МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«МИРЭА – Российский технологический университет»

РТУ МИРЭА

Институт кибернетики

Кафедра высшей математики

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Автоматы и алгоритмы»

Тема курсовой работы:

«Вычисление количества слов определенной длины, переводящих конечный автомат из одного заданного состояния в другое»

Студент группы КМБО-01-18 *Валяев Н.А.*

Руководитель курсовой работы *Сенявин М.М.*

Работа представлена к защите «__»_______201___ г. *(подпись студента)*

«Допущен к защите» «__»_______201___ г. *(подпись руководителя)*

МОСКВА — 2020

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«МИРЭА – Российский технологический университет»

РТУ МИРЭА

Институт кибернетики

Кафедра высшей математики

Утверждаю
Заведующий
кафедрой_____________*Ю.И.Худак*

«____» __________2020г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение курсовой работы
по дисциплине «Автоматы и алгоритмы»

Студент Валяев *Н.А.* Группа *КМБО-04-18*

1. **Тема: «Вычисление количества слов определенной длины, переводящих конечный автомат из одного заданного состояния в другое»**

2. **Перечень заданий:**
В условии задана таблица переходов автомата, для которого нужно найти количество слов, заданной длины n, в алфавите {a, b, c, d} переводящих данный автомат из состояния 0 в состояние 2. Выписать все слова длины 3, проверить соответствие количества формуле.

3. **Срок представления к защите курсовой работы:** до « » ___________ 2020 г.

Задание на курсовую работу выдал	«___»______2020г.	_________________	*(_____________)*
Задание на курсовую работу получил	«___»______2020г.	_________________	*(_____________)*

Содержание

1 Теоретическая часть **2**

2 Постановка задачи **3**

3 Основной способ нахождения **4**

4 Решение перебором **7**

5 Заключение **8**

6 Список Литературы **9**

1 Теоретическая часть

1. Источник и грамматика

Пусть задан некоторый алфавит A. Также задан ориентированный граф G, некоторым ребрам которого приписаны буквы данного алфавита. Выделено множество начальных и конечных вершин. Такая конструкция называется источником. Источник порождает язык, состоящий из слов, порождаемых путями из начальных вершин в конечные. Всякий язык, задаваемый грамматикой, порождается некоторым источником, и всякий язык, порождаемый источником, задается некоторой грамматикой.

