Predslov

,,Prosím Vás, čo to vysielajú? Už chvíľu počúvam, a vôbec ničomu nerozumiem.“
,,Ale, pán profesor, to je predsa polhodinka pre deti.“

Tieto skriptá, obsahujúce príklady k neurčitému a určitému (Riemannovmu) integrálu, číselným radom a postupnostiam a radom funkcií jednej premennej, sú zostavené podľa rovnakých zásad ako CVIČENIA Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I, na ktoré nadväzujú. Na jednotlivé príklady sa budeme odvolávať ich číslom, pri odvolávaní sa na príklad z CVIČENÍ Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I bude pred jeho číslom číslica I; teda pr. 41.3 označuje tretiu úlohu príkladu 41 v týchto skriptách, pr. I.41.3 tretiu úlohu príkladu 41 z CVIČENÍ Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I.

Našu predstavu o používaní takejto zbierky úloh sme vyložili v predslove k CVIČENIAM Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I; zostala nezmenená a dopĺňame ju len dvoma zásadami, jednou na utíšenie hnevu zúriacich, druhou na ochladenie nadšenia jasajúcich:

1. Ak Vám vyšiel iný výsledok, než je uvedený vzadu, neznamená to, že ten Váš je nesprávny.
2. Ak Vám vyšiel rovnaký výsledok ako je uvedený vzadu, neznamená to, že ten Váš je správny.

Chceme tým povedať, že za kritérium správnosti výsledku nepovažujeme jeho zhodu s výsledkom uvedeným v poslednej časti skrípt (kam sa iste dostali rôzne chyby a nepresnosti), ale jeho overenie či už ,,skúškou správnosti“ (ak sa pri výpočte postupovalo ,,hlava nehlava“) alebo zdôvodnením korektnosti jednotlivých krokov riešenia.

Ďakujeme všetkým, ktorí prispeli k dotvoreniu rukopisu týchto skrípt: recenzentom doc. RNDr. Igorovi Bockovi, CSc. a doc. RNDr. Jozefovi Venckovi, CSc., ďalej RNDr. Ivete Kundracikovej a Ing. Jiřímu Kubáčkovi, CSc. Za pomoc pri príprave predlôh pre tlač sme zaviazaní RNDr. Jane Chlebíkovej.

A napokon jedno skromné želanie: Na Demidovičovu zbierku úloh reagovala kedysi istá študentka precíteným výkrikom: ,,Dvoch matematikov by som zavraždila: Lagrangea a Demidoviča!“ Kiež by sa tieto skriptá dočkali aspoň takej odozvy.

Obsah

Literatúra

[1] Barnovská, M., Smítalová, K.: Matematická analýza III. Skriptum. Bratislava, UK 1989.

[2] Beckenbach, E., Bellman, R.: Neravenstva. Moskva. Mir 1965.

[3] Berman, G. N.: Zbierka úloh z matematickej analýzy. Bratislava, SVTL 1957.

[4] Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z.: Matematická analýza I. Praha, SNTL 1985.

[5] Butuzov, V. F., Krutickaja, N. Č., Medvedev, G. N., Šiškin, A. A.: Matematičeskij analiz v voprosach i zadačach. Moskva. Vysšaja škola 1984.

[6] Černý, I.: Analýza v komplexním oboru. Praha, Academia 1983.

[7] Čerych, J., Aksamit, P., John, O., Stará, J.: Příklady z matematické analýzy V. Skriptum. Praha, SPN 1987.

[8] Davydov, N. A., Korovkin, P. P., Nikoľskij, V. N.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Moskva. Prosveščenije 1973.

[9] Demidovič, B. P.: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu. Moskva, Nauka 1977.

[10] Fichtengoľc, G. M.: Kurs differenciaľnogo i integraľnogo isčislenija. Tom II. Moskva, Nauka 1970.

[11] Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H.: Kontrprimery v analize. Moskva, Mir 1967.

[12] Grebenča, M. K., Novoselov, S. I.: Učebnice matematické analysy I. Praha, NČSAV 1955.

[13] Jarník, V.: Diferenciální počet (II). Praha, Academia 1976.

[14] Jarník, V.: Integrální počet (I). Praha, Academia 1974.

[15] Kudrjavcev, L. D., Kutasov, A. D., Čechlov, V. I., Šabunin, M. I.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Predel. Nepreryvnosť. Differencirujemosť. Moskva, Nauka 1984.

[16] Kudrjavcev, L. D., Kutasov, A. D., Čechlov, V. I., Šabunin, M. I.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Integraly. Rjady. Moskva, Nauka 1986.

[17] Lefort, G.: Algèbre et analyse. Exercices. Paris, Dunod 1964.

[18] Lehning, H.: Intégration et sommation avec exercices. Paris, Masson 1985.

[19] Ljaško, I. I., Bojarčuk, A. K., Gaj, Ja. G., Golovač, G. P.: Spravočnoje posobije po matematičeskomu analizu. Časť pervaja. Kijev. Višča škola 1978.

[20] Ljaško, I. I., Bojarčuk, A. K., Gaj, Ja. G., Golovač, G. P.: Spravočnoje posobije po matematičeskomu analizu. Rjady, funkciji vektornogo argumenta, kratnyje i krivolinejnyhe integraly. Kijev. Višča škola 1986.

[21] Maron, I. A.: Differenciaľnoje i integraľnoje isčislenije v primerach i zadačach. Moskva, Nauka 1970.

[22] Netuka, I., Veselý, J.: Příklady z matematické analýzy III. Cvičení pro 1. ročník. Skriptum. Praha, SPN 1986.

[23] Neubrunn, T., Vencko, J.: Matematická analýza I. Skriptum. Bratislava, UK 1989.

[24] Neubrunn, T., Vencko, J.: Matematická analýza II. Skriptum. Bratislava, UK 1989.

[25] Rivkind, J. I.: Differencial̆noje i integral̆noje isčislenije v zadačach. Minsk, Vyšejšaja škola 1971.

[26] Sadovničij, V. A., Grigorjan, A. A., Konjagin, S. V.: Zadači studenčeskich matematičeskich olimpiad. Moskva, Izdatel̆stvo Moskovskogo universiteta 1987.

[27] Vilenkin, N. Ja.:

[28] Vilenkin, N. Ja., Bochan, K. A., Maron, I. A., Matvjejev, I. V., Smoljanskij, M. L., Cvetkov, A. T.: Zadačnik po kursu matematičeskogo analiza. Moskva. Prosveščenije 1971.

[29] Vinogradova, I. A., Olechnik, S. N., Sadovničij, V. A.: Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu. Moskva, Izdatel̆stvo Moskovskogo universiteta 1988.

[30] Virčenko, N. A., Ljaško, I. I., Švecov, K. I.: Grafiki funkcij. Spravočnik. Kijev, Naukova dumka 1979.

[31] Zorič, V. A.: Matematičeskij analiz. Čast̆ I. Moskva, Nauka 1981.

$$\boxed{2\vartheta}\boxed{\varphi}\boxed{\varphi}\boxed{\varphi}\boxed{\varphi}\boxed{\vartheta-\varphi}$$

$$\boxed{2\vartheta}\boxed{\varphi}\boxed{\varphi}\boxed{\varphi}\boxed{\varphi}\boxed{\vartheta-\varphi}$$

Chapter 1

Neurčitý integrál

1. Neurčitý integrál

1.1 Definícia primitívnej funkcie a neurčitého integrálu. Základné metódy integrovania

1.1.1 Definícia primitívnej funkcie a neurčitého integrálu. Metóda rozkladu

Nech je daná funkcia f definovaná na otvorenej množine $G \subset \mathbf{R}$. Diferencovateľná funkcia $F : G \to \mathbf{R}$ sa nazýva *primitívna funkcia k funkcii f*, ak pre každé $x \in G$ platí $F'(x) = f(x)$.

Spravidla sa pojem primitívnej funkcie zavádza aj pre niektoré funkcie, ktorých definičným oborom nie je otvorená množina: diferencovateľná funkcia $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ sa nazýva primitívna funkcia k funkcii $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, ak pre každé $x \in [a, b]$ platí $F'(x) = f(x)$, pričom $F'(a)$, $F'(b)$ sú hodnoty príslušných jednostranných derivácií funkcie F. Analogicky možno zaviesť pojem primitívnej funkcie v prípade funkcií s definičnými obormi typu $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$ a pod.

Ak funkcia $F : M \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii $g : M \to \mathbf{R}$ a $g = f|M$, hovoríme, že *funkcia F je primitívna k funkcii f na množine M*.

Množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f sa nazýva *neurčitý integrál funkcie f* a označuje sa $\displaystyle\int f(x)\,dx$ (tento symbol sa však niekedy používa aj na označenie primitívnej funkcie k funkcii f; výraz $f(x)$ v symbole $\int f(x)\,dx$ sa nazýva *integrand*).

Veta 1. *Nech I je interval, nech funkcia $F : I \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii $f : I \to \mathbf{R}$. Potom funkcia $G : I \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii f práve vtedy, keď existuje konštanta $C \in \mathbf{R}$ taká, že*

$$G(x) = F(x) + C, \qquad x \in I\,.$$

Ak sú teda splnené predpoklady vety 1, tak

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\,;\, C \in \mathbf{R}\}\,.$$

Je zvykom písať túto rovnosť bez množinových zátvoriek, tj. v podobe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Veta 1'. *Nech funkcia f je definovaná na zjednotení intervalov I a J, pričom $I \cup J$ nie je interval. Potom platí:*

a) *Funkcia $F : I \cup J \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii f práve vtedy, keď funkcia $F|I$, resp. $F|J$ je primitívna k funkcii $f|I$, resp. $f|J$.*

b) *Funkcia $G : I \cup J \to \mathbf{R}$ je primitívna k funkcii f práve vtedy, keď existujú konštanty $c, d \in \mathbf{R}$ tak, že*

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + c\,, & ak \quad x \in I \\ F(x) + d\,, & ak \quad x \in J \end{cases} . \tag{1.1}$$

Poznámky. 1. Ak zavedieme symbol C nasledovne

$$C = C(x) = \begin{cases} c\,, & \text{ak} \quad x \in I \\ d\,, & \text{ak} \quad x \in J \end{cases} ,$$

môžeme rovnosť (1.1) písať v tvare

$$G(x) = F(x) + C$$

a tvrdenie b) vety 1' má potom podobu

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

2. Tvrdenia analogické vete 1' možno vysloviť aj pre funkciu f definovanú na konečnom, prípadne spočítateľnom zjednotení intervalov. Ak v takom prípade použijeme zápis $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, treba si uvedomiť, že C označuje diferencovateľnú funkciu, ktorá je konštantná na každom intervale $I \subset D(f)$ a ktorej definičným oborom je množina $D(f)$.

3. Pretože primitívnu funkciu k funkcii f možno nájsť tak, že nájdeme primitívne funkcie k zúženiu funkcie f na jednotlivé intervaly jej definičného oboru, sú nasledujúce vety formulované len pre prípad funkcií definovaných na intervaloch.

Veta 2. *Nech f je spojitá funkcia definovaná na intervale I. Potom existuje primitívna funkcia k funkcii f.*

O platnosti nasledujúcich vzťahov (nazývame ich <u>*tabuľkové integrály*</u>) sa možno presvedčiť derivovaním:

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)\,;$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$ [1] $\displaystyle= \ln|x| + C\,;$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C\,;$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C\,;$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C\,;$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C\,;$

7. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1),$ špeciálne

8. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C\,;$

9. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C\,;$

10. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C\,;$

11. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C\,;$

12. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C\,;$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C\,;$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C\,;$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\,;$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C\,.$

Poznámky. 1. Definičné obory funkcií $x^{-p/q}$ pre $p, q \in \mathbf{N}$ nesúdeliteľné a q nepárne a funkcií $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ nie sú intervalmi, na symbol C vo vzorcoch 1, 2, 4, 6, 13, 14 a 15 sa teda vzťahujú poznámky za vetou 1'.

[1]namiesto $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\,dx$, resp. $\displaystyle\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx$ budeme spravidla písať $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$, resp. $\displaystyle\int \frac{g(x)\,dx}{f(x)}$

2. Podľa definície musí mať primitívna funkcia k funkcii f rovnaký definičný obor ako funkcia f; z tohto hľadiska sú zápisy 1 (pre $\alpha \in (-1,0)$), 5 a 6 (pre prípad znamienka $-$) trocha nepresné. Napr. primitívnou funkciou k funkcii $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ nie je vlastne funkcia $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, ale funkcia $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, $x \neq 0$. Treba si teda zapamätať, že v zápise $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ automaticky predpokladáme, že definičným oborom funkcie F je množina $D(f)$.

Veta 3. *Nech funkcie $f_1, \dots, f_n$ sú definované na intervale I; nech F_i je primitívna funkcia k funkcii f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, nech $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$. Potom funkcia $c_1F_1 + c_2F_2 + \cdots + c_nF_n$ je primitívna k funkcii $c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n$, a teda*

$$\int (c_1f_1(x) + \cdots + c_nf_n(x))\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + \cdots + c_n \int f_n(x)\,dx\ ^2.$$

Na použití vety 3 sa zakladá <u>*integrovanie rozkladom*</u>: ak vieme danú funkciu f napísať v tvare lineárnej kombinácie funkcií, ktorých primitívne funkcie poznáme, tak vieme podľa vety 3 nájsť aj $\int f(x)\,dx$.

1. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\int (1-x)(1-4x)\,dx$;
2. $\int (3-x^2)^3 dx$;
3. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx$;
4. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$;
5. $\int 3.4 \cdot x^{-0.17} dx$;
6. $\int (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx$;
7. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$;
8. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;
9. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$;
10. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx$;
11. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;
12. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x}\,dx$;
13. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx$;
14. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$;
15. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$;
16. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$;
17. $\int \mathrm{th}^2 x\,dx$.

2. 1. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int |x|\,dx$;

b) $\int f(x)\,dx$, kde $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \le 2 \\ 2, & \text{ak } x > 2 \end{cases}$;

c) $\int (|1+x| - |1-x|)\,dx$;

d) $\int \max\{1, x^2\}\,dx$.

[2]Výraz na pravej strane tejto rovnosti má tvar $c_1A_1 + \cdots + c_nA_n$, kde $A_1, \dots, A_n$ sú podmnožiny množiny $C(I)$ všetkých spojitých funkcií definovaných na intervale I. Pripomeňme si, že pre $A, B \subset C(I)$, $f \in C(I)$, $c \in \mathbf{R}$ sú symboly $A + B$, $f + A$, $c \cdot A$ definované takto:

$$A + B = \{f + g;\ f \in A,\ g \in B\}$$

$$f + A = \{f + g;\ g \in A\}$$

$$c \cdot A = \{c \cdot f;\ f \in A\}$$

2. Nájdite všetky funkcie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, pre ktoré platí

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1, & \text{ak } x\in(0,1]\\ x, & \text{ak } x>1\end{cases}.$$

Riešenie: 1b) Funkcia f je spojitá a jej definičný obor – množina $\mathbf{R}$ – je interval, preto podľa vety 2 existuje primitívna funkcia F k funkcii f. Hľadaná funkcia F vyhovuje pre $x\in(-\infty,2]$ podmienke $F'(x)=x$, preto

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+C \quad \text{pre} \quad x\in(-\infty,2].$$

Z rovnosti $F'(x)=2$, ktorá má platiť pre $x\in(2,\infty)$, vyplýva

$$F(x)=2x+K \quad \text{pre} \quad x\in(2,\infty).$$

Primitívna funkcia F k funkcii f musí byť spojitá v každom bode $x\in\mathbf{R}$ (F má totiž deriváciu v každom bode $x\in\mathbf{R}$), teda aj v bode 2; preto musí platiť

$$\lim_{x\to 2-}F(x)=\lim_{x\to 2+}F(x),$$

tj.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2}{2}+C=\lim_{x\to 2+}2x+K,$$

odtiaľ dostávame podmienku

$$C=2+K.$$

Derivovaním sa možno presvedčiť, že takto nájdená funkcia

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+2+K\,, & \text{ak } x\le 2\\ 2x+K\,, & \text{ak } x>2\end{cases}$$

je primitívna k funkcii f.

Preto (podľa vety 1)

$$\int f(x)\,dx=F_1(x)+K,$$

kde

$$F_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+2, & \text{ak } x\le 2\\ 2x\qquad, & \text{ak } x>2\end{cases}.$$

3. Uveďte príklad nespojitej funkcie $f:(-1,1)\to\mathbf{R}$, ku ktorej existuje primitívna funkcia.

4. Nech funkcia F je primitívna k funkcii f definovanej na ohraničenom intervale (a,b). Rozhodnite o platnosti nasledujúcich implikácií:

1. ak f je ohraničená, tak aj F je ohraničená;
2. ak F je ohraničená, tak f je ohraničená.

Svoje tvrdenia dokážte.

1.1.2 Metóda substitúcie

Veta 4. *Nech I, J sú intervaly, nech F je primitívna funkcia k funkcii $f:I\to\mathbf{R}$; nech $\varphi:J\to\mathbf{R}$ je diferencovateľná funkcia a $\varphi(J)\subset I$. Potom funkcia $F(\varphi(x))$ je primitívna k funkcii $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$.*

(Tj.: ak

$$\int f(t)\,dt=F(t)+C\,,$$

tak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C\,.\ )$$

Ak teda hľadáme $\int g(x)\,dx$ a funkciu g sa nám podarí zapísať v tvare $g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, pričom vieme nájsť $\int f(t)\,dt$, tak podľa vety 4 vieme nájsť aj $\int g(x)\,dx$. Prechod od hľadania $\int g(x)\,dx$ k výpočtu $\int f(t)\,dt$ budeme zapisovať nasledovne

$$\int g(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \left|\begin{array}{c}\varphi(x) = t\\ \varphi'(x)dx = dt\end{array}\right| = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C\,.$$

Ak funkcia φ je naviac prostá, vyplýva z vety 4 toto tvrdenie:

Veta 5. *Nech I, J sú intervaly, nech* $f: I \to \mathbf{R}$ *je spojitá a* $\varphi: J \to \mathbf{R}$ *prostá*[3] *diferencovateľná funkcia, pričom* $\varphi(J) = I$. *Ak funkcia F(t) je primitívna k funkcii* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, *tak funkcia* $F(\varphi^{-1}(x))$ *je primitívna k funkcii f(x).*

(Tj.: ak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(t) + C\,,$$

tak

$$\int f(x)\,dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C\ ).$$

Použitie vety 5 pri hľadaní $\int f(x)\,dx$ budeme zapisovať nasledovne:

$$\int f(x)\,dx = \left|\begin{array}{c}x = \varphi(t)\\ dx = \varphi'(t)dt\end{array}\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C\,.$$

Poznámka. Podstatou obidvoch uvedených viet o substitúcii je ,,rovnosť“

$$\int f(u)\,du = \int f(\varphi(v))\varphi'(v)\,dv\ ^4,$$

ktorú ,,čítame“ v prípade vety 4 ,,sprava doľava“ (tj. hľadanie integrálu na pravej strane prevádzame na výpočet integrálu vľavo) a v prípade vety 5 naopak ,,zľava doprava“.

Pre $\varphi(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ z vety 4 vyplýva:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot a dx = \left|\begin{array}{r}ax+b = t\\ adx = dt\end{array}\right| = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\,.$$

5. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a}$;
2. $\displaystyle\int (2x-3)^{10}dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2}$;

[3]namiesto existencie inverznej funkcie φ^{-1} stačí dokonca predpokladať len existenciu pravej inverznej funkcie $\overline{\varphi}: J \to I$ (pre funkciu $\overline{\varphi}$ teda platí $\varphi(\overline{\varphi}(x)) = x$, $x \in J$), pozri [14, kapitola III, §4, veta 53]

[4]použitím diferenciálu funkcie φ sa tento zápis stane ešte názornejším:

$$\int f(u)\,du = \int f(\varphi(v))\,d(\varphi(v))$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+2}$;

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x+1}$;

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$;

10. $\displaystyle\int (e^{-x}+e^{-2x})\,dx$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\pi/4)}$;

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$;

13. $\displaystyle\int \mathrm{cth}^2\frac{x}{3}\,dx$;

14. $\displaystyle\int x\,(1-x)^{10}dx$;

15. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$.

Riešenie. 7.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3x^2-2x+1} &= \int \frac{dx}{3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right]} = \\
&= \int \frac{dx}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}} = \left| \begin{array}{c} x-\frac{1}{3}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{3t^2+\frac{2}{3}} = \int \frac{dt}{\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}t^2+1\right)} = \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)^2+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}\,dt}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)^2+1} = \left| \begin{array}{c} \frac{3}{\sqrt{2}}t=z \\ \frac{3}{\sqrt{2}}\,dt=dz \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,z+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\,t\right)+C = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)+C.
\end{aligned}$$

14. Výpočet sa zjednoduší použitím substitúcie $1-x=t$:

$$\begin{aligned}
\int x\,(1-x)^{10}dx &= -\int x\,(1-x)^{10}\cdot(-1)\,dx = \left| \begin{array}{c} 1-x=t \\ -dx=dt \end{array} \right| = -\int (1-t)\cdot t^{10}dt = \\
&= \int (t^{11}-t^{10})\,dt = \frac{t^{12}}{12}-\frac{t^{11}}{11}+C = \frac{(1-x)^{12}}{12}-\frac{(1-x)^{11}}{11}+C.
\end{aligned}$$

Uvedeným spôsobom možno (pre $a>0$) odvodiť tieto vzorce:

3'. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$;

4'. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$;

5'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$;

6'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

6. Použitím substitúcie v podobe $\varphi(x)=t$ nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \sin^5 x\,\cos x\,dx$;

2. $\displaystyle\int x\,(1+x^2)^{10}dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

4. $\displaystyle\int x^2\,\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{2/3}}$;

6. $\displaystyle\int x\, e^{-x^2} dx$;

7. $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\, dx$;

8. $\displaystyle\int \frac{2\,\ln^2 x - 3}{x}\, dx$;

9. $\displaystyle\int \mathrm{tg}\, x\, dx$;

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\arcsin x\ \cdot\ \sqrt{1-x^2}}$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\mathrm{th}^2\, x}\ \cdot\ \mathrm{ch}^2 x}$;

12. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{4+x^4}$;

13. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^4-2x^2+3}$;

14. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$;

15. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$;

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x\,(1+x)}}$;

18. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

19. $\displaystyle\int \frac{x^{n/2} dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}} \qquad (n \in \mathbf{N})$;

20. $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx$;

21. $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$;

22. $\displaystyle\int \frac{\sin x\, \cos x\, dx}{\sqrt{a^2\, \sin^2 x + b^2\, \cos^2 x}}\,, \quad a^2 \neq b^2$;

23. $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos 2x}}$;

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\, \ln x\, \ln(\ln x)}$;

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

27. $\displaystyle\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x-4^x}\, dx$.

Riešenie. 12.

$$\int \frac{x\, dx}{4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{4+(x^2)^2} = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\, dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C = \\ = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x^2}{2} + C$$

(pri výpočte posledného integrálu sme použili vzorec 3').

16.

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{1+x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}\, t + C = \\ = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x} + C.$$

26.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x} dx}{e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}} = \left| \begin{array}{c} 1+e^{2x} = t \\ 2e^{2x} dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} = \\ = \int \frac{1}{(t-1)}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{t} = z \\ \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} = dz \end{array} \right| = \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right| + C = \\ = \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right| + C = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right) + C.$$

Poznámka. V riešení príkladu 6.26 sme mohli dve za sebou nasledujúce substitúcie $1+e^{2x}=t$ a $\sqrt{t}=z$ zlúčiť do jedinej: $\sqrt{1+e^{2x}}=z$.

7. Použitím substitúcie v podobe $x = \varphi(t)$ nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;
2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;
5. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}\,dx$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Riešenie. 1. Funkcia $f(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$ je definovaná a spojitá na intervale $[0,\infty)$. Zvoľme funkciu φ v tvare $\varphi(t) = t^2,\ t \geq 0$; tá – keďže je prostá a diferencovateľná a platí $\varphi([0,\infty)) = [0,\infty)$ – vyhovuje predpokladom vety 5. Pretože primitívnu funkciu k funkcii $f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = \dfrac{2t}{2+t} = 2 - \dfrac{4}{2+t}$ vieme nájsť, môžeme použiť vetu 5, podľa ktorej

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2t}{2+t}\,dt = \int \left(2 - \frac{4}{2+t}\right) dt = 2t - 4\ln|2+t| + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

(pri úprave posledného výrazu sme využili, že $\ln|2+\sqrt{x}| = \ln(2+\sqrt{x})$).

Poznámky. 1. Odporúčame čitateľovi presvedčiť sa, že uvedený výsledok sa nezmení, ak zvolíme funkciu φ v tvare $\varphi(t) = t^2,\ t \leq 0$.

2. Všimnime si, že napr. neurčitý integrál z pr. 6.16 sme mohli rovnako dobre vypočítať aj na základe vety 5 substitúciou $x = t^2,\ t \geq 0$, podobne neurčitý integrál z pr. 6.26 substitúciou $x = \dfrac{1}{2}\ln(z^2-1)$ (ktorú nájdeme tak, že zo vzťahu $\sqrt{1+e^{2x}} = z$ vyjadríme x). Teda ak φ je prostá funkcia, možno namiesto vety 4 (so substitúciou $\varphi(x) = t$) použiť vetu 5 (so substitúciou $x = \varphi^{-1}(t)$, kde φ^{-1} je inverzná funkcia k funkcii φ). Tento prechod od substitúcie v tvare $\varphi(x) = t$ k tvaru $x = \varphi^{-1}(t)$ používame, ak funkciu f (ktorej neurčitý integrál hľadáme) nevieme jednoduchými úpravami prepísať do podoby $g(\varphi(x))\,\varphi'(x)$.

8. Použitím trigonometrických substitúcií $x = a\sin t,\ x = a\cos t,\ x = a\,\mathrm{tg}\,t,\ x = a/\cos t$ a pod. nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$;
2. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$;
4. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$;
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,,\quad a>0$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,,\quad a>0$.

9. Nech P je polynóm. Potom $\int P(\sqrt[n]{x})\,dx = Q(\sqrt[n]{x}) + C$, kde Q je polynóm ($n \in \mathbf{N}$). Dokážte!

10. Nájdite všetky funkcie $f\colon[0,\infty) \to \mathbf{R},\ g\colon\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vyhovujúce podmienkam

$$x\,f'(x^2) + g'(x) = \cos x - 3x^3\,,$$

$$f(x^2) + g(x) = \sin x - x^4\,.$$

1.1.3 Metóda per partes

Veta 6. *Nech funkcie $u,\,v\colon I \to \mathbf{R}$ sú diferencovateľné na intervale I a nech existuje primitívna funkcia k funkcii uv'. Potom existuje aj primitívna funkcia k funkcii $u'v$ a platí*

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx.$$

11. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int x\,\cos x\,dx$;
2. $\displaystyle\int x\,e^{-x}\,dx$;
3. $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$;
4. $\displaystyle\int (x^2-x+1)\,\ln x\,dx$;
5. $\displaystyle\int x^2\,3^{-2x}dx$;
6. $\displaystyle\int (x^2+3)\,\sin 2x\,dx$;
7. $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$;
8. $\displaystyle\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx$;
9. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;
10. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln^2 x\,dx$;
11. $\displaystyle\int x\,\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\,dx$;
12. $\displaystyle\int \ln x\,dx$;
13. $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$;
14. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$;
15. $\displaystyle\int \ln\,(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$;
16. $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\,dx$;
17. $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx\ ,\quad ab\neq 0$;
18. $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$.

Riešenie. 13.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{arctg}\,x\,dx &= \int 1\,\cdot\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \left|\begin{matrix} u'=1 & u=x \\ v=\mathrm{arctg}\,x & v'=\dfrac{1}{1+x^2}\end{matrix}\right| = x\,\mathrm{arctg}\,x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \\ &= x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{1+x^2} = \left|\begin{matrix} 1+x^2=t \\ 2x\,dx=dt\end{matrix}\right| = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \\ &= x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\end{aligned}$$

16. Použitím metódy per partes dostaneme

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u'=\cos x & u=\sin x \\ v=e^{2x} & v'=2\,e^{2x}\end{matrix}\right| = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx. \tag{1.2}$$

Neurčitý integrál $\int e^{2x}\sin x\,dx$ vyjadríme opäť pomocou metódy per partes:

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} u'=\sin x & u=-\cos x \\ v=e^{2x} & v'=2\,e^{2x}\end{matrix}\right| = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx.$$

Ak toto vyjadrenie dosadíme do vzťahu (1.2), dostaneme pre hľadaný neurčitý integrál $I=\int e^{2x}\cos x\,dx$ rovnosť

$$I = e^{2x}\sin x + 2\,e^{2x}\cos x - 4\,I, \tag{1.3}$$

z ktorej vyplýva

$$I = \int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{5}\,e^{2x}(\sin x + 2\,\cos x) + C. \tag{1.4}$$

Poznámka. Nebude na škodu uvedomiť si, že (1.3) je rovnosťou dvoch množín: ak označíme $f(x)$ jednu pevne zvolenú primitívnu funkciu k funkcii $e^{2x}\cos x$ (f existuje podľa vety 2, našou úlohou je nájsť jej predpis), má rovnosť (1.3) tvar

$$\{f(x)+C\,;\ C\in\mathbf{R}\} = e^{2x}\sin x + 2\,e^{2x}\cos x - 4\cdot\{f(x)+K\,;\ K\in\mathbf{R}\},$$

tj.

$$\{f(x)+C\,;\ C\in\mathbf{R}\}=\{e^{2x}\sin x+2\,e^{2x}\cos x-4f(x)-4K\,;\ K\in\mathbf{R}\}. \tag{1.5}$$

Zdôvodnime teraz prechod od (1.3) k (1.4) podrobne: Hľadaná funkcia f je prvkom množiny na ľavej strane rovnosti (1.5) (stačí položiť $C=0$), musí teda patriť aj do množiny na pravej strane. Preto existuje $K\in\mathbf{R}$ tak, že

$$f(x)=e^{2x}\sin x+2\,e^{2x}\cos x-4\,f(x)-4K,$$

odtiaľ

$$f(x)=\frac{1}{5}\,e^{2x}\sin x+\frac{2}{5}\,e^{2x}\cos x-\frac{4}{5}\,K.$$

Podľa vety 1 potom

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos x\,dx &= \{f(x)+\overline{C}\,;\ \overline{C}\in\mathbf{R}\}=\{\frac{1}{5}\,e^{2x}\sin x+\frac{2}{5}\,e^{2x}\cos x-\frac{4}{5}\,K+\overline{C}\,;\ \overline{C}\in\mathbf{R}\}=\\ &= \{\frac{1}{5}\,e^{2x}(\sin x+2\,\cos x)+C\,;\ C\in\mathbf{R}\}.\end{aligned}$$

12. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int x^5e^{-x^3}dx$;
2. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$;
3. $\displaystyle\int x\,\sin\sqrt{x}\,dx$;
4. $\displaystyle\int(\arcsin x)^2dx$;
5. $\displaystyle\int x\,\sin^2 x\,dx$;
6. $\displaystyle\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$;
7. $\displaystyle\int(e^x-\cos x)^2dx$;
8. $\displaystyle\int\frac{x\,\cos x}{\sin^3 x}\,dx$;
9. $\displaystyle\int\frac{x\,\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;
10. $\displaystyle\int\frac{x\,\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;
11. $\displaystyle\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$;
12. $\displaystyle\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$;
13. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;
15. $\displaystyle\int\frac{x\,e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$;
16. $\displaystyle\int\frac{e^{\operatorname{arctg}x}dx}{(1+x^2)^{3/2}}$;
17. $\displaystyle\int\frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$.

13. Nech $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia. Nájdite $\int x\,f''(x)\,dx$.

14$_0$. Nech funkcia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ má primitívnu funkciu, nech g je polynóm. Potom existuje primitívna funkcia k funkcii fg. Dokážte!

15$_0$. Ak funkcie $f,g:I\to\mathbf{R}$ sú n-krát spojite diferencovateľné na intervale I, tak

$$\int f\,g^{(n)}dx=f\,g^{(n-1)}-f'g^{(n-2)}+f''g^{(n-3)}+\cdots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}g+(-1)^n\int f^{(n)}g\,dx$$

(uvedený vzťah sa nazýva *viacnásobná formula per partes*). Dokážte!

1.1.4 Rekurentné vzťahy. Metóda neurčitých koeficientov

Rekurentné vzťahy umožňujú previesť výpočet integrálu závisiaceho od indexu n na výpočet integrálu toho istého typu s menším indexom.

16. Použitím metódy per partes odvoďte rekurentné vzťahy pre výpočet nasledujúcich integrálov:

1. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\,, \quad a>0\,;$
2. $I_n = \int (a^2-x^2)^n dx\,, \quad a>0\,;$
3. $I_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx\,;$
4. $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx\,, \quad a>0\,;$
5. $I_n = \int \sin^n x\, dx\,;$
6. $I_n = \int \cos^n x\, dx\,.$

Riešenie. 1.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \left| \begin{matrix} u' = 1 & u = x \\ v = (x^2+a^2)^{-n} & v' = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1} \end{matrix} \right| = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2a^2nI_{n+1}.$$

Z takto získanej rovnosti

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2a^2nI_{n+1}$$

vyplýva rekurentný vzťah

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\, I_n \,[5]. \tag{1.6}$$

Pre $n=1$ tak dostávame

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\, I_1 = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \\ &= \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Pomocou I_2 môžeme teraz vyjadriť I_3 atď.

(Všimnime si, že pri odvodení vzťahu (1.6) sme potrebovali len predpoklad $n \neq 0$, teda uvedený vzťah platí pre všetky reálne čísla $n \neq 0$. Špeciálne pre $n = 1/2$ – kedy sa vlastne „stráca" jeho „rekurentnosť", pretože vtedy $\frac{2n-1}{2na^2} = 0$ – z neho vyplýva

$$I_{3/2} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

[5] Rekurentný vzťah sme mohli odvodiť aj nasledovne:

$$I_m = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^m}\, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^m}\, dx = \frac{1}{a^2}\left(I_{m-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^m}\, dx \right),$$

pritom

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^m}\, dx &= \int x \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^m}\, dx = \left| \begin{matrix} u' = x\,(x^2+a^2)^{-m} & u = -(x^2+a^2)^{-(m-1)}/2(m-1) \\ v = x & v' = 1 \end{matrix} \right| = \\ &= -\frac{1}{2(m-1)}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)}\, I_{m-1}, \end{aligned}$$

teda

$$I_m = \frac{1}{a^2}\left(I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)}\, I_m \right) = \frac{1}{2(m-1)a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2}\, I_{m-1}$$

(ak položíme $m-1=n$, dostaneme zrejme rovnosť (1.6)).

Pomocou $I_{3/2}$ teraz môžeme vyjadriť $I_{5/2}$ atď.)

17. Nájdite $\int (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x} dx$.

Riešenie. Tento neurčitý integrál možno vypočítať opakovaným použitím metódy per partes (teda vlastne použitím vzorca z pr. 15). Ak si predstavíme postup výpočtu, zistíme, že hľadaná primitívna funkcia bude mať tvar

$$Q_3(x)\, e^{3x} + C\,,$$

kde $Q_3(x) = Kx^3 + Lx^2 + Mx + N$ je polynóm 3. stupňa. Teraz treba už len nájsť koeficienty K, L, M, N tak, aby platilo

$$(Q_3(x)\, e^{3x} + C)' = (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}. \tag{1.7}$$

Pretože

$$\begin{aligned} ((Kx^3 + Lx^2 + Mx + N)\, e^{3x} + C)' &= (3Kx^2 + 2Lx + M)\, e^{3x} + 3e^{3x}\,(Kx^3 + Lx^2 + Mx + N) = \\ &= (3Kx^3 + (3L + 3K)\, x^2 + (3M + 2L)\, x + (M + 3N))\, e^{3x}\,, \end{aligned}$$

má rovnosť (1.7) tvar

$$(3Kx^3 + (3L + 3K)\, x^2 + (3M + 2L)\, x + (M + 3N))\, e^{3x} = (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}\,.$$

Táto rovnosť bude splnená, ak polynómy na jej pravej a ľavej strane budú mať zhodné koeficienty u členov s rovnakými mocninami, tj. ak bude platiť

$$3K = 1\,, \qquad 3L + 3K = -2\,, \qquad 3M + 2L = 0\,, \qquad M + 3N = 5\,.$$

Riešením tejto sústavy dostaneme

$$K = 1/3\,, \qquad L = -1\,, \qquad M = 2/3\,, \qquad N = 13/9\,,$$

teda hľadaná primitívna funkcia je

$$\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{13}{9}\right) e^{3x} + C\,.$$

Postup výpočtu neurčitého integrálu uvedený v riešení pr. 17, nazývaný <u>*metóda neurčitých koeficientov*</u>, umožňuje vlastne nahradiť integrovanie derivovaním v prípade, keď vieme vopred odhadnúť tvar hľadanej primitívnej funkcie.

18. Metódou neurčitých koeficientov nájdite

1. $\displaystyle\int (3x^3 - 17)\, e^{2x} dx$;
2. $\displaystyle\int (x^2 + 3x + 5)\, \cos 2x\, dx$;
3. $\displaystyle\int (x^2 + 2x - 1)\, \sin 3x\, dx$;
4. $\displaystyle\int (2 + x^2)\, \cos 2x + (1 + 2x + 3x^3)\, \sin 2x\, dx$.

1.2 Integrovanie racionálnych funkcií

Funkcia R tvaru $R = \dfrac{P}{Q}$, kde P, Q sú polynómy, sa nazýva <u>*racionálna funkcia*</u>. (Špeciálne teda každý polynóm je racionálnou funkciou.) Ak naviac stupeň polynómu P je menší ako stupeň polynómu Q, hovoríme, že R je <u>*rýdzo racionálna funkcia*</u>.

Funkcie tvaru $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$, kde A, B, C, a, p, q sú reálne konštanty, pričom $p^2 - 4q < 0$ (tj. polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene), $n \in \mathbf{N}$, sa nazývajú <u>*elementárne racionálne funkcie*</u> (<u>*parciálne zlomky*</u>).

Veta 7. *Nech $Q(x)$ je polynóm stupňa $n \geq 1$, nech koeficient pri jeho najvyššej mocnine je rovný 1* [6]. *Potom*

a) *Polynóm $Q(x)$ možno zapísať jediným spôsobom v tvare*

$$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

kde $a_1,\ldots,a_k$ sú navzájom rôzne korene polynómu $Q(x)$, polynómy $x^2+p_1x+q_1,\ldots,x^2+p_s+q_s$ nemajú reálne korene a sú navzájom rôzne, $n_1,\ldots,n_k,m_1,\ldots,m_s\in\mathbf{N}$.

b) *Rýdzo racionálnu funkciu $R=\dfrac{P}{Q}$ (P je polynóm) možno zapísať v tvare súčtu parciálnych zlomkov. Sčítance vystupujúce v tomto súčte možno rozdeliť na skupiny patriace k jednotlivým členom rozkladu polynómu $Q(x)$, tj. na skupinu parciálnych zlomkov patriacu k členu $(x-a_1)^{n_1},\ldots,$ skupinu parciálnych zlomkov patriacu k členu $(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$. Pritom skupina patriaca k členu tvaru $(x-\alpha)^{\nu}$ pozostáva z parciálnych zlomkov*

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)},\quad \frac{A_2}{(x-\alpha)^2},\quad \ldots,\quad \frac{A_\nu}{(x-\alpha)^\nu},$$

skupina patriaca k členu tvaru $(x^2+\beta x+\gamma)^{\mu}$ pozostáva z parciálnych zlomkov

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)},\quad \frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2},\quad \ldots,\quad \frac{B_\mu x+C_\mu}{(x^2+\beta x+\gamma)^\mu}.$$

Integrovanie elementárnych racionálnych funkcií

1.
$$\int\frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C;$$

2. pre $n\in\mathbf{N}$, $n>1$ je
$$\int\frac{A}{(x-a)^n}\,dx=\frac{A}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C.$$

Výpočet neurčitých integrálov $\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)}\,dx,\ \int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ možno substitúciou $x+\dfrac{p}{2}=t$ previesť na hľadanie neurčitých integrálov $\displaystyle\int\frac{Mt+N}{(t^2+r)}\,dt,\ \int\frac{Mt+N}{(t^2+r)^n}\,dt$, kde $r=\dfrac{4q-p^2}{4}>0$ (uvedená substitúcia vyplýva z úpravy kvadratického trojčlena x^2+px+q na úplný štvorec $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{4q-p^2}{4}$).

3.
$$\int\frac{Mt+N}{t^2+r}\,dt=\begin{cases} N\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+r}=\frac{N}{\sqrt{r}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{r}}+C \quad \text{pre } M=0\\[2ex] \dfrac{M}{2}\displaystyle\int\frac{2t\,dt}{t^2+r}+N\int\frac{dt}{t^2+r}=\frac{M}{2}\ln(t^2+r)+\frac{N}{\sqrt{r}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{r}}+C \quad \text{pre } M\neq 0\\ \text{(prvý z integrálov sme riešili substitúciou } t^2+r=s) \end{cases};$$

4. pre $n\in\mathbf{N}$, $n>1$ je

$$\int\frac{Mt+N}{(t^2+r)^n}\,dt=\begin{cases} N\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+r)^n} \quad \text{pre } M=0\text{, tento integrál hľadáme pomocou rekurentného vzorca}\\ \text{(pozri pr. 16.1)}\\[2ex] \dfrac{M}{2}\displaystyle\int\frac{2t\,dt}{(t^2+r)^n}+N\int\frac{dt}{(t^2+r)^n}=\frac{M}{2(1-n)}\,\frac{1}{(t^2+r)^{n-1}}+N\int\frac{dt}{(t^2+r)^n} \quad \text{pre } M\neq 0\\ \text{(prvý z integrálov sme riešili substitúciou } t^2+r=s\text{, na výpočet druhého používame}\\ \text{rekurentný vzorec – pozri pr. 16.1)} \end{cases}$$

[6] zrejme každý polynóm $\overline{Q}(x)$ stupňa $n\geq 1$ možno zapísať v tvare $\overline{Q}(x)=aQ(x)$, kde a je koeficient pri najvyššej mocnine polynómu $\overline{Q}(x)$ a polynóm $Q(x)$ vyhovuje predpokladom vety 7

19. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

3. $\displaystyle\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,dx$;

4. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(x-1)(x+1)(x+2)}$.

Riešenie. 4. Ak je stupeň polynómu P väčší než stupeň polynómu Q, možno racionálnu funkciu $\frac{P}{Q}$ napísať v tvare súčtu polynómu a rýdzo racionálnej funkcie (stačí polynóm P vydeliť polynómom Q), v našom prípade

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{(x-1)(x+1)(x+2)} &= \left(\frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2} = x-2+\frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2} = \right) \\ &= x-2+\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,.\end{aligned}$$

Podľa vety 7b) funkciu $\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)}$ možno napísať v tvare

$$\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\,. \tag{1.8}$$

Neznáme koeficienty A, B, C môžeme nájsť nasledovne: súčet parciálnych zlomkov na pravej strane rovnosti (1.8) upravíme na spoločný menovateľ

$$\begin{aligned}\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)} &= \frac{A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C)}{(x-1)(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách premennej x na pravej a ľavej strane rovnosti

$$5x^2-4 = (A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C) \tag{1.9}$$

dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcrcrl} A & + & B & + & C = & 5 \\ 3A & + & B & & = & 0 \\ 2A & - & 2B & - & C = & -4 \end{array}\quad , \tag{1.10}$$

ktorej riešenie je $A = 1/6$, $B = -1/2$, $C = 16/3$.

Teraz už môžeme pristúpiť k výpočtu nášho neurčitého integrálu:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4\,dx}{(x-1)(x+1)(x+2)} &= \int \left(x-2+\frac{5x^2-4}{(x-1)(x+1)(x+2)} \right) dx = \\ &= \int \left(x-2+\frac{1}{6(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{16}{3(x+2)} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{16}{3}\ln|x+2|+C\,.\end{aligned}$$

Poznámka. Rovnosť (1.9) platí pre všetky $x \in \mathbf{R}$ (pre $x \neq 1, -1, -2$ to vyplýva z rovnosti (1.8), ktorej platnosť zaručuje veta 7b), pre $x = 1, -1, -2$ to vyplýva zo spojitosti funkcií na pravej a ľavej strane rovnosti (1.9)). Ak v tejto rovnosti dosadíme za x vhodné čísla, dostaneme sústavu rovníc pre neznáme A, B, C, ktorá môže byť jednoduchšia než (1.10).

Zapíšme (1.9) v tvare

$$5x^2 - 4 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)\,,$$

potom je zrejmé, že za x bude vhodné zvoliť čísla $1, -1$ a -2 (teda korene polynómu z menovateľa rýdzo racionálnej funkcie, ktorú sme rozkladali na parciálne zlomky [7]); dostaneme tak rovnice

$$1 = 6A\,, \quad 1 = -2B\,, \quad 16 = 3C\,.$$

20. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$;
2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x-5)}$;
4. $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$;
5. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^3}\,dx$;
6. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{x^4-2x^3+2x-1}$.

Riešenie. 1. Vyjadrenie integrandu ako súčtu parciálnych zlomkov hľadáme podľa vety 7b) v tvare

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}\,.$$

Po úprave pravej strany na spoločný menovateľ a porovnaní koeficientov polynómov v čitateli na pravej a ľavej strane dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{array}{rrrrrl} & A & & + & C & = 1 \\ & & B & + & 2C & = 0 \\ - & A & - B & + & C & = 1 \end{array}\,,$$

ktorej riešením je $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$. Preto

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C = \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C\,. \end{aligned}$$

21. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$;
5. $\displaystyle\int \frac{(3x^2-2)x\,dx}{(x+2)^2(3x^2-2x+4)}$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$.

[7] tento postup je výhodný, ak menovateľ rozkladanej rýdzo racionálnej funkcie je polynóm n-tého stupňa, ktorý má práve n navzájom rôznych reálnych koreňov

Riešenie. 3. Pretože $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, pričom polynóm x^2-x+1 nemá reálne korene, budeme vyjadrenie integrandu ako súčtu parciálnych zlomkov hľadať v tvare

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\,.$$

Pre neznáme koeficienty $A,\ B,\ C$ dostávame sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ -A & + & B & + & C & = & 0 \\ A & & & + & C & = & 1 \end{array}\quad ,$$

ktorej riešením je $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=2/3$. Preto

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^3+1} &= \int\left(\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right)dx=\frac13\ln|x+1|-\frac13\int\frac{x-2}{\left(x-\frac12\right)^2+\frac34}\,dx=\left|\begin{array}{r} x-\frac12=t \\ dx=dt\end{array}\right|=\\ &= \frac13\ln|x+1|-\frac13\int\frac{t-\frac32}{t^2+\frac34}\,dt=\frac13\ln|x+1|-\frac13\left(\frac12\int\frac{2t\,dt}{t^2+\frac34}-\frac32\int\frac{dt}{t^2+\frac34}\right)=\\ &= \frac13\ln|x+1|-\frac16\ln\left(t^2+\frac34\right)+\frac12\cdot\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt3}+C=\\ &= \frac13\ln|x+1|-\frac16\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C\,.\end{aligned}$$

22. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$;
2. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$;
3. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$;
4. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^6+4x^4+4x^2}$.

Riešenie. 4. Pretože $x^6+4x^4+4x^2=x^2(x^2+2)^2$ a polynóm x^2+2 nemá reálne korene, možno podľa vety 7b) písať integrand v tvare

$$\frac{1}{x^6+4x^4+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}\,,$$

pritom neznáme $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ sú riešením sústavy

$$\begin{array}{ccccccccccccc} A & & & + & C & & & & & & & = & 0 \\ & & B & & & + & D & & & & & = & 0 \\ 4A & & & + & 2C & & & + & E & & & = & 0 \\ & & 4B & & & + & 2D & & & + & F & = & 0 \\ 4A & & & & & & & & & & & = & 0 \\ & & 4B & & & & & & & & & = & 1 \end{array}\quad ,$$

odtiaľ $A=0$, $B=1/4$, $C=0$, $D=-1/4$, $E=0$, $F=-1/2$. Preto

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^6+4x^4+4x^2} &= \int\left(\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4(x^2+2)}-\frac{1}{2(x^2+2)^2}\right)dx=\\ &= -\frac{1}{4x}-\frac{1}{4\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt2}-\frac12\underbrace{\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}}_{I}\,.\end{aligned}$$

Integrál I môžeme nájsť dosadením do rekurentného vzťahu (1.6) z pr. 16.1; nasledujúci výpočet integrálu I však v tomto prípade nevyžaduje viacej námahy než odvodenie rovnosti (1.6):

$$\begin{aligned}
I=\int\frac{dx}{(x^2+2)^2} &= \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+2)-x^2}{(x^2+2)^2}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x^2+2}-\int x\cdot\frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx\right)=\left|\begin{array}{ll} u'=\dfrac{x}{(x^2+2)^2} & u=-\dfrac{1}{2(x^2+2)} \\ v=x & v'=1\end{array}\right|= \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2(x^2+2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2}\right)=\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C
\end{aligned}$$ [8].

Teda celkovo

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^6+4x^4+4x^2} &= -\frac{1}{4x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}I= \\
&= -\frac{1}{4x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C= \\
&= -\frac{1}{4x}-\frac{x}{8(x^2+2)}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C\,.
\end{aligned}$$

23. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int\frac{x^5\,dx}{x^3+2}$;
2. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$;
3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-1}$;
4. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}$;
5. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$;
6. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^6+1}$;
7. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$;
8. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$;
9. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^8+8x^6+16x^4}$;
10. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+bx^2+ax+ab}$, $ab\neq 0$.

24. Pre aké hodnoty parametrov $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ $(c^2+d^2>0)$ je $\displaystyle\int\frac{ax+b}{cx+d}\,dx$ racionálnou funkciou?

25. Akým podmienkam musia vyhovovať koeficienty $a, b, c \in \mathbf{R}$ $(a^2+b^2+c^2>0)$, aby $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ bola funkcia tvaru

a) $R(x)$;
b) $K\ln R(x)+C$;
c) $K\operatorname{arctg} R(x)+C$;

kde $R(x)$ je racionálna funkcia a $K\neq 0$?

26. Výpočet nasledujúcich neurčitých integrálov možno zjednodušiť použitím vhodných substitúcií:

1. $\displaystyle\int\frac{x^2+2x-7}{(x-1)^3}\,dx$;
2. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^8-1}$;
3. $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{x^8+3}$;
4. $\displaystyle\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx$;

[8] Tento výpočet zodpovedá postupu z poznámky [5] k riešeniu pr. 16.1. Ak chceme pri výpočte integrálu I použiť postup z riešenia pr. 16.1, musíme tam uvedenú metódu per partes použiť na vyjadrenie integrálu $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2}$.

5. $\displaystyle\int \frac{x^{11}\,dx}{x^8+3x^4+2}$;

6. $\displaystyle\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$;

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$;

8. $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx$;

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+7x}$;

10. $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}$;

11. $\displaystyle\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx$;

12. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$ (použite substitúciu $x+\dfrac{1}{x}=t$) ;

13. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx$;

14. $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx$.

27. Na výpočet integrálu $I=\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$, $a\neq b$, $m,n\in\mathbf{N}$ použite substitúciu $t=\dfrac{x+a}{x+b}$. Na základe získaného výsledku nájdite integrál $J=\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

28. 1. Ak primitívna funkcia F k funkcii f je racionálna, tak primitívne funkcie k funkciám $f(x)\operatorname{arctg}x$, $f(x)\operatorname{arcctg}x$, $f(x)\ln x$ sú elementárne. Dokážte!

2. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

a) $\displaystyle\int x^7\operatorname{arctg}x\,dx$;

b) $\displaystyle\int \operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1}\,dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\,dx$.

1.3 Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

29. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}}$;

3. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt[6]{1+x}}{1+x+\sqrt[3]{(1+x)^4}}\,dx$;

4. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

Polynómom dvoch premenných $x,\ y$ nazývame funkciu $P\colon\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ v tvare $P(x,y)=\displaystyle\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}a_{mn}x^my^n$, kde $a_{mn}\in\mathbf{R}$ $(m=0,1,\dots,M,\ n=0,1,\dots,N)$ sú konštanty.

Racionálnou funkciou dvoch premenných $x,\ y$ nazývame funkciu $f(x,y)$, ktorú možno zapísať v tvare $f(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde P,Q sú polynómy premenných $x,\ y$.

30. 1. Nech $R(x,y)$ je racionálna funkcia dvoch premenných, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, $a^2+b^2>0$, $c^2+d^2>0$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$. Dokážte, že výpočet integrálu $\int R(x,\ \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)})\,dx$ možno previesť na výpočet integrálu z racionálnej funkcie.

2. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

a) $\displaystyle\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\,\frac{dx}{x^3}$;

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}\,, \quad x > \max\{a,b\},\ a \neq b$;

f) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\,, \quad a > 0$.

Integrovanie funkcií tvaru $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, kde R je racionálna funkcia dvoch premenných, $a \neq 0$ a polynóm ax^2+bx+c nemá dvojnásobný koreň, možno vždy previesť na integrovanie racionálnych funkcií premennej t [9], a to

1. substitúciou $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$, ak $a > 0$ [10] (<u>*prvá Eulerova substitúcia*</u>);
2. substitúciou $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, ak $c > 0$ [10] (<u>*druhá Eulerova substitúcia*</u>);
3. substitúciou $\sqrt{\dfrac{a(x-\alpha)}{x-\beta}} = \pm t$ [10], ak polynóm ax^2+bx+c má dva rôzne reálne korene α, β; tj. ak $b^2-4ac > 0$ (<u>*tretia Eulerova substitúcia*</u>), táto substitúcia sa často zapisuje v tvare $\sqrt{x(x-\alpha)(x-\beta)} = \pm t(x-\beta)$.

31. Použitím Eulerových substitúcií nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{1+2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$;

3. $\displaystyle\int \frac{(1+x)\,dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$;

4. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$;

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$;

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{4x-3-x^2}}$.

Riešenie. 4. Zapíšeme najprv vlastný výpočet, komentár k jednotlivým krokom urobíme na záver: Použijeme prvú Eulerovu substitúciu v tvare

$$\sqrt{x^2+4x+3} = x+t\,, \tag{1.11}$$

z nej po umocnení obidvoch strán na druhú vyjadríme x :

$$\begin{aligned} x^2+4x+3 &= x^2+2tx+t^2 \\ x(4-2t) &= t^2-3 \\ x &= \frac{t^2-3}{2(2-t)}\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Odtiaľ

$$dx = -\frac{t^2-4t+3}{2(2-t)^2}\,dt\,. \tag{1.13}$$

---

[9] na to možno okrem tu uvedených Eulerových použiť aj goniometrické (alebo hyperbolické) substitúcie, pozri poznámku pred pr. 44

[10] presnejšie povedané, substitúciou, ktorej predpis dostaneme, ak z uvedenej rovnosti vyjadríme x ako funkciu premennej t (pozri riešenie pr. 31.4)

Ak teraz do pravej strany rovnosti (1.11) dosadíme za x podľa vzťahu (1.12), dostaneme

$$\sqrt{x^2+4x+3} = \frac{t^2-3}{2(2-t)} + t = -\frac{t^2-4t+3}{2(2-t)}\ . \tag{1.14}$$

Preto

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx &= \int \left(-\frac{t^2-4t+3}{2(2-t)}\right)\left(-\frac{t^2-4t+3}{2(2-t)^2}\right) dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2-4t+3)^2}{(2-t)^3}\,dt = \left| \begin{array}{r} t-2=z \\ dt=dz \end{array}\right| = \\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{(z^2-1)^2}{z^3}\,dz = -\frac{1}{4}\int \frac{z^4-2z^2+1}{z^3}\,dz = -\frac{1}{4}\int \left(z-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^3}\right) dz = \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{z^2}{2} - 2\ln|z| - \frac{1}{2z^2}\right) + C = -\frac{1}{8}(t-2)^2 + \frac{1}{2}\ln|t-2| - \frac{1}{2(t-2)^2} + C =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x-2\right)^2 + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+4x+3}-x-2\right| - \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x-2\right)^2} + C$$

(v poslednom kroku sme dosadili za t podľa vzťahu (1.11)).

Všimnime si teraz výpočty súvisiace so vzťahmi (1.11) – (1.14) podrobnejšie. Pri hľadaní nášho neurčitého integrálu sme použili substitúciu v tvare $x=\varphi(t)$, overme teda, či sú splnené všetky predpoklady vety 5.

