# 第2章:线性表

# 2.2 线性表的顺序表示

### 2010: 将一个线性表中的元素循环左移p个位置

### • 题目描述

设将n (n>1) 个整数存放到一维数组R中。试设计一个在时间和空间两方面都尽可能高效的算法。将R中保存的序列循环左移p (0<p<n) 个位置,即将R中的数据由 $(X_0\,,\,X_1\,,\,\cdots\,,\,X_{n-1})$ 变换为 $(X_p\,,\,X_{p+1}\,,\ldots\,,X_0\,,\,X_1\,,\ldots\,,X_{p-1})$ 。

### • 算法思想

可以将这个问题看做把数组ab转换成数组ba(a代表数组的前p个元素,b代表数组中余下的n-p个元素),先将a逆置得到 $a^{-1}b$ ,最后将整个b逆置得到 $a^{-1}b^{-1}$ ,最后将整个 $a^{-1}b^{-1}$ 逆置得到 $(a^{-1}b^{-1})^{-1}=ba$ 。设Reserve函数将数组元素逆置的操作,对abcdefgh向左循环移动3(p=3)个位置如下:

```
Reverse(0,p-1)得到cbadefgh
Reserve(p,n-1)得到cbahgfed
Reservr(0,n-1)得到defghabc
```

Reserve中的两个参数分别表示数组中待缓缓元素的始末位置。

#### • 算法实现

```
void Reverse(int R[],int from,int to){
    int i,temp;
    for(i=0;i<(to-from+1)/2;i++){
        temp = R[from+i];
        R[from+i] = R[to-i];
        R[to-i] = temp;
    }
}
void Converse(int R[],int n,int p){
    Reserve(R,0,p-1);
    Reserve(R,p,n-1);
    Reserve(R,0,n-1);
}</pre>
```

#### • 复杂度分析

上述算法中三个Reserve函数的时间复杂度分别为O(p/2), O((n-p)/2), O(n/2),故算法的复杂度为O(n),空间复杂度为O(1)

### • 另解1

创建大小为p的辅助数组S,将R前p个整数依次暂存在S中,同时将R中后n-p个整数左移,然后将暂存在S中的p个元素依次放回R中的后续单元。

时间复杂度: O(n), 空间复杂度: O(n)

#### 另解2

创建大小为n的辅助数组S,将R的前p个元素暂存在S的后p个单元中,后n-p个元素暂存在S的前n-p个单元中,最后将S中的所有元素——赋值回R。

时间复杂度: O(n), 空间复杂度: O(n)

### 2011: 求两个线性表的中位数

#### • 题目描述

一个长度为 $L(L \geq 1)$ 的升序序列S,处在第 $\lceil L/2 \rceil$ 个位置的数称为S中的中位数。例如,若序列S1=(11,13,15,17,19),则S1的中位数是15,两个序列的中位数是含它们所有元素的升序序列的中位数。例如,若S2=(2,4,6,8,20),则S1和S2的中位数是11。现有两个等长升序序列A和B,试设计一个在时间和空间两方面都尽可能高效的算法,找出两个序列A和B的中位数。

#### • 算法设计思想

分别求出序列A和B的中位数,设为a和b,求序列A和B的中位数过程如下:

- 1) 若a=b,则a或b即为所求的中位数,算法结束
- 2) 若a<b,则舍弃序列A中较小的一半,同时舍弃序列B中较大的一半,要求舍弃的长度相等
- 3) 若a>b,则舍弃序列A中较大的一半,同时舍弃序列B中较小的一半,要求舍弃的长度相等 在保留的两个升序序列中,重复1)、2)、3),直到两个序列中只含一个元素为止,较小者即为所求 的中位数。

```
int M_Search(int A[],int B[],int n){
  int s1=0, d1=n-1, m1, s2=1, d2=n-1, m2;
   //分别表示序列A和B的首位数、末位数和中位数
   while(s1!=d1||s2!=d2){
      m1=(s1+d1)/2;
      m2=(s2+d2)/2;
      if(A[m1]==B[m2])
         return A[m1]; //满足条件1)
      if(A[m1]<B[m2]){ //满足条件2)
         if((s1+d1)%2==0){ //元素个数为奇数
            s1=m1; //舍弃A中间点以前的部分且保留中间点
            d2=m2; //舍弃B中间点以后的部分且保留中间点
         }
         else{ //元素个数为偶数
            s1=m1+1; //舍弃A中间点及中间点以前部分
            d2=m2;
                    //舍弃B中间点以后部分且保留中间点
         }
      }
      else{ //满足条件3)
         if((s1+d1)%2==0){ //元素个数为奇数
            d1=m1; //舍弃A中间点以后的部分且保留中间点
            s2=m2; //舍弃B中间点以前的部分且保留中间点
         }
         else{ //元素个数为偶数
            d1=m1+1; //舍弃A中间点及中间点以后部分
            s2=m2;
                    //舍弃B中间点以前的部分且保留中间点
         }
      }
   }
```

```
return A[s1]<B[s2]?A[s1]:B[s2];
}
```

