1 超难的不等式证明

已知函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^a}{a}}+\sqrt{\dfrac{a^x}{x}}-2$，其中 $a>0$，$x>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）证明：$f(x)\geqslant 0$.

2 第一问

当 $a=1$ 时，$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2$，求导得

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}=\frac{x-1}{2\sqrt{x^3}},$$

易知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

3 第二问

这个不等式的证明难度非常大，从形式上看，直接求导的话导数零点显然是不可求的，而一般的放缩手段又很难处理指数下的根号，容易出现一放就过的情形，只能边尝试边思考下一步的处理方式.

首先，由于两个根式是对称的形式，我们可以考虑基本不等式，有

$$f(x)\geqslant 2\sqrt{\sqrt{\frac{x^a}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a^x}{x}}}-2=2\sqrt[4]{x^{a-1}a^{x-1}}-2,$$

很明显，当 $a>1$ 且 $x>1$ 或者 $a<1$ 且 $x<1$ 时，$x^{a-1}a^{x-1}>1$，$f(x)>0$ 成立.

而在第一问，我们有 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant f(1)=0$，于是根据对称性，我们只需要考虑证明当 $0<a<1<x$ 时的情形.

对于这类不等式，一般有两种入手的方向，一是考虑将变量从指数上拿下来，也就是类似于伯努利不等式这样的手段，二是考虑将指数合并，也就是类似于权方和不等式或是琴生不等式这样的手段.

我们先考虑伯努利不等式.

对原不等式换元，令 $x=p^2$，$a=q^2$，其中 $p>1>q>0$，则原不等式变为

$$\frac{p^{q^2}}{q}+\frac{q^{p^2}}{p}\geqslant 2.$$

对于 p^{q^2}，由于 $q<1$，直接用伯努利不等式会反号，所以我们往往需要取两次倒数来保证放缩方向，有

$$\frac{1}{p^{q^2}}=\left[1+\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]^{q^2}\leqslant 1+q^2\left(\frac{1}{p}-1\right)=\frac{p+q^2-pq^2}{p},$$

两边取倒数，得

$$p^{q^2}\geqslant\frac{p}{p+q^2-pq^2}.$$

对于 q^{p^2}，由于 $p>1$，我们可以直接放，有

$$q^{p^2}=[1+(q-1)]^{p^2}\geqslant 1+p^2(q-1).$$

写到这里，眼尖的读者应该已经发现问题了，在最后这个式子中 $q-1<0$，会导致当 $p\to+\infty$ 时，整体趋向于 $-\infty$，所以我们需要考虑进行调整.

在第五道题中，我们提出了一种加强命题的手段，也即先缩小，然后局部放大，或者先放大，再局部缩小，可能能够极大地提高精度.

对于 p^{q^2}，我们写成 $(p^q)^q$ 的形式，一步缩小，一步放大，也即

$$(p^q)^q\geqslant\left(\frac{p}{p+q-pq}\right)^q\leqslant 1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right),$$

那能不能证明 $p^{q^2}\geqslant 1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right)$ 呢？我们浅试一下，两边取对数，得

$$q^2\ln p\geqslant\ln\left[1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right)\right],$$

记 $g(p)=q^2\ln p-\ln\left[1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right)\right]$，别看这个函数这么庞大，直接求导的话，无论 p 还是 q，都不会出现超越的东西，所以勇敢一点，对 $g(p)$ 求导，有

$$\begin{aligned}
g'(p)&=\frac{q^2}{p}-\frac{q\dfrac{(p+q-pq)-p(1-q)}{(p+q-pq)^2}}{1+q\left(\dfrac{p}{p+q-pq}-1\right)}\\
&=\frac{q^2}{p}-\frac{q^2}{(p+q-pq)^2+(p+q-pq)(pq^2-q^2)}\\
&=\frac{q^2(1-q)(p-1)[q^2(p-1)+p(1-q)]}{p(p+q-pq)(pq^2-q^2-pq+p+q)},
\end{aligned}$$

虽然导数很复杂，但好在有很多明显的因式分解，所以其实整理起来并不困难，接下来只需要分析导数各部分的正负即可.

由于 $p>1>q>0$，所以有

$$\begin{cases}1-q>0\\ p-1>0\\ q^2(p-1)+p(1-q)>0\\ p+q-pq=(1-q)(p-1)+1>0\\ pq^2-q^2-pq+p+q=q^2(p-1)+(1-q)(p-1)+1>0\end{cases},$$

所以 $g'(p)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，$g(p)>g(1)=0$，因而不等式

$$p^{q^2}\geqslant 1+q\left(\frac{p}{p+q-pq}-1\right)$$

确实是成立的.

另一方面，根据对称性，我们考虑验证 $q^{p^2} \geqslant 1+p\left(\dfrac{q}{p+q-pq}-1\right)$ 是否成立.

