t^2}$$

分子为开口向上的二次函数，其判别式 $\Delta=4-8(\ln 2)^4$。因 $\ln 2\approx 0.693<0.70$，可知 $(\ln 2)^4<0.2401$，从而 $\Delta>0$。这表明 $H'(t)$ 在实数域内存在两个不等实根，且由韦达定理可知存在一根 $t_1\in(0,1)$。因此 $H(t)$ 在 $(0,1)$ 内先单调递增后单调递减。

由于 $K(y)$ 在闭区间连续且开区间可导，且 $K(0)=0,K(1)=0$，由罗尔定理可知，必然存在 $c\in(0,1)$ 使得 $K'(c)=0$。这等价于 $H(t)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根。结合 $H(t)$ 先增后减的单调性，且 $\lim_{t\to 0^+}H(t)=-\infty$，$H(1)=(\ln 2)^2+2\ln 2-2<0$，可推断出极大值 $H(t_1)$ 必定严格大于 0。由此，连续函数 $H(t)$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有两个根。

将此结论逆推至原导函数。$H(t)$ 有两个根意味着 $K'(y)$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有两个根。由于 $K'(0)=H(1)<0$，$K'(y)$ 的符号在 $(0,1)$ 内的演变必然为：负 $\to$ 正 $\to$ 负。这使得 $K(y)$ 的走势为：先减 $\to$ 后增 $\to$ 再减。结合出发点 $K(0)=0$ 与终点 $\lim_{y\to 1^-}K(y)=0$，$K(y)$ 必须在 $(0,1)$ 内唯一一次穿透 $y$ 轴（从负值变为正值）。设此根为 $y_0$。

因为 $F'(y)=\frac{K(y)}{1-y^2}$，其符号与 $K(y)$ 完全一致。故 $F(y)$ 在 $(0,y_0)$ 上单调递减，在 $(y_0,1)$ 上单调递增。考虑到 $F(y)$ 从 $F(0)=0$ 开始下降，且最终极限为 $\lim_{y\to 1^-}F(y)=0$，因此在整个区间 $y\in(0,1)$ 内，$F(y)\leq 0$ 严格成立。等号成立当且仅当 $y=0$，即 $x=1/2$。右侧不等式得证。

综上所述，原不等式首尾取等的条件完全重合（$x=1/2$），充分必要条件一一对应，证明闭环成立。

## 6.3　分离 + 泰勒型

**6.3.1 例题:**

证明当 $x>1$ 时，下式成立：

$$x-\ln x-\frac{\ln(x-\ln x)}{x(x-\ln x-1)}+\ln\frac{\ln(x-\ln x)}{x(x-\ln x-1)}>0$$

**解** 6.3.1. 第一部分：深度解密中间函数的构造奥妙

构造中间函数 $\frac{x-\ln x+1}{2}$ 的过程，并非基于直觉，而是基于“变量解耦”与“泰勒渐近匹配（阶数探测）”的严密推导。

**1.** 动机：变量解耦（主元分离）原不等式中 $x$ 与 $\ln x$ 高度耦合，直接处理极易导致求导陷入极其复杂的运算。通过对数项的天然性质 $\ln\frac{\ln t}{x(t-1)}=\ln\frac{\ln t}{t-1}-\ln x$（其中设 $t=x-\ln x$），可以将含有 $x$ 的独立项全部移至不等式右侧。变形后的左侧变为 $L(t)=t+\ln\frac{\ln t}{t-1}$，成功将一个双变量纠缠的复杂系统降维成关于 $t$ 的单变量纯函数，为后续局部分析奠定了基础。

**2.** 核心：极值点的切线放缩与泰勒阶数匹配不等式的最弱环节（即最易取等的临界点）在于 $x\to1^+$，此时 $t\to1^+$。考察左侧纯函数 $L(t)$ 在 $t\to1$ 处的局部性质：极限值为 $\lim_{t\to1}L(t)=1+\ln(1)=1$。一阶导数（即切线斜率）为 $L'(t)=1+\frac{t-1-t\ln t}{t(t-1)\ln t}$，利用洛必达法则或泰勒展开求极限得 $\lim_{t\to1}L'(t)=\frac{1}{2}$。因此，$L(t)$ 在临界点 $t=1$ 处的切线方程自然生成为 $y=1+\frac{1}{2}(t-1)=\frac{t+1}{2}$。将 $t=x-\ln x$ 代回，便得到了该中间函数。由于 $L(t)$ 是严格下凸函数，其图像始终位于切线上方，这保证了左侧必然大于此中间函数。