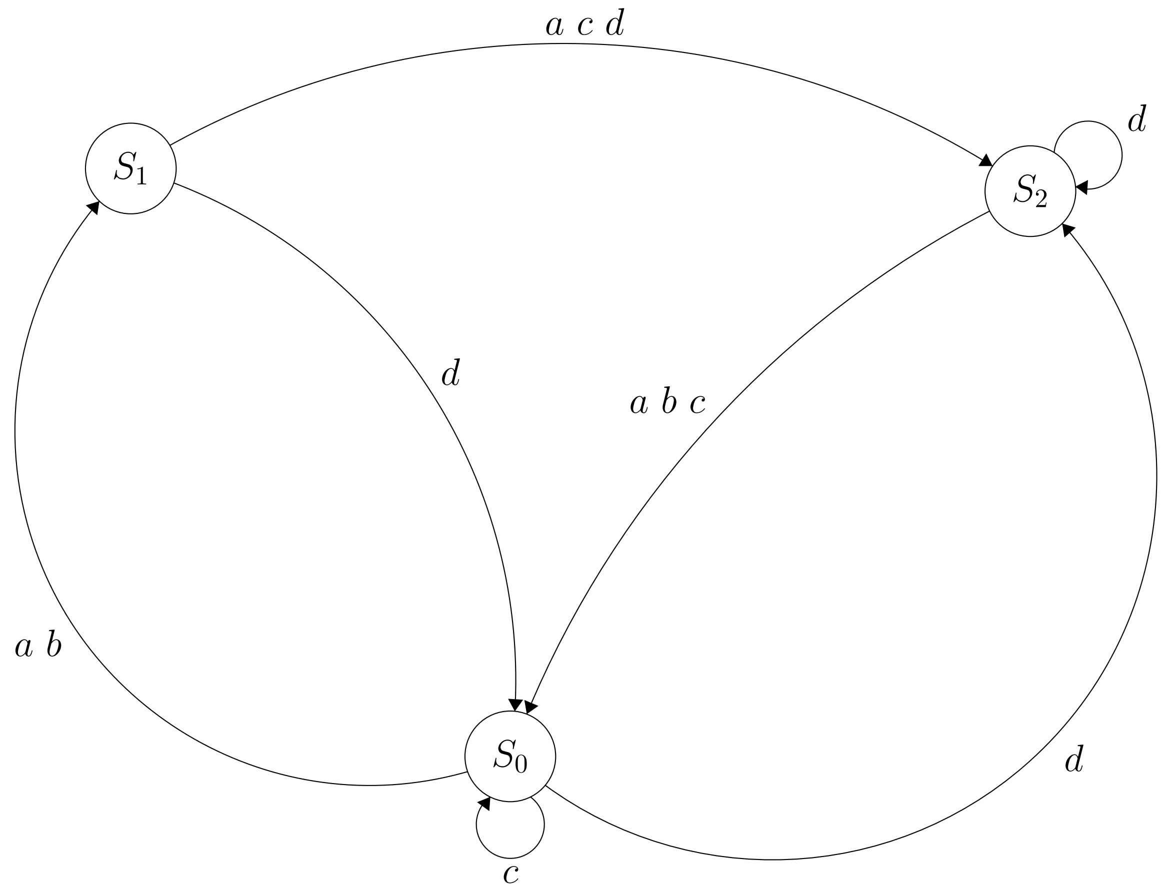
2. Конечные автоматы

Конечный автомат – U = A, Q, V, g, f, где
A – входной алфавит,
V – выходной алфавит,
Q – алфавит состояний,
g: Q×A → Q (функция переходов),
f: Q×A → V (функция выходов).
Обычно конечные автоматы представляют в виде ориентированного графа, где точки – это определенные состояния, а стрелки — направления переходов.

2 Постановка задачи

Требуется найти число слов длины n в алфавите a, b, c, d, которые переводят данный в условии автомат из состояния 0 в состояние 2 (дана таблица переходов автомата). Выписать все слова длины $n = 3$ проверить соответствие количества полученных слов результату,полученному в формуле.

	0	1	2
a	1	2	0
b	1	0	0
c	0	2	0
d	2	2	2



3 Основной способ нахождения

Составим граматику по данным условиям:
S_0, S_1, S_2 - состояния

$S_0 \to aS_1 \mid bS_1 \mid cS_0 \mid dS_2 \mid d$

$S_1 \to aS_2 \mid bS_0 \mid cS_2 \mid dS_2 \mid a \mid c \mid d$

$S_2 \to aS_0 \mid bS_0 \mid cS_0 \mid dS_2 \mid d$

Опишем языки:
L_0, L_1, L_2 - языки

$L_0 = aL_1 \cup bL_1 \cup cL_0 \cup dL_2 \cup d$

$L_1 = aL_2 \cup bL_0 \cup cL_2 \cup dL_2 \cup a \cup c \cup d$

$L_2 = aL_0 \cup bL_0 \cup cL_0 \cup dL_2 \cup d$

Применим производящую функцию:
$L_i(z) = h(a_{j_1})L_{K_1}(z) + h(a_{j_2})L_{k_2}(z) + \cdots + h(a_{j_l})L_{k_l}(z) + h(a_{m_1}) + \cdots + h(a_{m_r})$

Здесь $h(w)$-одночлен, который ставится в соответствие слову w из языка L

В итоге имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} L_0 = zL_1 + zL_1 + zL_0 + zL_2 + z \\ L_1 = zL_2 + zL_0 + zL_0 + zL_2 + z + z + z \\ L_2 = zL_0 + zL_0 + zL_0 + zL_2 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_0 = 2zL_1 + zL_0 + zL_2 + z \\ L_1 = 3zL_2 + zL_0 + 3z \\ L_2 = 3zL_0 + zL_2 + z \end{cases} \quad (1)$$