Integrand, tj. funkcia $\sqrt{x^2+4x+3}$ $\left(=\sqrt{(x+1)(x+3)}\right)$, je definovaný na množine $(-\infty,-3]\cup[-1,\infty)$. Substitúciu volíme v podobe $x=\varphi(t)=\dfrac{t^2-3}{2(2-t)}$ (pozri (1.12)). Zistime teraz, kde je funkcia φ prostá. Zo vzťahu pre φ' (pozri (1.13)) vyplýva: φ je klesajúca na $(-\infty,1]$ a na $[3,\infty)$, rastúca na $[1,2)$ a na $(2,3]$; ďalej platí $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to 2-}\varphi(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to 2+}\varphi(t) = -\infty$, $\varphi(1)=-1$, $\varphi(3)=-3$. Teda funkcie $\varphi|(-\infty,1]$, $\varphi|[1,2)$, $\varphi|(2,3]$ a $\varphi|[3,\infty)$ sú prosté, pričom $\varphi((-\infty,1]) = \varphi([1,2)) = [-1,\infty)$, $\varphi((2,3]) = \varphi([3,\infty)) = (-\infty,-3]$. Nasledujúca tabuľka zachycuje inverzné funkcie k jednotlivým zúženiam funkcie φ:

funkcia	inverzná funkcia
$\varphi\|(-\infty,1]$	$-x-\sqrt{x^2+4x+3},\ x\in[-1,\infty)$
$\varphi\|[1,2)$	$-x+\sqrt{x^2+4x+3},\ x\in[-1,\infty)$
$\varphi\|(2,3]$	$-x-\sqrt{x^2+4x+3},\ x\in(-\infty,-3]$
$\varphi\|[3,\infty)$	$-x+\sqrt{x^2+4x+3},\ x\in(-\infty,-3]$

Teraz už môžeme overiť oprávnenosť použitia vety 5. Pri hľadaní primitívnej funkcie k funkcii $\sqrt{x^2+4x+3}$ na intervale $(-\infty,-3]$ použijeme substitúciu

$$x=\frac{t^2-3}{2(2-t)},\quad t\in[3,\infty)\ ,$$

potom (pozri štvrtý riadok tabuľky)

$$t=-x+\sqrt{x^2+4x+3},\quad x\in(-\infty,-3]\ ,$$

teda platí (1.11) aj (1.14). Pri hľadaní primitívnej funkcie na intervale $[-1,\infty)$ použijeme substitúciu

$$x=\frac{t^2-3}{2(2-t)},\quad t\in[1,2)\ ,$$

potom (pozri druhý riadok tabuľky)

$$t=-x+\sqrt{x^2+4x+3},\quad x\in[-1,\infty)\ ,$$

tj. opäť platí (1.11) a (1.14). Pritom zápis výpočtu pre $x\in(-\infty,-3]$ aj pre $x\in[-1,\infty)$ je rovnaký, teda primitívnu funkciu hľadáme na celom definičnom obore „naraz“. (Z uvedeného tiež vidno, že substitúcia v tvare $x=\dfrac{t^2-3}{2(2-t)}$, $t\in(-\infty,1]\cup(2,3]$ zodpovedá Eulerovej substitúcii $\sqrt{x^2+4x+3}=-t-x$, pozri prvý a tretí riadok tabuľky.)

Uvedený integrál by bolo možné hľadať aj použitím druhej alebo tretej Eulerovej substitúcie, zapíšme teraz stručne výpočty vedúce k nájdeniu nového integrandu v týchto prípadoch.

Pri použití druhej Eulerovej substitúcie v tvare $\sqrt{x^2+4x+3} = tx + \sqrt{3}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
x^2+4x+3 &= t^2x^2 + 2\sqrt{3}\,tx + 3\,, \\
x^2+4x &= t^2x^2 + 2\sqrt{3}\,tx\,, \\
x(x+4) &= x(xt^2 + 2\sqrt{3}\,t)\,, \\
x+4 &= xt^2 + 2\sqrt{3}\,t\,, \\
x(1-t^2) &= 2\sqrt{3}\,t - 4\,, \\
x &= \frac{2\sqrt{3}\,t-4}{1-t^2}\,, \\
dx &= \frac{2\sqrt{3}\,t^2 - 8t + 2\sqrt{3}}{(1-t^2)^2}\,dt
\end{aligned}$$

a

$$\sqrt{x^2+4x+3} = tx + \sqrt{3} = t\left(\frac{2\sqrt{3}\,t-4}{1-t^2}\right) + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\,t^2 - 4t + \sqrt{3}}{1-t^2}\,,$$

teda

$$\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx = 2\int \frac{(\sqrt{3}t^2 - 4t + \sqrt{3})^2}{(1-t^2)^3}\,dt\,,$$

pritom

$$t = \frac{\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{x}\,.$$

V prípade tretej Eulerovej substitúcie v tvare $\sqrt{x^2+4x+3} = \sqrt{(x+3)(x+1)} = t(x+1)$ bude

$$\begin{aligned}
(x+3)(x+1) &= t^2(x+1)^2\,, \\
(x+3) &= t^2(x+1)\,, \\
3-t^2 &= x(t^2-1)\,, \\
x &= \frac{3-t^2}{t^2-1} \quad \left(\quad = -1 + \frac{2}{t^2-1} \quad \right)\,, \\
dx &= -\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,dt
\end{aligned}$$

a

$$\sqrt{x^2+4x+3} = t(x+1) = t\left[\left(-1+\frac{2}{t^2-1}\right)+1\right] = \frac{2t}{t^2-1}\,,$$

teda

$$\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx = -\int \frac{8t^2}{(t^2-1)^3}\,dt\,,$$

pritom

$$t = \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x+1}\,.$$

Zistiť, či boli pri použití druhej a tretej Eulerovej substitúcie splnené predpoklady vety 5, odporúčame len zvlášť snaživým čitateľom. Toto overovanie nebudeme robiť pri každom jednotlivom použití Eulerových substitúcií (čitateľ ho môže skúsiť urobiť vo všeobecnosti).

Všimnime si, že použitím tretej Eulerovej substitúcie $\sqrt{x^2+4x+3} = t(x+1)$, kde na konci výpočtu dosádzame $t = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x+1}$, nájdeme hodnoty spojitej funkcie $F : (-\infty,-3] \cup [-1,\infty) \to \mathbf{R}$, primitívnej k funkcii $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3}$ [11], len pre $x \in (-\infty,-3] \cup (-1,\infty)$. Hodnotu $F(-1)$ nájdeme potom ako limitu $\lim_{x\to-1} F(x)$.

---

[11] rovnosť $D(F) = (-\infty,-3] \cup [-1,\infty)$ vyplýva z rovnosti $D(F) = D(f)$, spojitosť funkcie F vyplýva z jej diferencovateľnosti

Podobná situácia nastane pri použití tretej Eulerovej substitúcie, kde na konci výpočtu dosádzame $t = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{x}$; takto nájdená funkcia F je síce definovaná len na množine $(-\infty,3]\cup[-1,0)\cup(0,\infty)$, ale existuje konečná $\lim_{x\to 0} F(x)$. Hľadanou primitívnou funkciou je potom funkcia F „spojite dodefinovaná" v bode 0 (tj. $F(0) := \lim_{x\to 0} F(x)$; pozri tiež pr. 46; $\lim_{x\to 0} F(x)$ možno nájsť jednoduchou úpravou: ak zlomok $t = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{x}$ rozšírime výrazom $\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{3}$, dostaneme po úprave výraz $\dfrac{x+4}{\sqrt{3}+\sqrt{x^2+4x+3}}$, ktorý je definovaný aj pre $x=0$; uvedená úprava súvisí aj s overením predpokladov vety 5 v tomto prípade: pri hľadaní primitívnej funkcie na intervale $[-1,\infty)$ používame vlastne substitúciu

$$x = \varphi(t) = \frac{2\sqrt{3}\,t-4}{1-t^2}, \quad t \in (1,\sqrt{3}]\ ,$$

potom

$$t = \varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,, & \text{ak} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{x}\,, & \text{ak} \quad x \in [-1,\infty)\setminus\{0\} \end{cases},$$

čo možno skutočne zapísať v tvare $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{\sqrt{3}+\sqrt{x^2+4x+3}}, \quad x \in [-1,\infty)\,.$)

Eulerove substitúcie predstavujú univerzálny prostriedok na výpočet neurčitých integrálov funkcií typu $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, ich použitie však často vedie k integrovaniu pomerne zložitých racionálnych funkcií . Uvedieme teraz príklady funkcií typu $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, ktorých integrovanie m ožno vykonať bez použitia Eulerových substitúcií.

Integrály $I_k = \displaystyle\int \frac{x^k\,dk}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$, resp. $J_k = \displaystyle\int \frac{x^k\,dk}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a \neq 0$, $k \in \mathbf{N}$, možno vypočítať na základe rekurentného vzťahu (pozri tiež pr. 16.4); špeciálne pre nepárne k možno použiť aj substitúciu $\sqrt{x^2\pm a^2} = t$, resp. $\sqrt{a^2-x^2} = t$ [12]. Na lineárnu kombináciu integrálov tohto typu možno previesť integrál $\displaystyle\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}$ (P je polynóm, $p \neq 0$), ak použijeme substitúciu $x + \dfrac{q}{2p} = t$.

32. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$;
2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$;
3. $\displaystyle\int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$;
4. $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$;
5. $\displaystyle\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ , \quad a>0$;
6. $\displaystyle\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$.

Uvedeným spôsobom možno odvodiť vzorec

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)\,y + \lambda\int\frac{dx}{y}\ ,$$

kde $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a \neq 0)$, P_n je polynóm stupňa n, Q_{n-1} je polynóm stupňa $n-1$. Koeficienty polynómu Q_{n-1} a číslo λ nájdeme, ak zderivujeme obidve strany uvedenej rovnosti a porovnáme získané výrazy (teda použitím metódy neurčitých koeficientov).

[12] ďalšou možnosťou výpočtu uvedených integrálov je samozrejme – ako v prípade všetkých funkcií typu $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ – použitie goniometrických (alebo hyperbolických) substitúcií, pozri poznámku pred pr. 44 a pr. 8, 53

33. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$.

Na výpočet integrálov $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{x^2+px+q}}$ $(n \in \mathbf{N})$ možno použiť substitúciu $x-a=1/t$.

34. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$;

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$;

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

Riešenie. 3. (Poznámky ku krokom označeným jednotlivými číslami sú za zápisom riešenia.)

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = \left| \begin{array}{r} x+2=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-2t-5}} = \left| \begin{array}{r} t=1/k \\ dt=-dk/k^2 \end{array} \right| =$$

$$\overset{(1)}{=} -\int \frac{dk}{k^2\frac{1}{k^2}\sqrt{\frac{1-2k-5k^2}{k^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{|k|\,dk}{\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{2k}{5}-k^2}} =$$

$$\overset{(2)}{=} -\frac{\operatorname{sgn} k}{\sqrt{5}}\int \frac{k\,dk}{\sqrt{\frac{6}{25}-\left(k+\frac{1}{5}\right)^2}} = \left| \begin{array}{r} k+\frac{1}{5}=z \\ dk=dz \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\operatorname{sgn}\left(z-\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{5}}\int \frac{z-\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{6}{25}-z^2}}\,dz =$$

$$= -\frac{\operatorname{sgn}\left(z-\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{5}}\left(\int \frac{z\,dz}{\sqrt{\frac{6}{25}-z^2}} - \frac{1}{5}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{6}{25}-z^2}}\right) =$$

$$= -\frac{\operatorname{sgn}\left(z-\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{5}}\left(-\sqrt{\frac{6}{25}-z^2} - \frac{1}{5}\arcsin\frac{5z}{\sqrt{6}}\right) + C =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} k}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{2k}{5}-k^2} + \frac{1}{5}\arcsin\frac{5k+1}{\sqrt{6}}\right) + C =$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{\operatorname{sgn} t}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{\frac{t^2-2t-5}{5t^2}} + \frac{1}{5}\arcsin\frac{5+t}{\sqrt{6}\,t}\right) + C =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} t}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{t^2-2t-5}}{\sqrt{5}\,|t|} + \frac{\operatorname{sgn} t}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5+t}{\sqrt{6}\,t} + C =$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{\sqrt{t^2-2t-5}}{5t} + \frac{\operatorname{sgn} t}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5+t}{\sqrt{6}\,t} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)} + \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}\,(x+2)} + C\,, \quad x \in (-\infty, -1-\sqrt{6}) \cup (-1+\sqrt{6}, \infty)\,.$$

(1) substitúciu $x+2=1/k$ sme rozložili na dve za sebou nasledujúce substitúcie $x+2=t,\ t=1/k$, aby bolo vidno, ako sa zmení integrand na ľavej strane rovnosti (1) použitím substitúcie $t=1/k$;

(2) funkcia $f(k)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-2k-5k^2}{k^2}}}$ je definovaná na množine $\left(\dfrac{1-\sqrt{6}}{5},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$, pre $k\in D(f)$ je $f(k)=\dfrac{|k|}{\sqrt{1-2k-5k^2}}$; ak hľadáme primitívnu funkciu na intervale $\left(\dfrac{1-\sqrt{6}}{5},0\right)$, tak

$$\int f(k)\,dk=(-1)\cdot\int\frac{k\,dk}{\sqrt{1-2k-5k^2}}=\operatorname{sgn}k\cdot\int\frac{k\,dk}{\sqrt{1-2k-5k^2}}\ ;$$

pri výpočte primitívnej funkcie na intervale $\left(0,\dfrac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$ je

$$\int f(k)\,dk=1\cdot\int\frac{k\,dk}{\sqrt{1-2k-5k^2}}=\operatorname{sgn}k\cdot\int\frac{k\,dk}{\sqrt{1-2k-5k^2}}\ ;$$

keďže získané zápisy sú v obidvoch prípadoch rovnaké, môžeme primitívnu funkciu hľadať na obidvoch intervaloch „naraz“ ;

(3) pri úprave sme využili rovnosť $\operatorname{sgn}(1/t)=\operatorname{sgn}t,\ t\neq 0$;

(4) pri úprave sme využili rovnosť $\operatorname{sgn}t\cdot(1/|t|)=1/t$.

35. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$;
2. $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$;
3. $\displaystyle\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$;
4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}$;
5. $\displaystyle\int\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{12}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;
6. $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2-3x+2}}{x+\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$;
7. $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}\,dx$;
8. $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$;
9. $\displaystyle\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$;
10. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$;
11. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$;
12. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;
13. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

36$_0$. Dokážte rovnosti

$$\arcsin x=2\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{\pi}{2}=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{\pi}{2},\quad x\in(-1,1)$$

tak, že na výpočet integrálu $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ postupne použijete substitúcie $\sqrt{1-x^2}=1+tx,\ \sqrt{1-x^2}=(1+x)\,t,\ \sqrt{1-x^2}=(1-x)\,t$.

37. Ak primitívna funkcia F k funkcii f je racionálna, tak primitívne funkcie k funkciám $f(x)\arcsin x,\ f(x)\arccos x$ sú elementárne. Dokážte!

1.4 Integrovanie niektorých goniometrických funkcií

Integrál
$$I=\int \sin^n x\cos^m x\,dx\ ,\quad m,n\in \mathbf{N}\cup\{0\}\ ,$$
možno vypočítať

1. pre nepárne m substitúciou $\sin x=t$:
$$\int \sin^n x\cos^{2k+1}x\,dx=\int \sin^n x\,\left(1-\sin^2 x\right)^k\cos x\,dx\ ;$$
2. pre nepárne n substitúciou $\cos x=t$;
3. pre párne m,n použitím vzorcov
$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\ ,\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\ ,\quad \cos\alpha\sin\alpha=\frac{sin2\alpha}{2}$$
alebo použitím rekurentných vzťahov pre výpočet integrálov $I_k=\int\sin^k x\,dx$, resp. $J_k=\int\cos^k x\,dx$ (pozri pr. 16.5,6):
$$\begin{aligned}\int\sin^{2i}x\cos^{2j}x\,dx &= \int\sin^{2i}x\,\left(1-\sin^2 x\right)^j\,dx=\\ &= \int\sin^{2i}x\left(1-j\sin^2 x+\binom{j}{2}\sin^4 x+\cdots+(-1)^j\sin^{2j}x\right)dx=\\ &= I_{2i}-jI_{2i+2}+\binom{j}{2}I_{2i+4}+\cdots+(-1)^j\,I_{2(i+j)}\ ;\end{aligned}$$
analogicky možno integrál I previesť na lineárnu kombináciu integrálov J_k, $k=2i,2i+2,\ldots,2(i+j)$.

38. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx$;
2. $\int\cos^5 x\,dx$;
3. $\int\sin^5 x\cos^7 x\,dx$;
4. $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$;
5. $\int\sin^6 x\,dx$;
6. $\int\sin^4 x\cos^4 x\,dx$.

Riešenie. 4.
$$\begin{aligned}\int\sin^2 x\cos^6 x\,dx &= \int(\sin x\cos x)^2\cos^4 x\,dx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\\ &= \frac{1}{2^4}\int\sin^2 2x\,\left(1+2\,\cos 2x+\cos^2 x\right)\,dx=\\ &= \frac{1}{2^4}\left(\underbrace{\int\sin^2 2x\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int 2\,\sin^2 2x\cos 2x\,dx}_{I_2}+\underbrace{\int(\sin 2x\cos 2x)^2\,dx}_{I_3}\right)\overset{(1)}{=}\\ &= \frac{1}{2^4}\left(\frac{5}{8}x+\frac{\sin^3 2x}{3}-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{\sin 8x}{64}\right)+C\ ,\end{aligned}$$
pričom rovnosť (1) vyplýva z nasledujúcich výpočtov:
$$\begin{aligned}I_1 &= \int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}+C\ ;\\ I_2 &= \int 2\,\sin^2 2x\cos 2x\,dx=\left|\begin{array}{c}\sin 2x=t\\ 2\,\cos 2x\,dx=dt\end{array}\right|=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sin^3 2x}{3}+C\ ;\\ I_3 &= \int\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 4x\,dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1-\cos 8x}{2}\right)dx=\frac{x}{8}-\frac{\sin 8x}{64}+C\ .\end{aligned}$$

39. Odvoďte rekurentný vzťah pre výpočet integrálu

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x}$;

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x}$.

Nasledujúce neurčité integrály možno nájsť použitím vzorcov

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) ,$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) ,$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)) .$$

40. Nájdite neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \sin 5x\cos x\,dx$;

2. $\displaystyle\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$;

3. $\displaystyle\int \sin x\sin(x+a)\sin(x+b)\,dx$;

4. $\displaystyle\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$;

5. $\displaystyle\int \sin^3 2x\cos^2 3x\,dx$.

Integrovanie funkcií tvaru $R(\sin x,\cos x)$, kde R je racionálna funkcia dvoch premenných, možno previesť na integrovanie racionálnych funkcií premennej t substitúciou $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}=t$; pritom využívame rovnosti

$$\sin x = \left(= \frac{\sin 2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} =^{13} \right) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} , \quad x\neq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z} ;$$

$$\cos x = \left(= \frac{\cos 2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} =^{13} \right) = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} , \quad x\neq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z} .$$

Poznámka. Zrejme integrovanie funkcií tvaru $R(\sin\alpha x,\cos\alpha x)$ možno substitúciou $\alpha x = z$ previesť na integrovanie funkcií tvaru $R(\sin z,\cos z)$.

---

[13]zlomok sme rozšírili výrazom $\dfrac{1}{\cos^2(x/2)}$

41. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;
4. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$;
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $\quad \varepsilon>0$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin 3x+\cos 3x}$.

Riešenie. 1. Pre $x\neq(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, platí

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x} &= \int \frac{2\cos^2\dfrac{x}{2}}{3+\cos x+\sin x}\cdot\frac{dx}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \left|\begin{array}{c}\operatorname{tg}(x/2)=t\\ dx/\cos^2(x/2)=dt\end{array}\right| \stackrel{14}{=}\\
&= \int \frac{2\cdot\dfrac{1}{1+t^2}}{3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int\frac{2dt}{2t^2+2t+4} = \int\frac{dt}{\left(t+\dfrac12\right)^2+\dfrac74} =\\
&= \left|\begin{array}{c}t+\dfrac12=z\\ dt=dz\end{array}\right| = \int\frac{dz}{z^2+\left(\dfrac{\sqrt7}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt7}+C = \frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt7}+C =\\
&= \frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt7}\right)+C\,.
\end{aligned}$$

Takto nájdená funkcia $F_1(x) := \dfrac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt7}\right)$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x) := \dfrac{1}{3+\cos x+\sin x}$ len na množine $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ $\quad(=\mathbf{R}\setminus\{(2k+1)\pi;\ k\in\mathbf{Z}\})$, pritom body $x_k:=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, sú bodmi nespojitosti 1. druhu funkcie F_1 :

$$\lim_{x\to x_k-}F_1(x)=\frac{\pi}{\sqrt7}\,,\qquad \lim_{x\to x_k+}F_1(x)=-\frac{\pi}{\sqrt7}\quad. \tag{1.15}$$

Pretože však definičným oborom spojitej funkcie f je množina $\mathbf{R}$, musí k nej podľa vety 2 existovať primitívna funkcia F definovaná na $\mathbf{R}$, ktorá – pretože je diferencovateľná – je spojitá na $\mathbf{R}$. Podľa vety 1 musí pre $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ platiť $F(x)-F_1(x)\equiv$ konšt; teda graf funkcie $F|((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ vznikne posunutím grafu funkcie $F_1|((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ v smere osi Oy.

Na nájdenie neurčitého integrálu funkcie f stačí podľa vety 1 nájsť jednu primitívnu funkciu $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; hľadajme napr. tú funkciu F, pre ktorú platí $F(x)=F_1(x)$ pre $x\in(-\pi,\pi)$. Z predchádzajúceho vyplýva, že graf funkcie F dostaneme, ak „poposúvame“ grafy funkcií $F_1|((2k-1)\pi,(2k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ tak, aby sa z bodov $x_k,\ k\in\mathbf{Z}$, stali odstrániteľné body nespojitosti, pričom hodnoty $F(x_k)$ dodefinujeme ako limity v týchto bodoch. (Teda z „poposúvaných“ častí grafu funkcie F_1 „zlepíme“ graf spojitej funkcie F.)

Z rovností (1.15) vyplýva, že graf funkcie $F_1|(x_0,x_1)$ treba posunúť o $2\pi/\sqrt7$ „nahor“; podobne zistíme, že graf funkcie $F_1|(x_{-2},x_{-1})$ treba posunúť o $2\pi/\sqrt7$ „nadol“, graf funkcie $F_1|(x_1,x_2)$ potom posunúť

---

[14] $\cos^2(x/2)=\dfrac{\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$, $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; rozširovaniu výrazom $2\cos^2(x/2)$ sa môžeme vyhnúť, ak namiesto vety 4 použijeme vetu 5 o substitúcii (a teda zo vzťahu $\operatorname{tg}(x/2)=t$ vyjadríme x pomocou t), pre $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$ dostaneme $x=2\operatorname{arctg}t+2k\pi$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$

o $4\pi/\sqrt{7}$ „nahor“ atď. Tak dostaneme graf funkcie danej predpisom

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\right) + \dfrac{2k\pi}{\sqrt{7}}\,, & \text{ak} \quad x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)\,,\ k \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{\sqrt{7}}\,, & \text{ak} \quad x = (2k+1)\pi\,,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} .$$

Teda

$$\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x} = F(x) + C\,.$$

Namiesto univerzálnej substitúcie $\operatorname{tg}(x/2) = t$ možno pri výpočte integrálu $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, kde R je racionálna funkcia dvoch premenných, použiť substitúciu

1. $\sin x = t$, ak $R(u,-v) = -R(u,v)$;
2. $\cos x = t$, ak $R(-u,v) = -R(u,v)$;
3. $\operatorname{tg} x = t$, ak $R(-u,-v) = R(u,v)$ [15].

V prípade substitúcie $\operatorname{tg} x = t$ využívame vzorce

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,, \quad \sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,, \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z} \quad .$$

Poznámka. Funkcia $R(\sin x, \cos x) = \sin^n x \cos^m x$ $(m, n \in \mathbf{Z})$ zrejme vyhovuje prvej z uvedených podmienok v prípade nepárneho m, druhej v prípade nepárneho n a tretej v prípade párnych m, n (porovnaj s textom pred pr. 38).

42. Nájdite nasledujúce neurčité integrály
1. použitím substitúcie $\sin x = t$ alebo $\cos x = t$:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\,(1+\cos x)}$; b) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}\, dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x + \cos^3 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\, dx$; d) $\displaystyle\int \frac{\cos x - \cos 3x}{1-\sin^4 x}\, dx$;

2. použitím substitúcie $\operatorname{tg} x = t$:

a) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1+\sin^2 x}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$;

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x\cos x + \sin^2 x}$; d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\operatorname{tg} x - 3}$;

e) $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$; f) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{\sin 2x}\, dx$.

43. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; 2. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$; 4. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\, dx}{3+4\sin^2 x}$;

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5}$; 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}\,, \quad c > \sqrt{a^2+b^2} > 0$;

[15] niekedy môže byť výhodnejšie použiť substitúciu $\operatorname{ctg} x = t$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-4\sin 2x+2\cos^2 x}$;

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$;

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$;

10. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x\cos 3x}$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$;

12. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$;

13. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$;

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$;

15. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

16. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}\,, \quad x\in(0,\pi)$;

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}\,, \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Poznámka (*o výpočte integrálov* $\int R(\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)\,dx$). Pri hľadaní integrálov $\int R(\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)\,dx$, kde R je racionálna funkcia dvoch premenných, možno postupovať podobne ako v prípade integrálov $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ (vyplýva to zo skutočnosti, že pre hyperbolické funkcie platia vzorce podobné goniometrickým – pozri aj pr. I.63, 64). Teda integrál $\int R(\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)\,dx$ možno substitúciou $\operatorname{th}(x/2)=t$ previesť na integrál z racionálnej funkcie premennej t. Ak funkcia R vyhovuje podmienke

1. $R(u,-v)=-R(u,v)$, resp. 2. $R(-u,v)=-R(u,v)$, resp. 3. $R(-u,-v)=R(u,v)$,

možno použiť substitúciu

1. $\operatorname{sh} x=t$, resp. 2. $\operatorname{ch} x=t$, resp. 3. $\operatorname{th} x=t$.

Poznámka (*o použití goniometrických substitúcií pri výpočte integrálov* $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$).

Nech R je racionálna funkcia dvoch premenných, $a>0$, $D:=b^2-4ac>0$. Použitím substitúcie $x+b/2a=z$ možno integrál $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ previesť na integrál $\int R_1(z,\sqrt{z^2-p^2})\,dz$, kde $p^2=D/4a^2$ a R_1 je racionálna funkcia dvoch premenných.

Substitúcia $z/p=t$ prevedie integrál $\int R_1(z,\sqrt{z^2-p^2})\,dz$ na integrál $\int R_2(t,\sqrt{t^2-1})\,dt$, kde R_2 je opäť racionálna funkcia dvoch premenných.

Analogicky možno postupovať aj pre $a>0$, $D<0$ a pre $a<0$, $D>0$.

Výpočet integrálu $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ možno teda použitím vhodných substitúcií previesť na výpočet integrálu

1. $\int R_2(t,\sqrt{t^2-1})\,dt$, ak $a>0$, $D>0$;
2. $\int R_2(t,\sqrt{t^2+1})\,dt$, ak $a>0$, $D<0$;
3. $\int R_2(t,\sqrt{1-t^2})\,dt$, ak $a<0$, $D>0$.

Na výpočet týchto integrálov možno použiť goniometrické substitúcie[16]

1. $t=1/\sin u$, $u\in[-\pi/2,\pi/2]\setminus\{0\}$ alebo $t=1/\cos x$, $u\in[0,\pi]\setminus\{\pi/2\}$;
2. $t=\operatorname{tg} u$, $u\in(-\pi/2,\pi/2)$ alebo $t=\operatorname{ctg} u$, $u\in(0,\pi)$;
3. $t=\sin u$, $u\in[-\pi/2,\pi/2]$ alebo $t=\cos u$, $u\in[0,\pi]$,

ktoré výpočet integrálu v premennej t prevedú na hľadanie integrálu $\int R_3(\sin u,\cos u)\,du$, kde R_3 je racionálna funkcia dvoch premenných[17].

---

[16]alebo hyperbolické substitúcie 1. $t=\operatorname{ch} u$, $u\ge 0$ pre $t\ge 1$; $t=-\operatorname{ch} u$, $u\ge 0$ pre $t\le -1$; 2. $t=\operatorname{sh} u$; 3. $t=\operatorname{th} u$

[17]Ak na výpočet integrálu $\int R_2(t,\sqrt{1-t^2})\,dt$ použijeme substitúcie $t=\sin u$, $u\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ a $\operatorname{tg}\frac{u}{2}=v$ a vyjadríme v pomocou t, dostaneme

$$v=\operatorname{tg}\frac{\arcsin t}{2}=\operatorname{sgn} t\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\arcsin t}{1+\cos\arcsin t}}=\operatorname{sgn} t\cdot\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}}\overset{*}{=}\operatorname{sgn} t\cdot\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{|t|}=\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}$$

44. Použitím goniometrických substitúcií nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+5)^3}}$;

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+6x+10)\sqrt{(x^2+6x+8)^3}}$;

4. $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

1.5 Ďalšie príklady

45. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$;

2. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

4. $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$;

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$;

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx$;

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$;

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx$;

10. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$;

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;

12. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$;

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}\,dx$;

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}$;

17. $\displaystyle\int \frac{2\cos x+\sin x-3}{2\cos x-\sin x-3}\,dx$;

18. $\displaystyle\int \frac{2+\cos 4x}{5+4\cos 4x}\,dx$;

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$;

20. $\displaystyle\int \frac{\sin 4x\,dx}{\sin^8 x+\cos^8 x}$;

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$;

22. $\displaystyle\int \frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\sin\dfrac{x+a}{2}}\,dx$;

23. $\displaystyle\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,dx$;

24. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$;

25. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$;

26. $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx\,,\quad \alpha\beta\neq 0$;

27. $\displaystyle\int xe^x\sin x\,dx$;

28. $\displaystyle\int x^2e^{3x}\cos 2x\,dx$;

29. $\displaystyle\int x^7e^{-x^2}\,dx$;

30. $\displaystyle\int x^2e^{\sqrt{x}}\,dx$;

31. $\displaystyle\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$;

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$;

(zlomok na ľavej strane rovnosti * sme rozšírili výrazom $1-\sqrt{1-t^2}$), odtiaľ $\sqrt{1-t^2}=1-vt$, čo je zápis druhej Eulerovej substitúcie. Rovnako možno zistiť, že použitie substitúcií $t=\cos u$, $u\in[0,\pi]$ a $\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}=v$, resp. $t=-\cos u$, $u\in[0,\pi]$ a $\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}=v$ zodpovedá tretej Eulerovej substitúcii $v=\pm\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$; podobná situácia nastane aj v ostatných prípadoch.

33. $\int \sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$;

34. $\int \ln^n x\,dx$;

35. $\int x^3 \ln^3 x\,dx$;

36. $\int \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

46. Nech $f,\ F$ sú spojité funkcie definované na intervale I, nech $M \subset I$ je konečná množina. Ak pre všetky $x \in I \setminus M$ platí $F'(x) = f(x)$, tak F je primitívna funkcia k funkcii f. Dokážte!

47. Rozhodnite o platnosti tvrdenia ,,rovnomerne spojitá funkcia f definovaná na ohraničenom intervale I má ohraničenú primitívnu funkciu F “!

48. Nech $a,\, b \in \mathbf{R},\ a < b$. Nech funkcia $F:(a,b)\to\mathbf{R}$ je primitívna k spojitej funkcii $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ na intervale (a,b). Potom existujú konečné $\lim_{x\to a} F(x) =: A$, $\lim_{x\to b} F(x) =: B$ a funkcia $F_1 : [a,b]\to\mathbf{R}$ daná predpisom

$$F_1(x) = \begin{cases} A\,, & \text{ak} \quad x = a \\ F(x)\,, & \text{ak} \quad x \in (a,b) \\ B\,, & \text{ak} \quad x = b \end{cases}$$

je primitívna k funkcii f. Dokážte!

49. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\int \dfrac{x\,dx}{1+\cos x}$;

2. $\int \dfrac{x\,\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx$;

3. $\int \dfrac{x\,dx}{(a\cos x+\sin x)^2}$;

4. $\int \sin x\,\ln\left(\cos x + \sqrt{2-\sin^2 x}\right) dx$;

5. $\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$;

6. $\int \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{(x^2+1)\,\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

7. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx$;

8. $\int \dfrac{\ln x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$;

9. $\int \dfrac{x\,\ln|x|}{(1-x^2)\,\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

10. $\int \dfrac{ax^2+b}{x^2-1}\,\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\,dx$;

11. $\int \dfrac{x\,\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$;

12. $\int x\sqrt{x^2+1}\,\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$;

13. $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\ln\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$;

14. $\int \dfrac{x\,\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1-x^2)^2}\,dx$;

15. $\int x\,\arcsin(1-x)\,dx$;

16. $\int \sqrt{1-x^2}\,\arcsin x\,dx$;

17. $\int (2x+3)\,\arccos(2x-3)\,dx$;

18. $\int \arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$;

19. $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\cdot\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

20. $\int \arcsin^3\left(\dfrac{x}{3}\right) dx$;

21. $\int \dfrac{x\,\arcsin x}{(x^2-1)\,\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

22. $\int \dfrac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$;

23. $\int \dfrac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

24. $\int \dfrac{ax^2+b}{x^2+1}\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

25. $\int \dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

26. $\int \dfrac{x^4\,\mathrm{arctg}\,x}{x^2+1}\,dx$;

27. $\int \dfrac{x\,\mathrm{arcctg}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx$;

28. $\int x(1+x^2)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$;

29. $\int \dfrac{3x^2-1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$;

30. $\int \dfrac{\mathrm{arctg}\,e^{x/2}}{e^{x/2}\,(1+e^x)}\,dx$;

31. $\int x \operatorname{arctg} x \, \ln\left(1+x^2\right) \, dx$;

32. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x + 3\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x + 2\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \, dx$;

33. $\int \frac{a_1 \operatorname{ch} x + b_1 \operatorname{sh} x}{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x} \, dx$;

34. $\int \frac{\operatorname{ch} 2x \, dx}{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}$;

35. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} \, dx$;

36. $\int \frac{x^4-1}{x\,(x^4-5)\,(x^5-5x+1)} \, dx$;

37. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} \, dx$;

38. $\int \frac{\left(x^2+1\right) \, dx}{(x^2-1)\,\sqrt{x^4+1}}$;

39. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} \, dx$;

40. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$;

41. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$;

42. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$;

43. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$;

44. $\int \frac{\sin^2 x \, dx}{\sin x + 2\cos x}$;

45. $\int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} \, dx$, $\quad n \in \mathbf{N}$ $\qquad$ (použite substitúciu $t = \frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}}$) ;

46. $\int (x+|x|)^2 \, dx$;

47. $\int e^{-|x|} \, dx$;

48. $\int [x] \, \sin \pi x \, dx$.

50. Za akých podmienok je $\int \frac{P_m(x)\,dx}{(x-a)^n}$ (kde P_m je polynóm stupňa m a $n \in \mathbf{N}$) racionálnou funkciou?

51$_0$. Ak primitívna funkcia F k funkcii f a derivácia g funkcie G sú racionálne, tak primitívna funkcia k funkcii fG je elementárna. Dokážte!

52$_0$. Ak P je polynóm, tak primitívna funkcia k funkcii $P(\ln x)$ je elementárna. Dokážte!

53. Pomocou hyperbolických substitúcií nájdite nasledujúce neurčité integrály:

1. $\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx$, $\quad a>0$;

2. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\quad a>0$;

3. $\int x^2 \sqrt{x^2-1} \, dx$.

54$_0$. Nech $a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla také, že $\frac{a_n}{a_1}, \frac{a_{n-1}}{a_1}, \ldots, \frac{a_2}{a_1} \in \mathbf{Q}$. Potom $\int R\left(e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_n x}\right) dx$, kde R je racionálna funkcia n premenných[18] je elementárna funkcia. Dokážte!

55. Dokážte, že výpočet integrálu $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) \, dx$ (kde R je racionálna funkcia troch premenných[18]) možno previesť na výpočet integrálu $\int R_1(t)\,dt$, kde R_1 je racionálna funkcia.

56. Nájdite všetky spojité funkcie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ktoré pre $x>0$ vyhovujú podmienkam

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= x+1 , \\ f'(x)-g'(x) &= 0 , \\ f'(2x)+g'(-2x) &= 1-12\,x^2 . \end{aligned}$$

57. Zostrojte funkciu, ktorá je darbouxovská na $\mathbf{R}$, ale nemá primitívnu funkciu[19].

---

[18] definíciu pojmu racionálna funkcia n premenných prenechávame na čitateľa

[19] Platí totiž (pozri napr. [23, str. 160, veta 2]): Ak funkcia $f: I \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná v každom bode intervalu I, tak funkcia f' je darbouxovská na I. (Pr. 57 teda ukazuje, že obrátená implikácia neplatí.)

58. 1. Ak $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je prostá funkcia a existuje primitívna funkcia k funkcii f, tak existuje primitívna funkcia aj k inverznej funkcii f^{-1}. (Využite, že f musí byť darbouxovská na $\mathbf{R}$, pozri poznámku [19].)

2. Ak $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je prostá diferencovateľná funkcia a $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, tak $\int f^{-1}(x)\,dx = x\,f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) + C$. Dokážte!

Chapter 2

Riemannov určitý integrál

2. Riemannov určitý integrál

2.1 Definícia a základné vlastnosti

Nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia. Delením intervalu $[a,b]$ nazývame každú konečnú neklesajúcu postupnosť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ takú, že $x_0 = a$, $x_n = b$. Čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ sa nazývajú deliace body (delenia D), intervaly[1] $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\dots$, $[x_{n-1}, x_n]$ čiastočné intervaly delenia D. Číslo $\nu(D) := \max_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$, kde $\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n)$ sa nazýva norma delenia D. Číslo

$$U(f,D) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ ,$$

resp.

$$L(f,D) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ ,$$

kde $M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (i = 1, \dots, n)$ sa nazýva horný, resp. dolný intergálny súčet funkcie f pri delení D [2].

Veta 1. *Nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia. Potom množina $\mathcal{U}$ všetkých horných integrálnych súčtov funkcie f a množina $\mathcal{L}$ všetkých jej dolných integrálnych súčtov sú ohraničené a platí $\sup \mathcal{L} \le \inf \mathcal{U}$.*

Číslo $\sup \mathcal{L}$, resp. $\inf \mathcal{U}$ sa nazýva dolný, resp. horný (Riemannov) integrál funkcie f (na intervale $[a,b]$) a označuje sa $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, resp. $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Veta 2. *Nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé delenie D intervalu $[a,b]$, ktorého norma $\nu(D)$ je menšia ako δ, platí*

$$\left| U(f,D) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \ .$$

(Analogické tvrdenie platí pre dolný integrál funkcie f.)

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $[a,b]$ sa nazýva normálna, ak $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ [3].

[1] symbol $[\alpha, \beta]$ definujeme v prípade $\alpha = \beta$ rovnosťou $[\alpha, \beta] := \{\alpha\}$ a množinu $\{\alpha\}$ nazývame *degenerovaný interval*

[2] niekedy sa používa aj názov *horný*, resp. *dolný Darbouxov súčet*

[3] index n v označení D_n nesúvisí s počtom deliacich bodov delenia D_n

Dôsledok vety 2. *Nech* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *je ohraničená funkcia a* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je normálna postupnosť delení intervalu* $[a,b]$ *. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} U(f,D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} L(f,D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ .$$

Ohraničená funkcia $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ sa nazýva *(riemannovsky) integrovateľná na intervale* $[a,b]$, ak

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \ .$$

Spoločná hodnota horného a dolného integrálu funkcie f na intervale $[a,b]$ sa v takom prípade označuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ a nazýva sa *určitý (Riemannov) integrál funkcie* f *(na intervale* $[a,b]$ *)*. Čísla a, b v symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ sa nazývajú *hranice integrovania*. Skutočnosť, že funkcia f je riemannovsky integrovateľná na intervale $[a,b]$, zapisujeme $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

Veta 3. *Pre ohraničenú funkciu* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*
a) $f\in\mathcal{R}[a,b]$ *;*
b) *pre každé* $\varepsilon>0$ *existuje delenie* D_ε *intervalu* $[a,b]$ *také, že platí*

$$|U(f,D_\varepsilon)-L(f,D_\varepsilon)|<\varepsilon \ .$$

59. Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu $[a,b]$, nech $\lim_{n\to\infty} d_n=\infty$, kde d_n je počet deliacich bodov delenia D_n. Vyplýva z toho, že $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení?

60. Nájdite horný a dolný integrál funkcie f na intervale I, ak

1. $f(x)=x$, $\quad I=[0,3]$;
2. $f(x)=a^x$, $\quad I=[0,1]$;
3. $f(x)=\sin x$, $\quad I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
4. $f(x)=\begin{cases} x\,, & \text{ak } x\in\mathbf{Q} \\ -x\,, & \text{ak } x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$, $\quad I=[-2,-1]$.

Ktoré z týchto funkcií sú integrovateľné?

61. Nech $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, $\alpha\le\beta$. Zostrojte funkciu $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ tak, aby $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=\alpha$, $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx=\beta$.

Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je ohraničená funkcia a $D=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ je delenie intervalu $[a,b]$. *Integrálnym súčtom*[4] *funkcie* f *(pri delení* D *)* sa nazýva každý súčet tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ ,$$

kde $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$.
Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $[a,b]$, nech S_n je integrálny súčet funkcie f pri delení D_n. Potom sa postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva *normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie* f.

[4] niekedy sa používa názov *Riemannov súčet*

Hovoríme, že <u>*číslo A je limita množiny $\{S(f,D)\}$ integrálnych súčtov funkcie f pre normu delenia $\nu(D)$ idúcu k nule*</u> (a zapisujeme $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} S(f,D) = A$), ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí: ak S je integrálny súčet funkcie f pri delení D a $\nu(D) < \delta$, tak $|A - S| < \varepsilon$.

Veta 4. *Pre ohraničenú funkciu $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*
a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *a* $\int_a^b f(x)\,dx = A$*;*
b) $\lim_{\nu(D)\to 0} S(f,D) = A$*;*
c) *každá normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie f konverguje k číslu A.*

Poznámka. Často sa pojem riemannovskej integrovateľnosti a Riemannovho integrálu definuje pomocou vlastnosti b), resp. c)[5] z vety 4, teda bez použitia horného a dolného integrálu. Hoci integrálne súčty možno (na rozdiel od horných a dolných integrálnych súčtov) zaviesť pre ľubovoľnú funkciu $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ (teda aj pre neohraničené funkcie), stačí sa aj v prípade definície založenej na pojme limity integrálnych súčtov obmedziť na ohraničené funkcie, pretože platí tvrdenie: Ak každá normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ má konečnú limitu, tak f je ohraničená funkcia.

Hovoríme, že <u>*množina $M \subset \mathbf{R}$ má Jordanovu mieru nula*</u>, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet otvorených[6] ohraničených intervalov $(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)$ [7] tak, že $M \subset \bigcup_{i=1}^n (a_i,b_i)$ a $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \varepsilon$.

Veta 5. *Nech ohraničená funkcia $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ spĺňa niektorú z nasledujúcich podmienok:*
a) *f je spojitá;*
b) *množina bodov nespojitosti funkcie f má Jordanovu mieru nula;*
c) *f je monotónna.*
Potom $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Veta 6. *Nech f, $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ sú ohraničené funkcie, množina $M \subset [a,b]$ má Jordanovu miernu nula a platí*

$$\forall\, x \in [a,b] \setminus M : f(x) = g(x)\ .$$

Potom nastane práve jedna z nasledujúcich možností:
a) *f aj g sú riemannovsky integrovateľné na $[a,b]$ a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$;*
b) *f ani g nie sú riemannovsky integrovateľné na $[a,b]$.*

Poznámky. 1. Z vety 6 vyplýva, že hodnota $\int_a^b f(x)\,dx$ sa nezmení, ak predpis integrovateľnej funkcie f zmeníme na množine s Jordanovou mierou nula (špeciálne: v konečnom počte bodov) tak, aby takto získaná funkcia bola opäť ohraničená na $[a,b]$.

2. Na základe vety 6 možno zovšeobecniť pojem riemannovsky integrovateľnej funkcie:

Nech množina $M \subset [a,b]$ má Jordanovu mieru nula (špeciálne: nech M je konečná množina), nech f je ohraničená funkcia definovaná na $[a,b]\setminus M$. Hovoríme, že f je riemannovsky integrovateľná na $[a,b]$, ak existuje riemannovsky integrovateľná funkcia $\overline{f}:[a,b]\to\mathbf{R}$ taká, že platí

$$\forall\, x \in [a,b] \setminus M : \overline{f}(x) = f(x)\ .$$

Symbol $\int_a^b f(x)\,dx$ potom definujeme nasledovne:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \overline{f}(x)\,dx\ .$$

(Voľne povedané: Funkciu f dodefinujeme v bodoch množiny M tak, aby sme dostali ohraničenú funkciu $\overline{f}:[a,b]\to\mathbf{R}$, potom vyšetríme riemannovskú integrovateľnosť funkcie $\overline{f}$. Z vety 6 pritom vyplýva, že integrovateľnosť funkcie f, resp. hodnota $\int_a^b f(x)\,dx$ nezávisí od toho, ako funkciu f dodefinujeme.)

[5] zrejme c) je obdoba Heineho definície limity pre prípad limity integrálnych súčtov

[6] ekvivalentné definície tohto pojmu dostaneme, ak v uvedenej definícii nahradíme otvorené ohraničené intervaly uzavretými intervalmi alebo polouzavretými ohraničenými intervalmi (porovnaj s [24, str. 47, definícia 1])

[7] číslo n závisí na čísle ε, tj. $n = n(\varepsilon)$

62. Zistite, či je funkcia f riemannovsky integrovateľná na intervale I, ak

1. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}\,, & \text{ak } \ x \neq 0 \\ 0\,, & \text{ak } \ x = 0 \end{cases} \quad , \quad I = [-1, 1] \quad ;$
2. $f(x) = \begin{cases} 2^{-n}\,, & \text{ak } \ x \in (2^{-n-1}, 2^{-n}]\,, \quad n = 0,\, 1,\, \dots \\ 0\,, & \text{ak } \ x = 0 \end{cases} \quad , \qquad I = [0, 1] \quad ;$
3. $f(x) = \dfrac{1}{[1/x]}\,, \quad I = [0, 1] \quad ;$
4. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)\,, \quad I = [0, 2] \quad ;$
5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right], & \text{ak } \ x \neq 0 \\ 0\,, & \text{ak } \ x = 0 \end{cases} \quad , \quad I = [0, 1] \quad ;$
6. f je Dirichletova funkcia χ, I je ľubovoľný ohraničený interval ;
7. $f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } \ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ q\,, & \text{ak } \ x = p/q\,, \text{ kde } p \in \mathbf{Z}\,,\ q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné} \end{cases} \quad , \quad I = [-1, 1] \quad .$

63. Nech postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov intervalu $[a, b]$ konverguje k bodu x_0. Nech $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia a $f(x) = 0$ pre všetky $x \in [a, b] \setminus \{x_n\,;\, n \in \mathbf{N}\}$. Potom $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Dokážte!

64. Dokážte, že *Riemannova funkcia*

$$r(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } \ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ 1/q\,, & \text{ak } \ x = p/q\,, \text{ kde } p \in \mathbf{Z}\,,\ q \in \mathbf{N} \text{ sú nesúdeliteľné} \end{cases}$$

je riemannovsky integrovateľná na každom uzavretom ohraničenom intervale I. (Všimnite si, že množina $\mathbf{Q} \cap I$ bodov nespojitosti funkcie $r|I$ nemá Jordanovu mieru nula.)

65. Nájdite nasledujúce určité Riemannove integrály ako limitu niektorej normálnej postupnosti integrálnych súčtov:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\, dx$;
2. $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{dx}{x^2}\,, \quad 0 < a < b \qquad$ (návod: položte $\xi_i = \sqrt{x_{i-1} x_1}\,, \quad i = 1, \dots, n$) .

66. Nájdite $\delta > 0$ tak, aby z nerovnosti $\max_{k=1,\dots,n} \Delta x_k < \delta$ vyplývala nerovnosť

$$\left| \int_0^3 \sin 50x\, dx - \sum_{k=1}^{n} (\sin 50\xi_k)\, \Delta x_k \right| < 0.001\,,$$

kde $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 3$ a ξ_k je ľubovoľne zvolený bod z intervalu $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$.

67. 1. Nech $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

Dokážte!

2_0. Nech $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je spojitá kladná funkcia. Potom

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\displaystyle\int_0^1 \ln f(x)\,dx}\ .$$

Dokážte!

68. Zostrojte funkciu, ktorá nie je riemannovsky integrovateľná na uzavretom ohraničenom intervale $[a,b]$, ale pre každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $[a,b]$ existuje postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f taká, že S_n je integrálny súčet pri delení D_n a $\lim_{n\to\infty} S_n=0$.

69. Nech delenie D_n intervalu $[0,1]$ je dané deliacimi bodmi $x_0=0$, $x_1=1/2^n$, $x_2=1/2^{n-1}$, $x_3=1/2^{n-2}$, $\dots$, $x_{n-1}=1/2^2$, $x_n=1/2$, $x_{n+1}=1$; nech $S_n^{(1)}$ $\left(S_n^{(2)}\right)$ je integrálny súčet funkcie $f(x)=x$ pri delení D_n, ktorý dostaneme, ak za ξ_k zvolíme ľavý (pravý) koncový bod intervalu $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\dots,n+1$. Hoci $f\in\mathcal{R}[0,1]$ (prečo?), je $\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)}\neq\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)}$. Je to v rozpore s vlastnosťou c) z vety 4?

70. Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je ohraničená funkcia a množina $N:=\{x\in[a,b]\,;\,f(x)=0\}$ je hustá v $[a,b]$ (tj. každý bod množiny $[a,b]$ je hromadným bodom množiny N). Potom buď $f\notin\mathcal{R}[a,b]$ alebo $\int_a^b f(x)\,dx=0$. Dokážte! Na príkladoch ukážte, že obidva prípady môžu nastať!

71. Zostrojte funkciu $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ktorá je spojitá v bode a, ale nie je riemannovsky integrovateľná na žiadnom uzavretom ohraničenom intervale obsahujúcom bod a!

Veta 7 (*aditívna vlastnosť určitého integrálu*). *Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je ohraničená funkcia, nech $a<c<b$. Potom $f\in\mathcal{R}[a,b]$ práve vtedy, keď $f\in\mathcal{R}[a,c]$ a súčasne $f\in\mathcal{R}[c,b]$.*

Naviac, ak $f\in\mathcal{R}[a,b]$, tak

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\ .$$

Veta 8. *Nech $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{R}[a,b]$, nech $c_1,\dots,c_n\in\mathbf{R}$. Potom je na intervale $[a,b]$ riemannovsky integrovateľná aj funkcia $c_1f_1+\cdots+c_nf_n$ a platí*

$$\int_a^b (c_1f_1(x)+\cdots+c_nf_n(x))\,dx=c_1\int_a^b f_1(x)\,dx+\cdots+c_n\int_a^b f_n(x)\,dx\ .$$

Veta 9. *Nech $f\in\mathcal{R}[a,b]$, nech $f([a,b])\subset[m,M]$ a nech funkcia φ je spojitá na intervale $[m,M]$. Potom $\varphi\circ f\in\mathcal{R}[a,b]$.*

Dôsledok. *Nech $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$. Potom $fg\in\mathcal{R}[a,b]$, $|f|\in\mathcal{R}[a,b]$. Ak naviac $\inf_{x\in[a,b]} g(x)>0$ alebo $\sup_{x\in[a,b]} g(x)<0$, tak aj $f/g\in\mathcal{R}[a,b]$.*

Veta 10. *Nech $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ a $f(x)\le g(x)$ pre všetky $x\in[a,b]$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Špeciálne:

a) *ak $m\le f(x)\le M$ pre všetky $x\in[a,b]$, tak*

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)\ ;$$

b)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\ .$$

72. Môže byť súčin (súčet) integrovateľnej a ohraničenej neintegrovateľnej funkcie integrovateľný?

73. Ak $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, tak aj $\max\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$, $\min\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

74. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Vyplýva z nerovnosti $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ nerovnosť $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$?

75. Nech $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Potom existuje interval $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ taký, že $f(x) > 0$ pre všetky $x \in [\alpha,\beta]$. Dokážte!

76. 1. Nech $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá nezáporná funkcia a $f(x_0) > 0$ pre niektoré $x_0 \in [a,b]$. Potom $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Dokážte!

2_0. Nech $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ sú spojité funkcie, $f(x) \ge g(x)$ pre všetky $x \in [a,b]$ a $f(x_0) > g(x_0)$ pre niektoré $x_0 \in [a,b]$. Potom $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$. Dokážte!

77. Dokážte nerovnosti:

1. $0 < \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}\,dx < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$;

2_0. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\pi + \arcsin x}{\sqrt[3]{x^2+8}}\,dx < \frac{3}{2}$.

78. Zistite, ktorý z určitých integrálov je väčší:

1. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin x\,dx$ alebo $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\sin x\,dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ alebo $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$.

79. Nech $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a nech $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$. Potom f nemení na $[a,b]$ znamienko. Dokážte!

80. Uveďte príklad riemannovsky integrovateľných funkcií f, g, ktorých superpozícia $f \circ g$ je ohraničená, ale nie je riemannovsky integrovateľná.

2.2 Výpočet určitého integrálu pomocou neurčitého

Veta 11 (*Newtonov–Leibnizov vzorec*). *Nech funkcia f je riemannovsky integrovateľná na intervale $[a,b]$ a má na intervale (a,b) primitívnu funkciu F, pričom existujú konečné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\ .$$

Špeciálne: ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na $[a,b]$, tak

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Číslo $\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$ budeme označovať symbolom $[F(x)]_a^b$.

81. Vypočítajte nasledujúce určité integrály:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx$;

2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

3. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

4. $\displaystyle\int_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

5. $\displaystyle\int_{0}^{2} |1-x|\, dx$;

6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{4}{3}\sqrt{x^{2/3}}\, dx$;

7. $\displaystyle\int_{a}^{b} \mathrm{sgn}\, x\, dx$;

8. $\displaystyle\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$;

9. $\displaystyle\int_{1}^{n+1} \ln[x]\, dx$;

10. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$, $\quad m, n \in \mathbf{Z}$;

11. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$;

12. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$, $\quad a, b > 0$.

Riešenie. 5. Funkcia $|1-x|$ je spojitá, a teda riemannovsky integrovateľná na intervale $[0,2]$. Pri výpočte využijeme (aby sme sa ,,zbavili absolútnej hodnoty“) aditívnu vlastnosť integrálu:

$$\begin{aligned}\int_0^2 |1-x|\, dx &= \int_0^1 |1-x|\, dx + \int_1^2 |1-x|\, dx = \int_0^1 (1-x)\, dx + \int_1^2 (x-1)\, dx = \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = \left(\left(1-\frac{1}{2}\right) - 0\right) + \left((2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) = 1\,.\end{aligned}$$

Poznámka. Pri výpočte integrálu $\int_0^2 |1-x|\, dx$ by bol možný aj trocha odlišný postup: nájsť primitívnu funkciu F k funkcii $|1-x|$ na intervale $[0,2]$ a priamo použiť Newtonov–Leibnizov vzorec. Pretože však pri hľadaní funkcie F by bolo potrebné ,,zlepiť“ primitívnu funkciu na intervale $[0,1]$ s primitívnou funkciou na intervale $[1,2]$ (porovnaj s pr. 2.1b)), je postup využívajúci aditívnu vlastnosť určitého integrálu výhodnejší.

11. Funkcia $f(x) = \dfrac{1}{3+2\cos x}$ je spojitá, a teda riemannovsky integrovateľná na intervale $[0,\pi]$. Použitím substitúcie $\mathrm{tg}\,(x/2) = t$ nájdeme primitívnu funkciu F k funkcii f na intervale $[0,\pi)$:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)}{\sqrt{5}}\,, \quad x \in [0,\pi)\,.$$

Podľa Newtonovho–Leibnizovho vzorca potom

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}\, dx &= \left[\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)}{\sqrt{5}}\right]_0^{\pi} = \lim_{x\to\pi-} F(x) - \lim_{x\to 0+} F(x) = \\ &= \lim_{x\to\pi-} F(x) - F(0) = \lim_{x\to\pi-} \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)}{\sqrt{5}} - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{5}}\,.\end{aligned}$$

82. 1. Objasnite nesprávnosť nasledujúcich výpočtov formálne používajúcich Newtonov–Leibnizov vzorec:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln 1 = 0$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}\right)' dx = \left[\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = \mathrm{arctg}\,1 - \mathrm{arctg}\,(-1) = \frac{\pi}{2}$;

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx/\cos^2 x}{1+3\mathrm{tg}^2 x} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x)\right]_0^{\pi} = 0$.

2. Nájdite $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)' dx$.

83. Pomocou určitých integrálov nájdite nasledujúce limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, $p>0$;
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$;
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$;
5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\cdots+\frac{(4n-1)^3}{n^4}\right)$;
6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$;
7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$;
8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)$, kde $f\in\mathcal{R}[a,b]$;
9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n^n}}$;
10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^2}{n^3+2^3}+\frac{4^2}{n^3+4^3}+\cdots+\frac{(2n)^2}{n^3+(2n)^3}\right)$.

Riešenie. 1. Ak limitovaný výraz napíšeme v tvare

$$a_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right),$$

vidíme, že číslo a_n je integrálnym súčtom funkcie $f(x)=x$ pri delení $D_n=\{\,0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\,\}$, ktorý dostaneme, ak za ξ_k zvolíme ľavý koncový bod intervalu $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, $k=1,\ldots,n$.

