Tímto dik Pétě za zpracovaný první dva okruhy.

1. Analýza

1.1 Posloupnosti a řady čísel a funkcí

1.1.1 Limity posloupností a součty řad

Definice *Posloupností reálných čísel* rozumíme jakékoliv zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$.

Definice Buď $M = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Pak posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je (shora, zdola) *omezená*, pokud množina M je (shora, zdola) omezená v $\mathbb{R}$.

Definice Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je *neklesající*, jestliže
$a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Analogicky klesající, nerostoucí, rostoucí, monotónní, ryze monotónní.

Definice Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je *vlastní limita* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jestliže

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon.$$

Definice Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu ∞, pokud

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n > K.$$

Analogicky limita $-\infty$, tyto limity jsou *nevlastní*.

Věta (ekvivalentní podmínka limity) Nechť $K > 0$. Platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ právě tehdy, když

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_n - A| < K\epsilon.$$

Definice Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je *konvergentní*, pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$

Věta (jednoznačnost limity) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Definice Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost, pak řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je *vybraná* z $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pokud existuje rostoucí posloupnost celých čísel $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Věta (o limitě vybrané posloupnosti) Pokud posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak každá vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má také limitu A.

Věta (o aritmetice limit) Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti a platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Pak

i. $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$,

ii. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$,

iii. Pokud $B \neq 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (o součinu omezené a nulové) Nechť $a_n \to 0$ a nechť $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená posloupnost. Pak $a_n b_n \to 0$.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (vztah uspořádání a limity) Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, resp. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti s limitami A, resp. B, a nechť platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n \leq b_n.$$

Pak $A \leq B$.

Věta (o dvou policajtech) Nechť

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$$

a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} b_n$. Pak $lim_{n\to\infty} c_n = A$.
Plus jednostranné verze této věty.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (o monotónní posloupnosti) Každá monotónní posloupnost má limitu.

Definice Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost, definujeme

$$\alpha_k = \inf_{n\geq k}\{a_n\}, \quad \beta_k = \sup_{n\geq k}\{a_n\}.$$

Pak α_k je neklesající posloupnost, β_k je nerostoucí posloupnost a definujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \alpha_k, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \beta_k.$$

Věta Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = A \wedge \limsup_{n\to\infty} a_n = A.$$

Definice Řekneme, že $H \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pokud existuje vybraná posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $b_k \to H$.

Věta (Bolzano - Weierstrass) Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní.

Věta (Bolzano - Cauchy) Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má vlastní limitu $\Leftrightarrow$ splňuje podmínku

$$(BC) \quad \forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n,m \in \mathbb{N},\ n,m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Definice Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. *Částečným součtem řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definujeme součet $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_n$. *Součtem řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definice Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje* (diverguje) pokud konverguje (diverguje) posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Věta (nutná podmínka konvergence) Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

1.1.2 Kritéria absolutní a neabsolutní konvergence číselných řad

Řady s nezápornými členy

Věta (srovnávací kritérium) Nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n \leq b_n$, pak

i. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverguje,

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (limitní srovnávací kritérium) Nechť $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in \langle 0,\infty\rangle$, pak

i. $K \in (0,\infty) \Rightarrow \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\Big)$,

ii. $K = 0 \Rightarrow \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\Big)$,

iii. $K = \infty \Rightarrow \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\Big)$.

Věta (D'Alambertovo podílové kritérium)

- Pokud
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$
pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Pokud
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$
pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje. Speciálně, je-li $lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Cauchyho odmocninové kritérium)

- Pokud
$$\exists q \in (0{,}1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q,$$
pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje. Speciálně je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Raabeho kritérium)

- Nechť $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Nechť $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (kondenzační kritérium) Nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_{n+1} \leq a_n$, pak
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje.}$$

Obecné řady

Definice Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje *absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, ale ne absolutně, řekneme, že konverguje *neabsolutně.*

Věta (Bolzano - Cauchy pro řady) Platí
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n{,}k \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| < \epsilon.$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (vztah konvergence a absolutní konvergence) Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak konverguje.

Věta (Leibnizovo kritérium) Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí posloupnost. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Definice Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má *omezené částečné součty*, pokud platí

$$\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N} : \left|\sum_{i=0}^{m} a_i\right| < K.$$

Věta (Ábel - Dirichlet). Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí nezáporná posloupnost. Jestliže platí alespoň jedna z podmínek

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje,

(D) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

1.1.3 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

Definice Nechť $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou funkce definované na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ (nebo na metrickém prostoru (M,ρ)) s hodnotami v $\mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k f na M, jestliže $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tj. pokud

$$\forall x \in M\ \forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Tento vztah značíme $f_n \to f$.
Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f na M *stejnoměrně*, pokud

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

značíme $f_n \rightrightarrows f$.
Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f na M *lokálně stejnoměrně*, pokud $\forall x \in M \exists r > 0 :\ f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(x,r)$.

Věta (charakterizace stejnoměrné konvergence) Nechť $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou funkce definované na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$. Platí $f_n \rightrightarrows f$ právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definice Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, pokud

$$\forall x \in M\ \forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n,m \in \mathbb{N},\ n,m \geq n_0 :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *stejnoměrně cauchyovská*, pokud

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n,m \in \mathbb{N},\ n,m \geq n_0 :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Definice Řekneme, že množina M (metrický prostor (M,ρ)) je *úplná*, pokud každá cauchyovská posloupnost v ní je konvergentní.

Věta (vztah konvergence a cauchyovskosti) Nechť funkce $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ zobrazují do úplného prostoru. Pak je posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (stejnoměrně) konvergentní právě tehdy, když je (stejnoměrně) cauchyovská.

Věta (o stejnoměrné konvergenci a spojitosti) Nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ spojité a nechť $f_n \rightrightarrows f$. Pak f je také spojitá.

Věta (Moore-Osgoodova) Nechť jsou funkce $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ definované na M, $x_0 \in M$ a nechť platí

i. $f_n \rightrightarrows f$ na M,

ii. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) =: \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Potom existuje $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ a platí $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Věta (záměna limity a derivace) Nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ definované na intervalu (a,b), $a < b$ a nechť platí

i. f_n mají vlastní derivaci na (a,b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

ii. $\exists c \in (a,b):\ \{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní,

iii. $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na (a,b).

Pak existuje funkce f taková, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f, f má vlastní derivaci na (a,b) a posloupnost $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f' na (a,b).

Věta (limita a primitivní funkce) Nechť funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ mají na intervalu (a,b), $a < b$ primitivní funkce $F_n, n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na (a,b). Pak posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k F, kde F je primitivní funkce k f.

Věta (záměna limity a integrálu) Nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ newtonovsky integrovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle$. Pak funkce f je také newtonovsky integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Definice Řekneme, že množina K (metrický prostor (K,ρ)) je *kompaktní*, pokud z každé posloupnosti v něm lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Věta (Diniho) Nechť je množina K (metrický prostor (K,ρ)) kompaktní a nechť funkce $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou spojité, zobrazující z K do $\mathbb{R}$, a $f_n \to f$. Pokud $\forall x \in K$ je $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní, pak $f_n \rightrightarrows f$ na K.

Definice Nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ definované na množině M. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je (*stejnoměrně, lokálně stejnoměrně*) *konvergentní*, pokud je (stejnoměrně, lokálně stejnoměrně) konvergentní posloupnost jejích částečných součtů.

Definice Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ je *majorantní* řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na M, pokud $|f_n(x)| \leq g_n(x)$, $\forall x \in M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Věta (srovnávací kritérium pro stejnoměrnou konvergenci) Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ majorantní řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na M a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ je stejnoměrně konvergentní na M. Pak i řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ jsou stejnoměrně konvergentní na M.

Věta (Weierstrassovo kritérium) Nechť platí $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\forall x \in M$ a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Pak jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ stejnoměrně konvergentní na M.

Věta (záměna sumy a derivace) Nechť mají funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ vlastní derivace na intervalu (a,b), $a < b$ a nechť

i. $\exists x_0 \in (a,b):\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje,

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b),

pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně $\forall x \in (a,b)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Věta (záměna sumy a integrálu) Nechť platí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na (a,b), $a < b$ a nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ newtonovsky integrovatelné na (a,b). Pak i funkce f je newtonovsky integrovatelná na (a,b) a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Definice Řekneme, že posloupnost funkcí $f_n, n \in \mathbb{N}$ je *stejnoměrně omezená* na $M \subseteq \mathbb{R}$, pokud $\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in M:\ |f_n(x)| < K$.

Věta (Abel-Dirichlet) Nechť funkce $f_n, g_n, n \in \mathbb{N}$ zobrazují z M do $\mathbb{R}$ a nechť platí alespoň jedna z podmínek

(A) i. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M,

ii. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně omezená na M,

iii. $\forall x \in M$ je $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní.

(D) i. $\{\sum_{i=1}^{n} f_i\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně omezená,

ii. $g_n \rightrightarrows 0$,

iii. $\forall x \in M$ je $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} g_n f_n$ je stejnoměrně konvergentní na M.

1.1.4 Mocninné řady

Definice Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazýváme *mocninnou řadou* s *koeficienty* a_n a *středem* x_0.

Věta (o existenci poloměru konvergence) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada. Pak existuje právě jedno číslo $R \in \langle 0, \infty\rangle$ takové, že $\forall x: \ |x-x_0| < R$ platí, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje absolutně a pro $\forall x: \ |x-x_0| > R$ tato řada diverguje. Pro toto R platí vztah

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Zde je vhodné znát myšlenku důkazu.

Definice Číslo R z předchozí věty nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Věta (derivace mocninné řady) Označme $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence R. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ má stejný poloměr konvergence R a v něm platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$.

Věta (o integrování mocninné řady) Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ poloměr konvergence $R \in (0, \infty\rangle$, pak pro $|x-x_0| < R$ platí

$$\int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \Big) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C.$$

Věta (Abelova) Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ poloměr konvergence $R \in (0, \infty)$ a nechť suma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně pro $x \in \langle x_0, x_0 + R\rangle$ a platí

$$\lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Zde je vhodné znát důkaz (alespoň první části věty).

1.2 Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné

1.2.1 Spojitost a derivace funkcí jedné reálné proměnné

Definice *Funkce jedné reálné proměnné* je funkce $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}$.

Definice Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f je definována na nějakém redukovaném okolí bodu a. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je *limita* funkce f v bodě a, pokud

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in \mathcal{U}(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\epsilon),$$

kde $\mathcal{U}$ značí okolí bodu. Tento vztah značíme $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Definice Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f je definovaná v bodě a. Řekneme, že funkce f je *spojitá* v bodě a, pokud $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Definice pro limitu a spojitost zprava a zleva analogicky.

Věta (Heineho) Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť f je definována na nějakém redukovaném okolí bodu a. Pak platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \text{ posloupnost } \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \to a,\ x_n \neq a :\ f(x_n) \to A.$$

Zde je vhodné znát myšlenku důkazu.

Věta (Heineho věta pro spojitost) Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a navíc f definována v nějakém okolí bodu a. Pak f je spojitá v bodě a právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to a$ platí $f(x_n) \to f(a)$.

Věta (jednoznačnost limity) Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta (o aritmetice limit) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a funkce f a g jsou definované na nějakém redukovaném okolí bodu a a nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$,
$\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí

i. $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B$,

ii. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$,

iii. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud $B \neq 0$,

pokud jsou výrazy na pravých stranách definované.
Zde je vhodné znát myšlenku důkazu.

Důsledek Pokud funkce f a g jsou spojité v bodě a, pak i $f \pm g$, fg a f/g (pokud $g(a) \neq 0$) jsou spojité v bodě a.

Definice Řekneme, že funkce je *spojitá na intervalu* I, pokud je spojitá ve všech vnitřních bodech intervalu I a spojitá zprava/zleva v jeho krajních bodech.

Definice Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $a \in M$, řekneme že f nabývá v bodě a

- svého *maxima (minima)* na M, jestliže $f(x) \leq f(a)\ \forall x \in M$ $(\geq)$,
- svého *ostrého maxima (minima)* na M, jestliže $f(x) < f(a)\ \forall x \in M$ $(>)$,
- svého *lokálního maxima (minima)*, pokud $\exists\, \mathcal{U}(a):\ f(x) \leq f(a)\ \forall x \in \mathcal{U}(a)$ $(\geq)$,
- svého *ostrého lokálního maxima (minima)*, pokud $\exists\, \mathcal{U}(a):\ f(x) < f(a)$ $\forall x \in \mathcal{U}(a)$ $(>)$.

Věta (spojitost a extrémy) $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f spojitá na $\langle a,b\rangle$. Pak funkce f nabývá na intervalu $\langle a,b\rangle$ maxima a minima.

Věta (spojitost a omezenost) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f spojitá na $\langle a,b\rangle$. Pak je tam omezená.

Definice *Derivací* funkce f v bodě x_0 rozumíme limitu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pokud tato limita existuje. Značíme $f'(x_0)$.
Alternativně také $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Definice Derivaci funkce f v bodě a nazveme *vlastní*, pokud $f'(a) \in \mathbb{R}$ a *nevlastní*, pokud $f'(a) = \pm\infty$.

Věta (derivace a spojitost) Má-li funkce f v bodě vlastní derivaci, pak je v něm spojitá.

Věta (aritmetika derivací) Platí

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, pokud $g(x_0) \neq 0$.

Zde je vhodné znát myšlenku důkazu.

Věta (derivace složené funkce) Nechť má funkce f derivaci v bodě y_0, nechť je funkce g spojitá v bodě x_0 a má v něm derivaci a nechť $y_0 = g(x_0)$. Pak $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Věta (derivace inverzní funkce) Nechť je funkce f spojitá a ryze monotónní na (a,b), $x_0 \in (a,b)$ a $y_0 = f(x_0)$. Pokud

1. $f'(x_0) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ pak $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$,
2. $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí (klesající) v (a,b), pak $(f^{-1})'(y_0) = \infty$ $(-\infty)$.

1.2.2 Hlubší věty o spojitých funkcích

Věta (o nabývání mezihodnot) Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$, $-\infty < a < b < \infty$. Nechť $f(a) < f(b)$ a $y \in (f(a),f(b))$. Pak $\exists x \in (a,b):$ $f(x) = y$. Analogicky pro $f(a) > f(b)$.
Zde je vhodné znát myšlenku důkazu. Na to se mě přímo ptali, ale stačilo jim "sporem přes definici suprema".

Věta (spojitý obraz intervalu) Nechť I je interval a f je spojitá na I. Pak $f(I)$ je také interval.

Věta (o spojitosti inverzní funkce) Nechť f je spojitá rostoucí (klesající) na intervalu I. Pak f^{-1} je spojitá rostoucí (klesající) na $f(I)$.

1.2.3 Věty o střední hodnotě a jejich důsledky

Věta (Rolleova) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť

i. $f \in \mathcal{C}(\langle a,b \rangle)$,

ii. $\exists f'(x)\ \forall x \in (a,b)$,

iii. $f(a) = f(b) = 0$.

Pak $\exists \xi \in (a,b):\ f'(\xi) = 0$. Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Langrangeova věta o střední hodnotě, Lagrangeova věta o přírůstku funkce) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a

i. $f \in \mathcal{C}(\langle a,b \rangle)$,

ii. $\exists f'(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Cauchyova) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f,g \in \mathcal{C}(\langle a,b \rangle)$, f a g mají derivaci na (a,b) a v každém bodě je alespoň jedna z nich konečná (tj. $\min\{f'(x),g'(x)\} \in \mathbb{R}$, $\forall x \in (a,b)$), a nechť $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta (L'Hospital) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť f a g mají vlastní derivace v nějakém redukovaném okolí bodu x_0 a platí alespoň jedna z podmínek

i. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$,

ii. $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

Pak
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
pokud limita na pravé straně existuje.
L'Hospitalova věta je důsledkem Cauchyovy věty o střední hodnoty.

Věta (o derivaci zprava) Nechť je f je spojitá zprava v bodě a a nechť $\lim_{x \to a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.
Věta o derivaci zprava je důsledkem Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

1.2.4 Vztahy monotonie a znaménka derivace

Věta Nechť I je interval, $I \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I)$ a f má na I vlastní derivaci.

i. Pokud $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in \text{Int}(I)$, pak f je neklesající v I.

ii. Pokud $f'(x) > 0 \; \forall x \in \text{Int}(I)$, pak f je rostoucí v I.

iii. Pokud $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in \text{Int}(I)$, pak f je nerostoucí v I.

iv. Pokud $f'(x) < 0 \; \forall x \in \text{Int}(I)$, pak f je klesající v I.

Zde je vhodné znát důkaz.

Důsledek Nechť I je interval a $f'(x) = 0 \; \forall x \in I$. Pak f je konstantní na I.

1.2.5 Konvexita

Definice Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ je

- *konvexní* v I, pokud $\forall x,y \in I$, $\forall \lambda \in (0,1)$ platí
  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$,
- *ryze konvexní* v I, pokud $\forall x,y \in I$, $\forall \lambda \in (0,1), x \neq y$ platí
  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$,
- *(ryze) konkávní*, pokud $-f$ je (ryze) konvexní.

Věta (konvexita a jednostranné derivace) Nechť f je konvexní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak existují konečné jednostranné derivace $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \; \forall x_0 \in \text{Int}(I)$ a navíc $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.

Věta (vztah konvexity a spojitosti) Nechť f je konvexní na $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Pak $f \in \mathcal{C}((a,b))$.
Otevřenost intervalu je důležitá. Jedná se o důsledek předchozí věty.

Věta (vztah druhé derivace a konvexity) Nechť f je spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť má na I spojitou první derivaci. Jestliže $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in I$ pak f

je konvexní.

Definice Nechť f má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f pokud existuje $\delta > 0$ takové, že platí alespoň jedna z podmínek

1. $\forall x \in \mathrm{P}_-(x_0,\delta): \; f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \; \wedge$
   $\forall x \in \mathrm{P}_+(x_0,\delta): \; f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,

2. $\forall x \in \mathrm{P}_-(x_0,\delta): \; f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \; \wedge$
   $\forall x \in \mathrm{P}_+(x_0,\delta): \; f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Věta (nutná podmínka pro inflexi) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $f''(x_0) \neq 0$. Pak x_0 není inflexním bodem f.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (postačující podmínka pro inflexi) Nechť f má spojitou první derivaci v $(a,b) \subset \mathbb{R}$, nechť $x_0 \in (a,b)$ a $\exists \delta > 0$ takové, že platí alespoň jedna z podmínek

1. $\forall x \in \mathrm{P}_-(x_0,\delta): \; f''(x) > 0 \; \wedge \; \forall x \in \mathrm{P}_+(x_0,\delta): \; f''(x_0) < 0$,

2. $\forall x \in \mathrm{P}_-(x_0,\delta): \; f''(x) < 0 \; \wedge \; \forall x \in \mathrm{P}_+(x_0,\delta): \; f''(x_0) > 0$.