**3.** 必然性：切线作为右侧上界的阶数分析在极值临界点进行多项式阶数探测。令 $x=1+v$ $(v\to0^+)$，复合微元 $t-1=x-\ln x-1\approx\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{3}v^3$。在 $v\to0$ 处展开到第三阶（$v^3$）：左侧展开：$L(x)\approx1+\frac{1}{4}v^2-\frac{1}{6}v^3$ 右侧展开：$R(x)\approx1+\frac{1}{4}v^2-\frac{1}{4}v^3$ 切线展开：$\frac{t+1}{2}\approx1+\frac{1}{4}v^2-\frac{1}{6}v^3$ 在微观极限处，左侧、右侧与切线的常数项和二次项系数完全一致（均为 $1+\frac{1}{4}v^2$）。真正的差距在三阶项 $v^3$ 才显露：由于切线的三阶系数 $-\frac{1}{6}$ 严格大于右侧的三阶系数 $-\frac{1}{4}$，切线从 $x$ 离开 1 的最初瞬间起，就天然凌驾于右侧函数之上。这种通过阶数匹配直接锁定局部压制的方法，构成了放缩的底层逻辑。

考场证明：利用对数运算法则，将含有单变量 $x$ 的对数项移至不等式右侧，原命题等价于证明：

$$x-\ln x+\ln\frac{\ln(x-\ln x)}{x-\ln x-1}>\ln x+\frac{\ln(x-\ln x)}{x(x-\ln x-1)}$$

设 $t=x-\ln x$。由 $x>1$ 时 $(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}>0$ 可知，$t$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $t>1-\ln1=1$。上述不等式可转化为证明当 $x>1$ 且 $t>1$ 时：

$$t+\ln\frac{\ln t}{t-1}>\ln x+\frac{\ln t}{x(t-1)}$$

为证此不等式，引入中间过渡函数 $\frac{t+1}{2}$，将证明拆解为如下两个部分。

第一部分：证明当 $t>1$ 时，$t+\ln\frac{\ln t}{t-1}>\frac{t+1}{2}$。移项后等价于证明 $\frac{t-1}{2}+\ln(\ln t)-\ln(t-1)>0$。构造函数 $g(t)=\frac{t-1}{2}+\ln(\ln t)-\ln(t-1)$。对其求导并通分得：

$$g'(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{t\ln t}-\frac{1}{t-1}=\frac{t(t-3)\ln t+2(t-1)}{2t(t-1)\ln t}$$

因 $t>1$，分母 $2t(t-1)\ln t>0$。考察分子，构造函数 $k(t)=t(t-3)\ln t+2(t-1)$，对其连续求导：

$$k'(t)=(2t-3)\ln t+t-1$$

$$k''(t)=2\ln t+3-\frac{3}{t}=2\ln t+3\left(1-\frac{1}{t}\right)$$

当 $t>1$ 时，$\ln t>0$ 且 $1-\frac{1}{t}>0$，故 $k''(t)>0$ 恒成立。由此推知 $k'(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，结合 $k'(1)=0$，得 $k'(t)>0$；进而 $k(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，结合 $k(1)=0$，得 $k(t)>0$。因此，当 $t>1$ 时 $g'(t)>0$，$g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。由极限 $\lim_{t\to1^+}\frac{\ln t}{t-1}=1$ 可知 $\lim_{t\to1^+}g(t)=0$。从而当 $t>1$ 时 $g(t)>0$，该部分不等式成立。

第二部分：证明当 $x>1$ 时，$\frac{t+1}{2}>\ln x+\frac{\ln t}{x(t-1)}$。将其中的 $t$ 代回为 $x-\ln x$，整理得：

$$\frac{x-3\ln x+1}{2}>\frac{\ln(x-\ln x)}{x(x-\ln x-1)}$$

对不等式右端引入引理：对于任意 $u>1$，恒有 $\frac{\ln u}{u-1}<\frac{1}{\sqrt{u}}$。证明引理：构造函数 $\varphi(u)=u-1-\sqrt{u}\ln u$。对其连续求导得 $\varphi'(u)=1-\frac{\ln u+2}{2\sqrt{u}}$ 及 $\varphi''(u)=\frac{\ln u}{4u\sqrt{u}}$。当 $u>1$ 时，$\varphi''(u)>0$，故 $\varphi'(u)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，由 $\varphi'(1)=0$ 得 $\varphi'(u)>0$；进而 $\varphi(u)$ 单调递增，由 $\varphi(1)=0$ 得 $\varphi(u)>0$，引理得证。应用引理，原不等式右端满足 $\frac{\ln t}{x(t-1)}<\frac{1}{x\sqrt{t}}=\frac{1}{x\sqrt{x-\ln x}}$。故只需证明充分条件：