Выразим L_0 из системы:
$L_2 = \frac{3z}{1-z}L_0 + \frac{z}{1-z} \quad (2)$

$L_1 = \frac{8z^2+z}{1-z}L_0 + \frac{3z}{1-z} \quad (3)$

Подставим (2) и (3) в (1.1): $L_0 = -\frac{6z^2+z}{16z^3+4z^2+2z-1} = \frac{6z^2+z}{4(1-4x)(z-\frac{\sqrt{3}i-1}{4})(z-\frac{-1-\sqrt{3}i}{4})}$

$$L_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{A}{1-4z} + \frac{B}{z-\frac{\sqrt{3}i-1}{4}} + \frac{C}{z-\frac{-1-\sqrt{3}i}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{A}{1-4z} + \frac{B}{z-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}} + \frac{C}{z-\frac{1}{2}e^{\frac{-2\pi i}{3}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{A}{1-4z} + \frac{2Be^{\frac{-2\pi i}{3}}}{1-2ze^{\frac{-2\pi i}{3}}} + \frac{2Ce^{\frac{2\pi i}{3}}}{1-2ze^{\frac{2\pi i}{3}}}\right)$$

Метод нелпределенных коэффициентов:

$$A\left(1-2ze^{\frac{-2\pi i}{3}}\right)\left(1-2ze^{\frac{2\pi i}{3}}\right)+2Be^{\frac{-2\pi i}{3}}(1-4z)\left(1-2ze^{\frac{2\pi i}{3}}\right)+$$
$$+2Ce^{\frac{2\pi i}{3}}(1-4z)\left(1-2ze^{\frac{-2\pi i}{3}}\right) \;=\; 6z^2+z$$

$$A\left(1-2ze^{\frac{2\pi i}{3}}-2ze^{\frac{-2\pi i}{3}}+4z^2\right)+2Be^{\frac{-2\pi i}{3}}\left(1-2ze^{\frac{2\pi i}{3}}-4z+8z^2e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)+$$
$$+2Ce^{\frac{2\pi i}{3}}(1-2ze^{\frac{-2\pi i}{3}}-4z+8z^2e^{\frac{-2\pi i}{3}}) \;=\; 6z^2+z$$

$$A\left(1-2ze^{\frac{2\pi i}{3}}-2ze^{\frac{-2\pi i}{3}}+4z^2\right)+2B\left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}-2z-4ze^{\frac{-2\pi i}{3}}+8z^2\right)+$$
$$+2C(e^{\frac{2\pi i}{3}}-2z-4ze^{\frac{2\pi i}{3}}+8z^2) \;=\; 6z^2+z$$

Соберем все коэффиценты вместе

при z^2 : $4A+16B+16C=6 \;\Rightarrow\; 2A+8B+8C=3$

при z : $-2A(e^{\frac{2\pi i}{3}}e^{\frac{-2\pi i}{3}})+2B(-2-4e^{\frac{-2\pi i}{3}})+2C(-2-4e^{\frac{2\pi i}{3}})=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow -4A\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)-4B-8B\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)-4C-8C\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)=$$
$$=1\Rightarrow -4A\left(-\tfrac{1}{2}\right)-4B-8B\left(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-4C-8C\left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A+4Bi\sqrt{3}-4Ci\sqrt{3}=1$$

При const: $A+2B\left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right)+2C\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)=0\Rightarrow A+2B\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2C\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$
$=0\Rightarrow A-B(1+i\sqrt{3})+C(-1+i\sqrt{3})=0$

Метод Крамера:

$$\Delta=\begin{pmatrix}2 & 8 & 8\\ 2 & 4i\sqrt{3} & -4i\sqrt{3}\\ 1 & -1-i\sqrt{3} & -1+i\sqrt{3}\end{pmatrix}=-112i\sqrt{3}$$
$$\Delta_A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 8\\ 1 & 4i\sqrt{3} & -4i\sqrt{3}\\ 0 & -1-i\sqrt{3} & -1+i\sqrt{3}\end{pmatrix}=-40i\sqrt{3}\Rightarrow A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=\frac{5}{14}$$
$$\Delta_B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 8\\ 2 & 1 & -4i\sqrt{3}\\ 1 & 0 & -1+i\sqrt{3}\end{pmatrix}=4(-1-4i\sqrt{3})\Rightarrow B=\frac{1+4i\sqrt{3}}{28i\sqrt{3}}$$
$$\Delta_C=\begin{pmatrix}2 & 8 & 3\\ 2 & 4i\sqrt{3} & 1\\ 1 & -1-i\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}=4(1-4i\sqrt{3})\Rightarrow C=\frac{-1+4i\sqrt{3}}{28i\sqrt{3}}$$