Funkcia $f(x)=x$ je spojitá, a teda aj riemannovsky integrovateľná na intervale $[0,1]$. Pretože $\nu(D_n)=1/n$, je $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ normálna postupnosť delení intervalu $[0,1]$, teda $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie f, preto podľa vety 4 je $\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 f(x)\,dx$, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

84. 1. Na základe nerovností[8]

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\quad x>0,$$

odhadnite integrál $I_1=\displaystyle\int_{0.5}^{1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

2. Na základe nerovností[9]

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\quad x>0,$$

[8]pripomeňme, že tieto nerovnosti možno dokázať napr. pomocou Taylorovho vzorca so zvyškom v Lagrangeovom tvare, pozri pr. I.393.3

[9]pri dôkaze týchto nerovností možno postupovať ako v pr. I.352.2

odhadnite integrály $I_2 = \int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\quad I_3 = \int_0^{0.64} \sqrt{x} \sin x \, dx$.

85. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $\dfrac{1}{20\sqrt{2}} < \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx < \frac{1}{20}$;
2. $\dfrac{4}{9}(e-1) < \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\, dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}(e-1)$;
3. $0 < \displaystyle\int_0^{200} \frac{e^{-5x}\, dx}{x+20} < 0.01$;
4. $0.5 < \displaystyle\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{\pi}{6}$, $\quad n \ge 1$.

86. Dotyčnica ku grafu dvakrát spojite diferencovateľnej funkcie f zviera v bode $[a, f(a)]$ uhol $\pi/3$ a v bode $[b, f(b)]$ uhol $\pi/4$ s osou Ox $(a < b)$. Vypočítajte $\int_a^b f''(x)\, dx$!

87. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia taká, že platí

$$\forall\, x \in [a,b] \setminus M : F'(x) = f(x) ,$$

kde $M \subset [a,b]$ je konečná množina. Potom

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) .$$

Dokážte!

88. 1. Uveďte príklad funkcie riemannovsky integrovateľnej na intervale $[a,b]$, ktorá nemá primitívnu funkciu na $[a,b]$.
2. Nech f má primitívnu funkciu na intervale $[0,1]$. Vyplýva z toho, že f je riemannovsky integrovateľná na $[0,1]$?

V ďalšom budeme (kvôli zjednodušeniu zápisov) okrem symbolu $\int_a^b f(x)\, dx$, kde $a < b$, používať aj symboly $\int_b^a f(x)\, dx$ a $\int_a^a f(x)\, dx$ definované nasledovne:

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx , \qquad \int_a^a f(x)\, dx := 0 .$$

Veta 12 (*metóda substitúcie pre určité integrály*). *Ak $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá a $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ spojite diferencovateľná funkcia a $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$, tak*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt . \tag{2.1}$$

Poznámka. Rovnosť (2.1) sa dá dokázať aj za predpokladu „$f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbf{R}$ je monotónna spojite diferencovateľná funkcia a $\varphi([\alpha,\beta]) = [a,b]$“; vtedy možno (2.1) prepísať do podoby

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\, |\varphi'(x)|\, dx = \int_a^b f(t)\, dt .$$

89. Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\displaystyle\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,dx$;

2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$;

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$;

4. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$;

5. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/4}\frac{dx}{3+\cos x}$;

6. $\displaystyle\int_3^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$;

7. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,,\quad a>0$;

8. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\,,\quad a>0$;

9. $\displaystyle\int_0^{0.75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$;

10. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$;

11. $\displaystyle\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)'\right|\,dx\,,\quad n\in\mathbf{N}$.

Riešenie. 1. Zvoľme $\varphi(x)=2-x^2$, potom (pozri označenie z vety 12) $\alpha=0$, $\beta=1$, odtiaľ $\varphi(\alpha)=2$, $\varphi(\beta)=1$. Teda

$$\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1(-2x)(2-x^2)^{12}\,dx = \left|\begin{array}{lcccc} 2-x^2=t & & x & t & \\ -2xdx=dt & (\beta=) & 1 & 1 & (=\varphi(\beta) \\ & (\alpha=) & 0 & 2 & (=\varphi(\alpha) \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^1 t^{12}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{12}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{13}}{13}\right]_1^2 = \frac{1}{26}(2^{13}-1)\,.$$

5. Na rozdiel od pr. 89.1, kedy sme rovnosť (2.1) používali „zľava doprava“ (tj. výpočet určitého integrálu na jej ľavej strane sme nahradili výpočtom určitého integrálu vpravo), budeme teraz postupovať „sprava doľava“; aby sa nám zápis riešenia ľahšie porovnával s rovnosťou (2.1), zameňme v nej navzájom strany aj premenné x a t :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Na výpočet nášho integrálu použijeme substitúciu $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$, odtiaľ — pretože $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ — dostávame $x=2\operatorname{arctg} t=\varphi(t)$. Zostáva nájsť čísla α, β tak, aby platilo $\varphi(\alpha)=\dfrac{\pi}{3}$, $\varphi(\beta)=\dfrac{\pi}{2}$. Keďže funkcia φ je prostá, je $\alpha=\varphi^{-1}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta=\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Teda

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{3+\cos x} = \left|\begin{array}{rcc} \operatorname{tg}(x/2)=t & x & t \\ x=2\operatorname{arctg} t & \pi/2 & 1 \\ dx=2dt/(1+t^2) & \pi/3 & 1/\sqrt{3} \end{array}\right| = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{1}{3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int_{1/\sqrt{3}}^1\frac{dt}{2+t^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{1/\sqrt{3}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

Poznámky. 1. Odporúčame čitateľovi preveriť, že v obidvoch riešených príkladoch boli splnené všetky predpoklady vety 12.

2. V uvedených príkladoch sme mohli postupovať aj trocha odlišne: nájsť najprv primitívnu funkciu k funkcii $x(2-x^2)^{12}$, resp. $1/(3+\cos x)$ a potom použiť Newtonov–Leibnizov vzorec. V pr. 89.5 by sme tak dostali (primitívnu funkciu stačí hľadať na intervale $[\pi/3,\pi/2]$):

$$\int\frac{dx}{3+\cos x} = \left|\begin{array}{r} \operatorname{tg}(x/2)=t \\ x=2\operatorname{arctg} t \\ dx=2dt/(1+t^2) \end{array}\right| = \int\frac{1}{3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int\frac{dt}{2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C \overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} \right) + C\,, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]\,,$$

potom

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} \right) \right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}} \right)\,.$$

Teraz by malo byť zrejmé, v čom sa uvedené dva spôsoby výpočtu líšia: v druhom z nich (uvedenom v tejto poznámke) sa musíme ,,vrátiť k pôvodnej integračnej premennej“ (to je krok označený *), zatiaľčo v prvom (založenom na vete 12) stačí namiesto toho len zmeniť pri substitúcii hranice integrovania.

3. Môže sa stať, že neurčitý integrál niektorej funkcie možno nájsť použitím substitúcie $\varphi(x) = t$, ale pri výpočte určitého integrálu tej istej funkcie nemožno vetu 12 použiť (typickým príkladom je použitie substitúcie $\operatorname{tg}(x/2) = t$ pri výpočte integrálov $\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx$; pozri tiež riešenia pr. 81.11 a 91.1).

90. 1. Na výpočet integrálu $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ chceme použiť substitúciu $x = \sin t$. Rozhodnite, či môžeme za nové hranice integrovania zvoliť čísla

a) 0 a $\pi/2$; b) π a $\pi/2$;
c) 0 a $5\pi/2$.

2. Na výpočet integrálu $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$ chceme použiť substitúciu $x = \sin t$. Rozhodnite, či za nové hranice integrovania môžeme zvoliť čísla

a) $-\pi/4$ a $\pi/4$; b) π/a a $5\pi/4$.

3. Môžeme na výpočet integrálu $\displaystyle\int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^2}\, dx$ použiť substitúciu $x = \sin t$?

91. Nájdite chybu v nasledujúcich výpočtoch:

1.

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx/\cos^2 x}{1+2\operatorname{tg}^2 x} = \left| \begin{array}{ccc} \operatorname{tg} x = t & x & t \\ & \pi & 0 \\ dx/\cos^2 x = dt & 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^0 \frac{dt}{1+2t^2} = 0$$

(výsledok je zrejme nesprávny, pretože $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ je integrál z kladnej spojitej funkcie, a teda nemôže byť rovný 0 [10]);

2.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{ccc} & x & t \\ x = 1/t & 1 & 1 \\ dx = -dt/t^2 & -1 & -1 \end{array} \right| = \int_{-1}^{1} \frac{-dt/t^2}{1+1/t^2} = -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = -[\operatorname{arctg} t]_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}$$

(uvedený postup zrejme nemôže byť správny, pretože z neho vyplýva $\pi/2 = [\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = -[\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = -\pi/2$).

92. Dokážte rovnosti:

1. $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{1/a} \frac{dx}{1+x^2}\,, \quad a > 0$; 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t\, dt}{\sin t}$.

[10] pozri pr. 76.1

93. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. Ak $f:[-k,k]\to\mathbf{R}$ je spojitá párna (nepárna) funkcia, tak

$$\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 2\int_0^k f(x)\,dx \qquad \left(\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 0\right) .$$

2_0. Ak $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je spojitá periodická funkcia s periódou T, tak pre ľubovoľné $a\in\mathbf{R}$ platí

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx .$$

3. Ak $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, tak

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

94. Vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^2\sin x)\,dx$;
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$;
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx$;
5. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{\ln(2a-x)}{\ln(4a^2-x^2)}\,dx , \quad a>\frac{1}{\sqrt{3}}$;
6. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + e^{\cos x}}\right)dx$.

Riešenie. 4.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\right)dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin x+\cos x)\,dx - \int_0^{\pi/4} \ln\cos x\,dx = \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx - \int_0^{\pi/4} \ln\cos x\,dx = \\
&\overset{(1)}{=} \int_0^{\pi/4} \ln(\sqrt{2}\cos x)\,dx - \int_0^{\pi/4} \ln\cos x\,dx = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{\sqrt{2}\cos x}{\cos x}\,dx = \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{8}\ln 2 ;
\end{aligned}$$

pritom v kroku označenom (1) sme pri výpočte $\int_0^{\pi/4}\ln(\sqrt{2}\cos(\pi/4-x))\,dx$ použili substitúciu $\pi/4-x=t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx &= \left|\begin{array}{rcc} \pi/4-x=t & x & t \\ -dx=dt & \pi/4 & 0 \\ & 0 & \pi/4 \end{array}\right| = -\int_{\pi/4}^{0} \ln(\sqrt{2}\cos t)\,dt = \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln(\sqrt{2}\cos t)\,dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\sqrt{2}\cos x)\,dx
\end{aligned}$$

(posledná rovnosť by mala byť zrejmá: hodnota integrálu nezávisí na označení premennej).

Všimnime si, že hodnotu $\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx$ sme našli bez toho, že by sme poznali primitívnu funkciu k funkcii $\ln(1+\operatorname{tg} x)$.

Veta 13 (*metóda per partes pre určité integrály*). *Ak funkcie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ *majú riemannovsky integrovateľné derivácie definované na intervale* $[a,b]$, *tak*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx . \tag{2.2}$$

Poznámka. V pr. 95.6 uvidíme, že vzorec (2.2) možno niekedy použiť aj v prípadoch, keď predpoklady vety 13 nie sú splnené. V iných prípadoch (ako ukazujú pr. 95.7,8) bude treba namiesto vety 13 použiť metódu per partes pre neurčitý integrál a Newtonov–Leibnizov vzorec (pozri tiež vetu o integrácii per partes pre Newtonov integrál uvedenú v poznámke pred odsekom 2.6).

95. Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$;
3. $\displaystyle\int_1^{e} (x\ln x)^2\,dx$;
4. $\displaystyle\int_1^{n} x^n \ln x\,dx$;
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x\,dx$;
6. $\displaystyle\int_0^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$;
7. $\displaystyle\int_0^{1} \arccos x\,dx$;
8. $\displaystyle\int_0^{1} (\arcsin x)^2\,dx$.

96. Pomocou rekurentných vzťahov vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$;
2. $\displaystyle I_n = \int_0^{1} (1-x^2)^n\,dx$;
3. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^{2n} x\,dx$;
4. $\displaystyle I_{m,n} = \int_0^{1} x^m (\ln x)^n\,dx$;
5. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1} dx$.

Riešenie. 1. Odvoďme najprv rekurentný vzťah pre výpočet I_n : pre $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$ dostaneme použitím metódy per partes

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\cdot\sin^{n-1} x\,dx \overset{(1)}{=} \left|\begin{array}{ll} u'=\sin x & u=-\cos x \\ v=\sin^{n-1}x & v'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x \end{array}\right| = \\
&= [-\cos x\sin^{n-1}x]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \overset{(2)}{=} (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cdot(1-\sin^2 x)\,dx = \\
&= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\ ,
\end{aligned}$$

teda

$$I_n = (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\ ,$$

odtiaľ

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}$$

(k označeným rovnostiam urobme tieto poznámky:

(1) aby sme mohli použiť vetu 13, musíme predpokladať $n\geq 2$ (pre $n<2$ je derivácia funkcie $\sin^{n-1}x$ neohraničená);

(2) pre $n>1$ je $[-\cos x\sin^{n-1}x]_0^{\pi/2}=0$).

Na základe tohto rekurentného vzťahu vieme pomocou hodnoty I_0 $\left(=\int_0^{\pi/2}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\pi/2}dx\right) = \dfrac{\pi}{2}$ vyjadriť I_n pre n párne:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ , \\
I_4 &= \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ , \\
&\ \vdots \\
I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k}\,I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ ,
\end{aligned}$$

čo skrátene zapisujeme

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(význam symbolu !! je čitateľovi iste zrejmý).

Podobne môžeme pomocou hodnoty I_1 $\left(= \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} \right) = 1$ vyjadriť I_n pre n nepárne:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 \,, \\
I_5 &= \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \,, \\
&\vdots \\
I_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \,.
\end{aligned}$$

Získané výsledky teda môžeme zhrnúť

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} \,, & \text{ak} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{je párne} \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \,, & \text{ak} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{je nepárne}^{11} \end{cases} .$$

97. Nech funkcia f je $(n+1)$–krát spojite diferencovateľná na intervale I. Potom pre každé $x\,,\ x_0 \in I$ platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt$$

(tento vzťah sa nazýva *Taylorov vzorec so zvyškom v integrálnom tvare*).

---

98. Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} \,, \quad 0 < \alpha < \pi \,;$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2 + x + 1} \,;$
3. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}} \,;$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^{15} \sqrt{1 + 3x^8} \, dx \,;$
5. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \,;$
6. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \,;$
7. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x} \,;$
8. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \,;$
9. $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} \,;$
10. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} \,, \quad a, b > 0 \,;$
11. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\sin x} \, dx \,;$
12. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x \sin^m x \, dx \,, \quad m \in \mathbf{N} \,;$
13. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} \, dx \,;$
14. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x \cos^2 x \, dx \,;$
15. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x}) \operatorname{tg} x \, dx \,;$
16. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x e^x \sin x \, dx \,;$

[11] pritom kladieme $0!! := 1$

17. $\int_1^e (1-\ln x)^2\,dx$;

18. $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$;

19. $\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$;

20. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$;

21. $\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}$, kde $f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$;

22. $\int_{-2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'\,dx$;

23. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx$;

24. $\int_0^{\pi} x\operatorname{sgn}\cos x\,dx$;

25. $\int_0^2 [e^x]\,dx$.

2.3 Integrál ako funkcia hornej (dolnej) hranice

Veta 14. *Nech* $f\in\mathcal{R}[a,b]$, $c\in[a,b]$ *a nech funkcia* $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ *je daná predpisom*

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt \quad ^{12}.$$

Potom

a) F *je spojitá funkcia;*

b) *ak funkcia* f *je spojitá v bode* $x_0\in[a,b]$, *tak funkcia* F *má v bode* x_0 *vlastnú deriváciu (v prípade* $x_0=a$ *alebo* $x_0=b$ *príslušnú jednostrannú deriváciu) rovnú* $f(x_0)$.

Poznámka. Z vety 14 vyplýva veta 2 z odseku 1.1.

99. Nech $f:[c,d]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, funkcie φ, ψ sú diferencovateľné na intervale I a nech $\varphi(I)\subset[c,d]$, $\psi(I)\subset[c,d]$. Potom funkcia $G:I\to\mathbf{R}$ daná predpisom

$$G(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

je diferencovateľná na I a platí

$$G'(x)=f(\psi(x))\,\psi'(x)-f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\ . \tag{2.3}$$

Dokážte!

100. Vypočítajte[13]:

1. $\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2\,dx$;

2. $\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2\,dx$;

3. $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2\,dx$;

4. $\int_a^b \left(\frac{d}{dx}\sin x^2\right)\,dx$;

5. $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2\,da$.

---

[12] pretože hodnota určitého integrálu sa nezmení, ak integračnú premennú označíme x namiesto t, mohli by sme predpis funkcie F zapísať aj v tvare $F(x)=\int_c^x f(x)\,dx$

[13] symbolom $\frac{df}{dx}$ (resp. $\frac{df(x)}{dx}$) označujeme deriváciu funkcie $y=f(x)$; dx tu má podobnú úlohu ako v symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ (kde označuje, ,,podľa čoho integrujeme“): určuje, čo v danom výraze ,,pokladáme za premennú“ (napr. $\frac{d}{dx}(\alpha x^2)=2\alpha x$, $\frac{d}{d\alpha}(\alpha x^2)=x^2$, $\frac{d}{d\alpha}\,x^2=0$)

101. Nájdite f', ak

1. $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$;

2. $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

3. $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt$.

102. 1. Nájdite lokálne extrémy funkcie $F(t) = \int_0^{e^t} \dfrac{x^4-16}{1+x}\,dx$.

2. Nájdite lokálne extrémy a inflexné body funkcie $y = \int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$.

103. Vypočítajte limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos x^2\,dx}{x}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}\,dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}\,dx}$.

104. Nech $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbf{R}$. Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx$.

105. Nech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je periodická funkcia s periódou ω, $f \in \mathcal{R}[0,\omega]$, $a \in \mathbf{R}$ a nech funkcia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je daná predpisom $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \mathbf{R}$. Dokážte nasledujúce tvrdenia:
1. funkcia F je súčtom spojitej periodickej funkcie s periódou ω a lineárnej funkcie;
2. funkcia F je periodická práve vtedy, keď $\int_0^\omega f(t)\,dt = 0$.

106. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$, nech funkcia $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ je daná predpisom $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Potom
1. funkcia F je lipschitzovsky spojitá na $[a,b]$ (tj.

$$\exists\, L \in \mathbf{R}^+ \;\forall\, x, y \in [a,b] : |F(x) - F(y)| \le L|x-y| \quad);$$

2. funkcia F nemôže mať v žiadnom bode $x_0 \in [a,b]$ nevlastnú deriváciu (v prípade $x_0 = a$, $x_0 = b$ nevlastnú jednostrannú deriváciu).
Dokážte!

107. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$, nech funkia $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ je daná predpisom $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dokážte nasledujúce tvrdenia:
1. ak $x_0 \in (a,b)$ je bod odstrániteľnej nespojitosti funkcie f, tak funkcia F je diferencovateľná v bode x_0;
2. ak $x_0 \in (a,b)$ je bod nespojitosti 1. druhu funkcie f, tak funkcia F má vlastné jednostranné derivácie v bode x_0, ale nie je tam diferencovateľná.

108. Zostrojte funkciu $f \in \mathcal{R}[a,b]$, pre ktorú je funkcia $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ diferencovateľná na $[a,b]$, ale pre nekonečne veľa $x \in [a,b]$ platí $F'(x) \ne f(x)$.

109. Zostrojte takú nespojitú riemannovsky integrovateľnú funkciu $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, aby pre funkciu $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in [0,1]$, platilo $F' = f$.

2.4 Vety o strednej hodnote

Veta 15 (*prvá veta o strednej hodnote*). *Nech* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, *pričom* $g(x) \geq 0$ *pre všetky* $x \in [a,b]$ ($g(x) \leq 0$ *pre všetky* $x \in [a,b]$). *Označme* $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. *Potom existuje* $\mu \in \mathbf{R}$ *také, že* $m \leq \mu \leq M$ *a*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Ak funkcia f *je naviac spojitá na* $[a,b]$, *tak existuje* $c \in [a,b]$ [14] *také, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Špeciálne, pre každú funkciu $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *existuje číslo* μ *také, že* $m \leq \mu \leq M$ *a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

(číslo μ s touto vlastnosťou sa nazýva *stredná hodnota funkcie* f *na intervale* $[a,b]$)[15].

110. Nájdite strednú hodnotu funkcie f na intervale I, ak:

1. $f(x) = \sin 3x, \quad I = [0, \pi/3]$;
2. $f(x) = x^4, \quad I = [0,1]$;
3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0, 100]$.

111. Nech funkcie f, g sú spojité na intervale $[a,b]$, nech $g(x) \geq 0$ pre všetky $x \in [a,b]$ ($g(x) \leq 0$ pre všetky $x \in [a,b]$). Potom existuje $c \in (a,b)$ také, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Dokážte!

112. Určte znamienko nasledujúcich integrálov:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$;
3. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} x^2 \ln x\,dx$;
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$;
5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} \sin x^2\,dx$;
6. $\displaystyle\int_{\ln(\pi/2)}^{T} \cos e^x\,dx\ , \quad T > \ln(\pi/2)$.

Riešenie. 1.

$$\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} x^{158} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} x^{158} \sin x\,dx\ ,$$

pritom podľa tvrdenia z pr. 111 (pre $f(x) = x^{158}$, $g(x) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$) je

$$\int_0^{\pi} x^{158} \sin x\,dx = c_1^{158} \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2c_1^{158}$$

pre niektoré $c_1 \in (0,\pi)$ a

$$\int_{\pi}^{2\pi} x^{158} \sin x\,dx = c_2^{158} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -2c_2^{158}$$

[14] možno dokonca dokázať že $c \in (a,b)$ (pozri riešenie pr. 111)

[15] pre spojitú funkciu $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ teda platí $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ pre niektoré $c \in (a,b)$, čo je vlastne len iná formulácia Lagrangeovej vety o strednej hodnote pre funkciu $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

pre niektoré $c_2 \in (\pi, 2\pi)$.

Pretože $c_1 \in (0,\pi)$ a $c_2 \in (\pi, 2\pi)$, je zrejme $0 < c_1 < c_2$, a teda $c_1^{158} < c_2^{158}$. Preto

$$\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx = 2c_1^{158} - 2c_2^{158} < 0 \,.$$

Poznámky. 1. Keby sme pri riešení pr. 112.1 použili namiesto tvrdenia z pr. 111 vetu 15, podarilo by sa nám dokázať len nerovnosť $\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx \le 0$ (z vety 15 totiž vyplýva iba $c_1 \in [0,\pi]$, $c_2 \in [\pi, 2\pi]$, odtiaľ $0 \le c_1 \le c_2$, a teda $2(c_1^{158} - c_2^{158}) \le 0$).

2. Nerovnosť $\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx < 0$ možno dokázať aj na základe tvrdenia z pr. 76.2 (ktorého dôsledkom je napokon aj tvrdenie z pr. 111): Pretože $\int_\pi^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx = -\int_0^\pi (x+\pi)^{158} \sin x \, dx$ (stačí použiť substitúciu $x = t - \pi$), je $\int_0^{2\pi} x^{158} \sin x \, dx = \quad (= \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}) \quad = \int_0^\pi [x^{158} - (x+\pi)^{158}] \sin x \, dx < 0$; posledná nerovnosť vyplýva z tvrdenia pr. 76.1 (ktoré je špeciálnym prípadom tvrdenia z pr. 76.2).

113. Vypočítajte limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$;

2. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1}$;

3. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x}$, kde $0 < a < b$, $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia ;

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

Riešenie. 1. Podľa vety 15 je

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx = \frac{1}{1+c_n} \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{1+c_n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

pre niektoré $c_n \in [0,1]$. Postupnosť $\left\{ \dfrac{1}{1+c_n} \right\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená ($c_n \in [0,1]$ pre každé $n \in \mathbf{N}$, preto $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{1+c_n} \le 1, \quad n \in \mathbf{N}$) a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, preto

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+c_n} \cdot \frac{1}{n+1} \right) = 0 \,.$$

114. Nech strednou hodnotou spojitej funkcie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ na ľubovoľnom intervale $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ je vždy to isté číslo $k \in \mathbf{R}$. Potom $f(x) \equiv k$, $x \in [a,b]$. Dokážte!

115. Nech pre spojitú funkciu $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ a spojitú nezápornú funkciu $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ platí $fg \in \mathcal{R}[a,b]$. Potom existuje $c \in \mathbf{R}$ také, že

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(c) \int_a^b g(x) \, dx \,. \tag{2.4}$$

Dokážte!

Veta 16 (*druhá veta o strednej hodnote*). *Nech* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *je montónna funkcia,* $g \in \mathcal{R}[a,b]$. *Potom existuje* $c \in [a,b]$ *také, že*

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(a) \int_a^c g(x) \, dx + f(b) \int_c^b g(x) \, dx \quad [16].$$

[16] pre niektoré špeciálne prípady dokážeme túto rovnosť v pr. 119 a 387

116. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. Nech $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je neklesajúca funkcia, nech $A \le \lim_{x\to a+} f(x)$, $B \ge$ $\ge \lim_{x\to b-} f(x)$. Potom existuje $c \in [a,b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = A\int_a^c g(x)\,dx + B\int_c^b g(x)\,dx.$$

2_0. Nech $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je neklesajúca (nerastúca) funkcia a $f(a)\ge 0$ $\quad(f(b)\ge 0)$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_c^b g(x)\,dx \tag{2.5}$$

$$\left(\quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx \quad\right) \tag{2.6}$$

pre niektoré $c \in [a,b]$ (rovnosti (2.5) a (2.6) sa nazývajú *Bonnetove vzorce*).

117. Pomocou druhej vety o strednej hodnote dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $\displaystyle\left|\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\right| \le \frac{2}{\sqrt{a}}\,, \quad 0<a<b\,;$ $\qquad$ 2_0. $\displaystyle\left|\int_a^b \frac{1}{x}e^{-\alpha x}\cos x\,dx\right| \le \frac{2}{a}\,, \quad 0<a<b\,;$

3. $\displaystyle\left|\int_a^b \sin x^4\,dx\right| \le \frac{1}{2a^3}\,, \quad 0<a<b\,;$

4_0. $\displaystyle\left|\int_a^b \cos\varphi(x)\,dx\right| \le \frac{2}{\varphi'(a)}\,, \quad 0<a<b$, kde $\varphi:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ je dvakrát diferencovateľná funkcia, $\varphi''(x)\ge 0$ pre všetky $x\in(0,\infty)$ a $\varphi'(0)>0$.

Riešenie. 1. Pre funkcie $f(x)=1/\sqrt{x}$, $g(x)=\sin x$ sú na intervale $[a,b]$ splnené všetky predpoklady tvrdenia z pr. 116.2 (ktoré je špeciálnym prípadom vety 16), preto

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_a^c \sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}(\cos a - \cos c)\,.$$

Pretože $|\cos a - \cos c| \le |\cos a| + |\cos c| \le 2$, je

$$\left|\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x\,dx\right| = \frac{1}{\sqrt{a}}|\cos a - \cos c| \le \frac{2}{\sqrt{a}}\,.$$

118. Dokážte rovnosť

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x^2} \sin e^t\,dt = 0\,.$$

119. Nech $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech derivácia f' funkcie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je nezáporná riemannovsky integrovateľná funkcia definovaná na $[a,b]$. Dokážte za týchto predpokladov druhú vetu o strednej hodnote použitím integrácie per partes a prvej vety o strednej hodnote!

2.5 Niektoré aplikácie Riemannovho určitého integrálu

Veta 17. *Nech* $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ *sú spojité funkcie a* $f(x) \le g(x)$ *pre všetky* $x \in [a,b]$. *Potom plošným obsahom*[17] *množiny* $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$ *je číslo*

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx\ .$$

120[18]**.** Vypočítajte plošný obsah útvaru ohraničeného krivkami:

1. $y = \dfrac{x^2}{2}\,,\quad y = 2 - \dfrac{3}{2}x\ ;$

2. $y = f(x) = 2 - 4x^2 + 4x^3 - x^4\,,\quad y = 0\,,\quad x = x_1\,,\quad x = x_2\,,$ kde $x_1,\ x_2$ sú body lokálneho maxima funkcie f ;

3. $y = |\log x|\,,\quad y = 0\,,\quad x = 0.1\,,\quad x = 10\ ;$

4. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,,\quad y + x^2 = 0\,,\quad x = 1\ ;$

5. $y = \operatorname{tg} x\,,\quad y = \dfrac{2}{3}\cos x\,,\quad x = 0\ ;$

6. $y = \arcsin x\,,\quad y = \arccos x\,,\quad y = 0\ ;$

7. $y = \sin^3 x + \cos^3 x\,,\quad y = 0\,,\qquad x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]\ ;$

8. $y = 6x^2 - 5x + 1\,,\quad y = \cos \pi x\,,\qquad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\ ;$

9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ ;$

10. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)\ ;$

11. $y^2 = \sin^2 x \cos x\,,\qquad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\ ;$

12. $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1\,,\quad x = 0\,,\quad y = 0\ ;$

13. $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2\ ;$

14. $(y - x + 2)^2 = 9y\,,\quad x = 0\,,\quad y = 0\ ;$

15. $x^2 + y^2 = 16\,,\quad x^2 + y^2 = 4y\,,\quad \sqrt{3}\,y - x = 4\sqrt{3}\,,\quad y + \sqrt{3}\,x = 4\ ;$

16. $x^2 + y^2 = 3a^2\,,\quad x^2 = 2ay\,,\quad y^2 = 2ax\ .$

Riešenie. 1. Krivky $y = \dfrac{x^2}{2}$ a $y = 2 - \dfrac{3}{2}x$ sa pretínajú v bodoch, ktorých x-ové súradnice nájdeme riešením rovnice

$$\frac{x^2}{2} = 2 - \frac{3}{2}x\ ;$$

tej vyhovujú čísla $x_1 = -4,\ x_2 = 1$. Pre všetky $x \in (-4,1)$ platí $2 - \dfrac{3}{2}x > \dfrac{x^2}{2}$ [19]. Útvar ohraničený krivkami $y = \dfrac{x^2}{2}$ a $y = 2 - \dfrac{3}{2}x$ je teda množina $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ -4 \le x \le 1,\ \dfrac{x^2}{2} \le y \le 2 - \dfrac{3}{2}x\}$ a jeho plošným obsahom je podľa vety 17 číslo

$$\int_{-4}^{1} \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_{-4}^{1} = \frac{125}{12}\ .$$

[17] korektná definícia pojmov plošný obsah rovinného útvaru, objem telesa, plošný obsah povrchu telesa, dĺžka rovinnej krivky presahuje rámec tohto textu, čitateľ ju môže nájsť napr. v [10]

[18] všetky parametre vystupujúce v pr. 120–141 pokladáme za kladné

[19] spojitá funkcia $y = \left(2 - \dfrac{3}{2}x\right) - \dfrac{x^2}{2}$ nadobúda nulové hodnoty len v bodoch $x_1 = -4,\ x_2 = 1$, preto na intervale $(-4,1)$ nemení znamienko; na zistenie jej znamienka na tomto intervale stačí nájsť funkčnú hodnotu v niektorom jeho bode

10. Rovnosť $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ možno upraviť na tvar $|y| = |x|\sqrt{a^2 - x^2}$, krivka $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ je teda zjednotením grafov funkcií $f_1(x) = |x|\sqrt{a^2 - x^2}$, $f_2(x) = -|x|\sqrt{a^2 - x^2}$, pritom $f_1(x) \geq f_2(x)$ pre všetky $x \in [-a, a]$ [20]. Útvar ohraničený krivkou $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ je preto množina $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ -a \leq x \leq \leq a,\ -|x|\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq |x|\sqrt{a^2 - x^2}\}$ a jeho plošný obsah je

$$\int_{-a}^{a} \Big(|x|\sqrt{a^2 - x^2} + |x|\sqrt{a^2 - x^2}\Big)\, dx = 2\int_{-a}^{a} |x|\sqrt{a^2 - x^2} dx \overset{(1)}{=} 4\int_{0}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2} dx = 4\left[-\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3}a^3$$

(rovnosť (1) vyplýva z párnosti integrandu – pozri pr. 93.1).

121. Vypočítajte plošný obsah krivočiareho štvoruholníka ohraničeného grafmi elíps $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1 \quad (a > b)$.

122. 1. Vypočítajte plošný obsah tej časti útvaru ohraničeného krivkami $y^m = x^n$ a $y^n = x^m \quad (m, n \in \mathbf{N},\ m > n)$, ktorá leží v prvom kvadrante.

2. Vypočítajte plošný obasah celého útvaru!

123. Vypočítajte plošný obsah útvaru ohraničeného parabolou $y = x^2 + 4x + 9$ a jej dotyčnicami v bodoch $x_1 = -3,\ x_2 = 0$.

124. Priamka sa dotýka paraboly v bode A, tetiva BC paraboly je s ňou rovnobežná. Dokážte, že plošný obsah útvaru ohraničeného úsečkou BC a parabolou je $4P/3$, kde P je plošný obsah trojuholníka ABC.

125. 1. Nech sú dané čísla p, q, b, pričom $b \geq q$. Pre ktoré $k \in \mathbf{R}$ je plošný obsah útvaru ohraničeného krivkami $y = x^2 + px + q$ a $y = kx + b$ minimálny?

2. Kedy je plošný obsah útvaru ohraničeného parabolou $x^2 = 2py$ $(p > 0$ je dané) a normálou k nej najmenší?

Veta 18. *Nech $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sú spojité funkcie, nech $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in [a, b]$. Potom objem telesa, ktoré vznikne rotáciou množiny $M = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ okolo osi Ox, je číslo*

$$\pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))\, dx\ .$$

Ak $a \geq 0$, tak objem telesa, ktoré vznikne rotáciou množiny M okolo osi Oy, je číslo

$$2\pi \int_a^b x(g(x) - f(x))\, dx$$ [21].

126. Vypočítajte objem telesa, ktoré vzniklo rotáciou plochy ohraničenej grafmi kriviek

1. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}, \quad x \in [0, a]\,,$ okolo osi Ox ;
2. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad x = a + h$ okolo osi Ox ;

---

[20] krivku $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ možno samozrejme zapísať aj v tvare zjednotenia grafov iných funkcií premennej x (napr. $g_1(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $g_2(x) = -x\sqrt{a^2 - x^2}$), uvedené vyjadrenie nám však vyhovuje preto, lebo $f_1(x) \geq f_2(x)$ pre všetky $x \in [-a, a]$ a f_1, f_2 sú spojité funkcie

[21] z geometrickej interpretácie potom vyplýva, že pre spojitú rastúcu funkciu $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ takú, že $a \geq 0,\ f(a) \geq 0$, platí

$$2\int_a^b x f(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \left(b^2 - (f^{-1}(x))^2\right)\, dx$$

(porovnaj s pr. 137 a 143)

3. $2px = y^2\,,\quad 2q(a-x) = y^2$ okolo osi Ox ;

4. $2px = y^2\,,\quad 2q(x-a) = y^2 \quad (q > p)$ okolo osi Ox ;

5. $y = 2x - x^2\,,\quad y = 0$ a) okolo osi Ox ; b) okolo osi Oy ;

6. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\,,\quad y = b\left|\dfrac{x}{a}\right|$ a) okolo osi Ox ; b) okolo osi Oy ;

7. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$ okolo osi Ox ;

8. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ okolo osi Ox ;

9. $y = \cos x\,,\quad y = \dfrac{9}{2\pi^2}\,x^2$ okolo osi Ox ;

10. $y = x\,,\quad y = x + \sin^2 x\,,\quad x = 0\,,\quad x = \pi$ okolo osi Oy ;

11. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}\,,\quad y = 0\,,\quad x = 0\,,\quad x = a$ okolo osi Oy ;

12. $y = x\sqrt{\dfrac{3+3x}{3-x}}\,,\quad x = 0\,,\quad x = 2\,,\quad y = 6$ okolo osi Oy ;

13. $y = \arcsin x\,,\quad x = 1\,,\quad y = -\dfrac{\pi}{2}$ okolo priamky $y = \dfrac{\pi}{2}$.

127. *Tórus* je teleso, ktoré vznikne rotáciou kruhu (s polomerom a) okolo osi ležiacej v rovine kruhu, ktorej vzdialenosť od stredu kruhu je $b \quad (b \geq a)$. Nájdite vzorec pre jeho objem!

128. Nájdite vzorec pre objem zrezaného rotačného kužela (rovina rezu je kolmá na os rotácie) s polomermi základní R, $r \quad (r < R)$ a výškou h.

129. Rovina kolmá na os rotačného paraboloidu z neho odsekáva segment s polomerom základne r a výškou h. Vypočítajte objem tohto segmentu!

130. Vypuklá šošovka je ohraničená dvoma súosými paraboloidmi, jej priemer (v rovine prieniku paraboloidov) je D, hrúbka (v ich spoločnej osi) je h. Vypočítajte objem V šošovky!

131. Parabolický segment je ohraničený oblúkom paraboly a jej tetivou dĺžky $2a$, ktorá je kolmá na os paraboly a je vzdialená h od vrcholu paraboly. Nájdite objem telesa, ktoré vznikne rotáciou tohto segmentu okolo tetivy!

Veta 19. *Nech* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *je spojite diferencovateľná funkcia. Potom dĺžkou krivky* $\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\,;\ x\in[a,b],\ y=f(x)\}$ *je číslo*

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,.$$

132. Vypočítajte dĺžku krivky danej rovnicou

1. $y = x^{3/2},\quad x\in[0,4]$;

2. $y^2 = 2px\,,\quad x\in[0,x_0]$;

3. $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y\,,\quad y\in[1,e]$;

4. $y = 2a\ln\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - 4\sqrt{ax}\,,\quad x\in[0,x_0] \quad (x_0 < a)$;

5. $y = \sqrt{e^{2x}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}\,,\quad x\in[0,1]$;

6. $y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)\,,\quad x\in[1,a+1]$;

7. $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}\,, \quad y \in [b, a]$;

8. $y = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} - \sqrt{1 - x^2}\,, \quad |x| \le a < 1$;

9. $y = a \ln \dfrac{a^2}{a^2 - x^2}\,, \quad x \in [0, b] \qquad (b < a)$;

10. $y = \dfrac{x}{6} \sqrt{x + 12}\,, \quad x \in [-11, -3]$;

11. $e^y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\,, \quad x \in [a, b]$;

12. $y = \sqrt{2x - x^2} - 1\,, \quad x \in \left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$;

13. $y = \ln \cos x\,, \quad x \in [0, a] \qquad \left(a < \dfrac{\pi}{2}\right)$;

14. $y = 2\sqrt{1 + e^{x/2}}\,, \quad \ln 9 \le x \le \ln 64$;

15. $y = \dfrac{x}{4}\sqrt{2 - x^2}\,, \quad x \in [0, 1]$;

16. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}\,, \quad x \in \left[0, \dfrac{5}{3}a\right]$;

17. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

133. Vypočítajte dĺžku krivky $y = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\, dt$.

134. Vypočítajte obvod útvaru ohraničeného krivkami $y^3 = x^2$, $y = \sqrt{2 - x^2}$.

135. Vypočítajte dĺžku tej časti krivky $x^{2/3} - y^{2/3} = a^{2/3}$, ktorá leží vnútri paraboly $27ax = 10\sqrt{10}\, y^2$.

136. Nech M je bod *reťazovky* $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, l jej dotyčnica v bode M. Označme M_1 projekciu bodu M na os Ox a N projekciu bodu M_1 na priamku l. Dokážte, že dĺžka oblúka AM reťazovky (kde $A \equiv (0, a)$ je vrchol reťazovky) je rovnaká ako dĺžka úsečky MN.

137. Nech $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ je prostá spojite diferencovateľná funkcia, pričom $f'(x) \ne 0$ pre všetky $x \in [a, b]$, $f(b) > f(a)$. Potom

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + [(f^{-1})'(x)]^2}\, dx \,.$$

Dokážte uvedenú rovnosť a interpretujte ju geometricky!

Veta 20. a) *Nech $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia. Potom plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou krivky $y = f(x)$ okolo osi Ox, je číslo*

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \,.$$

b) *Ak naviac $a \ge 0$, tak plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou krivky $y = f(x)$ okolo osi Oy, je číslo*

$$2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \,.$$

138. Vypočítajte plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou krivky

1. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}\,, \quad x \in [0, a]\,, \qquad$ okolo osi Ox ;

2. $y = \operatorname{tg} x\,, \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]\,, \qquad$ okolo osi Ox ;

3. $y^2 = 2px\,, \quad x \in [0, x_0]\,, \qquad$ a) okolo osi Ox ; $\qquad$ b) okolo osi Oy ;

4. $x = a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}\,,\quad 0 < b \le y \le a\,,\qquad$ okolo osi Ox ;

5. $y = \dfrac{1}{2a}(a^2+x^2)\,,\quad x \in [0,a]\,,\qquad$ okolo osi Ox ;

6. $y = \dfrac{1}{x}\,,\quad x \in [1,a]\,,\qquad$ okolo osi Ox ;

7. $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\,,\quad x \in \left[\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{3}\right]\,,\qquad$ okolo osi Ox ;

8. $y = \dfrac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)\,,\quad x \in \left[\dfrac{1}{e}, e\right]\,,\qquad$ okolo osi Ox ;

9. $y = a\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{x(a-x)}\,,\quad x \in \left[\dfrac{a}{4}, \dfrac{3a}{4}\right]\,,\qquad$ okolo osi Ox ;

10. $y = \dfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)\,,\quad x \in [0,1]\,,\qquad$ okolo osi Oy .

139. Vypočítajte plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou oblúka reťazovky $y = a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$ odrezaného priamkou $y = 5a/3$ okolo tejto priamky.

140. Vypočítajte plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou oblúka kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ od bodu $A \equiv (a, 0)$ po bod $B \equiv (0, a)$ okolo priamky $x + a = y$.

141. Nájdite vzorec pre výpočet plošného obsahu povrchu segmentu rotačného paraboloidu s výškou h a polomerom základne R.

142. Krivka $y = \cos x,\ x \in [-\pi, \pi],$ rotuje okolo priamky $y = a$. Pri akom a bude plošný obsah S množiny, ktorá vznikne touto rotáciou, minimálny? Vypočítajte tento minimálny plošný obsah!

143. Nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je nezáporná prostá spojite diferencovateľná funkcia, pričom $a \ge 0$, $f(a) \le f(b)$, $f'(x) \ne 0$ pre všetky $x \in [a,b]$. Potom

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} x\sqrt{1+[(f^{-1})'(x)]^2}\,dx\,.$$

Dokážte uvedenú rovnosť a interpretujte ju geometricky!

Poznámka (*Newtonov integrál a zovšeobecnená primitívna funkcia*). Pri riešení príkladov 91.1 a 95.7 sme sa stretli s pojmom Newtonov integrál, preto na tomto mieste uvádzame jeho definíciu a niektoré základné tvrdenia.

Nech $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ je primitívna funkcia k funkcii $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, nech existujú konečné $\lim_{x\to a} F(x)$, $\lim_{x\to b} F(x)$. *Newtonovým integrálom funkcie* f *na intervale* (a,b) sa potom nazýva číslo

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F(x)]_a^b := \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)\,.$$

Použitím pojmu Newtonovho integrálu môžeme vetu 11 (Newtonov–Leibnizov vzorec) sformulovať takto:

Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *a existuje* $(N)\int_a^b f(x)\,dx$. *Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Pojem Newtonovho integrálu môžeme zovšeobecniť, ak v jeho definícii použijeme namiesto pojmu primitívnej funkcie pojem zovšeobecnenej primitívnej funkcie definovaný nasledovne:

Spojitá funkcia F definovaná na intervale I sa nazýva *zovšeobecnená primitívna funkcia k funkcii* $f: I \to \mathbf{R}$, ak existuje konečná množina $K \subset I$ taká, že

$$\forall\, x \in I \setminus K : F'(x) = f(x) \; .$$

(V súvislosti s takto zovšeobecneným pojmom Newtonovho integrálu si všimnite pr. 87.)

Veta (*integrácia per partes pre Newtonov integrál*). *Nech* $F,\ G : (a,b) \to \mathbf{R}$ *sú zovšeobecnené primitívne funkcie k funkciám* $f,\ g : (a,b) \to \mathbf{R}$, *nech existuje* $(N)\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$ *a konečné* $\lim_{x\to a} F(x)G(x)$, $\lim_{x\to b} F(x)G(x)$. *Potom*

$$(N)\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_a^b - (N)\int_a^b F(x)g(x)\,dx \; .$$

Veta (*substitučná metóda pre Newtonov integrál*). *Nech* ω *je spojitá rýdzomonotónna funkcia zobrazujúca interval* (a,b) *na interval* (c,d) $\quad (a,b,c,d \in \mathbf{R}^*)$; *nech pre každé* $x \in (a,b) \setminus K$, *kde* K *je konečná množina, existuje nenulová vlastná derivácia* $\omega'(x)$. *Potom*

$$(N)\int_a^b f(\omega(x))\,|\omega'(x)|\,dx = (N)\int_c^d f(x)\,dx \; ,$$

ak aspoň jeden z uvedených integrálov existuje.

Využime teraz Newtonov integrál pri výpočte $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ (pr. 91.1) a $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,dx$ (pr. 95.7):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x} &= (N)\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = (N)\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = (N)\int_0^{\pi/2} \frac{dx/\cos^2 x}{2\,\mathrm{tg}^2 x + 1} = \\
&= \left| \begin{array}{cc} \mathrm{tg}\, x = t & \\ dx/\cos^2 x = dt & \mathrm{tg}\,((0,\pi/2)) = (0,\infty) \end{array} \right| = (N)\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+2t^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}\,t\right]_0^{\infty} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi \; ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arccos x\,dx &= (N)\int_0^1 \arccos x\,dx = \left| \begin{array}{ll} G = \arccos x & g = -1/\sqrt{1-x^2} \\ f = 1 & F = x \end{array} \right| = \\
&= [x \arccos x]_0^1 + (N)\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [x\arccos x]_0^1 + [-\sqrt{1-x^2}]_0^1 = 1 \; .
\end{aligned}$$

2.6 Ďalšie príklady

144$_0$. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť bodov intervalu $[a,b]$, pričom $a_1 = a$, $a_2 = b$. Nech delenie D_n intervalu $[a,b]$ je vytvorené deliacimi bodmi $a_1, \ldots, a_{n+1}$ (usporiadanými podľa veľkosti). Dokážte nasledujúce tvrdenie:

$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálnou postupnosťou delení práve vtedy, keď každý bod intervalu $[a,b]$ je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

145. Dokážte, že pre každé číslo $\lambda \in [0,1]$ a každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $[0,1]$ existuje postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov Dirichletovej funkcie χ taká, že S_n je integrálny súčet pri delení D_n a $\lim_{n\to\infty} S_n = \lambda$.

146. Ak nekonštantná periodická funkcia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je integrovateľná na každom uzavretom ohraničenom intervale $I \subset \mathbf{R}$, tak f má najmenšiu periódu. Dokážte!

147. Ak $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia a $f \in \mathcal{R}[a-\varepsilon, b]$ pre každé $\varepsilon \in (0, b-a)$, tak $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

148. Nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je nezáporná ohraničená funkcia, nech pre každé $\alpha > 0$ je množina $\{x \in [a,b]\,;\ f(x) \geq \alpha\}$ konečná. Potom $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

149. Nech $M \subset [a,b]$ je nekonečne spočítateľná množina. Na $[a,b]$ definujte funkciu f tak, aby bola nespojitá v každom bode množiny M a aby platilo $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

150. Označme $E_n := \left\{ \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n} \right\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, nech $E_n^* := E_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k$, $n \in \mathbf{N}$; nech $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť reálnych čísel. Definujme funkciu $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_n \,, & \text{ak} \quad x \in E_n^* \\ 0 & \text{ak} \quad x \in [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n^* \end{cases} .$$

Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1_0. $f \in \mathcal{R}[0,1]$ práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$;

2. ak $f \in \mathcal{R}[0,1]$, tak $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

151. Ohraničená funkcia $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je riemannovsky integrovateľná práve vtedy, keď existuje normálna postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $[a,b]$ taká, že všetky k nej patriace postupnosti integrálnych súčtov (tj. všetky postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ také, že S_n je integrálny súčet funkcie f pri delení D_n) konvergujú k tomu istému číslu. Dokážte!

152. Nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia. Dokážte, že nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

b) pre každé $\varepsilon > 0$ a každé $\lambda > 0$ existuje delenie D intervalu $[a,b]$, pre ktoré súčet d dĺžok tých jeho čiastočných intervalov, na ktorých je oscilácia funkcie f väčšia alebo rovná λ, je menší ako ε.

(*Osciláciou funkcie* f *na intervale* $[a,b]$ sa nazýva číslo $\omega(f,[a,b]) := \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$.)

153. Ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, tak

$$\lim_{h\to 0} \int_\alpha^\beta |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0 \,.$$

Dokážte!

154. Ak ohraničená funkcia $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je nespojitá v každom bode intervalu $[a,b]$, tak $f \notin \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

155. Ak ohraničená funkcia $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ je spojitá v každom bode $x \in [0,1] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$, tak $f \in \mathcal{R}[0,1]$. Dokážte!

156. Nech $A \subset \mathbf{R}$ je ohraničená množina. Definujme množiny $A^{(n)}$, $n = 0,1,2,\ldots$, nasledovne: $A^{(0)} := A, \ldots, A^{(n+1)} := \left(A^{(n)}\right)'$ (symbol B' označuje množinu všetkých hromadných bodov množiny B). Dokážte tvrdenie:

Ak niektorá z množín $A^{(n)}$, $n = 0,1,\ldots$, má Jordanovu mieru nula, tak aj A má Jordanovu mieru nula.

157. Ak $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je konvexná funkcia a $g \in \mathcal{R}[0,1]$, tak

$$f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) \le \int_0^1 f(g(x))\,dx \,. \tag{2.7}$$

Dokážte!

158. Nech $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a nech pre každú funkciu $g \in \mathcal{R}[a,b]$ platí $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Potom $f(x) = 0$ pre všetky $x \in [a,b]$. Dokážte!

159. Ak $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá nezáporná fukcia, tak

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} = \max_{x\in[a,b]} f(x) \,.$$

Dokážte!

160. Nech $f:[0,\pi] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech $\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = 0$. Potom funkcia f nadobúda aspoň v dvoch rôznych bodoch intervalu $(0,\pi)$ nulovú hodnotu. Dokážte!

161. Ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) > 0$ pre všetky $x \in [a,b]$, tak $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Dokážte!

162$_0$. Ak $f,\ g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) > g(x)$ pre všetky $x \in [a,b]$, tak $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$. Dokážte!

163. Ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) > 0$ pre všetky $x \in [a,b]$, tak existuje interval $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ taký, že $\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) > 0$. Dokážte!

164. Nech $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je nezáporná riemannovsky integrovateľná funkcia. Potom $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ práve vtedy, keď množina $N := \{x \in [a,b]\ ;\ f(x) = 0\}$ nie je hustá v $[a,b]$ (definíciu hustoty pozri v pr. 70). Dokážte!

165. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f(x) \neq 0$ pre všetky $x \in [a,b]$. Potom $f\chi \notin \mathcal{R}[a,b]$. Dokážte!

166. Ak $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá konkávna funkcia, tak

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) .$$

Dokážte!

167. Ak $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia a $f(1) - f(0) = 1$, tak

$$\int_0^1 (f'(x))^2\,dx \geq 1 .$$

Dokážte!

168. Nech $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia, označme

$$\Delta_n := \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right) .$$

Nájdite $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$!

169. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $1 < \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < \frac{43}{42}$;

2. $1 - \dfrac{1}{n+1} < \displaystyle\int_0^1 e^{-x^n}\,dx < 1$;

3. $0.03 < \displaystyle\int_0^1 \frac{x^7}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}}\,dx < 0.05$.

170. Porovnajte čísla $\displaystyle\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\,dx$ a $\dfrac{3\pi}{2}$!

171$_0$. Dokážte nerovnosť

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \int_1^n \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

a na jej základe rovnosť

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n} = 1 .$$

172. Vypočítajte približne $1^5 + 2^5 + \cdots + 100^5$.

173. Nájdite $\lim_{n\to\infty} S_n$, ak

1. $S_n = \left(\sin\dfrac{\pi}{n}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}$;

2. $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}\,,\quad x \geq 0$;

3. $S_n = \dfrac{2^{1/n}}{n+1} + \dfrac{2^{2/n}}{n+1/2} + \cdots + \dfrac{2^{n/n}}{n+1/n}$;

4. $S_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{\pi}{n^2} + \left(1+\dfrac{2}{n}\right)\sin\dfrac{2\pi}{n^2} + \cdots + \left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n^2}$;

5. $S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{1/(n+k)}\right) - n$;

6. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}$;

7. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

174. Vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,dx\,, \quad m \in \mathbf{N}$;

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx\,, \quad n \in \mathbf{N}$;

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\,, \quad n \in \mathbf{N}$.

175. Vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$ (použite substitúciu $x - \dfrac{1}{x} = t$) ;

2. $\displaystyle\int_a^b \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

176. 1. Nech $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je periodická funkcia s periódou P, $\varphi \in \mathcal{R}[0,P]$, nech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\varphi(nx)\,dx = 0\,.$$

Dokážte!

2. Ak $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, tak

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dokážte!

177. Vypočítajte $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+1/x}\,dx$!

178. Použitím rekurentného vzťahu vypočítajte integrál $I = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, $n \in \mathbf{N}$. Na základe získaného výsledku dokážte rovnosť

$$1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} - \frac{\binom{n}{3}}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,.$$

179. Viacnásobným integrovaním per partes vypočítajte *Eulerov integrál*

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \quad (\,m,\ n \in \mathbf{N}\,)\,.$$

Na základe získaného výsledku dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+m}\binom{n-1}{k} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\,.$$

180. Dokážte rovnosť

$$I_{m,n} := \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} \,, & \text{ak } m,\ n \in \mathbf{N} \text{ sú párne} \\[2ex] \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \,, & \text{ak aspoň jedno z čísel } m,\ n \in \mathbf{N} \text{ je nepárne} \end{cases} .$$

181. Na základe výsledku pr. 96.1 a nerovností $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ pre $n \in \mathbf{N}$ a $x \in (0, \pi/2)$ dokážte *Wallisov vzorec*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \, .$$

182. Vypočítajte integrály:

1. $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx \, dx$;

2. $L_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx \, dx$.

183. Dokážte nasledujúce rovnosti:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} x \sin(\alpha+1)x \, dx = \frac{1}{\alpha}$;

2_0. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} x \cos(\alpha+1)x \, dx = 0$;

3_0. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x \cos(\alpha+1)x \, dx = \frac{\cos(\alpha\pi/2)}{\alpha}$;

4_0. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x \sin(\alpha+1)x \, dx = \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\alpha}$.

184$_0$. Nech $a < \alpha < \beta < b$, nech funkcie $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ sú n–krát spojite diferencovateľné a nech platí

$$\forall\, x \in [a,b] \setminus (\alpha, \beta) : f(x) = g(x) = 0 \, .$$

Potom

$$\int_a^b f^{(n)}(x) g(x) \, dx = (-1)^n \int_a^b f(x) g^{(n)}(x) \, dx \, .$$

Dokážte!

185. Nech $f \in \mathcal{R}[a,b]$ je kladná funkcia. Potom existuje $c \in (a,b)$ také, že $\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$. Dokážte!

186. Vypočítajte limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$;

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt}{\displaystyle\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\, dt}$.

187. Nech $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ je spojitá kladná funkcia. Dokážte, že funkcia $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ daná predpisom

$$g(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x t f(t)\, dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt}$$

je rastúca.

188. Nech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Rozhodnite, či platí tvrdenie ,,Ak $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ pre každé $a > 0$, tak f je nepárna funkcia.“.

189. Spojitá funkcia f je kladná na intervale $[a,b]$ práve vtedy, keď platí

$$\exists\, \lambda > 0 \;\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ a \le \alpha < \beta \le b : \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \ge \lambda(\beta - \alpha) \, .$$

Dokážte!

190. Zostrojte funkciu $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ tak, aby $f\in\mathcal{R}[-1,1]$ a funkcia $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$, $x\in[-1,1]$, nemala deriváciu sprava ani zľava v bode 0.

191. Ukážte, že funkcia $F(x)=\int_{-1}^{x}\sin(1/x)\,dx$ je diferencovateľná v bode 0.

192. Nech funkcia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je riemannovsky integrovateľná na každom intervale $[a,b]\subset\mathbf{R}$, nech $\delta>0$. Definujme funkciu $F_\delta:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ predpisom

$$F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt\ .$$

Dokážte nasledujúce tvrdenia:
1_0. F_δ je spojitá funkcia;
2_0. ak f je spojitá, tak F_δ je spojite diferencovateľná;
3_0. ak f je n–krát spojite diferencovateľná, tak F_δ je $(n+1)$–krát spojite diferencovateľná;
4. ak f je rastúca (klesajúca), tak aj F_δ je rastúca (klesajúca):
5_0. ak f je konvexná (konkávna), tak aj F_δ je konvexná (konkávna);
6. ak f je spojitá, tak platí

$$\forall\,[a,b]\subset\mathbf{R}\;\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,x\in[a,b]:|f(x)-F_\delta(x)|<\varepsilon\ .$$

193. Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech $n\in\mathbf{N}$ a $\varepsilon>0$ sú dané. Potom existuje n–krát spojite diferencovateľná funkcia $f_\varepsilon:[a,b]\to\mathbf{R}$, pre ktorú platí

$$\forall\,x\in[a,b]:|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon\ .$$

Dokážte!