$$\frac{x-3\ln x+1}{2}\geq\frac{1}{x\sqrt{x-\ln x}}$$

记 $L(x)=x-3\ln x+1$。由 $L'(x)=1-\frac{3}{x}$ 可知，$L(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值 $4-3\ln 3$。因 $\ln 27<\ln e^4=4$，即 $4-3\ln 3>0$，故当 $x>1$ 时 $L(x)>0$ 恒成立。将上述待证不等式两端平方并交叉相乘，等价于证明当 $x>1$ 时 $G(x)=x^2(x-\ln x)L^2(x)-4\geq 0$。显然端点处 $G(1)=0$。对 $G(x)$ 求导并提取公因式 $xL(x)$，得：

$$G'(x)=xL(x)\left[(3x-2\ln x-1)L(x)+2(x-\ln x)(x-3)\right]$$

将方括号内的表达式展开并合并同类项，设其为 $M(x)$：

$$M(x)=5x^2-13x\ln x-4x+6\ln^2 x+7\ln x-1$$

对 $M(x)$ 连续求导：

$$M'(x)=10x-13\ln x-17+\frac{12\ln x+7}{x}$$

$$M''(x)=\frac{10x^2-13x+5-12\ln x}{x^2}$$

当 $x>1$ 时，利用基础放缩 $\ln x\leq x-1$，可对 $M''(x)$ 的分子进一步放缩：

$$10x^2-13x+5-12\ln x\geq 10x^2-13x+5-12(x-1)=10x^2-25x+17$$

二次函数 $10x^2-25x+17$ 的判别式 $\Delta=(-25)^2-4\times10\times17=-55<0$。因开口向上且 $\Delta<0$，该多项式恒大于 0，故 $M''(x)>0$ 在 $x>1$ 时恒成立。由此推知 $M'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，由 $M'(1)=0$ 得 $M'(x)>0$；进而 $M(x)$ 单调递增，由 $M(1)=0$ 得 $M(x)>0$。因 $x>1$ 时 $xL(x)>0$ 且 $M(x)>0$，故 $G'(x)=xL(x)M(x)>0$ 恒成立。这表明 $G(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，从而 $G(x)\geq G(1)=0$ 成立。综上所述，不等式左端严格大于中间函数，中间函数严格大于右端，原不等式在 $x>1$ 时得证。

# 第七章 伪装导数题

## 7.1 概率

7.1.1 例题:

事件 $A$、$B$ 是随机试验中的两个事件，$P(A)$、$P(B) \neq 0$，且 $P(A)+P(B)=\frac{1}{2}$，

$$\frac{1}{P(B|A)}+\frac{1}{P(A|B)}=\frac{1}{P(B)-P(AB)}+\frac{1}{P(A)-P(AB)}+2$$

下列说法正确的是

A. 事件 $A$、$B$ 一定不相互独立

B. 若 $P(A)=\frac{1}{4}$，则 $P(AB)=\frac{1}{16}$

C. $P(AB) \in \left(0, \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right]$

D. $P(AB) \in \left(0, \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right]$

**解** 7.1.1. 设 $P(A)=x$，$P(B)=y$，$P(AB)=z$。则 $x>0$，$y>0$ 且 $x+y=\frac{1}{2}$。条件概率 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{z}{x}$，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{z}{y}$。由于原等式中包含 $\frac{1}{P(B|A)}$ 等项作分母，可知 $z \neq 0$，即 $z>0$。同时分母 $P(A)-P(AB)=x-z \neq 0$ 且 $P(B)-P(AB)=y-z \neq 0$，说明 $z<x$ 且 $z<y$。结合 $x+y=\frac{1}{2}$，必然有 $z<\frac{1}{4}$。将上述变量代入原等式:

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=\frac{1}{2z}=\frac{1}{y-z}+\frac{1}{x-z}+2 \Leftrightarrow xy=\frac{3}{2}z-z^2$$