$A=\frac{5}{14};\;\; B=\frac{1+4i\sqrt{3}}{28i\sqrt{3}};\;\; C=\frac{-1+4i\sqrt{3}}{28i\sqrt{3}}$

Представим L_0 в виде:
$L_0 = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{1-\alpha^{-1}z} + \frac{B}{1-\beta^{-1}z} + \frac{C}{1-\gamma^{-1}z}$

$\sum_{k=0}^{\infty}(A(\alpha^{-1})^k) + (B(\beta^{-1})^k) + (C(\gamma^{-1})^k)z^k$,где $\alpha, \beta, \gamma-$ корни $Q(z)$

Данный ряд следует из следующего разложения Тейлора:

$\frac{1}{1-kz} = 1 + kz + k^2z^2 + \cdots + k^nz^n = \sum_{n=0}^{\infty} k^nz^n$

Получаем ряд:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}(\frac{5}{14}4^n + \frac{4(1+4i\sqrt{3})4^n}{28i\sqrt{3}(\sqrt{3}i-1)^n(1-\sqrt{3}i)} + \frac{4(4i\sqrt{3}-1)4^n}{28i\sqrt{3}(\sqrt{3}i-1)^n(1+\sqrt{3}i)})z^n} \quad (*)$$

Основной ответ: Формула (*)-позволяет искать кол-во слов длинны n, переводящие данный автомат из состояния 0 в состояние 2.
Это коэффицент при z^n

При $n = 3$:
$\frac{1}{4}\left(\frac{5*64}{14} - \frac{4*64(1+4i\sqrt{3})}{28i\sqrt{3}(\sqrt{3}i-1)^4} - \frac{4*64(-1+4i\sqrt{3})}{28i\sqrt{3}(\sqrt{3}i+1)^4}\right) = 20$

Таким образом данное решение показывает, что существует 20 слов, переводящих автомат из условия из состояния 0 в состояние 2.
Проверим решение перебором

4 Решение перебором

Путем перебора были найдены следующие слова длины 3, переводящие данный в условии конечный автомат из состояния 0 в состояние 2:

cad, cbd, cac, cbc, caa, cba, add, acd, aad, bdd, bcd, bad, ccd, add, bdd, ddd, cdd, dad, dbd, dcd

Всего здесь 20 слов $\Rightarrow$ Выведенная формула

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}(\frac{5}{14}4^n+\frac{4(1+4i\sqrt{3})4^n}{28i\sqrt{3}(\sqrt{3}i-1)^n(1-\sqrt{3}i)}+\frac{4(4i\sqrt{3}-1)4^n}{28i\sqrt{3}(\sqrt{3}i-1)^n(1+\sqrt{3}i)})z^n}$$

позволяет ВЕРНО вычислить сколько существует слов переводящих автомат из условия из состояния 0 в состояние 2.

5 Заключение

Таким образом, в ходе данной работы были представлены два способа нахождения количества слов длины n, переводящих данный в условии автомат из состояния 0 в состояние 2. Первый способ заключался в составлении производящей функции языка, заданного грамматикой из условия задачи. Была составлена производящая функция и система уравнений, из которой была получена формула для нахождения слов длины n. С помощью этой формулы было найдено число слов длины 3. Второй способ заключался в полном переборе слов длины 3, переводящих автомат из состояния 0 в состояние 2. Число этих слов совпало с числом слов, найденным по формуле.

6 Список Литературы

1. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика. — М.: МГТУ, 2006.

2. Джон Хопкрофт, Раджив Мотвани, Джеффри Ульман. Дискретная математика. — 2-е изд. — Вильямс, 2002. (Алгоритмы и методы. Искусство программирования).

3. Серебряков В. А., Галочкин М. П., Гончар Д. Р., Фуругян М. Теория и реализация языков программирования — М., МЗ-Пресс, 2006 г., 2-е изд.

4. Теория автоматов / Э. А. Якубайтис, В. О. Васюкевич, А. Ю. Гобземис, Н. Е. Зазнова, А. А. Курмит, А. А. Лоренц, А. Ф. Петренко, В. П. Чапенко // Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. — М.: ВИНИТИ, 1976.