194 (*Steffensenova nerovnosť*). Nech pre spojitú funkciu $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ platí $0\le g(x)\le 1$, $x\in[a,b]$, nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá rastúca funkcia; označme $l:=\int_a^b g(x)\,dx$. Potom

$$\int_a^{a+l} f(t)\,dt\le\int_a^b f(t)g(t)\,dt\le\int_{b-l}^b f(t)\,dt\ .$$

Dokážte!

195. Nech $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je klesajúca funkcia. Potom pre každé $\vartheta\in(0,1)$ platí nerovnosť

$$\vartheta\int_0^1 f(x)\,dx\le\int_0^\vartheta f(x)\,dx\ .$$

Dokážte!

196. Nájdite $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nf(x)e^{-nx}\,dx$, kde $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia.

197. Nech $f,g:[0,1]\to\mathbf{R}$ sú spojité neklesajúce funkcie. Dokážte nerovnosť

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\ge\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 g(x)\,dx\ .$$

198. Nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech v každom intervale $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ existuje práve jedno číslo c také, že $f(c)$ je stredná hodnota funkcie f na intervale $[\alpha,\beta]$. Potom f je rýdzomonotónna funkcia. Dokážte!

199 (*Schwarzova–Cauchyho–Bunjakovského nerovnosť*). Nech $f,\ g\in\mathcal{R}[a,b]$. Potom

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx\ .$$

Dokážte!

200. Nech $f,\ g \in \mathcal{R}[a,b]$, nech $0 < p \le \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) \le P$, $0 < q \le \inf_{x\in[a,b]} g(x) \le \le \sup_{x\in[a,b]} g(x) \le Q$. Potom

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right)^2 \ge 4\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx\ .$$

Dokážte!

201 (*Youngova nerovnosť*). Nech $f:[0,\infty)\to \mathbf{R}$ je diferencovateľná rastúca funkcia taká, že $f(0)=0$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$; nech $g:[0,\infty)\to \mathbf{R}$ je inverzná funkcia k funkcii f. Potom pre každé $a,b\in[0,\infty)$ platí

$$ab \le \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx\ .$$

Dokážte! Na základe toho dokážte nerovnosť

$$\forall\, p>1,\ q>1;\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \forall\, u\ge 0,\ v\ge 0\ :\ uv \le \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}\ . \tag{2.8}$$

202 (*Hőlderova nerovnosť*). Nech $f,\ g\in\mathcal{R}[a,b]$, nech pre čísla $p>1,\ q>1$ platí $1/p+1/q=1$. Potom

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\ .$$

Dokážte[22]!

203. Odhadnite hodnotu integrálu $I=\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx$
1. pomocou prvej vety o strednej hodnote;
2. na základe pr. 166;
3. na základe nerovnosti $\sqrt{1+x^4}<1+x^4/2,\ x>0$;
4. pomocou Schwarzovej–Cauchyho–Bunjakovského nerovnosti.

[22]zrejme špeciálnym prípadom tejto nerovnosti je Schwarzova–Cauchyho–Bunjakovského nerovnosť z pr. 199

Chapter 3

Číselné rady

3. Číselné rady

3.1 Základné pojmy

Ak je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ $(k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, tak symbol $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ (alebo $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots$ [1]) nazývame *(nekonečný číselný) rad*. Symboly $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=m}^{\infty} a_{n+k-m}$ považujeme za totožné, preto — keďže každý rad $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ možno zapísať v podobe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k-1}$ — budú nasledujúce definície a vety formulované spravidla pre rady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Číslo a_k, resp.

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k\,, \quad k \in \mathbf{N}\,,$$

sa nazýva *k–ty člen*, resp. *k–ty čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* [2]. Hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje* (*je konvergentný*), ak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} S_n$, číslo $\lim_{n\to\infty} S_n$ sa potom nazýva *súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* a označuje sa spravidla tým istým symbolom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)$. Ak neexistuje konečná $\lim_{n\to\infty} S_n$, hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje* (*je divergentný*), vtedy možno rozlíšiť tri prípady:

1. ak $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$*;
2. ak $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $-\infty$*;
3. ak $\lim_{n\to\infty} S_n$ neexistuje, hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje*.

Hovoríme, že *rady $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=m}^{\infty} c_n$ majú rovnaký charakter*, ak obidva súčasne konvergujú alebo obidva oscilujú alebo obidva divergujú k $+\infty$ alebo obidva divergujú k $-\infty$.

k–tym zvyškom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva rad $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. *Súčtom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$* (*k–násobkom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*) sa nazýva rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n := \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ $(k\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty}(ka_n))$.

Rad

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots\,,$$

kde $a, q \in \mathbf{R}$ sú dané, sa nazýva *geometrický rad (s kvocientom q)*. Tento rad konverguje, ak $a = 0$ alebo $|q| < 1$; diverguje k $+\infty$ (k $-\infty$), ak $a > 0$ a $q \geq 1$ (ak $a < 0$ a $q \geq 1$); osciluje, ak $a \neq 0$ a $q \leq -1$.

Pre $q \neq 1$ platí

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}\;;$$

[1] niekedy použijeme aj „zmiešané“ označenie, napr. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

[2] rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa niekedy definuje ako postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ alebo ako usporiadaná dvojica postupností $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$

ak $|q| < 1$, tak
$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-q}\ .$$

Veta 1. *Nech je daná postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Potom rady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ *majú rovnaký charakter.*

Veta 2 (*Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie*). *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje práve vtedy, keď platí*
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \ \forall n \in \mathbf{N},\, n > n_0 \ \ \forall p \in \mathbf{N} \ : \ |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon\ .$$

Veta 3 (*nutná podmienka konvergencie*). *Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, tak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

204. Napíšte jedno z možných vyjadrení n–tého člena a_n radu, ak poznáte niekoľko prvých členov[3]:

1. $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \cdots$;
2. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$;
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42} + \cdots$;
4. $1 - \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \cdots$;
5. $2 + \frac{2^2}{1\cdot 2} + \frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$;
6. $\frac{2}{2} - \frac{5}{6} + \frac{8}{18} - \frac{11}{54} + \cdots$.

205. Nájdite n–tý člen a_n a súčet S radu, ak poznáte postupnosť jeho čiastočných súčtov:

1. $S_n = \dfrac{n+1}{n}$;
2. $S_n = \dfrac{-1+2^n}{2^n}$;
3. $S_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n}\,\pi\right)$;
4. $S_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

206. Nájdite n–tý čiastočný súčet S_n nasledujúcich radov, na základe toho rozhodnite, ktoré z nich konvergujú:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + (-2)^n)$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$;
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$;
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$;
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\alpha}{2^{n+1}} \cos\frac{3\alpha}{2^{n+1}}$;
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n!\,\pi}{720}$.

---

[3] to, že hľadáme len „jedno z možných vyjadrení“, je úplne namieste: v prípade $1+2+3+4+\cdots$ môže byť napr. $a_n = n$, $a_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, $a_n = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } n = 4k-3\,, \quad k \in \mathbf{N} \\ 2\,, & \text{ak } n = 4k-2\,, \quad k \in \mathbf{N} \\ 3\,, & \text{ak } n = 4k-1\,, \quad k \in \mathbf{N} \\ 4\,, & \text{ak } n = 4k \quad\ \ , \quad k \in \mathbf{N} \end{cases}$ atď; preto v ďalšom budeme pri takomto zápise radu uvádzať spravidla okrem niekoľkých prvých aj n–tý člen

207. Ktoré z nasledujúcich radov možno na základe vety 3 vyhlásiť za divergentné?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{n}{n^2+3}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^n$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{1000n^2+3}$.

208. Nech je daná rastúca postupnosť $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel a postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; označme $A_n := \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k,\ n = 1, 2, \ldots$.

1. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ [4]. Dokážte!

2. Ak $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Dokážte!

3. Uveďte príklad postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje.

209. Aký musí byť kvocient q geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, aby rad $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$, kde R_n je súčet n–tého zvyšku radu $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, mal súčet $5/4$?

210. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad, nech R_n je súčet jeho n–tého zvyšku. Ak $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická postupnosť, tak $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ je geometrický rad. Dokážte!

211. 1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. Dokážte! Na základe tohto tvrdenia dokážte divergenciu radov $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^p)$ pre $p \leq 1$.

2. Zostane tvrdenie z pr. 211.1 v platnosti, ak v ňom vynecháme predpoklad „$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť“?

212. Konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak

1. pre každé $p \in \mathbf{N}$ je $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0$?

2. pre každé $n \in \mathbf{N}$ je $\lim_{p\to\infty}(a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0$?

3.2 Rady s nezápornými (nekladnými) členmi

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva *radom s kladnými* (*zápornými*, *nezápornými*, *nekladnými*) *členmi*, ak počínajúc niektorým n_0 [5] je $a_n > 0$ $(a_n < 0\,,\ a_n \geq 0\,,\ a_n \leq 0)$.

Nasledujúce kritériá (vety 4, 6, 7, 9 a 10) formulované pre rady s nezápornými členmi možno využívať aj pri vyšetrovaní konvergencie radov s nekladnými členmi; na vyšetrenie konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nekladnými členmi totiž stačí vyšetriť konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$ s nezápornými členmi.

Veta 4 (*porovnávacie kritérium*). **a)** *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú rady s nezápornými členmi, nech počínajúc niektorým n_0 platí $a_n \leq b_n$. Potom z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; z divergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vyplýva divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

b) *Špeciálne, nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rad s kladnými členmi, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} =: K$. Potom*

α) ak $K \in (0,\infty)$, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majú rovnaký charakter;

β) ak $K = 0$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

---

[4] rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ teda vznikne „uzátvorkovaním“ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

[5] Nech V je výroková forma. Hovoríme, že *počínajúc niektorým n_0 (platí) $V(n)$*, ak existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$ platí $V(n)$ (namiesto „počínajúc niektorým n_0“ sa používa tiež spojenie *pre skoro všetky $n \in \mathbf{N}$*).

γ) *ak* $K = \infty$ *a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje, tak diverguje aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veta 5[6]. *Rad* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ [7] *konverguje, ak* $p > 1$, *a diverguje, ak* $p \leq 1$.

213. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n-1)}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n+1}}$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt[3]{2n-1}}$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n^3}{n+5n^5}$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$;
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{3+(-1)^n}{n^2}\right)$;
11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$;
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\ln n}$;
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$;
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$;
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n}-1\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$;
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - n\sin\frac{1}{n^3}\right)$;
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}{n-\ln^2 n}$.

Riešenie. Ak chceme pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ s nezápornými členmi použiť porovnávacie kritérium, snažíme sa

- nájsť konvergentný rad, ktorého členy počínajúc niektorým sú všetky väčšie alebo rovné ako zodpovedajúce členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

  1. $\displaystyle\frac{1}{n5^{n-1}} \leq \frac{1}{5^{n-1}}$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a geometrický rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ konverguje, preto podľa vety 4a) konverguje aj rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}$;

- alebo nájsť divergentný rad, ktorého členy niektorým počínajúc sú všetky nezáporné a menšie alebo rovné ako zodpovedajúce členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

  2. $\displaystyle\frac{5^n}{2^n(2^n-1)} \geq \frac{5^n}{4^n}$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a geometrický rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^{n}$ diverguje, preto podľa vety 4a) diverguje aj rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n-1)}$;

---

[6]pozri tiež pr. 211.1, 227.2 a poznámku k pr. 234.1d)

[7]tieto rady sa nazývajú *Riemannove*, špeciálne rad $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ sa nazýva *harmonický*, rady $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^p)$ pre $p \neq 1$ sa niekedy nazývajú *zovšeobecnené harmonické rady*

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/\ln^2 n}{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^2 n}=\infty$ [8], teda (ako vyplýva z definície limity) počínajúc niektorým n_0 platí $\dfrac{n}{\ln^2 n}\geq 1$, tj. $\dfrac{1}{\ln^2 n}\geq\dfrac{1}{n}$ [9]. Rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ diverguje (vyplýva to z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ a vety 1), preto podľa vety 4a)[10] diverguje aj rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$;

- alebo nájsť rad $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, ktorý má rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, pričom konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ vieme vyšetriť:

14. Pretože $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}$ je nenulová a konečná, majú podľa tvrdenia α) vety 4b) rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ rovnaký charakter. O rade $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ vieme, že konverguje (veta 5), preto konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$;

16. Aby sme mohli použiť vetu 4b), hľadáme rad $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ s kladnými členmi taký, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{d_n}$ je konečná a nenulová (a taký, ktorého konvergenciu vieme vyšetriť); na to použijeme myšlienku výpočtu limít pomocou Taylorových polynómov (pozri pr. I.390):
Pretože

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\qquad\text{pre}\quad u\to 0$$

a pretože $\lim_{n\to\infty}(1/2n)=0$, je

$$\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad\text{pre}\quad n\to\infty\,,$$

$$\frac{1}{2}-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}-n\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad{}^{11}.$$

Z tohto vyjadrenia vidno, že za rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ môžeme zvoliť harmonický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8}+\frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{8}\,,\tag{3.1}$$

teda rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}-n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\right)$ majú podľa tvrdenia α) vety 4b) rovnaký charakter, pritom o harmonickom rade $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ vieme, že diverguje. Preto diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}-n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\right)$.

---

[8] využili sme rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^2 n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln^2 x}$ $(x\in\mathbf{R}^+)$, na výpočet $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln^2 x}$ sme použili l'Hospitalovo pravidlo

[9] táto úvaha kopíruje myšlienku dôkazu tvrdenia γ) vety 4b)

[10] znova pripomeňme, že všetky kritériá z tejto kapitoly (hoci sú formulované pre rady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$) možno použiť pri vyšetrovaní konvergencie radov tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$

[11] pri úpravách sme využili, že $o((1/2n)^2)=o(1/n^2)$, $no(1/n^2)=o(1/n)$ a $-o(1/n)=o(1/n)$

Poznámka. Čitateľovi by sa mohlo zdať, že pri riešení pr. 213.16 sme zabudli preveriť, či rad $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2 - n\ln(1+1/2n))$ je radom s nezápornými (prípadne nekladnými) členmi (inak by sme neboli oprávnení použiť vetu 4). Toto preverenie je zahrnuté vo výpočte limity (3.1): ak totiž $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ je rad s kladnými členmi a $\lim_{n\to\infty}(c_n/d_n)$ je kladná (záporná), tak $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je rad s kladnými (zápornými) členmi.

214. Nájdite všetky hodnoty α, pre ktoré rad $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konverguje, ak:

1. $a_n = n^{\alpha}(\ln(n^2+1) - \ln n^2)$;
2. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\alpha} \ln \dfrac{2n+1}{2n-1}$;
3. $a_n = \left(1 - n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$;
4. $a_n = \left|\ln\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{2}{n-1}\right|^{\alpha}$;
5. $a_n = \alpha^{1/n} + \alpha^{-1/n} - 2\,, \quad \alpha > 0$;
6. $a_n = \alpha^{1/n} - \alpha^{1/(n+1)}\,, \quad \alpha > 0$;
7. $a_n = \dfrac{\ln^{\alpha} n}{n^2}$;
8. $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}$.

215. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} &, \quad \text{ak} \quad n \in \{m^2\,;\, m \in \mathbf{N}\} \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} &, \quad \text{ak} \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{m^2\,;\, m \in \mathbf{N}\} \end{cases} .$$

216. Ak $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$ a postupnosť $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje. Dokážte!

217. Ak rady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergujú a platí $b_n \leq a_n \leq c_n$, $n \in \mathbf{N}$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dokážte[12]!

218. Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členmi, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Dokážte! Platí aj obrátená implikácia?

219. Ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, tak konvergujú aj rady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|/n)$. Dokážte!

220. Dokážte konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$; na základe toho dokážte, že existuje číslo C také, že

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + C + \varepsilon_n\,, \tag{3.2}$$

kde $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. (Číslo C sa nazýva *Eulerova konštanta*, $C \approx 0.577216$).

Veta 6 (*d'Alembertovo kritérium*). *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom*
a) *ak $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;*
b) *ak počínajúc niektorým n_0 platí $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Špeciálne, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} =: k$. Ak $k<1$ $(k>1)$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (diverguje).
(Tento špeciálny prípad sa nazýva *limitný tvar d'Alembertovho kritéria.*)

---

[12] veta 4a) je špeciálnym prípadom tohto tvrdenia (stačí zvoliť $b_n \equiv 0$, $n \in \mathbf{N}$)

Veta 7 (*Cauchyho kritérium*). *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nezápornými členmi. Potom*

a) *ak* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*

b) *ak pre nekonečne veľa* $n \in \mathbf{N}$ *platí* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Špeciálne, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =: k$. *Ak* $k < 1$ $(k > 1)$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (diverguje).*

(Tento špeciálny prípad sa nazýva *limitný tvar Cauchyho kritéria.*)

Veta 8. *Ak* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť kladných čísel, tak*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \,.$$

Dôsledok. *Ak* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť kladných čísel a existuje (vlastná alebo nevlastná)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, *tak existuje aj* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \,.$$

221. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2(n-1)}$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, \quad a > 0$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2 4^{3n}}$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdots(3n)}{(n+1)!} \arcsin\frac{1}{2^n}$;
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

Riešenie. 5.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n n!}{n^n}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = \frac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \,,$$

preto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{e} \,.$$

Ak použijeme d'Alembertovo kritérium v limitnom tvare, dostaneme:

ak $0 < a < e$ (tj. ak $\dfrac{a}{e} < 1$), tak rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ konverguje;

ak $a > e$, tak rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ diverguje.

Zostáva vyšetriť prípad $a = e$.

Hoci v prípade $a = e$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (a limitný tvar d'Alembertovho kritéria nedáva teda žiadnu informáciu o konvergencii radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$), možno aj tu použiť vetu 6: postupnosť $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca [13] a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, preto pre všetky $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} > 1\ ,$$

podľa tvrdenia b) vety 6 je teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$ divergentný.

6. Pre všetky $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{n^5}{2^n+3^n} < \frac{n^5}{3^n}\ .$$

Na dôkaz konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^n}$ použijeme limitný tvar Cauchyho kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{3} = \frac{1}{3} \quad ^{14}.$$

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^n}$ teda podľa Cauchyho kritéria konverguje, z porovnávacieho kritéria potom vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{2^n+3^n}$.

Poznámky. 1. Limitný tvar Cauchyho kritéria sme mohli aplikovať aj priamo na rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{2^n+3^n}$, výpočet $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{2^n+3^n}}$ $\left(=\dfrac{1}{3}\right)$ by však bol trocha komplikovanejší.

2. Na dôkaz konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^n}$ sme mohli rovnako dobre použiť aj d'Alembertovo kritérium.

222[15]**.** Na základe konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dokážte rovnosť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ak

1_0. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

2_0. $a_n = \dfrac{n^n}{(n!\,)^2}$;

3. $a_n = \dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

223. Zostrojte postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel takú, aby $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

224. Zostrojte divergentný[16] rad s kladnými členmi, konvergenciu ktorého možno vyšetriť pomocou d'Alembertovho kritéria, ale nemožno o nej rozhodnúť na základe Cauchyho kritéria.

---

[13] pripomeňme, že dôkaz monotónnosti postupnosti $(1+1/n)^n$ je súčasťou dôkazu existencie konečnej $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$, pozri [23, str. 85]

[14] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (pozri pr. I.135.2, I.380.1)

[15] porovnaj s pr. I.133.1 a I.185.1

[16] ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s kladnými členmi, tak z vety 8 vyplýva: ak o konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ možno rozhodnúť použitím d'Alembertovho kritéria, tak o nej možno rozhodnúť aj na základe Cauchyho kritéria

Poznámka. Dôsledok vety 8, ktorá umožňuje porovnať „silu“ Cauchyho a d'Alembertovho kritéria (pozri poznámku k pr. 224), možno využiť pri výpočte limít: vyplývajú z neho napr. rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ [17].

Veta 9 (*Raabeho kritérium*). *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi. Potom*

a) *ak* $\liminf\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*

b) *ak počínajúc niektorým* n_0 *platí* $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Špeciálne, nech existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) =: k$. *Ak* $k > 1$ $\quad (k < 1)$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (diverguje).*
(Tento špeciálny prípad sa nazýva *limitný tvar Raabeho kritéria.*)

225. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+2}}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)(b+2d)\cdots(b+nd)}, \quad a>0,\ b>0,\ d>0$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln(n+1)}{\ln(2+p)\cdot \ln(3+p)\cdots \ln(n+1+p)}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)\cdot 2\cdot 5\cdots(3n+2)}{n!(n+1)!}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{9^n}$.

Riešenie. 2.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\, e^n}{n^{n+2}} \cdot \frac{(n+1)^{n+3}}{(n+1)!\, e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2},$$

teda

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= n\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} - 1\right) = n\left(\frac{1}{e}\cdot e^{(n+2)\ln(1+1/n)} - 1\right) = \\ &= n\left(e^{(n+2)\ln(1+1/n) - 1} - 1\right). \end{aligned}$$

Pri ďalších úpravách si pomôžeme Taylorovými polynómami:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{pre} \quad x \to 0,$$

preto

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{pre} \quad n \to \infty.$$

---

[17] uvedené rovnosti možno dokázať aj na základe tvrdenia „ak $b_n \ge 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbf{R}^*$, tak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = b$“, ak zvolíme $b_n = 1/n$, resp. $b_n = (1+1/n)^n$; toto tvrdenie vyplýva z pr. I.171 ($\sqrt[n]{b_1\cdots b_n} = e^{(\ln b_1 + \cdots + \ln b_n)/n}$) a možno pomocou neho dokázať aj dôsledok vety 8 (stačí položiť $b_1 = a_1$, $b_n = a_n/a_{n-1}$ pre $n \ge 2$)

Odtiaľ

$$\begin{aligned}(n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 &= (n+2)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1= \\ &= \left(1-\frac{1}{2n}+no\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+2o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1=\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \quad ^{18}.\end{aligned}$$

Ak teraz využijeme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=0$ a $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$, dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(e^{(n+2)\ln(1+1/n)-1}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{3/2n+o(1/n)}-1\right)= \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{e^{3/2n+o(1/n)}-1}{3/2n+o(1/n))}=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

Podľa limitného tvaru Raabeho kritéria teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+2}}$ konverguje.

Poznámka. D'Alembertovo kritérium je špeciálnym prípadom Raabeho kritéria[19], teda ak konvergenciu radu možno vyšetriť použitím vety 6, tak sa o nej dá rozhodnúť aj na základe vety 9. Opačná implikácia neplatí; napr. konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+2}}$, skúmaného v pr. 225.2, nemožno vyšetriť použitím d'Alembertovho kritéria[20]: predpoklady tvrdenia b) tohto kritéria zrejme nemôžu byť v tomto prípade splnené, pretože — ako už vieme — náš rad konverguje; na základe tvrdenia a) vety 6 však o jeho konvergencii nevieme rozhodnúť, pretože

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{e}{(1+1/n)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{(1+1/n)^n(1+1/n)^2}=1\,.$$

Poznamenajme, že konvergenciu uvedeného radu nemožno vyšetriť ani použitím Cauchyho kritéria, pretože

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!\,e^n}{n^{n+2}}}=e\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=1$$

(k výpočtu $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n!}/n)$ pozri poznámku za pr. 224).

226. Uveďte príklad radu, ktorého konvergenciu

1. možno vyšetriť pomocou Cauchyho, ale nie pomocou Raabeho kritéria;
2. možno vyšetriť pomocou Raabeho, ale nie pomocou Cauchyho kritéria.

Veta 10 (*integrálne kritérium*). *Nech* $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ *je nezáporná nerastúca funkcia. Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konverguje (diverguje) práve vtedy, keď* $\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt$ [21] *je vlastná (nevlastná).*

Špeciálne, ak funkcia f *je naviac spojitá, tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konverguje (diverguje), ak* $\lim_{x\to\infty}F(x)$*, kde* F *je primitívna funkcia k funkcii* f*, je vlastná (nevlastná).*

---

[18] využili sme, že $no(1/n^2)=o(1/n)$, $-1/n^2=o(1/n)$, $2o(1/n^2)=o(1/n)$ a $o(1/n)+o(1/n)+o(1/n)==o(1/n)$

[19] ak $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, tj. ak pre niektoré $q\in(0,1)$ platí $\exists n_0\in\mathbf{N}\ \forall n\in\mathbf{N},\ n\ge n_0\ :\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le q$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\infty$; ak počínajúc niektorým n_0 je $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1$, tak počínajúc tým istým n_0 platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le 0<1$

[20] možno samozrejme nájsť aj jednoduchšie príklady dokumentujúce neplatnosť opačnej implikácie

[21] pomocou tejto limity sa definuje *nevlastný Riemannov integrál* $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ (pozri napr. [1])

227. Použitím integrálneho kritéria vyšetrite konvergenciu radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0$;

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}, \quad p > 0$;

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}, \quad p > 0$;

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln^2 n}$.

Riešenie. 6. Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\ln^2(n+1)}}{\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}} = \frac{\pi}{2} ,$$

má podľa tvrdenia α) vety 4b) rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\ln^2(n+1)}$ rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$, ktorého konvergenciu možno vyšetriť použitím integrálneho kritéria: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, kde $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$ je funkcia daná predpisom $f(x) = \displaystyle= \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Funkcia f je zrejme spojitá, nezáporná a nerastúca; jednou z funkcií k nej primitívnych je funkcia $F(x) = -\dfrac{1}{\ln(x+1)}$. Pretože $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ podľa vety 10 konverguje. Pretože rady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\ln^2(n+1)}$ majú rovnaký charakter, konverguje aj rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{n\ln^2(n+1)}$.

228. Nech $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ je nezáporná nerastúca funkcia. Potom
1. existuje konečná $\lim_{n\to\infty}(S_n - \int_1^{n+1} f(x)\,dx)$, kde $S_n := f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ [22];
2. ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje, tak platia nasledujúce odhady:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le S \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1) ,$$

$$\int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx \le R_k \le \int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(k+1) ,$$

kde $\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$, S je súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ a R_k súčet jeho k–teho zvyšku. Dokážte!

229. Koľko prvých členov radu treba sčítať, aby sme našli súčet radu

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ s chybou menšou než 0.1?

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^6 n}$ s chybou menšou než 0.01?

---

[22] z tohto tvrdenia priamo vyplýva veta 10; na jeho základe možno opätovne dokázať rovnosť (3.2) z pr. 220

230. Uveďte príklad nezápornej spojitej funkcie $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ takej, že

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje a $\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt=\infty$;
2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverguje a $\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt$ je konečná.

---

231. Vyšetrite konvergenciu radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{n/2}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n/3}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{(\ln(n+1))^{n/2}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^{2n}$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{q(q+1)\cdots(q+n)}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n+\sin n}{n^2+2\ln n}$;

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,(3+2(-1)^n)}{\sqrt{n}}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$;

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3\left(3-2\sin\frac{n\pi}{3}\right)}$;

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log_{b^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$, $\quad b>0,\ b\neq 1,\ a>0$;

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$;

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+3}{n^2+4}$;

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$;

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+k/\ln n}}$;

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$;

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$;

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\sin(1/n)}$;

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}}-1\right)$;

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$;

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n!}{n^{\alpha}}$;

27. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$;

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(1+n^{\alpha})}$.

232. Nech $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Čo možno povedať o konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, ak

a) $c_n = \max\{a_n, b_n\}$;

b) $c_n = \min\{a_n, b_n\}$

a

1. rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergujú;
2. rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergujú;
3. jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a druhý diverguje?

233. 1_0. Dokážte *logaritmické kritérium*: Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom ak $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} > 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
ak počínajúc niektorým n_0 platí $\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \leq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

2. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{3^{n^{4/3}}}$.

234. 1. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má rovnaký charakter ako rady:

a$_0$) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n^2}$;

c$_0$) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$;

d$_0$) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ [23].

Dokážte!

2. Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-\sqrt{n})^{\sqrt{n}}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{\ln n}}$.

235. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť kladných čísel a existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{2n}}{a_n} =: q$. Potom platí: ak $q < 1/2$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje; ak $q > 1/2$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Dokážte!

3.3 Absolútne a relatívne konvergentné rady

Veta 11. *Ak konverguje rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *tak konverguje aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva *absolútne* (*relatívne*) *konvergentný*, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje (diverguje).

Poznámka. Pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (tj. pri vyšetrovaní absolútnej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) možno použiť kritériá z odseku 3.2. Pretože rady vyhovujúce predpokladom tvrdení b) vety 6 alebo 7 nespĺňajú nutnú podmienku konvergencie[24], možno d'Alembertovo a Cauchyho kritérium sformulovať nasledovne[25]:

---

[23] rovnaký charakter radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ možno využiť napr. na vyšetrenie konvergencie Riemannových radov $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$, $p \geq 0$

[24] pozri tiež poznámku k riešeniu pr. 207

[25] tvrdenie b) Raabeho kritéria takto preformulovať nemožno; výrok ,,ak počínajúc niektorým n_0 je $a_n > 0$ a $n(|a_n|/|a_{n+1}|-1) \leq 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje" totiž neplatí (stačí uvažovať $a_n = (-1)^n/n^p$, $p \in (0,1]$, pozri pr. 239.1)

Veta 6'. *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nenulovými členmi. Potom*

a) *ak* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje;*

b) *ak počínajúc niektorým* n_0 *platí* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Veta 7'. *Nech je daná postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Potom*

a) *ak* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje;*

b) *ak pre nekonečne veľa* $n \in \mathbf{N}$ *platí* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

236. Dokážte, že nasledujúce rady absolútne konvergujú:

1_0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{2^n}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^3+2}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$;

5_0. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sin(1/n)} - \cos\frac{1}{n}\right) \cos\pi n$.

237. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, definujme postupnosti $\{a_n^+\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ nasledovne

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n\,, & \text{ak} \quad a_n \geq 0 \\ 0\,, & \text{ak} \quad a_n < 0 \end{cases} \quad , \qquad a_n^- := \begin{cases} -a_n\,, & \text{ak} \quad a_n \leq 0 \\ 0\,, & \text{ak} \quad a_n > 0 \end{cases} \quad .$$

Potom

1. ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergujú;
2. ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergujú a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^+}{S_n^-} = 1 \,, \tag{3.3}$$

kde S_n^+ (S_n^-) je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$);

3. ak konverguje práve jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Dokážte!

238. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný práve vtedy, keď pre každú ohraničenú postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Dokážte!

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde $a_n > 0$ počínajúc niektorým n_0 alebo $a_n < 0$ počínajúc niektorým n_0, sa nazýva *rad so striedavými znamienkami*.

Veta 12 (*Leibnizovo kritérium*). *Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je rýdzomonotónna*[26] *postupnosť a* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (ktorý je zrejme radom so striedavými znamienkami) *konverguje a pre súčet* R_n *jeho n–tého zvyšku platí odhad*

$$|R_n| < a_{n+1} \,, \quad n \in \mathbf{N} \,. \tag{3.4}$$

[26] tvrdenie zostane v platnosti, aj keď slovo ,,rýdzomonotónna“ nahradíme slovom ,,monotónna“, v (3.4) treba v tom prípade ostrú nerovnosť nahradiť neostrou

Poznámka. Z vety 1 vyplýva, že Leibnizovo kritérium možno vysloviť aj v nasledujúcej podobe:

Veta 12'. *Nech postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vyhovuje nasledujúcim podmienkam:*
1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*;*
2. *existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tak, že* $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ *je rýdzomonotónna postupnosť.*
Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Podobne možno upraviť formulácie dvoch nasledujúcich kritérií — Abelovho a Dirichletovho (vety 13, 14) aj formuláciu integrálneho kritéria.

239. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \sin\frac{1}{n}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$;

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+(-1)^n}}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}\,)$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$.

Riešenie. 2. Pretože $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} > 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$, je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$ rad so striedavými znamienkami, preto na vyšetrenie jeho konvergencie skúsime použiť Leibnizovo kritérium. Musíme teda preveriť splnenie predpokladov vety 12':

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = 0$ [27] (na výpočet $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ sme použili l'Hospitalovo pravidlo);

2. ak pomocou prvej derivácie vyšetríme rast a klesanie funkcie $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$\left(f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}\,, \quad f'(x) > 0 \quad \text{pre} \quad x \in (0, e^2)\,, \quad f'(x) < 0 \quad \text{pre} \quad x \in (e^2, \infty) \right),$$

zistíme, že funkcia f je klesajúca na intervale $[e^2, \infty)$; preto $\left\{\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=8}^{\infty}$ [28] je klesajúca postupnosť.

Rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$ teda podľa Leibnizovho kritéria konverguje.

240. Ukážte, že postupnosť $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ má limitu 0. (Návod: dokážte, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$ diverguje k $-\infty$ [29].) Na základe toho vyšetrite konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

---

[27] pripomeňme, že podmienka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je súčasne nutnou podmienkou konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ (pozri aj poznámku k riešeniu pr. 207), preto z jej nesplnenia by vyplývala divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

[28] $e^2 \approx 7.389$

[29] keby rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergoval, existovala by konečná nenulová $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$

241. Koľko prvých členov radu treba sčítať, aby sme našli súčet radu

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{7/2}}$ s chybou menšou než 10^{-7} ?
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{5/2}2^n}$ s chybou menšou než 10^{-6} ?

242. Rozhodnite o platnosti tvrdenia „ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje“!

Veta 13 (*Abelovo kritérium*)[30]. *Nech*
1. *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*
2. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónna ohraničená postupnosť*[31].

Potom konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Veta 14 (*Dirichletovo kritérium*)[32]. *Nech*
1. *postupnosť* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *čiastočných súčtov radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je ohraničená;*
2. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónna postupnosť a* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Skutočnosť, že existuje $k\in\mathbf{N}$ také, že $\{b_n\}_{n=k}^{\infty}$ je nerastúca (neklesajúca) postupnosť s limitou $a\in\mathbf{R}^*$, budeme v ďalšom zapisovať $b_n \searrow a$ ($b_n \nearrow a$) [33].

243. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(\pi/n)}{n}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\pi/4)}{\ln^2(n+1)}$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln\ln(n+2)}\cos\frac{1}{n}$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$;
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

Riešenie. 4. Ukážeme najprv, že postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ (kde $x\in\mathbf{R}$ je dané) je ohraničená. Pre $x = k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) je zrejme $S_n = 0$, $n\in\mathbf{N}$. Pre $x\neq 2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) použitím vzorca $\sin\alpha\sin\beta = (\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))/2$ dostaneme

$$\begin{aligned}
S_n &= \sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin x\sin\frac{x}{2}+\sin 2x\sin\frac{x}{2}+\cdots+\sin nx\sin\frac{x}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\ {}^{34}.
\end{aligned}$$

---

[30] pozri tiež pr. 275 a 277

[31] tento výrok je zrejme ekvivalentný s výrokom „$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna konvergentná postupnosť“

[32] pozri tiež pr. 275 a 276

[33] v súvislosti s týmto označením odporúčame čitateľovi sformulovať Abelovo a Dirichletovo kritérium tak, ako formuluje veta 12’ Leibnizovo kritérium (pozri poznámku za vetou 12)

Teda $S_n = 0$ pre $x = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, $|S_n| \le \dfrac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$ pre $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Teraz už môžeme použiť Dirichletovo kritérium: Nech je dané $x \in \mathbf{R}$; potom podľa predchádzjúceho je postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ ohraničená. Súčasne $\frac{1}{n} \searrow 0$, preto podľa vety 14 rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje.

6. Podľa pr. 243.4 rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje, súčasne $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$ [35], preto podľa Abelovho kritéria rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konverguje.

Poznámka. Podobne, ako sme v riešení pr. 243.6 od konvergentného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ dospeli ku konvergentnému radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, mohli by sme teraz na základe Abelovho kritéria vo vytváraní konvergentných radov pokračovať:

ak $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna ohraničená postupnosť, tak z vety 13 vyplýva konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n b_n$;

ak $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna ohraničená postupnosť, tak opäť z vety 13 vyplýva konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n b_n c_n$, atď.

Ukážeme teraz navyše, že pre $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ konverguje rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ relatívne. Konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ sme dokázali v pr. 243.4, stačí teda dokázať, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ diverguje. Využijeme pritom výsledok pr. 243.5, podľa ktorého rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny}{n}$ konverguje pre každé $y \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Pretože $|\sin\alpha| \ge \sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, je

$$\frac{1}{n}|\sin nx| \ge \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}\,. \tag{3.5}$$

Pre $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ je $2x \neq 2k\pi$, preto podľa pr. 243.5 rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(2x)}{n}$ — a teda aj rad $\displaystyle-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ — konverguje. Odtiaľ vyplýva, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}\right)$ — ktorý je súčtom divergentného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ a konvergentného radu $\displaystyle-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ — diverguje.

---

[34] 1. snaživý čitateľ sa môže presvedčiť, že v prípade $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, kedy — ako už vieme — je $S_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, skutočne platí $\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) / \left(2\sin\frac{x}{2}\right) = 0$;

2. z rovnosti $S_n = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2\sin(x/2)}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$ vyplýva, že pre $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ osciluje (neexistencia limity $\lim_{n\to\infty} \cos(n + 1/2)x$ pre $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sa dokáže rovnako ako v pr. I.178)

[35] opätovne pripomíname, že dôkaz monotónnosti postupnosti $(1 + 1/n)^n$ je súčasťou dôkazu existencie konečnej $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$

Z rovnosti $\dfrac{1-\cos 2nx}{2} = \sin^2 nx$ vyplýva, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos 2nx}{2n}\right)$ je rad s nezápornými členmi; môžeme preto použiť porovnávacie kritérium, podľa ktorého z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos 2nx}{2n}\right)$ a z nerovnosti (3.5) vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin nx|}{n}$.

244. 1. Ukážte, že Leibnizovo a Abelovo kritérium možno odvodiť z Dirichletovho kritéria!

2_0. Nech $k \in \mathbf{N}$. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna postupnosť s limitou 0, tak rad $\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{k[n/k]}a_n$ konverguje ([.] tu označuje celú časť). Dokážte!

245. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$;
2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin 3n}{n\ln(n+1)\ln^2(n+2)}$;
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$;
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$;
9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$;
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$;
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$;
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^3 n}{\sqrt{n}}$;
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^4 n - 3/8}{\sqrt{n+1}}$;
15. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{3^n} + \cdots$.

246. Zistite, ktoré z nasledujúcich radov konvergujú relatívne a ktoré absolútne:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1/n}}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\dfrac{n^{100}}{2^n}$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln^2 n}{n^p}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$;
7. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9} - \cdots$;
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}}\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^p}, \quad p>0$;
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^p}, \quad p>0$;
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^4 n}{n}$;
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\cdot\cos(1/n)}{\sqrt[4]{n}}$;
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$;

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sin 2n}{n^2 - \ln n}$; 15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/12)}{\ln n}$;

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n \cdot \ln^2 n}{n^p}$, $p > 0$.

Hovoríme, že *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je* (*vznikne*) *prerovnaním radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak existuje bijekcia $p\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ taká, že $b_n = a_{p(n)}$, $n \in \mathbf{N}$.

Veta 15 (*Riemannova veta o prerovnaní*). *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je relatívne konvergentný rad; nech* $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a \le b$. *Potom existuje prerovnanie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *také, že*

$$a = \liminf_{n\to\infty} S_n \ , \quad b = \limsup_{n\to\infty} S_n \ ,$$

kde $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť čiastočných súčtov radu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Veta 16. *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolútne konvergentný práve vtedy, keď každé jeho prerovnanie konverguje k tomu istému súčtu.*

247. 1. Zo vzťahu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + \varepsilon_n \ ,$$

kde $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ a C je Eulerova konštanta (pozri pr. 220 a poznámku k pr. 228.1), odvoďte vzťah

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \ln\sqrt{4n} + \frac{C}{2} + \eta_n \ ,$$

kde $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$.

2. Nájdite súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ a súčty nasledujúcich radov, ktoré vzniknú jeho prerovnaním:

a) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$;

b) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$;

c) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots$.

3_0. Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vznikne prerovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ tak, že za každou skupinou p za sebou nasledujúcich kladných členov dáme skupinu m za sebou nasledujúcich záporných členov. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{m} \ .$$

Dokážte!

248. 1. Z rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \quad [36]$$

odvoďte vzťahy

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{4k-3} \quad &= \quad \ln\sqrt[4]{8k} + \frac{\pi}{8} + \frac{C}{4} + \vartheta_k \ , \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{4k-1} \quad &= \quad \ln\sqrt[4]{8k} - \frac{\pi}{8} + \frac{C}{4} + \tau_k \ , \end{aligned}$$

[36] túto rovnosť dokážeme v pr. 344.2

kde $\lim_{k\to\infty}\vartheta_k = 0$, $\lim_{k\to\infty}\tau_k = 0$ a C je Eulerova konštanta.

2. Nájdite súčty nasledujúcich radov, ktoré vznikli prerovnaním radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$:

a) $1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{9}-\cdots$;

b) $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{7}+\cdots$.

249. Pomocou rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12} \quad [37]$$

nájdite súčty radov

1. $1+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{9^2}+\dfrac{1}{11^2}-\dfrac{1}{6^2}+\cdots$;
2. $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots$.

250. Dokážte, že rad

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots,$$

ktorý vznikne prerovnaním konvergentného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, je divergentný.

251. Vyšetrite konvergenciu radu

$$1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$$

(pre $p=1,2,1/2$ ide o rady z pr. 247.2a), 249.1 a 250).

251. 1. Nech $c\in\mathbf{N}$ a nech $p:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ je bijekcia taká, že $|p(n)-n|\le c$, $n\in\mathbf{N}$. Ak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentný rad, tak jeho prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty}a_{p(n)}$ [38] konverguje k tomu istému súčtu ako rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Dokážte!

2. Nájdite súčet radu $-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2(-1)^n}$.

3.4 Cauchyho súčin radov

Cauchyho súčinom radov $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ nazývame rad $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$, kde $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$. Rad $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ budeme označovať symbolom $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n$.

Veta 17. a) *Ak aspoň jeden z konvergentných radov $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ konverguje absolútne, tak ich Cauchyho súčin konverguje a jeho súčtom je číslo $(\sum_{n=0}^{\infty}a_n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_n)$.*

b) *Ak rady $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ konvergujú absolútne, tak ich Cauchyho súčin konverguje absolútne.*

---

[37]odvodenie uvedenej rovnosti presahuje rámec tohto textu (dokazuje sa spravidla dosadením $x=0$ do rovnosti $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$, $x\in[-\pi,\pi]$, ktorá vyplýva z teórie *Fourierových radov* (pozri napr. [1, str. 40, pr. 2.4])

[38]rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ teda prerovnáme tak, aby sa žiadny jeho člen „nevzdialil“ zo svojho pôvodného miesta viac ako o c miest

253. Nájdite Cauchyho súčin radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, kde

a) $a_n = a^n\,, \quad b_n = b^n\,, \quad a \neq b\,;$

b) $a_n = \dfrac{q^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\,, \quad b_n = q^n\,;$

c) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}\,, \quad b_n = \dfrac{3^n}{n!}\,;$

d) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}\,, \quad b_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ [39] .

2. Dokážte rovnosti

a) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}\right) = 1\,;$

b) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n\,.$

254. Nech $a_n > 0\,, \ b_n > 0 \ \ (n \in \mathbf{N})$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Potom Cauchyho súčin týchto radov diverguje. Dokážte!

255. Dokážte, že druhá mocnina konvergentného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ (tj. jeho Cauchyho súčin so sebou samým) diverguje.

256. Dokážte, že Cauchyho súčin divergentných radov

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \text{a} \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

je absolútne konvergentný rad.

257. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú absolútne konvergentné rady, nech $p\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je bijekcia; nech $c_n := a_j b_k$, ak $p(n) = (j,k)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je absolútne konvergentný rad, ktorého súčtom je číslo $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$. Dokážte!

3.5 Ďalšie príklady

258. Nájdite súčet radov:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{\ln n}{n - \ln n}\right]$ [40] ;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}\,;$
3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln \dfrac{n^3-1}{n^3+1}\,;$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!\,(n+2)}\,;$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}\,;$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2n^2}\,;$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos \dfrac{x}{2^n}\,, \quad x \in (-\pi, \pi)\,;$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2^n}\,, \quad x \in (-\pi, \pi)\,.$

259. Nech $m \in \mathbf{N}$, nech $a_k := \dfrac{1}{u_k u_{k+1} \cdots u_{k+m}}$ $(k \in \mathbf{N})$, kde $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť nenulových čísel s diferenciou $d \neq 0$. Potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{1}{mdu_1u_2\cdots u_m}$. Dokážte!

260. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť reálnych čísel; definujme funkciu $f\colon[0,1] \to \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x) = \begin{cases} a_n\,, & \text{ak} \quad x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0\ \ , & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases} .$$

[39] pritom kladieme $(-1)^0 := 1$

[40] $[.]$ tu označuje celú časť

Potom $f \in \mathcal{R}[0,1]$ a $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$. Dokážte!

261. Ak $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $c_n \geq 0$ ($n \in \mathbf{N}$) a rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^3$ konvergujú, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$. Dokážte!

262. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel a rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konverguje, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Dokážte! (Návod: využite pr. 211.1.)

263. *Fibonacciho postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná nasledovne: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$). Dokážte, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ konverguje.

264. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n/3} \sqrt[3]{n!+1}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!\,\mathrm{arctg}\,(1/3^n)}{n!}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)!)^n}{2!\,4!\cdots(2n)!}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \frac{1}{n^q}\,, \quad q \leq 1$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right)^p, \quad q > 0$;

8. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$
(návod: $\sqrt{2} = 2\sin(\pi/4) = 2\cos(\pi/4)$) ;

9. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} + \cdots$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n^2}{2(n^2+\alpha n+\beta)}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\cos\frac{1}{n^p}\right)^n\right), \quad p > 0$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$;

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right)$;

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}$;

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n}{n+1}\right)$;

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{pn+q}\right)^{n\ln n}, \quad p > 0\,,\ q > 0$;

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b})$;

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/(n^2+1)} - 1\right)$;

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{(a\ln n+b)/(c\ln n+d)}$;

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{1/n} - \frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right), \quad a > 0\,,\ b > 0\,,\ c > 0$;

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\frac{1}{n^p} - \ln\sin\frac{1}{n^p}\right), \quad p > 0$;

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{(n+b)}(n+b)^{(n+a)}}$;

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b\ln n + c\ln^2 n)}, \quad a > 0$;

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$;

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$;

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$;

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$;

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx$;

29. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n(\ln\ln n)^r}$;

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[4]{n^4+3n^2+1}\,\ln^3(n+2)}$;

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(e^n+n^2)}{n^2\ln^2(n+1)}$;

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n^2-n+1)}{\arcsin^p(e^{1/\sqrt{n}}-1)}$

33. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2)^2+(\ln 3)^2+\cdots+(\ln n)^2}$;

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$;

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}$;

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^p}$.

265. Nájdite postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel takú, že $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$ diverguje pre každé $p\ge 1$.

266. Dokážte nerovnosti:

1. $\displaystyle -\frac{\pi}{2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}<\frac{\pi}{2}\,,\quad x\in\mathbf{R}$;

2. $\displaystyle \frac{\pi}{2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}<\frac{1}{2}(\pi+1)$.

267. Na základe porovnania radu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ s radom $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ odvoďte *Bertrandovo kritérium*: Nech $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je rad s kladnými členmi. Potom

1. ak existuje $p>1$ tak, že počínajúc niektorým n_0 platí

$$\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\ge p\,, \tag{3.6}$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje:

2. ak počínajúc niektorým n_0 platí $\ln n\cdot\left(n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\le 1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje.

268. Nech $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ je kladná nerastúca funkcia a $\varphi:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ je kladná diferencovateľná rastúca funkcia vyhovujúca podmienke $\varphi(x)>x$. Nech existuje $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(\varphi(x))\,\varphi'(x)}{f(x)}=:A\ (\in\mathbf{R}^*)$. Potom

1. ak $A<1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ konverguje;

2_0. ak $A>1$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ diverguje.

Dokážte!

269. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť s limitou 0. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ má rovnaký charakter ako rad $\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$, kde p_m je počet prvkov množiny $\{a_n\,;\,a_n\ge 2^{-m}\}$ (pritom $\emptyset$ pokladáme za 0–prvkovú množinu). Dokážte!

270. Zistite, ktoré z nasledujúcich radov konvergujú absolútne a ktoré relatívne:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n+1}}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\sqrt{n}+(-1)^{n+1})^p}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/4)}{n^p+\sin(n\pi/4)}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^p}\right)$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\ln^p(n+1)}\,,\quad x\in(0,\pi)$;

9. $\displaystyle\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$.

271. Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ spĺňa nutnú podmienku konvergencie a nech $c \in \mathbf{N}$. Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že $p_1 = 1$ a $p_{n+1} - p_n \le c$, $n \in \mathbf{N}$. Potom rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n := \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$ [41], majú rovnaký charakter. Dokážte!

272. ,,Uzátvorkujme" rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby žiadna zátvorka neobsahovala členy s opačnými znamienkami. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a uzátvorkovaný rad majú rovnaký charakter. (Korektnejšiu formuláciu zadania prenechávame čitatelovi.) Dokážte!

273. Relatívne konvergentný rad možno ,,uzátvorkovať" tak, aby vznikol absolútne konvergentný rad. (Aj v tomto prípade prenechávame presnú formuláciu čitateľovi.) Dokážte!

274. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\,\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$;

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}\,\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+(-1)^n}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n+\sin n}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln\ln n}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi(2+\sqrt{3})^n$ (návod: vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi(2-\sqrt{3})^n$) ;

10. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{n\ln(n+1)}$, kde $a_n = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } n = 5k+1\,,\ 5k+2 \\ -1\,, & \text{ak } n = 5k\,,\ 5k-1\,,\ 5k-2 \end{cases}$, $k \in \mathbf{N}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

275. Nech S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, nech $\lim_{n\to\infty} a_n S_n = 0$. Dokážte, že ak konverguje jeden z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})S_n$, tak konverguje aj druhý z nich a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})S_n$. Dokážte!

276. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čistočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je ohraničená;

(ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ absolútne konverguje;

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

277. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje;

(ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ konverguje absolútne.

278. Dokážte, že pre súčet S_p radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ $(p > 0)$ platí odhad $\dfrac{1}{2} < S_p < 1$.

279. Nech $p, m \in \mathbf{N}$; nemeniac poradie členov harmonického radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, zmeňme ich znamienka tak, aby vždy za skupinou p kladných členov nasledovala skupina m záporných členov. Takto získaný rad diverguje (konverguje), ak $p \ne m$ $(p = m)$. Dokážte!

---

[41] teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,,uzátvorkujeme" tak, aby žiadna zátvorka neobsahovala viac ako c členov

280. 1. Nájdite také prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ktorého súčet je dvojnásobkom súčtu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

2. Nájdite divergentné prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

281. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad, $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je také prerovnanie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že $\limsup_{n\to\infty} S_n = b$, $\liminf_{n\to\infty} S_n = a$, kde $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ [42]. Potom aj každé číslo z intervalu (a, b) je hromadnou hodnotou postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokážte!

282. Nech $a_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, definujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nasledovne: $a_1 = \sin a_0$, $a_{n+1} = \sin a_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

1. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \sin a_n)$ je konvergentný. Na základe toho dokážte konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$.
2. Dokážte, že rady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_{n+1}/a_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ divergujú.
3. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$.

283. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

1. $a_1 = 1$, $\quad a_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}\right) a_n$, $\quad n \in \mathbf{N}$;
2. $a_1 = \sin\alpha$, $\quad a_{n+1} = (-1)^n \sin a_n$, $\quad n \in \mathbf{N}$;
3. $a_1 = a > 0$, $\quad a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$, $\quad n \in \mathbf{N}$;
4. $a_1 = a \in \mathbf{R}$, $\quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$, $\quad n \in \mathbf{N}$.

284. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx_0}$ konverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ konverguje absolútne pre každé $x > x_0$. Dokážte!

285. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-p}$ $(p > 0)$ konverguje, tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0\,.$$

Dokážte!

286. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný rad s kladnými členmi. Potom

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ diverguje;
2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$, kde S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje pre $p > 1$ a diverguje pre $p \leq 1$.

Dokážte!

287. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s kladnými členmi, nech $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Potom

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_n}$ diverguje;
2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{R_n}}$ konverguje.

Dokážte!

288. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ majú rovnaký charakter. Dokážte!

289. Uveďte príklad konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takého, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ diverguje.

---

[42] pozri vetu 15

290. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný rad, pričom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť s limitou 0; nech $c \in \mathbf{N}$ a $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že $p_{n+1} - p_n \le c$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ diverguje. Dokážte!

291. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členmi konverguje, tak existuje postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $b_n \nearrow \infty$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. Dokážte!

292. 1_0. Nech S_n , σ_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; pričom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentný rad s kladnými členmi. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{\sigma_n} = k$ ($k \in \mathbf{R}^*$). Dokážte!

2. Dokážte *Stolzovu vetu*: Ak $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca divergentná postupnosť a existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, tak existuje aj $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} .$$

3. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}}{n^p}$, $\quad p > 1$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\dfrac{1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}}{n} - \dfrac{1}{p} \right)$, $\quad p > 1$.

4. Nech S_n je n–tý čiastočný súčet divergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členmi; nech $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{S_n} = 0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k S_k^{-1}}{\ln S_n} = 1 .$$

Dokážte!

293. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená (neohraničená) rastúca postupnosť kladných čísel, tak rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$ konverguje (diverguje). Dokážte!

294. Nech $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}_0^+$ je rastúca konkávna funkcia taká, že $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ a rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ konverguje. Potom platí: ak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s nezápornými členmi, tak aj rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{n}$ konverguje. Dokážte!

Chapter 4

Postupnosti a rady funkcií

4. Postupnosti a rady funkcií

4.1 Bodová a rovnomerná konvergencia

Nech je daná postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ [1], nech $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ $\quad(:= \{x \in \mathbf{R}\,;\, \forall\, n \in \mathbf{N} \,:\, x \in D(f_n)\}\,)$. Hovoríme, že *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v bode a*, ak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} f_n(a)$. Ak je množina D všetkých tých čísel $x \in R$, v ktorých postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, neprázdna, nazýva sa funkcia $g\colon D \to \mathbf{R}$, daná predpisom $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *(bodová) limita* (*limitná funkcia*) *postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$* a označuje sa $\lim_{n\to\infty} f_n$. Hovoríme, že *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (bodove) konverguje na množine M (k funkcii f)*, ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v každom bode $x \in M$ (a $\lim_{n\to\infty}(f_n|M) = f|M$); funkcia $f|M$ sa nazýva *(bodová) limita* (*limitná funkcia*) *postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M*. Namiesto $\lim_{n\to\infty}(f_n|M) = f|M$ budeme písať $f_n \to f$ *na* M [2].

Ak je daná postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=k}^{\infty}$ $(k \in \{0, 1, \ldots\}\,)$, pričom $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n) \neq \emptyset$, nazýva sa symbol $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} f_n$ (alebo $f_k + f_{k+1} + \cdots + f_n + \cdots$) *rad funkcií* (*funkcionálny rad*). Ak je daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ [1], nazýva sa funkcia f_k, resp.

$$S_k := f_1 + f_2 + \cdots + f_k\,, \quad k \in N\,,$$

k–ty člen, resp. *k–ty čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$*. Ak existuje $\lim_{n\to\infty} S_n$, nazýva sa táto funkcia *súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* a jej definičný obor *obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* [3]. Hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v bode a* (*(bodove) konverguje na množine M*, *(bodove) konverguje na množine M k funkcii f*), ak postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov konverguje v bode a (konverguje na množine M, konverguje na množine M k funkcii f). Zápis $S_n \to f$ na M budeme spravidla nahrádzať zápisom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ *na* M.

295. Nájdite funkciu $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, ak:

1. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{x + 3n + 2}\,, \quad x \geq 0\,;$
2. $f_n(x) = x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3}, \quad x \in [0, 1]\,;$
3. $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x\,;$
4. $f_n(x) = n^2 x^4 \sin \dfrac{x}{n^2 + n}\,;$
5. $f_n(x) = (x - 1)\operatorname{arctg} x^n\,, \quad x > 0\,;$
6. $f_n(x) = n\left(x^{1/n} - x^{1/2n}\right)\,, \quad x > 0\,;$

---

[1] z podobných dôvodov ako v kapitole 3 uvádzame definície a vety spravidla len pre postupnosti, resp. rady tvaru $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

[2] zapíšme tu ešte rovnosť $\lim_{n\to\infty}(f_n|M) = f|M$ pomocou kvantifikátorov:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \forall\, x \in M\; \exists\, n_0 \in \mathbf{N}\; \forall\, n \in \mathbf{N}\,,\; n > n_0 \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

[3] oborom konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je teda množina všetkých tých $x \in \mathbf{R}$, pre ktoré číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje

7. $f_n(x) = n^3 x^2 e^{-nx}\,, \quad x \geq 0$;

8. $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln nx$;

9. $f_n(x) = n \operatorname{arcctg} nx^2\,, \quad x > 0$;

10. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\,, \quad x \geq 0$;

11. $f_n(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{ak} \quad x \in [1/n, \infty) \\ -1\,, & \text{ak} \quad x \in (-\infty, -1/n] \\ nx\,, & \text{ak} \quad x \in (-1/n, 1/n) \end{cases}$;

12. $f_n(x) = \begin{cases} 2^n\,, & \text{ak} \quad x \in [0, 2^{-n}] \\ 0\,, & \text{ak} \quad x \in (2^{-n}, \infty) \end{cases}$.

296. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale (a, b), nech $f_n \to f$ na (a, b). Potom

1. ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť neklesajúcich funkcií, tak f je neklesajúca funkcia;
2. ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť konvexných funkcií, tak f je konvexná funkcia.

Dokážte!

297. Nájdite obory konvergencie nasledujúcich radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n \sin x}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}\,, \quad p > 0$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)\cdots(x^2+n)}$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n x}{n \ln^2(n+1)}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

298. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť lineárnych[4] funkcií definovaných na $\mathbf{R}$; nech $a \neq b$ a rady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ konvergujú. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je lineárna funkcia definovaná na $\mathbf{R}$. Dokážte!

Hovoríme, že *postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M rovnomerne k funkcii f* (a zapisujeme $f_n \rightrightarrows f$ *na* M), ak platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\,,\ n > n_0\ \forall x \in M\ :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad ^5.$$

Ak pre postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a neprázdnu množinu $M \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ existuje funkcia f taká, že $f_n \rightrightarrows f$ na M, hovoríme, že *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na množine M*.

---

[4]pripomeňme, že funkcia g sa nazýva lineárna, ak jej predpis možno písať v tvare $g(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbf{R}$

[5]ak tento zápis porovnáme so zápisom z poznámky [2], vidíme, že v prípade rovnomernej konvergencie číslo n_0 závisí len na čísle ε, tj. $n_0 = n_0(\varepsilon)$, zatiaľčo v prípade bodovej konvergencie závisí toto číslo naviac aj na x, tj. $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$; ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je špeciálne postupnosť konštantných funkcií, $f_n \equiv c_n\,, n \in \mathbf{N}\,,\ x \in M\,,$ je zrejme rovnomerná konvergencia postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ekvivalentná s existenciou konečnej $\lim_{n\to\infty} c_n$

Hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M (k funkcii f)*, ak postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov konverguje rovnomerne na množine M (k funkcii f)[6]. Zápis $S_n \rightrightarrows f$ na M nahrádzame zápisom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na M.

Veta 1. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M, tak $f_n \to f$ na M.

Veta 2. Postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M rovnomerne k funkcii f práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$ [7].

Hovoríme, že *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$* [*rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$*] *konverguje na množine M k funkcii f nerovnomerne* (*konverguje na množine M nerovnomerne*), ak $f_n \to f$ na M [$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ na M], ale neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na M [$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na M] (ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ [rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$] konverguje na M bodove, ale nekonverguje tam rovnomerne).

299. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M; nech pre funkciu $f : M \to \mathbf{R}$ a postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel platí $|f_n(x) - f(x)| < c_n$ $(x \in M,\ n \in \mathbf{N})$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na M. Dokážte!

300. Zistite, či postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na množine M, ak:

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}\,, \quad M = (0,\infty)$;
2. $f_n(x) = \dfrac{\sin n\sqrt{x}}{\ln(n+1)}\,, \quad M = [0,\infty)$;
3. $f_n(x) = \sin \dfrac{1+nx}{2n}\,, \quad M = \mathbf{R}$;
4. $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^4} \sin \dfrac{x^2}{\sqrt{n}}\,, \quad M = [1,\infty)$;
5. $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}\,, \quad M = \mathbf{R}$;
6. $f_n(x) = n^{3/2}\left(1 - \cos \dfrac{\sqrt[4]{x}}{n}\right)\,, \quad M = [0,\infty)$;
7. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n+x}\,, \quad M = [1,\infty)$;
8. $f_n(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$ a) $M = [0,1]$, b) $M = [1,\infty)$;
9. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ a) $M = [0,10]$, b) $M = [1,\infty)$;
10. $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n}\,, \quad M = (0,1)$;
11. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ a) $M = [0, 1-\delta]$, b) $M = [1+\delta, \infty)$, c) $M = [1-\delta, 1+\delta]$, $1 > \delta > 0$;
12. $f_n(x) = e^{n(x-1)}\,, \quad M = (0,1)$;
13. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}\,, \quad M = \mathbf{R}$;
14. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}\,, \quad M = [0,2]$;
15. $f_n(x) = \begin{cases} n^2x\,, & \text{ak} \quad x \in [0,1/n] \\ n^2(2/n - x)\,, & \text{ak} \quad x \in (1/n, 2/n) \\ 0 & \text{ak} \quad x \in [2/n, \infty) \end{cases}\,, \quad M = [0,\infty)$.

[6] z poznámky [5] vyplýva: ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je špeciálne postupnosť konštantných funkcií, $f_n \equiv c_n$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in M$, je zrejme konvergencia číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ekvivalentná s rovnomernou konvergenciou funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množine M

[7] táto rovnosť v sebe „automaticky“ zahŕňa podmienku „počínajúc niektorým n_0 sú funkcie $|f_n - f|$ ohraničené“

Riešenie. 8. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M rovnomerne k niektorej funkcii $f\colon M \to \mathbf{R}$, tak podľa vety 1 musí platiť $f = \lim_{n\to\infty} f_n|M$. Zistime preto najprv, ku ktorej funkcii konverguje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M bodove:

Pretože $\lim_{u\to\infty} \operatorname{arctg} u = \pi/2$, platia pre každé $x > 0$ rovnosti $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \pi/2$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} 2nx = \pi/2$; pre $x = 0$ je $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = 0$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} 2nx = 0$; ďalej pre každé $x \in \mathbf{R}$ je $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x$. Preto

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + \pi/2 - \pi/2 = \operatorname{arctg} x\,, & \text{ak} \quad x > 0 \\ \operatorname{arctg} x + 0 - 0 = \operatorname{arctg} x\,, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Teda $f_n(x) \to \operatorname{arctg} x$ na $[0,1]$ a $f_n(x) \to \operatorname{arctg} x$ aj na $[1,\infty)$.

Teraz treba zistiť, či postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M k funkcii $\operatorname{arctg} x$ aj rovnomerne; na to použijeme vetu 2. Aby sme našli čísla $\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$ (pokiaľ existujú), vyšetrime pomocou prvej derivácie priebeh funkcií $f_n - f$:

$$(f_n(x) - f(x))' = (\operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx)' = \frac{n(1-2n^2x^2)}{(1+n^2x^2)(1+4n^2x^2)}\,,$$

teda funkcia $f_n - f$ rastie na intervale $[0, 1/\sqrt{2}n]$ a klesá na intervale $[1/\sqrt{2}n, \infty)$. Ak naviac uvážime, že $(f_n - f)(0) = 0$ a $\lim_{x\to\infty}(f_n(x) - f(x)) = 0$, vidíme, že funkcia $f_n - f$ je na intervale $(0,\infty)$ kladná.

Zaoberajme sa teraz prípadom a), tj. $M = [0,1]$. Z priebehu funkcií $f_n - f$ vyplýva, že

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0\,,$$

čo podľa vety 2 znamená, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje na intervale $[0,1]$ k funkcii $f(x) = \operatorname{arctg} x$ rovnomerne. Pretože $f_n \to f$ na $[0,1]$, ale neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, konverguje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na intervale $[0,1]$ k funkcii $f(x) = \operatorname{arctg} x$ nerovnomerne.

Uvažujme teraz prípad b), tj. $M = [1,\infty)$. Na intervale $[1,\infty)$ je každá z funkcií $f_n - f$ kladná a klesajúca, preto

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)(1) = \operatorname{arctg} 2n - \operatorname{arctg} n\,.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} 2n - \operatorname{arctg} n) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0\,,$$

čo podľa vety 2 znamená, že $f_n \rightrightarrows \operatorname{arctg} x$ na $[1,\infty)$.

Poznámky. 1. Nerovnosť

$$\forall\, x \in M \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\forall\, x \in M \;:\; f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \quad)$$

($\varepsilon > 0$ je dané číslo) „geometricky hovorí“, že graf funkcie $f_n|M$ „leží medzi“ grafmi funkcií $f(x) - \varepsilon$, $x \in M$, a $f(x) + \varepsilon$, $x \in M$ (hovoríme tiež, že *graf funkcie* $f_n|M$ *leží v* ε*–páse okolo (grafu) funkcie* $f|M$). Ak teda $f_n \rightrightarrows f$ na M, znamená to, že pre každý ε–pás okolo funkcie f ($\varepsilon > 0$) vieme nájsť $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že grafy funkcií $f_{n_0+1}|M$, $f_{n_0+2}|M, \ldots$ už ležia v tomto ε–páse. Na obr. 1 je znázornený ε–pás okolo funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [1,\infty)$ pre $\varepsilon = 0.1$ a grafy funkcií $f_n(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$, $x \in [1,\infty)$, pre $n = 4, 5, 25$, z ktorých prvý neleží v tomto ε–páse a zvyšné dva v ňom ležia.

Ak neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na M (pričom $M \subset D(f)$, $M \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$), teda ak platí negácia tohto tvrdenia, ktorou je výrok

$$\exists\, \varepsilon > 0\; \forall\, n_0 \in \mathbf{N}\; \exists\, n \in \mathbf{N},\; n > n_0\; \exists\, x_0 \in M \;:\; |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,,$$

znamená to, že existuje ε–pás okolo funkcie f ($\varepsilon > 0$) s touto vlastnosťou: akokoľvek veľké $n_0 \in \mathbf{N}$ zvolíme, vždy nájdeme od neho väčšie číslo $n \in \mathbf{N}$ tak, že graf funkcie $f_n|M$ neleží celý v tomto ε–páse (tj.

obr. 1

„vyskočí“ z neho aspoň v jednom bode $x_0 \in M$). Všimnime si teraz znova pr. 300.8a), v ktorom dokonca platí, že graf ľubovoľnej z funkcií f_1 , f_2 , . . . , f_n , . . . neleží celý v ε–páse okolo funkcie $\operatorname{arctg} x$, $x \in [0, 1]$, pre $0 < \varepsilon < \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}(1/\sqrt{2}) = 0.3398\ldots$ (z rovnosti $\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = c$ totiž vyplýva, že graf funkcie $f_n|M$ leží v ε–páse okolo f pre každé $\varepsilon > c$ a neleží v žiadnom z ε–pásov okolo f pre $0 < \varepsilon < c$ [8]). Na obr. 2 je znázornený ε–pás okolo funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [0, 0.1]$, pre $\varepsilon = 0.1$ a grafy funkcií $f_n(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2nx - \operatorname{arctg} nx$, $x \in [0, 0.1]$, pre $n = 25, 50, 100, 250$.

2. Nech je dané $\delta > 0$. Z priebehu funkcií $f_n - f$, ktorý sme vyšetrili pri riešení pr. 300.8, vyplýva, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkcii $\operatorname{arctg} x$ nerovnomerne na intervale $[0, \delta]$ a rovnomerne na intervale $[\delta, \infty)$. Dokážeme to nasledovne: Pretože $\lim_{n\to\infty}(1/\sqrt{2}n) = 0$, musí existovať $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $1/\sqrt{2}n \in [0, \delta]$ pre $n > n_0$ (pripomeňme, že v bode $1/\sqrt{2}n$ nadobúda funkcia $|f_n(x)-f(x)| = |\operatorname{arctg} 2nx-\operatorname{arctg} nx|$, $x \geq 0$, svoje maximum). Pre $n > n_0$ je teda

$$\sup_{x\in[0,\delta]} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n}\right) ;$$

pre $n > n_0$ funkcia $f_n - f$ klesá na intervale $[\delta, \infty)$ a je tam kladná, preto

$$\sup_{x\in[\delta,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = (f_n - f)(\delta) .$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[\delta,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} 2n\delta - \operatorname{arctg} n\delta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 .$$

[8] toto je myšlienka dôkazu vety 2

obr. 2

301$_0$. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M a funkcia g je ohraničená na množine M, tak $f_n g \rightrightarrows fg$ na M. Dokážte!

302. Nech je daná funkcia $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, definujme funkcie $f_n:[a,b]\to\mathbf{R}$ predpisom $f_n(x) = [nf(x)]/n\,,\ n\in\mathbf{N}$ (symbol [.] označuje celú časť). Potom $f_n \rightrightarrows f$. Dokážte!

303. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $[0,1]$. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení:

1. ak $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]\cap\mathbf{Q}$, tak $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$;
2. ak $f_n \to 0$ na $[0,1]\cap\mathbf{Q}$, tak $f_n \to 0$ na $[0,1]$.

304. Nech pre každú postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na danej neprázdnej množine M platí implikácia „ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na M bodove, tak tam konverguje aj rovnomerne“. Potom M je konečná množina. Dokážte!

305. Zistite, či nasledujúce rady konvergujú rovnomerne na množine M:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ a) $M=[-q,q]$, kde $0<q<1$, b) $M=(-1,1)$;
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n\,,\quad M=[0,1]$;
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x-1}{(2x)^n}\,,\quad M=[1,\infty)$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\,,\quad M=[-1,1]$;
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\,,\quad M=(0,\infty)$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}\,,\quad M=(0,\infty)$.

306. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M a funkcia $g:M\to\mathbf{R}$ je ohraničená, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} gf_n$ konverguje rovnomerne na množine M. Dokážte!

307. Dokážte túto *nutnú podmienku rovnomernej konvergencie* radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine M, tak $f_n \rightrightarrows 0$ na M.

2. Na základe toho dokážte, že nasledujúce rady konvergujú nerovnomerne na množine M:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\,, \quad M=(0,\infty)$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right)^2\,, \quad M=\mathbf{R}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2x^3}\,, \quad M=[0,\infty)$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\frac{1}{3^nx}\,, \quad M=(0,\infty)$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}}\,, \quad M=(0,\pi)$.

3. Uveďte príklad radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ktorý nekonverguje rovnomerne na intervale $[0,1]$, ale spĺňa tam nutnú podmienku rovnomernej konvergencie.

Veta 3 (*Cauchyho–Bolzanovo kritérium rovnomernej konvergencie*). *Postupnosť funkcií* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje rvnomerne na množine* M *práve vtedy, keď platí*

$$\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists n_0\in\mathbf{N}\;\;\forall\,n,m\in\mathbf{N}\,,\;n>n_0\,,\;m>n_0\;\;\forall\,x\in M\;:\;|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\,.$$

Špeciálne pre funkcionálne rady možno toto tvrdenie sformulovať nasledovne:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje rovnomerne na množine* M *práve vtedy, keď platí*

$$\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists n_0\in\mathbf{N}\;\;\forall\,n\in\mathbf{N}\,,\;n>n_0\;\;\forall p\in\mathbf{N}\;\;\forall\,x\in M\;:\;|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|<\varepsilon\,. \tag{4.1}$$

308. Pomocou Cauchyho–Bolzanovho kritéria rovnomernej konvergencie dokážte, že nasledujúce rady konvergujú na množine M nerovnomerne:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx^2}\,, \quad M=(0,\infty)$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}\,, \quad M=(0,1)$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{n}\,, \quad M=(1,\infty)$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{n^2x}}\,, \quad M=(0,\infty)$.

Riešenie. 2. Máme dokázať, že daný rad konverguje bodove na $(0,1)$, ale nekonverguje tam rovnomerne.

Nech je dané $x\in(0,1)$, potom z nerovnosti $\displaystyle\left|\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}\right|\le\frac{1}{n^2x^2}$ a z konvergencie číselného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2}\quad\left(=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$ vyplýva podľa porovnávacieho kritéria (veta 4 z odseku 3.2) konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}\right|$ a teda (podľa vety 11 z odseku 3.3) aj konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}$. Tým je dokázaná bodová konvergencia nášho radu na intervale $(0,1)$.

Aby sme ukázali, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}$ nekonverguje rovnomerne na $(0,1)$, dokážeme pre $f_n = \displaystyle=\frac{\sin nx}{2n+n^2x^2}$ a $M=(0,1)$ výrok

$$\exists\,\varepsilon>0\;\;\forall n_0\in\mathbf{N}\;\;\exists\,n\in\mathbf{N}\,,\;n>n_0\;\;\exists p\in\mathbf{N}\;\;\exists\,x\in M\;:\;|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\ge\varepsilon\,, \tag{4.2}$$

ktorý je negáciou výroku (4.1).

Nech je dané $m\in\mathbf{N}$, označme $g_m(x):=f_m(x)+f_{m+1}(x)+\cdots+f_{2m}(x)$. Potom

$$g_m\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{\sin 1}{2m+1}+\frac{\sin\left(1+\dfrac{1}{m}\right)}{2(m+1)+\left(1+\dfrac{1}{m}\right)}+\frac{\sin\left(1+\dfrac{2}{m}\right)}{2(m+2)+\left(1+\dfrac{2}{m}\right)}+\cdots+$$
$$+\frac{\sin\left(1+\dfrac{m-1}{m}\right)}{2(m+(m-1))+\left(1+\dfrac{m-1}{m}\right)}+\frac{\sin 2}{4m+4}\,.$$

Ak využijeme nerovnosti $\sin(1 + k/m) \geq \sin 1 > 0$ a $0 < 2(m + k) + (1 + k/m)^2 \leq 4m + 4$ $\big($odtiaľ $1/[2(m+k) + (1+k/m)^2] \geq 1/4(m+1)\big)$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, dostaneme

$$\frac{\sin\left(1+\dfrac{k}{m}\right)}{2(m+k)+\left(1+\dfrac{k}{m}\right)} \geq \frac{\sin 1}{4(m+1)} \qquad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m\ ,$$

a preto

$$\left| g_m\left(\frac{1}{m}\right)\right| \geq (m+1)\frac{\sin 1}{4(m+1)} = \frac{\sin 1}{4}\ .$$

Platí teda

$$\forall\, m \in \mathbf{N}\ :\ \left| f_m\left(\frac{1}{m}\right) + f_{m+1}\left(\frac{1}{m}\right) + \cdots + f_{2m}\left(\frac{1}{m}\right)\right| \geq \frac{\sin 1}{4}\ ,$$

odkiaľ — ak položíme $m = n + 1$ — dostávame

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\ :\ \left| f_{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right) + f_{n+2}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + f_{2n+2}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| \geq \frac{\sin 1}{4}\ .$$

Z tohto výroku už vyplýva tvrdenie (4.2): stačí zvoliť $\varepsilon = \dfrac{\sin 1}{4}$ a pre dané n_0 položiť $n = n_0 + 1$, $p =$ $= n + 2$, $x = \dfrac{1}{n+1}$.

309. 1. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $[a, b]$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na (a, b), tak konverguje rovnomerne aj na $[a, b]$. Dokážte!

2. Dokážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin(1/2^n)$ konverguje nerovnomerne na intervale $(-2, 2)$.

310. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konverguje rovnomerne na množine M, tak na M konverguje rovnomerne aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Dokážte!

Veta 4 (*Weierstrassovo kritérium*). *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií ohraničených na neprázdnej množine M, nech $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných čísel taká, že $|f_n(x)| \leq c_n$, $x \in M$, $n \in \mathbf{N}$. Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, tak funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na M.*

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ z vety 4 sa nazýva *(číselný) majorantný rad k radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$*.

Poznámky. 1. Z predpokladov vety 4 vyplýva aj rovnomerná konvergencia (a teda aj konvergencia) radu $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ na M. Weierstrassovo kritérium teda nemožno použiť na vyšetrenie rovnomernej konvergencie radu, ktorý konverguje relatívne aspoň v jednom bode množiny M.

2. Najmenšie možné číslo c_n vyhovujúce nerovnosti $|f_n(x)| \leq c_n$, $x \in M$, je číslo $\sup_{x \in M} |f_n(x)|$. Ak teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$ diverguje, nemožno na vyšetrenie rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množine M použiť Weierstrassovo kritérium.

3. Na základe tvrdenia „ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M a g je funkcia definovaná na M, tak rad $g + \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ [9] konverguje rovnomerne na M“ možno formuláciu Weierstrassovho kritéria upraviť do tejto podoby:

Veta 4'. *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M, nech existuje číslo $n_0 \in \mathbf{N}$ a konvergentný rad $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n$ tak, že $|f_n(x)| \leq c_n$ pre $x \in M$ a $n > n_0$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M.*

311. Pomocou Weierstrassovho kritéria dokážte, že nasledujúce rady rovnomerne konvergujú na množine M:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}\,, \quad M = \mathbf{R}\ ;$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^{3/2} x^2}\,, \quad M = \mathbf{R}\ ;$

[9] tj. rad $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$, kde $h_1 = g$, $h_n = f_{n-1}$ pre $n > 1$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}\,, \quad M=[1,\infty)$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{nx}\cdot\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\,, \quad M=(0,\infty)$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\,, \quad M=\mathbf{R}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\,, \quad M=[-a,a]$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}\,, \quad M=\mathbf{R}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}\,, \quad M=[0,\infty)$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}\left(1+\frac{1}{n}-x\right)^n\,, \quad M=[0,1]$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-nx^2}}{\sqrt{n\ln^3(n+1)}}\,, \quad M=\mathbf{R}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{x}/n)}{\sqrt{x^2+n^2}}\,, \quad M=[0,\infty)$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}\,, \quad M=\mathbf{R}$.

Riešenie. 4. Z nerovností $|\sin u|\le|u|$ pre $u\in\mathbf{R}$ a $\ln(1+u)\le u$ pre $u>-1$ (pozri pr. I.353 a riešenie pr. I.352.2) vyplýva $\left|\sin\frac{1}{nx}\right|\le\frac{1}{nx}$ a $\left|\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right|=\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\le\frac{x}{\sqrt{n}}$ pre $x\in(0,\infty)$, odtiaľ

$$\left|\sin\frac{1}{nx}\cdot\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right|\le\frac{1}{nx}\cdot\frac{x}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n\sqrt{n}}\,,\quad x\in(0,\infty)\,. \tag{4.3}$$

Pretože rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ konverguje (pozri vetu 5 z odseku 3.2), vyplýva z nerovnosti (4.3) na základe Weierstrassovho kritéria rovnomerná konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{nx}\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ na intervale $(0,\infty)$.

7. Bude nás zaujímať konvergencia majorantného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|$ (pozri tiež poznámku 2 za vetou 4). Pretože funkcie $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^4x^2}$ sú nepárne, platí $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)|=\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)|$, na nájdenie čísla $\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)|$ stačí vyšetriť priebeh funkcie f_n na intervale $[0,\infty)$:

$$f_n'(x)=\left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right)'=\frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}\,,$$

preto f_n rastie na $[0,1/n^2]$ a klesá na $[1/n^2,\infty)$. Z rovností $f_n(0)=0$ a $\lim_{x\to\infty}f_n(x)=0$ vyplýva, že f_n je nezáporná na $[0,\infty)$. Preto

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)|=\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)|=f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2n^2}\,.$$

Z konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ (pozri vetu 5 z odseku 3.2) a z nerovnosti

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\le\frac{1}{2n^2}\,,\quad x\in\mathbf{R}\,,\ n\in\mathbf{N}\,,$$

vyplýva podľa Weierstrassovho kritéria rovnomerná konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ na $\mathbf{R}$.

312. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť monotónnych funkcií definovaných na intervale $[a,b]$, nech číselné rady $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(a)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(b)$ absolútne konvergujú. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje rovnomerne na $[a,b]$. Dokážte!

313$_0$. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale $[0,1]$ predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak} \quad x \in [0, 2^{-(n+1)}] \\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x)\,, & \text{ak} \quad x \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}) \\ 0\,, & \text{ak} \quad x \in [2^{-n}, 1] \end{cases} \quad , \qquad n \in \mathbf{N}\,.$$

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $[0,1]$, ale nemožno ho tam majorizovať konvergentným číselným radom (tj. neexistuje konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ taký, že $|f_n(x)| \le c_n$ pre $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbf{N}$).

Hovoríme, že *postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na množine M* ($\emptyset \ne M \subset \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n)$), ak platí

$$\exists K \ge 0 \;\; \forall n \in \mathbf{N} \;\; \forall x \in M \; : \; |f_n(x)| \le K\,.$$

Veta 5 (*Abelovo kritérium*). *Nech postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú nasledujúcim podmienkam:*

1. *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M;*
2. *postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na množine M a pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónna.*

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ rovnomerne konverguje na množine M.

Veta 6 (*Dirichletovo kritérium*). *Nech postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú nasledujúcim podmienkam:*

1. *postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je rovnomerne ohraničená na množine M;*
2. *$g_n \rightrightarrows 0$ na M a pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónna.*

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ rovnomerne konverguje na množine M.

Poznámky. 1. Z viet 5 a 6 vyplývajú — ak za M zvolíme jednoprvkovú množinu — vety 13 a 14 z odseku 3.3.

2. Formuláciu Abelovho kritéria možno upraviť podobne ako sme upravili formuláciu Weierstrassovho kritéria (pozri vetu 4'):

Veta 5'. *Nech postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovujú nasledujúcim podmienkam:*

1. *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na množine M;*
2. *existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že postupnosť $\{g_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na M a pre každé $x \in M$ je postupnosť $\{g_n(x)\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónna.*

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ rovnomerne konverguje na množine M.

Rovnako možno upraviť aj formuláciu Dirichletovho kritéria.

314. Dokážte, že nasledujúce rady konvergujú rovnomerne na množine M:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}\,, \quad M = (0,\infty)\;;$

2$_0$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\,, \quad M = [-10,10]\;;$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,x^n\,, \quad M = [0,1]\;;$

4$_0$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\,, \quad M = [1,\infty)\,.$

315. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak *Dirichletov rad* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/n^x)$ konverguje rovnomerne na intervale $[0,\infty)$. Dokážte!

316. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich radov konvergujú rovnomerne a ktoré nerovnomerne na množine M:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}\,, \quad M = [-1,3]\ ;$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}\,, \quad M = \mathbf{R}\ ;$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n\,, \quad M$ je obor konvergencie daného radu ;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}\,, \quad M = (0,\infty)\ ;$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad M = \mathbf{R}\ ;$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin(1/nx)}{4+\ln^2 nx}\,, \quad M = (2,\infty)\ ;$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}e^{-nx}}{n}\,, \quad M = [0,\infty)\ ;$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^6x^2}\sin nx\,, \quad M = \mathbf{R}\ ;$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}\,, \quad M = [0,\infty)\ ;$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ a) $M = [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]\,,$ kde $\pi > \varepsilon > 0\,,$ b) $M = [0,2\pi]\ ;$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+x}{n}$ a) $M = (0,1)\,,$ b) $M = (1,\infty)\ ;$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2}\sin\frac{x}{n^2}$ a) $M = [0,1]\,,$ b) $M = [0,\infty)\ ;$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mathrm{tg}\,\frac{1}{1+3^nx}$ a) $M = [0,\delta]\,,$ b) $M = (\delta,\infty)\ ;$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}\,, \quad M = \mathbf{R}\,.$

4.2 Niektoré vlastnosti rovnomerne konvergentných postupností a radov funkcií

Veta 7. *Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod množiny M. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M a pre každé $n \in \mathbf{N}$* [10] *existuje konečná $\lim_{x\to a} f_n(x) =: A_n$, tak existuje konečná $\lim_{n\to\infty} A_n$ a platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n$$

(je teda oprávnená nasledovná zámena poradia limít:

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \quad).$$

Dôsledok. *Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M a každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, je spojitá na množine M, tak je na množine M spojitá aj funkcia f.*

V prípade radov funkcií možno tieto tvrdenia sformulovať nasledovne:

Veta 7'. *Nech $a \in \mathbf{R}^*$ je hromadný bod množiny M. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na M a pre každú z funkcií f_n ($n \in \mathbf{N}$) existuje konečná $\lim_{x\to a} f_n(x) =: A_n$* [11]*, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje*[12] *a*

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

---

[10] namiesto „pre každé $n \in \mathbf{N}$“ sme mohli predpokladať aj „počínajúc niektorým n_0“

[11] na rozdiel od vety 7 tu už nestačí predpokladať „počínajúc niektorým n_0 existujú konečné $\lim_{x\to a} f_n(x)$“

[12] konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ vyplýva napr. aj z úvah použitých pri riešení pr. 309.1

(je teda oprávnená zámena poradia znaku sumácie a limity:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) \quad) .$$

Dôsledok. *Ak každá z funkcií* f_n, $n \in \mathbf{N}$, *je spojitá na množine* M *a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje rovnomerne na* M, *tak funkcia* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je spojitá na množine* M.

317. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n(n+1)x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$.

318. Určite definičný obor nasledujúcich funkcií a vyšetrite ich spojitosť:

1. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^n x}{n^2}$;

2. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x e^{-n^2 x}$;

3. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$;

4. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\cos nx$;

5. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

6. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

Riešenie. 5. Na nájdenie definičného oboru funkcie f (tj. na vyšetrenie bodovej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1/n)^n$) použijeme najprv Cauchyho kritérium (veta 7' z odseku 3.3):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right| = |x| ,$$

preto daný rad konverguje pre $x\in(-1,1)$ a diverguje pre $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Pre $x=1$ a $x=-1$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie ($\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e \neq 0$ a $\lim_{n\to\infty}(-1+1/n)^n$ neexistuje, pretože pre $a_n = (-1+1/n)^n = (-1)^n(1-1/n)^n$ je $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1/e$, $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1/e$). Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1/n)^n$ teda konverguje len pre $x\in(-1,1)$, preto $D(f)=(-1,1)$.

Ukážeme teraz, že funkcia f je spojitá v každom bode $a\in(-1,1)$ (tj. že f je spojitá). Nech je teda dané $a\in(-1,1)$; zvoľme $\varepsilon>0$ tak, aby platilo $-1<a-\varepsilon<a+\varepsilon<1$. Na intervale $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1/n)^n$ podľa Weierstrassovho kritéria rovnomerne ($|(x+1/n)^n| < (|a|+\varepsilon+1/n)^n$ pre $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ [13], rad $\sum_{n=1}^{\infty}(|a|+\varepsilon+1/n)^n$ konverguje podľa Cauchyho kritéria) a každá z funkcií $f_n(x)=(x+1/n)^n$, $n\in\mathbf{N}$, je tam spojitá, preto podľa dôsledku vety 7' je na intervale $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ spojitá aj funkcia $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Pretože a je vnútorný bod intervalu $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, vyplýva zo spojitosti funkcie f na intervale $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ spojitosť funkcie f v bode a [14].

Uvedená úvaha platí pre každé $a\in(-1,1)$, preto je funkcia f spojitá v každom bode intervalu $(-1,1) = D(f)$.

Poznámky 1. Na intervale $(-1,1)$ konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1/n)^n$ nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie z pr. 307.1:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-1,1)}\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \quad) ,$$

[13] zrejme $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset(-(|a|+\varepsilon),|a|+\varepsilon)$ a pre $x\in(-(|a|+\varepsilon),|a|+\varepsilon)$ — tj. pre $|x|<|a|+\varepsilon$ — iste platí $|(x+1/n)^n| = |x+1/n|^n \le (|x|+1/n)^n < (|a|+\varepsilon+1/n)^n$

[14] túto úvahu možno sformulovať nasledovne: ak a je vnútorný bod množiny $G\subset D(f)$ a funkcia f je spojitá na množine G, tak f je spojitá v bode a (pozor: hoci toto tvrdenie pôsobí úplne primitívnym dojmom, je v ňom predpoklad „a je vnútorný bod množiny G“ podstatný)

preto pri vyšetrovaní spojitosti funkcie f nemôžeme použiť dôsledok vety 7' na celom intervale $(-1,1)$ „naraz".

2. Na základe myšlienok z riešenia pr. 318.5 možno dôsledok vety 7' zovšeobecniť:

Hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na množine M*, ak pre každý bod $a \in M$ existuje také jeho okolie $O(a)$, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $M \cap O(a)$.

Platí toto tvrdenie: *Ak každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, je spojitá na množine M a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na M, tak funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je spojitá na množine M.*

319. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií spojitých na intervale $[a,b]$, nech $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Ak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť prvkov z $[a,b]$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, tak $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Dokážte!

320. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií rovnomerne spojitých na množine M. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na M, tak f je rovnomerne spojitá na M. Dokážte!

321. Môže postupnosť nespojitých funkcií rovnomerne konvergovať

1. k spojitej funkcii? 2. k nespojitej funkcii?

322$_0$. 1. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx} - (n-1)e^{-(n-1)x})$ konverguje nerovnomerne na $[0,1]$, ale jeho súčet je spojitý na $[0,1]$.

2. Ukážte, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{\pi}{x}, & \text{ak} \quad x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0\,, & \text{ak} \quad x \notin \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \end{cases} ,$$

je postupnosť spojitých funkcií, ktorá konverguje nerovnomerne na $\mathbf{R}$, ale jej limita je spojitá funkcia.

323$_0$. 1. Uveďte príklad postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na intervale $[0,1]$, ktorá konverguje na $[0,1]$ nerovnomerne k funkcii f, pričom

a) každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, je spojitá a funkcia f je nespojitá;
b) každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, je nespojitá a funkcia f je spojitá;
c) každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, aj funkcia f sú nespojité.

2. Riešte tú istú úlohu pre prípad radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a jeho súčtu.

Veta 8. *Nech $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ a každá z funkcí f_n, $n \in \mathbf{N}$, je riemannovsky integrovateľná na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(teda je oprávnená zámena poradia integrálu a limity:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \quad).$$

Veta 8'. *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných a riemannovsky integrovateľných na intervale $[a,b]$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $[a,b]$, tak aj funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je riemannovsky integrovateľná na $[a,b]$ a platí*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right) . \tag{4.4}$$

Ak funkcie f_n, $n \in \mathbf{N}$, aj funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sú riemannovsky integrovateľné na $[a,b]$ a platí rovnosť (4.4), hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možno na intervale $[a,b]$ integrovať člen po člene.*

324. Vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 5} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\, dx$; 2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\, dx$.

325. Na základe výpočtu integrálov $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^2\, dt$ nájdite súčet radu

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots .$$

326. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných a riemannovsky integrovateľných na intervale $[a,b]$, nech množina $M \subset [a,b]$ má Jordanovu mieru nula. Ak súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je ohraničená funkcia f a jeho konvergencia je rovnomerná na množine $[a,b] \setminus M$, tak ho možno na intervale $[a,b]$ integrovať člen po člene. Dokážte!

327. 1. Ukážte, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2(n+1)} - x^{2n})$ konverguje nerovnomerne na $[-1,1]$, ale možno ho tam integrovať člen po člene.

2. Ukážte, že hoci všetky členy radu $(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1)x^{n-1} - (n-1)nx^{n-2})$ aj jeho súčet sú spojité na intervale $[0,1]$, nemožno tento rad na intervale $[0,1]$ integrovať člen po člene.

328$_0$. Ukážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = n^{\alpha}xe^{-nx}$

1. konverguje na intervale $[0,1]$ bodove pre každé $\alpha \in \mathbf{R}$;
2. konverguje na intervale $[0,1]$ rovnomerne len pre $\alpha < 1$;

ale

3. rovnosť $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$ platí pre všetky $\alpha < 2$.

Veta 9. *Nech definičným oborom funkcí f_n, $n \in \mathbf{N}$, aj ich prvých derivácií je ohraničený interval I. Ak*

1. *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje aspoň v jednom bode $a \in I$*

a

2. *postupnosť derivácií $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na I*

tak

a) *postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na I*

a

b) *funkcia $g = \lim_{n\to\infty} f_n'$ je deriváciou funkcie $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.*

Ak funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, je diferencovateľná v bode $a \in \mathbf{R}$ (na intervale I) a platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(a)$$

$$\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in I \text{ [15]} \right),$$

hovoríme, že *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možno v bode a (na intervale I) derivovať člen po člene.*

Pre prípad funkcionálnych radov možno vetu 9 sformulovať nasledovne:

Veta 9'. *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií diferencovateľných na ohraničenom intervale I. Ak*

1. *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a \in I$*

a

2. *rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje rovnomerne na I,*

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na I a možno ho tam integrovať člen po člene.

---

[15] ak $I = [c,d]$, $I = [c,d)$ alebo $I = (c,d]$ tak v bode c, resp. d ide o príslušné jednostranné derivácie

329. Dokážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na množine M:

1_0. $f_n(x) = \cos\dfrac{1}{nx}$, $\quad M = [1,2]$;

2_0. $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$, $\quad M = [a,b]$, $a > 0$;

3. $f_n(x) = n\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{nx}$, $\quad M = [1,10]$;

4_0. $f_n(x) = n\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$, $\quad M = [0,1]$.

Riešenie. 3. Využijeme tvrdenie a) vety 9; množina $M = [1,10]$ je ohraničený interval, postupnosť $\left\{n\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{nx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje iste v bode $x = 1 \in M$:

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,(1/n)}{1/n} = 1 \quad {}^{16}; \tag{4.5}$$

postupnosť $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$, tj. $\left\{\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ [17], konverguje podľa vety 2 na intervale $[1,10]$ rovnomerne k funkcii $g(x) \equiv 1$, $x \in [1,10]$:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,10]}|f_n'(x) - g(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,10]}\frac{1}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2} = 0\ .$$

Sú teda splnené všetky predpoklady vety 9, podľa jej tvrdenia a) postupnosť $\left\{n\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{nx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na intervale $[1,10]$.

Poznámka. Podľa tvrdenia b) vety 9 je funkcia $g(x) \equiv 1$, $x \in [1,10]$, deriváciou funkcie $f :=$ $:= \lim_{n\to\infty} f_n|[1,10]$, preto predpis funkcie f musí mať tvar $f(x) = x + C$. Pretože — ako vyplýva z rovnosti (4.5) — $f(1) = 1$, je $C = 0$. Teda $n\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{nx} \rightrightarrows x$ na $[1,10]$.

330. Dokážte, že nasledujúce funkcie sú diferencovateľné v každom bode svojho definičného oboru a ich derivácia je spojitá funkcia:

1. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{5/2}}$;

2. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$;

3. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\ln^2(n+1)}$;

4. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$.

Riešenie. 4. Definičným oborom funkcie $f_n(x) := \dfrac{(-1)^n x}{n+x}$ je množina $\mathbf{R}\setminus\{-n\}$, pre každé $x \in$ $\in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n) = \mathbf{R}\setminus\{-n\,;\,n\in\mathbf{N}\}$ rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria[18], preto $D(f) =$ $= \mathbf{R}\setminus\{-n\,;\,n\in\mathbf{N}\} = (-1,\infty)\cup\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n-1,-n)$.

---

[16] pripomeňme, že $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,u}{u} = 1$

[17] keby sme sa chceli striktne pridŕžať znenia vety 9, v ktorej je definičným oborom funkcií f_n a f_n', $n \in \mathbf{N}$, interval I, tj. v našom prípade interval $[1,10]$, mali by sme vlastne uvažovať postupnosti $\{f_n|[1,10]\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\{f_n'|[1,10]\}_{n=1}^{\infty}$

[18] pozri vetu 12' z odseku 3.3, pre dané x je postupnosť $\left\{\dfrac{n}{n+x}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónna, ak $n_0 + x > 0$

Pomocou vety 9' teraz ukážeme, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$ možno derivovať člen po člene v každom bode $a \in$ $\in D(f)$. Nech je teda dané $a \in D(f)$; zvoľme $\varepsilon > 0$ tak, aby $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset D(f)$. Na ohraničenom intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ sú splnené všetky predpoklady vety 9':

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje dokonca v každom bode intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (pretože $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset D(f)$);
2. rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{(1+x/n)^2}$ konverguje na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ rovnomerne podľa Abelovho kritéria (pozri vetu 5'; rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konverguje rovnomerne na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ [19] a postupnosť $\displaystyle\left\{\frac{1}{(1+x/n)^2}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená a monotónna pre každé $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ak $n_0 > -a-1$).

Podľa vety 9' možno teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ derivovať na intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ člen po člene:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, n}{(x+n)^2}\,, \quad x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\,. \tag{4.6}$$

Z diferencovateľnosti funkcie f na intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ vyplýva jej diferencovateľnosť v bode a [20], hodnotu $f'(a)$ nájdeme dosadením $x = a$ do (4.6). Keďže tieto úvahy platia pre každé $a \in D(f)$, má funkcia f deriváciu v každom bode svojho definičného oboru a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, n}{(x+n)^2}\,. \tag{4.7}$$

Spojitosť funkcie f' dokážeme podobne ako v pr. 318.5: každá z funkcií $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^n\, n}{(x+n)^2}$ je spojitá na intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (čísla a, ε majú ten istý význam ako predtým) a — ako sme už dokázali — rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje rovnomerne na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$; preto funkcia $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ je podľa dôsledku vety 7' spojitá na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, a teda iste spojitá v bode a. Keďže a bol ľubovolný bod množiny $D(f) = D(f')$, je funkcia f' spojitá v každom bode svojho definičného oboru.

Poznámky. 1. Rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{(1+x/n)^2}$ konverguje rovnomerne na každom z intervalov $(-1,\infty)$, $(-2,-1)$, $\dots$, $(-n-1,-n)$, $\dots$ (možno to dokázať pomocou Abelovho kritéria rovnako ako v riešení pr. 330.4). Na ohraničených intervaloch $(-2,-1)$, $(-3,-2)$, $\dots$, $(-n-1,-n)$, $\dots$ sú preto splnené všetky predpoklady vety 9', na každom z týchto intervalov možno teda rovnosť (4.7) dokázať pre všetky jeho prvky „naraz". Na základe vety 9' však túto rovnosť nemôžeme dokázať „naraz" pre všetky prvky intervalu $(-1,\infty)$, pretože $(-1,\infty)$ je neohraničená množina.

2. Funkcia $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$ je spojitá (pretože má konečnú deriváciu v každom bode svojho definičného oboru); vyšetrime teraz charakter jej bodov nespojitosti, ktorými sú všetky prvky množiny $\{-n\,;\, n \in \mathbf{N}\}$. Nech je dané $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$; napíšme funkciu f ako súčet troch funkcií:

$$f = \sum_{n=1}^{k-1} f_n + f_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n\,.$$

Každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}\setminus\{k\}$, je spojitá na $(-k-1,-k+1)$, preto je na $(-k-1,-k+1)$ spojitá aj funkcia $\sum_{n=1}^{k-1} f_n$ (ako súčet konečného počtu funkcií spojitých na $(-k-1,-k+1)$); zo spojitosti funkcií $f_n|(-k-1,-k+1)$, $n > k$, a z rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ na $(-k-1,-k+1)$ (tá vyplýva z Weierstrassovho kritéria alebo z vety 9') vyplýva podľa dôsledku vety 7' spojitosť funkcie $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ na $(-k-1,-k+1)$. Keďže funkcie $\sum_{n=1}^{k-1} f_n$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$ sú spojité na $(-k-1,-k+1)$, je iste $\lim_{x\to -k}(\sum_{n=1}^{k-1} f_n(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x))$ konečná; súčasne

$$\lim_{x\to -k+} f_k(x) = \lim_{x\to -k+}\frac{(-1)^k x}{k+x} = \begin{cases} -\infty\,, & \text{ak } k \text{ je párne} \\ \infty\,, & \text{ak } k \text{ je nepárne} \end{cases}\,,$$

[19] pozri poznámku [6]

[20] pri tejto úvahe využívame, že a je vnútorný bod intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$$\lim_{x\to -k-} f_k(x) = \begin{cases} \infty\,, & \text{ak} \quad k \quad \text{je párne} \\ -\infty\,, & \text{ak} \quad k \quad \text{je nepárne} \end{cases} .$$

Preto

$$\lim_{x\to -k+} f(x) = \lim_{x\to -k+} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-1} f_n(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right) + f_k(x) \right] = \begin{cases} -\infty\,, & \text{ak} \quad k \quad \text{je párne} \\ \infty\,, & \text{ak} \quad k \quad \text{je nepárne} \end{cases} ,$$

$$\lim_{x\to -k-} f(x) = \begin{cases} \infty\,, & \text{ak} \quad k \quad \text{je párne} \\ -\infty\,, & \text{ak} \quad k \quad \text{je nepárne} \end{cases} ,$$

teda $-k$ je bod nespojitosti 2. druhu. Podobne možno postupovať pre $k = 1$.

331. 1_0. Dokážte nasledujúce tvrdenie: Nech funkcie $f_n\,, n \in \mathbf{N}$, sú k–krát diferencovateľné na ohraničenom intervale I ($k \in \mathbf{N}$). Ak

(i) každý z radov $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}\,, m = 0, 1, \ldots, k$, konverguje aspoň v jednom bode intervalu I

a

(ii) rad k–tych derivácií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ konverguje rovnomerne na I,

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na intervale I a možno ho tam k–krát derivovať člen po člene (tj. pre $m = 1, \ldots, k$ platí rovnosť $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}(x)$, $x \in I$; ak $I = [c, d]$, $I = [c, d)$ alebo $I = (c, d]$, ide pre $x = c$, resp. $x = d$ o príslušné jednostranné derivácie).

2. Dokážte, že nasledujúce funkcie sú spojite diferencovateľné:

a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; b$_0$) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

332. Ak každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, má primitívnu funkciu na intervale $[a, b]$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$, tak f má tiež primitívnu funkciu na $[a, b]$. Dokážte!

337. Rozhodnite o pravdivosti týchto tvrdení: Nech funkcie $f_n\,, n \in \mathbf{N}$, sú diferencovateľné na neohraničenom intervale I, nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje rovnomerne na I a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a \in I$. Potom

1. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na I;
2. rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ možno na intervale I derivovať člen po člene.

334. 1_0. Ukážte, že postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \operatorname{arctg} nx$, konverguje na $\mathbf{R}$ rovnomerne k diferencovateľnej funkcii f, ale $f'(1) \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1)$.

2. Zostrojte postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ diferencovateľných funkcií a funkciu $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ tak, aby $f_n \rightrightarrows f$ na $[-1, 1]$, a pritom neexistovala $f'(0)$.

4.3 Mocninové rady

4.3.1 Polomer a interval konvergencie mocninového radu. Základné vlastnosti mocninových radov

Rad funkcií (premennej x), ktorý má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \,, \tag{4.8}$$

kde $a \in \mathbf{R}$ a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel, sa nazýva *mocninový* (*potenčný*) *rad (so stredom a)*. Čísla a_n, $n = 0, 1, \ldots$, sa nazývajú *koeficienty radu* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ [21].

[21] pri niektorých zápisoch členy s nulovými koeficientami ,,vypadnú"; napr. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1}$ je zápis mocninového radu so stredom 0, zodpovedajúceho postupnosti koeficientov 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, ...

Veta 10. *Ak rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *konverguje v bode* $t_0 \neq 0$, *tak konverguje absolútne v každom bode intervalu* $(-|t_0|, |t_0|)$.

Dôsledok. *Pre mocninový rad* (4.8) *nastane práve jedna z nasledujúcich možností:*

a) *existuje* $R > 0$ *tak, že rad* (4.8) *konverguje absolútne v každom bode* $x \in (a-R, a+R)$ *a diverguje pre* $x \in (-\infty, a-R) \cup (a+R, \infty)$*;*

b) *rad* (4.8) *konverguje absolútne na* $\mathbf{R}$*;*

c) *rad* (4.8) *konverguje len v bode* a.

Ak nastane prípad a), nazýva sa číslo R *polomer konvergencie radu* (4.8) a interval $(a-R, a+R)$ *interval konvergencie radu* (4.8); v prípade b) sa nazýva polomerom konvergencie radu (4.8) číslo $R = \infty$ a jeho intervalom konvergencie interval $(-\infty, \infty)$; v prípade c) za polomer konvergencie radu (4.8) považujeme číslo $R = 0$ [22].

Pri hľadaní polomeru konvergencie R sa najčastejšie používajú nasledujúce tvrdenia[23]:

Veta 11 (*Cauchy, Hadamard*). *Nech* $r := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $(\in \mathbf{R}^*)$. *Potom pre polomer konvergencie* R *radu* (4.8) *platí:*

$$R = \begin{cases} 1/r\,, & ak \quad r \in \mathbf{R}^+ \\ \infty\,, & ak \quad r = 0 \\ 0\,, & ak \quad r = \infty \end{cases} .$$

Veta 12. *Ak počínajúc niektorým* n_0 *je* $a_n \neq 0$ *a existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ $(\in \mathbf{R}^*)$, *tak pre polomer konvergencie* R *mocninového radu* (4.8) *platí*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| .$$

335. Nájdite (pokiaľ existuje) interval konvergencie mocninového radu:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+1)^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2} x^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$;
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n\,, \quad a > 0$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n} (x-3)^n$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{4n}}{n^2}$;
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(3\pi n/4)}{n} x^n$;
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{n^2}{2^n}\right) (x-3)^n$.

336. Nájdite obor konvergencie mocninového radu:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}\,(x+2)^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^{n!}$;

[22] v prípade a) sa nemusí obor konvergencie D radu (4.8) zhodovať s jeho intervalom konvergencie — rad (4.8) môže totiž konvergovať aj v niektorom z bodov $a-R$, $a+R$, prípadne v obidvoch — vo všeobecnosti platia len inklúzie $(a-R, a+R) \subset D \subset [a-R, a+R]$

[23] tie sú odvodené z Cauchyho a d'Alembertovho kritéria (vety 6' a 7' z odseku 3.3), pri hľadaní R možno samozrejme používať aj ďalšie kritériá z kapitoly 3

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n , \quad a > 0$;

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(x+1)^n$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)\, x^n , \quad a > 1$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$;

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} , \quad a \geq b > 0$;

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$;

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

337$_0$. Pre dané $R \in \mathbf{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ zostrojte mocninový rad s polomerom konvergencie R.

338. Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad. Nájdite polomer konvergencie R radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

339. 1. Nech polomery konvergencie radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sú R_1 a R_2. Aký je vzťah medzi R_1, R_2 a polomerom konvergencie R radu $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$, ak

a) $R_1 > R_2$?

b) $R_1 = R_2$?

2. Nech polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je $R \in \mathbf{R}_0^+ \cup \{\infty\}$. Aký je polomer konvergencie r radu

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k x^n \quad (k \in \mathbf{N})$?

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn} \quad (k \in \mathbf{N})$?

3. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť nenulových čísel a existuje $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, nech $k, m \in \mathbf{N}$. Potom pre polomer konvergencie R radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn+m}$ platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} .$$

Dokážte!

340$_0$. Uveďte príklad mocninového radu, ktorého oborom konvergencie je interval

1. $(-1, 1)$;

2. $(-1, 1]$;

3. $[-1, 1)$;

4. $[-1, 1]$.

341. 1. Ak pre polomer konvergencie R radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ platí $R > 1$, tak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokážte!

2. Ak pre polomer konvergencie R radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ platí $R < 1$, tak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená postupnosť. Dokážte!

3$_0$. Uveďte príkald mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ s polomerom konvergencie $R = 1$ takého, že

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Veta 13. *Nech rad (4.8) má nenulový polomer konvergencie R, nech $r \in (0, R)$. Potom tento rad konverguje rovnomerne na intervale $[a-r, a+r]$.*

Veta 14. *Ak rad (4.8) má polomer konvergencie $R \in \mathbf{R}^+$ a konverguje v bode $a+R$ (v bode $a-R$), tak konverguje rovnomerne na intervale $[a, a+R]$ (na intervale $[a-R, a]$)*[24].

Veta 15. *Rady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ *majú rovnaký polomer konvergencie.*

Z týchto viet možno na základe viet 8', 9' a dôsledku vety 7' odvodiť nasledujúce tvrdenie:

Veta 16. *Nech rad (4.8) má nenulový polomer konvergencie R. Potom*
a) *Funkcia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ je spojitá v každom bode oboru konvergencie D radu (4.8)*[25];
b) *Rad (4.8) možno integrovať člen po člene na každom intervale $[c, d] \subset D$, špeciálne*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(t-a)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \quad x \in D$$ [26],

c) *V každom bode $x \in I$, kde I je interval konvergencie radu (4.8), má funkcia f derivácie všetkých rádov; hodnotu $f^{(k)}(x)$ ($k \in \mathbf{N}$, $x \in I$) možno nájsť k–násobným derivovaním radu (4.8) člen po člene:*

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right)' = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k}, \quad x \in I,\ k \in \mathbf{N}. \tag{4.9}$$

Ak $R \in \mathbf{R}^+$ a rad $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k}$ konverguje pre $x = a+R$ ($x = a-R$), tak funkcie f, f', ..., $f^{(k)}$ sú definované aj v bode $a+R$ (v bode $a-R$) a v tomto bode platí tiež rovnosť (4.9).

342. Integrovaním člen po člene nájdite súčty radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{2^n} x^n$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{3^{n+2}}$.

Riešenie. 1. Polomer konvergencie daného radu je $R = 1$ (na jeho výpočet sme mohli použiť vetu 11 ($R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$) aj vetu 12 ($R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$)); v bodoch $x = 1$ a $x = -1$ (tj. v krajných bodoch intervalu konvergencie $(-1, 1)$) rad $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ diverguje (nie je splnená nutná podmienka konvergencie). Definičným oborom funkcie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ je teda interval $(-1, 1)$.

Zapíšme predpis funkcie f v tvare

$$f(x) = xg(x) ,$$

kde

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} .$$

Súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ nájdeme integrovaním člen po člene: podľa tvrdenia b) vety 16 je funkcia $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ primitívna k funkcii g, pritom súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ (ktorý je geometrický pre každé $x \in \mathbf{R}$) už poznáme:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1) .$$

[24] a — ako vyplýva z vety 13 — na každom intervale $[a-r, a+R]$, $-R < r < R$ ($[a-R, a+r]$, $-R < r < R$)
[25] tj. v každom bode svojho definičného oboru, čo znamená, že f je spojitá funkcia
[26] pripomeňme, že podľa vety 14 z odseku 2.3 je F primitívna funkcia k funkcii f, pričom $F(a) = 0$

Odtiaľ dostávame

$$g(x) = G'(x) = \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad x \in (-1,1)\,,$$

a teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xg(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\,, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Poznámka. V uvedenom postupe sme mohli namiesto integrovania člen po člene použiť samozrejme aj derivovanie člen po člene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \overset{(*)}{=} x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}\,, \quad x \in (-1,1)\,,$$

pritom rovnosť (*) vyplýva z tvrdenia c) vety 16.

343. Derivovaním člen po člene nájdite súčty radov:

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}x^{4n-1}}{4n+1}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n(2n-1)}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$.

Riešenie. 4. Polomer konvergencie daného radu je $R=1$, pričom v bodoch $x=1$ a $x=-1$ tento rad konverguje. Definičným oborom funkcie $f(x) = \dfrac{x^n}{n(n+2)}$ je teda interval $[-1,1]$.

Aby sme našli súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$, budeme sa podobne ako pri riešení pr. 342.1 snažiť postupnými úpravami dospieť k mocninovému radu, ktorého súčet už poznáme (zatiaľ sú pre nás takými radmi len geometrické rady, neskôr — s Taylorovými radmi — sa počet mocninových radov, ktorých súčty poznáme, zväčší).

Pretože $\dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$, platí pre $x \in [-1,1)$ rovnosť

$$f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) - f_2(x))\,,$$

kde

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,, \qquad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

(uvedená rovnošť nemôže platiť pre $x=1$, pretože v tomto bode rady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ divergujú).

Súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ už môžeme nájsť derivovaním člen po člene: podľa tvrdenia c) vety 16 pre $x \in$ $\in (-1,1)$ ($(-1,1)$ je interval konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$) platí

$$f_1'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}\,.$$

Preto pre $x \in (-1,1)$ je

$$f_1(x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + C\,;$$

pre hľadanú funkciu f_1 platí $f_1(0)=0$ (hodnotu $f_1(0)$ sme vypočítali dosadením $x=0$ do radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$), odtiaľ $C=0$ a

$$f_1(x)=-\ln(1-x)\,,\quad \text{ak}\quad x\in(-1,1)\quad {}^{27}. \tag{4.10}$$

Teraz hľadajme súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$: pre $x\in[-1,1)\,,\ x\neq 0$ platí

$$f_2(x)=\frac{1}{x^2}\,g(x)\,,$$

kde

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\,,$$

a súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$ už môžeme nájsť derivovaním člen po člene: pre $x\in(-1,1)$ (tento interval je intervalom konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$) platí

$$g'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}=-x-1+\frac{1}{1-x}\,,$$

preto

$$g(x)=\int\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)dx=-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)+C\,,\quad \text{ak}\quad x\in(-1,1)\,,$$

a pretože z rovnosti $g(0)=0$ vyplýva $C=0$, je

$$g(x)=-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)\,,\quad \text{ak}\quad x\in(-1,1)\quad {}^{28}$$

a

$$f_2(x)=\frac{1}{x^2}\,g(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x^2}\,,\quad \text{ak}\quad x\in(-1,1)\,,\ x\neq 0\,. \tag{4.11}$$

Pre $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$ teda platí

$$f(x)=\frac{1}{2}(f_1(x)-f_2(x))=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right)\,. \tag{4.12}$$

Zostáva nájsť súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$ pre $x=0\,,\ x=1$ a $x=-1$; začnime prípadom $x=-1$. Podľa tvrdenia a) vety 16 je funkcia $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$ spojitá v každom bode svojho definičného oboru, ktorým

---

[27] mohli sme tiež použiť rovnosť $f_1(x)=f_1(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$, pri hľadaní predpisu funkcie f_1 na $x\in(-1,1)$ sme mohli rovnako dobre použiť aj integrovanie člen po člene:

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$$

[28] rovnako aj pri hľadaní predpisu funkcie g pre $x\in(-1,1)$ sme mohli použiť tvrdenie b) vety 16:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n+1}\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n+1}\right)dt=\int_0^x\frac{t^2}{1-t}\,dt=-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)$$

je interval $[-1,1]$, preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} = f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right) ;$$

pretože elementárna funkcia $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right)$ je spojitá v bode -1, je jej limitou v tomto bode funkčná hodnota; to znamená, že rovnosť (4.12) platí aj pre $x=-1$.

