第三章　假设检验

第一节 基本概念

第一节 基本概念

一.关于总体的假设可以分为两大类

(一)设总体X的分布$F(x;\theta)$类型已知，其中参数θ未知，仅对未知参数θ提出假设，称这类假设为参数假设检验。

(二)设总体X的分布未知，只对未知分布函数类型或它的某些特征提出假设，称这类假设为非参数假设检验。

第一节 基本概念

例1：某油品公司的桶装润滑油标定重量为10Kg，检验部门从市场上随机抽取10桶，称得重量分别为10.2，9.7，10.1，10.3，10.1，9.8，9.9，10.4，10.2，9.8，假设每桶油实际重量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中$\sigma = 0.1$，问该公司的桶装油的重量是否符合标准？

例2：设从某书中抽查100页，记录各页中印刷错误的个数，能否认为一页印刷错误的个数X服从泊松分布？

假设检验：依据从总体中取得的样本观测值来判断假设是否成立的一种程序.

原假设(零假设)：根据检验结果准备予以拒绝或不予拒绝(予以接收)的假设，以H_0表示.

备择假设(对立假设)：与原假设不相容的假设，以H_1表示.

第一节 基本概念

二.假设检验思想

1. 从具体问题出发，构造适当的统计量$T(X_1,\ldots,X_n)$, 将样本$(X_1,\ldots,X_n)$中包含的有关信息集中在一起.

2. 检验: 制定一判断规则, 使根据样本观测值$(x_1,...,x_n)$可做出是否拒绝原假设H_0的决定, 每个这样的规则就是一种检验.

W: 拒绝域；$\bar{W}$: 接受域；检验函数: 拒绝域W的示性函数.

$$\phi(x_1,...,x_n)=\begin{cases}1, & (x_1,...,x_n)\in W\\ 0, & (x_1,...,x_n)\in \bar{W}\end{cases}$$

$$W=\{(x_1,...,x_n):\phi(x_1,...,x_n)=1,(x_1,...,x_n)\in\chi\}$$

第一节 基本概念

3. 给定统计量T后，确定临界值c.

(1) 原则：一次观测中小概率事件发生的可能性很小.

例: 设总体$X \sim N(\mu, 1)$, 其中μ为未知参数, 考虑假设检验问题:

$$H_0 : \mu = 0, \quad H_1 : \mu \neq 0.$$

抽取样本$(X_1, \ldots, X_{10})$, 令$T = \bar{X}$作为检验统计量, 设由样本观测值可得$\bar{x} = 0.8$, 判断是否拒绝H_0.

第一节 基本概念

(2) 显著性水平：对每次检验，确定一个值α, 当一事件发生的概率小于此α时，就认为是一个小概率事件，称此α为检验的显著性水平.

对上例，给定显著性水平α, 在原假设成立的条件下，$\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$,

$$P(|\bar{X}| \geq c) = \alpha, \ \ P(\sqrt{n}\bar{X} \geq \sqrt{n}c) = \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore P(\sqrt{n}\bar{X} < \sqrt{n}c) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \ \ \therefore c = \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$n = 10, 取\alpha = 0.05, \Rightarrow c = 0.62,$$

当$T(x_1, ..., x_n) = \bar{X}(x_1, ..., x_n) \geq 0.62$时，拒绝原假设$H_0$.

注：接受原假设不是在逻辑上证明了原假设的正确，且由于样本的随机性，不意味着它一定是正确的假设.

第一节 基本概念

三.两类错误

1.原假设H_0正确时,由于样本的随机性而落入了拒绝域,因而作出拒绝H_0的错误判断,称它犯了**第一类错误**,记犯第一类错误的概率为α,(拒真错误)

$$P\{拒绝H_0|H_0正确\}=\alpha$$

2.对立假设H_1正确,由于样本的随机性而落入接受域,因此作出接受原假设H_0的错误判断,称它犯了**第二类错误**,记犯第二类错误的概率为β,(纳伪错误)

$$P\{接受H_0|H_1正确\}=\beta$$

注:犯第一类错误概率的最大值就是检验的显著水平.