Pak x_0 je inflexní bod.
Zde je vhodné znát důkaz.

1.2.6 Taylorův polynom, Taylorovy řady

Definice Nechť $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to x_0$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Definice Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Nechť existuje vlastní $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom polynom

$$T^f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

je *Taylorův polynom funkce f řádu n v bodě a.*

Věta (Peanova) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jeden polynom P_n stupně nejvýše n takový, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

tj. $f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$ a to právě polynom $P_n = T^f_{n,x_0}$.

Definice Nechť jsou splněny podmínky definice Taylorova polynomu.
Pak $R^f_{n+1,x_0}(x) := f(x) - T^f_{n,x_0}(x)$ nazýváme *zbytkem* po n-tém členu Taylorova polynomu.

Věta (Taylorova věta o zbytku) Nechť $f,\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0,x \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x$ a nechť J je uzavřený interval s krajními body x a x_0. Nechť platí

1. $f^{(n+1)}(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in J$ a
2. $\varphi \in \mathcal{C}(J)$, $0 \neq \varphi'(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathrm{Int}(J)$.

Pak existuje $\xi \in \mathrm{Int}(J)$ takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)} f^{(n+1)}(\xi).$$

Speciálně volbou $\varphi(t) = t$ dostáváme *Cauchyův tvar zbytku*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}(x - x_0) f^{(n+1)}(\xi),$$

a volbou $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ dostáváme *Lagrangeův tvar zbytku*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Definice Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, nechť f má v x_0 konečné derivace všech řádů. Pak řadu

$$T^f_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0. Pokud $x_0 = 0$ pak jde o *MacLaurinovu řadu*.

Věta Platí $T^f_{x_0} = f$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$.

Zde je vhodné znát příklady některých Taylorových (MacLaurinových) řad, například pro $e^x,\ \sin x,\ \cos x, \ldots$.

1.3 Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné

1.3.1 Primitivní funkce, určitý integrál

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $F,f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *primitivní funkcí* f na (a,b), jestliže $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Věta (primitivní funkce a spojitost) Každá primitivní funkce je spojitá.

Věta (postačující podmínka pro existenci primitivní funkce) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{C}((a,b))$. Pak f má na (a,b) primitivní funkci.

Věta (o jednoznačnosti primitivní funkce) Nechť F a G jsou dvě primitivní funkce k f na intervalu (a,b). Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $F(x) = G(x) + c,\ \forall x \in (a,b)$.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (linearita primitivní funkce) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce k g na (a,b) a $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha f + \beta g$ má na (a,b) primitivní funkce $\alpha F + \beta G$.

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Končenou posloupnost $\{x_0, \dots, x_n\}$ nazveme *dělením intervalu* $\langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$, pokud $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.
Řekneme, že D' je *zjemnění* dělení D, pokud každý bod D je zároveň i bodem D'.

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{x_0, \dots, x_n\}$ dělení $\langle a,b \rangle$ a funkce f definovaná na $\langle a,b \rangle$. Označme

$$m_i = \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x),\ M_i = \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x)$$

a

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f,D).$$

$s(f,D)$ nazýváme *dolní součet* a $S(f,D)$ *horní součet* funkce f při dělení D.
Pak definujeme *dolní Riemannův integrál* jako

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\{s(D), D \text{ dělení } \langle a,b \rangle\},$$

a *horní Riemannův integrál* jako

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\{S(D), D \text{ dělení } \langle a,b \rangle\}.$$

Definice Řekneme, že funkce f má *Riemannův integrál* ($f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$), pokud

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

pak tento integrál definujeme jako

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Definice *Norma dělení* D je $||D|| = \max\{(x_i - x_{i-1}),\ i = 1, \dots, n\}$.
Věta (o horním a dolním součtu zjemnění) Nechť D' je zjemnění dělení D. Pak

$$s(f,D) \leq s(f,D') \leq S(f,D') \leq S(f,D).$$

Věta (aproximace horního a dolního Riemannova integrálu) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a je funkce f omezená na intervalu $\langle a,b \rangle$. Pak $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall D, \|D\| < \delta$ platí

$$\overline{\int_a^b} f \leq S(f,D) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \;\wedge\; \underline{\int_a^b} f - \epsilon < s(f,D) \leq \underline{\int_a^b} f.$$

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f,F : (a,b) \to \mathbb{R}$. Pokud platí $F \in \mathcal{C}((a,b))$ a $F'(x) = f(x) \; \forall x \in (a,b) \setminus K$, kde K je konečná množina, pak F je *zobecněná primitivní funkce* k f na (a,b).

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a F je zobecněná primitivní funkce k f na (a,b). Pak *Newtonovým integrálem* funkce f od a do b rozumíme

$$\int_a^b f = [F]_a^b := \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x),$$

má-li tento rozdíl smysl. Má-li funkce f Newtonův integrál značíme $f \in \mathcal{N}((a,b))$.

Věta (vztah Newtonova a Riemannova integrálu) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$. Pokud $f \in \mathcal{N}((a,b)) \cap \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$ pak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f = (\mathcal{R}) \int_a^b f.$$

1.3.2 Základní vlastnosti, vztah k primitivní funkci

Věta (vlastnosti Riemannova integrálu) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(i.) *Linearita*: Nechť $f,g \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak $f+g \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$, $\lambda f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$ a

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

(ii.) *Monotonie*: Nechť $f,g \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$, $f \leq g$ na $\langle a,b \rangle$. Pak

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(iii.) *Aditivita*: Nechť $c \in (a,b)$ a f definovaná na $\langle a,b \rangle$. Pak

$$f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle) \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}(\langle a,c \rangle) \;\wedge\; f \in \mathcal{R}(\langle c,b \rangle),$$

a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(iv.) *Absolutní konvergence*: Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$, pak $|f| \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$ a platí

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \, .$$

Věta (vztah Riemannova integrálu a primitivní funkce) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$. Pak funkce $F(x) := \int_a^x f$, $\forall x \in \langle a,b \rangle$ je spojitá v $\langle a,b \rangle$ a $F'(x) = f(x)$ pro všechny body spojitosti f.

Věta (o rovnosti integrálů) $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$ a $g : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ taková, že $g = f$ na $\langle a,b \rangle \backslash K$, kde K je konečná množina. Potom

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

Věta (vlastnosti Newtonova integrálu) Newtonův integrál má vlastnosti *linearity* a *monotonie* stejné jako Riemannův. Dále

(iii.) *Linearita*: Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c \in (a,b)$. Pak

$$f \in \mathcal{N}(\langle a,c \rangle),\ f \in \mathcal{N}(\langle c,b \rangle),\ \text{f spojitá v } c \ \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}(\langle a,b \rangle).$$

(iv.) Pokud $|f| \in \mathcal{N}((a,b))$, f spojitá, pak $f \in \mathcal{N}((a,b))$.

Definice Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, pokud

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x,y \in I : \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

1.3.3 Metody výpočtu

Věta (integrace per partes) Nechť $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce g na (a,b). Pak na (a,b) platí

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx.$$

Věta (substituční metody) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a

(i.) F je primitivní funkce k f na (a,b) a $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$, $\varphi'(t)$ existuje $\forall t \in (\alpha,\beta)$. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c \quad \forall t \in (\alpha,\beta).$$

(ii.) $\varphi : (\alpha,\beta) \xrightarrow{na} (a,b)$, $0 \neq \varphi'(t)\ \forall t \in (\alpha,\beta)$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a G je primitivní funkce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na (a,b). Pak

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)).$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (per partes pro Newtonův integrál) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a F je primitivní funkcí k f na (a,b) a G je primitivní funkce k g na (a,b). Pak

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG.$$

Věta (o střední hodnotě pro integrály I.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C(\langle a,b\rangle)$, $g \geq 0$ v $\langle a,b\rangle \backslash K$, kde K je konečná. Pak

$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle : \int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g,$$

pokud integrály $\int_a^b fg$ a $\int_a^b g$ existují.

Věta (o střední hodnotě pro integrály II.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ monotónní a spojitá. Pak

$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle : \int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f.$$

Tyhle dvě věty nemusí asi být tolik důležité, ale věty o středních hodnotách jsou moje fave.

Postup integrace racionální funkce Nechť $Q(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$.

1. Pokud st$P \geq$ st$Q$ tak částečné dělení polynomů na tvar $P_1 + \frac{P_2}{Q}$.
2. Rozklad Q na součin ireducibilních dvou a trojčlenů.
3. Rozklad na parciální zlomky.
4. Integrace parciálních zlomků.

Detailní přístup je popsaný na webových stránkách Mgr. Kristýny Kuncové. V archivu má cvika z Analýz 1 a 2 a v nich skvělé materiály.

Goniometrické substituce

1. Pokud $\mathrm{R}(\sin x,\cos x) = \mathrm{R}(-\sin x,-\cos x)$ pak se používá substituce $t = \tan x$, pak

$$dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}.$$

2. V jakémkoliv případě lze použít substituci $t = \tan \frac{x}{2}$. Pak
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Věta (Integrální kritérium pro konvergenci řad) Nechť f je spojitá, kladná a nerostoucí na $\langle n_0,\infty)$ a nechť $a_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx < \infty.$$
Tady se ještě hodí vědět: délka křivky, objem rotačního tělesa, Fubiniova věta a Fubini o substituci. Moc zmatený a ugh.

1.3.4 Základní kritéria existence

Věta (existence Riemannova integrálu I.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak
$f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Věta (existence Riemannova integrálu II.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f monotónní na $\langle a,b\rangle$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Věta (existence Riemannova integrálu III.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f omezená na $\langle a,b\rangle$. Pak platí
$$\int_a^b f \text{ existuje } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists D \text{ dělení } \langle a,b\rangle:\ S(f,D) - s(f,D) < \epsilon.$$
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (existence Newtonova integrálu) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f je spojitá a omezená na (a,b). Pak $f \in \mathcal{N}((a,b))$.

Věta (srovnávací kritéria pro Newtonův integrál) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(i.) Pokud $0 \leq f \leq g$ na $\langle a,b)$, f spojitá na $\langle a,b)$, pak
$$g \in \mathcal{N}((a,b)) \Rightarrow f \in \mathcal{N}((a,b)).$$

(ii.) Pokud f a g jsou nezáporné spojité na $\langle a,b)$ a platí
$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = c,\ c \in (0,\infty).$$
Pak $f \in \mathcal{N}((a,b)) \Leftrightarrow g \in \mathcal{N}((a,b))$.

Věta (Abel-Dirichlet pro Newtonův integrál) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : \langle a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k f na $\langle a,b)$, $g : \langle a,b) \to \mathbb{R}$ monotónní a spojitá. Nechť platí alespoň jedna z následujících podmínek:

(A) $f \in \mathcal{N}((a,b))$ a g je omezená na (a,b),

(D) F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$.

Pak $fg \in \mathcal{N}((a,b))$.

1.4 Funkce více proměnných

1.4.1 Diferenciál a parciální derivace

Tahle kapitola je dost zmatená, ale (zatím) se mi nepodařilo to srovnat. You try.

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$. *Parciální derivace* f v bodě a podle i-té proměnné je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}.$$

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. *Derivací f v bodě a ve směru $\vec{v}$* je

$$D_{\vec{v}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je *totální diferenciál* funkce f v bodě a, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Věta (o tvaru totálního diferenciálu) Má-li f v bodě a totální diferenciál, pak je v a spojitá, existují v a všechny parciální derivace a platí

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n.$$

Věta (postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě a spojité všechny parciální derivace, pak má v a totální diferenciál.

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a f má v a všechny parciální derivace vlastní. *Gradient* funkce f v bodě a je

$$\triangledown f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Gradient udává směr největšího růstu funkce.

Věta (o gradientu a derivacích ve směru) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Pak $D_{\vec{v}} f(a) = \langle \triangledown f(a), \vec{v} \rangle$.

Definice Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^n$ a L je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$. Pak L je *derivací* F v a, pokud

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(a + h) - F(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Pak

$$F'(a) = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)\right)_{i,j=1}^{k,n}.$$

Tato matice se nazývá *Jakobiho matice*. Je-li $k = n$ pak determinant této matice nazýváme *Jakobián*.

Věta (aritmetika totálního diferenciálu) Nechť $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají totální diferenciály L_f a L_g v $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak existují totální diferenciály $L_{f\pm g}(a)$, $L_{fg}(a)$, $L_{\alpha f}(a)$ a $L_{\frac{f}{g}}(a)$ pro $g(a) \neq 0$ a platí vztahy

$$L_{f\pm g}(a) = L_f(a) \pm L_g(a),$$

$$L_{\alpha f}(a) = \alpha L_f(a),$$
$$L_{fg}(a) = L_f(a)g(a) + L_g(a)f(a),$$
$$L_{\frac{f}{g}}(a) = \frac{g(a)L_f(a) - f(a)L_g(a)}{g^2}.$$

Věta (o diferenciálu složeného zobrazení, řetízkové pravidlo): Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $a \in \mathbb{R}^s$, $b \in \mathbb{R}^n$, $b = [g_1(a), \dots, g_n(a)]$ a nechť f má totální diferenciál v b a g_i mají totální diferenciál v a pro všechny $i = 1, \dots, n$. Buď $H(x) = f\Big([g_1(x), \dots, g_n(x)]\Big)$. Pak H má v a totální diferenciál a platí

$$L_H(a)(h) = \sum_{i=1}^{s}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)\right]h_i,$$

speciálně

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a).$$

Věta (o střední hodnotě) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má všechny parciální derivace na úsečce mezi $a,b \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje $\xi \in (0,1)$ takové, že

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big(a + \xi(b-a)\Big)\cdot(b_i - a_i).$$

Definice Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbb{R}$ má v G všechny paricální derivace a nechť $a \in G$. *2. parciální derivace* f jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

Věta (záměnnost parciálních derivací druhého řádu) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v $a \in \mathbb{R}^n$ spojitou parciální derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Pak tam je spojitá i parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ a tyto dvě se rovnají.

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ mají totální diferenciál v bodě a pro všechny $i = 1, \ldots, n$. *Druhý diferenciál* funkce f v bodě a je

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i \cdot k_j,$$

maticově

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Tato matice se nazývá *Hessova matice*.

Definice Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Množina $C^k(G)$ je množina těch funkcí, které mají spojité parciální derivace k-tého řádu na G.

Věta (postačující podmínka pro existenci druhého diferenciálu) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f \in C^2(G)$. Pak f má na G druhý diferenciál.

1.4.2 Implicitní funkce

Definice *Explicitní vyjádření funkce* je $y = y(x)$ a *implicitní vyjádření funkce* je $F(x,y) = 0$.

Věta (o implicitní funkci) Nechť $k \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená množina, $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $F = F(x_1, \ldots, x_n, y) = F(x,y)$. Nechť $[a,b] = [a_1, \ldots, a_n, b] \in \Omega$ a nechť platí

i. $F(a,b) = 0$,

ii. $F \in C^k(\Omega)$,

iii. $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Pak $\exists \delta_1$, δ_2:

$$\text{(i.) } \forall x \in \mathcal{U}(a,\delta_1)\ \exists! y \in \mathcal{U}(b,\delta_2) : F(x,y) = 0, \text{ tj. } y = y(x),$$

$$\text{(ii.) } y \in C^k\Big(\mathcal{U}(a,\delta_1)\Big) \text{ a } \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}, \forall x \in \mathcal{U}(a, \delta_1),\ i = 1, \ldots, n.$$

Věta (o implicitním zobrazení) Nechť $k \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ otevřená množina, $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $F = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = F(x,y)$, nechť $[a,b] = [a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m] \in \Omega$ a platí

i. $F(a,b) = 0$,

ii. $F \in C^k(\Omega)$,

iii. $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(a,b) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b) \right)_{i,j=1}^{m} \neq 0.$

Pak $\exists \mathcal{U}(a) \subset \mathbb{R}^n$, $\exists \mathcal{U}(b) \subset \mathbb{R}^m$:

$$\forall x \in \mathcal{U}(a) \exists! y \in \mathcal{U}(b) : F(x,y) = 0, \text{ tj. } y = (y_1(x), \dots, y_m(x)) \text{ a } y \in C^k\Big(\mathcal{U}(a)\Big).$$

1.4.3 Volné a vázané extrémy funkcí více proměnných

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce f má v a *globální maximum*, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n : \; f(a) \geq f(x)$. Řekneme, že funkce f má v bodě a *lokální maximum*, jestliže $\exists \mathcal{U}(a) : \; f(a) \geq f(x) \; \forall x \in \mathcal{U}(a)$. Tyto extrémy jsou *volné.*
Analogicky minimum.

Definice Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$ *maxima vzhledem k* M, pokud $\forall x \in M : \; f(x) \leq f(a)$. Řekneme, že funkce f má v a *lokální maximum vzhledem k* M, pokud $\exists \mathcal{U}(a) : \; f(x) \leq f(a) \; \forall x \in \mathcal{U}(a) \cap M$. Tyto extrémy jsou *vázané.*
Analogicky minimum.

Definice Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a nechť $f : G \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $x_0 \in G$ je *stacionárním bodem* f, jestliže má f v x_0 všechny parciální derivace prvního řádu nulové.

1.4.4 Nutné a postačující podmínky pro volné extrémy, nutné podmínky pro vázané extrémy

Věta (nutná podmínka pro volný extrém) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{R}$. Má-li f v bodě $a \in G$ lokální extrém vzhledem k G, pak $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ buď neexistuje nebo je nulová pro každé $j = 1, \dots, n$.

Věta (postačující podmínka pro volný extrém) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $f : G \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(G)$ a $\bigtriangledown f(a) = 0$.

i. Jestliže $D^2 f(a)$ je pozitivně definitní, pak a je lokální minimum,

ii. jestliže $D^2 f(a)$ je negativně definitní, pak a je lokální maximum,

iii. jestliže $D^2 f(a)$ je indefinitní, pak v a není extrém,

kde $D^2 f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^n$.

Věta (Lagrangeova o vázaných extrémech) Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ a $f, g_1, \dots, g_m : G \to \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$. Nechť $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} : g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$ a nechť $\bigtriangledown g_1, \dots, \bigtriangledown g_m$ jsou lineárně nezávislé na M. Pokud f má v $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\bigtriangledown f(a) + \lambda_1 \bigtriangledown g_1(a) + \dots + \lambda_m \bigtriangledown g_m(a) = 0.$$

1.5 Obyčejné diferenciální rovnice

1.5.1 Věta o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy

Definice *Obyčejná diferenciální rovnice* je rovnice tvaru
$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, kde F je reálná funkce.

Definice *Řešením diferenciální rovnice* $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ rozumíme funkci $y = y(x)$ definovanou v neprázdném intervalu (a,b) takovou, že existuje vlastní $y^{(n)}(x)$ pro všechny $x \in (a,b)$ a platí $F(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x)) = 0$ na (a,b).