Rovnako zo spojitosti funkcie f v bode 1 vyplýva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) - \left(\lim_{x\to 1-} \frac{x+1}{x^2}\right)(\lim_{x\to 1-} (1-x)\ln(1-x)) = \frac{3}{4} - 2.0 = \frac{3}{4}$$

(pri výpočte $\lim_{x\to 1-}(1-x)\ln(1-x)$ sme použili l'Hospitalovo pravidlo, ostatné limity sa nájdu dosadením)[29].

Zostal prípad $x=0$, v ktorom sa zaobídeme bez výpočtu limity (hoci samozrejme podľa tvrdenia a) vety 16 aj tu platí $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$): dosadením $x=0$ do radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ dostávame $f(0)=0$ [30].

Celkovo teda

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right), & \text{ak} \quad x \in [-1,0) \cup (0,1) \\ 0, & \text{ak} \quad x = 0 \\ \frac{3}{4}, & \text{ak} \quad x = 1 \end{cases} .$$

Poznámky. 1. Úvahu, ktorú sme použili na dôkaz rovnosti (4.12) v bode $x=-1$, možno sformulovať nasledovne:

Ak pre $x \in (-a,a)$ platí rovnosť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, pričom funkcia f je spojitá v bode a (v bode $-a$) a rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v bode a (v bode $-a$), tak uvedená rovnosť platí aj pre $x=a$ ($x=-a$).

2. V riešení pr. 343.4 sme uviedli súčty radov $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ (ktoré konvergujú na intervale $[-1,1)$), len pre $x \in (-1,1)$ (rovnosť (4.10)), resp. $x \in (-1,1)\setminus\{0\}$ (rovnosť (4.11)). Z tvrdenia uvedeného v poznámke 1 vyplýva, že rovnosti (4.10) a (4.11) platia aj pre $x=-1$, okrem toho zrejme $f_2(0)=0$.

344. Nájdite súčty číselných radov:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

---

[29]hodnoty $f(1)$ a $f(-1)$ sme v tomto prípade mohli nájsť aj bez použitia vety 16: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$, preto n–tý súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ je $S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$, $n \in \mathbf{N}$, odtiaľ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$; analogicky možno postupovať pri dôkaze rovnosti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} = -\frac{1}{4}$

[30]snaživý čitateľ si môže preveriť platnosť rovnosti $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x^2}\right) = 0$

Riešenie. 2. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = g(1) ,$$

kde funkcia g je daná predpisom

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1} .$$

Z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$ v bode 1 vyplýva podľa vety 10 jeho konvergencia na intervale $(-1,1)$ [31]. Na tomto intervale možno súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$ nájsť na základe vety 16: pre $x \in (-1,1)$ je

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n+1} t^{2n-2}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} t^{2n-2} \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x .$$

Funkcia g je podľa tvrdenia a) vety 16 spojitá v každom bode oboru konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$, teda aj v bode 1, preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = g(1) = \lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$$

(na dôkaz rovnosti $g(1) = \operatorname{arctg} 1$ sme mohli použiť aj tvrdenie z poznámky 1 za riešením pr. 343.4).

Poznámka. Postup, ktorý sme použili pri riešení pr. 344.2, sa spravidla formuluje ako samostatné tvrdenie:

Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje, tak* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

345. 1. Uveďte príklad mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pre ktorý existuje konečná $\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ale rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

2. Nech $a_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Ak existuje konečná $\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: S$, tak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$. Dokážte!

346. Nech číselné rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ aj ich Cauchyho súčin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergujú, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$. Potom $C = AB$. Dokážte!

4.3.2 Taylorove rady

Nech funkcia f má v bode $a \in \mathbf{R}$ derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\, (x-a)^n$$

sa nazýva *Taylorov rad funkcie f v bode a*. Ak $a = 0$, používame spravidla názov *Maclaurinov rad funkcie f*. Funkcia f sa nazýva *analytická v bode a*, ak jej Taylorov rad konverguje na niektorom okolí $O(a)$ bodu a k funkcii $f|O(a)$.

[31] interval $(-1,1)$ je v tomto prípade aj intervalom konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\, x^{2n-1}$, vyplýva to z riešenia pr. 338

Veta 17. *Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *konverguje na niektorom okolí* $O(a)$ *bodu* $a \in \mathbf{R}$ *k funkcii* $f|O(a)$, *tak* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *je Taylorov rad funkcie* f (a funkcia f je teda analytická v bode a) [32].

Platia naledujúce rovnosti:

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, \infty)$;

2. $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $x \in (-\infty, \infty)$;

3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ [33], $x \in (-\infty, \infty)$ [34] ;

4. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$;

5. $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in I,$$

$$\text{kde} \quad I = \begin{cases} (-\infty, \infty), & \text{ak} \quad m \in \mathbf{N} \\ [-1, 1] \quad , & \text{ak} \quad m \in (0, \infty) \setminus \mathbf{N} \\ (-1, 1] \quad , & \text{ak} \quad m \in (-1, 0) \\ (-1, 1) \quad , & \text{ak} \quad m \in (-\infty, -1] \end{cases},$$

špeciálne

5.1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$;

5.2. $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$, $x \in [-1, 1)$;

pritom intervaly, na ktorých rovnosti 1-5 a 5.1,2 platia, sú obormi konvergencie príslušných mocninových radov.

347. 1. Ak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je Maclaurinov rad párnej (nepárnej) funkcie, tak $a_{2n+1} = 0$ ($a_{2n} = 0$) pre všetky $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Dokážte!

2. Ak $\varepsilon > 0$ a pre každé $x \in (0, \varepsilon)$ platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$, tak $a_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Dokážte!

348. Ukážte, že nasledujúce funkcie sú analytické v bode 0 a určite obor konvergencie ich Maclaurinových radov:

1. $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

2. $f(x) = \text{ch } ax$;

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}, & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad , & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$;

4. $f(x) = x \sin 2x \cos 3x$;

5. $f(x) = \sin^3 x$;

6. $f(x) = \frac{1}{a+bx}$, $ab \neq 0$;

7. $f(x) = \frac{5x-4}{x+2}$;

8. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$;

9. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$;

10. $f(x) = \frac{x}{(1-x^3)^2}$;

11. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $a > 0$;

12. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

[32] z vety 17 vyplýva, že definíciu funkcie analytickej v bode sme mohli vysloviť v tejto prirodzenejšej podobe: funkcia f sa nazýva analytická v bode a, ak existuje mocninový rad so stredom a, ktorý na niektorom okolí $O(a)$ bodu a konverguje k $f|O(a)$

[33] pritom kladieme $(-1)^0 := 1$

[34] funkcie sin a cos sa často definujú práve pomocou rovností 2 a 3

13. $f(x)=\ln(12-x-x^2)$; 14. $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$;

15. $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$;

16. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x+\ln(1-x^2)}{x^4}, & \text{ak}\quad x\neq 0\\ -\dfrac{2}{3}, & \text{ak}\quad x=0\end{cases}$.

Riešenie. 16. Použijeme podobné postupy ako pri hľadaní Taylorových polynómov v pr. I.387. Podľa vzorca 2 z úvodu k tomuto odseku platí pre všetky $x\in\mathbf{R}$ rovnosť

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\,x^{2n-1}\ ,$$

a teda aj rovnosť

$$x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\,x^{2n}\ . \tag{4.13}$$

Podľa vzorca 4 platí pre $u\in(-1,1]$

$$\ln(1+u)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^n}{n}\ .$$

Odtiaľ vyplýva (stačí položiť $u=-x^2$), že pre všetky $x\in(-1,1)$ platí

$$\ln(1-x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,(-x^2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n}\,x^{2n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\ . \tag{4.14}$$

Ak sčítame rovnosti (4.13) a (4.14), vidíme, že pre všetky $x\in(-1,1)$ (pre tieto x platia totiž rovnosti (4.13) a (4.14) súčasne) platí

$$\begin{aligned} x\sin x+\ln(1-x^2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}-\frac{1}{n}\right)x^{2n}=\\ &= \left(\frac{1}{1!}-1\right)x^2+\left(-\frac{1}{3!}-\frac{1}{2}\right)x^4+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{3}\right)x^6+\cdots=\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}-\frac{1}{n}\right)x^{2n}\ . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Vydelením rovnosti (4.15) výrazom x^4 dostávame pre $x\in(-1,1)$, $x\neq 0$:

$$\frac{x\sin x+\ln(1-x^2)}{x^4}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}-\frac{1}{n}\right)x^{2n-4}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}-\frac{1}{k+2}\right)x^{2k} \tag{4.16}$$

(pri poslednej úprave sme položili $n-2=k$, pritom $(-1)^{n+1}=(-1)^{k+3}=(-1)^{k+1}$). Pre $x=0$ má súčet radu $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}-\frac{1}{k+2}\right)x^{2k}$ hodnotu $-\frac{1}{3!}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}$.

Na intervale $(-1,1)$ teda rad $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}-\frac{1}{k+2}\right)x^{2k}$ konverguje k funkcii $f|(-1,1)$, čo podľa vety 17 znamená, že funkcia f je analytická v bode 0 a uvedený rad je jej Maclaurinovým radom.

Zostáva nájsť obor konvergencie radu $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}-\frac{1}{k+2}\right)x^{2k}$; využijeme pri tom znalosti oborov konvergencie radov, z ktorých sme tento rad vytvárali. Rad na pravej strane rovnosti (4.13) konverguje pre každé $x\in\mathbf{R}$, rad z rovnosti (4.14) len pre $x\in(-1,1)$ [35], preto ich súčet (tj. rad z rovnosti (4.15))

---

[35] okrem iného to vyplýva aj z tejto úvahy: rad $-\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n}/n)$ sme získali substitúciou $u=-x^2$ z radu $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n+1}u^n/n)$; keďže druhý z týchto radov konverguje len pre $u\in(-1,1]$ (pozri vzorec 4 z úvodu k tomuto odseku), konverguje prvý z nich len pre tie $x\in\mathbf{R}$, pre ktoré $-x^2\in(-1,1]$

konverguje len pre $x \in (-1,1)$ [36]. Ak konvergentný (divergentný) rad vynásobíme nenulovou konštantou (v našom prípade číslom $1/x^4$), dostaneme konvergentný (divergentný) rad; odtiaľ vyplýva: rad z rovnosti (4.16) iste diverguje pre $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ a konverguje pre $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$; jeho konvergencia v bode 0 (ktorá nevyplýva z tejto úvahy) je zrejmá.

Teda oborom konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} - \frac{1}{n+2} \right) x^{2n}$ je interval $(-1,1)$.

Poznámky. 1. Pri hľadaní oboru konvergencie Maclaurinovho radu funkcie f sme mohli samozrejme postupovať aj ,,klasickým" spôsobom (tj. nájsť polomer konvergencie a potom vyšetriť konvergenciu daného radu v krajných bodoch intervalu konvergencie); ak chceme na výpočet polomeru konvergencie použiť vetu 11, je

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \\ \sqrt[2k]{\dfrac{1}{(2k+3)!} + \dfrac{1}{k+2}} = \sqrt[2k]{\dfrac{1}{k+2}\left(1 + \dfrac{k+2}{(2k+3)!}\right)}\,, & \text{ak } n = 2k \text{ a } k \text{ je párne} \\ \sqrt[2k]{\dfrac{1}{k+2} - \dfrac{1}{(2k+3)!}} = \sqrt[2k]{\dfrac{1}{k+2}\left(1 - \dfrac{k+2}{(2k+3)!}\right)}\,, & \text{ak } n = 2k \text{ a } k \text{ je nepárne} \end{cases};$$

ak využijeme rovnosti $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k]{k+2} = 1$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{n+2}{(2n+3)!} = 0$, dostaneme $\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m-1]{|a_{2m-1}|} = = 0$, $\lim_{m\to\infty} \sqrt[4m]{|a_{4m}|} = 1$, $\lim_{m\to\infty} \sqrt[4m-2]{|a_{4m-2}|} = 1$, odtiaľ $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (pozri tiež riešenie pr. I.160).

2. Úvaha, ktorú sme použili pri hľadaní oboru konvergencie radu z rovnosti (4.15), je vlastne špeciálnym prípadom tohto tvrdenia:

Nech rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ *majú navzájom rôzne polomery konvergencie. Potom obor konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n$ *je prienikom oborov konvergencie radov* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ (pozri tiež riešenie pr. 339.1).

3. Príklad 348.16 ,,hovorí" vlastne toto: funkciu $g(x) = \dfrac{x\sin x + \ln(1-x^2)}{x^4}$ možno ,,dodefinovať" v bode 0 tak, že funkcia, ktorú dostaneme, bude analytická v bode 0 (táto poznámka sa vzťahuje aj na pr. 348.3, obdobne možno dodefinovať napr. funkcie $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$).

349. Ukážte, že nasledujúce funkcie sú analytické v bode 0 a určite obor konvergencie ich Maclaurinových radov:

1. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
2. $f(x) = \arcsin x$;
3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$, $a > 0$;
4. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2+x^2}{2-x^2}$;
5. $f(x) = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;
6. $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$;
7. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$;
8. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, $x \in (-1,1)$.

Riešenie. 2. Nájdeme najprv Maclaurinov rad derivácie funkcie f, tj. funkcie $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: Podľa vzorca 5.2 z úvodu k tomuto odseku pre každé $u \in [-1,1)$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n\,,$$

preto (stačí položiť $u = x^2$) pre každé $x \in (-1,1)$ je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}\,. \tag{4.17}$$

[36] pri tejto úvahe využívame, že súčet dvoch konvergentných radov je konvergentný rad, súčet konvergentného a divergentného radu je divergentný rad

Integrovaním člen po člene (tvrdenie b) vety 16) dostávame pre $x \in (-1,1)$ rovnosť

$$\begin{aligned}\arcsin x \ &\overset{37}{=} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n}\right)dt = \int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n}\,dt = \\ &= \ x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}\,, \qquad (4.18)\end{aligned}$$

čo podľa vety 17 znamená, že funkcia arcsin je analytická v bode 0 a rad $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ je jej Maclaurinovým radom.

Nájdime teraz obor konvergencie tohto radu: Rad z rovnosti (4.17) konverguje len pre $x \in (-1,1)$ (možno to odvodiť podobnými úvahami ako v poznámke [35] k riešeniu pr. 348.16), teda jeho polomer konvergencie je $R=1$. Pretože podľa vety 15 má ľubovoľný mocninový rad rovnaký polomer konvergencie ako rad získaný z neho integrovaním člen po člene, je polomer konvergencie radu $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ tiež rovný 1; pritom v bodoch $x=1$ a $x=-1$ (tj. v krajných bodoch intervalu konvergencie $(-1,1)$) tento rad konverguje podľa Raabeho kritéria [38]. Oborom konvergencie radu $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ je teda interval $[-1,1]$. (Z tvrdenia uvedeného v poznámke 1 za riešením pr. 343.4 potom vyplýva, že rovnosť (4.18) platí aj pre $x=1$ a $x=-1$.)

Poznámka. Polomer konvergencie R radu $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ môžeme samozrejme nájsť aj priamo (tj. bez úvah o polomere konvergencie radu z rovnosti (4.17)), nemožno na to však použiť vetu 12 (rad $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$ totiž nespĺňa podmienku „počínajúc niektorým n_0 je $a_n \neq 0$" z tejto vety, pozri tiež poznámku [21]). Číslo R možno vypočítať napr. na základe tvrdenia z pr. 339.3 alebo pomocou d'Alembertovho kritéria (veta 6' z odseku 3.3), z ktorého je toto tvrdenie odvodené.

350. 1. Nech funkcia f je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s nenulovým polomerom konvergencie. Nájdite Maclaurinov rad funkcie $\dfrac{f(x)}{1-x}$!

2. Nájdite Maclaurinove rady funkcií:

a) $f(x) = \ln^2(1-x)$;

b) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$.

351. Nájdite Taylorov rad funkcie f v bode a a určite jeho obor konvergencie, ak:

1. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-2x+3)^2}\,, \quad a=1$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}}\,, \quad a=5$;
3. $f(x) = (2x+1)\sin x \sin(x+1)\,, \quad a=-\dfrac{1}{2}$;
4. $f(x) = \ln(x^2-9x+20)\,, \quad a=3$.

Návod: Substitúciou $x-a=t$ možno hľadanie Taylorovho radu funkcie f v bode a previesť na hľadanie Maclaurinovho radu funkcie $g(t) := f(t+a)$. Pritom zrejme platí: ak interval I je obor konvegencie Maclaurinovho radu funkcie g, tak interval $J = a+I$ $(:= \{x+a\,;\, x \in I\})$ je oborom konvergencie Taylorovho radu funkcie f v bode a.

---

[37] využívame rovnosť $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$

[38] konvergencia v bodoch $x=1$ a $x=-1$ vyplýva aj z pr. 345.2

352. Pomocou derivovania alebo integrovania člen po člene nájdite súčty radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n\, n!}\, x^n$;

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}\, x^{2n}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\, x^{2n}$.

353. Nájdite súčty číselných radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$;

5. $\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

354. Nech funkcia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ má derivácie všetkých rádov v každom bode intervalu (a,b), nech pre niektoré $M>0$, $c>0$ platí

$$\forall\, n\in\mathbf{N}\ \ \forall\, x\in(a,b)\ :\ |f^{(n)}(x)|<Mc^n\ .$$

Potom Taylorov rad funkcie f v bode x_0 ($x_0\in(a,b)$) konverguje na intervale (a,b) k funkcii f. Dokážte![39]

355. Uveďte príklad funkcie, ktorá má derivácie všetkých rádov v bode 0, ale nie je v tomto bode analytická!

4.4 Niektoré výpočty pomocou radov

356. Vypočítajte nasledujúce hodnoty s uvedenou presnosťou:

1. $\sqrt[3]{130}$ (10^{-5}) ;
2. $\sqrt[4]{15}$ (10^{-4}) ;
3. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$ (10^{-4}) ;
4. $\ln 1.2$ (10^{-4}) ;
5. e (10^{-6}) .

Riešenie. 1. Platí

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{130} &= \sqrt[3]{125+5}=\sqrt[3]{125\left(1+\frac{1}{25}\right)}=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}=\\ &= 5\left[1+\frac{1}{1!\,3}\left(\frac{1}{25}\right)-\frac{2}{2!\,3^2}\left(\frac{1}{25}\right)^2+\frac{2\cdot 5}{3!\,3^3}\left(\frac{1}{25}\right)^3-\cdots\right]\end{aligned}$$

(použili sme vzorec 5 z úvodu odseku 4.3.2 pre $m=1/3$ a $x=1/25$), teda

$$\sqrt[3]{130}=5+5\cdot\frac{1}{1!\,3\cdot 5^2}-5\cdot\frac{2}{2!\,3^2 5^4}+5\cdot\frac{2\cdot 5}{3!\,3^3 5^6}-\cdots\ .$$

Ak číslo b je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, je prirodzené aproximovať ho niektorým čiastočným súčtom tohto radu. Odhadnime absolútnu chybu takejto aproximácie: ak pre n–tý zvyšok $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n$ uvedeného

[39] špeciálne teda (ak $c=1$) platí: ak postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na (a,b), tak Taylorov rad funkcie f v bode x_0 ($x_0\in(a,b)$) konverguje na intervale (a,b) k funkcii f; na základe tohto tvrdenia možno dokázať napr. vzorce 1-3 z úvodu tohto odseku

radu platí $|R_n| < \varepsilon_1$, ak každé z čísel $b_0, b_1, \ldots, b_n$ vypočítame s presnosťou ε_2 (tj. nájdeme aproximácie $\beta_0, \ldots, \beta_n$ čísel $b_0, \ldots, b_n$ také, že $|b_k - \beta_k| < \varepsilon_2$ pre $k = 0, 1, \ldots, n$) a ak zaokrúhlením čísla $\sum_{k=0}^{n} \beta_k$ dostaneme číslo β, pre ktoré platí $|\sum_{k=0}^{n} \beta_k - \beta| < \varepsilon_3$, tak číslo β je aproximáciou čísla b, pre ktorej absolútnu chybu ε platí

$$\varepsilon \leq \varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 ;$$

vyplýva to z nerovností

$$\varepsilon = \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k - \beta \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n} (b_k - \beta_k) \right| + \left| \sum_{k=0}^{n} \beta_k - \beta \right| .$$

Ak presnosť, s ktorou máme vypočítať číslo b, je $\delta = 10^{-m}$ ($m \in \mathbf{N}$), zaokrúhľujeme spravidla číslo $\sum_{k=0}^{n} \beta_k$ na m desatinných miest; pre chybu ε_3, ktorej sa tým dopúšťame, platí

$$\varepsilon_3 \leq 0.5 \cdot 10^{-m} = \frac{\delta}{2} .$$

Ak teda chceme, aby platilo $\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \delta = 10^{-m}$, treba zvoliť ε_1 a ε_2 tak, aby bola splnená nerovnosť $\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2 < \delta/2$; položme preto

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta}{4}$$

a nájdime (čo najmenšie) číslo n, pre ktoré platí

$$|R_n| < \varepsilon_1 = \frac{\delta}{4}$$

(také n existuje, pretože z konvergencie radu $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ vyplýva $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$), potom zrejme stačí položiť

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta}{4(n+1)} .$$

V našom príklade máme počítať s presnosťou $\delta = 10^{-5}$, nájdime teraz čísla n a ε_2. Rad $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, ktorého súčtom je číslo $\sqrt[3]{130}$, strieda — počínajúc členom b_1 — znamienka, pričom postupnosť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ rýdzomonotónne konverguje k 0, preto pre jeho n–tý zvyšok R_n ($n \in \mathbf{N}$) platí (pozri vetu 12 z odseku 3.3)

$$\begin{aligned} |R_n| &< |b_{n+1}| = 5 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{(n+1)!\, 3^{n+1}} \left(\frac{1}{25}\right)^{n+1} \leq \\ &\leq \frac{5}{3(n+1)} \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{n!\, 3^n} \cdot \frac{1}{5^{2n+2}} = \frac{1}{3(n+1)5^{2n+1}} . \end{aligned}$$

Nerovnosť $|R_n| < \delta/4 = 10^{-5}/4$ bude preto iste splnená pre tie $n \in \mathbf{N}$, ktoré sú riešeniami nerovnice

$$\frac{1}{3(n+1)5^{2n+1}} \leq \frac{1}{4 \cdot 10^5} ,$$

najmenším takým číslom je $n = 3$; potom

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta}{4(n+1)} = \frac{10^{-5}}{16} = 6.25 \cdot 10^{-7} .$$

Aby sme teda našli číslo $\sqrt[3]{130}$ s presnosťou 10^{-5}, stačí vypočítať každé z čísel b_0, b_1, b_2, b_3 s presnosťou $6.25 \cdot 10^{-7}$, sčítať ich a výsledok zaokrúhliť na 5 desatinných miest:

$$\begin{aligned} b_0 &= 5 , & \beta_0 &= 5 , \\ b_1 &= 5 \cdot \frac{1}{1!\, 3 \cdot 5^2} , & \beta_1 &= 0.066\,666\,7 , \\ b_2 &= -5 \cdot \frac{2}{2!\, 3^2 5^4} , & \beta_2 &= -0.000\,888\,9 , \\ b_3 &= 5 \cdot \frac{2 \cdot 5}{3!\, 3^3 5^6} & \beta_3 &= 0.000\,019\,8 , \end{aligned}$$

potom $\sum_{k=0}^{3}\beta_k = 5.065\,797\,6$, zaokrúhlením na 5 desatinných miest dostávame $5.065\,80$, preto

$$\sqrt[3]{130} = 5.065\,80 \pm 0.000\,01 \ .$$

Poznámky. 1. Pri odhade R_n sme mohli použiť napr. aj Lagrangeov tvar zvyšku Taylorovho polynómu (pozri [23, str. 173, poznámka 2]): pre

$$f(x) = 5(1+x)^{1/3}$$

je

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot 5 \cdot \frac{2\cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1}}\,(1+x)^{-(3n+2)/3}\ , \quad n \in \mathbf{N}\ ,$$

preto

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}\left(\vartheta_n \cdot \frac{1}{25}\right)}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{n+1} \right| = 5 \cdot \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(n+1)!\,3^{n+1}} \left(1+\vartheta_n \cdot \frac{1}{25}\right)^{-(3n+2)/3} \cdot \frac{1}{25^{n+1}}\ ,$$

kde $\vartheta_n \in (0,1)$, odtiaľ (ak použijeme rovnaké úpravy ako v riešení pr. 356.1 a nerovnosť $(1+\vartheta_n/25)^{-(3n+2)/3} < 1$)

$$|R_n| < \frac{1}{3(n+1)5^{2n+1}}\ , \quad n \in \mathbf{N}\ .$$

2. Číslo $\sqrt[3]{130}$ sme mohli napísať aj v tvare

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{216-86} = 6\sqrt[3]{1-\frac{86}{216}}$$

a ďalej pokračovať obdobne ako pri riešení pr. 356.1 (získaný rad ovšem vtedy nie je radom so striedavými znamienkami, preto nemožno použiť odhad $|R_n| < |b_{n+1}|$; z nerovnosti

$$|b_k| \le \frac{2}{k}\left(\frac{43}{108}\right)^k\ ,$$

kde

$$b_k := -6 \cdot \frac{2\cdot 5\cdots(3k-4)}{k!\,3^k}\left(\frac{43}{108}\right)^k\ , \quad k \ge 2\ ,$$

vyplýva tento odhad:

$$\begin{aligned} |R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \le \frac{2}{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{43}{108}\right)^k = \\ &= \frac{2}{n+1}\left(\frac{43}{108}\right)^{k+1}\frac{1}{1-43/108} = \frac{86}{65(n+1)}\left(\frac{43}{108}\right)^n\ , \quad n \in \mathbf{N}\ ; \end{aligned}$$

najmenším prirodzeným riešením nerovnice

$$\frac{86}{65(n+1)}\left(\frac{43}{108}\right)^n < \frac{10^{-5}}{4}$$

je $n = 12$ [40]).

Nemalo by však zmysel písať číslo $\sqrt[3]{130}$ napr. v tvare

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{64+66} = 4\sqrt[3]{1+\frac{66}{64}}\ ,$$

[40] použitím Lagrangeovho tvaru zvyšku dostaneme odhad

$$|R_n| \;=\; 6 \cdot \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(n+1)!3^{n+1}}\left(1-\vartheta_n \cdot \frac{43}{108}\right)^{-(3n+2)/3}\left(\frac{43}{108}\right)^{n+1} \le$$

pretože $66/64 > 1$, neleží číslo $66/64$ v obore konvergencie Maclaurinovho radu funkcie $\sqrt[3]{1+x}$.

357. Dokážte rovnosť

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2n+1)^{2k-1}} + \cdots\right)$$

a vypočítajte pomocou nej $\ln 2$ a $\ln 3$ s presnosťou 10^{-5}.

358. 1. Vypočítajte číslo π s presnosťou 10^{-5} na základe rovnosti

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\,.$$

2. Vypočítajte $\sin 18^\circ$ s presnosťou 10^{-4}.

359. S presnosťou 10^{-3} vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2\,dx$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\cos x\,dx$;
4. $\displaystyle\int_0^{1/9} \sqrt{x}\,e^x\,dx$.

Riešenie. 3. Podľa vzorca 3 z úvodu k odseku 4.3.2

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \quad x\in\mathbf{R}\,,$$

preto pre každé $x\in\mathbf{R}$ platí

$$\sqrt[3]{x}\,\cos x = \sqrt[3]{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}\,.$$

Rad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}$ konverguje rovnomerne na intervale $[0,1]$ (možno to dokázať Weierstrassovým alebo Abelovým kritériom alebo odvodiť z vety 13 a pr. 306), preto (podľa vety 8')

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,\cos x\,dx &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n\frac{x^{(6n+1)/3}}{(2n)!}\,dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{3x^{(6n+4)/3}}{(2n)!\,(6n+4)}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{(2n)!\,(6n+4)}\,.\end{aligned}$$

Ďalej budeme postupovať rovnako ako pri riešení pr. 356.1: Keďže rad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{(2n)!\,(6n+4)}$ je radom so striedavými znamienkami, pričom postupnosť $\displaystyle\left\{\frac{3}{(2n)!\,(6n+4)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ rýdzomonotónne konverguje k 0, platí pre jeho n–tý zvyšok $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$ odhad

$$|R_n| < \frac{3}{(2n+2)!\,(6n+10)} < \frac{1}{(2n+3)!}\,;$$

$$\le \frac{2}{n+1}\left(1-\frac{43}{108}\right)^{-(3n+2)/3}\left(\frac{43}{108}\right)^{n+1} \le \frac{2}{n+1}\left(\frac{108}{65}\right)^{n+1}\left(\frac{43}{108}\right)^{n+1} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{43}{65}\right)^{n+1}\,,$$

najmenším prirodzeným riešením nerovnice

$$\frac{2}{n+1}\left(\frac{43}{65}\right)^{n+1} < \frac{10^{-5}}{4}$$

je $n=25$

obr. 3

najmenším prirodzeným riešením nerovnice

$$\frac{1}{(2n+3)!} \le \frac{1}{4 \cdot 10^3}$$

je $n = 2$; potom

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 10^3} = 8.\overline{3} \cdot 10^{-5} .$$

Treba teda vypočítať b_n pre $n = 0$, 1, 2 s presnosťou ε_2, vypočítané čísla sčítať a výsledok zaokrúhliť na 3 desatinné miesta:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{4} &&= 0.75 , \\ b_1 &= -\frac{3}{20} &&= -0.15 , \\ b_2 &= \frac{3}{24 \cdot 16} &&= 0.007\,81 \ldots , \end{aligned}$$

$0.75 - 0.15 + 0.007\,81 = 0.607\,81$, teda

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \, dx = 0.608 \pm 0.001 .$$

Poznámka. Pretože čísla b_0 a b_1 sme vypočítali presne, stačilo by počítať číslo b_2 s presnosťou $\dfrac{1}{4 \cdot 10^3} = 2.5 \cdot 10^{-4}$.

360. Odvoďte nasledujúce približné vzorce pre obsah p kruhového odseku ABC, zodpovedajúceho malému stredovému uhlu AOC veľkosti 2ϑ (pozri obr. 3):

1. $p \approx \dfrac{2}{3} dh$;

2_0. $p \approx \dfrac{h}{15}(7d + 3s)$;

kde d je dĺžka tetivy AC, s je dĺžka oblúka AC, h je výška odseku ABC.

4.5 Ďalšie príklady

361. Nájdite obor konvergencie radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n (e^{x/n} - 1)^n$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1 + a^{2n} x^2}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\sin nx$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$, $\quad q>0$, $x\in(0,\pi)$;

9. $\sin x - \sin\sin x + \sin\sin\sin x - \cdots$;

10. $\cos x - \cos\cos x + \cos\cos\cos x - \cdots$.

362. 1. Na základe rovnosti

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}, \quad x\neq 1,$$

nájdite súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$.

2. Na základe rovnosti

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$$

nájdite súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$, $x\in(-\pi,\pi)$.

363. 1. Nech $a_n>0$ pre všetky $n\in\mathbf{N}$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty}(1/a_n)$ diverguje. Potom

$$\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdot\frac{a_3}{a_4+x} + \cdots = \frac{a_1}{x}, \quad x>0\,.$$

Dokážte!

2. Dokážte rovnosť $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x-1}$, $x>1$.

3. Nájdite súčty radov:

a) $\displaystyle\frac{2}{1+2x} + \frac{3}{(1+2x)(1+3x)} + \frac{4}{(1+2x)(1+3x)(1+4x)} + \cdots$, $x>0$;

b) $\displaystyle\frac{y}{1-y^2} + \frac{y^2}{1-y^4} + \frac{y^4}{1-y^8} + \cdots + \frac{y^{2^n}}{1-y^{2^{n+1}}} + \cdots$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$.

364. Nech $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$. Potom $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$. Dokážte!

365. Vyšetrite bodovú a rovnomernú konvergenciu postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M, ak:

1. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, $\quad M=(0,\infty)$;

2. $f_n(x) = n\displaystyle\int_0^x \sin\frac{\pi t^n}{2}\,dt$, $\quad M=[0,\alpha]$, $0<\alpha<1$;

3. $f_n(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{n-1}{n}x\right)$, $\quad M=\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$;

4. $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}+\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n}\,x}$ $\quad$ a) $M=(0,1)$, $\quad$ b) $M=(1,\infty)$;

5. $f_n(x) = x\operatorname{arctg} nx$, $\quad M=(0,\infty)$;

6. $f_n(x) = x^n + x^{2n} - 2x^{3n}$, $\quad M=[0,1]$;

7. $f_n(x) = \sqrt[n]{|\sin x|}$, $\quad M=\mathbf{R}$;

8. $f_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right)$, $\quad M=[0,\infty)$;

9. $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$ $\quad$ a) $M=(0,2)$, $\quad$ b) $M=(2,\infty)$;

10. $f_n(x) = n(x^{1/n}-1)$, $\quad M=[1,a]$;

11. $f_n(x) = \dfrac{n}{x}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, $\quad M=(0,10)$;

12. $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $\quad$ a) $M=[a,b]$, $\quad$ b) $M=\mathbf{R}$.

366$_0$. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale $[0,1]$, nech $f_n \to 0$ na $[0,1]$. Pre $\varepsilon > 0$ a $x \in [0,1]$ položme

$$n_\varepsilon(x) := \min\{n \in \mathbf{N}\,;\, \forall\, k \geq n\,:\, |f_k(x)| < \varepsilon\}\,.$$

Potom $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$ práve vtedy, keď každá z funkcií n_ε $(\varepsilon > 0)$ je ohraničená. Dokážte!

367. 1_0. Nech $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je rovnomerne spojitá funkcia, nech

$$f_n(x) := f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}\,.$$

Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbf{R}$. Dokážte!

2. Nech $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia, nech

$$f_n(x) := n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right), \quad x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}\,,$$

nech $a < b$. Potom $f_n \rightrightarrows f'$ na $[a,b]$. Dokážte!

3. Nech $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, nech

$$f_n(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right) \quad x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}\,.$$

Potom postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na každom ohraničenom intervale $[a,b]$. Dokážte!

368. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení:

1. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných funkcií definovaných na intervale (a,b), nech $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b). Potom pre každé $\alpha \in (0,1]$ platí $f_n^\alpha \rightrightarrows f^\alpha$ na (a,b).

2. Ak $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b) a $g_n \rightrightarrows g$ na (a,b), tak $f_n g_n \rightrightarrows fg$ na (a,b).

369. Vyšetrite bodovú a rovnomernú konvergenciu radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)^n}, \quad x \in [a,b]$, pričom a) $ab > 0$, b) $ab < 0$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{[n/2]!}$ [41], $\quad |x| < a$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin(x/n)}{x^2 + \ln^3(n+1)}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{n \ln^2(n+1)}, \quad x \geq 1$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/nx) \cos nx}{4 + \ln^2 2nx}$ a) $x \in (0,1)$, b) $x > 1$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n x + 1}$ a) $x \in (0,\delta)$, b) $x > \delta$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n), \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin\sqrt{n}}{1 + n^3 x^3}$ a) $x \geq \alpha > 0$, b) $x > 0$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} x^n, \quad x \geq 1$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ a) $x \in [0,\delta]$, b) $x \geq \delta$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n^2 + nx^2}}$ [41].

370. Nájdite všetky $\alpha \in \mathbf{R}$, pre ktoré rad $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx^2}$ konverguje rovnomerne na $(0,\infty)$.

---

[41] $[.]$ tu označuje celú časť

371$_0$. 1. Ukážte, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$ konverguje rovnomerne na každom ohraničenom intervale, ale nekonverguje absolútne v žiadnom bode $x\in\mathbf{R}$.

2. Ukážte, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ konverguje rovnomerne a absolútne na $[0,1]$, ale rad absolútnych hodnôt $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ konverguje na $[0,1]$ nerovnomerne.

372. Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|}$ konverguje, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x-a_n}$ konverguje rovnomerne a absolútne na každom uzavretom ohraničenom intervale $[a,b]$ neobsahujúcom žiadny prvok množiny $\{a_n\,;\,n\in\mathbf{N}\}$.

373. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií definovaných na intervale $[0,1]$, nech rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ bodove konverguje a $f_n\rightrightarrows 0$ na $[0,1]$. Vyplýva z toho rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ na $[0,1]$?

374. Rozhodnite o platnosti tohto tvrdenia: Ak postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená na intervale I, tak $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}f_n(x)=\sup_{x\in I}f(x)$.

375. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na uzavretom ohraničenom intervale I, tak $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje na I rovnomerne. Dokážte!

376. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií a vyšetrite ich spojitosť:

1. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$;

2. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-x)^2}$;

3. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$.

377. Ukážte, že funkcia

$$F(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+n\omega)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x-n\omega)^2}$$

je spojitá a periodická.

378. 1. Nech postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií definovaných na otvorenom intervale I konverguje na I rovnomerne k funkcii f. Ak žiadna z funkcií f_n, $n\in\mathbf{N}$, nemá bod nespojitosti 2. druhu, tak ani funkcia f nemá bod nespojitosti 2. druhu. Dokážte!

2. Uveďte príklad postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých funkcií definovaných na $\mathbf{R}$ takej, že $\lim_{n\to\infty}f_n$ je definovaná na $\mathbf{R}$ a má bod nespojitosti 2. druhu.

379. Nech postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónnych funkcií definovaných na intervale $[a,b]$ konverguje na $[a,b]$ k spojitej funkcii f. Potom $f_n\rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Dokážte!

380. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvexných funkcií bodove konverguje na intervale (a,b) k funkcii f, tak f je spojitá na (a,b). Dokážte!

381. 1. Dokážte, že existuje spojitá funkcia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ktorá nie je monotónna na ľubovoľnom intervale $I\subset\mathbf{R}$!

2. Dokážte, že existuje spojite diferencovateľná funkcia $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, ktorá nie je konvexná a nie je konkávna na ľubovoľnom intervale $I\subset[0,1]$!

382. Dokážte, že existuje funkcia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ také, že množina jej bodov nespojitosti je $\mathbf{Q}$, pričom
1. každé $a\in\mathbf{Q}$ je bod nespojitosti 1. druhu a $\lim_{x\to a+}f(x)\neq f(a)$, $\lim_{x\to a-}f(x)\neq f(a)$;
2$_0$. každé $a\in\mathbf{Q}$ je bod nespojitosti 2. druhu a $\lim_{x\to a+}f(x)$, $\lim_{x\to a-}f(x)$ neexistujú.

383. 1. Ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií riemannovsky integrovateľných na intervale $[a,b]$ je rovnomerne ohraničená na (a,b) a konverguje tam lokálne rovnomerne, tak $\lim_{n\to\infty}f_n\in\mathcal{R}[a,b]$ a

$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Dokážte!

2. Uveďte príklad postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií riemannovsky integrovateľných na intervale $[0,1]$, ktorá konverguje na $(0,1)$ lokálne rovnomerne k 0, ale $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

384. Nájdite limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n\ln x}{1+x^2}\,dx$;

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$;

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\,dx$;

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{1+1/n} x^n\ln x\,dx$;

5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}\,dx$, kde $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia .

385. Vypočítajte $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\,dx.$

386. Uveďte príklad postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií definovaných na intervale $[0,1]$, ktorá konverguje na $[0,1]$ nerovnomerne k ohraničenej funkcii f, pričom
1. $f_n\in\mathcal{R}[0,1]$ $(n\in\mathbf{N})$, $f\notin\mathcal{R}[0,1]$;
2. $f_n\notin\mathcal{R}[0,1]$ $(n\in\mathbf{N})$, $f\in\mathcal{R}[0,1]$.

387. Na základe pr. 119, 192 a 193 dokážte druhú vetu o strednej hodnote integrálneho počtu (veta 16 z odseku 2.4) pre prípad spojitej funkcie $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ a spojitej monotónnej funkcie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$.

388. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií a ich prvých derivácií:

1. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$;

2. $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

389. Nech funkcie f_n, $n\in\mathbf{N}$, sú spojite diferencovateľné na (ohraničenom alebo neohraničenom) intervale I. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a\in I$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'$ konverguje lokálne rovnomerne na I, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na I a možno ho tam derivovať člen po člene. Dokážte!

390. Ukážte, že postupnosť $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje na $\mathbf{R}$ rovnomerne k diferencovateľnej funkcii, ale pre žiadne $x\in\mathbf{R}$ neexistuje konečná $\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$.

391. Nech funkcia f a jej derivácie všetkých rádov sú definované na $\mathbf{R}$, nech postupnosť $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na $\mathbf{R}$ lokálne rovnomerne k funkcii φ. Potom $\varphi(x)=Ce^x$ pre niektoré $C\in\mathbf{R}$. Dokážte!

392. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale I, nech $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť konečných podmnožín intervalu I, nech definičným oborom funkcie f_n' je množina $I\setminus K_n$ $(n\in\mathbf{N})$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje aspoň v jednom bode $a\in I$ a existuje konvergentný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ taký, že platí

$$|f_n'(x)|\le a_n\,,\quad x\in I\setminus K_n\,,\ n\in\mathbf{N}\,,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ konverguje lokálne rovnomerne na I a možno ho derivovať člen po člene v každom bode $x\in I\setminus\bigcup_{n\in\mathbf{N}}K_n$. Dokážte!

393. 1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť obsahujúca všetky racionálne čísla z intervalu $(0,1)$. Potom funkcia

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-a_n|}{3^n}\,,\quad x\in(0,1)\,,$$

je spojitá a definičným oborom jej derivácie je množina $(0,1)\setminus\mathbf{Q}$. Dokážte!

2_0. Zostrojte spojitú funkciu $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ takú, že $D(f')=(0,1)\setminus\mathbf{Q}$, pričom v žiadnom bode $a\in\mathbf{Q}\cap(0,1)$ neexistujú jednostranné derivácie $f_+'(a)$ a $f_-'(a)$.

394. Nájdite obor konvergencie radov:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-n^\alpha} x^n$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\cos\frac{1}{3^n}\right)x^n$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\,x^n$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\,,\quad a>0\,,\ b>0$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n^2}}{n!}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}\,,\quad a>0$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$;

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n\,,$ kde $\nu(n)$ je počet cifier čísla n ;

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\,x^n$;

12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\,x^n$;

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\,x^n$;

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$.

395. Nech polomer konvergencie radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ je $R_1\in\mathbf{R}^+$ a $R_2\in\mathbf{R}^+$. Čo viete povedať o polomere konvergencie R radu

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+|a_n|}\,x^n$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\,,$ kde $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ je Cauchyho súčin radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$?

396. Nájdite Maclaurinove rady nasledujúcich funkcií a určite ich obor konvergencie I:

1. $f(x)=\sin\left(\mu\arcsin x\right)$;

2. $f(x)=\ln\sqrt[7]{3-x+6x^2-2x^3}$;

3. $f(x)=(x^2-1)\arcsin 2x^2$;

4. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}$;

5. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$;

6. $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$;

7. $f(x)=\ln\left(\pi\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}\right)+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$;

8. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

9. $f(x)=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;

10. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$.

397. Dokážte rovnosti:

1. $\displaystyle\operatorname{arctg} x\cdot\ln(1+x^2)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,\quad x\in[-1,1]$;

2. $\displaystyle\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)\frac{x^n}{n+2}\,,\quad x\in(-1,1]\setminus\{0\}$;

3. $\displaystyle\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}\,,\quad x\in[-1,1]$;

4. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\, x^{2n+1}\,, \quad x \in (-1,1)\ ;$

5. $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n-1}((n-1)!\,)^2}{(2n)!}\, x^{2n}\,, \quad x \in [-1,1]\ .$

398$_0$. 1. Na základe identity $(1+x)^p(1+x)^{-k-1} = (1+x)^{p-k-1}$ dokážte rovnosti

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{k+s}{s}\binom{p}{n-s} = \binom{p-k-1}{n}\,, \quad n = 0,1,\dots,p-k-1\ .$$

2. Z identity $(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-q-1} = (1-x)^{-m-q-2}$ odvoďte rovnosti

$$\sum_{s=0}^{p-m} \binom{q+s}{s}\binom{p-s}{m} = \binom{p+q+1}{p-m}\,, \quad p \ge m\,,\ m,q = 0,1,2,\dots\ .$$

399. Dokážte, že funkcia $F\colon(-1,1)\to \mathbf{R}$ daná predpisom $F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1-x\cos t)\,dt$, je elementárna.

400. Nájdite súčty radov:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\ ;$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\ln^n x}{n!}\ ;$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln^n x}{2^n\, n!}\ ;$

4. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + \dfrac{1}{2\cdot 4}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^3 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^5 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^7 + \cdots\ ;$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{(2n)!}\ ;$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{(2n+1)!}\ ;$

7. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + \cdots\ .$

401. Nájdite súčty číselných radov:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(3n+1)}\ ;$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}\ ;$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{n+1}\ ;$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\right)\dfrac{1}{n}\ .$

402. Ak Maclaurinov rad funkcie f konverguje na množine $\mathbf{R}$ rovnomerne k funkcii f, tak f je polynóm. Dokážte!

403. Nech funkcia $f\colon \mathbf{R}\to \mathbf{R}$ je súčtom radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, nech $\{n!\,a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť. Potom funkcia f má v každom bode $a \in \mathbf{R}$ derivácie všetkých rádov a platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,, \quad x \in R\ .$$

Dokážte!

404. 1. Dokážte rovnosti:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\ ;$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi \arcsin a, \quad |a|<1\ .$

2. Vyjadrite v tvare radu hodnotu integrálu:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx$.

405. Dokážte rovnosť

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239} \tag{4.19}$$

a na jej základe vypočítajte číslo π s presnosťou 10^{-9} [42].

406. Na základe rovností

$$\begin{aligned} \ln\frac{9}{10} &= -\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 5 \\ \ln\frac{24}{25} &= 3\ln 2 + \ln 3 - 2\ln 5 \\ \ln\frac{81}{80} &= -4\ln 2 + 4\ln 3 - \ln 5 \end{aligned}$$

vypočítajte $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 6$, $\ln 10$ s presnosťou 10^{-6}.

407. S presnosťou 10^{-4} vypočítajte integrály:

1. $\displaystyle\int_2^4 e^{1/x}\,dx$; 2. $\displaystyle\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

---

[42] Po vyriešení tohto príkladu iste nejeden čitateľ uzná, že jednoduchšie je zapamätať si vetu

Mám, ó Bože ó dobrý pamatovat si takový čísel řad!

velký slovutný Archimedes ,

ktorá udáva číslo π na 12 desatinných miest (stačí zrátať počet písmen jednotlivých slov). Pre záujemcov uvádzame ešte anglickú verziu:

How I want a drink, alcoholic of course,
after the heavy lectures involving quantum mechanics!

udávajúcu číslo π na 14 desatinných miest.

Dodatok
Krivky a funkcie dané parametricky

Nech je v rovine daná pravouhlá súradnicová sústava s rovnakými jednotkami dĺžok na súradnicových osiach Ox a Oy. Neprázdna množina K bodov roviny sa nazýva *krivka daná parametricky* (v ďalšom stručne len krivka), ak existujú funkcie φ, ψ definované na intervale I také, že

$$K = \{(\varphi(t), \psi(t))\,;\, t \in I\}\ ^{1}.$$

Rovnice

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \qquad t \in I\,, \tag{1}$$

sa nazývajú *parametrické vyjadrenie krivky K*. Ak existuje funkcia f (funkcia g) tak, že

$$\begin{array}{rcl} K & = & \{(x, f(x))\,;\, x \in D(f)\} \\ (\quad K & = & \{(g(y), y)\,;\, y \in D(g)\} \quad)\,, \end{array}$$

hovoríme, že *rovnicami (1) je parametricky daná funkcia $y = f(x)$* (*funkcia $x = g(y)$*). (Postačujúcou podmienkou pre existenciu funkcie f (funkcie g) je injektívnosť funkcie φ (funkcie ψ), potom $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ ($g = \varphi \circ \psi^{-1}$).) [2]

Špeciálnym prípadom parametrického vyjadrenia krivky je rovnica krivky v polárnych súradniciach: Usporiadanú dvojicu (ϱ, φ), kde $\varrho \geq 0$, $\varphi \in \mathbf{R}$, nazývame *polárnymi súradnicami* bodu $X \equiv (x, y)$, ak

$$x = \varrho \cos \varphi\,, \quad y = \varrho \sin \varphi \quad ^{3}.$$

Ak f je nezáporná funkcia definovaná na intervale I a L je množina všetkých bodov roviny s polárnymi súradnicami $(f(\varphi), \varphi)$, $\varphi \in I$, nazýva sa rovnica

$$\varrho = f(\varphi)\,, \quad \varphi \in I\,,$$

rovnica krivky L v polárnych súradniciach[4]. (Zrejme jedno z možných parametrických vyjadrení krivky L má tvar

$$x = f(\varphi) \cos \varphi\,, \quad y = f(\varphi) \sin \varphi\,, \qquad \varphi \in I\,. \quad)$$

---

[1] spravidla sa požaduje aj spojitosť funkcií φ, ψ

[2] definíciu funkcie danej parametricky možno vysloviť aj vo všeobecnejšej podobe, ak podmienku „$D(\varphi) = D(\psi) = I$“ nahradíme podmienkou „$D(\varphi) = D(\psi)$“

[3] ϱ je teda vzdialenosť bodov X a $O \equiv (0, 0)$, φ je veľkosť (v radiánoch) niektorého z uhlov, o ktorý treba otočiť polpriamku OJ ($J \equiv (1, 0)$) okolo bodu O, aby splynula s polpriamkou OX; pritom $\varphi \geq 0$ ($\varphi \leq 0$), ak sa toto otočenie deje proti smeru (v smere) hodinových ručičiek

[4] niekedy sa polárne súradnice definujú všeobecnejšie: namiesto $\varrho \geq 0$ sa uvažuje $\varrho \in \mathbf{R}$, v takom prípade netreba pri zavádzaní rovnice krivky v polárnych súradniciach požadovať nezápornosť funkcie f

V ďalšom budeme názov krivka používať aj na označenie množín tvaru $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n \ \ (n \in \mathbf{N})$, kde $K_1, \ldots, K_n$ sú krivky v zmysle horeuvedenej definície. Pokiaľ na označenie premenných použijeme písmená $\varrho, \ \varphi,$ budeme tým vždy myslieť polárne súradnice.

408. Popíšte nasledujúce krivky pomocou polárnych súradníc:

1. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$;
2. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2)$;
3. $x^4+y^4 = a^2xy$;
4. $a(x^3+y^3) = x^2+y^2$.

409. Nájdite parametrické vyjadrenie nasledujúcich kriviek:

1. $(x+y)^2 = a(x-y)$ (položte $y = tx$) ;
2. $x^4+y^4 = ax^2y$;
3. $4y^2 = 4x^2y+x^5$ (položte $y = tx^2$) ;
4. $y^5+x^4 = xy^2$.

410. Rovnice nasledujúcich kriviek prepíšte na tvar $F(x,y) = 0$, na základe toho zistite, o aké krivky ide:

1. $x = a+b\cos t, \quad y = c+d\sin t \quad (b>0,\ d>0), \quad t \in \mathbf{R}$ [5] ;
2. $x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbf{R}$;
3. $x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \operatorname{arcctg} t, \quad t \in \mathbf{R}$;
4. $\varrho = \dfrac{d}{\sin(\varphi-\varphi_0)}$ [6] $(d>0)$;
5. $\varrho = \dfrac{a}{\cos^2(\varphi/2)} \quad (a>0)$;
6. $\varrho = \dfrac{a}{\sin^2(\varphi/2)} \quad (a>0)$.

411. Nájdite parametrické vyjadrenie krivky K, ktorá je geometrickým miestom všetkých bodov M popísaných nasledujúcou konštrukciou:

1. Je dané číslo $l>0$. Zvoľme body $A \in Oy$, $B \in Ox$ tak, aby $|AB| = l$. M je päta kolmice spustenej z vrcholu C obdĺžnika $OACB$ na úsečku AB.

2. Nech k je kružnica s polomerom r a stredom $(r,0)$. Z bodu $O \equiv (0,0)$ veďme tetivu OB kružnice k, z bodu B spusťme kolmicu na priemer OA, jej pätu označme C. M je päta kolmice spustenej z bodu C na tetivu OB.

3. Nech $a>b>0$ sú dané čísla. Bodom $A \equiv (0,-a)$ veďme priamku p, ktorá nie je rovnobežná s osou Ox, jej priesečník s touto osou označme B. M je bod ležiaci na priamke p vo vzdialenosti b od bodu B.

Riešenie. 1. Označme $K_i \ \ (i = 1,2,3,4)$ tú časť krivky K, ktorá leží v i–tom kvadrante. Pretože — ako vyplýva zo zadania — krivka K je súmerná podľa osí Ox a Oy, stačí nájsť parametrické vyjadrenie krivky K_1, pomocou neho už ľahko nájdeme parametrické vyjadrenia kriviek K_2, K_3, K_4.

Nech teda úsečka AB leží v prvom kvadrante; za parameter zvoľme veľkosť φ uhla OBA, potom (pozri obr. 4)

– z pravouhlého $\triangle$-a AOB dostávame

$$|OA| = |BC| = |AB|\sin\varphi = l\sin\varphi\,, \qquad |OB| = |AB|\cos\varphi = l\cos\varphi\,;$$

– z $\triangle$-a BCM:

$$|BM| = |BC|\sin\varphi = l\sin^2\varphi\,;$$

– z $\triangle$-a BDM:

$$|DM| = |BM|\sin\varphi = l\sin^3\varphi\,, \qquad |BD| = |BM|\cos\varphi = l\sin^2\varphi\cos\varphi\,.$$

Ak $M \equiv (x,y)$, tak

$$x = |OB| - |BD| = l\cos\varphi\cdot(1-\sin^2\varphi) = l\cos^3\varphi\,, \qquad y = |MD| = l\sin^3\varphi\,,$$

[5] vzhľadom na periodičnosť funkcií $\sin$, $\cos$ by stačilo uvažovať $t \in [0, 2\pi]$

[6] pokiaľ v rovnici $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in M$, nie je množina M určená, kladieme $M := \{\varphi \in D(f)\,;\ f(\varphi) \geq 0\}$; ak je naviac funkcia f periodická a jednou z jej period je číslo $2n\pi \ \ (n \in \mathbf{N})$, stačí položiť $M := [a, a+2n\pi] \cap \{\varphi \in D(f)\,;\ f(\varphi) \geq 0\} \quad (a \in D(f))$

obr. 4

teda parametrické vyjadrenie krivky K_1 má tvar

$$x = l\cos^3\varphi\,, \quad y = l\sin^3\varphi\,, \qquad \varphi \in (0, \pi/2)\,.$$

Krivky K_1 a K_2 sú súmerné podľa osi Oy, preto

$$\begin{aligned} K_2 &= \{(-x, y)\,;\,(x, y) \in K_1\} = \{(-l\cos^3\varphi, l\sin^3\varphi)\,;\,\varphi \in (0, \pi/2)\} = \\ &= \{(l\cos^3(\pi-\varphi), l\sin^3(\pi-\varphi))\,;\,\varphi \in (0, \pi/2)\} = \\ &= \{(l\cos^3\varphi, l\sin^3\varphi)\,;\,\varphi \in (\pi/2, \pi)\}\,, \end{aligned}$$

teda jedno z parametrických vyjadrení krivky K_2 je

$$x = l\cos^3\varphi\,, \quad y = l\sin^3\varphi\,, \qquad \varphi \in (\pi/2, \pi)\,.$$

Podobne možno nájsť parametrické vyjadrenia kriviek K_3 a K_4 (K_3 , resp. K_4 je súmerná podľa osi Ox s K_2 , resp. K_1) v tvare

$$x = l\cos^3\varphi\,, \quad y = l\sin^3\varphi\,, \qquad \varphi \in (\pi, 3\pi/2)\,,$$

a

$$x = l\cos^3\varphi\,, \quad y = l\sin^3\varphi\,, \qquad \varphi \in (3\pi/2, 2\pi)\,.$$

Krivka K je teda určená rovnicami

$$x = l\cos^3\varphi\,, \quad y = l\sin^3\varphi\,, \qquad \varphi \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}\,.$$

Poznámka. Krivka daná parametricky rovnicami

$$x = l\cos^3\varphi\,, \quad y = l\sin^{\varphi}\,, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]\ ^7,$$

sa nazýva *asteroida*; túto krivku možno zadať tiež rovnicou

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}\,.$$

(K inému geometrickému popisu asteroidy pozri poznámku za riešením pr. 412.2.)