已知 $x+y=\frac{1}{2}$ 且 $xy=\frac{3}{2}z-z^2$。根据韦达定理，$x$ 和 $y$ 是关于 $t$ 的一元二次方程 $t^2-\frac{1}{2}t+\left(\frac{3}{2}z-z^2\right)=0$ 的两个实数根。为了保证实数根存在，判别式必须满足 $\Delta \geq 0$，即 $16z^2-24z+1 \geq 0$。解得 $z \leq \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$ 或 $z \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$。结合前提 $0<z<\frac{1}{4}$，且 $\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \approx 0.0428 < \frac{1}{4}$，可得 $z$ 的严格取值范围为:

$$z \in \left(0, \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right]$$

- 选项 **A**：假设事件 $A, B$ 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 $z=xy$。代入推导出的关系式 $xy=\frac{3}{2}z-z^2$，得 $z=\frac{3}{2}z-z^2 \implies z^2-\frac{1}{2}z=0$。解得 $z=0$ 或 $z=\frac{1}{2}$。但这都不在有效定义域 $\left(0, \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right]$ 内。因此假设不成立，事件 $A, B$ 一定不相互独立，故 **A** 正确。
- 选项 **B**：若 $P(A)=\frac{1}{4}$，由 $P(A)+P(B)=\frac{1}{2}$ 得 $P(B)=\frac{1}{4}$。此时 $xy=\frac{1}{16}$。代入关系式有 $\frac{1}{16}=\frac{3}{2}z-z^2$，化简为 $16z^2-24z+1=0$。解得 $z=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$（另一根大于 $\frac{1}{4}$ 故舍去）。因为 $\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \neq \frac{1}{16}$，故 **B** 错误。
- 选项 **C**：$P(AB)=z$ 的取值范围确为 $\left(0, \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right]$，故 **C** 正确。
- 选项 **D**：由于 C 正确，故 **D** 正确。

综上所述，正确的说法是 ACD。

**7.1.2 例题:**

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \in \mathbf{N}^*$, 且 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项的中位数为 $n$.
(1) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列，求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明：$a_n \geqslant n$ ;
(3) 给定 $k \in \mathbb{N}^*$, 求关于 $n$ 的方程 $a_n = k$ 所有可能的解集.

**解 7.1.2.** (1) 由于 $\{a_n\}$ 是递增数列，当 $n = 2k-1$ 时，前 $2k-1$ 项的中位数为第 $k$ 项，故 $a_k = 2k-1$；当 $n = 2k$ 时，前 $2k$ 项的中位数为 $\frac{a_k+a_{k+1}}{2} = 2k$。将 $a_k = 2k-1$ 代入解得 $a_{k+1} = 2k+1$。故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n-1$。

(2) 记 $S_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，将其元素升序排列为 $x_{n,1} \leqslant x_{n,2} \leqslant \cdots \leqslant x_{n,n}$，并记 $C_n(x)$ 为 $S_n$ 中不超过 $x$ 的元素个数。对于 $n = 2k-1$，中位数为 $x_{2k-1,k} = 2k-1$，说明 $C_{2k-1}(2k-2) \leqslant k-1$ 且 $C_{2k-1}(2k-1) \geqslant k$。对于 $n = 2k$，中位数满足 $x_{2k,k} + x_{2k,k+1} = 4k$。因为 $x_{2k,k} \leqslant 2k \leqslant x_{2k,k+1}$，无论 $x_{2k,k} = 2k$ 还是 $x_{2k,k} \leqslant 2k-1$，均有 $C_{2k}(2k-1) \leqslant k$。由于 $S_{2k} = S_{2k-1} \cup \{a_{2k}\}$，故 $k \geqslant C_{2k}(2k-1) = C_{2k-1}(2k-1) + I(a_{2k} \leqslant 2k-1) \geqslant k + I(a_{2k} \leqslant 2k-1)$，这迫使 $I(a_{2k} \leqslant 2k-1) = 0$，即 $a_{2k} \geqslant 2k$。同理，对于 $n = 2k-2$ $(k \geqslant 2)$，中位数满足 $x_{2k-2,k-1} + x_{2k-2,k} = 4k-4$。若 $x_{2k-2,k} \leqslant 2k-2$，则必有 $x_{2k-2,k-1} = x_{2k-2,k} = 2k-2$，导致 $C_{2k-2}(2k-2) \geqslant k$。但 $S_{2k-1}$ 包含 $S_{2k-2}$，这会导致 $k-1 \geqslant C_{2k-1}(2k-2) \geqslant C_{2k-2}(2k-2) \geqslant k$ 的矛盾。故 $x_{2k-2,k} \geqslant 2k-1$，使得 $C_{2k-2}(2k-2) = k-1$。进而 $k-1 \geqslant C_{2k-1}(2k-2) = C_{2k-2}(2k-2) + I(a_{2k-1} \leqslant 2k-2) = k-1 + I(a_{2k-1} \leqslant 2k-2)$，迫使 $I(a_{2k-1} \leqslant 2k-2) = 0$，即 $a_{2k-1} \geqslant 2k-1$。结合 $a_1 = 1 \geqslant 1$，对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 均有 $a_n \geqslant n$。