Definice Řekneme, že diferenciální rovnice je *rozřešená* vzhledem k $y^{(n)}$, pokud je tvaru $y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$.

Definice Řekneme, že $(\tilde{y},\tilde{I})$ je *rozšířením řešení* (y,I), pokud je řešením, platí $I \subset \tilde{I}$ a $y = \tilde{y}$ na I.

Definice Řekneme, že (y,I) je *maximální řešení*, pokud neexistuje jeho rozšíření kromě triviálního.

Věta (Peanova) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $[x_0,y_0,\dots,y_{n-1}] \in \Omega$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$ a funkce y definované na $\mathcal{U}(x_0)$ takové, že $y^{(n)}(x) = f(x,y(x),\dots,y^{(n-1)}(x))$ a splňují $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, …, $y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}$.

Definice Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je *lokálně Lipschitzovská vzhledem k posledním n proměnným*, pokud pro každou otevřenou $U \subset \Omega$ existuje $K > 0$ takové, že

$$\forall [x_0,y], [x_0,\tilde{y}] \subset U : \ |f(x_0,y) - f(x_0,\tilde{y})| \leq K\|y - \tilde{y}\|_{\mathbb{R}^n},$$

kde y a $\tilde{y}$ jsou n-složkové proměnné.

Věta (Picardova) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $[x_0,y_0,\dots,y_{n-1}] \in \Omega$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která je navíc lokálně Lipschitzovská vzhledem k posledním n proměnným. Pak existuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$ a funkce y definované na $\mathcal{U}(x_0)$ takové, že $y^{(n)}(x) = f(x,y(x),\dots,y^{(n-1)}(x))$ a splňují
$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, …, $y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}$. Každá dvě řešení navíc splývají v průniku svých definičních oborů a maximální řešení je určeno jednoznačně.

Věta (Peanova pro $n = 1$) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $[x_0,y_0] \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce y definované na $\mathcal{U}(x_0,\delta)$ takové, že $y'(x) = f(x,y(x))$ $\forall x \in \mathcal{U}(x_0,\delta)$ a $y(x_0) = y_0$.

Věta (Picardova pro $n = 1$) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $[x_0,y_0] \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá a lokálně Lipschitzovská vzhledem k y. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce y definované na $\mathcal{U}(x_0,\delta)$ takové, že $y'(x) = f(x,y(x))$ $\forall x \in \mathcal{U}(x_0,\delta)$ a $y(x_0) = y_0$. Každá dvě řešení navíc splývají v průniku svých definičních oborů a maximální řešení je určeno jednoznačně.

Věta (o tvaru řešení) Nechť $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $y \in C(I)$. Pak y je na I řešením rovnice $y' = f(x,y)$ s podmínkou $y(x_0) = y_0$ právě tehdy, když platí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt, \quad \forall x \in I.$$

Věta (o lepení řešení) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta,\gamma > 0$, $f \in C^2((a-\delta,a+\gamma))$. Buď y_L řešení $y' = f(x,y)$ na $(a-\delta,a)$ a buď y_R řešení $y' = f(x,y)$ na $(a,a+\gamma)$. Pokud platí $\lim_{x\to a-} y_L(x) = A = \lim_{x \to a+} y_R(x)$, pak

$$y(x) = \begin{cases} y_L(x), & x \in (a-\delta,a), \\ A, & x = a, \\ y_R(x), & x \in (a,a+\delta), \end{cases}$$

je řešením $y' = f(x,y)$ na $(a-\delta,a+\gamma)$.

1.5.2 Jednoduché rovnice prvního řádu a lineární rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty

Věta (existence a jednoznačnost pro separované proměnné) Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $(c,d) \subset \mathbb{R}$, $f \in C((a,b))$, $g \in C((c,d))$, $g \neq 0$ v (c,d). Nechť $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$. Pak existuje právě jedno y řešení rovnice $y'(x) = f(x)g(y)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, definičním oborem je maximální otevřený interval $I \subset (a,b)$ splňující $G(y(x)) = F(x) + k$, kde $k \in \mathbb{R}$ je konstanta a

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt.$$

Řešení je pak tvaru $y(x) = (G^{-1} \circ F)(x)$, $\forall x \in I$.

Definice Úloha ve tvaru z předchozí věty se nazývá *diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.*

Věta (metoda integračního faktoru) Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $p,q \in C((a,b))$, P primitivní funkce k p na (a,b) splňující $P(x_0) = 0$, kde $x_0 \in (a,b)$. Nechť $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení rovnice $y' + py = q$ splňující $y(x_0) = y_0$ a splňuje

$$y(x)e^{P(x)} = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}dt + y_0.$$

Definice Rovnice tvaru $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = q(x)$, kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $(a,b) \subset R$ a $q \in C((a,b))$ se nazývá *lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty.* Příslušná *homogenní rovnice* je rovnice tvaru $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$.

Definice Bázi všech maximálních řešení homogenní rovnice nazýváme *fundamentální systém* rovnice.

Definice Polynom $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ nazýváme *charakteristický polynom* rovnice.

Věta (o fundamentálním systému) Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $s \in \mathbb{N}$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice s násobnostmi $r_1, \ldots, r_s$ a nechť $\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_l + i\beta_l$, $l \in \mathbb{N}$ jsou všechny různé komplexní kořeny s násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$. Pak funkce

$$\begin{gathered}
e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x},\\
e^{\lambda_2 x},\ xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{r_2-1}e^{\lambda_2 x},\\
\ldots\\
e^{\lambda_s x},\ xe^{\lambda_s x}, \ldots, x^{r_s-1}e^{\lambda_s x},\\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \ldots, x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots, x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\\
e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x,\ xe^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, \ldots, x^{q_2-1}e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x,\\
e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x,\ xe^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, \ldots, x^{q_2-1}e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x,\\
\ldots\\
e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x,\ xe^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, \ldots, x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x,\\
e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x,\ xe^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, \ldots, x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x,
\end{gathered}$$

tvoří fundamentální systém homogenní rovnice.

Věta (řešení rovnice se specifickou pravou stranou) Nechť $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je k-násobný kořen charakteristického polynomu. Pak rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = Q_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kde Q_1, Q_2 jsou polynomy má řešení tvaru

$$y(x) = x^k P_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^k P_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x \in \mathbb{R},$$

kde P_1 a P_2 jsou vhodné polynomy stupně $\leq \max\{\mathrm{st}Q_1, \mathrm{st}Q_2\}$.

Věta (o řešení homogenní rovnice) Maximální řešení homogenní rovnice jsou definována na celém $\mathbb{R}$ a tvoří podprostor dimenze n prostoru $C^n(\mathbb{R})$.

Věta (variace konstant) Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $q : (a,b) \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na (a,b). Nechť funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém homogenní rovnice. Nechť jsou funkce $c_1', \ldots, c_n'$ řešením soustavy

$$\begin{gathered}
c_1'(x)y_1(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) = 0\\
c_1'(x)y_1'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x) = 0\\
\ldots\\
c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0\\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = q(x),
\end{gathered}$$

a c_i je primitivní funkcí k c_i' na (a,b) pro $i = 1, \ldots, n$. Pak

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i(x)$$

je řešením rovnice $y_{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = q(x)$ na (a,b).

2. Algebra

Algebru nesnáším a učit se jí mě vůbec nebavilo. Některá témata jsem si zpracovala divně a tak je tu vynechám. Je to třeba metoda nejmenších čtverců, pseudoinverze, nebo rozklady matic. Konkrétně rozklady matic jsou pěkná nuda.Taky důkazy jsem si vybírala náhodně a nechci to tak doporučovat. Co já vím, tak u determinantů se na ně ptali (naštěstí ne mě). Have fun.

2.1 Matice a determinanty, soustavy lineárních rovnic

2.1.1 Základní pojmy a operace s maticemi a jejich vlastnosti

Definice *Vektor* je uspořádaná n-tice reálných čísel.

Předpokládám, že sčítání, odčítání vektorů a opačný vektor definovat nemusím.

Definice *Soustavou lineárních rovnic* rozumíme soustavu tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_1, \ldots, b_n$ jsou konstanty.

Definice *Ekvivalentní úprava* je taková úprava, která nemění množinu všech řešení.

Definice *Matice* je obdélníkové schéma s reálnými (komplexními) čísly.

Opět nebudu definovat součet matic, násobení skalárem, nulovou matice, diagonálu, čtvercovou matici, diagonální matici ani jednotkovou matici.

Definice *Transponovaná matice* k matici $\mathbb{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ je $\mathbb{A}^T = (b_{ji})_{n\times m}$, kde $b_{ji} = a_{ij}$.

Věta (vlastnosti operací s maticemi) Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ jsou stejnědimenzionální matice, $\mathbb{O}$ je nulová matice a s,t jsou reálné konstanty. Pak

- $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$,
- $\mathbb{A} + \mathbb{O} = \mathbb{A}$,
- $\mathbb{A} + (-\mathbb{A}) = \mathbb{O}$,

- $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$,
- $s(t\mathbb{A}) = (st)\mathbb{A}$,
- $(s + t)\mathbb{A} = s\mathbb{A} + t\mathbb{A}$,
- $s(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = s\mathbb{A} + s\mathbb{B}$,
- $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$,
- $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$,
- $(s\mathbb{A})^T = s\mathbb{A}^T$.

Definice *Součin* matice $\mathbb{A} = (\mathbf{a_1}|\mathbf{a_2}|\ldots|\mathbf{a_n})$, kde $\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_n}$ jsou vektory, s vektorem $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ je

$$\mathbb{A}\mathbf{b} = b_1\mathbf{a_1} + b_2\mathbf{a_2} + \ldots + b_n\mathbf{a_n}.$$

Definice *Součin dvou matic* $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ a $\mathbb{B} = (\mathbf{b_1}|\ldots|\mathbf{b_p})$ typu $n \times p$ je matice

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \Big(\mathbb{A}\mathbf{b_1}|\mathbb{A}\mathbf{b_2}|\ldots|\mathbb{A}\mathbf{b_p}\Big).$$

Součin matic je definovaný pouze pro matice vhodných typů, pro jiné definován není.

Tvrzení (o prvku na místě ij) Prvek na místě (i,j) v součinu matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ je

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_i^T b_j.$$

Věta (vlastnosti násobení matic) Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ a $\mathbb{E}$ jsou matice vhodného typu a $\mathbb{I}$ jsou jednotkové matice. Pak platí

- násobení matic není komutativní,
- $(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{C}$,
- $\mathbb{C}(\mathbb{D} + \mathbb{E}) = \mathbb{C}\mathbb{D} + \mathbb{C}\mathbb{E}$,
- $(\mathbb{B}\mathbb{C})\mathbb{D} = \mathbb{B}(\mathbb{C}\mathbb{D})$,
- $s(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (s\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{A}(s\mathbb{B})$,
- $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$,
- $\mathbb{I}_m\mathbb{A} = \mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{I}_n$.

Dál je dobré vědět, co je permutační matice, horní a dolní trojúhelníková matice. Součin těchto stejných dvou dá vždy také takovou.

Definice Matice $\mathbb{A}$ je *invertovatelná*, pokud je čtvercová a existuje matice $\mathbb{X}$ taková, že $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$. Pak matici $\mathbb{X}$ značíme $\mathbb{A}^{-1}$ a nazýváme *inverzem* k matici $\mathbb{A}$.

Věta (o invertovatelnosti a regularitě) Každá invertovatelná matice je regulární.
Ano, regularita ještě nebyla "zavedená", ale tohle je podle mě fajn vědět už tady.

Věta (o jednoznačnosti inverzu) Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice a nechť $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou čtvercové matice takové, že platí $\mathbb{Y}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$ a $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{I}_n$, pak $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

Věta (vlastnosti inverzu) Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ jsou regulární, pak platí

- matice $\mathbb{A}^{-1}$ je regulární a platí $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$,
- matice $\mathbb{A}^T$ je regulární a platí $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$,
- matice $t\mathbb{A}$ je regulární a platí $(t\mathbb{A})^{-1} = t^{-1}\mathbb{A}^{-1}$,
- matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární a platí $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

2.1.2 Hodnost matice

Definice *Hodnost matice* je počet nenulových řádků v matici v odstupňovaném tvaru. Značíme rank($\mathbb{A}$).
Odstupňovaný tvar v pozdějších kapitolách. Fakt nevím proč je to seřazený takhle.

Definice *Hodnost matice* je dimenze řádkového a sloupcového prostoru matice.

Věta (o hodnosti matice) Platí rank($\mathbb{A}$) = rank($\mathbb{A}^T$)$\leq m, n$. Hodnost se nemění elementárními řádkovými úpravami.

Věta (o hodnosti součinu) platí rank($\mathbb{A}\mathbb{B}$)$\leq$rank($\mathbb{A}$), rank($\mathbb{A}\mathbb{B}$)$\leq$rank($\mathbb{B}$). Pokud je matice $\mathbb{R}$ regulární, pak platí rank($\mathbb{R}\mathbb{A}$) = rank($\mathbb{A}\mathbb{R}$) = rank($\mathbb{A}$).

Věta (o hodnosti čtvercové matice) Matice $\mathbb{A}$ je regulární matice typu $n \times n$ právě tehdy, když rank($\mathbb{A}$)=n.

Věta (Frobeniova) Soustava $\mathbb{A}x = b$ má řešení právě tehdy, když rank($\mathbb{A}$) = rank($\mathbb{A}|b$).

2.1.3 Soustavy lineárních rovnic, Gaussova eliminace, podmínky řešitelnosti

Definice *Lineární rovnice* je rovnice tvaru $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, kde $a_1, \ldots, a_n, b$ jsou dané konstanty a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

Definice *Soustavou lineárních rovnic* rozumíme soustavu tvaru

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array},$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_1, \ldots, b_n$ jsou dané konstanty a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

Definice *Ekvivalentní úpravy* jsou takové úpravy, které nemění množinu všech řešení. Symbol je pro ekvivalentní úpravy je $\sim$.

Definice *Elementární úpravy* nazýváme prohození dvou řádků, vynásobení řádku konstantou $t \neq 0$ a přičtení s-násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Věta (o elementárních úpravách) Elementární úpravy jsou ekvivalentní.

Definice *Rozšířená matice soustavy* z definice je matice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Je-li $b = 0$, pak jde o *homogenní soustavu.*

Definice *Matice v odstupňovaném tvaru* je matice typu $m \times n$ taková, která splňuje následující: existuje $r \in \{0,1,\ldots,m\}$ takové, že řádky $r+1, \ldots, m$ jsou nulové a pro indexy sloupce s prvním nenulovým číslem platí $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Gaussova eliminace je proces pro převod matice do odstupňovaného tvaru pomocí ekvivalentních úprav. Eliminace jednoho sloupce funguje následujícím způsobem:

1. Najdeme první nenulový sloupec s indexem k_1. Pokud nenulový sloupec neexistuje, pak je matice nulová a tím pádem v odstupňovaném tvaru.

2. Pokud $a_{1k_1} = 0$, pak prohodíme první řádek s libovolným řádkem i, kde $a_{ik_1} \neq 0$. Výběr specifického řádku závisí na implementaci.

3. Pro každé $i = 2,3,\ldots,m$ přičteme $\left(-\frac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}}\right)$-násobek prvního řádku k i-tému řádku.

4. Postup dále opakujeme s maticí bez prvního řádku.

Věta (o Gaussově eliminaci) Gaussova eliminace vždy převede matici do odstupňovaného tvaru.

Definice *Hodnost matice* je počet nenulových řádků po Gaussově eliminaci.

Definice *Bázové sloupce* jsou sloupce s indexy $k_1, \ldots, k_r$.

Věta (řešitelnost) Po použití Gaussovy eliminace na rozšířenou matici soustavy $(\mathbb{A}|b)$. Pokud b bude bázový sloupec, tak nastává situace $0x_1 + \ldots + 0x_n = d_r$ a soustava nemá řešení. V opačném případě řešení mám.

Způsob pro nalezení je *zpětná substituce*. Nechť P jsou nebázové sloupce. Pak $x_p, p \in P$ jsou *volné proměnné*, neboli *parametry*. Platí, že každá volba hodnot volných proměnných dává právě jedno řešení. Množina řešení pak vypadá následovně

$$\{u + \sum_{p \in P} t_p v_p : t_p \in \mathbb{R}\ \forall p \in P\}.$$

Věta (řešitelnost) Soustava je řešitelná právě tehdy, když b je lineární kombinací sloupců z $\mathbb{A}$.

Věta (Frobeniova) Soustava je řešitelná právě tehdy, když rank$(\mathbb{A})$=rank$(\mathbb{A}|b)$.

Věta (o všech řešeních) Nechť $u = (x_1, \ldots, x_n)$ je řešení soustavy $\mathbb{A}x = b$ a $W_{\mathbb{A}}$ je množina všech řešení homogenní soustavy. Pak $u + W_{\mathbb{A}}$ je množina všech řešení soustavy.

2.1.4 Determinanty a metody jejich výpočtu

Definice *Permutací* množiny X je bijekce $X \to X$. Symbolem S_X je množina všech permutací na X.

Věta (vlastnosti permutace)

i. $\pi \in S_X \Rightarrow \pi^{-1} \in S_X$,

ii. $\pi, \rho \in S_X \Rightarrow \pi \circ \rho \in S_X$.

Definice *Zápis permutace* na množině $X = (s_1, \ldots, s_n)$ je tvaru

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

V případě na množině $X = (1,2, \ldots, n)$ tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix},$$

tj. $\pi(i) = t_i$.

Definice *Cyklus* délky k je permutace splňující $\pi(x_1) = x_2$, $\pi(x_2) = x_3$, $\ldots$, $\pi(x_k) = x_1$ a $\pi(y) = y$, $\forall y \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$. Permutaci tvořenou jedním cyklem značíme následovně $\pi = (x_1 x_2 \ldots x_k)$.

Definice Dva cykly jsou *nezávislé*, pokud množiny prvků v cyklech jsou disjunktní.

Definice *Transpozice* je cyklus délky dva.

Věta (rozklad permutace) Každou permutaci lze zapsat jako složení nezávislých cyklů. Tento zápis je jednoznačný až na pořadí cyklů a nazývá se *cyklický*.

Věta (o transpozicích) Každá permutace je složení transpozic.

Zápis složením transpozic se dá zapsat různými způsoby, ale jeho parita (sudost/lichost počtu transpozic v zápisu).

Definice *Znaménko permutace* se značí sgnπ a je definováno jako 1, pokud je permutace *sudá*, tedy má sudý počet transpozic, a jako -1, pokud je permutace *lichá*, tedy má lichý počet transpozic.