### • 时间复杂度分析

算法的时间复杂度为 $O(\log_2 n)$ ,空间复杂度为O(1)。

### • 另解1

给序列A和B设定两个浮标 i 和 j 分别指向A、B的第一个元素,即初始值为0。A、B中的元素根据浮标所对应的元素不停的比较,若A[i] > B[j],则i+1,否则j+1。当i+j==n-1时停止比较,此时的A和B的中位数已经找到,中位数为min{A[i],B[j]}。

时间复杂度为: O(n), 空间复杂度为: O(1)

### 2013: 找出序列主元素

#### • 题目描述

已知一个整数序列 $A=(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$ ,其中 $0\leq a_i\leq n (0\leq i\leq n)$ 。若存在  $a_{p1}=a_{p2}=\dots=a_{pm}=x$ 且 $m>n/2(0\leq p_k< n,1\leq k\leq m)$ ,则称x为主元素。例如 A=(0,5,5,3,5,7,5,5),则5为主元素;又如A=(0,5,5,3,5,1,5,7),则A没有主元素。假设A的n个元素保存在一个一维数组中,请设计一个尽可能高效的算法,找出A的主元素。若存在主元素,则输出该元素;否则输出-1。

### • 算法思想

算法的策略是从前向后扫描数组元素,标记出一个可能成为主元素的元素num,然后重新计数,确认num是否是主元素。

### 算法可分为如下两步:

- ① 选取候选主元素:依次扫描所给数组中的每个整数,将第一个遇到的整数num保存到c中,记录num的出现次数为1;若遇到下一个整数仍等于num,则计数加1,否则计数减1;当计数减到0时,将遇到的下一个整数保存到c中,计数重新记为1,开始新一轮的计数,即从当前位置开始重复上述过程,知道扫描完全部数组元素。
- ② 判断c中元素是否是真正的主元素;再次扫描该数组,统计c中元素出现的次数,若大于n/2,则为主元素;否则,序列中不存在主元素。

```
int Majority(int A[],int n){
   int i,c,count = 1; //c用来保存候选主元素,count用来计数
   c = A[0];
                        //设置A[0]为候选主元素
   for(i=1;i<n;i++){
      if(A[i]==c)
                      //对A中的候选主元素计数
          count++;
      else
                       //处理不是候选主元素
          if(count>0)
             count--
          else{
              c = A[i];
              count = 1;
          }
   if(i=count=0;i<n;i++)</pre>
      if(A[i]==c)
```

### • 复杂度分析

算法时间复杂度: O(n), 空间复杂度: O(1)

### • 另解1

使用一个和序列同等长度的辅助数组**(其下标就是序列的元素,下标对应的值即序列元素出现的次数)**存储序列中的不同元素出现的个数,然后再扫描一遍辅助数组选出元素的下标,返回该下标,否则返回-1。

时间复杂度: O(n), 空间复杂度: O(n)

### 2018: 找出数组的未出现的最小正数

#### 题目描述

给定一个含 n (n≥1) 个整数的数组,请设计一个在时间上尽可能高效的算法,找出数组中未出现的最小正整数。例如,数组{-5, 3, 2, 3}中未出现的最小正整数是 1;数 组{1, 2, 3}中未出现的最小正整数是 4。