(3) 由 (2) 推导可知 $C_{2m}(2m-1) = m$ 且 $x_{2m,m} \leqslant 2m-1$，结合 $x_{2m,m} + x_{2m,m+1} = 4m$ 推得 $x_{2m,m+1} \geqslant 2m+1$。这意味着数列中不可能出现偶数，否则若 $a_n = 2m$，由 $a_n \geqslant n$ 必有 $n \leqslant 2m$，导致 $2m \in S_{2m}$，产生矛盾。因此，当 $k$ 为偶数时，可能解集仅有 $\emptyset$。当 $k$ 为奇数时，令 $k = 2m-1$。为满足前 $2m$ 项恰有 $m$ 个数 $\leqslant 2m-1$ 且无偶数，这 $m$ 个数必须是 $1, 3, \ldots, 2m-1$ 的无重复排列。同理分析 $n = 2m-2$ 时的中位数可知 $x_{2m-2,m-1} = 2m-3$，故 $x_{2m-2,m} = 2m-1$。这说明元素 $2m-1$ 必定已出现在 $S_{2m-2}$ 中，其位置 $n \leqslant 2m-2 = k-1$。结合无重复元素及 $a_n \geqslant n$ 的约束：当 $k = 1$ 时，$n \leqslant 1$，解集仅有 $\{1\}$；当 $k = 3$ 时，$n \leqslant 2$ 且 $a_1 = 1$，解集仅有 $\{2\}$。对于奇数 $k \geqslant 5$，因为 $a_1, a_2$ 已被固定为 $1, 3$，新元素 $n$ 的范围放宽至 $3 \leqslant n \leqslant k-1$。在此范围内，总能通过灵活安排后续冗余奇数来构造合法的数列，使得 $a_n = k$ 成立。综上，关于 $n$ 的方程 $a_n = k$ 所有可能的解集为：当 $k$ 为偶数时为 $\emptyset$；当 $k = 1$ 时为 $\{1\}$；当 $k = 3$ 时为 $\{2\}$；当奇数 $k \geqslant 5$ 时为 $\{3\}, \{4\}, \ldots, \{k-1\}$。

**7.1.3 例题: 邪帝原创导数题**

已知函数 $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x}, (a > 1)$
（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;
（2）若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3), (x_1 < x_2 < x_3)$，证明 $f(x_1 x_2 x_3) > 1 - a$.

**解** 7.1.3. 第一步：找出隐藏的"完美对称"原函数 $f(x) = x - (a+1)\ln x - \frac{a}{x}$ 包含对数和分式，看起来毫无对称性。但我们可以通过一个极其优美的代数换元，将其彻底"拉平"。令 $x = \sqrt{a}e^t$，这样 $x \in (0, +\infty)$ 就被映射到了 $t \in (-\infty, +\infty)$。我们把这个代入原函数：

$$f(\sqrt{a}e^t) = \sqrt{a}e^t - (a+1)\left(t + \frac{1}{2}\ln a\right) - \sqrt{a}e^{-t}$$

$$= 2\sqrt{a}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) - (a+1)t - \frac{a+1}{2}\ln a$$

提取出常数项，我们构造一个新函数 $h(t)$：

$$h(t) = f(\sqrt{a}e^t) + \frac{a+1}{2}\ln a = 2\sqrt{a}\sinh t - (a+1)t$$

奇迹出现了：$h(t)$ 是一个完美的奇函数！即 $h(-t) = -h(t)$。

原函数 $f(x)$ 所有的非对称和扭曲，在指数换元下，全都被吸收成了完美的中心对称！第二步：将"三元乘积"转化为"三根之和"已知 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = c$。在我们构造的新世界里，这就等价于直线 $y = C$（其中 $C = c + \frac{a+1}{2}\ln a$）与奇函数 $h(t)$ 交于三个点 $t_1 < t_2 < t_3$。因为 $x_i = \sqrt{a}e^{t_i}$，所以我们的三个根的乘积变成了：

$$x_1x_2x_3 = \left(\sqrt{a}e^{t_1}\right)\left(\sqrt{a}e^{t_2}\right)\left(\sqrt{a}e^{t_3}\right) = a^{\frac{3}{2}}e^{t_1+t_2+t_3}$$