容易发现，不等式左侧恒正，所以只需验证当 $1+p\left(\dfrac{q}{p+q-pq}-1\right)>0$ 时的情形，解得

$$\frac{p^2-p}{p^2-p+1}<q<\frac{p}{p-1},$$

与前文类似，我们记 $h(q)=p^2\ln q-\ln\left[1+p\left(\dfrac{q}{p+q-pq}-1\right)\right]$，求导有

$$h'(q)=\frac{p^2(p-1)(1-q)[(p^2(q-1)+q(1-p))]}{q(p+q-pq)(p^2q-p^2-pq+p+q)},$$

由于 $p>1>q>\dfrac{p^2-p}{p^2-p+1}$，所以有

$$\begin{cases} p-1>0 \\ 1-q>0 \\ p^2(q-1)+q(1-p)<0 \\ p+q-pq=(p-1)(1-q)+1>0 \\ p^2q-p^2-pq+p+q=(p^2-p+1)\left[q-\dfrac{p^2-p}{p^2-p+1}\right]>0 \end{cases},$$

所以 $h'(q)<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，$h(q)>h(1)=0$，因而不等式

$$q^{p^2}\geqslant 1+p\left(\frac{q}{p+q-pq}-1\right)$$

也成立.

综合两个不等式，有

$$\begin{aligned}\frac{p^{q^2}}{q}+\frac{q^{p^2}}{p}-2 &\geqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{p+q}{p+q-pq}-4 \\ &=\frac{p+q}{pq}+\frac{p+q}{p+q-pq}-4 \\ &=\frac{(p+q)(p+q-pq)+(p+q)pq-4pq(p+q-pq)}{pq(p+q-pq)} \\ &=\frac{p^2+q^2+4p^2q^2+2pq-4p^2q-4pq^2}{pq(p+q-pq)} \\ &=\frac{(p+q-2pq)^2}{pq(p+q-pq)} \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

原不等式得证.

4 **注**

在第二问中，我们还提到了将指数合并的手段去解决问题，郑小彬老师给出了一种利用琴生不等式的方法，记录如下.

当 $a=1$ 时，$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2\geqslant 0$.

当 $a\neq 1$ 时，令 $a=y$，则等价于证明

$$\frac{x}{x+y}x^{\frac{y-1}{2}}+\frac{y}{x+y}y^{\frac{x-1}{2}}\geqslant\frac{2\sqrt{xy}}{x+y},$$

由琴生不等式有

$$\frac{x}{x+y}x^{\frac{y-1}{2}}+\frac{y}{x+y}y^{\frac{x-1}{2}}\geqslant \mathrm{e}^{\frac{x(y-1)\ln x+y(x-1)\ln y}{2(x+y)}},$$

因此只需证明

$$\frac{x(y-1)\ln x+y(x-1)\ln y}{2(x+y)}\geqslant\ln\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}.$$

不妨设 $t=\dfrac{y}{x}\geqslant 1$. 则原不等式等价于

$$(x-1)t\ln tx+(tx-1)\ln x+2(t+1)\ln\frac{t+1}{2\sqrt{t}}\geqslant 0.$$

记 $g(x)=(x-1)t\ln tx+(tx-1)\ln x+2(t+1)\ln\dfrac{t+1}{2\sqrt{t}}$，则

$$g'(x)=t\ln t+2t+2t\ln x-\frac{t+1}{x},$$

易知 $g'(x)$ 单调递增，由于 $g'(1)=t\ln t+t-1\geqslant 0$，$g'\left(\dfrac{1}{t}\right)=t-t^2-t\ln t\leqslant 0$，所以存在唯一的 $t\in\left[\dfrac{1}{t},1\right]$，使 $g'(x_0)=0$. 所以

$$g(x)\geqslant g(x_0)=t+1-2tx_0-t\ln t+2(t+1)\ln\frac{t+1}{2\sqrt{tx_0}}.$$

由

$$g'(x_0)=2t\left(1+\ln\sqrt{t}x_0-\frac{t+1}{2tx_0}\right)\geqslant 2t\left(2-\frac{1}{\sqrt{tx_0}}-\frac{t+1}{2tx_0}\right)$$

可知

$$4tx_0\leqslant t+2\sqrt{t}+1,$$

所以

$$g(x_0)\geqslant\frac{t+1-2\sqrt{t}}{2}-t\ln t+2(t+1)\ln\frac{t+1}{\sqrt{t}+1}.$$

令 $h(t)=\dfrac{t^2+1-2t}{2}-2t^2\ln t+2(t^2+1)\ln\dfrac{t^2+1}{t+1}$，则只需证当 $t\geqslant 1$ 时，$h(t)\geqslant 0$. 求导得

$$h'(t)=4t\left[\frac{t^2+2t-3}{4t(t+1)}+\ln\frac{t^2+1}{t^2+t}\right],$$

记 $\varphi(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{4t(t+1)}+\ln\dfrac{t^2+1}{t^2+t}$，则

$$\varphi'(t)=\frac{(t-1)^2(3t^2+8t+3)}{4t^2(t^2+1)(t+1)^2}\geqslant 0,$$

所以 $\varphi(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(t)\geqslant\varphi(1)=0$.

所以 $h'(t)\geqslant 0$，$h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$h(t)\geqslant h(1)=0$.

原不等式得证.

5 **注 2**

笔者还给出了一个加强：对任意的 x，$y>0$，都有

$$\sqrt{\frac{x^y}{y}}\geqslant\frac{x-1}{x+1}-\frac{y-1}{y+1}+1.$$

感兴趣的读者可以尝试证明这个命题.