第一节　基本概念

样本 \ 总体	H_0正确	H_1正确
接受H_0	正确	第二类错误
拒绝H_0	第一类错误	正确

3.只考虑控制犯第一类错误的概率α,而不考虑犯第二类错误的概率,这样的检验称为显著性水平为α的显著性检验.

第一节 基本概念

4.显著性检验的一般步骤

(1) 提出假设：根据问题的要求建立原假设H_0和对立假设H_1;

(2) 选统计量：根据H_0的内容选取一个合适的检验统计量T,确定它的抽样分布,算出抽样分布的分位数;

(3) 给定显著水平：α的值一般取得较小,如0.05, 0.01, 0.10等;

(4) 确定拒绝域：在原假设H_0正确的条件下,求出能使

$$P\{(X_1,\cdots,X_n)\in W|H_0\}\leq\alpha$$

成立的拒绝域W,拒绝域W与所选的统计量T和假设有关,常用检验统计量T和相应的临界值c表示.

(5) 对H_0作出推断：比较检验统计量T的观测值t和相应的临界值c,看样本观测值是否落入拒绝域. 如果样本观测值$(x_1,\cdots,x_n)\in W$,则拒绝原假设H_0,否则接受H_0.

第二节 参数假设检验

第二节　参数假设检验

一.数学期望的检验

1. U检验： 设$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$,$(X_1, \cdots, X_n)$为取自总体的样本,其中$\sigma_0^2$已知，要检验

(1) $H_0 : \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$

当H_0成立时,$\overline{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$,则$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \sim N(0,1)$.

取$U = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$为检验统计量，对给定的显著性水平$\alpha$, 为使

$$P\{(X_1, \cdots, X_n) \in W | H_0\} = \alpha,$$

应有

$$P\{u_1 < U < u_2 | H_0\} = 1 - \alpha.$$

由于$U \sim N(0,1)$具有对称性,故可取

$$P\{|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} | H_0\} = \alpha.$$

其中u_α是标准正态分布的α分位数.

第二节 参数假设检验

因此得到检验的拒绝域为

$$
\begin{aligned}
W &= \{(x_1,\cdots,x_n) : |u| = \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma_0}\sqrt{n} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \\
&= \{u < u_{\frac{\alpha}{2}} \text{或} \ u > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}
\end{aligned}
$$

计算U的观测值u,查表得到$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$。

若$|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$,则拒绝原假设$H_0$,即认为总体的数学期望$\mu$与$\mu_0$之间有显著差异;

否则，若$|u| \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}$，则接受$H_0$，即认为观测结果与原假设$H_0$无显著差异.

第二节 参数假设检验

(2) $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$

取$U = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$为检验统计量，对给定的显著性水平$\alpha$，由

$$P\{U > u_{1-\alpha}|H_0\} = \alpha.$$

查表得临界点$u_{1-\alpha}$，故拒绝域为$W = \{u > u_{1-\alpha}\}$,然后计算u，若$u > u_{1-\alpha}$,则拒绝H_0,否则接受H_0.

(3) $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$

取$U = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$为检验统计量，对给定的显著性水平$\alpha$，由

$$P\{U < u_{\alpha}|H_0\} = \alpha.$$

查表得临界点u_{α}，故拒绝域为$W = \{u < u_{\alpha}\}$,然后计算u，若$u < u_{\alpha}$,则拒绝H_0,否则接受H_0.

第二节 参数假设检验

注：

(a)这种检验为U检验；

(b) (1)为双侧检验，(2),(3)为单侧检验

第二节 参数假设检验

例1：全市高三学生毕业会考，数学成绩的平均分为70分，随机抽查10名男生的会考成绩如下，

$$65, 72, 89, 56, 79, 63, 92, 48, 75, 81,$$

若已知男生的会考成绩服从正态分布，且标准差为10分，问男生的会考平均成绩是否为70分？($\alpha = 0.05$)

解：设$H_0: \mu = 70$, $H_1: \mu \neq 70$

采用U检验，选取统计量$U = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$, 当$H_0$成立时, $U \sim N(0,1)$