### • 算法思想

题目要求算法时间上尽可能高效,因此采用空间换时间的办法。分配一个用于标记的数组 B[n],用来记录 A 中是否出现了 1~n 中的正整数,B[0]对应正整数 1,B[n-1]对应正整数 n,初始化 B 中全部为 0。由于 A 中含有 n 个整数,因此可能返回的值是 1~n+1,当 A 中 n 个数恰好为 1~n 时返回 n+1。当数组 A 中出现了小于等于 0 或大于 n 的值时,会导致 1~n 中出现空余位置,返回结果必然在 1~n 中,因此对于 A 中出现了小于等于 0 或大于 n 的值可以不采取任何操作。

经过以上分析可以得出算法流程:从 A[0]开始遍历 A,若 0 < A[i] <= n,则令 B[A[i]-1] = 1;否则不进行操作。对 A 遍历结束后,开始遍历数组 B,若能查找到第一个满足 B[i] == 0 的下标 i,返回 i+1 即为结果,此时说明 A 中未出现的最小正整数在 1 < n 之间。若 B[i]全部不为 0,返回 i+1(跳出循环时 i=n,i+1 等于 n+1),此时说明 A 中未出现的最小正整数是 n+1。

### 算法实现

```
int findMissMin(int A[],int n)
   int i,*B; //标记数组
                                   //分配空间
   B=(int *)malloc(sizeof(int)*n);
   memset(B,0,sizeof(int)*n);
                                    //赋初值为 0
   for(i=0;i<n;i++)
                                   //若 A[i]的值介于 1\sim n,则标记数组 B
       if(A[i]>0\&A[i]<=n)
           B[A[i]-1]=1;
   for(i=0;i<n;i++)
                                    //扫描数组 B, 找到目标值
       if (B[i]==0) break;
                                    //返回结果
   return i+1;
}
```

### • 算法性能分析

**时间复杂度**:遍历 A 一次,遍历 B 一次,两次循环内操作步骤为 O(1)量级,因此时间复杂度为 O(n)。

空间复杂度: 额外分配了B[n], 空间复杂度为 O(n)。

# 2.3 线性表的链式表示

### 2009: 寻找单链表的倒数第k个结点

#### • 题目描述

已知一个带有头结点的单链表,结点结构为:

data	link

假设该链表只给出了头指针list。在不改变链表的前提下,请设计一个尽可能高效的算法,查找链表中倒数第k个位置上的结点(k为正整数)。若查找成功,算法输出该结点的data域值,并返回1;否则,返回0。

### • 算法思想

定义两个指针变量p和q,初始时均指向头结点的下一个结点(链表的第一个结点)。p指针沿链表移动;当p移动到第k个结点时,q指针开始与p指针同步移动;当p指针移动到最后一个结点时,q指针所指示结点为倒数第k个结点。以上过程对链表仅进行一遍扫描。

#### 算法步骤

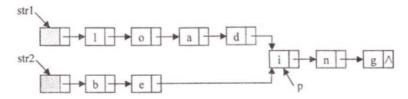
- ① count = 0, p和q指向链表表头结点的下一个结点;
- ② 若p为空, 转⑤;
- ③ 若count等于k,则q指向下一个结点;否则,count = count + 1;
- ④ p指向下一个结点,转②
- ⑤ 若count等于k,则查找成功,输出该结点的data域值,返回1;否则,说明k值超过了线性表的长度,查找失败,返回0;
- ⑥算法结束。

```
typedef int ElemType;
typedef struct LNode{
                    //数据域
   ElemType data;
   struct LNode *next; //指针域
}*LinkList,LNode;
int Search_k(LinkList list, int k){
   LinkList p = list->next,q = list->next; //指针p,q指向链表第一个结点
   int count = 0;
                                            //计数器,记录是否到达第k个结点
   while(p != NULL){
       if(count < k) count++;</pre>
                                           //继续向前移动,表示未到达k
           q = q->next;
                                            //与指针p同步移动
       p = p->next;
   if(count < k)</pre>
       return 0;
                                            //查找失败
   else{
```