Věta (výpočet znaménka permutace) Nechť pro permutaci π platí $\pi = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_m$ rozklad na cykly s délkami $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Pak $\operatorname{sgn}(\pi) = \prod_{i=1}^{m} (-1)^{(k_i - 1)}$.

Věta (výpočet znaménka permutace II.) Platí

i. sgn(id)=1,

ii. sqn(π^{-1}) =sgn(π),

iii. sgn($\pi\rho$)=sgn(π)sgn(ρ).

Definice *Determinant* matice $\mathbb{A}$ je definován následovně

$$\det\mathbb{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1r_1} a_{2r_2} \ldots a_{nr_n},$$

kde

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ r_1 & \ldots & r_n \end{pmatrix}.$$

Věta (výpočet determinantu) Platí

i. pro horní trojúhelníkovou matici je determinant součin prvků na diagonále,

ii. $\det(\mathbb{A}^T)$=$\det(\mathbb{A})$,

iii. $\det(v_1|v_2|\ldots|v_i{+}u|\ldots|v_n) = \det(v_1|v_2|\ldots|v_i|\ldots|v_n) + \det(v_1|v_2|\ldots|u|\ldots|v_n)$,

iv. $\det(v_1|v_2|\ldots|t \times v_i|\ldots|v_n) = t{\times}\det(v_1|v_2|\ldots|v_i|\ldots|v_n)$,

v. Pokud matice $\mathbb{B}$ vznikne permutací π sloupců matice $\mathbb{A}$, pak det($\mathbb{B}$) =det($\mathbb{A}$)sgn(π).

Věta (o regularitě) Matice $\mathbb{A}$ je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant.

Definice *Minor* matice $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ je determinant matice vzniklé z matice $\mathbb{A}$ výběrem k sloupců a k řádků.

Věta (o determinantu součinu) Nechť pro matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ existuje jejich součin. Pak platí det($\mathbb{A}\mathbb{B}$)=det($\mathbb{A}$)det($\mathbb{B}$).

Věta (o determinantu inverzu) Nechť je matice $\mathbb{A}$ invertibilní. Pak platí det($\mathbb{A}^{-1}$)=det($\mathbb{A}$)$^{-1}$.

Věta (Cramérovo pravidlo) Nechť je matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{A}x = b$. Pak vektor x lze vypočítat jako

$$x_j = \frac{\det\mathbb{A}_j}{\det\mathbb{A}},$$

kde $\mathbb{A}_j$ je matice $\mathbb{A}$, která má místo j-tého sloupce vektor b.

Definice Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n, a a_{ij} je její prvek. *Algebraický doplněk* matice $\mathbb{A}$ prvku a_{ij} je prvek

$$\mathbb{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbb{M}_{ij}),$$

kde $\mathbb{M}_{ij}$ je matice $\mathbb{A}$ bez i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta (rozvoj podle sloupce) Nechť je matice $\mathbb{A}$ čtvercová řádu n. Pak platí

$$\det\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbb{A}_{ij}.$$

S použitím transpozice se dá odvodit i pravidlo pro rozvoj podle řádku:

$$\det\mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbb{A}_{ij}.$$

Věta (o falešném rozvoji) Platí $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbb{A}_{ik} = 0$, když $j \neq k$.

Definice *Adjungovaná matice* k matici $\mathbb{A}$ je matice adj($\mathbb{A}$) která má na místě (i,j) prvek $\mathbb{A}_{ji}$.

Věta (o adjungované matici) Platí adj($\mathbb{A}$)$\cdot\mathbb{A}$ = $\mathbb{A}\cdot$adj($\mathbb{A}$)=det($\mathbb{A}$)$\mathbb{I}_n$, tj. pro regulární matici $\mathbb{A}$ platí

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbb{A}}{\det\mathbb{A}}.$$

2.2 Vektorové prostory

2.2.1 Pojem vektorového prostoru, lineární nezávislost, lineární obal, báze a dimenze

Definice *Těleso* je množina prvků T s operacemi sčítání $+ : T \times T \to T$ a násobení $\cdot : T \times T \to T$ splňující:

- $a + b \in T$, $a \cdot b \in T$, $\forall a,b \in T$,
- *asociativita:* $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a,b,c \in T$,
- *komutativita:* $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a,b \in T$,
- *existence nulového prvku:* $\exists 0 \in T : \ a + 0 = a$,
- *existence jednotkového prvku:* $\exists 1 \in T : \ 1 \cdot a = a$,
- *existence opačného prvku:* $\forall a \in T \ \exists (-a) \in T : \ a + (-a) = 0$,
- *existence inverzu:* $\forall a \in T \ \exists a^{-1} \in T : \ a \cdot a^{-1} = 1$,
- *distributivita:* $(a + b) \cdot c = ac + bc$, $c \cdot (a + b) = ca + cb$.

Definice *Vektorový prostor* nad T je neprázdná množina V se sčítáním $+ : V \times V \to V$ a násobením skalárem $\cdot : T \times V \to V$, splňující

- *komutativita:* $u + v = v + u$, $\forall u,v \in V$,
- *asociativita:* $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u,v,w \in V$,
- *existence nulového prvku:* $\exists \mathbb{O} \in V : \ 0 \cdot u = \mathbb{O}$,
- $r(u + v) = ru + rv$, $\forall r \in T$, $\forall u,v \in V$,
- $(r + s)u = ru + su$, $\forall r,s \in T$, $\forall u \in V$,
- $r(su) = (rs)u$, $\forall r,s \in T$, $\forall u \in V$,
- $1 \cdot u = u$.

Prvky T nazýváme *skaláry*, prvky V nazýváme *vektory*.

Definice Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $X \subseteq V$. *Lineárním obalem* množiny X rozumíme
$\langle X \rangle = \{t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k;\ k \in \mathbb{N}_0,\ v_1, \ldots, v_k \in X,\ t_1, \ldots, t_k \in T\}$, tj. lineární kombinace všech prvků množiny X.

Tvrzení (o lineárním obalu) Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $X \subseteq V$, pak $\langle X \rangle$ je podprostor V.

Definice Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $X \subseteq V$. Pokud $\langle X \rangle = V$, pak X nazveme *množinou generátorů* prostoru V.

Definice *Sloupcový (řádkový) prostor matice* je lineární obal jejích sloupců (řádků), značíme Im($\mathbb{A}$), resp. Im($\mathbb{A}^T$).

Věta (o sloupcových (řádkových) prostorech) Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbb{R}$ je matice typu $m \times m$ regulární. Pak Im($\mathbb{R}\mathbb{A}$)=$\langle \mathbb{R}a_1, \mathbb{R}a_2, \ldots, \mathbb{R}a_n \rangle$. Platí, že elementární sloupcové (řádkové) úpravy nemění sloupcový (řádkový) prostor.

Definice Řekneme, že posloupnost prvků z V je *lineárně závislá*, pokud pro nějaké i platí, že v_i je lineární kombinací v_1,$v_2, \ldots, v_{i-1}$,$v_{i+1}, \ldots, v_n$. V opačném případě řekneme, že je *lineárně nezávislá.*

Věta (o nezávislosti) Platí, že posloupnost $\{v_1, \ldots ,v_n\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když 0 lze vyjádřit pouze jako $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$.

Tvrzení (o nezávislosti sloupců matice) Sloupce matice jsou nezávislé, pokud jádro matice je 0, tedy $\mathbb{A}x = 0$ má právě jedno řešení, tj. $x = 0$.

Tvrzení (nezávislost a elementární úpravy) Elementární řádkové i sloupcové úpravy nemění nezávislost řádků i sloupců matice.

Definice *Báze* vektorového prostoru V je posloupnost $(v_1, \ldots, v_n)$, která je lineárně nezávislá a pro kterou platí $\langle v_1, \ldots ,v_n \rangle = V$.

Věta (o bázi) Platí

- báze je minimální posloupnost generátorů,
- z každé množiny generátorů prostoru lze vybrat bázi,
- každý konečně generovaný prostor má bázi.

Definice *Dimenze* konečně generovaného prostoru V je počet prvků jeho báze.

Věta (o bázi) Maximální lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru je báze.

Věta (o prostoru dimenze n) Každá množina generátorů prostoru dimenze n má alespoň n prvků a každá n-prvková lineárně nezávislá posloupnost je báze.

Definice Nechť $B = (v_1, \ldots ,v_n)$ báze V, $w \in V$. *Souřadnice* w vzhledem k B jsou prvky $(a_1, \ldots, a_n)$ takové, že $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, značíme $[w]_B$.

Vlastnosti souřadnic Platí

- $[u + w]_B = [u]_B + [w]_B$,
- $[tu]_B = t[u]_B$.

Definice *Matice přechodu* mezi bázemi $B = (v_1, \ldots, v_n)$ a C je

$$[id]_C^B = ([v_1]_C, [v_2]_C, \ldots, [v_n]_C) .$$

Věta (o přechodu mezi bázemi) Platí $[x]_C = [id]_C^B [x]_B$.

2.2.2 Steinitzova věta o výměně

Věta (Steinitzova o výměně) Nechť $N = (v_1, \ldots, v_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost prvků lineárního prostoru V nad tělesem T a nechť $G = (w_1, \ldots, w_l)$ generuje V. Pak $k \leq l$ a při vhodném uspořádání $G' = (w'_1, \ldots, w'_l)$ posloupnosti G platí, že $(v_1, \ldots, v_k, w'_{k+1}, \ldots, w'_l)$ generuje V.
Zde je vhodné znát celý důkaz. Není nijak složitý, ale nechce se mi psát. Je ve skriptech z LA.

Důsledek I. Každé dvě báze mají stejný počet prvků.

Důsledek II. Každou lineárně nezávislou posloupnost lze doplnit na bázi prvky z libovolné množiny generátorů.

Důsledek III. Maximální posloupnost lineárně nezávislých prvků v konečně generovaném prostoru je bází.

2.2.3 Podprostory a jejich dimenze

Definice Řekneme, že U je *podprostor* lineárního prostoru V, pokud $U \subseteq V$ a je uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem. Značíme $U \leq V$.

Věta (o jádru matice) Pro libovolnou matici typu $m \times n$ nad tělesem T platí, že její jádro je podprostor T^n.

Věta (o lineárním obalu) Nechť $X \subseteq V$, pak $\langle X \rangle$ je podprostor V.

Věta (o řádkovém a sloupcovém prostoru matice) Pro libovolnou matici typu $m \times n$ nad tělesem T platí, že její řádkový a sloupcový prostor jsou podprostory T^n, resp. T^m.

Definice Sloupec matice nazveme *bázový*, pokud není lineární kombinací předchozích sloupců.

Věta (o bázový sloupcích) Bázové sloupce matice tvoří bázi sloupcového prostoru matice.

Věta (o dimenzi řádkového a sloupcového prostoru) Platí
$\dim(\mathrm{Im} A)=\dim(\mathrm{Im} A^T)$.

Definice *Hodnost matice* je dimenze jejího řádkového (nebo sloupcového) prostoru.

Věta (průnik podprostorů) Nechť I je indexová množina a V_i, $i \in I$ jsou podprostory lineárního prostoru V, pak i

$$\bigcap_{i \in I} V_i$$

je podprostor V.

Definice Nechť I je indexová množina a V_i, $i \in I$ jsou podprostory lineárního prostoru V. Pak jejich *součet* definujeme jako

$$\sum_{i \in I} V_i = \langle \bigcup_{i \in I} V_i \rangle.$$

Věta (o dimenzi součtu a průniku) Pro U,V podprostory lineárního prostoru W platí

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(U \cup V).$$

Věta (o dimenzi podprostoru) Nechť U je podprostor V, pak $\dim(U) \leq \dim(V)$.

2.2.4 Skalární součin, ortogonalizační proces, ortonormální báze

Definice Nechť $v = (v_1, \ldots, v_n)$ a $u = (u_1, \ldots, u_n)$ jsou vektory nad $\mathbb{R}$. *Standardní skalární součin* je $u \cdot v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Definice *Eukleidovská norma (délka)* vektoru u je $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$.

Definice *Úhel* mezi vektory u a v je číslo α definované jako

$$u \cdot v = ||u|| \cdot ||v|| \cdot cos\alpha.$$

Dva vektory jsou *kolmé*, pokud $u \cdot v = 0$.

Věta (vlastnosti skalárního součinu nad $\mathbb{R}$) Nechť u,v,w jsou vektory nad $\mathbb{R}$ a t je skalár. Platí

- $u \cdot v = v \cdot u$,
- $u \cdot (tv) = t(u \cdot v)$,
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$,
- $u \cdot u \geq 0$ a $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Definice Nechť $v = (v_1, \ldots, v_n)$ a $u = (u_1, \ldots, u_n)$ jsou vektory nad $\mathbb{C}$. *Standardní skalární součin* je $u \cdot v = \overline{u}_1 v_1 + \ldots + \overline{u}_n v_n$.

Definice *Hermitovsky sdružená matice* k matici $\mathbb{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ je matice $\mathbb{A}^* = (b_{ji})_{n\times m}$, kde $b_{ji} = \overline{a_{ij}}$.

Věta (vlastnosti skalárního součinu nad $\mathbb{C}$) Nechť u,v,w jsou vektory nad $\mathbb{C}$ a t je skalár. Platí

- $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$,
- $u \cdot (tv) = t(u \cdot v)$,
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$,
- $u \cdot u \geq 0, \ \in \mathbb{R}$ a $u \cdot u = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0$.

Definice Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. *Obecný skalární součin* definujeme jako zobrazení $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, splňující

i. $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$,

ii. $\langle u, tv \rangle = t\langle u,v \rangle$,

iii. $\langle u, v + w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$,

iv. $\langle u,u \rangle \geq 0$ a $\langle u,u \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0$.

Definice *Hermitovská matice* je taková komplexní matice, která splňuje $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$.

Definice *Pozitivně definitní matice* je taková matice $\mathbb{A}$, která splňuje $u^*\mathbb{A}u \geq 0$ a $u^*\mathbb{A}u = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0$.

Věta (o skalárním součinu daném maticí) Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, resp. $\mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\langle u,v \rangle = u^*\mathbb{A}v$ je skalární součin právě tehdy, když je $\mathbb{A}$ hermitovská, pozitivně definitní.

Definice *Obecná norma* je definovaná jako $||u|| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$. Řekneme, že vektor je *jednotkový*, pokud platí $||u|| = 1$.

Věta (vlastnosti normy) Nechť u,v jsou vektory a t je skalár. Pak platí

i. $||u|| \geq 0$ a $||u|| = 0, \ \Leftrightarrow \ u = 0$,

ii. $||tu|| = |t|||u||$,

iii. *rovnoběžníkové pravidlo* $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$.

Věta (Cauchyho-Schwartzova nerovnost) Nechť u,v jsou vektory. Platí

$$|\langle u,v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jsou vektory u a v lineárně závislé.

Věta (Trojúhelníková nerovnost) Nechť u,v jsou vektory. Pak platí

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Definice *Úhel* mezi vektory u a v je číslo $\alpha \in (0,\pi\rangle$ splňující

$$cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Věta (cosinová) Nechť u,v jsou vektory a α úhel mezi nimi. Pak platí

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u|| \cdot ||v||cos\alpha.$$

Definice Řekneme, že vektory u a v jsou *kolmé*, pokud platí $\langle u,v\rangle = 0$.

Definice Řekneme, že množina vektorů M je *ortogonální*, pokud každé dva její prvky jsou na sebe kolmé.

Definice Řekneme, že množina vektorů M je *ortonormální*, pokud je ortogonální a tvořena jednotkovými vektory.

Věta (o ortogonální posloupnosti) Každá ortogonální posloupnost je lineárně nezávislá.

Věta (o kanonické bázi) Kanonická báze je ortonormální.

Věta (Pythagorova) Pokud jsou u,v kolmé vektory, pak $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Věta (souřadnice vzhledem k ortonormální bázi) Nechť $B = (v_1,\ldots,v_n)$ je ortonormální báze lineárního prostoru V a $u \in V$. Pak platí

$$u = \langle v_1, u\rangle v_1 + \ldots + \langle v_n, u\rangle v_n.$$

Věta (skalární součin a ortonormální báze) Nechť B je ortonormální báze vektorového prostoru V a $u,v \in V$. Pak platí $\langle u,v\rangle = [u]_B^*[v]_B$.

Gramova - Schmidtova ortogonalizace je proces který z libovolné lineárně nezávislé posloupnosti vektorů udělá ortonormální posloupnost generující stejný prostor. Vstupem je lineárně nezávislá posloupnost $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Algoritmus postupuje ve třech krocích:

1. $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$,
2. $u_i' = v_i - \langle u_1, v_i\rangle u_1 - \ldots - \langle u_{i-1}, v_i\rangle u_{i-1}$,
3. $u_i = \frac{u_i'}{||u_i'||}$.

$\forall i \in \{2, \ldots, n\}$. Výstupem je ortonormální posloupnost $\{u_1, \ldots, u_n\}$ taková, že $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$.

Věta (o Gramově-Schmidtově ortogonalizaci) Převede tímto způsobem každou lineárně nezávislou posloupnost.

Důsledek V každém konečně dimenzionálním prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

2.2.5 Ortogonální projekce, metoda nejmenších čtverců a pseudoinverze

Definice Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, $v \in V$ a W je podprostor V. Prvek $w \in W$ nazýváme *ortogonální projekce* vektoru v na podprostor W, jestliže $(v - w) \perp W$.

Věta (o aproximaci) Je-li W podprostor V, $v \in V$ a w je ortogonální projekce v na W, pak $\forall u \in W, u \neq w$ platí $||u - w|| < ||v - u||$, tedy ortogonální projekce je určena jednoznačně.
Zde je jednoduchý důkaz, dobré vědět.

Věta (o projekci a bázi) Nechť V je vektorový prostor, $v \in V$ a W je konečně generovaný podprostor V s ortonormální bází $B = (u_1, \ldots, u_k)^T$. Pak prvek

$$w = \langle u_1,v\rangle u_1 + \langle u_2,v\rangle u_2 + \ldots + \langle u_k,v\rangle u_k$$

je ortogonální projekcí v na W.

Důsledek Pro ortogonální bázi to je

$$w = \frac{\langle u_1,v\rangle}{||u_1||^2}u_1 + \frac{\langle u_2,v\rangle}{||u_2||^2}u_2 + \ldots + \frac{\langle u_k,v\rangle}{||u_k||^2}u_k.$$

Definice Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ a $b \in \mathbb{C}^n$. *Problém nejmenších čtverců* (LS) je úloha určení $x \in \mathbb{C}^m$ takového, které minimalizuje $||f||_E$ za podmínky $\mathbb{A}x = b + f$.

Téma *metody nejmenších čtverců a pseudoinverze* nemám zpracované dobře a rozhodně se tím nebudu chlubit. Takže si to udělejte sami. Love.

2.2.6 Diagonalizace a ortogonální diagonalizace

Věta (mocnění diagonální matice) $[diag(a_1, \dots, a_k)]^n = diag(a_1^n, \dots, a_k^n)$.