412. 1. *Cykloidou* sa nazýva dráha, ktorú opisuje bod kružnice kotúľajúcej sa po priamke. Nájdite parametrické vyjadrenie cykloidy (za parameter zvoľte uhol otočenia polomeru spájajúceho stred kotúľajúcej sa kružnice s bodom, ktorého dráhu popisujeme).

[7]zrejme tú istú krivku dostaneme, ak interval $[0, 2\pi]$ nahradíme intervalom $(-\infty, \infty)$ alebo intervalom $[a, a + 2\pi)$

2. Kružnica k s polomerom r sa zvnútra kotúľa po kružnici K s polomerom R, $r < R$. Nájdite parametrické vyjadrenie krivky, ktorú pri tomto pohybe opisuje bod kotúľajúcej sa kružnice (táto krivka sa nazýva *hypocykloida*).

3. Na kružnicu s polomerom R je namotaná niť nulovej hrúbky. Túto niť odmotávame z kružnice tak, aby bola niť stále napnutá (tj. aby bola vždy dotyčnicou ku kružnici). Nájdite parametrické vyjadrenie krivky, ktorú opisuje koniec rozmotávanej nite (táto krivka sa nazýva *evolventa kruhu*).

Riešenie. 2. Zvoľme súradnicovú sústavu tak, aby jej počiatkom O bol stred kružnice K a aby v jednom z okamihov, keď bod $M \in k$ (ktorého dráhu popisujeme) je bodom dotyku obidvoch kružníc, platilo $M \equiv (R, 0)$; predpokladajme, že kružnica k sa kotúľa po kružnici K proti smeru hodinových ručičiek. Za parameter φ zvoľme veľkosť uhla, ktorý zviera spojnica stredov obidvoch kružníc s kladným smerom osi Ox. Nech S je stred kružnice k, D je bod dotyku kružníc k a K, nech ϑ je uhol, ktorý zviera úsečka SD s úsečkou SM (pozri obr. 5).

obr. 5

Pretože kružnica k sa kotúľa po kružnici K, sú dĺžky oblúkov AD a MD rovnaké:

$$R\varphi = r\vartheta ,$$

odtiaľ

$$\vartheta = \frac{R}{r}\,\varphi .$$

Vzdialenosť bodu $S \equiv (p, q)$ od počiatku O je $R - r$ a orientovaný uhol s počiatočným ramenom OA a koncovým ramenom OS má veľkosť φ, preto

$$p = (R - r)\cos\varphi , \quad q = (R - r)\sin\varphi .$$

Vzdialenosť bodov M a S je r a veľkosť orientovaného uhla s počiatočným ramenom SB a koncovým ramenom SM je $-(\vartheta - \varphi)$, preto pre vektor $\vec{u} \equiv (u_1, u_2) = M - S$ je

$$u_1 = r\cos(-(\vartheta - \varphi)) , \quad u_2 = r\sin(-(\vartheta - \varphi)) .$$

Pretože pre bod $M \equiv (x, y)$ platí $M = S + \vec{u}$, dostávame

$$\begin{aligned} x &= p + u_1 = (R - r)\cos\varphi + r\cos(\vartheta - \varphi) = (R - r)\cos\varphi + r\cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\varphi\right) , \\ y &= q + u_2 = (R - r)\sin\varphi - r\sin(\vartheta - \varphi) = (R - r)\sin\varphi - r\sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\varphi\right) . \end{aligned}$$

Teda parametrické vyjadrenie hypocykloidy má tvar

$$x = (R-r)\cos\varphi + r\cos\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)\varphi\right), \qquad y = (R-r)\sin\varphi - r\sin\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)\varphi\right), \qquad \varphi \in \mathbf{R}.$$

Poznámka. Špeciálne pre $R/r = 4$ dostaneme rovnice asteroidy:

$$\begin{aligned} x &= 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi = 4r\cos^3\varphi = R\cos^3\varphi, \\ y &= 3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi = 4r\sin^3\varphi = R\sin^3\varphi. \end{aligned}$$

413. 1. Nech sú dané funkcie φ, ψ definované na intervale I. Uveďte nutnú a postačujúcu podmienku, aby rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in I,$$

bola parametricky daná funkcia $y = f(x)$.

2. Nech sú dané funkcie $\varphi: I \to \mathbf{R}$, $\psi: I \to \mathbf{R}$, $\chi: J \to I$, kde I a J sú intervaly. Za akých podmienok je rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in I,$$

resp.

$$x = \varphi(\chi(t)), \quad y = \psi(\chi(t)), \qquad t \in J,$$

daná parametricky tá istá funkcia $y = f(x)$?

414. Nech funkcia $y = f(x)$ je daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in I,$$

kde I je interval.

1. Ak $I = (\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$, φ je rastúca (klesajúca) a existujú $\lim_{t\to\beta-}\varphi(t) =: a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{t\to\beta-}\psi(t) =: b \in \mathbf{R}^*$, tak $\lim_{x\to a-} f(x) = b$ ($\lim_{x\to a+} f(x) = b$). Dokážte!
2. Ak φ je rýdzomonotónna a ψ spojitá funkcia, tak aj f je spojitá funkcia. Dokážte!
3. Ak φ a ψ sú spojité funkcie, tak aj f je spojitá funkcia. Dokážte!
4. Vyplýva zo spojitosti funkcie f spojitosť funkcií φ a ψ?

Veta 1. *Nech funkcie φ a ψ definované na intervale I sú diferencovateľné v bode $a \in I$, nech φ je rýdzomonotónna funkcia spojitá na niektorej z množín $I \cap O(a)$, kde $O(a)$ je okolie bodu a, a nech $\varphi'(a) \neq 0$. Potom funkcia $y = f(x)$ daná parametricky rovnicami* (1) *má v bode $\varphi(a)$ deriváciu*[8] *a*

$$f'(\varphi(a)) = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}. \tag{2}$$

Špeciálne, ak funkcie φ, ψ sú diferencovateľné na intervale I a $\varphi'(t) > 0$, $t \in I$ ($\varphi'(t) < 0$, $t \in I$), tak deriváciou funkcie $y = f(x)$ danej parametricky rovnicami (1) *je funkcia $y = f'(x)$ daná parametricky rovnicami*

$$x = \varphi(t), \quad y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad t \in I.$$

Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (1) (I je interval). Ak funkcie φ, ψ sú diferencovateľné v bode $a \in I$ a $(\varphi'(a), \psi'(a)) \neq (0,0)$, tak priamka p daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(a) + \varphi'(a)\,t, \quad y = \psi(a) + \psi'(a)\,t, \qquad t \in \mathbf{R},$$

sa nazýva *dotyčnica ku krivke K v bode $M \equiv (\varphi(a), \psi(a))$*.

[8] ak $D(f) \cap (-\infty, \varphi(a)) = \emptyset$ alebo $D(f) \cap (\varphi(a), \infty) = \emptyset$, ide o príslušnú jednostrannú deriváciu v bode $\varphi(a)$

Poznámky. 1. Ak bod M krivky K zodpovedá niekoľkým rôznym hodnotám parametra t, môže mať krivka K v bode M viacero dotyčníc.

2. Ak $\varphi'(a) \neq 0$, možno rovnicu priamky p zapísať v tvare

$$y = \psi(a) + \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}(x - \varphi(a)) .$$

V prípade, že rovnicami

$$x = \varphi(t) , \quad y = \psi(t) , \qquad t \in J ,$$

kde $J \subset I$ je interval, je daná parametricky funkcia $y = f(x)$, definovaná v niektorom okolí bodu $\varphi(a)$, dostávame tak už známu rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $(\varphi(a), \psi(a))$: $y = \psi(a) + f'(\varphi(a))(x - -\varphi(a))$. (Podobne možno uvažovať v prípade $\psi'(a) \neq 0$.)

415. Nájdite deriváciu funkcie $y = f(x)$ danej parametricky rovnicami:

1. $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t$, $\quad y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t$, $\quad t \in (1, \infty)$;
2. $x = \operatorname{ctg} 2t$, $\quad y = \dfrac{2\cos 2t - 1}{2\cos t}$, $\quad t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

416. Ukážte, že cykloida $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$, má dotyčnicu v každom bode neležiacom na osi Ox, pričom dotyčnica (normála) v danom bode prechádza najvyšším (najnižším) bodom príslušnej polohy vytvárajúcej kružnice cykloidy (popis cykloidy pozri v pr. 412.1).

417. 1. Nech I je interval, $f : I \to \mathbf{R}$ je kladná diferencovateľná funkcia. Potom pre uhol ω, ktorý zviera dotyčnica ku grafu krivky $\varrho = f(\varphi)$ so spojnicou dotykového bodu a bodu $(0, 0)$, platí

$$\cos\omega = \frac{f'(\varphi)}{\sqrt{f'^2(\varphi) + f^2(\varphi)}} .$$

Dokážte!

2. Nájdite uhol, pod ktorým sa pretínajú krivky $\varrho = \varphi$ a $\varrho = \dfrac{1}{\varphi}$.

418. Nájdite druhú deriváciu funkcie $y = f(x)$ danej parametricky rovnicami:

1. $x = 2t - t^2$, $\quad y = 3t - t^3$, $\quad t \in (1, \infty)$;
2. $x = e^t \sin t$, $\quad y = e^t \cos t$, $\quad t \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$;
3. $x = \dfrac{t^2 - 2t - 5}{t^2 + 10t + 25}$, $\quad y = \dfrac{t^2 - 4t + 5}{t^2 + 4t - 5}$, $\quad t \in (1, \infty)$;
4. $x = f'(t)$, $\quad y = tf'(t) - f(t)$, $\quad t \in I$ (pričom predpokladáme, že funkcia f je dvakrát diferencovateľná na intervale I a $f''(x) \neq 0$, $t \in I$).

Riešenie. 1. Derivácia f' funkcie f je podľa vety 1 daná parametricky rovnicami

$$x = 2t - t^2 - t^2 \ \ (=: \varPhi(t)) , \quad y = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t) \ \ (=: \varPsi(t)) , \qquad t \in (1, \infty) .$$

Deriváciou f'' funkcie f' bude preto opäť podľa vety 1 funkcia daná parametricky rovnicami

$$x = \varPhi(t) , \quad y = \frac{\varPsi'(t)}{\varPhi'(t)} , \qquad t \in (1, \infty) ,$$

tj.

$$x = 2t - t^2 , \quad y = \frac{3}{4(1 - t)} , \qquad t \in (1, \infty) .$$

419. Ukážte, že nasledujúcimi rovnicami parametricky dané funkcie $y = f(x)$ sú diferencovateľné v bode 0, ale ich deriváciu v tomto bode nemožno nájsť použitím vety 1:

1. $x = 2t + |t|\,,\quad y = 5t^2 + 4t|t|\,,\quad t \in \mathbf{R}\,;$
2. $x = t - \dfrac{t}{1+t^2}\,,\quad y = t - \operatorname{arctg} t\,,\quad t \in \mathbf{R}\,;$
3. $x = t + \sqrt[5]{t}\,,\quad y = 2t + 3\sqrt[5]{t}\,,\quad t \in \mathbf{R}\,.$

420. 1. Nech funkcia $y = f(x)$ je daná parametricky rovnicami (1) (I je interval). Nech funkcie φ, ψ sú diferencovateľné v bode $a \in I$, pričom $\varphi'(a) \neq 0$ a funkcia φ je spojitá na niektorom okolí $O(a)$ bodu a. Potom funkcia f je diferencovateľná v bode $\varphi(a)$ a platí (2). Dokážte! [9]

2. Uveďte príklad takých funkcií $\varphi, \psi\colon (-1,1) \to \mathbf{R}$ diferencovateľných v bode 0, že $\varphi'(0) \neq 0$ a rovnicami

$$x = \varphi(t)\,,\quad y = \psi(t)\,,\qquad t \in (-1,1)\,,$$

je parametricky daná funkcia $y = f(x)$, ktorá nie je diferencovateľná v bode $\varphi(0)$!

Nech množina D je zjednotením konečného počtu intervalov, nech krivka K je daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t)\,,\quad y = \psi(t)\,,\qquad t \in D\,.$$

Priamka $x = a$ ($y = a$) sa nazýva *vertikálna asymptota krivky K* (*horizontálna asymptota krivky K pre $x \to \infty$*), ak pre niektorý hromadný bod $b \in \mathbf{R}^*$ množiny D platí

$$\lim_{t\to b+} \varphi(t) = a\,,\ \lim_{t\to b+} |\psi(t)| = \infty \quad \text{alebo} \quad \lim_{t\to b-} \varphi(t) = a\,,\ \lim_{t\to b-} |\psi(t)| = \infty$$
$$\Bigl(\ \lim_{t\to b+} \varphi(t) = \infty\,,\ \lim_{t\to b+} \psi(t) = a \quad \text{alebo} \quad \lim_{t\to b-} \varphi(t) = \infty\,,\ \lim_{t\to b-} \psi(t) = a\ \Bigr)\,.$$

Priamka $y = kx + q$, $k \neq 0$, sa nazýva *asymptota so smernicou krivky K pre $x \to \infty$*, ak pre niektorý hromadný bod $b \in \mathbf{R}^*$ množiny D platí

$$\lim_{t\to b+} \varphi(t) = \lim_{t\to b+} |\psi(t)| = \infty\,,\qquad \lim_{t\to b+} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k\,,\qquad \lim_{t\to b+} (\psi(t) - k\varphi(t)) = q\,,$$

alebo

$$\lim_{t\to b-} \varphi(t) = \lim_{t\to b-} |\psi(t)| = \infty\,,\qquad \lim_{t\to b-} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k\,,\qquad \lim_{t\to b-} (\psi(t) - k\varphi(t)) = q\,.$$

Analogicky sa definuje *horizontálna asymptota krivky K pre $x \to -\infty$* a *asymptota so smernicou krivky K pre $x \to -\infty$*.

Špeciálne, ak krivka K je daná rovnicou v polárnych súradniciach

$$\varrho = f(\varphi)\,,\quad \varphi \in D\,,$$

tak priamka

$$\varrho \sin(\varphi - \varphi_0) = d\,,$$ [10]

je asymptotou krivky K práve vtedy, keď

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0+} f(\varphi) = \infty\,,\qquad \lim_{\varphi\to\varphi_0+} f(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0) = d\,,$$

alebo

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0-} f(\varphi) = \infty\,,\qquad \lim_{\varphi\to\varphi_0-} f(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0) = d\,,$$

kde $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ je hromadný bod množiny D.

---

[9] na rozdiel od vety 1 v tomto tvrdení nepredpokladáme rýdzu monotónnosť funkcie φ, preto jeho dôkaz nemožno vykonať len na základe viet o derivácii zloženej a inverznej funkcie (z ktorých vyplýva veta 1)

[10] jej rovnica v pravouhlých súradniciach je $y\cos\varphi_0 - x\sin\varphi_0 = d$, teda jej smerový vektor $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ zviera s kladným smerom osi Ox uhol φ_0

421. Načrtnite nasledujúce krivky:

1. $\varrho = \varphi$ (*Archimedova špirála*) ;
2. $\varrho = \dfrac{1}{\varphi}$ (*hyperbolická špirála*) ;
3. $\varrho = \sin 5\varphi$;
4. $\varrho = \sqrt{2}\, c\sqrt{\cos 2\varphi}$ (*Bernoulliho lemniskáta*[11]) ;
5. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2\,, \quad a > 0$;
6. $x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2)\,, \quad a > 0$.

Riešenie. 3. Keďže funkcia $\sin 5\varphi$ nadobúda kladné aj záporné hodnoty a jednou z jej periód je číslo 2π, chápeme uvedenú rovnicu krivky L v polárnych súradniciach nasledovne (pozri poznámku [6] k pr. 410.4):

$$\varrho = \sin 5\varphi\,, \qquad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{5}, \pi\right] \cup \left[\frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right] .$$

Ak $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ je spojitá nezáporná funkcia, môžeme si krivku K, ktorej rovnica v polárnych súradniciach je $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, predstaviť nasledovne: Na polpriamke $p : \varphi = \alpha$ (teda p je množina všetkých bodov s polárnymi súradnicami (ϱ, α), $\varrho \geq 0$, tj polpriamka vychádzajúca z počiatku a zvierajúca s kladným smerom osi Ox uhol α) vyznačme bod M s polárnymi súradnicami $(f(\alpha), \alpha)$. Otáčajme teraz polpriamkou p okolo bodu $(0, 0)$ proti smeru hodinových ručičiek, až kým sa neprekryje s polpriamkou $\varphi = \beta$; na otáčajúcej sa polpriamke p pritom pohybujme bodom M tak, aby v okamžiku, keď sa p kryje s polpriamkou $\varphi = \gamma$ (kde $\gamma \in [\alpha, \beta]$, tj. keď zviera s kladným smerom osi Ox uhol γ), bola jeho vzdialenosť od bodu $(0, 0)$ rovná číslu $f(\gamma)$ [12] (teda ak funkcia f rastie (klesá), tak bod M sa vzďaľuje od (približuje k) bodu $(0, 0)$); potom dráhou bodu M je krivka K.

Na základe toho môžeme teraz — keďže poznáme graf funkcie $y = \sin 5x$ (a vieme teda, kde táto funkcia rastie a kde klesá) — načrtnúť krivky K_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) dané rovnicami

$$\varrho = \sin 5\varphi\,, \qquad \varphi \in \left[\frac{2i\pi}{5}, \frac{(2i+1)\pi}{5}\right]\,, \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4\,,$$

ktorých zjednotením je hľadaná krivka L (pozri obr. 6) [13]; pritom — pretože číslo $2\pi/5$ je periódou funkcie $y = \sin 5x$ — krivka K_i je obrazom krivky K_{i-1} pri otočení o uhol $2\pi/5$ okolo bodu $(0, 0)$ proti smeru hodinových ručičiek ($i = 1, 2, 3, 4$); súčasne zo súmernosti grafu funkcie $y = \sin 5x$, $x \in [2i\pi/5, (2i+1)\pi/5]$, podľa priamky $x = (4i+1)\pi/10$ vyplýva súmernosť krivky K_i podľa priamky obsahujúcej polpriamku $\varphi = (4+1)\pi/10$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$).

422. Zostrojte nasledujúce krivky (ak má číslo úlohy exponent [1], stačí použiť len prvé derivácie):

1. $x = -5t^2 + 2t^5\,, \quad y = -3t^2 + 2t^3$;
2. $x = 2t - t^2\,, \quad y = 2t^2 - t^3$;
3. $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$ (položte $y = tx$) ;
4[1]. $4y^2 = 4x^2y + x^5$ (položte $y = tx^2$) ;
5. $x = \dfrac{(t+2)^2}{t+1}\,, \quad y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}$;
6. $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$;
7[1]. $y^5 + x^4 = xy^2$ (položte $x = ty^3$) ;
8. $x^5 + y^5 = xy^2$;
9. $x^3 + y^3 = 3axy$ (*Descartesov list*) ;
10. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0$ (*asteroida*) ;
11. $x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t)\,, \quad a > 0$ (*cykloida*) ;
12. $\varrho = a(1 + \cos\varphi)\,, \quad a > 0$ (*kardioida*) ;
13. $\varrho = 1 + 2\cos\varphi$ (*Pascalova závitnica*)[14];
14. $x = t + e^{-t}\,, \quad y = 2t + e^{-2t}$.

---

[11] Bernoulliho lemniskáta je geometrické miesto bodov, ktorých súčin vzdialeností od bodov $(-c, 0)$ a $(c, 0)$ je konštantný a rovná sa c^2, možno ju popísať rovnicou $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$

[12] ak v definícii polárnych súradníc nahradíme podmienku „$\varrho \geq 0$“ podmienkou „$\varrho \in \mathbf{R}$“ (pozri poznámku [4] k definícii polárnych súradníc; v takom prípade stráca poznámka [6] k pr. 410.4 platnosť) a $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, tak bod M leží v prípade, že $f(\gamma) \geq 0$, na polpriamke $\varphi = \gamma$ vo vzdialenosti $f(\gamma)$ od bodu $(0, 0)$, a leží na opačnej polpriamke $\varphi = \pi + \gamma$ vo vzdialenosti $|f(\gamma)|$ od bodu $(0, 0)$ pre $f(\gamma) < 0$

[13] zhodou okolností (čitateľovi odporúčame rozmyslieť si, v čom táto zhoda okolností spočíva) je v tomto prípade tá istá krivka popísaná aj rovnicou $\varrho = \sin 5\varphi$, kde ϱ a φ chápeme ako „všeobecnejšie polárne súradnice“ v zmysle poznámky [4]

obr. 6. $\varrho = \sin 5\varphi$

Riešenie. 5. Ak má parametrické vyjadrenie krivky tvar

$$x = \varphi(t)\ , \quad y = \psi(t)\ ,$$

pričom nie je určená množina, na ktorej uvažujeme funkcie φ a ψ, kladieme $M := D(\varphi) \cap D(\psi)$. V našom prípade

$$\varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1}\ , \quad \psi(t) = \frac{(t-2)^2}{t-1}\ ,$$

teda $D(\varphi) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $D(\psi) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $M = D(\varphi) \cap D(\psi) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

Pri zobrazovaní krivky K s parametrickým vyjadrením

$$x = \varphi(t)\ , \quad y = \psi(t)\ , \qquad t \in M\ ,$$

kde množina M je zjednotením konečného počtu intervalov a funkcie φ, ψ sú spojité na M, postupujeme spravidla nasledovne:

- riešením rovníc $\varphi(t) = 0$, $t \in M$, resp. $\psi(t) = 0$, $t \in M$, nájdeme priesečníky krivky K s osou Oy, resp. Ox;
- množinu M rozdelíme na intervaly J_1, …, J_n tak, aby na každom z nich boli funkcie φ a ψ rýdzomonotónne (ak sú funkcie φ, ψ diferencovateľné, stačí teda vyšetriť ich rast a klesanie pomocou znamienka funkcií φ', ψ'); rovnicami

$$x = \varphi(t)\ , \quad y = \psi(t)\ , \qquad t \in J_i\ ,$$

  je tak parametricky daná rýdzomonotónna spojitá funkcia $y = f_i(x)$ ($i = 1, \dots n$) [15];
- nájdeme množiny $\varphi(J_i)$, $\psi(J_i)$, $i = 1, \dots, n$ (prvá z nich je zrejme definičným oborom a druhá oborom hodnôt funkcie f_i), na to stačí — pretože funkcie φ, ψ sú na J_i rýdzomonotónne a spojité — nájsť funkčné hodnoty, resp. príslušné jednostranné limity funkcií φ, ψ v krajných bodoch intervalu J_i; v prípade, že niektorá z týchto limít je nevlastná, vyšetríme existenciu asymptoty krivky K;
- na základe znamienka druhej derivácie funkcie f_i (samozrejme pokiaľ táto derivácia existuje) vyšetríme konvexnosť a konkávnosť funkcie f_i;
- načrtneme grafy jednotlivých funkcí f_i, $i = 1, \dots, n$, ktorých zjednotením je krivka K (pokiaľ pritom nie je zrejmé, či sa grafy dvoch funkcií f_i a f_j pretnú alebo nepretnú, vyšetríme, či existujú $u \neq v$, $u \in J_i$, $v \in J_j$ také, že $\varphi(u) = \varphi(v)$, $\psi(u) = \psi(v)$; ak áno, pretínajú sa grafy funkcií f_i a f_j v bode $(\varphi(u)\, \psi(u))$).

[14] vo všeobecnosti je Pascalova závitnica daná rovnicou $\varrho = a\cos\varphi + l$ ($a > 0$, $l > 0$); špeciálne pre $a = l$ dostávame kardioidu

[15] a tiež rýdzomonotónna spojitá funkcia $x = g_i(y)$ inverzná k funkcii f_i

V našom prípade, keď parametrické vyjadrenie krivky K má tvar

$$x=\varphi(t)=\frac{(t+2)^2}{t+1}\,,\quad y=\psi(t)=\frac{(t-2)^2}{t-1}\,,\qquad t\in M=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)\,,$$

je $\varphi(t)=0$ pre $t=-2$, teda priesečníkom krivky K s osou Oy je bod $(\varphi(-2),\psi(-2))=(0,-16/3)$, a $\psi(t)=0$ pre $t=2$, teda priesečníkom s osou Ox je bod $(16/3,0)$. Ďalej

$$\varphi'(t)=\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\,,\ t\in M\,,\qquad \psi'(t)=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}\,,\ t\in M\,,$$

a pretože $\varphi'(t)=0$ pre $t=0\,,\ t=-2\,,\ \psi'(t)=0$ pre $t=0, t=2\,,$ dostávame

$$J_1=(-\infty,-2]\,,\quad J_2=[-2,-1)\,,\quad J_3=(-1,0]\,,\quad J_4=[0,1)\,,\quad J_5=(1,2]\,,\quad J_6=[2,\infty)\,.$$

Krivka K je teda zjednotením grafov šiestich funkcií $y=f_1(x)\,,\ \dots\,,\ y=f_6(x)\,,$ daných parametricky rovnicami

$$x=\varphi(t)\,,\quad y=\psi(t)\,,\quad t\in J_i\,,\qquad i=1,\dots,6\,.$$

V nasledujúcej tabuľke sú zaznačené limity funkcií $\varphi|J_i\,,\ \psi|J_i$ v krajných bodoch intervalu J_i ($i=1,\dots,6$):

	$(-\infty,-2]$		$[-2,-1)$		$(-1,0]$		$[0,1)$		$(1,2]$		$[2,\infty)$	
φ	$-\infty$	0	0	$-\infty$	∞	4	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$	∞
ψ	$-\infty$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	-4	-4	$-\infty$	∞	0	0	∞

Odtiaľ vidíme, že definičným oborom funkcií $f_1\,,\ \dots\,,\ f_6$ sú postupne intervaly $(-\infty,0]\,,\ (-\infty,0]$, $[4,\infty)\,,\ [4,9/2)\,,\ (9/2,16/3]\,,\ [16/3,\infty)$. Ďalej, pretože $\lim_{t\to-1-}\varphi(t)=-\infty\,,\ \lim_{t\to-1-}\psi(t)=-9/2\,,$ je priamka $y=-9/2$ horizontálnou asymptotou krivky K pre $x\to-\infty\,,$ a pretože $\lim_{t\to-1+}\varphi(t)=$ $=\infty\,,\ \lim_{t\to-1+}\psi(t)=-9/2\,,$ je priamka $y=-9/2$ aj horizontálnou asymptotou krivky K pre $x\to\infty$. Z rovností $\lim_{t\to1-}\varphi(t)=9/2\,,\ \lim_{t\to1-}\psi(t)=-\infty$ a $\lim_{t\to1+}\varphi(t)=9/2\,,\ \lim_{t\to1+}\psi(t)=\infty$ vyplýva, že priamka $x=9/2$ je vertikálna asymptota krivky K.

Keďže $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t)=-\infty\,,\ \lim_{t\to-\infty}\psi(t)=-\infty$ a $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty\,,\ \lim_{t\to\infty}\psi(t)=\infty\,,$ môže mať krivka K aj asymptoty so smernicou; vyšetrime ich existenciu : pretože

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{(t-2)^2(t+1)}{(t+2)^2(t-1)}=1\qquad(=:k)\,,$$

$$\lim_{t\to-\infty}(\psi(t)-k\varphi(t))=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{(t-2)^2}{t-1}-\frac{(t+2)^2}{t+1}\right)=-6\,,$$

je priamka $y=x-6$ asymptota so smernicou krivky K pre $x\to-\infty\,,$ podobne z rovností

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=1\quad(:=k)\,,\qquad \lim_{t\to\infty}(\psi(t)-k\varphi(t))=-6\,,$$

vyplýva, že priamka $y=x-6$ je aj asymptotou so smernicou krivky K pre $x\to\infty$.

Pretože pre $t\in(-\infty,-2)$ je $\varphi'(t)<0\,,$ má podľa vety 1 funkcia f_1 deriváciu v každom bode množiny $\varphi((-\infty,-2))=(-\infty,0)\,,$ tj. v každom vnútornom bode svojho definičného oboru; rovnako z vety 1 vyplýva existencia derivácie funkcií $f_2\,,\ f_3\,,\ f_4$ v každom vnútornom bode ich definičného oboru a existencia derivácie funkcií $f_5\,,\ f_6$ v každom bode ich definičného oboru [16], tieto derivácie sú dané parametricky rovnicami

$$x=\varphi(t)=\frac{(t+2)^2}{t+1}\,,\qquad y=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{(t-2)(t+1)^2}{(t+2)(t-1)^2}\quad(:=\Psi(t)\,)\,,\tag{3}$$

kde parameter t postupne prebieha intervaly $(-\infty,-2)\,,\ (-2,-1)\,,\ (-1,0)\,,\ (0,1)\,,\ (1,2]\,,\ [2,\infty)$. (Otázkou existencie $(f_1)'_-(\varphi(-2))\,,\ (f_2)'_-(\varphi(-2))\,,\ (f_3)'_+(\varphi(0))\,,\ (f_4)'_+(\varphi(0))\,,$ ktorú nemožno zodpovedať len na základe vety 1, sa budeme zaoberať neskôr.)

[16] v prípade funkcií $f_5\,,\ f_6$ a bodu $16/3$ ide o jednostranné derivácie

Ak použijeme vetu 1 na nájdenie derivácie funkcií daných parametricky rovnicami (3), vidíme, že funkcie f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , resp. f_5 , f_6 majú v každom vnútornom bode svojho definičného oboru, resp. v každom bode svojho definičného oboru druhú deriváciu, danú parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t) = \frac{(t+2)^2}{t+1} \ , \qquad y = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{12(t+1)^3}{t(t+2)^3(t-1)^3} \ ,$$

kde parameter t prebieha postupne intervaly $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2]$, $[2,\infty)$ [17]. Zo znamienka funkcie $\dfrac{12(t+1)^3}{t(t+2)^3(t-1)^3}$ vnútri jednotlivých uvedených intervalov vyplýva, že funkcie f_1 , f_3 , f_5 a f_6 sú rýdzo konvexné, funkcie f_2 a f_4 rýdzo konkávne.

Teraz by sme už v podstate mohli načrtnúť grafy funkcií f_1 , ... , f_6 , vyšetrime však ešte predtým pre úplnosť existenciu $(f_1)'_-(0)$, $(f_2)'_-(0)$, $(f_3)'_+(4)$, $(f_4)'_+(4)$:

Inverzná funkcia $x = f_1^{-1}(y)$ k funkcii $y = f_1(x)$ je daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t) \ , \quad y = \psi(t) \ , \qquad t \in (-\infty,-2] \ ,$$

táto funkcia je rastúca ako superpozícia rastúcich funkcií φ a ψ^{-1} a podľa vety 1 má v bode $\psi(-2) = -16/3$ jednostrannú deriváciu

$$(f_1^{-1})'_-\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{\varphi'(-2)}{\psi'(-2)} = 0 \ ,$$

preto podľa vety o derivácii inverznej funkcie je $(f_1)'_-(\varphi(-2)) = (f_1)'_-(0) = \infty$. Podobne možno dokázať rovnosť $(f_2)'_-(0) = -\infty$ [18].

Ako sme už ukázali, spojitá funkcia f_3 má v každom vnútornom bode svojho definičného oboru deriváciu danú parametricky rovnicami

$$x = \frac{(t+2)^2}{t+1} \ , \quad y = \frac{(t+1)^2(t-2)}{(t-1)^2(t+2)} \ , \qquad t \in (-1,0) \ .$$

Takto parametricky daná funkcia $y = f_3'(x)$ má v bode $x = 4$ limitu sprava rovnú -1 (pozri pr. 414.1), z čoho vyplýva $(f_3)'_+(4) = -1$ (pozri pr. I.384.1, ktorého analógia platí aj pre jednostranné limity), podobne sa dokáže rovnosť $(f_4)'_+(4) = -1$; teda grafy funkcií f_3 a f_4 majú v bode $(4,-4)$ spoločnú dotyčnicu sprava.

Pokiaľ sa teraz na základe získaných údajov pokúsime načrtnúť grafy funkcií f_1 , ... , f_6 , zistíme, že nie je jasné, či grafy funkcií f_3 a f_4 , ktoré na seba „nadväzujú" v bode $(4,-4)$, majú okrem tohto bodu ešte ďalší spoločný bod. Odpoveď na túto otázku možno (v tomto prípade) nájsť dvoma spôsobmi:

1. Keby sa grafy funkcií f_3 a f_4 pretli v niektorom bode rôznom od bodu $(4,-4)$ $(= (\varphi(0),\psi(0)))$, museli by existovať čísla $s \in (-1,0)$, $t \in (0,1)$, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$\varphi(s) = \varphi(t) \ , \qquad \psi(s) = \psi(t) \ ,$$

tj.

$$\frac{(s+2)^2}{s+1} = \frac{(t+2)^2}{t+1} \ , \qquad \frac{(s-2)^2}{s-1} = \frac{(t-2)^2}{t-1} \ ,$$

odtiaľ

$$(s+2)^2(t+1) = (t+2)^2(s+1) \ , \qquad (s-2)^2(t-1) = (t-2)^2(s-1) \ ,$$

a po roznásobení a úprave

$$s^2t + s^2 = t^2s + t^2 \ ,$$
$$s^2t - s^2 = t^2s - t^2 \ .$$

[17] v prípade funkcií f_5 , f_6 a bodu 16/3 ide o jednostranné druhé derivácie

[18] pre $t \in (-\infty,-1)$ je $\psi'(t) > 0$, teda rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (-\infty,-1)$ je parametricky daná funkcia $x = g(y)$, ktorej graf je zjednotením grafov funkcií f_1 a f_2 ; z vety 1 vyplýva $g'(\psi(-2)) = \varphi'(-2)/\psi'(-2) = 0$, teda dotyčnicou ku grafu funkcie g v bode $(\varphi(-2),\psi(-2)) = (0,-16/3)$ je priamka $x = 0$, čo je skutočne v súlade s definíciou dotyčnice ku krivke K, podľa ktorej smerovým vektorom dotyčnice v bode $(\varphi(-2),\psi(-2))$ je vektor $(\varphi'(-2),\psi'(-2)) = (0,8/9)$

Ak tieto rovnice sčítame, dostaneme

$$2st(s-t)=0\ ,$$

teda pre hľadané riešenia by muselo platiť $s=0$ alebo $t=0$ alebo $s=t$, čo — keďže má platiť $s\in\in(-1,0)$, $t\in(0,1)$ — nie je možné. To znamená, že grafy funkcií f_3 a f_4 majú jediný spoločný bod $(4,-4)$.

2. Grafy funkcií f_3 a f_4 majú spoločnú dotyčnicu sprava v bode $(4,-4)$, pritom na intervale $(4,\infty)$ leží graf rýdzo konvexnej funkcie f_3 nad touto dotyčnicou (pozri pr. I.362.1) a graf rýdzo konkávnej funkcie f_3 leží na intervale $(4,9/2)$ pod touto dotyčnicou, preto okrem bodu $(4,-4)$ nemôžu mať grafy funkcií f_3 a f_4 žiadne ďalšie spoločné body.

Vyšetrovaná krivka je znázornená na obr. 7.

obr. 7. $x=\dfrac{(t+2)^2}{t+1}\ ,\ y=\dfrac{(t-2)^2}{t-1}$

Veta 2. *Nech funkcie* φ, ψ *sú diferencovateľné na intervale* $[a,b]$, *pričom* $\varphi'\in\mathcal{R}[a,b]$, $\psi'\in\mathcal{R}[a,b]$. *Potom dĺžkou krivky danej parametricky rovnicami*

$$x=\varphi(t)\ ,\quad y=\psi(t)\ ,\qquad t\in[a,b]\ , \tag{4}$$

je číslo

$$\int_a^b\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\ .$$

Špeciálne, ak funkcia f *je diferencovateľná na intervale* $[a,b]$ *a* $f'\in\mathcal{R}[a,b]$, *tak dĺžkou krivky, ktorej rovnica v polárnych súradniciach má tvar*

$$\varrho=f(\varphi)\ ,\qquad \varphi\in[a,b]\ , \tag{5}$$

je číslo

$$\int_a^b\sqrt{f^2(\varphi)+f'^2(\varphi)}\,d\varphi\ .$$

423. Nájdite dĺžku nasledujúcich kriviek:

1. $x=a(\cos t+t\sin t)\ ,\quad y=a(\sin t-t\cos t)\ ,\quad t\in[0,2\pi]$;
2. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;
3. $x=\operatorname{ch}^3 t\ ,\quad y=\operatorname{sh}^3 t\ ,\quad t\in[0,T]$;
4. slučky krivky $x=2t^3(1-t^2)\ ,\ y=\sqrt{15}\,t^4$;

5. $x = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos z\,dz}{z}$, $y = \displaystyle\int_1^t \frac{\sin z\,dz}{z}$ od bodu $(0,0)$ po najbližší bod, v ktorom je dotyčnica rovnobežná s osou Oy ;

6. $\varrho = a(1+\cos\varphi)$;

7. $\varrho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$;

8. $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(\varrho + \dfrac{1}{\varrho}\right)$;

9. $\varphi = \displaystyle\int_0^{\varrho} \frac{\operatorname{sh} r}{r}\,dr$, $\varrho \in [0,R]$;

10. $\varrho = 1+\cos t$, $\varphi = t - \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, $0 \le t \le T < \pi$.

424. Na cykloide $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ nájdite bod, ktorý delí dĺžku jej prvého oblúka v pomere $1:3$.

425. Dokážte, že pri kotúľaní sa paraboly $p:\ x^2 = 4ay$ po osi Ox sa jej ohnisko (tj. bod $(0,a)$) pohybuje po *reťazovke* $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

Veta 3. *Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (4), pričom φ je rýdzomonotónna a diferencovateľná a ψ nezáporná spojitá funkcia. Potom plošným obsahom útvaru ohraničeného krivkou K a priamkami $y=0$, $x=\varphi(a)$, $x=\varphi(b)$ je číslo*

$$P = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\psi(t)\,dt\,.$$

Poznámka. Ak funkcia ψ je diferencovateľná na $[a,b]$ a φ je rastúca, tak použitím metódy per partes dostávame

$$P = \int_a^b \varphi'(t)\psi(t)\,dt = [\varphi(t)\psi(t)]_a^b - \int_a^b \varphi(t)\psi'(t)\,dt\,.$$

Ak teda $[\varphi(t)\psi(t)]_a^b = 0$, možno plošný obsah P vypočítať aj použitím vzorcov

$$P = -\int_a^b \varphi(t)\psi'(t)\,dt\,,$$

$$P = \frac{1}{2}\int_a^b (\varphi'(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi'(t))\,dt\,;$$

podobne možno uvažovať v prípade klesajúcej funkcie φ.

Veta 4. *Nech $0 < b-a \le 2\pi$, nech $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ je spojitá nezáporná funkcia. Potom plošným obsahom útvaru ohraničeného krivkou $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi\in[a,b]$, a polpriamkami $\varphi = a$, $\varphi = b$ je číslo*

$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

426. Vypočítajte plošný obsah P útvarov ohraničených nasledujúcimi krivkami:

1. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$;

2. $x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;

3. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$, a spojnicou bodov $(a,0)$ a $(a,-2\pi a)$;

4. asteroidou $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$;

5. kardioidou $\varrho = a(1+\cos\varphi)$;

6. $\varrho = a\sin n\varphi$, $a>0$, $n\in\mathbf{N}$;

7. $\varrho = a\cos\varphi$, $\varrho = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $a>0$, pričom bod s pravouhlými súradnicami $\left(\dfrac{a}{2},0\right)$ leží v danom útvare ;

8. $\varphi = \varrho\operatorname{arctg}\varrho$, $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$;

9. $\varrho = \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $\varphi = t - \operatorname{arctg} t$, $0\le t\le t_0$, $\varphi(t_0)\le 2\pi$;

10. $x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

427. Vypočítajte plošný obsah tej časti útvaru ohraničeného Bernoulliho lemniskátou $(x^2+y^2)^2 = = a^2(x^2-y^2)$, ktorá leží vnútri kruhu $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}$.

Veta 5. *Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (4), pričom φ je rýdzomonotónna spojite diferencovateľná a ψ nezáporná (nekladná) spojitá funkcia. Nech M je útvar ohraničený krivkou K a priamkami $y=0$, $x=\varphi(a)$, $x=\varphi(b)$. Potom objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo osi Ox, je číslo*

$$V=\pi\int_a^b \psi^2(t)\,|\varphi'(t)|\,dt\,.$$

Ak naviac $\varphi([a,b])\subset[0,\infty)$, tak objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo osi Oy, je číslo

$$V=2\pi\int_a^b \varphi(t)\,|\psi(t)|\,|\varphi'(t)|\,dt\,.$$

Veta 6. *Nech $0\le a<b\le\pi$, nech $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ je spojitá funkcia a M je útvar ohraničený krivkou $\varrho=f(\varphi)$, $\varphi\in[a,b]$, a polpriamkami $\varphi=a$, $\varphi=b$. Potom objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo osi Ox, je číslo*

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_a^b f^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\,.$$

428. Vypočítajte objem V telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M ohraničeného krivkami

1. $x=a\sin^3 t$, $y=b\cos^3 t$, $t\in[0,2\pi]$, $a>0$, $b>0$, a) okolo osi Ox, b) okolo osi Oy;
2. $x=a(t^2+1)$, $y=\dfrac{at}{3}(3-t^2)$, $|t|\le\sqrt{3}$, a) okolo osi Ox, b) okolo osi Oy;
3. $x=2t-t^2$, $y=4t-t^3$ a) okolo osi Ox, b) okolo osi Oy;
4. $y=x^2$, $y=x$ okolo priamky $y=x$;
5. $\varrho=a(1+\cos\varphi)$ okolo osi Ox;
6. $\varrho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ okolo priamky $y=x$;
7. $x(x^2-y^2)=a(x^2+y^2)$, $x=3a$ okolo osi Ox.

Riešenie. 4. Priesečníkmi daných kriviek sú zrejme body $(0,0)$ a $(1,1)$. Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou útvaru M okolo priamky $y=x$, je rovnaký ako objem telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi Ox útvaru M', ktorý získame otočením množiny M okolo bodu $(0,0)$ o uhol $\pi/4$ v smere hodinových ručičiek ($\pi/4$ je uhol, ktorý zviera priamka $y=x$ a os Ox). Toto otočenie možno jednoducho popísať pomocou polárnych súradníc: obrazom bodu s polárnymi súradnicami (ϱ,φ) je bod $(\varrho,\varphi-\pi/4)$. Ak teda obrazom bodu s pravouhlými súradnicami (x,y) je bod (x',y'), tak zo vzťahov

$$x=\varrho\cos\varphi\,,\quad y=\varrho\sin\varphi\,,\qquad x'=\varrho\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\,,\quad y'=\varrho\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$$

dostávame

$$x'=\varrho\cos\varphi\cos\frac{\pi}{4}+\varrho\sin\varphi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\,,$$

$$y'=\varrho\sin\varphi\cos\frac{\pi}{4}-\varrho\cos\varphi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)\,.$$

Obrazom grafu funkcie $y=x^2$, $x\in[0,1]$, tj. množiny $\{(x,x^2)\,;\,x\in[0,1]\}$, je teda množina $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+x^2),\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2-x)\right)\,;\,x\in[0,1]\right\}$, tj. krivka K daná parametricky rovnicami

$$x=\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+t)\,,\quad y=\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2-t)\,,\qquad t\in[0,1]\,.$$

Útvar M' je ohraničený krivkou K a osou Ox, pritom $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2t+1) > 0$ pre $t \in [0,1]$, preto objem telesa, ktoré vznikne rotáciou M' okolo osi Ox, je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (t^2-t)^2(2t+1)\, dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (2t^5 - 3t^4 + t^2)\, dt = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{t^6}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{30\sqrt{2}} \,. \end{aligned}$$

Veta 7. *Nech krivka K je daná parametricky rovnicami (4), pričom*
1. *funkcie φ, ψ sú spojite diferencovateľné na $[a,b]$;*
2. $\forall\, t \in (a,b)\ :\ \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$*;*
3. *neexistujú $u, v \in [a,b]$, $u \neq v$. také, že $\varphi(u) = \varphi(v)$, $\psi(u) = \psi(v)$;*
4. *ψ je nezáporná (nekladná) funkcia.*

Potom plošným obsahom plochy vytvorenej rotáciou krivky K okolo osi Ox je číslo

$$S = 2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt \,.$$

429. Vypočítajte plošný obsah S plochy vytvorenej rotáciou

1. krivky $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ a) okolo osi Ox, b) okolo priamky $y = x$;
2. krivky $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, a) okolo osi Ox, b) okolo osi Oy;
3. krivky $\varrho = a(1 + \cos\varphi)$ okolo osi Ox;
4. oblúka paraboly $y^2 = 2px$ odrezaného priamkou $y = 2x$ okolo tejto priamky.

430. Vypočítajte veľkosť povrchu telesa, ktoré vznikne rotáciou kocky s hranou dĺžky a okolo jej diagonály!

Riešenia, návody, poznámky

„Milý kamaráde," řekl jednoroční dobrovolník, „můj rozhovor, který bude nyní následovat, dokáže vám neobyčejně jasně, že chyb není nikdo ušetřen! Jsem přesvědčen, pánové, že vy tam vzadu přestanete hrát „maso", neboť to, co vám nyní povím, bude velice zajímavé už tím, že mnohým odborným výrazům neporozumíte."

J. Hašek: Osudy dobrého vojáka Švejka

1. Neurčitý integrál

$\boxed{1}$ **1**. $x - \dfrac{5x^2}{2} + \dfrac{4x^3}{3} + C$; **2**. $27x - 9x^3 + \dfrac{9x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + C$; **3**. $a \ln|x| - \dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^3}{2x^2} + C$; **4**. $x - 2\ln|x| - \dfrac{1}{x} + C$; **5**. $\dfrac{340x^{0.83}}{83} + C$; **6**. $a^2x - \dfrac{9a^{4/3}x^{5/3}}{5} + \dfrac{9a^{2/3}x^{7/3}}{7} - \dfrac{x^3}{3} + C$; **7**. $\dfrac{4x^{5/4}}{5} - \dfrac{24x^{17/12}}{17} + \dfrac{4x^{3/4}}{3} + C$; **8**. $\dfrac{4x^{7/4}}{7} + 4x^{-1/4} + C$; **9**. $-\operatorname{arctg} x + C = x + \operatorname{arcctg} + C$ $\left(\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}\right)$; **10**. $x - 2\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + C$; **11**. $\arcsin x + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C = -\arccos x + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$; **12**. $3x - 2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x / \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + C$; **13**. $-\dfrac{2}{5^x \ln 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 2^x \ln 2} + C$; **14**. $\dfrac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C$ (použite vzorec $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$); **15**. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin x}{2} + C$ $\left(\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}\right)$; **16**. $-\operatorname{ctg} x - x + C$; **17**. $x - \operatorname{th} x + C$ $(\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1)$;

$\boxed{2}$ **1a**) $-\dfrac{x^2}{2} + C$ pre $x < 0$, $\dfrac{x^2}{2} + C$ pre $x \geq 0$; **1c**) $-2x + C$ pre $x < -1$, $x^2 + 1 + C$ pre $x \in [-1,1]$, $2x + C$ pre $x > 1$; **1d**) $\dfrac{x^3}{3} + C$ pre $x < -1$, $x + \dfrac{2}{3} + C$ pre $x \in [-1,1]$, $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4}{3} + C$ pre $x > 1$; **2**. ak položíme $x = e^t$, dostaneme $f'(t) = 1$ pre $t \leq 0$, $f'(t) = e^t$ pre $t > 0$, odtiaľ $f(t) = t + C$ pre $t \leq 0$, $f(t) = e^t - 1 + C$ pre $t > 0$;

$\boxed{3}$ napr. $f(x) = g'(x)$, kde $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pre $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$, $g(x) = 0$ pre $x = 0$;

$\boxed{4}$ **1**. áno (nech $|F(x)| \leq M$ pre $x \in (a,b)$; zvoľme $c \in (a,b)$ pevne; potom pre $x \in (a,b)$ platí $|F(x)| = |(F(x) - F(c)) + F(c)| \leq |F(x) - F(c)| + |F(c)|$; pritom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote je $|F(x) - F(c)| = |f(d)|\,|x - c| \leq M|b - a|$; teda $|F(x)| \leq |F(c)| + M|b - a|$; **2**. nie (napr. $F(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$);

$\boxed{5}$ **1**. $\ln|x - a| + C$; **2**. $\frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C$; **3**. $-\frac{2}{15}(5x-2)^{-3/2} + C$; **4**. $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}\,x + C$ $\left(\frac{1}{2+3x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{3/2}\,x)^2}, \text{ subst. } \sqrt{\frac{3}{2}}\,x = t\right)$; **5**. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}\,x + \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 1}\right| + C =$[1] $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2}\right| + C$; **6**. $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C$; **8**. $\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$; **9**. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + 1}\right| + C$ $\left(= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2x^2 - x + 2}\right| + C\right)$; **10**. $-e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} + C$; **11**. $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; **12**. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$ $\left(1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}\right)$; **13**. $x - 3 \operatorname{cth} \frac{x}{3} + C$; **15**. $\frac{(1-x)^{99}}{99} - \frac{(1-x)^{98}}{49} + \frac{(1-x)^{97}}{97} + C$;

$\boxed{6}$ **1**. $\frac{\sin^6 x}{6} + C$; **2**. $\frac{(1+x^2)^{11}}{22} + C$ (subst. $1 + x^2 = t$); **3**. $-\sqrt{1+x^2} + C$; **4**. $\frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}{4} + C$; **5**. $\frac{(8x^3+27)^{1/3}}{8} + C$; **6**. $\frac{-e^{-x^2}}{2} + C$; **7**. $\ln(2 + e^x) + C$; **8**. $\frac{2}{3}\ln^3 x - 3\ln x + C$ (subst. $\ln x = t$); **9**. $-\ln|\cos x| + C$ $\left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\right.$, subst. $\left.\cos x = t\right)$; **10**. $\ln|\arcsin x| + C$; **11**. $3 \operatorname{th} x + C$; **13**. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}} + C$; **14**. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}}\right| + C$ (subst. $x^4 = t$); **15**. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x^2 + 3}{\sqrt{17}} + C$; **17**. $2 \operatorname{sgn} x \cdot \ln\left|\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+1|}\right| + C$, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ (definičným oborom funkcie $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$ je množina $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$; pre $x > 0$ platí $\sqrt{x(1+x)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}$ — použijeme substitúciu $\sqrt{x} = t$; pre $x < -1$ je $\sqrt{x(1+x)} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-1-x}$ — použijeme substitúciu $\sqrt{-x} = t$; možno postupovať aj analogicky ako v pr. 5.6-9, vtedy dostaneme výsledok v tvare $\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x}\right| + C$); **18**. $-(1-x^2)^{1/2} + 2 \cdot \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} - \frac{(1-x^2)^{5/2}}{5} + C$ (subst. $\sqrt{1-x^2} = t$, $-\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$); **19**. $\frac{2}{n}\left|x^{n/2+1} + \sqrt{1 + x^{n+2}}\right| + C$ (subst. $x^{n/2+1} = t$); **20**. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ ($\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x$, subst. $\sin x = t$); **21**. $\arcsin \frac{2\sin x - 1}{3} + C$; **22**. $\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2}$ (subst. $\sin^2 x = t$, $2\sin x \cos x\,dx = dt$); **23**. $-\frac{\ln\left|\cos x + \sqrt{\cos^2 x - 1/2}\right|}{\sqrt{2}} + C$ $\left(= -\frac{\ln|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}|}{\sqrt{2}} + C\right)$; **24**. $\ln|\ln(\ln x)| + C$; **25**. $\operatorname{arctg} e^x + C$; **27**. $\frac{1}{2\ln(2/3)} \cdot \ln\left|\frac{3^x + 2^x}{3^x - 2^x}\right| + C$ (integrand možno rozšírením výrazom $\frac{1}{9^x}$ upraviť na tvar $\frac{(2/3)^x}{1 - (2/3)^{2x}}$; subst. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$);

$\boxed{7}$ **2**. $2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$; **3**. $\left(\sqrt[3]{x+1} + 1\right)^3 - \frac{9(\sqrt[3]{x+1} + 1)^2}{2} + 9(\sqrt[3]{x+1} + 1) - 3\ln|\sqrt[3]{x+1} + 1| + C$ (použili sme najprv substitúciu $x = t^3 - 1$, ktorá vyplýva zo vzťahu $\sqrt[3]{x+1} = t$, potom substitúciu

---

[1] $= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2}\right)\right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2}\right| + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + C\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2}\right| + C$; teda číslo $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$ sme „zahrnuli“ do integračnej konštanty

$1+t=z$); **4**. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$; **5**. $\frac{1}{12}\left((2x-5)^{3/2}+30\sqrt{2x-5}-\frac{111}{\sqrt{2x-5}}\right)+C$ (ak chceme, aby platilo $(2x-5)^{3/2}=t$, stačí použiť substitúciu $x=\frac{t^{2/3}+5}{2}$); **6**. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$ (môžeme použiť dve za sebou nasledujúce substitúcie $x=\ln t$; $t=z^2-1$, $z\geq 1$ (prvú dostaneme zo vzťahu $e^x=t$, druhú zo vzťahu $\sqrt{t+1}=z$) alebo — čo je to isté — priamo substitúciu $x=\ln(z^2-1)$, $z\geq 1$, ktorú nájdeme, ak vyjadríme x z rovnosti $\sqrt{1+e^x}=z$);

$\boxed{8}$ **1**. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$ (subst. $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, pri úpravách sme využili rovnosti $\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $\sin(\arcsin x)=x$); **2**. $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$ (subst. ako v pr. 8.1, $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$); **3**. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$; **4**. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+C$ $\Big($subst. $x=\operatorname{tg} t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, pri úpravách sme použili vzťahy $1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, $\sin\operatorname{arctg} x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos\operatorname{arctg} x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big)$; **5**. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$; **6**. $(\operatorname{sgn} x)\,\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C$ $\Big($definičný obor integrandu je $(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$; na intervale $(-\infty,-a)$ použijeme substitúciu $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, na intervale (a,∞) substitúciu $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Big)$;

$\boxed{9}$ použite substitúciu $x=t^n$, $t\geq 0$, pre n párne, resp. $x=t^n$, $t\in\mathbf{R}$, pre n nepárne a využite, že primitívnymi funkciami k polynómu sú polynómy;

$\boxed{10}$ $f(x)=-\frac{x^2}{2}-C$, $x\geq 0$; $g(x)=\sin x-\frac{x^4}{2}+C$ $(C\in\mathbf{R})$ $\Big($z prvej v príklade vystupujúcej podmienky integrovaním dostaneme $\frac{f(x^2)}{2}+g(x)=\sin x-\frac{3}{4}x^4+K\Big)$ odporúčame čitateľovi urobiť skúšku správnosti získaných riešení;

$\boxed{11}$ **1**. $x\sin x+\cos x+C$; **2**. $-(x+1)e^{-x}+C$; **3**. $\frac{x^2}{2(1+x^2)}-\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}+C$ **4**. $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$; **5**. $-\frac{2x^2\ln^2 3+2x\ln 3+1}{9^x\cdot 4\cdot\ln^3 3}+C$; **6**. $-\frac{2x^2+5}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C$; **7**. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$ $\left(u'=\frac{1}{x^2},\ v=\ln^2 x\right)$ [2]; **8**. $\operatorname{tg} x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg} x-x+C$; **9**. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$; **10**. $\frac{2}{27}x^{3/2}(9\ln^2 x-12\ln x+8)+C$; **11**. $\frac{x^2}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|+\frac{x}{2}-\frac{\ln|x+1|}{2}+C$ (pri derivovaní zloženej funkcie $\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ využite, že $(\ln|u|)'=\frac{1}{u}$; vyplýva to okrem iného zo vzorca 2 v tabuľke integrálov); **12**. $x\ln x-x+C$; **14**. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; **15**. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$; **17**. $\frac{1}{a^2+b^2}\,e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$ [3]; **18**. $\frac{x}{2}\,(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$;

$\boxed{12}$ **1**. $-\frac{e^{-x^3}}{3}(1+x^3)+C$ (subst. $x^3=t$); **2**. $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$ (subst. $x=t^2$, $t\geq 0$); **3**. $(12\sqrt{x}-2x\sqrt{x})\cos\sqrt{x}+(6x-12)\sin\sqrt{x}+C$; **4**. $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$ $\Big(u=\arcsin^2 x$, $v'=1$, alebo subst. $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Big)$; **5**. $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{\cos 2x}{8}+C$ ($\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-$

---

[2] všimnime si, že v pr. 11.7-9 nie je definičným oborom integrandu interval, ale zjednotenie dvoch otvorených disjunktných intervalov, resp. spočítateľného systému po dvoch disjunktných otvorených intervalov; metódu per partes by sme mali používať na každom z týchto intervalov zvlášť— veta 6 je totiž formulovaná pre funkcie definované na intervale; keďže však na každom z týchto intervalov je zápis výpočtu rovnaký, môžeme použiť metódu per partes na celom definičnom obore „naraz“

[3] ak $I:=\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $J:=\int e^{ax}\cos bx\,dx$, tak použitím metódy per partes v podobe $u'=e^{ax}$, $v=\sin bx$, resp. $u'=e^{ax}$, $v=\cos bx$, dostávame $I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}J$, $J=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I$, z tejto sústavy rovníc už vieme vyjadriť integrály I aj J ; tento postup, pri ktorom nájdeme hneď dva „párové“ integrály naraz, možno použiť aj pri riešení pr. 11.18