### 2012: 寻找保存单词的单链表的共享后缀

### • 题目描述

假定采用带头结点的单链表保存单词,当两个单词有相同的后缀时,则可共享相同的后缀存储空间,例如,"loading"和"being"的存储映像如下图所示。



设str1和str2分别指向两个单词所在单链表的头结点,链表结点结构为 data next , 请设计一个时间上尽可能高效的算法,找出由str1和str2所指向两个链表共同后缀的起始位置(如图中字符)所在结点的位置p)。

### • 算法思想

顺序遍历两个链表到尾结点时,并不能保证两个链表同时到达尾结。这是因为两个链表的长度不同。

假设一个链表比另一个链表长k个结点,我们先在长链表上遍历k个结点,之后同步遍历两个链表,这样就能保证它们同时到达最后一个结点。由于两个链表从第一个公共结点到链表的尾结点都是重合的,所以它们肯定能同时到达第一个公共结点。算法的基本设计思想如下:

- ① 分别求出str1和str2所指的两个链表的长度m和n;
- ② 将两个链表以表尾对齐: 令指针p、q分别指向str1和str2的头结点,若m>=n,则使p指向链表中的第m-n+1个结点; 若m<n,则使q指向链表中的第n-m+1个结点,即使指针p和q所指的结点到表尾的长度相等。
- ③ 反复将指针p和q同步向后移动,并判断它们是否指向同一个结点。若p和q指向同一个结点,则该结点即为所求的公共后缀的起始位置。

```
LinkNode *Find_1st_Common(LinkList str1,LinkList str2){
    int len1 = Length(str1),len2 = Length(st2);
    LinkNode *p,*q;
    for(p=str1;len1>len2;len1--) //使p指向链表q与指向的链表等长
        p=p->next;
    for(q=str2;len1<len2;len2--) //使q指向链表p与指向的链表等长
        q=q->next;
    while(p->next!=NULL&&p->next!=q->next){ //查找公共后缀起始点
        p=p->next;
        q=q->next;
    }
    return p->next; //返回公共后缀的起始点
}
```

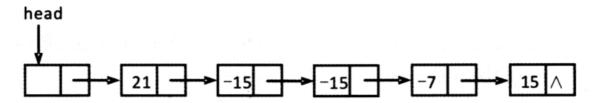
### • 算法复杂度

时间复杂度为:  $O(\max(len1, len2))$ , 空间复杂度为: O(1)

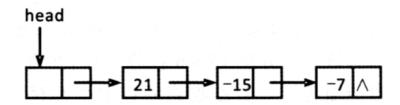
### 2015: 删除单链表中绝对值相等的结点

### • 题目描述

用单链表保存m个整数,结点的结构为: data next , 且 $|data| \le n(n)$ 为正整数)。现要求设计一个时间复杂度尽可能高效的算法,对于链表中data的绝对值相等的结点,仅保留第一个出现的结点而删除其余绝对值相等的结点。例如,若单链表head如下:



则删除结点后的head为:



### • 算法思想

算法的核心思想是用空间换时间。使用辅助数组记录链表中已经出现的数字,从而只需对链表进行一趟扫描。

因为 $|data| \le n$ ,故辅助数组q的大小为n+1,各元素的初值为0。依次扫描链表中的各结点,同时检查q[|data|]的值,如果为0,则保留该结点,并令q[|data|]=1;否则,将该结点从链表中删除。

### • 算法实现

结点的数据类型定义:

```
typedef struct node{
   int data;
   struct node *link;
}NODE;
typedef NODE *PNODE;
```

### 算法实现:

```
*(q+m) = 1; //保留
p = p->link;
}else{
    r = p->link;
    free(r);
}

free(q);
}
```

### • 算法性能分析

时间复杂度: O(m), 空间复杂度: O(n)。

### 2019: 重新排列单链表的各结点

#### 题目描述

设线性表  $L = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\}$ 采用带头结点的单链表保存,链表中的 结点定义如下:

```
typedef struct node{
   int data;
   struct node *next;
}NODE;
```

请设计一个空间复杂度为 O(1)且时间上尽可能高效的算法,重新排列 L 中的各结点,得到线性表  $L'=\{a_1,a_n,a_2,a_{n-1},a_3,a_{n-2}\ldots\}$ 。