Definice Matice $A \in T^{n \times n}$ je *diagonalizovatelná*, má-li vůči nějaké bázi diagonální matici.

Věta (o diagonalizovatelnosti matice) Matice A je diagonalizovatelná právě tehdy, když existuje báze prostoru T^n tvořena vlastními vektory matice A.

Definice Matice X a Y téhož řádu nad týmž tělesem se nazývají *podobné*, existuje-li regulární matice R taková, že $Y = R^{-1}XR$.

Věta (diagonalizovatelnost a podobnost) Čtvercová matice je diagonalizovatelná právě tehdy, když je podobná nějaké diagonální matici.

Věta (diagonalizovatelnost a vlastní čísla) Nechť matice A řádu n má n navzájem různých vlastních čísel. Pak je diagonalizovatelná.

Věta (o diagonalizovatelnosti a násobnosti) Buď A čtvercová matice rádu n nad T. Pak následující je ekvivalentní

i. A diagonalizovatelná,

ii. A má n vlastních čísel včetně algebraických násobností a geometrická násobnost každého vlastního čísla je rovna algebraické.

Definice Řekneme, že reálná (komplexní) čtvercová matice A je *ortogonálně (unitárně) diagonalizovatelná*, existuje-li ortonormální báze B prostoru $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), že $[f_A]_B^B$ je diagonální.

Definice Matice X a Y jsou *ortogonálně (unitárně) podobné*, existuje-li ortogonální (unitární) matice U taková, že $Y = U^{-1}XU$ ($Y = U^*XU$).

Věta (o ortogonální diagonalizovatelnosti) Nechť A je čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Pak následující je ekvivalentní

i. A je ortogonálně (unitárně) diagonalizovatelná,

ii. $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) má ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory matice A,

iii. A je ortogonálně (unitárně) podobná diagonální matici.

Věta (o ortogonální diagonalizovatelnosti II.) A čtvercová nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Pak následující je ekvivalentní

i. A ortogonálně (unitárně) diagonalizovatelná,

ii. A má

- n vlastních čísel včetně algebraických násobností,
- geometrická násobnost každého vlastního čísla je rovna algebraické,
- pro každá dvě různá vlastní čísla λ_i a λ_j platí $M_{\lambda_i} \perp M_{\lambda_j}$.

Definice A je *normální*, pokud $A^*A = AA^*$.

Věta (spektrální věta pro normální matice) Nechť A je čtvercová komplexní matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je unitárně diagonalizovatelná,

(ii) A je normální.

Věta (spektrální věta pro hermitovské matice) Nechť A je čtvercová komplexní matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je unitárně diagonalizovatelná a všechna její vlastní čísla jsou reálná,

(ii) A je hermitovská.

Věta (spektrální věta pro symetrické matice) Nechť A je čtvercová reálná matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je ortogonálně diagonalizovatelná,

(ii) A je symetrická.

Věta (spektrální věta pro pozitivně (semi) definitní matice) Nechť A je čtvercová komplexní matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je unitárně diagonalizovatelná a všechna její vlastní čísla jsou reálná kladná (nezáporná),

(ii) A je pozitivně (semi) definitní.

Věta (o hermitovské a pozitivně definitní matici) Nechť je matice A hermitovská (symetrická). Pak je pozitivně (semi) definitní právě tehdy, když má všechna vlastní čísla kladná (nezáporná).

Věta (spektrální věta pro unitární matice) Nechť A je čtvercová komplexní matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je unitárně diagonalizovatelná a pro všechna vlastní čísla platí $|\lambda| = 1$,

(ii) A je unitární.

2.2.7 Různé typy rozkladů matic

Tahle kapitola je obecně dost nahovno a vůbec mě nebavila. Takže tyhle poznámky nejsou **vůbec** dobrý, ale za účelem kompletnosti to sem dám taky. Určitě se doporučuji tohle učit úplně odjinud a třeba si to sem k tomu dopsat. Nebo to zapálit.

Jordanův rozklad

- Jde o jisté zobecnění diagonalizovatelnosti.
- $A = RDR^{-1}$, R regulární matice, D blokově diagonální matice s Jordanovými buňkami
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix},$$
D se nazývá *Jordanova matice.*
- λ_i v Jordanových blocích jsou vlastní čísla matice A.
- Jednomu vlastnímu číslu může patřit více bloků = geometrická násobnost vlastního čísla.
- Součet dimenzí těchto bloků je algebraická násobnost.
- Rozklad je jednoznačný až na pořadí buněk.
- Jordanův rozklad není stabilní.
- Vektory se hledají pomocí tzv. Jordanových řetízků
$$(A - \lambda I)\, v_1 = 0,\ (A - \lambda I)\, v_2 = v_1, \dots$$
a pak se umístí do matice R.

L-U rozklad

- Pouze pro čtvercové regulární matice.
- L-U rozklad není jednoznačný.
- Pokud se při Gaussově eliminaci nemusí prohazovat řádky, pak $A = LU$, L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále, U horní trojúhelníková matice s nenulovými čísly na diagonále. Jedná se o zápis Gaussovy eliminace - každý její krok je přenásobení maticí zleva a ty dohromady dají matici L.
- Pokud je při Gaussově eliminaci potřeba prohazovat řádky, pak $PA = LU$, kde P je permutační matice.

QR rozklad

- Pro obecnou komplexní matici.
- Je dražší, ale stabilnější, než L-U rozklad.
- Je jednoznačný.
- Jedná se o maticový zápis Gram-Schmidtovy ortogonalizace.
- $A = QR$, kde Q je ortonormální matice a R je dolní trojúhelníková matice.
- Postup je Gram-Schmidtův ortogonalizační proces na sloupce matice A dá sloupce matice $Q = (u_1, \ldots, u_k)$

$$R = \begin{bmatrix} ||u_1'|| & \langle u_1, v_2 \rangle & \ldots & \langle u_1, v_k \rangle \\ 0 & ||u_2'|| & \ldots & \langle u_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & ||u_k'|| \end{bmatrix}.$$

- Obecně se ho dá docílit pomocí Givensových rotací či Householderových reflexí.

Spektrální rozklad

- Pro A normální, hermitovskou pozitivně definitní, s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r = 0$ a $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$.
- $A = UDU^*$, U je unitární a D je diagonální.
- U je složená z vlastních vektorů matice A.
- D má vlastní čísla matice A na diagonále.
- Užitečný rozklad pro inverz, $A^{-1} = U^* D^{-1} U$.

Singulární rozklad

- Pro obecnou komplexní matici.
- Platí A^*A i AA^* jsou Hermitovské pozitivně definitní, mají stejná vlastní čísla a když v_j je vlastní vektor A^*A, pak $Av_j/\sqrt{\lambda_j}$ je vlastní vektor matice AA^* $\forall j = 1, \ldots, r$.
- $u_{r+1}, \ldots, u_n$ pak najdeme jako libovolnou ortonormální bázi ortogonálního doplňku.
- Singulární čísla $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, pak platí $Av_j = \sigma_j u_j$ $\forall j = 1, \ldots, r$, pak $AV = U\Sigma$, tj. $A = U\Sigma V^*$, kde U, V jsou unitární a

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}.$$

- Mooreova-Penroseova pseudoinverze: $A^+ = V\Sigma^+ U^*$, kde
$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$
a tedy $A^+ = (A^* A^{-1})A^*$, $A^+ = (A^*)(AA^*)^{-1}$.

Choleského rozklad

- Jedná se o speciální případ L-U rozkladu.
- Pro $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je hermitovská pozitivně definitní.
- $A = LL^*$, L horní trojúhelníková.

Schurův rozklad

- Pro obecnou čtvercovou matici.
- $A = URU^*$, U unitární, R horní trojúhelníková s vlastními čísly matice A na diagonále.

2.3 Lineární a bilineární formy

2.3.1 Lineární, bilineární a kvadratické formy, matice lineárních zobrazení, vlastní čísla lineárních zobrazení a matic, charakteristický polynom

Definice Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá *lineární*, pokud splňuje
$f(u) + f(v) = f(u + v)$ a $f(tu) = tf(u)$ $\forall u,v \in V$, $\forall t \in T$.

Věta (zobrazení určené maticí) Zobrazení určené maticí A, $f_A(x) := Ax$, je lineární.

Definice Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení, $B = (v_1, \dots, v_n)$ je báze prostoru V a C je báze W. Pak *matice f vzhledem k B a C* je

$$[f]_C^B = \left([f(v_1)]_C \,|\, [f(v_2)]_C \,|\, \dots \,|\, [f(v_n)]_C\right).$$

Věta (o matici zobrazení) Platí $[f(x)]_C = [f]_C^B [x]_B$.

Věta (skládání lineárních zobrazení) Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad T, $f : U \to V$ a $g : V \to W$ jsou lineární, pak $gf : U \to W$ je lineární. Pokud navíc B je báze U, C je báze V a D je báze W, pak

$$[gf]_D^B = [g]_D^C \, [f]_C^B .$$

Věta (inverz lineárního zobrazení) Nechť $f : U \to V$ je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení, pak $f^{-1} : V \to U$ je také lineární zobrazení a $[f^{-1}]_B^C = \left([f]_C^B\right)^{-1}$.

Věta (o matici zobrazení a matici přechodů bází) Platí

$$[f]_B^B = \left([id]_C^B\right)^{-1} \cdot [f]_C^C \cdot [id]_C^B .$$

Definice Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Lineární zobrazení f nazveme *lineární forma*, je-li $f : V \to T$. *Jádrem* f jsou ty $x \in V$ že $f(x) = 0$ a *obraz* je $\{f(x), x \in V\}$.

Věta (o jádru a obraze) Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení, B je báze U a C je báze V. Pak

$$[\mathrm{Ker} f]_B = \mathrm{Ker}\,[f]_C^B\,,\ [\mathrm{Im} f]_C = \mathrm{Im}\,[f]_C^B\,.$$

Definice Nechť f je lineární forma na V a B je báze V. Pak *matice* f *vzhledem k bázi* B je

$$[f]^B = (f(v_1), \ldots, f(v_n))\,.$$

Definice *Bilineární forma* je zobrazení $f : V \times V \to T$ lineární v obou složkách. Pro bilineární formu f definujeme *kvadratickou formu* tvořenou f,
$f_2 : V \to T$, $f_2(v) = f(v,v)$.

Definice Nechť $B = (v_1, \ldots, v_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T a nechť f je bilineární forma na V. *Maticí* f *vzhledem k* B je čtvercová matice řádu n kde na (i,j) místě je $f(v_i,v_j)$. Tuto matici značíme $[f]_B$.

Tvrzení (o matici bilineární formy) Platí $f(x,y) = [x]_B^T\,[f]_B\,[y]_B$.

Definice Řekneme, že bilineární forma f je *symetrická*, pokud $f(x,y) = f(y,x)$ a *antisymetrická*, pokud $f(x,y) = -f(y,x)$.

Věta (o (anti)symetrické formě) f je (anti)symetrická právě tehdy, když $[f]_B$ je (anti)symetrická matice.

Věta (o rozkladu bilineární formy) Nechť T je těleso charakteristiky různé od dvou. Pak existuje jednoznačný rozklad $f = f_s + f_a$, kde

$$f_s(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(y,x)\right), \qquad f_a(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) - f(y,x)\right).$$

Věta (součin matic a skládání zobrazení): Nechť $f_A : T^n \to T^m$ a $f_B : T^p \to T^n$. Pak $f_A f_B : T^p \to T^m$ a platí $f_A f_B = f_{AB}$.

Definice Nechť $f : V \to V$ je lineární operátor. Pak řekneme, že $\lambda \in T$ je *vlastní číslo* f, pokud existuje vektor $x \neq 0$ takový, že $f(x) = \lambda x$. Takové x nazýváme *vlastní vektor* f příslušný λ. Stejná definice platí i pro matice.

Věta (o vlastním čísle 0) Operátor f má vlastní číslo 0 právě tehdy, když f není prostý. Matice A má vlastní číslo 0 právě tehdy, když A je singulární.

Věta (o vlastních číslech a vektorech) Platí λ je vlastní číslo f právě tehdy, kdy $(f - \lambda \mathrm{id})$ není prostý. Je-li λ vlastní číslo, pak množina M_λ všech vlastních vektorů je podprostor V a M_λ=Ker$(f - \lambda \mathrm{id})$. To samé platí pro matice (místo "není prostý"je "singulární").

Věta (o vlastním číslu a determinantu) Nechť A je čtvercová řádu n nad tělesem T. Pak $\lambda \in T$ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Nechť f je lineární operátor na konečně generovaném prostoru V dimenze n nad tělesem T a B je báze V. Pak $\lambda \in T$ je vlastním číslem operátoru f právě tehdy, když λ je vlastním číslem matice $[f]_B^B$.

Definice *Charakteristický polynom* matice A je $p_A(\lambda)$ =det$(A - \lambda I_n)$

Věta (charakteristický polynom podobných matic) Dvě podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Definice *Charakteristický polynom* operátoru f je $p_f(\lambda)$ =det$([f]_B^B - \lambda I_n)$

Definice *Algebraická násobnost* vlastního čísla je jeho násobnost jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta (o počtu vlastních čísel) Každá matice/operátor nad tělesem dimenze n má nejvýše n vlastních čísel včetně algebraických násobností.

2.3.2 Polární báze a zákon setrvačnosti pro kvadratické formy

Tato kapitola se zabývá pouze symetrickými bilineárními formami - ty jsou vzájemně jednoznačné s kvadratickými.

Definice Nechť f je symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru V, x, $y \in V$. Řekneme, že x a y jsou *f-ortogonální*, pokud $f(x,y) = 0$. Řekneme, že báze $B = (v_1, \dots, v_n)$ prostor V je *f-ortogonální*, pokud $f(v_i,v_j) = 0$, $\forall i \neq j$, tedy matice f vzhledem k B, $[f]_B$ je diagonální.

Definice *Hodnost* bilineární formy f je hodnost její matice k libovolní bázi.

Definice *Polární báze* vzhledem k f je libovolná f-ortogonální báze.

V téhle kapitole je vhodné vědět, jak dostat f-ortogonální bázi - tj. symetrické úpravy a tak.

Věta (o existenci polární báze) Každá symetrická bilineární forma f na konečně generovaném prostoru nad tělesem charakteristiky různé od dvou, má polární bázi.

Věta (zákon setrvačnosti kvadratických forem) Nechť f je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru V dimenze n a C, C' jsou báze V takové, že

$$[f]_C = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{t}, \underbrace{0,\dots,0}_{m})$$
$$[f]_{C'} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k'}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{t'}, \underbrace{0,\dots,0}_{m'})$$

Pak $k = k'$, $t = t'$ a $m = m'$.

Definice Čísla k, t a m z minulé věty nazveme *pozitivní index setrvačnosti* formy f, *negativní index* formy f a *nulita* formy f, značíme $n_+(f)$, $n_-(f)$ a $n_0(f)$. Uspořádanou trojici $(n_0(f), n_+(f), n_-(f))$ nazveme *signatura* formy f.

Definice Řekneme, že symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru je *pozitivně definitní* právě tehdy, je-li $f_2(x) > 0\ \forall x \neq 0 \in V$.

Věta (o signatuře a pozitivní definitnosti) f pozitivně definitní právě tehdy, když $n_+(f) = n$.

Věta (o ortonormální diagonalizaci) Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle , \rangle$ a f symetrická bilineární forma na V. Pak existuje báze B prostoru V, která je f-ortogonální a zároveň ortonormální vzhledem k $\langle , \rangle$.

2.3.3 Matice jednoduchých geometrických zobrazení

- otočení v $\mathbb{R}^2$ o úhel α:
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$
- osová symetrie vzhledem k ose x v $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
- symetrie vzhledem k přímce procházející středem, uzavírající úhel s osou x:
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

- ortogonální projekce na osu x:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
- ortogonální projekce na přímku procházející středem, uzavírající úhel α s osou x:
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}.$$
- Givensova rotace: otočení o úhel α vůči e_i, e_j
$$G_{ij}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos\alpha & \dots & -\sin\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin\alpha & \dots & \cos\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$
- Householderova reflexe: zrcadlení podle nadroviny dimenze $n-1$ pomocí jejího normálového vektoru q, $||q|| = 1$. Platí
$$x = (x - x_q) + x_q,\ x_q = (qq^T)x,$$
pak zrcadlový je
$$y = (x - x_q) - x_q = (\mathbb{I} - 2qq^T)x.$$
Tedy
$$H(q) = (\mathbb{I} - 2qq^T).$$

2.4 Základy teorie grup a komutativních okruhů

2.4.1 Základní vlastnosti grup

Definice *Grupa* je algebra (množina s operacemi) $G = (G, *, ', e)$ typu (2,1,0) splňující $\forall a,b,c \in G$

(1) $a * (b * c) = (a * b) * c$,

(2) $\exists! e :\ a * e = e * a = a$,

(3) $\exists! a' :\ a * a' = a' * a = e$,

tj. e je jednotka a a' inverzní prvek k prvku a. Grupa je *Ábelovská*, pokud navíc $\forall a,b \in G :\ a * b = b * a$.

Definice Nechť G je grupa, pak $H \subseteq G$ je *podgrupa*, když $\forall a,b \in H$ je $a' \in H$, $a * b \in H$ a $e \in H$. Pak $H = (H, ^* |_H, ^{\prime} |_H, e)$. Podgrupy se dělí na *vlastní* a *nevlastní*. Nevlastní jsou podgrupy G a e, vlastní jsou všechny ostatní.

Definice Grupa je

- *aditivní*, pokud je tvaru $T = (T, +, -, 0)$,

- *multiplikativní*, pokud je tvaru $T^* = (T \setminus \{0\}, *, ^{-1}, 1)$,

pro libovolné těleso T.

Definice *Cyklické grupy* jsou $\mathbb{Z}_n = (\{0,1, \ldots, n-1\}, +_{\text{mod } n}, -_{\text{mod } n}, 0)$. Pak multiplikativní grupa $\mathbb{Z}_n^*$ má právě prvky nesoudělné s $n \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Definice Definujeme grupy

- *Symetrická grupa* je grupa $S_X = (\{\pi : \pi \text{ permutace na } X\}, \circ, ^{-1}, id)$ s podgrupami
  - *alternující podgrupa* A_n všech sudých permutací,
  - *dihedrální podgrupa* D_{2n} všech symetrií pravidelného n-úhelníku.

- *Maticová grupa* je grupa $GL_n(T) = \{(A : A \in T^{n \times n} \text{ regulární}), \cdot, ^{-1}, \mathbb{I}\}$ s podgrupami
  - $SL_n(T)$ podgrupa matic s determinantem rovným 1,
  - $O_n(T)$ podgrupa ortogonálních matic.