对给定的显著性水平α,由$P\{|U| > u_{0.975}|H_0\} = 0.05$，查表

得$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$

所以拒绝域为$W = \{|u| > 1.96\}$,

而$|u| = \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma_0}\sqrt{n} = \frac{|72-70|}{10}\sqrt{10} = 0.63 < u_{0.975}$

所以接受H_0,即在显著性水平0.05下可以认为男生的会考平均成绩为70分。

第二节 参数假设检验

例1：全市高三学生毕业会考，数学成绩的平均分为70分，随机抽查10名男生的会考成绩如下，

$$65, 72, 89, 56, 79, 63, 92, 48, 75, 81,$$

若已知男生的会考成绩服从正态分布，且标准差为10分，问男生的会考平均成绩是否为70分？$(\alpha = 0.05)$

解：设$H_0 : \mu = 70$, $H_1 : \mu \neq 70$

采用U检验，选取统计量$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$, 当$H_0$成立时, $U \sim N(0, 1)$

对给定的显著性水平α,由$P\{|U| > u_{0.975}|H_0\} = 0.05$，查表

得$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$

所以拒绝域为$W = \{|u| > 1.96\}$,

而$|u| = \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sigma_0}\sqrt{n} = \frac{|72 - 70|}{10}\sqrt{10} = 0.63 < u_{0.975}$

所以接受H_0,即在显著性水平0.05下可以认为男生的会考平均成绩为70分。

第二节 参数假设检验

例2：某厂生产一种灯泡，其寿命$X \sim N(\mu, 200^2)$,从过去来看，灯泡的平均寿命为1500h,现采用新工艺，在所生产的灯泡中抽取25只，测得平均寿命为1675h,问采用新工艺后，灯泡寿命是否有显著提高？$(\alpha = 0.05)$

解：设$H_0 : \mu = 1500$, $H_1 : \mu > 1500$

采用U检验，选取统计量$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$ 当H_0成立时，$U \sim N(0,1)$

对给定的显著性水平α,拒绝域为$W = \{u > u_{1-\alpha}\}$

查表得$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$

而$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} = \frac{1675 - 1500}{200}\sqrt{25} = 4.375 > 1.645$

所以拒绝H_0,认为灯泡寿命有显著提高。

第二节　参数假设检验

例2：某厂生产一种灯泡，其寿命$X \sim N(\mu, 200^2)$,从过去来看，灯泡的平均寿命为1500h,现采用新工艺，在所生产的灯泡中抽取25只，测得平均寿命为1675h,问采用新工艺后，灯泡寿命是否有显著提高？($\alpha = 0.05$)

解：设$H_0 : \mu = 1500$, $H_1 : \mu > 1500$
采用U检验，选取统计量$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$ 当H_0成立时，$U \sim N(0, 1)$
对给定的显著性水平α,拒绝域为$W = \{u > u_{1-\alpha}\}$
查表得$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$
而$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} = \frac{1675 - 1500}{200}\sqrt{25} = 4.375 > 1.645$
所以拒绝H_0,认为灯泡寿命有显著提高。

第二节 参数假设检验

2. t检验： 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$(X_1,\cdots,X_n)$为取自总体的样本,其中σ^2未知，要检验

(1)$H_0:\mu=\mu_0 \longleftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

选取统计量$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\overset{H_0}{\sim}t(n-1)$（用样本方差代替总体方差）

对给定的显著性水平α, 由$P\{|T|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)|H_0\}=\alpha$查表求出T的双侧分位点, 得拒绝域$W=\{|t|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$, 若由样本观测值计算$|t|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, 则拒绝$H_0$, 否则接受$H_0$.

第二节 参数假设检验

注：

(1)这种检验称为双侧t检验.

(2)单侧t检验

$H_0: \mu = \mu_0,\ H_1: \mu > \mu_0$,拒绝域为$W = \{t > t_{1-\alpha}(n-1)\}$

$H_0: \mu = \mu_0,\ H_1: \mu < \mu_0$,拒绝域为$W = \{t < t_{\alpha}(n-1)\}$

第二节 参数假设检验

例3：某种钢筋强度X服从正态分布，且$EX = 50(Kg/mm^2)$,今改变炼钢配方利用新法炼了9炉钢，从这9炉钢中每炉抽一根，测得强度分别为：

56.01，52.45，51.53，48.52，49.04，53.38，54.02，52.13，52.15，

问采用新法其钢筋强度均值是否有明显提高？$(\alpha = 0.05)$

解：设$H_0 : \mu = 50$, $H_1 : \mu > 50$

总体方差未知，选取统计量$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$.