### • 算法思想

先观察L和L',发现 L' 是由 L 摘 取第一个元素,再摘取倒数第一个元素……依次合并而成的。为了方便链表后半段取元素,需 要先将 L 后半段原地逆置 [题目要求空间复杂度为 O(1),不能借助栈] ,否则每取最后一个结点都需要遍历一次链表。

①先找出链表 L 的中间结点,为此设置两个指针 p 和 q,指针 p 每次走一步,指针 q 每次走两步,当指针 q 到达链尾时,指针 p 正好在链表的中间结点;

- ②然后将 L 的后半段结点原地逆置。
- ③从单链表前后两段中依次各取一个结点,按要求重排。

```
{
    r=q->next;
    q->next=p->next;
    p->next=q;
    q=r;
}
s=h->next; //s 指向前半段的第一个数据结点,即插入点
q=p->next; //q 指向后半段的第一个数据结点
p->next=NULL;
while(q!=NULL) //将链表后半段的结点插入到指定位置
{
    r=q->next; //r 指向后半段的下一个结点
    q->next=s->next; //将 q 所指结点插入到 s 所指结点之后
    s->next=q;
    s=q->next; //s 指向前半段的下一个插入点
    q=r;
}
}
```

### • 算法性能分析

第 1 步找中间结点的时间复杂度为 O(n),第 2 步逆置的时间复杂度为 O(n),第 3 步合 并链表的时间复杂度为 O(n),所以该算法的时间复杂度为 O(n)。

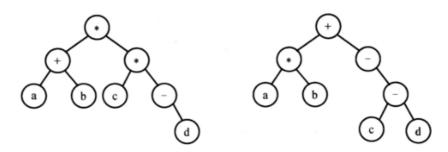
# 第4章: 树与二叉树

## 4.3 二叉树的遍历和线索树

### 2017: 二叉树转换为中缀表达式

#### 题目描述

请设计一个算法,将给定的表达式树(二叉树)转换为等价的中缀表达式(通过括号反映操作符的计算次序)并输出。例如,当下列两棵表达式树作为算法的输入时:



输出的等价中缀表达式分别为(a+b) \* (c \* (-d))和(a \* b)+(-(c-d))。

### 二叉树结点定义如下:

### • 算法思想

表达式树的中序序列加上必要的括号即为等价的中缀表达式。可以基于二叉树的中序遍历策略得到所需的表达式。表达式树中分支结点所对应的子表达式的计算次序,由该分支结点所处的位置决定。为得到正确的中缀表达式,需要在生成遍历序列的同时,在适当位置增加必要的括号。显然,表达式的最外层(对应根结点)及操作数(对应叶结点)不需要添加括号。

### • 算法实现

```
void BtreeToE(BTree *root){
                        //根的高度为1
   BtreeToExp(root,1);
   void BtreeToExp(BTree *root,int deep){
       if(root == NULL) return;
                                  //树空
       else if(root->left == NULL && root->right == NULL) //若为叶子结点
          printf("%s", root->data); //输出操作数
       else{
          if(deep>1) print("("); //若有子表达式则加1层括号
          BtreeToExp(root->left,deep+1);
          printf("%s", root->data); //输出操作符
          BtreeToExp(root->right, deep+1);
          if(deep>1) printf(")"); //若有子表达式则加1层括号
       }
   }
}
```

## 4.5 树与二叉树的应用

### 2014: 求二叉树的带权路径长度WPL

### • 题目描述

二叉树的带权路长度(WPL)是二叉树所有叶结点的带权路径长度之和。给定一颗二叉树T,采用二叉树链表存储,结点结构为:

104	weight	right
left	weight	right

其中叶结点的weight域保存该结点的非负权值。设root为指向T的根结点指针,请设计T的WPL的算法。

#### • 算法思想

① 基于先序递归遍历的算法是用一个static变量记录wpl,把每个结点的深度作为递归函数的一个参数传递,算法步骤如下:

若该结点是叶子结点,那么变量wpl加上该结点的深度与权值之积;

若该结点是非叶子结点,那么若左子树不为空,对左子树调用递归算法,若右子树不为空,对右子树调用递归算法,深度参数均为本结点的深度参数加一。

最后返回计算出的wpl即可。

② 基于层次遍历的算法是使用队列进行层次遍历,并记录当前的层数,

当遍历到叶子结点时,累计wpl;