再来看目标不等式右侧的 $x_0$。题目第一问求出极大值为 $f(1) = 1-a$，$x_0$ 是 $(a, +\infty)$ 上满足 $f(x_0) = 1-a$ 的根。在 $t$ 的世界里，$x = 1$ 对应着 $t_A = -\frac{1}{2}\ln a$（这是 $h(t)$ 的极大值点）。所以 $x_0$ 对应着某个正数 $t_B > 0$，满足 $h(t_B) = h(t_A) = C_{\max}$。即：$x_0 = \sqrt{a}e^{t_B}$。现在，我们把要证的目标不等式 $x_1x_2x_3 > x_0$ 翻译成 $t$ 的语言：

$$a^{\frac{3}{2}}e^{t_1+t_2+t_3} > \sqrt{a}e^{t_B}$$

两边同除以 $\sqrt{a}$ 并取对数：

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ln a > t_B$$

前面说过 $t_A = -\frac{1}{2}\ln a$，所以 $\ln a = -2t_A$。代入上式，目标不等式精准等价于：

$$t_1 + t_2 + t_3 > 2t_A + t_B$$

你看，原本复杂无比的三个根的乘积与 $x_0$ 的比较，在对称换元后，完美地变成了一元奇函数三个根的和与极限极值点的线性比较！$\ln a$ 这个恶心的常数项甚至自动抵消了！第三步：一元单变量的终极秒杀（拐点偏移）现在问题变成了纯粹的函数图像性质：已知奇函数 $h(t) = 2\sqrt{a}\sinh t - (a+1)t$，其极大值点为 $t_A < 0$。水平线 $y = C$ 与其交于 $t_1, t_2, t_3$ 三点。求证：三根之和 $S(C) = t_1+t_2+t_3 > 2t_A+t_B$。既然 $S(C)$ 是一个关于水平线高度 $C$ 的单变量函数，我们只需要研究它的单调性：当 $C$ 不断向上平移，逼近极大值 $C_{\max}$ 时，交点会发生什么变化？显然，$t_1$ 和 $t_2$ 都在向极大值点 $t_A$ 靠拢，而 $t_3$ 在向 $t_B$ 靠拢。所以当 $C \to C_{\max}$ 时，极限状态刚好就是：

$$S(C_{\max}) = t_A + t_A + t_B = 2t_A + t_B$$

目标等式右侧的 $2t_A+t_B$，竟然就是三根之和 $S(C)$ 的下确界！由于 $h(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是严格上凸的 ($h''(t)=2\sqrt{a}\sinh t<0$)，根据拐点偏移的经典结论（或者对 $S(C)$ 求导可知 $S'(C)=\sum\frac{1}{h'(t_i)}<0$)，三根之和 $S(C)$ 是关于 $C$ 的严格单调递减函数。因为 $c<f(1)$，即水平线 $C<C_{\max}$，所以必然有：

$$S(C)>S(C_{\max})\implies t_1+t_2+t_3>2t_A+t_B$$

将其还原回 $x$，即得证 $f(x_1x_2x_3)>1-a$。

**7.1.4 例题:**

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+bx(a,b\in R)$.
(1) 若 $a=\frac{1}{e^4},b=-\frac{3}{e^2}$, 求函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间;
(2) 若存在实数 $b$, 使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点 $x_1,x_2,x_3$. 求 $a$ 的取值范围; 若 $x_1,x_2,x_3$ 成等差数列, 求证: $x_2^2>e^3$.