Věta (vlastnosti operací v grupě)

i. $a * c = b * c \vee c * a = c * b \Rightarrow a = b$,

ii. $a * u = a \vee u * a = a \Rightarrow u = e$,

iii. $a * u = e \vee u * a = e \Rightarrow u = a'$,

iv. $(a')' = a$,

v. $(a * b)' = b' * a'$.

Definice Nejmenší podgrupa G obsahující množinu $X \subset G$ je $\langle X \rangle_G$.

Věta (o lineárním obalu)
$\langle X \rangle_G = \{(k_1 \times x_1) * \cdots * (k_n \times x_n); n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\}$, kde $\times$ je mocnění v multiplikativní grupě a násobení v aditivní grupě.

Definice $G = (G, *, ', e)$, $H = (H, \cdot, ^{-1}, 1)$ pak $\varphi : G \to H$ je *homomorfismus*, pokud

- $\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$,
- $\varphi(a') = \varphi(a)^{-1}$,

- $\varphi(e) = 1$.

Pokud je navíc bijekce, tak se nazývá *izomorfismus*.

Definice *Jádro* homomorfismu je $\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in G : \varphi(a) = 1\}$, *obraz* homomorfismu je $\mathrm{Im}\varphi = \{b \in H : b = \varphi(a)\}$.

Věta (o homomorfismu) Platí

i. φ je homomorfismus $\Leftrightarrow \varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$,

ii. $\mathrm{Ker}\varphi$ je podgrupa G, $\mathrm{Im}\varphi$ je podgrupa H,

iii. φ je prostý homomorfismus $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$.

Definice *Direktní součin grup* $G_i = (G_i, *_i, '_i, e_i)$ je
$G_1 \times \cdots \times G_n = (G_1 \times \cdots \times G_n, *, ', e)$, kde $(a_1, \ldots, a_n) * (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 *_1 b_1, \ldots, a_n *_n b_n)$ a podobně se všemi operacemi.

Věta (o rozkladu $\mathbb{Z}_M$) Nechť $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$, kde $m_1, \ldots, m_n$ jsou po dvou nesoudělná. Pak $\mathbb{Z}_M \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Cayleyova a lineární reprezentace grup) Každá konečná grupa je izomorfní nějaké podgrupě některé symetrické (obecné lineární) grupy.

Definice *Řád grupy* je počet prvků G, značíme $|G|$, *řád prvku* a v G je počet prvků $\langle a \rangle_G$, značíme $\mathrm{ord}(a)$.

Věta (o řádu prvku) $\mathrm{ord}(a) =$ nejmenší přirozené n takové, že $n \times a = e$, pokud takové neexistuje, tak inf, tj. v aditivní grupě $na = 0$ a v multiplikativní grupě $a^n = 1$. Platí, že $\mathrm{ord}(a)$ dělí $|G|$ a pokud je $\varphi : G \to H$ izomorfismus, pak $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(\varphi(a))$.

Definice *Cyklická grupa* je grupa, která je generovaná jedním prvkem.

Věta (izomorfismus cyklických grup) Nechť je G cyklická. Pokud je G nekonečná, pak je izomorfní grupě $\mathbb{Z}$. Pokud je G konečná, pak existuje n takové, že G je izomorfní grupě $\mathbb{Z}_n$.

Věta (o podgrupách cyklických grup) Podgrupy cyklických grup jsou také cyklické.

Věta (o $\mathbb{Z}_p^*$) Grupa $\mathbb{Z}_p^*$ je cyklická pro p prvočíslo a pak je tato grupa izomorfní grupě $\mathbb{Z}_{p-1}$.

Věta (o symetrické grupě) Platí

i. řád permutace π v grupě S_X je nejmenší společný násobek délek cyklů,

ii. S_n je generovaná všemi transpozicemi, A_n je generovaná všemi trojcykly.

Definice a,$b \in G$ jsou *konjugované*, pokud $\exists c \in G$ takové, že $a = c \cdot b \cdot c^{-1}$.

Věta (o konjugovaných permutacích) Dvě permutace jsou konjugované právě tehdy, když mají stejný počet cyklů každé délky.

Definice Nechť $G = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ a H podgrupa G. Pak definujeme

- levý rozklad grupy G podle H je $\{aH, a \in G\}$,
- levé rozkladové třídy jsou $aH = \{ah, h \in H\}$,
- levá transverzála obsahuje z každé levé rozkladové třídy právě jeden prvek.

Pravý rozklad, pravé rozkladové třídy a pravou transverzálu definujeme analogicky.

Věta (o rozkladových třídách) $\forall a \in G$ platí $|aH| = |Ha| = |H|$.

Věta (o rozkladech) Levý i pravý rozklad grupy mají stejný počet prvků.

Definice *Index podgrupy* H v G je $[G : H] = |\{aH : a \in G\}| = |\{Ha : a \in G\}|$.

Věta (Lagrangeova) Nechť G je grupa a H je její podgrupa. Pak
$|G| = |H|\,[G : H]$.

Věta (o velikosti podgrupy) Nechť G je konečná grupa a H její podgrupa. Pak $|H|$ dělí $|G|$.

2.4.2 Působení grupy na množině

Definice *Působení grupy G na množinu X* je homeomorfismus $\pi : G \to S_X$. Hodnotu $\pi(g)$ na prvku x budeme značit $g(x)$.

Věta (základní vlastnosti působení) Platí $\pi(1) = id$, tj. $1(x) = x$, g^{-1} je inverzní ke g a $(g \cdot h)(x) = g(h(x))$.
Tuhle "větu"jsem si teď přečetla ze svých poznámek a vůbec jí nerozumím, ale nechtěla jsem ji vynechat. Takže here u go, enjoy.

Definice Definujeme *relaci tranzitivity* $x \sim y$ pokud existuje $g \in G$ takové, že $g(x) = y$. Tato relace je ekvivalence a bloky ekvivalence nazýváme *orbity*, $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$.

Definice Řekneme, že x je *pevný bod* permutace π, pokud $\pi(x) = x$.

Definice Množina všech pevných bodů $\pi(g)$ je $X_g = \{x \in X : g(x) = x\}$.

Definice *Stabilizátor prvku* $x \in X$ je $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$.

Věta (o G_x) G_x je podgrupa grupy G.

Věta (o velikosti G) $\forall x \in X$ platí $|G| = |G_x| \cdot |[x]|$.

Definice $X|_\sim$ je množina všech bloků ekvivalence, tj. $|X|_\sim|$ je počet orbit působení.

Věta (Burnsideova) Nechť G a X jsou konečné, pak

$$|X|_\sim| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g| \, .$$

2.4.3 Dělitelnost v Eukleidovských oborech, rozšířený Eukleidův algoritmus, existence a jednoznačnost ireducibilních rozkladů

Věta (o dělitelnosti) Nechť $a = q \cdot b + r$. Pak q je celočíselný podíl a r je zbytek po dělení. Řekneme, že b *dělí* a, pokud $\exists q$ takové, že $a = b \cdot q$, píšeme $b|a$.

Věta (o NSD a NSN) Platí

$$\mathrm{NSN}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{NSD}(a,b)}.$$

Věta (Bézoutova rovnost) $\forall a,b \; \exists u, v : \mathrm{NSD}(a,b) = u \cdot a + v \cdot b$, pak u,v se nazývají *bézoutovy koeficienty.*

Definice Definujeme kongruenci $a \equiv b \pmod m$ pokud dávají stejný zbytek po dělení m, tj. $m|(a-b)$.

Definice *Eulerova funkce* $\varphi(n) =$ počet čísel z $\{1, \dots, n-1\}$ nesoudělných s n.

Věta (Eulerova funkce a prvočíselný rozklad) Nechť $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, pak $\varphi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1-1) \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m-1}(p_m-1)$.

Věta (Eulerova) Nechť a, m jsou nesoudělná, pak $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Věta (Čínská věta o zbytcích) Nechť $m_1, \dots, m_n$ jsou nesoudělná,
$M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$. Pak $\forall u_1, \dots, u_n \; \exists! x \in \{0, \dots, M-1\}$ takové, že

$$x \equiv u_1 (\bmod\ m_1) \dots x \equiv u_n (\bmod\ m_n).$$

Definice *Komutativní okruh s jednotkou* je $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$, pokud platí:

- $(a+b)+c = a+(b+c)$,

- $a + b = b + a$,
- $a + 0 = a$,
- $a + (-a) = 0$,
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
- $a \cdot b = b \cdot a$,
- $a \cdot 1 = a$,
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Pokud navíc $a,b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$, tak se jedná o *obor integrity*.
Pokud navíc $\forall a \neq 0\ \exists b : \ a \cdot b = 1$, tak se jedná o *těleso*.

Definice Řekneme, že a *dělí* b v R, pokud $\exists c \in R$ takové, že $b = a \cdot c$.

Definice Řekneme, že a a b jsou *asociované*, pokud $a|b \ \wedge \ b|a$.

Definice Řekneme, že a je *invertibilní*, pokud $a||1$, tj. $\exists b : \ a \cdot b = 1$. Pak b značíme a^{-1}.

Definice Řekneme, že c je *největší společný dělitel* a a b ($c = \mathrm{NSD}(a,b)$), pokud $c|a$ a $c|b$ a pokud pro každé d takové, že $d|a \ \wedge \ d|b$ platí $d|c$.

Definice Řekneme, že a a b jsou *nesoudělná*, pokud $\mathrm{NSD}(a,b) = 1$.

Definice Řekneme, že a je *ireducibilní*, pokud je neinvertibilní a nemá vlastní dělitele.

Definice Obor integrity nazveme *Gaussovský*, pokud má každý neinvertibilní nenulový prvek jednoznačný rozklad na ireducibilní činitele.

Věta (Gaussovské obory a NSD) V Gaussovských oborech existuje pro každou dvojici prvků největší společný dělitel.

Definice *Eukleidovská norma* na R je zobrazení $\nu : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že

- $\nu(0) = 0$,
- Pokud $a|b$, pak $\nu(a) \leq \nu(b)$,
- $\forall a,b \in R,\ b \neq 0,\ \exists q, r : \ a = bq + r$ a $\nu(r) < \nu(b)$.

Řekneme, že obor integrity R je *Eukleidovský*, pokud na něm existuje eukleidovská norma.

Tvrzení V Eukleidovských oborech platí Bézoutova rovnost.

Euklidův algoritmus:

Vstup: $a,b \in R$, $\nu(a) \geq \nu(b)$,

Výstup: $\mathrm{NSD}(a,b)$ a $u,v \in R : \mathrm{NSD}(a,b) = u \cdot a + v \cdot b$.

- $a_0 = a$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0$,
- $a_1 = b$, $u_1 = 0$, $v_1 = 1$.
- Najdeme $r,q :\ a_{i-1} = a_i \cdot q + r$, $\nu(r) < \nu(a_i)$,
- položíme $a_{i+1} = r$, $u_{i+1} = u_{i-1} - u_i \cdot q$, $v_{i+1} = v_{i-1} - v_i \cdot q$.
- Pokud $a_{i+1} = 0$, pak výsledkem jsou a_i, u_i, v_i.

Věta (Euklidův algoritmus) Euklidův algoritmus funguje a vždy dospěje ke správnému výsledku.

Definice *Ideál* R je $I \subseteq R$ takový, že pro libovolné $a,b \in I$, $u \in R$ platí

i. $-a \in I$,

ii. $a + b \in I$,

iii. $a \cdot u \in I$.

Definice *Hlavní ideál* R je $aR = \{ar, r \in R\} = \{u \in R :\ a|u\}$.

Věta (Eukleidovské obory a ideály) Každý ideál v Eukleidovském oboru je hlavní ideál.

2.4.4 Kořenová a rozkladová nadtělesa, minimální polynom a stupeň rozšíření těles

Definice *Charakteristika tělesa* je nejmenší číslo n takové, že $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = 0$. Pokud takové n neexistuje, tak je charakteristika 0.

Definice *Rozšíření tělesa* T je libovolné nadtěleso $S \supseteq T$.

Definice Nejmenší podtěleso nazýváme *prvotěleso*.

Věta (o prvotělese) je izomorfní buď $\mathbb{Q}$ nebo $\mathbb{Z}_p$.

Definice Nechť I je ideál okruhu R. Definujeme relaci ekvivalence
$a \sim b \ \Leftrightarrow\ a - b \in I$ a bloky ekvivalence $[a] = a + I$ s operacemi

- $[a + b] = [a] + [b]$,

- $-[a] = [-a]$,
- $[a \cdot b] = [a] \cdot [b]$.

Pak $R\Big|_I = (\{[a], a \in R\}, +, -, \cdot, [0])$ je *faktorokruh.*
Ideál I je *maximální*, pokud neexistuje ideál J splňující $I \subset J \subset R$.

Věta (konstrukce faktorokruhů) Nechť R je komutativní okruh s jednotkou a I jeho maximální ideál, pak faktorokruh $R\Big|_I$ je těleso.

Definice Buď $T \subseteq S$ rozšíření těles a $a_1, \ldots, a_n \in S$, pak $T[a_1, \ldots, a_n]$ je nejmenší podokruh S obsahující T a $a_1, \ldots, a_n$; a $T(a_1, \ldots, a_n)$ je nejmenší podtěleso S obsahující T a $a_1, \ldots, a_n$.

Definice Na rozšíření $S \supseteq T$ se dá nahlížet jako na vektorový prostor nad T s násobením $T \times S \to S$. To se značí S_T a jeho dimenze je *stupeň rozšíření* $[S : T] = \dim S_T$.

Definice Nechť $S \supseteq T$ je rozšíření těles a $a \in S$. Pak a je *algebraický*, existuje-li nenulový polynom z $T[x]$, kde a je kořenem. Pokud prvek a není algebraický, pak je *transcendentní.* Je-li každý prvek rozšíření S algebraický, pak se jedná o *algebraické rozšíření.*

Věta (o rozšířeních konečného stupně) Rozšíření konečného stupně jsou algebraická.

Definice Nechť $S \supseteq T$ je rozšíření a $a \in S$ je algebraický prvek nad T. *Minimální polynom* prvku a nad T je polynom $m_{a,T} \in T[x]$ splňující

i. $m_{a,T}(a) = 0$,

ii. a je kořen $f \in T[x]$ pak $m_{a,T} | f$.

Věta (o $m_{a,T}$) Polynom $m_{a,T}$ je v $T[x]$ ireducibilní.

Věta (o stupni rozšíření) Nechť $S \supseteq T$ je rozšíření, $a \in S$ je algebraický nad T. Pak
$$[T(a) : T] = \deg\, m_{a,T}.$$

Tvrzení Stupeň $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p}) : \mathbb{Q}] = \deg(x^n - p) = n$.

Věta (o rozšíření rozšíření) Nechť $U \supseteq S \supseteq T$ jsou rozšíření, pak
$$[U : T] = [U : S] \cdot [S : T].$$

Definice Řekneme, že $S \supseteq T$ je *kořenové nadtěleso* polynomu $f \in T[x]$, pokud má f v S kořen a $S = T(a)$.

Věta (o kořenových nadtělesech) Nechť T je těleso a $f \in T[x]$ polynom stupně ≥ 1. Pak

i. existuje kořenové nadtěleso k polynomu f,

ii. je-li f ireducibilní v $T[x]$, pak jsou každá dvě kořenová nadtělesa T-izomorfní.

Definice Řekneme, že $S \supseteq T$ je *rozkladové nadtěleso* polynomu $f \in T[x]$, pokud se f v $S[x]$ rozkládá na lineární činitele, tj. $f||(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$ pro $a_1, \ldots, a_n \in S$ a navíc $S = T(a_1, \ldots, a_n)$.

Věta (o rozkladových tělesech) Nechť T je těleso, $f \in T[x]$ je polynom stupně ≥ 1. Pak

i. existuje rozkladové nadtěleso f,

ii. každá dvě rozkladová nadtělesa f jsou T-izomorfní.

Definice Řekneme, že těleso T je *algebraicky uzavřené*, má-li v něm každý polynom z $T[x]$ kořen.

Věta (o algebraicky uzavřených tělesech) Algebraicky uzavřená tělesa nemohou být konečná.

Definice Řekneme, že $S \supseteq T$ je *algebraický uzávěr T*, je-li S algebraicky uzavřené a je algebraickým rozšířením tělesa T.

Věta (o algebraickém uzávěru) Ke každému tělesu T existuje algebraický uzávěr a každé dva algebraické uzávěry jsou T-izomorfní.

Printscreenem jsem vystříhal věty a definice z různých skript.
Kalenda 09/10
Skripta Kalendy na komplexku z 2014 přikládám.
Skripta Malého na míru z 2016 přikládám.
Skripta na funkcionálu ze stránek Spurného Spurný 19/20 a přikládám seznam vět.
Na Furirku přikládám seznamy vět z analýzy od Hencla a odkaz na skripta Analýza 2020
Samozřejmě za nic neručím a vlastně ani nedoporučuju se učit jen z tohoto, ale jako přehled co byste měli znát k ssz to snad bude stačit. pis

1 Lebesgueův integrál

σ-algebra je definována jako σ-okruh obsahující celý prostor X.
Je to nejdůležitější množinový systém pro teorii míry. K ověření, že množinový systém $\mathcal{S}$ je σ-algebra stačí tyto axiomy:
(S1-1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
(S2-2) $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$,
(S3-3) $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}$.
Je-li $\mathcal{S}$ σ-algebra na X, dvojice $(X, \mathcal{S})$ se nazývá *měřitelný prostor*. Množiny $A \in \mathcal{S}$ se nazývají $\mathcal{S}$-měřitelné množiny. Nehrozí-li nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných množinách*.

1.10. **Definice** (Generování množinových systémů). Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém podmnožin X, potom existuje nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{F}$. Tuto σ-algebru dostaneme jako průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{F}$ a značíme ji $\sigma(\mathcal{F})$.

1.11. **Definice** (Borelovské množiny). Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{G}$ je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme $\mathcal{B}(X)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{G}$ (viz definice 1.10). σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ obsahuje kromě otevřených množin též všechny uzavřené množiny. $\mathcal{B}(X)$ se nazývá *borelovská σ-algebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny*.

V $\mathbb{R}$ jsou borelovské všechny intervaly, množina všech racionálních čísel, atd. Příklady neborelovských množin se konstruují velmi těžko.

Někdy je výhodné generovat $\mathcal{B}(X)$ jinak než systémem všech otevřených množin. Na $\overline{\mathbb{R}}$ je přirozená topologie generovaná intervaly (a, b), $(a, \infty]$ a $[-\infty, b)$. Tudíž $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ je σ-algebra na $\overline{\mathbb{R}}$ generovaná intervaly. Podobně $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generovaná intervaly.

1.12. **Definice** (Míra). Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže splňuje
(M1-1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(M2-2) (*σ-additivita*) jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, potom

$$\mu\Big(\bigcup_j A_j\Big) = \sum_j \mu(A_j).$$

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou*.