对显著性水平$\alpha = 0.05$,查表得$t_{0.95}(8) = 1.86$, 因而拒绝域为$W = \{t > 1.86\}$,

由样本得$\overline{x} = 52.14$,$s = 2.24$,则$t = \frac{52.14-50}{2.24}\sqrt{9} = 2.87 > 1.86$

所以拒绝H_0,即认为强度有明显提高。

第二节 参数假设检验

例3：某种钢筋强度X服从正态分布，且$EX = 50(Kg/mm^2)$,今改变炼钢配方利用新法炼了9炉钢，从这9炉钢中每炉抽一根，测得强度分别为：
56.01，52.45，51.53，48.52，49.04，53.38，54.02，52.13，52.15，
问采用新法其钢筋强度均值是否有明显提高？$(\alpha = 0.05)$
解：设$H_0 : \mu = 50$, $H_1 : \mu > 50$
总体方差未知，选取统计量$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$.
对显著性水平$\alpha = 0.05$,查表得$t_{0.95}(8) = 1.86$, 因而拒绝域为$W = \{t > 1.86\}$,
由样本得$\bar{x} = 52.14$,$s = 2.24$,则$t = \frac{52.14 - 50}{2.24}\sqrt{9} = 2.87 > 1.86$
所以拒绝H_0,即认为强度有明显提高。

第二节　参数假设检验

二.方差的检验

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,$(X_1, \cdots, X_n)$为取自总体的样本,要检验$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(1)若$\mu = \mu_0$已知,当H_0成立时,选取统计量

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$$

故对给定的显著性水平α,由$P(k_1 < \chi^2 < k_2) = 1 - \alpha$确定$k_1, k_2$,得拒绝域

$$W = \{(x_1, \cdots, x_n) : \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \text{或} \chi^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\}.$$

其中$\chi^2_\alpha(n)$是$\chi^2(n)$分布的α分位数.

第二节 参数假设检验

(2)若μ未知,用$\overline{X}$代替μ,选取统计量

$$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

对给定的显著性水平α,拒绝域为

$$W=\{(x_1,\cdots,x_n):\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{或}\chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}.$$

第二节 参数假设检验

例4: 某种导线要求其电阻的标准差不得超过0.005Ω,今在生产的一批导线中取样品9根，测得$S = 0.007\Omega$,问在$\alpha = 0.05$下，能认为这批导线的方差显著偏大吗?

解：设$H_0 : \sigma^2 = (0.005)^2$ $H_1 : \sigma^2 > (0.005)^2$

μ未知，取统计量$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0}{\sim} \chi^2(9-1)$

由$\alpha = 0.05$,查表得$\chi^2_{0.95}(8) = 15.5$,所以拒绝域$W = \{\chi^2 > 15.5\}$

由样本$\chi^2 = \frac{8*0.007^2}{0.005^2} = 15.68 > 15.5$,所以拒绝$H_0$,认为这批导线方差显著偏大。

第二节 参数假设检验

例4: 某种导线要求其电阻的标准差不得超过0.005Ω,今在生产的一批导线中取样品9根，测得$S=0.007\Omega$,问在$\alpha=0.05$下，能认为这批导线的方差显著偏大吗?