**解 7.1.4.** (1) 求函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间
由题意知，函数 $f(x)=\ln x+ax^2+bx$ 的定义域为 $x\in(0,+\infty)$。当 $a=\frac{1}{e^4},b=-\frac{3}{e^2}$ 时，函数解析式为：

$$f(x)=\ln x+\frac{1}{e^4}x^2-\frac{3}{e^2}x$$

对其求导，并进行通分整理：

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{e^4}x-\frac{3}{e^2}=\frac{2x^2-3e^2x+e^4}{e^4x}$$

由于在定义域内 $x>0$ 且 $e^4>0$，所以分母 $e^4x>0$ 恒成立。
令 $f'(x)\le 0$，只需分子满足：

$$2x^2-3e^2x+e^4\le 0$$

利用十字相乘法对左侧二次多项式进行因式分解：

$$(2x-e^2)(x-e^2)\le 0$$

解得两根之间的区域：

$$\frac{e^2}{2}\le x\le e^2$$

结论：函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{e^2}{2},e^2\right]$。
(2) □ 求 $a$ 的取值范围命题“存在实数 $b$ 使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点”，等价于方程 $\ln x+ax^2+bx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有三个不同的实数根。将原方程等式两边同除以 $x$（因为 $x>0$），分离出参数 $b$：

$$-b=\frac{\ln x}{x}+ax$$

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+ax \quad (x>0)$。问题转化为：水平直线 $y=-b$ 与函数 $y=g(x)$ 的图像存在 3 个不同的交点。

要使直线与函数图像交于 3 点，函数 $g(x)$ 必须既有局部极大值又有局部极小值。这就要求其导函数 $g'(x)=0$ 至少有两个不同的正实数根。对 $g(x)$ 求导：

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}+a=\frac{1-\ln x}{x^2}+a=\frac{ax^2-\ln x+1}{x^2}$$

令分子为 $h(x)=ax^2-\ln x+1 \quad (x>0)$，则 $g'(x)$ 的符号完全由 $h(x)$ 决定。

我们要使 $h(x)=0$ 有两个不同的正根。对 $h(x)$ 继续求导：

$$h'(x)=2ax-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-1}{x}$$

对参数 $a$ 的符号进行严格分类讨论：

情形一：若 $a\le 0$ 对于任意 $x>0$，$2ax^2\le 0 \implies 2ax^2-1<0$，因此 $h'(x)<0$ 恒成立。这说明 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减，故 $h(x)=0$ 至多只有 1 个根。这会导致 $g'(x)=0$ 至多只有 1 个变号零点，这意味着 $g(x)$ 的图像至多只有一次折返，任意水平直线 $y=-b$ 最多只能与 $g(x)$ 产生 2 个交点，绝对无法产生三个零点，矛盾！因此，必须有 $a>0$。

情形二：若 $a>0$ 令 $h'(x)=0$，解得唯一驻点 $x_0=\frac{1}{\sqrt{2a}}$。当 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增。因此，$h(x)$ 在 $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$ 处取得全局唯一极小值（也是最小值）：

$$h_{min}=h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=a\left(\frac{1}{2a}\right)-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)+1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln(2a)$$

要想让 $h(x)=0$ 能穿过 $x$ 轴产生两个不同的正根，必须要求该最小值严格小于 0：

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln(2a)<0 \implies \ln(2a)<-3 \implies 2a<e^{-3} \implies 0<a<\frac{1}{2e^3}$$

充分性论证（确保完全闭环）：当 $0<a<\frac{1}{2e^3}$ 时，$h_{min}<0$。同时计算边界极限：当 $x\to 0^+$ 时，$\ln x\to-\infty \implies h(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，因为 $a>0$，多项式增长压倒对数函数 $\implies h(x)\to+\infty$。由连续函数零点定理，$h(x)$ 恰有两个不同的根 $x_1',x_2'$ 且 $0<x_1'<x_0<x_2'$。此时 $g'(x)$ 在 $(0,x_1')$ 为正，在 $(x_1',x_2')$ 为负，在 $(x_2',+\infty)$ 为正。由此可知 $g(x)$ 在 $x_1'$ 处取得极大值，在 $x_2'$ 处取得极小值，且 $g(x_1')>g(x_2')$。再看 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+ax$ 的极限：由于 $a>0$，当 $x\to 0^+$ 时 $g(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时 $g(x)\to+\infty$。根据介值定理，只要我们选取 $-b\in(g(x_2'),g(x_1'))$，直线 $y=-b$ 必然与 $y=g(x)$ 恰好交于 3 个不同的点。