Zdůrazněme, že definice míry zahrnuje, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je σ-algebra.

1.14. **Definice** (Terminologie teorie míry). Míra μ na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{S})$ se nazývá

(a) *konečná,* jestliže $\mu(X) < \infty$,
(b) *σ-konečná,* jestliže existují $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ a $X = \bigcup_j X_j$,
(c) *pravděpodobnostní,* jestliže $\mu(X) = 1$,
(d) *úplná,* jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná (a tudíž také míry nula).

Fráze *skoro všude* nebo *μ-skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X. Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{S}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \setminus N$. Používá se zejména pro rovnost a nerovnosti mezi funkcemi a pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí.

2.1. **Definice** (Lebesgueova vnější míra). Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina. Definujme

$$\ell^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) : \ Q_j \in \mathcal{I}_n, \ \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A\Big\}. \tag{2}$$

Množinová funkce $\ell^* \colon A \mapsto \ell^*(A)$, definovaná na potenční množině $2^{\mathbb{R}^n}$, se nazývá *Lebesgueova vnější míra.* Součty, vyskytující se na pravé straně (2) se nazývají *horní součty* k $\ell^*(A)$.

Množinová funkce ℓ^* umí měřit všechny množiny, ale není aditivní. Proto v dalším se budeme snažit z ní vytvořit aditivní funkci (dokonce míru, viz definice 1.12), za což zaplatíme zúžením definičního oboru. Výsledný obor všech měřitelných množin však již bude dostatečně bohatý pro všechny aplikace.

2.2. **Měřitelné množiny a Lebesgueova míra.** Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je (Lebesgueovsky) *měřitelná,* jestliže pro každý interval $Q \in \mathcal{I}_n$ platí

$$\ell(Q) = \ell^*(Q \cap A) + \ell^*(Q \setminus A). \tag{3}$$

Množinu všech Lebesgueovsky měřitelných množin budeme značit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ a množinová funkce

$$\lambda : A \mapsto \ell^*(A), \qquad A \in \mathfrak{M}$$

bude *Lebesgueova míra.*

2.3. **Oznámení věty.** *Nechť $Q \in \mathcal{I}_n$. Potom $Q \in \mathfrak{M}$ a $\lambda(Q) = \ell^*(Q) = \ell(Q)$.*

2.4. **Oznámení věty.** *$\mathfrak{M}$ je σ-algebra obsahující všechny borelovské podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a λ je míra na $\mathfrak{M}$.*

3.3. **Definice** (Měřitelné funkce). Nechť $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že funkce $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ je *$\mathcal{S}$-měřitelná, jestliže* pro každý interval $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ je $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných funkcích.*

3.7. **Větička** (Měřitelnost vzoru). *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $A \subset \mathbb{R}$ je borelovská množina. Potom $\{f \in A\} \in \mathcal{S}$.*

3.8. **Větička** (Měřitelnost složené funkce). *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a φ je spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině $M \subset \overline{\mathbb{R}}$. Potom množina $D' := \{f \in M\}$ je měřitelná a složená funkce $\varphi \circ f$ je měřitelná na D'.*

3.9. **Varování.** Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný. Také není obecně pravda, že inverzní funkce k měřitelné funkci by byla měřitelná funkce. Viz příklad 19.5

3.10. **Věta** (Operace s měřitelnými funkcemi). *Nechť funkce f, f_j jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak platí následující:*

(a) *Funkce $|f|$, f^+, f^-, f^2 jsou měřitelné na D, $1/f$ je měřitelná na $\{f \neq 0\}$.*
(b) *Funkce $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$, f_1/f_2 jsou měřitelné vždy na množině, kde učiněná operace dává smysl podle úmluvy 3.2.*
(c) *Funkce $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$, $\limsup_j f_j$, $\liminf_j f_j$ jsou měřitelné na D.*
(d) *Množina D' všech bodů, kde existuje $\lim_j f_j$ je měřitelná a $\lim_j f_j$ je měřitelná na D'.*

3.11. **Jednoduché funkce.** Funkci f na $D \in \mathcal{S}$ nazveme *$\mathcal{S}$-jednoduchou*, jestliže f je lineární kombinace charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S}$, tj. existují-li množiny $A_j \in \mathcal{S}$ a $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, tak, že

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Pokud bude jasné, jakou σ-algebru máme na mysli, budeme mluvit prostě o jednoduchých funkcích.

3.12. **Aproximace jednoduchými funkcemi.** *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom existují nezáporné jednoduché funkce $f_k \nearrow f$. Navíc, f lze vyjádřit ve tvaru*

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j}, \tag{5}$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

4.1. **Definice** (Rozklad)**.** Konečný soubor množin $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$ nazveme *rozkladem* nebo *Lebesgueovským dělením* množiny $D \in \mathcal{S}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j = D.$$

4.2. **Terminologická poznámka.** Rozdíl mezi obyčejným "riemannovským" dělením a lebesgueovským spočívá hlavně v tom, že riemannovské dělení je pouze na intervaly, u lebesgueovského se dělí na libovolné měřitelné množiny. Tento rozdíl podstatně přispívá k bohatství třídy lebesgueovsky integrovatelných funkcí.

4.4. **Definice** (Konstrukce integrálu)**.** Nechť $D, D' \in \mathcal{S}$ a $f \colon D' \to \overline{\mathbb{R}}$ je měřitelná funkce. Integrál $\int_D f \, d\mu$ vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme $D' = D$.

1. Je-li f nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$\begin{aligned}\int_D f \, d\mu = \sup\Big\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D, \\ 0 \le \alpha_j \le f \text{ na } A_j,\ j = 1, \dots, m \Big\}.\end{aligned} \tag{6}$$

Součty vyskytující se v (6) nazýváme *dolními součty* k funkci f. Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován *vždy*, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f \, d\mu = \int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu, \tag{7}$$

pokud rozdíl v (7) má smysl. Pokud

$$\int_D f^+ \, d\mu = \int_D f^- \, d\mu = \infty,$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: $\mathcal{S}$-měřitelná) funkce na $D' \neq D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f \, d\mu = \int_{D \cap D'} f \, d\mu.$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D'.

Je-li integrál $\int_D f \, d\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f \, d\mu$ *konverguje* nebo že f je *integrovatelná*.

4.7. **Oznámení věty** (Lebesgueův integrál a Newtonův integrál). Nechť funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) primitivní funkci F.

(a) Je-li f λ-integrovatelná na (a, b), potom existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+).$$

(b) Jestliže $f \geq 0$ a existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$, pak f je λ-integrovatelná na (a, b).

4.8. **Věta** (Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu). *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a f, g jsou měřitelné funkce na D.*

(a) *Je-li $f \geq 0$, D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$ a $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak*

$$\int_{D_1} f\,d\mu \leq \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(b) *Jestliže D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ a $D_1 \cup D_2 = D$, pak*

$$\int_D f\,d\mu = \int_{D_1} f\,d\mu + \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(c) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude.*

(d) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*

(e) (monotonie) *Jestliže f, g mají integrál a $f \leq g$ skoro všude, pak*

$$\int_D f\,d\mu \leq \int_D g\,d\mu.$$

(f) *Je-li $\int_D g\,d\mu < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude, pak f je integrovatelná.*

4.14. **Důsledek** (Spojitá závislost na integračním oboru). *Nechť D, $E_k \in \mathcal{S}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $\bigcup_k E_k = D$. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na D. Potom*

$$\int_D f\,d\mu = \lim_k \int_{E_k} f\,d\mu.$$

4.15. **Věta** (Linearita integrálu). (a) *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom*

$$\int_D (f+g)\,d\mu = \int_D f\,d\mu + \int_D g\,d\mu,$$

má-li pravá strana smysl. (b) *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $\gamma \in \mathbb{R}$. Pokud f má integrál, pak*

$$\int_D \gamma f\,d\mu = \gamma \int_D f\,d\mu.$$

5.4. **Věta** (vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom $(N) \int_a^b f(x)\,dx$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce f. V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

5.5. **Důsledek** (Diskuse vztahu mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b).

(a) *Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b, konverguje i Newtonův a to absolutně.*

(b) *Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, pak konverguje i Lebesgueův.*

(c) *Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce f, pak oba mají stejnou hodnotu.*

(d) *Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.*

5.6. **Věta** (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

4.13. **Věta** (Levi, Lebesgue, monotone convergence theorem). *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$, $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$, a $f = \lim f_j$. Potom*

$$\int_D f\,d\mu = \lim_j \int_D f_j\,d\mu. \tag{11}$$

6.1. **Lemma** (Fatouovo). *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Potom*

$$\int_D \liminf_j f_j \le \liminf_j \int_D f_j. \tag{15}$$

6.2. **Věta** (Lebesgueova, dominated convergence theorem). *Nechť $D \in S$ a f, f_j, $j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D. Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná* majoranta*) tak, že*

$$|f_j(x)| \le g(x), \qquad j = 1, 2, \dots, \qquad x \in D. \tag{16}$$

Potom

$$\int_D f = \lim_j \int_D f_j. \tag{17}$$

14.1. **Definice** (Součin měr). Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ-konečné. Uvažujme systém $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ všech podmnožin $X \times Y$ tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Takovým množinám budeme říkat *měřitelné obdélníky.* Na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ definujeme množinovou funkci $\mu \times \nu$ předpisem

$$(\mu{\times}\nu)\,(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B).$$

Systém množin $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ generuje tzv. *součinovou σ-algebru* $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} := \sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. V dalším (věta 14.5) uvidíme, že existuje právě jedna míra ρ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ tak, že

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B), \qquad A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{T}.$$

Tuto míru budeme nazývat *součin měr* μ a ν a značit $\mu{\otimes}\nu$. Její zúplnění budeme nazývat *úplný součin měr* a značit $(\mathcal{S}\overline{\otimes}\mathcal{T},\ \mu\overline{\otimes}\nu)$.

14.9. **Definice** (Řezy). Nechť $M \subset X \times Y$. Značíme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y : (x,y) \in M\}, \qquad && x \in X,\\ M^{*,y} &= \{x \in X : (x,y) \in M\}, \qquad && y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají *řezy.*

14.11. **Věta** (Fubiniova). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ-konečné. Buď $(\mathcal{R}, \rho)$ součin měr μ a ν a $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$-měřitelná funkce na $\overline{\rho}$-měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x,y)\,d\overline{\rho}(x,y)$$

má smysl. Potom pro μ-skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x,y)\,d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g\,d\mu$$

a

$$\int_M f(x,y)\,d\overline{\rho}(x,y) = \int_X g\,d\mu = \int_X \Big(\int_{M^{x,*}} f(x,y)\,d\nu(y) \Big)\,d\mu(x). \tag{33}$$

15.3. **Věta** (o substituci). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

2 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$ nazýváme *normou* na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem.*

Tvrzení 2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X.

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

PŘÍKLADY 4.

a) Prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normami $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, +\infty)$, případně $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}|x_i|$ pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou Banachovy prostory.

b)
- Nechť K je kompaktní prostor a $C(K)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ všech spojitých funkcí z K do $\mathbb{K}$. Na $C(K)$ zavedeme normu předpisem $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)|$ pro $f \in C(K)$. Pak $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor. Platí, že $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, právě když $f_n \rightrightarrows f$. Důkaz úplnosti je stejný jako pro prostor $C([a, b])$ známý z přednášky z matematické analýzy.
- Prostor všech konvergentních posloupností $c = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n \text{ existuje vlastní}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je Banachův prostor. Důkaz lze vést přímo, nebo lze využít faktu, že c je lineárně izometrický prostoru $C(K)$, kde $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty \{\frac{1}{n}\}$ s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}$ (viz Tvrzení 60(b)).
- Prostor $c_0 = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n = 0\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor Banachova prostoru c (viz Tvrzení 5(b)).
- Prostor $c_{00} = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ (x_n)_{n=1}^\infty \text{ má pouze konečně mnoho nenulových členů}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je normovaný lineární prostor, který není Banachův: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků c_{00}, kde $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, je cauchyovská, ale není konvergentní v c_{00}.

- Prostor $\ell_p = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\right\}$, $1 \leq p < \infty$ s normou $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ je Banachův prostor. (Je to speciální případ prostorů uvedených níže.)

Tvrzení 4. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

Definice 7 (ekvivalentní normy)**.** Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Definice 65. *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y \rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x \rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem.*

Definice 67. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

PŘÍKLAD 83. Snadno se ověří, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normou $\|\cdot\|_2$ jsou Hilbertovy prostory se skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$. Obecněji, je-li μ míra, pak prostor $L_2(\mu)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_X f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu$. Speciálně, ℓ_2 je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i}$.

Podprostor ℓ_2 tvořený vektory pouze s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

Připomeňme si, že zobrazení $T : X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x + y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 45. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Důsledek 72. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T : X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 52. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Věta 73. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

Tvrzení 37. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.

(ii) T je spojité v jednom bodě.

(iii) T *je spojité v* 0.

(iv) *Existuje* $C \geq 0$ *tak, že* $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(v) T *je lipschitzovské.*

(vi) T *je stejnoměrně spojité.*

(vii) $T(A)$ *je omezená pro každou omezenou* $A \subset X$.

(viii) $T(B_X)$ *je omezená.*

(ix) $T\big(U(0,\delta)\big)$ *je omezená pro nějaké* $\delta > 0$.

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Věta 41. *Nechť* X *je normovaný lineární prostor a* Y *je Banachův prostor. Pak* $\mathcal{L}(X,Y)$ *je Banachův prostor.*

Věta 49. *Nechť* $X, \widehat{X}$ *a* Y *jsou normované lineární prostory,* X *je hustý v* $\widehat{X}$ *a* Y *je úplný. Nechť dále* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak existuje právě jeden operátor* $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X},Y)$ *rozšiřující* T, *tj.* $\widehat{T}\restriction_X = T$. *Navíc platí* $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

Věta 124 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť* X *je Banachův prostor,* Y *je normovaný lineární prostor a* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé* $x \in X$ *je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Definice 126. Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 127 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)**.** *Nechť* X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *je na. Pak* T *je otevřené zobrazení.*

Důsledek 129 (S. Banach, 1929)**.** *Nechť* X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak* T *je izomorfismus* X *na* Y, *právě když* T *je prostý a na.*

Definice 131. Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení* f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, *má uzavřený graf*, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 132 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)**.** *Nechť* X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T\colon X \to Y$ *je lineární zobrazení. Pak* T *je spojité, právě když má uzavřený graf.*

3 Hilbertovy prostory

Definice 74. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* A.

Definice 26. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F : \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Věta 81. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

Definice 82. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- *ortonormální*, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Poznámka (důležitá). Uvědomme si, že v definici ortonormální báze lze podle Věty 102 v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ podmínku $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ (tj. předpoklad, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ konverguje bezpodmínečně) nahradit podmínkou $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ (tj. obyčejnou konvergencí). Podobně lze v následujících tvrzeních všude, kde předpokládáme konvergenci zobecněné řady $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém, tento předpoklad v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ nahradit předpokladem obyčejné konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$.

Věta 84. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

Důsledek 87. *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

Věta 89 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

Věta 90. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

- Pro Hilbertův prostor $L_2([0, 2\pi])$ je systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx);\ n \in \mathbb{N}\right\}$ ortonormální bází. Ortonormalita plyne z klasické teorie Fourierových řad. Hustota lineárního obalu plyne z Fejérovy[19] věty zkombinované s důsledkem Luzinovy věty. Alternativně lze ukázat, že trigonometrický ortonormální systém je maximální: Nechť $f \in L_2([0, 2\pi])$ je kolmé ke všem prvkům tohoto systému. Protože též $f \in L_1([0, 2\pi])$, můžeme spočítat Fourierovy koeficienty příslušné funkci f. Ty jsou ovšem díky kolmosti rovny 0. Podle věty o jednoznačnosti to znamená, že $f = 0$ s. v., a tedy $f = 0$ v $L_2([0, 2\pi])$.

  Nyní též vidíme, proč se řadě v (ii) ve Větě 112 říká abstraktní Fourierova řada: Pro bázi popsanou výše je to totiž formálně klasická Fourierova řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ jsou přesně klasické Fourierovy koeficienty. Tato Fourierova řada ovšem konverguje ve smyslu prostoru $L_2([0, 2\pi])$, nikoli bodově, jak se studuje v klasické teorii.

Důsledek 91. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Věta 92 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

Tvrzení 93. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li $\dim X = n \in \mathbb{N}$, pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li $\dim X = \infty$ a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

Věta 78 (Frigyes Riesz, 1934). *Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Lemma 79 (F. Riesz, 1934). *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

4 Fourierovy řady

Značení: Symbolem $\mathcal{P}_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π-periodických funkcí na $\mathbf{R}$.

Definice. Nechť a_k, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a b_k, $k \in \mathbf{N}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickou řadou.* Je-li navíc $n \in \mathbf{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem stupně n.*

Věta L 17.1 (Fourierovy vzorce). *Nechť $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ a $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ jsou posloupnosti reálných čísel a řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

konverguje stejnoměrně k funkci f na $\mathbf{R}$. Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, definované předpisy

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N},$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce f. Trigonometrickou řadu

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f. Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou Sf značíme symbolem $f \sim Sf$. Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dále definujeme *částečný součet Fourierovy řady* funkce f předpisem

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Věta L 17.9 (Fourierovy koeficienty určují funkci). *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.*

Důsledek Vět 11.10 a 11.12: Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f. Pak platí

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti L^2 funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Věta T 17.3 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma). *Nechť $(a, b) \subset \mathbf{R}$ je omezený interval a nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom*

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \cos(tx)\, dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(tx)\, dx = 0.$$

Důsledek: Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Fourierovými koeficienty nějaké funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Věta L 17.5 (Diniovo kritérium). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $x \in \mathbf{R}$. Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$ a nechť dále existují vlastní limity*

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \qquad \text{a} \qquad \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}.$$

Potom řada Sf konverguje v bodě x a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, má-li funkce f konečné jednostranné derivace v bodě x, potom $Sf(x) = f(x)$.

Definice. Nechť $[a, b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Definujme veličiny

$$V(f; a, b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right\} \text{ (totální variace)},$$

kde supremum bereme přes všechna dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ tvaru $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ *omezenou variaci*, jestliže $V(f; a, b) < \infty$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a, b]$ značíme $\mathrm{BV}([a, b])$.

Věta T 17.6 (Jordanovo–Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $f \in \mathrm{BV}([0, 2\pi])$. Potom*

(a) *pro každé $x \in [0, 2\pi]$ konverguje Fourierova řada $Sf(x)$ a platí*

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2};$$

(b) *je-li funkce f navíc spojitá na $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, potom*

$$S_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } [a, b].$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme n-tým *částečným Fejérovým součtem* funkce f.