当遍历到非叶子结点时对该结点的把该结点的子树加入队列;

当某结点为该层的最后一个结点时,层数自增1;

### • 二叉树结点数据类型定义

```
typedef struct BiTNode{
    struct Node *left,*right;
    int weight;
}BiTNode,*BiTree;
```

### • 算法实现

### ① 基于先序遍历的算法:

### ② 基于层次遍历的算法

```
#define MaxSize 100
                               //设置队列的最大容量
int wpl_LevelOrder(BiTree root){
                               //声明队列, end1 为头指针, end2 为尾指针
   BiTree q[MaxSize];
   int end1, end2;
                               //队列最多容纳 MaxSize-1 个元素
   end1 = end2 = 0;
                               //头指针指向队头元素,尾指针指向队尾的后一个元素
   int wpl = 0, deep = 0;
                               //初始化 wpl 和深度
   BiTree lastNode;
                               //lastNode 用来记录当前层的最后一个结点
   BiTree newlastNode;
                              //newlastNode 用来记录下一层的最后一个结点
                               //lastNode 初始化为根节点
   lastNode = root;
   newlastNode = NULL;
                              //newlastNode 初始化为空
   q[end2++] = root;
                               //根节点入队
   while(end1 != end2){
                                  //层次遍历, 若队列不空则循环
       BiTree t = q[end1++];
                                  //拿出队列中的头一个元素
       if(t->1child == NULL & t->1child == NULL){
          wpl += deep*t->weight;
                                  //若为叶子结点,统计 wp1
       if(t->1child != NULL){
                                  //若非叶子结点把左结点入队
          q[end2++] = t->1child;
          newlastNode = t->lchild;
                                  //并设下一层的最后一个结点为该结点的左结点
       }
       if(t->rchild != NULL){
                                  //处理叶节点
          q[end2++] = t->rchild;
          newlastNode = t->rchild;
       if(t == lastNode){
                                  //若该结点为本层最后一个结点,更新 lastNode
          lastNode = newlastNode;
          deep += 1;
                                  //层数加 1
```

```
}
return wpl; //返回 wpl
}
```

# 第7章:排序

# 7.3 交换排序

### 2016: 划分集合

### 题目描述

已知由 $(n \ge 2)$ 个正整数构成的集合 $A = \{a_k\}, 0 \le k < n$ ,将其划分为两个不相交的子集 $A_1$ 和 $A_2$ ,元素个数分别为 $n_1$ 和 $n_2$ , $A_1$ 和 $A_2$ 中元素之和分别为 $S_1$ 和 $S_2$ 。设计一个尽可能高效的划分算法,满足 $|n_1-n_2|$ 最小且 $|S_1-S_2|$ 最大。

### • 算法思想

将最小的 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个元素放在 $A_1$ 中,其余的元素放在 $A_2$ 中,分组结果即可满足题目要求。仿照快速排序的思想,基于枢轴将n个整数划分为两个子集。根据划分后枢轴所处的位置i分别处理:

- ① 若 $i = \lfloor n/2 \rfloor$ , 则分组完成, 算法结束;
- ②  $\exists i < |n/2|$ ,则枢轴及以前的所有元素均属于 $A_1$ ,继续对i之后的元素进行划分;

### 算法实现

```
int setPartition(int a[],int n){
   int pivotkey,low=0,low0=0,high=n-1,high0=n-1,flag=1,k=n/2,i;
   int s1=0, s2=0;
   while(flag){
       pivotkey = a[low];
                             //选择枢轴
       while(low<high){</pre>
           while(low<high && a[high]>=pivotkey) //基于枢轴对数据进行划分
               --high;
           if(low!=high) a[low] = a[high];
           while(low<high && a[low]<=pivotkey)</pre>
               ++1ow;
           if(low!=high) a[high]=a[low];
       }
       a[low]=pivotkey;
       if(low==k-1)
                         //若枢轴是第n/2个元素,划分成功
           flag=0;
       else{
           if(low< k-1){
               1ow0=++1ow;
               high=high0;
           }
           else{
               high0=--high;
```

```
low=low0;
}
}
}
```

## • 算法性能分析

平均时间复杂度: O(n), 空间复杂度为O(1)