解：设$H_0:\sigma^2=(0.005)^2$ $H_1:\sigma^2>(0.005)^2$

μ未知，取统计量$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0}{\sim}\chi^2(9-1)$

由$\alpha=0.05$,查表得$\chi^2_{0.95}(8)=15.5$,所以拒绝域$W=\{\chi^2>15.5\}$

由样本$\chi^2=\frac{8*0.007^2}{0.005^2}=15.68>15.5$,所以拒绝$H_0$,认为这批导线方差显著偏大。

第二节 参数假设检验

三.数学期望的比较

设$(X_1,\cdots,X_{n_1})$, $(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$是分别取自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$的两个简单随机样本,而且假设这两个样本之间也是相互独立的.分别用$\overline{X},\overline{Y},S_1^2,S_2^2$表示这两个样本的均值和方差

$$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\qquad \overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j,$$

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2.$$

$$H_0:\mu_1=\mu_2\longleftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

第二节 参数假设检验

(1)已知σ_1^2,σ_2^2
考虑$\overline{X}-\overline{Y}$,由于给定二个样本之间的独立性,

$$\begin{aligned} E(\overline{X}-\overline{Y}) &= \mu_1-\mu_2, \\ D(\overline{X}-\overline{Y}) &= \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}. \end{aligned}$$

因此在原假设H_0 $(\mu_1=\mu_2)$成立时,统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1).$$

否则,U服从均值不为零的正态分布.故对给定的显著性水平α,应取拒绝域$W=\{|u|>u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$.

第二节 参数假设检验

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$(方差未知但相等)

类似于前面t检验中的讨论,当总体方差未知时,应该用样本方差代替总体方差,而且由于给定二个总体的方差相等,我们用二个样本的合并方差$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$代替$\sigma_1^2=\sigma_2^2$. 由定理

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2).$$

因此在原假设H_0 $(\mu_1=\mu_2)$成立时,统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

可作为H_0的检验统计量.对给定的显著水平α,取拒绝域$W=\{|t|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}$ 这就是两样本的t检验.

第二节 参数假设检验

(3) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $n_1 = n_2 = n$ (方差未知且不等,但样本大小相等)
定义$Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \cdots, n$, 显然,Z_i相互独立.记

$$E(Z_i) = E(X_i - Y_i) = \mu_1 - \mu_2 = d,$$

$$D(Z_i) = DX_i + DY_i = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2,$$

则$Z_i \sim N(d, \sigma^2)$, $i = 1, \cdots, n$. 因此,等价于检验假设

$$H_0 : d = 0 \longleftrightarrow H_1 : d \neq 0$$

这里σ^2未知, 由t检验,记

$$\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2,$$

则当H_0 $(d = 0)$成立时, 有

$$T = \frac{\overline{Z}}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

第二节 参数假设检验

(4) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2,\ n_1 \neq n_2$

不妨设$n_1 < n_2$.令

$$Z_i = X_i - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} Y_i + \frac{1}{\sqrt{n_1 \cdot n_2}} \sum_{j=1}^{n_1} Y_j - \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j, \qquad i = 1, \cdots, n_1,$$

则$E(Z_i) = \mu_1 - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\mu_2 + \frac{1}{\sqrt{n_1 \cdot n_2}} n_1\mu_2 - \mu_2 = \mu_1 - \mu_2 = d,$

第二节 参数假设检验

$$
\begin{aligned}
D(Z_i) &= E[(X_i-\mu_1)-\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}(Y_i-\mu_2)+\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}}\sum_{j=1}^{n_1}(Y_j-\mu_2)\\
&\quad -\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)]^2\\
&= \sigma_1^2+\frac{n_1}{n_2}\sigma_2^2+\sigma_2^2(\frac{n_1}{n_1 n_2}+\frac{n_2}{n_2^2}-\frac{2}{n_2}+\frac{2\sqrt{n_1}}{n_2\sqrt{n_2}}-\frac{2n_1}{n_2\sqrt{n_1 n_2}})\\
&= \sigma_1^2+\frac{n_1}{n_2}\sigma_2^2,
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j)=0, \qquad i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n_1.
$$

第二节　参数假设检验

记$\sigma^2=\sigma_1^2+\frac{n_1}{n_2}\sigma_2^2$,则有$Z_i\sim N(d,\sigma^2)$, $\qquad i=1,\cdots,n_1$,且各Z_i相互独立. 因此等于检验假设

$$H_0: d=0 \longleftrightarrow H_1: d\neq 0,$$

这里σ^2未知, 选统计量$T=\frac{\overline{Z}}{S}\sqrt{n_1}\overset{H_0}{\sim}t(n_1-1)$.