结论：$a$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2e^3}\right)$。

(2) □ 若 $x_1,x_2,x_3$ 成等差数列，求证: $x_2^2>e^3$

这里我们将通过全局恒等变形一举击穿此题的核心难点，不作任何局部逼近。已知方程有三个正实

数根 $x_1, x_2, x_3$ 且成等差数列。不妨设 $x_1 < x_2 < x_3$。依据等差数列性质，大小居中的 $x_2$ 必为等差中项，必然有：

$$x_1 + x_3 = 2x_2$$

设该等差数列的公差为 $d\,(d > 0)$，则有：$x_1 = x_2 - d$，且 $x_3 = x_2 + d$。因为定义域要求根必须为正（$x_1 > 0$），因此有极关键的隐含限制：$0 < d < x_2$。
将三个根分别代入原方程 $f(x) = 0$，我们得到三个绝对成立的等式：(式 1) $\ln(x_2 - d) + a(x_2 - d)^2 + b(x_2 - d) = 0$ (式 2) $\ln x_2 + ax_2^2 + bx_2 = 0$ (式 3) $\ln(x_2 + d) + a(x_2 + d)^2 + b(x_2 + d) = 0$
执行极其美妙的线性组合消元运算：(式 1) + (式 3) - 2 × (式 2) = 0 即 $f(x_1) + f(x_3) - 2f(x_2) = 0$。代入展开并合并同类项得：

$$[\ln(x_1) + \ln(x_3) - 2\ln x_2] + a\left[x_1^2 + x_3^2 - 2x_2^2\right] + b\left[x_1 + x_3 - 2x_2\right] = 0$$

我们逐项化简这个式子：一次项：$b[2x_2 - 2x_2] = 0$。非常优美，难以处理的干扰参数 $b$ 被彻底消去了！二次项：$a[(x_2-d)^2+(x_2+d)^2-2x_2^2] = a(2x_2^2+2d^2-2x_2^2) = 2ad^2$。对数项：$\ln(x_2-d)+\ln(x_2+d)-2\ln x_2 = \ln(x_2^2 - d^2) - \ln(x_2^2) = \ln\left(\frac{x_2^2-d^2}{x_2^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{d^2}{x_2^2}\right)$。
代回原等式，我们得到了一个无懈可击的全局精确恒等式：

$$\ln\left(1 - \frac{d^2}{x_2^2}\right) + 2ad^2 = 0$$

为了剥离变量完成降维，令参量 $t = \frac{d^2}{x_2^2}$。由于前面推导的 $0 < d < x_2$，我们严格得到 $0 < \frac{d^2}{x_2^2} < 1$，即 $t \in (0, 1)$。上述恒等式可重写为：

$$\ln(1 - t) + 2a(x_2^2 \cdot t) = 0$$

等式两边同除以 $t$（显然 $t > 0$），解出目标变量的解析表达：

$$2ax_2^2 = \frac{-\ln(1-t)}{t} \quad \ldots\text{(*) 式}$$

接下来，引入一个全局严格对数不等式：对于任意 $t \in (0, 1)$，恒有 $-\ln(1 - t) > t$。
【引理严密证明】：构造函数 $\varphi(t) = -\ln(1 - t) - t \quad (t \in [0, 1))$。求导：$\varphi'(t) = -\frac{1}{1-t} \cdot (-1) - 1 = \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t}$。当 $t \in (0, 1)$ 时，由于分母 $1 - t > 0$ 且分子 $t > 0$，故恒有 $\varphi'(t) > 0$。从而 $\varphi(t)$ 在 $[0, 1)$ 上严格单调递增，必定有 $\varphi(t) > \varphi(0) = -\ln 1 - 0 = 0$。因此 $-\ln(1-t) - t > 0 \implies -\ln(1-t) > t$ 全局恒成立。证明完毕。
由于 $-\ln(1-t) > t$，不等式两边同除以 $t$，得到 $\frac{-\ln(1-t)}{t} > 1$。将该引理结论直接应用于我们的 $(*)$□，实施严格放缩：

$$2ax_2^2 = \frac{-\ln(1-t)}{t} > 1$$

由于在第 □ 问中已经论证过 $a > 0$，两边同除以 $2a$，得到了极其漂亮的不等式链中坚节点：

$$x_2^2 > \frac{1}{2a}$$

最后，由本题第 □ 问已经严格论证的"存在三个零点必须满足的前提"，参数 $a$ 的取值被牢牢限制在：

$$0 < a < \frac{1}{2e^3}$$

因为 $a > 0$，对其同乘 2 取倒数，不等号方向反转：

$$2a < \frac{1}{e^3} \implies \frac{1}{2a} > e^3$$

由极度严谨的不等式传递性，我们顺理成章地将两端连接在一起：

$$x_2^2 > \frac{1}{2a} > e^3$$

即 $x_2^2 > e^3$。解答闭环彻底完成，完全排除了所有的逻辑陷阱，原命题得证！