Věta T 17.7 (Fejérova)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$.*

(a) *Jestliže pro nějaké $x \in \mathbf{R}$ existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, potom*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

(b) *Je-li funkce f spojitá na nějakém intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$, potom*

$$\sigma_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } (a, b).$$

Věta L 17.8 (Weierstrassova - trigonometrická verze)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je spojitá na $\mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje trigonometrický polynom $T \in \mathcal{T}$ splňující*

$$\|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

5 Funkce komplexní proměnné

Definice:

(1) **Komplexní funkcí komplexní proměnné** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$.

(2) Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$. **Derivací funkce f podle komplexní proměnné v bodě a** (stručněji **derivací funkce f v bodě a**) rozumíme (komplexní) číslo

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud limita na pravé straně existuje (v $\mathbb{C}$).

Poznámka:

(1) Pro derivaci podle komplexní proměnné platí věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce ve stejné podobě jako pro derivaci v $\mathbb{R}$.

(2) Má-li f v bodě $a \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě a spojitá.

(3) Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné, g komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

Věta 3:

Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ odpovídající f při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$; tj. takovou, že

$$f(x+iy) = \tilde{f}_1(x,y) + i\tilde{f}_2(x,y)$$

pro $x + iy$ z definičního oboru f.

(1) (**Cauchy-Riemannovy podmínky**) Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě když $\tilde{f}$ má v bodě (a,b) totální diferenciál a platí

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a,b) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a,b).$$

(2) Existuje-li $f'(z)$, je Jacobiho determinant $\tilde{f}$ v bodě (a,b) roven $|f'(z)|^2$. Speciálně, Jakobiho matice $\tilde{f}$ v bodě (a,b) je regulární, právě když $f'(z) \neq 0$.

Definice:

- Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je **holomorfní na množině** M, jestliže existuje otevřená množina $G \supset M$ taková, že f má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny G.
- Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celá funkce**.

Cestou neboli **po částech hladkou křivkou** v $\mathbb{C}$ rozumíme křivku $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, pro kterou existuje takové dělení $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[s_{j-1}, s_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (s_{j-1}, s_j) a má v krajních bodech s_{j-1} a s_j vlastní jednostranné limity).

Je-li navíc $f : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **integrál funkce** f **podél cesty** φ vzorcem

$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

Věta 3:

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G. Pak pro každou cestu $\varphi : [a,b] \to G$ platí $\displaystyle\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Speciálně, je-li φ uzavřená cesta v G, pak $\displaystyle\int_\varphi f = 0$.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Ω je **souvislá** (tj. pro každou neprázdnou $G \subset \Omega$ takovou, že G i $\Omega \setminus G$ jsou otevřené množiny, platí $G = \Omega$).

Definice:

Otevřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{C}$ nazýváme **oblast**.

Definice:

Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Pak **index bodu a vzhledem ke křivce φ** je definován vzorcem

$$\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z-a} \, \mathrm{d}z.$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina a $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že bod z_0 je **hromadným bodem množiny** M, jestliže každé okolí bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M různý od z_0. Je-li navíc $\Omega \subset \mathbb{C}$ množina obsahující M, říkáme, že M je **izolovaná v** Ω, jestliže nemá v Ω žádný hromadný bod.

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina. Funkce $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ se nazývá **meromorfní**, jestliže je spojitá na G a existuje množina $M \subset G$, která je izolovaná v G, taková, že f je holomorfní na $G \setminus M$. Množinu všech funkcí meromorfních na G značíme $M(G)$. V bodech množiny M má meromorfní funkce **nejvýše pól** (tj. buď pól nebo odstranitelnou singularitu).

Definice. **Řetězcem** rozumíme výraz tvaru

$$(*) \qquad \varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \varphi_n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou cesty. Řetězec (*) se nazývá **cykl**, pokud jsou cesty $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ uzavřené.

- **obraz řetězce** Γ jako

$$\langle\Gamma\rangle = \langle\varphi_1\rangle \cup \langle\varphi_2\rangle \cup \cdots \cup \langle\varphi_n\rangle;$$

- je-li $f : \langle\Gamma\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá, pak **integrál funkce f podél** Γ jako

$$\int_\Gamma f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f + \cdots + \int_{\varphi_n} f;$$

Věta 2 (globální Cauchyova věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Pak pro každou funkci f holomorfní na Ω platí*

$$\int_\Gamma f = 0$$

a

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle.$$

Věta 14 (Cauchyův vzorec pro vyšší derivace). *Nechť f je holomorfní na $\overline{U(a,r)}$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$). Pak f má na $U(a,r)$ derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in U(a,r)$ platí*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r.

Důsledek. *Je-li f holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}$, je i f' holomorfní na M.*

Věta 21: O jednoznačnosti

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f, g jsou funkce holomorfní na Ω. Jestliže množina

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v Ω (tj. není izolovaná v Ω), pak $f = g$ na Ω.

Definice:

Laurentovou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$(*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. **Regulární částí** řady $(*)$ rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

hlavní částí řady $(*)$ rozumíme symbol

$$(**) \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n.$$

Říkáme, že **hlavní část řady** $(*)$ **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}.$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady** $(*)$ a značíme jej rovněž $(**)$.

Říkáme, že **řada** $(*)$ **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady** $(*)$ rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n.$$

Definice:

Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $a \in \mathbb{C}$. Pak označme

$$P(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikružím o středu** a, **vnitřním poloměru** r **a vnějším poloměru** R.

Věta 3:

Mějme Laurentovu řadu (∗). Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$, pro která platí:

- Regulární část řady (∗) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ a diverguje pro $|z - a| > R$.
- Hlavní část řady (∗) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$ a diverguje pro $|z - a| < r$.

Je-li $r < R$, pak řada (∗) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží $P(a, r, R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme **mezikružím konvergence řady (*)**.

Věta 6:

Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pak f je v $P(a, r, R)$ součtem Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

o středu a, která na $P(a, r, R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r, R)$ je libovolné a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Definice:

Nechť f je holomorfní funkce v $P(a, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Nechť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

je Laurentova řada funkce f v $P(a, R)$. Pak **reziduem funkce** f **v bodě** a rozumíme číslo

$$\operatorname{res}_a f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} f,$$

kde $\rho \in (0, R)$ a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Věta 3 (obecná reziduová věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $M \subset \Omega$ je izolovaná v Ω, $M \cap \langle\Gamma\rangle = \emptyset$ a f je funkce holomorfní v $\Omega \setminus M$. Pak platí:*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f.$$

V sumě na pravé straně přitom je jen konečně mnoho nenulových sčítanců.

4. Připomínky a řešené příklady

4.1 Analýza

Věta (o limitě složené funkce) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{y \to A} g(y) = B \in \mathbb{R}^*$. Nechť platí jedna z podmínek

(P) $\exists P(a)\ \forall x \in P(a):\ f(x) \neq a$,

(S) g je spojitá v $A \in \mathbb{R}$.

Pak
$$\lim_{x \to a} f\Big(g(x)\Big) = B.$$

Průběh funkce:

- Definiční obor,
- sudá ($f(x) = f(-x)$), lichá ($f(x) = -f(-x)$), periodická ($\exists p:\ f(x) = f(x+p)$),
- spojitost,
- limity (na všech krajních bodech definičního oboru - většinou $\pm\infty$),
- nalezení derivace f' + v bodech, kde nelze a je spojitá děláme $\lim_{x \to a\pm} f'(x)$,
- nalezení intervalů monotonie a lokálních extrémů podle f',
- najít f'',
- najít intervaly konvexity, konkávity a inflexní body,
- obor hodnot.

Pro kreslení grafu znát průsečíky s osami a znát asymptoty v ∞:

$$\text{Buď } a = \lim_{x \to \inf} \frac{f(x)}{x}, \text{ a } b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax),$$

pak asymptota je přímka $ax + b$.

4.1.1 Státnicové otázky

"Spojitost a derivace $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definovat pojmy, věta o vztahu derivace a spojitosti s důkazem, derivovat funkci $\text{sgn}(x)$ v 0, věta o limitě monotónní funkce."

"Spojitost a limita funkce, chování spojité funkce na uzavřeném omezeném intervalu, obor hodnot funkce $e^x + e^{-x}$."

"Definice parciální derivace, totálního diferenciálu a lokálního extrému funkce, aplikovat řetízkové pravidlo pro výpočet parciální derivace nějaké funkce, tj. nutná podmínka existence extrému a postačující podmínky druhého řádu."

"Absolutní a neabsolutní konvergence, B-C podmínka, nutná podmínka a poté všechna kritéria konvergence a vyšetřit konvergenci asi čtyř řad."

"Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí, záměna limity a dalších věcí."

"Lagrangeova věta a k ní zadaný příklad, konvexita, vztah konvexity a derivace, monotónnost."

"Primitivní funkce, určitý integrál, základní vlastnosti, metody výpočtu, Newton-Leibnizova formule."

"Definice extrému funkce více proměnných vzhledem k množině - globální i lokální, formulace věty "nutná podmínka pro vázané extrémy", najít extrémy funkce $f(x,y) = xy$ vzhledem k jednotkové kružnici."

"Taylorův polynom, Taylorovy řady, tvar zbytku, Taylorovy řady elementárních funkcí."

4.2 Algebra

Definice *Elementární matice* je matice, vzniklá z I řádkovou úpravou.

Definice Matice A je *regulární*, pokud $f_A : T^n \to T^n$ je bijekce.

Věta (o regulárních maticích) Platí

- A regulární $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ má právě jedno řešení $\forall b$,
- A regulární $\Leftrightarrow$ A invertovatelná,
- A regulární $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}A = 0$,
- A regulární $\Leftrightarrow$ A je součin elementárních matic.

Věta (o zobrazeních) Nechť A je matice typu $m \times n$. Platí

- $\exists X : \ AX = I_m \ \Leftrightarrow \ f_A$ je na T^m,
- $\exists X : \ XA = I_n \ \Leftrightarrow \ f_A$ je prosté.

Věta (podprostory $\mathbb{R}^2$) Prostor $\mathbb{R}^2$ má právě podprostory $\{0\}, \mathbb{R}^2$ a $\{tx, x \in R\}$, kde x je libovolný vektor.

Věta (o matici přechodu) Platí, že matice $[id]_C^B$ je regulární a platí

$$[id]_B^C = \left([id]_C^B\right)^{-1}.$$

Definice *Frobeniova norma* matice je

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

4.2.1 Státnicové otázky

"Soustavy rovnic, řešitelnost, vztah řešitelnosti s hodností matice (Frobeniova věta), příklad (2 rovnice), kdy řešení existuje, neexistuje a je právě jedno."

"Eukleidovské prostory, vztahy a vzdálenosti podprostorů, kolmost, úhel, příklad: vzdálenost bodu [2,1,1] od roviny $2x + y - z = 2$ or whatever."

"Definice vlastního čísla, Jordanův kanonický tvar matice a jeho výpočet pro matici 3×3."

"Matice, její hodnost, sloupcový prostor a jádro, inverze a regularita, všemožné charakterizace regularity, poté spočíst inverz matice 3×3."

"Bilineární a kvadratická forma, zákon setrvačnosti, signatura."

"Lineární, bilineární a kvadratické formy, vztah kvadratické a bilineární formy, signatura, f-ortogonální báze, jak vypočítat f-ortogonální bázi pomocí vlastních vektorů, vztah skalárního součinu a bilineární formy."

"Skalární součin, ortogonalizační proces, metoda nejmenších čtverců, početní příklad na projekci vektoru z $\mathbb{R}^3$ na dvoudimenzionální podprostor $\mathbb{R}^3$."

"Řešení soustav rovnic - rozebrat případy pro rovnice o dvou neznámých, najít příklady na všechny situace, co mohou nastat + vztah jádra matice, obrazu matice a jejich dimenzí."

"Ortogonální diagonalizace, normální matice, spektrální věta pro normální matice, příklad diagonalizovat operátor $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$."

4.3 Stochastika

4.3.1 Státnicové otázky

"χ^2, t-rozdělení, definice, jak se dá odvodit hustota těchto rozdělení, najít interval spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozdělení s neznámým roz-

Komenty k SZZ 2020

Sesbíral jsem troje pohledy na szz, snad vám pomůžou udělat si obrázek.

První

SZZ 2.7.

PRŮBĚH:

Na prezentaci je tak 10 minut ale Pick to hodně hlídal a i upozorňoval pokud někdo přetáhl. Po prezentaci se přečtou posudky a pak je prostor k vyjádření k posudkům a diskuze, většinou se někdo z komise na něco zeptá. Pak jdou studenti ven a komise se poradí, pak se vrátí a řeknou se výsledky. Následuje krátká přestávka a po ní nastupuje první trojice. Každý z trojice dostane jednu otázku z nějakého okruhu a má 20 minut na potítko. Po 20ti minutách přijde další trojice a ti si opět vyberou otázky a začnou si je zpracovávat. Mezitím se zkouší ta první trojice. Bylo nás 5 za hodinu a dvacet minut jsme byli po. Celkově je komise hodná a snaží se z vás vydolovat co to jde :D

OTÁZKY:

Primitivní fce, určitý a neurčitý integrál. Napsla jsem definice primitivní fce a zavedl jsem Riemmanův a Newtonův integrál. Dostali jsme se i k per partes, substituci, příklad kdy neni Newtonuv integral definovaný, integrální kriterium konvergence řady a nějaká integrální věta o průměru. Skalární součin a unitární matice. Unitární diagonalizace normálních matic. Příklad na unitární diagonalizaci pro 2x2 matici. Zadefinoval jsem sk.s. i přes matici HPD, hermitovskou matici, unitární, normální, spektrální větu pro normální matice, podobnost matic a matici přechodu. Pak ještě ze mně dolovali, že u trojúhelníkovejch matic se dobře počítá determinant. Furt chtěli nějaký příklady jako co změnit abychom nedostali unitárně diagonalizovatelnou matici a tak. Součin měr, abstraktní i aplikaci na Lebesgueovu míru, Fubinka. Děs, ptali se jak se generuje ta součinova sigma algebra, k čemu je sigma konečnost ve fubince, proč takovýhle předpoklady, co jsou řezy, že se to tam nějak zúplňuje, co chceme po te fci f jen v jedné proměnné. Tahali to ze mně fest, ale stačilo to na 2-3.

Druhý

[Státnice] Zdar, když jsem se učil na státnice, tak mi nejvíc vadilo, že mám minimum informací. Proto tady máte menší report o tom, jak to probíhá. Berte to s rezervou, protože se to může lišit podle komise.

Organizace

Dopoledne probíhali obhajoby a okolo poledne ústní část. Po každé části jste vykázáni na chodbu a komise na neveřejném jednání rozhodne o známce.

Obhajoba

Podrobný popis toho, jak to probíhá, je tady: odkaz Uvedu tedy jen pár postřehů. Na referativním semináři jsme měli na prezentaci 15 minut, tady je jen 10. Já jsem se to dozvěděl 2 dny předem a dost mě to překvapilo. Na obhajobě nemusí být přítomen ani váš vedoucí, ani oponent. Pokud chybí, tak jen předseda komise přečte posudky. Pokud máte dobrý posudek od oponenta, tak můžete být v klidu a celá obhajoba je úplně v pohodě. Pokud máte posudek horší, tak se dobře připravte, protože s oponentem můžete vést celkem dlouhou diskuzi. Je fajn mít dopředu připravenou prezentaci, kde máte odpovědi na dotazy oponenta. Pak následuje veřejná diskuze, kdy se může ptát kdokoliv. Pokud dostanete nepříjemný dotaz, je úplně v pohodě říct "Nevím."

Ústní část

V komisi je 6 lidí + předseda, přičemž předseda nezkouší. Ostatní jsou rozděleni na dvojce a každá dvojce zkouší jeden okruh. Vždycky dostanete jednu otázku (např. Taylorův polynom, neptají se na celé téma, ale dostanete jednu konkrétní otázku) a máte 15 - 20 minut na přípravu. Potom vás 15 - 20 minut zkouší. Důkazy spíš nezkouší, ale můžete tam mít jeden jednodušší příklad. Potom, co skončí, tak si vytáhnete další otázku z jiného okruhu a tak dále. Já jsem si vytáhnul Taylora, kde po mě chtěli definici, nějaké příklady a využití. Ptali se taky na to, jestli Taylor konverguje k funkci, jestli je určen jednoznačně a tak. Pak jsem měl kořenová a rozkladová nadtělesa, kde jsem teda moc netušil. Měl jsem tam jeden příklad a ptali se mě na konstrukci tohoto tělesa. Jako poslední jsem měl lokální Cauchyovu větu a vzorec. Chtěli taky větu o jednoznačnosti a vyjádření mocninnou řadou. Protože jsem to celkem uměl, tak se mě začali ptát i na důkazy, ale stačili jim jen základní myšlenky. Třeba u Cauchyovy věty pro hvězdovitou množinu jim stačilo říct, jakým způsobem si zadefinuju funkci F a že o ní pomocí CV pro trojúhelník ukážu, že je primitivní.

Buďte v klidu, jsou hodní a opravdu se vám snaží pomoct. Hodně štěstí.

Třetí

Otázky:

Algebra: Báze, dimenze, jejich vlastnosti, Steinitzova věta o výměně. Zadefinoval jsem k tomu i nezávislou a generující množinu, ptali se pak na věci jako jak najít bázi prostoru (odpověď je výběrem z nějaké generující množiny) nebo proč má každá báze stejně prvků (ze Steinitzovy věty). Součástí otázky bylo rozhodnout o nezávislosti 1,cos,sin v prostoru spojitých funkcí (je nezávislá). Analýza: Stejnoměrná konvergence řad a funkcí, vlastnosti, metody výpočtu a aplikace. Napsal jsem definice, nějaké základní věty (bodová implikuje stejnoměrnou atd.) a pak nějaká kritéria, v aplikacích jsem mluvil o prohazování limit a integrálů/derivací. Ptali se mě na různé posloupnosti funkcí, které konvergují bodově ale ne stejnoměrně, které konvergují stejnoměrně a nesplňují Weierstrassovo kriterium atd. Modelování, Numerika: Sdružené gradienty (zadávala Hnětynková). V podstatě to, co jsme dělali na analýze maticových výpočtů, nechtěla žádné konkrétní vzorečky na výpočet x_k a takových věcí, stačila idea konstrukce přibližných řešení, co je jak kolmé na co, intuitivně konvergence, ptala se i na Lanczosovu metodu, ale nijak do hloubky. Na žádné složitější odvozování není čas, stíhají se pouze základní myšlenky.

Celkově se neptali na celé důkazy, to by se ani nedalo stihnout. Hodí se ale vědět myšlenky důkazů, jako např. Steinitzova věta se dokáže indukcí, a celkově co plyne z čeho, ale na žádné detaily není čas.