第二节 参数假设检验

四. 方差的比较

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

1． μ_1, μ_2 已知

记

$$S_1^{*2} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2, S_2^{*2} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2$$

采用F检验，选统计量

$$F = \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} \overset{H_0}{\sim} F(n_1, n_2).$$

故对给定的显著性水平α,可取拒绝域

$$W = \{F < F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2) 或\ F > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)\}$$

第二节 参数假设检验

2．μ_1,μ_2未知

记$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2, S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2$

采用F检验，选统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\overset{H_0}{\sim}F(n_1-1,n_2-1).$$

故对给定的显著性水平α,可取拒绝域

$$W=\{F<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\text{或 }F>F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}$$

注：$F_\alpha(n_1,n_2)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$

第三节 区间估计

一.区间估计的基本概念

1.定义: 设总体分布族为$\{F(x,\theta):\theta\in\Theta\}$, 从中抽取样本$(X_1,...,X_n)$, 若$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,...,X_n), i=1,2$是定义在样本空间上, 而在参数空间$\Theta$上取值的两个统计量, 且$\hat{\theta}_1\le\hat{\theta}_2$, 则称$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$为$\theta$的一个区间估计. 如果对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$, 有

$$P_\theta(\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2)=1-\alpha,\quad\forall\theta\in\Theta,\tag{1}$$

则称$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间, $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$分别称为双侧置信上、下限.

第三节 区间估计

2.定义: 若$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,...,X_n)$和$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,...,X_n)$是定义在样本空间上, 而在参数空间$\Theta$上取值的两个统计量, 如果对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$, 分别有

$$P_\theta(\hat{\theta}_1\leq\theta)=1-\alpha,\quad P_\theta(\hat{\theta}_2\geq\theta)=1-\alpha,\forall\theta\in\Theta,$$

则分别称$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的(单侧)置信下限和(单侧)置信上限.

第三节 区间估计

3.定理: 设$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$分别是$\theta$的置信水平为$1-\alpha_1$ 和$1-\alpha_2$的(单侧)置信下限和(单侧)置信上限, 且$\hat{\theta}_1 \le \hat{\theta}_2$. 若总体分布是连续型的, 则$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$是$\theta$的置信水平为$1-(\alpha_1+\alpha_2)$的双侧置信区间.

4.定义(多维参数的置信域): 设有一参数分布族$\{F(x,\theta):\theta\in\Theta\}, \theta=(\theta_1,...,\theta_k)\in\Theta\subset R^k$, $(X_1,...,X_n)$是取自这个总体的一个样本, 若$S(X_1,...,X_n)$满足:
(1)对$\forall(x_1,...,x_n)$, $S(x_1,...,x_n)$是θ的一个子集,
(2)对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$,

$$P_\theta(\theta\in S(X_1,...,X_n))=1-\alpha, \forall\theta\in\Theta,$$

则称$S(X_1,...,X_n)$是θ的置信水平为$1-\alpha$的置信域.

第三节 区间估计

二.构造置信区间

直接法

(1) 寻找$(X_1,...,X_n)$和θ的函数$G=G(X_1,...,X_n,\theta)$ s.t. $F_G(x)$已知;

(2) 给定置信水平$1-\alpha$, 确定F_G的分位数c,d, s.t.

$$P_\theta(c\le G\le d)=F_G(d)-F_G(c-0)=1-\alpha;$$

(3)

$$c\le G\le d\Rightarrow \hat{\theta}_1(X_1,...,X_n)\le\theta\le\hat{\theta}_2(X_1,...,X_n)$$

$$P_\theta(\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2)=1-\alpha,$$

$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

第三节 区间估计

例1: 设$(X_1, ..., X_n)$是来自$U(0,\theta)$的一个样本，对给定的$\alpha (0 < \alpha < 1)$，求θ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

例2: 设$(X_1, ..., X_n)$是取自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，μ, σ^2未知，分别求μ, σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

例3: 设某产品的寿命X服从指数分布，

$$f(x;\lambda) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0,$$

因$EX = 1/\lambda$表示平均寿命，只要求该产品平均寿命的下限，即λ的置信水平为$1-\alpha$ 的单侧置信上限.