$\cos 2x)\,)$; **6**. $\dfrac{e^{2x}}{8}(2-\cos 2x-\sin 2x)+C$; **7**. $\dfrac{e^{2x}}{2}-e^x(\cos x+\sin x)+\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$; **8**. $-\dfrac{x}{2\sin^2 x}-\dfrac{\operatorname{ctg} x}{2}+C$; **9**. $-\sqrt{1-x^2}\arccos x-x+C$; **10**. $\sqrt{1+x^2}\,\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x+C$; **11**. $-\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{\operatorname{arctg} x}{2}+C$ $\left(u'=\dfrac{x}{(1+x^2)^2}\,,\ v=x\right)$[4]; **12**. $\dfrac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2a^2}\cdot\dfrac{x}{x^2+a^2}+C$ $\left(\dfrac{1}{(a^2+x^2)^2}=\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}=\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{x^2+a^2}-\dfrac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right)\right)$; **13**. $\dfrac{1}{2}\left(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)+C$ $\left(u'=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ v=x\right)$; **14**. $\dfrac{1}{2}\left(a^2\arcsin\dfrac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$ $\left(\text{pre } x\in(-a,a) \text{ platí } \sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\ ^{5}\right)$; **15**. $\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}(x-1)}{2\sqrt{1+x^2}}+C$ (najprv subst. $\operatorname{arctg} x=t$); **16**. $\dfrac{(x+1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$; **17**. $\dfrac{e^{x+1}}{x+1}+C$ $\left(\text{najprv subst. } x+1=t;\ \text{metódu per partes použite len na výpočet } \int\dfrac{e^t}{t^2}\,dt;\ u'=\dfrac{1}{t^2}\,,\ v=e^t\right)$;

13 $xf'(x)-f(x)+C$;

16 **2**. $I_n=\dfrac{1}{2n+1}x(a^2-x^2)^n+\dfrac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}\,,\ n\neq-\dfrac{1}{2}$; **3**. $I_n=\dfrac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x-I_{n-2}\,,\ n\neq 1$ $\left(u'=\dfrac{\sin x}{\cos^n x}\,,\ v=\sin^{n-1}x;\ \text{tento rekurentný vzťah možno odvodiť aj bez použitia metódy per partes: } \int tg^n x\,dx=\int tg^{n-2}x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\right)$; **4**. $I_n=\dfrac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2}-a^2\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\,,\ n\neq 0$ $\left(u'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,,\ v=x^{n-1}\right)$; **5**. $I_n=-\dfrac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\,,\ n\neq 0$; **6**. $I_n=\dfrac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\,,\ n\neq 0$ (možno použiť substitúciu $x=t-\dfrac{\pi}{2}$ a rekurentný vzťah odvodený v pr. 16.5);

18 **1**. $e^{2x}\left(\dfrac{3}{2}x^3-\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{9}{4}x-\dfrac{77}{8}\right)+C$; **2**. $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3x}{2}+\dfrac{9}{4}\right)\sin 2x+\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}\right)\cos 2x+C$ (platí $\int P_n(x)\cos ax\,dx=Q_n(x)\sin ax+R_{n-1}(x)\cos ax+C$); **3**. $\left(-\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2x}{3}+\dfrac{11}{27}\right)\cos 3x+\left(\dfrac{2x}{9}+\dfrac{2}{9}\right)\sin 3x+C$; **4**. $\left(-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{7}{4}x-\dfrac{1}{2}\right)\cos 2x+\left(\dfrac{11}{4}x^2+\dfrac{1}{8}\right)\sin 2x+C$ (výsledok sme hľadali v tvare $Q_3(x)\cos 2x+R_2(x)\sin 2x$);

19 **1**. $\ln|x^2+3x-10|+C$; **2**. $-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\dfrac{3}{2}\ln|x+3|+C$; **3**. $\dfrac{x^9}{9}-\dfrac{x^8}{8}+\dfrac{3x^7}{7}-\dfrac{5x^6}{6}+\dfrac{11x^5}{5}-\dfrac{21x^4}{4}+\dfrac{43x^3}{3}-\dfrac{85x^2}{2}+171x+\dfrac{1}{3}\ln|x-1|-\dfrac{1024}{3}\ln|x+2|+C$;

20 **2**. $\dfrac{2}{9}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|-\dfrac{1}{3(x-1)}+C$; **3**. $\dfrac{1}{9(x-2)}+\dfrac{1}{54}\ln\left|\dfrac{x-5}{x+1}\right|+C$; **4**. $4\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}+C$; **5**. $\ln|x+2|-\dfrac{1}{2x^2}+C$; **6**. $\dfrac{x^2}{2}+2x-\dfrac{9}{4(x-1)}-\dfrac{1}{4(x-1)^2}+\dfrac{1}{8}\ln|x+1|+\dfrac{31}{8}\ln|x-1|+C$;

21 **1**. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; **2**. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2}{x^2+2}+C$; **4**. $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+$

---

[4] v príkladoch 12.11-14, ktoré tu riešime metódou per partes, možno použiť aj goniometrické substitúcie: v pr. 12.11 $x=\operatorname{tg} t$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, pri ďalších úpravách potom rovnosti $\sin^2 t=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2t)$, $\sin(2\operatorname{arctg} x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$; v pr. 12.12 $x=a\operatorname{tg} t$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (pozri pr. 8.4), v pr. 12.13 $x=\sin t$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, alebo $x=\cos t$, $t\in(0,\pi)$ (pozri pr. 8.3), v pr. 12.14 $x=a\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, alebo $x=\cos t$, $t\in[0,\pi]$ (pozri pr. 8.2)

[5] funkciu $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^2\arcsin\dfrac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$ sme našli integráciou pravej strany tejto rovnosti, preto platí $\forall x\in(-a,a)\ :\ f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}$; zostáva ešte overiť pravdivosť rovnosti $f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ pre $x=a$, $x=-a$; hodnoty $f'(a)$, $f'(-a)$ pritom nemožno nájsť tabuľkovým derivovaním, na ich výpočet treba použiť tvrdenie z pr. I.384.1; inou možnosťou dôkazu rovností $f'(a)=f'(-a)=0$ je tvrdenie z pr. 48

C; $\underline{\mathbf{5}}$. $\ln|x+2| + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$ (všimnite si, že koeficient pri najvyššej mocnine polynómu v menovateli integrandu nie je rovný 1 — porovnaj s predpokladmi vety 7; rozmyslite si, prečo môžeme rozklad integrandu na parciálne zlomky hľadať v tvare $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{Cx+D}{3x^2-2x+4}$); $\underline{\mathbf{6}}$. $\dfrac{1}{5}\left(\ln\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1)\right) + C$;

$\boxed{\mathbf{22}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. $-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x+2}{x^2+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$; $\underline{\mathbf{2}}$. $\dfrac{x}{4(x^2+1)^2} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C$; $\underline{\mathbf{3}}$. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}\right) + \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \dfrac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

$\boxed{\mathbf{23}}$ $\underline{\mathbf{1}}$. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}\ln|x^3+2| + C$; $\underline{\mathbf{2}}$. $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; $\underline{\mathbf{3}}$. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$; $\underline{\mathbf{4}}$. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + 2\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + 2\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right) + C$ ($x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 = (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)$)[6]; $\underline{\mathbf{5}}$. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$ ($x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2 - x^2$)[7]; $\underline{\mathbf{6}}$. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})\right) + C$ ($x^6+1 = (x^2)^3+1^3 = (x^2+1)(x^4-x^2+1)$; výsledok možno upraviť na tvar $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\dfrac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg} x^3 + C$[8]); $\underline{\mathbf{7}}$. $-\dfrac{1}{6(1+x)} + \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$; $\underline{\mathbf{8}}$. $\dfrac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)} +$

---

[6] pokiaľ hľadáme neurčitý integrál len na množine $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, môžeme použitím vzorca z pr. I.87.1 výsledok integrácie prepísať do podoby $F_1(x)+C$ kde $F_1(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ (výraz $\varepsilon\pi$ vystupujúci v uvedenom vzorci sme „zahrnuli" do integračnej konštanty C; na symbol C sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 1'; ak chceme pomocou predpisu funkcie F_1 zapísať predpis funkcie F, ktorá by bola primitívnou funkciou k $\dfrac{1}{x^4+1}$ na celej množine $\mathbf{R}$, môžeme postupovať ako v riešení pr. 41.1, dostaneme tak $F(x) = \begin{cases} F_1(x)+\vartheta(x), & \text{ak } x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\} \\ \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{ak } x=-1 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \dfrac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{ak } x=1 \end{cases}$, kde $\vartheta(x)\equiv 0$ pre $x<-1$, $\vartheta(x)\equiv\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ pre $x\in(-1,1)$, $\vartheta(x)\equiv\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ pre $x>1$

[7] neurčitý integrál na množine $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ možno použitím vzorca z pr. I.87.1 napísať v tvare $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C$; použitím vzorca z pr. I.62.2 možno neurčitý integrál na množine $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ napísať v tvare $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{x\sqrt{3}} + C$

[8] platí totiž $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})\right) + C \overset{(1)}{=} \left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg} x\right) + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2} + C \overset{(2)}{=} \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2} + C \overset{(3)}{=} \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(-x^3)} + C \overset{(4)}{=} \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg} x^3 + C$ (v (1) a (3) sme použili vzorec z pr. I.87.1, v (2) a (4) vzorec z pr.I.62.2 , v (4) naviac rovnosť $\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha$; konštanty vystupujúce v použitých vzorcoch sú „zahrnuté" do integračnej konštanty C; uvedené rovnosti platia na množine $\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$, pretože však výraz na ľavej strane rovnosti (1) a výraz na pravej strane rovnosti (4) sú funkcie spojité na $\mathbf{R}$, platí rovnosť medzi týmito výrazmi na celej množine $\mathbf{R}$; odporúčame čitateľovi, aby si najmä poslednú uvedenú úvahu podrobne rozmyslel

$\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; **9**. $-\frac{1}{48x^3} + \frac{1}{32x} + \frac{x}{128(x^2+4)} + \frac{5}{256}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$ $\left(\frac{1}{x^8+8x^6+16x^4} = \left(\frac{1}{x^2(x^2+4)}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+4}\right)^2\right)$; **10**. $\frac{1}{a+b^2}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x+b)^2}{x^2+a}\right) + C$ pre $a > 0$; $\frac{1}{2\sqrt{-a}(\sqrt{-a}-b)}\ln|x+\sqrt{-a}| + \frac{1}{2\sqrt{-a}(\sqrt{-a}+b)}\ln|x-\sqrt{-a}| + \frac{1}{a+b^2}\ln|x+b| + C$ pre $a<0,\ a+b^2\neq 0$; $\frac{1}{4b^2}\ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right| + \frac{1}{2b(x+b)} + C$ pre $a<0,\ a+b^2=0$;

$\boxed{24}$ $c=0$ alebo $bc=ad$;

$\boxed{25}$ **a**) $D := b^2-4ac = 0$ (táto podmienka zahŕňa aj prípad $a=b=0$); **b**) $D>0$ (táto podmienka zahŕňa aj prípad $a=0 \wedge b\neq 0$) alebo $a=b=0$ (vtedy stačí položiť $R(x)\equiv 1$); **c**) $D<0$ alebo $a=b=0$;

$\boxed{26}$ **1**. $\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + C$ (subst. $x-1=t$); **2**. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^2 + C$ (subst. $x^2=t$); **3**. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}} + C$; **4**. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + C$ (napísať ako súčet dvoch integrálov, v prvom subst. $x^3=t$, v druhom $x^2=s$); **5**. $\frac{x^4}{4} - \ln(x^4+2) + \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$; **6**. $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+1) + C$; **7**. $\frac{1}{10(x^{10}+1)} + \ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1} + C$; **8**. $\ln(x^4+1) - \frac{3}{8}\ln x^4 - \frac{5}{8}\ln(x^4+2) + C$; **9**. $\frac{1}{49}\ln\left|\frac{x^7}{x^7+7}\right| + C$ $\left(\frac{1}{x^8+7x} = \frac{1}{x(x^7+7)} = \frac{x^6}{x^7(x^7+7)}\right)$; **10**. $\frac{1}{n}(x^n+1) - \frac{1}{n}|x^n+1| + C$ $\left(= \frac{x^n}{n} - \frac{1}{n}\ln|x^n+1| + C\right.$, ak konštantu $\frac{1}{n}$ „zahrnieme" do integračnej konštanty $\left.C\right)$ pre $n\neq 0$; $2\ln x + C$ pre $n=0$; **11**. $\frac{1}{2n}\left(\operatorname{arctg}x^n - \frac{x^n}{x^{2n}+1}\right) + C$ pre $n\neq 0$; $\frac{1}{4}\ln x + C$ pre $n=0$; **12**. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + C$ $\left(\frac{x^2-1}{x^4+1} = \frac{1-1/x^2}{x^2+1/x^2} = \frac{1-1/x^2}{(x+1/x)^2-2}\right.$ pre $x\neq 0$; to, že výsledok (ktorý sme našli integrovaním funkcie definovanej na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$) je hľadanou primitívnou funkciou na $\mathbf{R}$, vyplýva z pr. $\left.46\right)$; **13**. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2} + C$ $\left(\text{subst. } x+\frac{1}{x}=t\right)$; **14**. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1} + C$ (najprv subst. $x^2=t$ a potom ako v pr. 26.12, alebo priamo subst. $x^2+\frac{1}{x^2}=t$);

$\boxed{27}$ $I = -\frac{1}{(a-b)^{m+n-1}}\int\frac{(t-1)^{m+n-2}}{t^m}\,dt$; $J = \frac{1}{625}\left(\frac{3(x-2)}{x+3} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2} - 3\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|\right) + C$;

$\boxed{28}$ **1**. použite metódu per partes a využite, že primitívna funkcia k racionálnej funkcii $F(x)(\operatorname{arctg}x)'$, resp. $F(x)(\operatorname{arcctg}x)'$, resp. $F(x)(\ln x)'$ je elementárna; **2a**) $\frac{1}{8}\left((x^8-1)\operatorname{arctg}x - \frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x\right) + C$; **2b**) $x\operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1} + \operatorname{arcctg}(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + C$ (pomocou vzťahu $\operatorname{arcctg}\alpha + \operatorname{arcctg}\frac{1}{\alpha} = \pi - \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$ možno výsledok upraviť na tvar $(x-1)\operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + C$); **2c**) $\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \ln|x| - \frac{1}{x}\ln(x^2-x-1) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$; **2d**) $\frac{1}{x}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2-4}} + C$ (pri derivovaní funkcie $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|$ využite vzorec $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$);

$\boxed{29}$ **1**. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2} + C$; **2**. $\frac{12}{5}x^{5/12} - 6x^{1/6} - 4\ln|x^{1/12}+1| + 2\ln|x^{1/6}-x^{1/12}+1| + 4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x^{1/12}-1}{\sqrt{3}} + C$ (subst. $x=t^{12},\ t\geq 0$); **3**. $\ln(1+x) - 3\ln(1+\sqrt[3]{1+x}) - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{1+x} +$

C ; **4**. $\dfrac{12}{13}(1+\sqrt[4]{x})^{13/3}-\dfrac{18}{5}(1+\sqrt[4]{x})^{10/3}+\dfrac{36}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3}-3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}+C$;

$\boxed{\mathbf{30}}$ **1**. špeciálne pre $bc=ad$ je $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ racionálnou funkciou premennej x; v ostatných prípadoch stačí použiť substitúciu, ktorej predpis dostaneme, ak z rovnice $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$ vyjadríme x ako funkciu premennej t; pritom treba rozlíšiť prípady n párne, n nepárne a prípady $c=0\wedge a\neq 0$, $c\neq 0\wedge bc-ad\neq 0$; **2a**) $\dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^4}\,(25x-20)}{36\sqrt[5]{x^9}}+C$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$; **2b**) $\dfrac{2t}{t^3-1}+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, kde $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (výpočet $\displaystyle\int -\frac{6t^3}{(t^3-1)^2}\,dt$ možno zjednodušiť použitím metódy per partes: $u'=-\dfrac{3t^2}{(t^3-1)^2}$, $v=2t$) ; **2c**) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}+C$ (integrand rozšíriť výrazom $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; výsledok možno upraviť na tvar $\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+C$, $x>1$: zlomok v absolútnej hodnote stačí rozšíriť výrazom $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$, druhý zlomok výrazom $x-\sqrt{x^2-1}$) ; **2d**) $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+C$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ $\Bigg($integrand možno prepísať do tvaru $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}\cdot\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}\Bigg)$; **2e**) $\dfrac{n}{b-a}\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}}+C$, $x>\max\{a,b\}$; **2f**) $-\dfrac{at}{t^4+1}+\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t}+\dfrac{a}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right|+C$, kde $t=\sqrt[4]{\dfrac{x}{a-x}}$ (na výpočet $\displaystyle\int\frac{4t^4}{(t^4+1)^2}dt$ použite najprv metódu per partes: $u'=\dfrac{4t^3}{(t^4+1)^2}$, $v=t$; $\displaystyle\int\frac{dt}{1+t^4}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t^4+1}\,dt$, v prípade druhého integrálu pozri pr. 26.12, prvý možno nájsť analogicky) ;

$\boxed{\mathbf{31}}$ **1**. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t^4}{(2t+1)^3}-\dfrac{8t+1}{2(2t+1)}+C$, kde $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$ [9] $\Bigg($ výpočet $\displaystyle\int\frac{2\,dt}{t(2t+1)^2}$ možno zjednodušiť substitúciou $t=\dfrac{1}{z}$ alebo $2t+1=\dfrac{1}{z}$; výsledok možno zapísať v podobe $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t^4}{(2t+1)^3}+\dfrac{3}{2(2t+1)}+C$ [10]$\Bigg)$; **2**. $\dfrac{1}{256}\left(2z^2-16z+4\ln|z|-\dfrac{6}{z^2}-\dfrac{48}{z^3}-\dfrac{27}{z^4}\right)+C$, kde $z=2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)+1$ (použili sme postupne substitúcie $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$, $z=2t+1$) ; **3**. $\dfrac{1}{8}\left(z+3\ln|z|-\dfrac{3}{z}-\dfrac{1}{2z^2}\right)+C$, kde $z=2x+2\sqrt{x^2+x}+1$ $\Big($použitím rovnosti $\dfrac{1}{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}=2x+1-2\sqrt{x^2+x}$ možno výsledok upraviť na tvar $\dfrac{3}{8}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2+x}+1\right|-\dfrac{1}{2}(x^2+2x)+\dfrac{1}{4}(x+5)\sqrt{x^2+x}+C\Big)$; **5**. $2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right)-\ln\left|\dfrac{2-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}+1\right|+C$ (definičný obor integrandu je $[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1]$; použili sme substitúciu $\sqrt{1-2x-x^2}=1-tx$, inverzná funkcia k funkcii $x=\varphi(t)=\dfrac{2(t-1)}{t^2+1}$, $t\in[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$, je $t=$

$$\varphi^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{x}, & \text{ak}\quad x\in[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1]\setminus\{0\}\\ 1, & \text{ak}\quad x=0\end{cases},$$

to možno zapísať v tvare $\varphi^{-1}(x)=$

---

[9] príslušná Eulerova substitúcia prepísaná do podoby vyhovujúcej vete 5 má tvar $x=\dfrac{t^2-1}{2t+1}$, $t\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ — tak nájdeme primitívnu funkciu na intervale $(-\infty,-1)$, resp. $x=\dfrac{t^2-1}{2t+1}$, $t\in(0,\infty)$ — tak nájdeme primitívnu funkciu na intervale $(-1,\infty)$

[10] platí $-\dfrac{8t+1}{2(2t+1)}=-2+\dfrac{3}{2(2t+1)}$ a číslo -2 možno „zahrnúť“ do integračnej konštanty C

$\dfrac{2-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ [11]$\Big)$; **6**. $2\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{x-1}{1+\sqrt{1+x-x^2}}\right)+C$ $\Big($použili sme substitúciu $\sqrt{1+x-x^2}=tx+1$; funkcia $-2\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x}\right)$ nájdená pomocou substitúcie $\sqrt{1+x-x^2}=tx-1$ je primitívnou funkciou len na $\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2},\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)\setminus\{0\}\Big)$; **7**. $\dfrac{10}{9}\sqrt{\dfrac{x-2}{5-x}}-\dfrac{4}{9}\sqrt{\dfrac{5-x}{x-2}}+C$ $\Big($použili sme substitúciu $\left(\sqrt{7x-10-x^2}=\right)$ $\sqrt{(x-2)(5-x)}=t(x-2)$ [12]$\Big)$; **8**. $\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|+C$, kde $t=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$ $\left(=\dfrac{\sqrt{4x-3-x^2}}{x-1}\right)$, $x\in(1,2)\cup(2,3)$;

32 **1**. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{21}}-\sqrt{5+x-x^2}+C$, $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2},\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$; **2**. $\dfrac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{1}{8}\ln\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$; **3**. $\dfrac{1}{3840}\sqrt{1+x^2}\,(384x^9-432x^7+504x^5-630x^3+945x)-\dfrac{945}{3840}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$ $\Big($stačí opakovane použiť rekurentný vzťah $I_n=\dfrac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1+x^2}-\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\Big)$; **4**. $\dfrac{11}{8}\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt5}+\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C$, $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2},\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)$; **5**. $\left(\dfrac{x^5}{6}-\dfrac{a^2x^3}{24}-\dfrac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^6}{16}\arcsin\dfrac{x}{a}+C$ $\Big($integrand rozšíriť výrazom $\sqrt{a^2-x^2}$, potom možno použiť rekurentný vzťah $I_n=-\dfrac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{n-1}{n}a^2I_{n-2}$, kde $I_n=\displaystyle\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ [13]; iná možnosť: odvodiť rekurentný vzťah $J_n=\dfrac{n-1}{n+2}a^2J_{n-2}-\dfrac{1}{n-2}x^{n-1}(a^2-x^2)^{3/2}$, kde $J_n=\displaystyle\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, J_0 pritom možno vypočítať substitúciou $x=a\cos t$, $t\in[0,\pi]\Big)$; **6**. $\dfrac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+2}+\dfrac{7}{8}\ln\left|\dfrac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C$;

33 **1**. $\left(-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{5x}{6}-\dfrac{19}{6}\right)\sqrt{1-2x-x^2}-4\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt2}+C$; **2**. $\left(\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C$;

34 **1**. $\dfrac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C$ [14]; **2**. $-\dfrac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\operatorname{sgn}x\cdot\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right|+C$ $\Big($výsledok

---

[11] keby sme použili (na prvý pohľad prirodzenejšiu) substitúciu $\sqrt{1-2x-x^2}=tx-1$, bolo by $x=\varphi(t)=\dfrac{2(t-1)}{t^2+1}$, $t\in(-\infty,1-\sqrt2]\cup[1+\sqrt2,\infty)$, $t=\varphi^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$, pomocou tejto substitúcie nájdená funkcia $\ln\left|\dfrac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg}t$ $\big($kde $t=\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitívnou funkciou len na $[-\sqrt2-1,\sqrt2-1]\setminus\{0\}$, hľadanie primitívnej funkcie na celom intervale $[-\sqrt2-1,\sqrt2-1]$ sa potom zakladá na rovnakých úvahách ako riešenie pr. 41.1

[12] teda $t=\sqrt{\dfrac{5-x}{x-2}}$, potom $x=\dfrac{5+2t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{7x-10-x^2}=t(x-2)=t\left(\dfrac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)$

[13] to, že výsledok, ktorý sme našli integrovaním funkcie definovanej na $(-a,a)$, je hľadanou primitívnou funkciou na intervale $[-a,a]$, vyplýva z pr. 46

[14] použitím substitúcie $x=\dfrac{1}{t}$ dostaneme na intervale $(1,\infty)$: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{t^3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$; na intervale $(-\infty,-1)$: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{t^3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$; to možno naraz zapísať v podobe $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\operatorname{sgn}t\cdot\int\frac{t^3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$; na výpočet posledného integrálu použite substitúciu $\sqrt{1-t^2}=z$

možno upraviť do podoby $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C$ [15]$\Big)$; **4**. $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt5}+\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\ln\left|\frac{3+x+2\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\sqrt{1-x-x^2}}{2(x+1)}\right|+C$ $\Big(=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt5}+\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\ln\left|\frac{3+x+2\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\sqrt{1-x-x^2}}{x+1}\right|+C$, ak číslo $\ln\frac{1}{2}$ „zahrnieme" do integračnej konštanty C; výsledok možno upraviť do podoby $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt5}+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{x+1}\right|+C\Big)$; **5**. $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-\sqrt2\operatorname{sgn}x\cdot\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{|x|}\right|+C$ $\Big($integrand rozšíriť výrazom $\sqrt{x^2+2x+2}$, výsledok možno upraviť do podoby $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-\sqrt2\ln\left|\frac{2+x+\sqrt2\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\right|+C\Big)$; **6**. $\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\arcsin\frac{1}{x+1}+C$, $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ $\Big($ak využijeme nepárnosť funkcie $\arcsin$, môžeme výsledok napísať v tvare $\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}+C$, $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\Big)$;

$\boxed{\mathbf{35}}$ **1**. $\frac{3}{5}k^5-2k^3+3k+C$, kde $k=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$; **2**. $\frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3}-\frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3}+C$; **3**. $-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1+x)}+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}+C$, $x\in[0,1)$ $\big($výsledok sme získali použitím substitúcie $\sqrt{x}=t$ a rekurentného vzťahu z návodu k pr. 32.5 [16]$\big)$; **4**. $\frac{x}{2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}-\frac{x^3}{6\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^3}+C$ $\big($použili sme Eulerovu substitúciu $\sqrt{1-x^2}=1-tx$ [17]$\big)$; **5**. $\frac{1}{12}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{12}+C$; **6**. $\frac{2}{9z}+\frac{1}{24z^2}+\frac{17}{108}\ln|z|+\frac{16}{27}\ln|z+3|+C$, kde $z=2\left(x+\sqrt{x^2-3x+2}\right)-3$ $\big($použili sme substitúcie $\sqrt{x^2-3x+2}=t-x$, $2t-3=z\big)$; **7**. $\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x}+\frac{3\sqrt{x^2+2x}}{2(x+2)}+C$ $\Big(\frac{x-1}{x^2+2x}$ rozložte na parciálne zlomky; pri úprave výsledku použite rovnosti $\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{\frac{2+x}{x}}=\frac{\sqrt{x(2+x)}}{x}$, $\operatorname{sgn}(x+2)\cdot\sqrt{\frac{x}{2+x}}=\frac{\sqrt{x(2+x)}}{x+2}\Big)$; **8**. $-\frac{2}{x}-x+\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}-2\arcsin x+C$ $\Big($integrand rozšírte výrazom $1+\sqrt{1-x^2}$; pri výpočte $\int\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$ použite substitúciu $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$,

---

[15] pre $x>0$ by mala byť úprava zrejmá; pre $x<0$ je $\operatorname{sgn}x\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$

[16] použitím substitúcie $\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t$ a rekurentného vzťahu z pr. 16.1 by sme dostali výsledok $-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}-\frac{5}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C$ pre $x\in(0,1)$ $\big(:=F(x)\big)$, hodnotou primitívnej funkcie v bode 0 je potom číslo $\lim\limits_{x\to0+}F(x)$; pozri aj pr. 48

[17] inou možnosťou je rozšíriť integrand výrazom $\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2$, na výpočet integrálu $\int\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$ použiť substitúciu $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ $\left(\frac{\cos^2t}{\sin^4t}=\operatorname{ctg}^2t\cdot\frac{1}{\sin^2t}\right)$ a pri ďalších úpravách rovnosť $\operatorname{ctg}\arcsin x=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, dostaneme tak výsledok v tvare $\frac{3x^2-2-2(1-x^2)^{3/2}}{3x^3}$

alebo integrand rozšírte výrazom $\sqrt{1-x^2}$ a použite postup z pr. 34$\big)$; **9**. $\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt5} - \frac12\sqrt{1+x^2-x^4} + C$; **10**. $\frac12 \ln\left(\frac{x^2\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)}{1+\sqrt{1+x^4}}\right) + C$; **11**. $\frac14 \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right| + \frac{x}{4}\big(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\big) + C$; **12**. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt2}\arcsin x + C$ $\big($integrand rozšírte výrazom $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt2\big)$; **13**. $\frac25\big(x^{5/2}-(x+1)^{5/2}\big)+\frac23\big(x^{3/2}+(x+1)^{3/2}\big)+C$ $\big($integrand rozšírte výrazom $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\big)$;

$\boxed{\mathbf{37}}$ využite integráciu per partes a skutočnosť, že primitívna funkcia k funkcii $\frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ je elementárna $\Big($použitím tretej Eulerovej substitúcie možno $\int \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ previesť na $\int R(t)\,dt$, kde R je racionálna funkcia; funkcia $S(t) := \int R(t)\,dt$ je elementárna, preto aj $S\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ je elementárna funkcia$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{38}}$ **1**. $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C$; **2**. $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x + C$; **3**. $-\frac{\cos^{12} x}{12}+\frac{\cos^{10}x}{5}-\frac{\cos^8 x}{8}+C$ $\big($subst. $\cos x = t\big)$ alebo $-\frac{\sin^{12}x}{12}+\frac{3\sin^{10}x}{10}-\frac{3\sin^8 x}{8}+\frac{\sin^6 x}{6}+C$ $\big($subst. $\sin x = t\big)$; **5**. $\frac{5x}{16}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin^3 2x}{48}+\frac{3\sin 4x}{64}+C$; **6**. $\frac{3x}{128}-\frac{\sin 4x}{128}+\frac{\sin 8x}{1024}+C$;

$\boxed{\mathbf{39}}$ **1**. $I_n = \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}$, $n\neq 1$ $\Big(u' = \frac{1}{\sin^2 x}$, $v = \frac{1}{\sin^{n-2}x}$; iná možnosť: ak do rekurentného vzťahu odvodeného v pr. 16.5 — ten platí pre všetky $n\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ — dosadíme $n=-k$, dostaneme vzťah medzi I_k a $I_{k+2}\Big)$; **2**. $I_n = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$, $n\neq 1$;

$\boxed{\mathbf{40}}$ **1**. $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 4x}{8}+C$; **2**. $\frac12\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+C$; **3**. $\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)-\frac14\cos(x+a-b)-\frac12\cos a\cos(x+b)+C$ $\Big($ak integrand prepíšeme do tvaru $\frac12\big(\cos a-\cos(2x+a)\big)\sin(x+b)\Big)$ alebo $\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)-\frac14\cos(x+a+b)-\frac12\cos x\cos(a-b)+C$ $\Big($ak integrand prepíšeme dotvaru $\sin x\cdot\frac12\big(\cos(a-b)-\cos(2x+a+b)\big)\Big)$; **4**. $\frac32\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}+C$; **5**. $-\frac{3\cos 2x}{16}+\frac{3\cos 4x}{64}+\frac{\cos 6x}{48}-\frac{3\cos 8x}{128}+\frac{\cos 12x}{192}+C$ $\Big($integrnad sme najprv prepísali do podoby $\sin 2x\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)\Big)$;

$\boxed{\mathbf{41}}$ **2**. $F(x)+C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt5}\mathrm{arctg}\left(\frac{3\mathrm{tg}\,(x/2)+1}{\sqrt5}\right)+\frac{k\pi}{\sqrt5}, & \text{ak } x\in\big((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\big),\ k\in\mathbf{Z} \\ \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt5}, & \text{ak } x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z} \end{cases}$$

$\Big($primitívnou funkciou na $\mathbf{R}\setminus\{(2k+1)\pi\,;\,k\in\mathbf{Z}\}$ je $\frac{1}{\sqrt5}\mathrm{arctg}\left(\frac{3\mathrm{tg}\,(x/2)+1}{\sqrt5}\right)+C\Big)$; **3**. $\frac16\ln\left(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\left(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+3\right)^2\right)+C$ [18] $\Big($definičný obor integrandu je $\mathbf{R}\setminus\{k\pi\,;\,k\in\mathbf{Z}\}$; výpočet integrálu $\int\frac{dt}{t(3+t^2)}$ možno zjednodušiť substitúciou $t=\frac1z\Big)$; **4**. $\frac12(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$ $\Big(\sin x\cos x = \frac12[(\sin x +$

---

[18]použitím vzorcov $\cos^2\frac{x}{2}=\frac12(1+\cos x)$, $\sin^2\frac{x}{2}=\frac12(1-\cos x)$ možno výsledok upraviť na tvar $\frac16\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C$

$\cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)] = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \dfrac{1}{2}$; pri výpočte $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ použite substitúciu $x + \dfrac{\pi}{4} = t$ vyplývajúcu z rovnosti $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big)$; **5**. ak $\varepsilon = 1$: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + C$; ak $\varepsilon > 1$: $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{\varepsilon+1}\cos(x/2) + \sqrt{\varepsilon-1}\sin(x/2)}{\sqrt{\varepsilon+1}\cos(x/2) - \sqrt{\varepsilon-1}\sin(x/2)}\right| + C$ [19]; ak $\varepsilon \in (0,1)$: $F(x) + C$, kde $F(x) =$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{2k\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, & \text{ak } x \in \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big),\ k \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, & \text{ak } x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

; **6**. $F(x) + C$, kde $F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(3x/2) + 1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}\,k\pi}{3}, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\dfrac{\pi}{3}, (2k+1)\dfrac{\pi}{3}\right),\ k \in \mathbf{Z} \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}, & \text{ak } x = (2k+1)\dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{42}}$ **1a**) $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x} + C$ $\Bigg(= \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right| + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x} + C$; integrand rozšíriť členom $\sin x\Bigg)$ [20]; **1b**) $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x}\right| + C$ $\Bigg($integrand možno zapísať v tvare $\dfrac{2-\cos^2 x}{2\cos^2 x - 1}\sin x\Bigg)$; **1c**) $\sin x - \dfrac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}\sin x + C$; **1d**) $-2\operatorname{arctg}\sin x + \ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$ $\left(= -2\operatorname{arctg}\sin x + 2\ln\left|\dfrac{\cos x}{1-\sin x}\right| + C\right)$ [21];

2a) $F(x) + C$, kde $F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) - \dfrac{k\pi}{\sqrt{2}}, & \text{ak } x \in \left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbf{Z} \\ \dfrac{\pi}{2}(2k+1)\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), & \text{ak } x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$;

2b) $-\dfrac{\cos x}{a(a\sin x + b\cos x)} + C$ $\Bigg($integrand rozšíriť výrazom $\dfrac{1}{\cos^2 x}$; ak predpis funkcie $F_1(x) = -\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a\operatorname{tg} x + b}$, ktorá je primitívnou k funkcii $f(x) = \dfrac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}$ na množine $D(f)\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\right\}$, rozšírime výrazom $\cos x$, dostaneme predpis spojitej funkcie definovanej na $D(f)\Bigg)$; **2c**) $F(x) + C$,

---

[19] body $x_k := (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sú body odstrániteľnej nespojitosti funkcie $F_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{\varepsilon+1} + \sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{\varepsilon+1} - \sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}(x/2)}\right|$, ktorá je primitívna k funkcii $f(x) = \dfrac{1}{1+\varepsilon\cos x}$ na množine $D(f)\setminus\{(2k+1)\pi\,;\ k \in \mathbf{Z}\}$; ak logaritmovaný zlomok v predpise funkcie F_1 rozšírime výrazom $\cos\dfrac{x}{2}$, dostaneme predpis spojitej funkcie F definovanej na množine $D(f)$; predpis funkcie F možno upraviť na tvar $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\dfrac{\varepsilon + \cos x + \sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|$, ak v ňom logaritmovaný zlomok rozšírime výrazom $\sqrt{\varepsilon+1}\cos\dfrac{x}{2} + \sqrt{\varepsilon-1}\sin\dfrac{x}{2}$

[20] hoci pre $R(-u,v) = -R(u,v)$ očakávame spravidla od nahradenia substitúcie $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ substitúciou $\cos x = t$ zjednodušenie výpočtu, je to v tomto prípade naopak: substitúcia $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ prevedie daný integrál na $\displaystyle\int \frac{1+t^2}{2t}\,dt$ $\left(= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(\frac{1}{t} + t\right)dt = \dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} + C\right)$

[21] vzorec $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$ možno odvodiť z Moivreovej vety „$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, $n \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbf{R}$“, ak ľavú stranu rozpíšeme podľa vzorca $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ a nájdeme reálnu časť tohto komplexného výrazu

kde $F(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{7}}\right)+\dfrac{2k\pi}{\sqrt{7}}, & \text{ak} \quad x\in\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{\sqrt{7}}, & \text{ak} \quad x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z} \end{cases}$; **2d**) $\dfrac{x}{10}+\dfrac{3}{20}\ln\left(\dfrac{(\operatorname{tg}x-3)^2}{\operatorname{tg}^2x+1}\right)+C$ [22]; **2e**) $F(x)+C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x)+\dfrac{k\pi}{\sqrt{3}}, & \text{ak} \quad x\in D(F_1)\cap\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbf{Z} \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{ak} \quad x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z} \end{cases},$$

pričom $F_1(x) = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x+1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}$ $\Big($integrand rozšíriť výrazom $\dfrac{1}{\cos^3 x}$; definičný obor integrandu je $D:=\mathbf{R}\setminus\left\{(4k-1)\dfrac{\pi}{4}\,;\,k\in\mathbf{Z}\right\}$ [23], F_1 je primitívnou funkciou na množine $D\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,;\,k\in\mathbf{Z}\right\}\Big)$ [24];

2f) $\dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|+\dfrac{1}{6}\operatorname{tg}^3x+C$;

43 **1**. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$; **2**. $\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}+C$; **3**. $\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{3\cos^3 x}+C$ $\big($čitateľ integrandu — tj. číslo 1 — možno zapísať v tvare $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$ a integrand potom napísať ako súčet troch zlomkov$\big)$; **4**. $\dfrac{1}{4}\ln(3+4\sin^2 x)+C$; **5**. $F(x)+C$, kde $F(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{ak} \quad x\in D(F_1) \\ 0, & \text{ak} \quad x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z} \end{cases}$, pričom $F_1(x)=\dfrac{2}{9\operatorname{tg}(x/2)+3}$; **6**. $F(x)+C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{(c-a)\operatorname{tg}(x/2)+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}+\dfrac{2k\pi}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}, & \text{ak} \quad x\in\big((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\big),\ k\in\mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}, & \text{ak} \quad x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z} \end{cases}$$

$\Big($definičným oborom integrandu je $\mathbf{R}$: $a\cos x+b\sin x+c=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)+c=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)+c>0$; číslo φ je určené podmienkami $\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)$; **7**. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|+C$; **8**. $F(x)+C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{a}{b}\operatorname{tg}x\right)+\dfrac{k\pi}{|ab|}, & \text{ak} \quad x\in\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbf{Z} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{2|ab|}, & \text{ak} \quad x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z} \end{cases};$$

9. $F(x)+C$, kde

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{\operatorname{tg}x}{4(2+\operatorname{tg}^2x)}+k\pi\right), & \text{ak} \quad x\in\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbf{Z} \\ \dfrac{3(2k+1)\pi}{8\sqrt{2}}, & \text{ak} \quad x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z} \end{cases};$$

---

[22] použitím vzťahu $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2x+1}=\cos^2 x$, $x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, možno výsledok upraviť na tvar $\dfrac{x}{10}+\dfrac{3}{10}\ln|\sin x-3\cos x|+C$, pričom tento predpis uvažujeme len na definičnom obore integrandu (pozri poznámku 2 pred vetou 3)

[23] platí $\sin^3+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(1+\dfrac{\sin 2x}{2}\right)$

[24] použitím substitúcie $x+\dfrac{\pi}{4}=t$ a potom $\operatorname{ctg}t=z$ by sme dostali výsledok v tvare $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)-\dfrac{1}{6}\ln\left(3\operatorname{ctg}^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1\right)+C$

10. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}^2 x}{3\mathrm{tg}^2 x-1}\right|+C$ $\Big($možno použiť substitúciu $\sin^2 x=t$, v prípade substitúcie $\mathrm{tg}\,x=t$ možno na výpočet $\int\frac{dt}{t(1-3t^2)}$ použiť substitúciu $t=\frac{1}{z}\Big)$; **11**. $F(x)+C$, kde

$$F(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,2x}{2}\right)+k\pi\,, & \text{ak}\quad x\in\left((2k-1)\frac{\pi}{4},(2k+1)\frac{\pi}{4}\right),\ k\in\mathbf{Z}\\ \frac{(2k+1)\pi}{2}\,, & \text{ak}\quad x=(2k+1)\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

$\Big(\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=\frac{1}{8}[(1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x)+(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)]=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2x)$, potom subst. $\mathrm{tg}\,2x=t\Big)$; **12**. $\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left(\frac{\sqrt2-\sin 2x}{\sqrt2+\sin 2x}\right)+C$; **13**. $\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}-2\sqrt{\cos x}+C$, $x\in\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; **14**. $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{\sqrt2-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt2+\sqrt{1+\cos x}}+C$;

15. $\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{\sqrt2+\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sqrt2-\sqrt{1+\sin^2 x}}+C$ $\left(=\frac{1}{\sqrt2}\ln\frac{\sqrt2+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}+C\right)$; **16**. $2\sqrt{\mathrm{tg}\,x}+\frac{1}{2\sqrt2}\cdot\ln\frac{\mathrm{tg}\,x-\sqrt{2\mathrm{tg}\,x}+1}{\mathrm{tg}\,x+\sqrt{2\mathrm{tg}\,x}+1}-\frac{1}{\sqrt2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2\mathrm{tg}\,x}+1\right)-\frac{1}{\sqrt2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2\mathrm{tg}\,x}-1\right)+C$, $x\in\{x\in\mathbf{R}\,;\mathrm{tg}\,x>0\}$;

17. $\sqrt2\ln\left(\frac{1+\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\right)+C$, $x\in(0,\pi)$ $\left(1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}\right)$; **18**. $\sqrt2\ln\left(\frac{\sqrt2+\sin(x/2)-\cos(x/2)}{\cos(x/2)+\sin(x/2)}\right)+C$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\text{použite substitúciu } x=t+\frac{\pi}{2}\right)$;

$\boxed{44}$ **1**. $\frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}+C$ $\left(\text{pri úprave výsledku využite rovnosť } \sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}},\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$; **2**. $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C$; **3**. $-\frac{x+3}{2\sqrt{x^2+6x+8}}+\frac{1}{4\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6x+8}-\sqrt2\,(x+3)}{\sqrt{x^2+6x+8}+\sqrt2\,(x+3)}\right|+C$ $\Big($pri úpravách nezabudnite, že $\sqrt{\cos^6\alpha}=|\cos\alpha|^3$; pre $\alpha\in[0,\pi]$ je $\sqrt{\sin^6\alpha}=\sin^3\alpha\Big)$; **4**. $2\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}+C$;

$\boxed{45}$ **1**. $\frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt3}\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt3}+C$; **2**. $\frac{3t^4}{4}-\frac{3t^2}{2}-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\frac{27}{4\sqrt7}\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt7}+C$, kde $t=\sqrt[3]{2+x}$; **3**. $\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)+\frac{\sqrt3}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt3}-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)+C$; **4**. $\ln\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt3}\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt3}+C$; **5**. $-\frac{1}{3}\,\mathrm{sgn}\,x\cdot\ln\left|\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+x^3+x^6}}{|x|^3}\right|+C$ $\left(=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right|+C\right)$; **6**. $\frac{1}{\sqrt2}\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt2\,x}{\sqrt{1-x^2}}+C$ (možno použiť goniometrickú substitúciu; ak ste použili tretiu Eulerovu substitúciu, inšpirujte sa príkladom 26.12); **7**. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+C$;

8. $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-\arcsin\frac{1}{|x-2|}+C$; **9**. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}-x}\right|+\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+C$ $\Big(=\ln\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)+\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+C$; použili sme goniometrickú substitúciu$\Big)$; **10**. $\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2}-2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x+1\right|+\frac{3}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right|+\frac{3}{4\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right)}+C$ $\Big(=\sqrt{1+x+x^2}-2\ln\left|\sqrt{1+x+x^2}+x+1\right|+\frac{3}{2}\ln\left|2\sqrt{1+x+x^2}+2x+1\right|+C$, ak posledný zlomok rozšírime výrazom $2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\Big)$; **11**. $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\dfrac{2x-3}{6+x+\sqrt{15}\,\sqrt{4x-x^2}}\right|+C$ (použili sme tretiu Eulerovu substitúciu); **12**. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2\left(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1}\right)}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}+C$; **13**. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sqrt[3]{\sin x}}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2 x}}{1-\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2 x}}+$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[3]{\sin x}+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[3]{\sin x}-1}{\sqrt{3}}+C$ $\left(=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(1-\sin x)\left(1+\sqrt[3]{\sin x}\right)^3}{(1+\sin x)\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^3}+\right.$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[3]{\sin^2 x}-1}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\sin x}}+C$; pritom sme použili vzorce z pr. I.87.1 a I.62.2, pozri tiež úpravu výsledku v poznámke k riešeniu pr. $23.6\Big)$; **14**. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\dfrac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}+2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1\right)+\right.$ $\left.2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{tg}x}-1\right)\right)+C$, $x\in\{x\in\mathbf{R};\ \operatorname{tg}x>0\}$; **15**. $-\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}+C$; **16**. $\sqrt{2}\operatorname{sgn}(\cos x)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}}{5}+\sqrt{\operatorname{tg}x}\right)+C$, $x\in\{x\in\mathbf{R};\ \operatorname{tg}x>0\}$; **17**. $F(x)+C$, kde $F(x)=$

$$\begin{cases}\dfrac{6}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}+\dfrac{3x}{5}-\dfrac{4}{5}\ln(3+\sin x-2\cos x)+\dfrac{6k\pi}{5}, & \text{ak } x\in\big((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\big),\ k\in\mathbf{Z}\\ \dfrac{(12k+3)\pi}{5}-\dfrac{4}{5}\ln 5, & \text{ak } x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

[25];

18. $F(x)+C$, kde

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{3}+3x, & \text{ak } x\in\left((2k-1)\dfrac{\pi}{4},(2k+1)\dfrac{\pi}{4}\right),\ k\in\mathbf{Z}\\ \dfrac{5(2k+1)\pi}{6}, & \text{ak } x=(2k+1)\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

; **19**. $F(x)+C$, kde $F(x)=$

$$\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{8}}+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)k\pi, & \text{ak } x\in\big((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\big),\ k\in\mathbf{Z}\\ \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, & \text{ak } x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

$\left(\dfrac{1}{6-5\sin x+\sin^2 x}=\dfrac{1}{2-\sin x}-\dfrac{1}{3-\sin x}\right)$; **20**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\cos^2 2x+3+\sqrt{8}}{\cos^2 2x+3-\sqrt{8}}+C$ $\Big(\sin^8 x+\cos^8 x=$ $\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^4+\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^4=\dfrac{1}{2^3}(1+6\cos^2 2x+\cos^4 2x)$, potom subst. $\cos^2 2x=t\Big)$; **21**. $F(x)+C$, kde

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}+\dfrac{k\pi}{\sqrt{2}}, & \text{ak } x\in\left((2k-1)\dfrac{\pi}{4},(2k+1)\dfrac{\pi}{4}\right),\ k\in\mathbf{Z}\\ \dfrac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{ak } x=(2k+1)\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

; **22**. $-2\sin a\cdot\ln\left|\sin\dfrac{x+a}{2}\right|+x\cos a+C$ $\Big($najprv použite vzorce pre $\sin(\alpha\pm\beta)$; potom možno použiť substitúciu $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ [26] alebo túto úvahu: pre dané $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\mathbf{R}$, $\gamma^2+\delta^2>0$, existujú $A,\ B\in\mathbf{R}$ tak, že $\dfrac{\alpha\sin t+\beta\cos t}{\gamma\sin t+\delta\cos t}=A\,\dfrac{\gamma\cos t-\delta\sin t}{\gamma\sin t+\delta\cos t}+B\Big)$; **23**. $\dfrac{\sin x}{x}+C$; **24**. $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{(1-x^2)^{3/2}\arcsin x}{3}+$ C; **25**. $\dfrac{1}{4}\ln^2\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+C$ [27]; **26**. $\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha x}\cos\beta x+\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha x}\sin\beta x+C$; **27**. $\dfrac{xe^x}{2}(\sin x-$

---

[25] to, že definičný obor integrandu je $\mathbf{R}$, zistíme podobne ako v riešení pr. 43.6

[26] pri rozklade na parciálne zlomky treba potom rozlíšiť prípady $\cos\dfrac{a}{2}=0$, $\cos\dfrac{a}{2}\neq 0$

[27] ak ste použili metódu per partes, využite, že na množine $(-1,1)$ — tj. na definičnom obore integrandu — platí $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$\cos x) + \dfrac{e^x}{2}\cos x + C$; **28**. $\dfrac{x^2e^{3x}}{13}(3\cos 2x + 2\sin 2x) - \dfrac{2xe^{3x}}{13^2}(5\cos 2x + 12\sin 2x) + \dfrac{2e^{3x}}{13^3}(46\sin 2x - 9\cos 2x) + C$; **29**. $-\dfrac{e^{-x^2}}{2}(x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6) + C$ (možno použiť metódu neurčitých koeficientov); **30**. $2e^{\sqrt{x}}\big(x^2\sqrt{x} - 5x^2 + 20x\sqrt{x} - 60x + 120\sqrt{x} - 120\big) + C$; **31**. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})}{2} + \dfrac{\cos(2\sqrt{x})}{4} + C$; **32**. $x - 3\ln\Big(\big(e^{(x/6)} + 1\big)\sqrt{e^{x/3} + 1}\Big) - 3\operatorname{arctg} e^{x/6} + C$; **33**. $\ln\dfrac{1 + \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}}{1 - \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}} + C$ $\left(= \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}} + C,\right.$ použili sme substitúciu $\left.\sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}} = t\right.$ [28] $\Big)$; **34**. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\,x\ln^k x + C$ (použili sme rekurentný vzťah $I_n = x\ln^n x - nI_{n-1}$); **35**. $\dfrac{x^4}{128}(32\ln^3 x - 24\ln^2 x + 12\ln x - 3) + C$; **36**. $-\dfrac{1}{8x^2}(4\ln^3 x + 6\ln^2 x + 6\ln x + 3) + C$;

$\boxed{46}$ na výpočet $F'(a)$ pre $a \in M$ použite l'Hospitalovo pravidlo (pozri aj pr. I.384.1);

$\boxed{47}$ platí; využite fakt, že f musí byť ohraničená (pozri pr. I.256.1) a pr. 4;

$\boxed{48}$ uvedieme dva návody: 1. podľa vety 2 existuje spojitá funkcia $G : [a, b] \to \mathbf{R}$ primitívna k funkcii f, pritom podľa vety 1 na intervale (a, b) platí $G(x) - F(x) \equiv$ konšt; 2. existencia príslušných limít vyplýva z rovnomernej spojitosti funkcie F (pozri aj pr. I.255); $F'(a)$, $F'(b)$ možno nájsť použitím l'Hospitalovho pravidla (pozri aj pr. I.384.1);

$\boxed{49}$ **1**. $x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| + C$ $\left(= x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \ln(1 + \cos x) + C\right)$; **2**. $\dfrac{x}{1 + \cos x} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + C$; **3**. $\dfrac{1}{1 + a^2}\ln|a\cos x + \sin x| + \dfrac{x}{1 + a^2}\cdot\dfrac{a\sin x - \cos x}{a\cos x + \sin x} + C$ (výpočet sa urýchli, ak menovateľ integrandu prepíšete na tvar $(a^2 + 1)\cos^2(x - \varphi)$, kde $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ (pozri aj pr. I.31) a použijete substitúciu $x - \varphi = t$); **4**. $\sqrt{2 - \sin^2 x} - \cos x\cdot\ln\left(\cos x + \sqrt{2 - \sin^2 x}\right) + C$; **5**. $x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - 2\sqrt{1 + x^2}\,\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + 2x + C$; **6**. $\dfrac{x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 + 1}} - \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{2} + C$ (na výpočet $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$ možno použiť goniometrickú substitúciu); **7**. $\dfrac{\arcsin x}{2} + x\ln\left(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}\right) - \dfrac{x}{2} + C$; **8**. $\dfrac{x\ln x}{\sqrt{1 + x^2}} - \ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| + C$; **9**. $\dfrac{\ln|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} + \operatorname{sgn} x\cdot\arcsin\dfrac{1}{x} + C$ $\left(= \dfrac{\ln|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} + \arcsin\dfrac{1}{|x|} + C\right)$; **10**. $ax\ln\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| - a\ln|x^2 - 1| + \dfrac{a + b}{4}\ln^2\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| + C$; **11**. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2}{x^2 + 1} - \dfrac{\ln x}{2(1 + x^2)} + C$; **12**. $\dfrac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2}\ln\sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{1}{9}\sqrt{x^2 + 1}\,(x^2 + 7) - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2}}\right| + C$; **13**. $\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{2} + \dfrac{\arcsin x}{2} - \sqrt{1 + x^2}\ln\dfrac{x}{\sqrt{1 - x}} - \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) + C$; **14**. $\dfrac{\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{2(1 - x^2)} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{2}\,x}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{2}\,x}\right| + C$; **15**. $\dfrac{2x^2 - 3}{4}\arcsin(1 - x) - \dfrac{x + 3}{4}\sqrt{2x - x^2} + C$; **16**. $\dfrac{\arcsin^2 x}{4} + \dfrac{x}{2}\sqrt{1 - x^2}\arcsin x - \dfrac{x^2}{4} + C$ (použili sme substitúciu $x = \sin t$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$); **17**. $\dfrac{1}{8}(8x^2 + 24x - 55)\arccos(2x - 3) - \dfrac{2x + 21}{4}\sqrt{-x^2 + 3x - 2} + C$ (odporúčame výpočet začať substitúciou $2x - 3 = t$); **18**. $F(x) + C$, kde $F(x) =$

[28] keby sme použili substitúciu $e^x = t$ a nový integrand napísali v tvare $\dfrac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} - \dfrac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}}$, dostali by sme výsledok v podobe $\ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right) + \arcsin e^{-x} + C$

$\begin{cases} x\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}+2\operatorname{arctg}\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2\,, & \text{ak} \quad x\in[0,1] \\ x\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2+\pi\,, & \text{ak} \quad x\in(1,\infty) \end{cases}$ [29] $\Big($použitím vzťahov $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} = \arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$, $x\in[0,1]$; $\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x} = \arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$, $x\in[1,\infty)$ [30] možno predpis funkcie F upraviť na tvar $F(x)=(x+1)\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}+2|\sqrt{x}-1|\Big)$; **19**. $\dfrac{\arcsin^2 x}{2}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C$ $\big($subst. $\arcsin x = t\big)$; **20**. $x\arcsin^3\dfrac{x}{3}+3\sqrt{9-x^2}\Big(\arcsin^2\dfrac{x}{3}-2\Big)-6x\arcsin\dfrac{x}{3}+C$; **21**. $-\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$; **22**. $\dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$; **23**. $-\dfrac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x-\dfrac{6x+x^3}{9}+C$;

24. $a\Big(x\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big)+\dfrac{b-a}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$ $\left(\dfrac{ax^2+b}{x^2+1}=a+\dfrac{b-a}{x^2+1}\right)$; **25**. $\sqrt{x^2+1}\operatorname{arctg} x-\ln\Big(x+\sqrt{x^2+1}\Big)+C$; **26**. $-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)\operatorname{arctg} x+\dfrac{2}{3}\ln(x^2+1)+C$; **27**. $\dfrac{x^2-1}{4(x^2+1)}\operatorname{arcctg} x-\dfrac{x}{4(x^2+1)}+C$ $\Big($na výpočet $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ možno použiť substitúciu $x=\operatorname{tg} t$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\Big)$; **28**. $\dfrac{(1+x^2)^2}{4}\operatorname{arcctg} x+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^3}{12}+C$; **29**. $\dfrac{2}{\sqrt{x}}(x^2+1)\operatorname{arcctg} x+4\sqrt{x}+C$; **30**. $x-\ln(e^x+1)-2e^{-x/2}\operatorname{arctg} e^{x/2}-(\operatorname{arctg} e^{x/2})^2+C$; **31**. $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x\cdot\ln(1+x^2)-\dfrac{x}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{x^2+3}{2}\operatorname{arctg} x+\dfrac{3x}{2}+C$ $\Big($pri použití metódy per partes $\big(u'=x\,,\ v=\operatorname{arctg} x\cdot\ln(1+x^2)\big)$ zvoľte $u=\dfrac{x^2+1}{2}\Big)$; **32**. $\ln(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{ch} x+1)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{ch} x+1}{\sqrt{3}}+C$ [31]; **33.** ak $a^2\neq b^2$: $\dfrac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x+\dfrac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{ch} x+b\operatorname{sh} x|+C$ $\big($pre dané a_1, b_1, a, $b\in\mathbf{R}$, $a^2-b^2\neq 0$, existujú A, $B\in\mathbf{R}$ tak, že $a_1\operatorname{ch} x+b_1\operatorname{sh} x=A(a\operatorname{ch} x+b\operatorname{sh} x)+B(b\operatorname{ch} x+a\operatorname{sh} x)\big)$; ak $a=\pm b$: $\dfrac{1}{4a}[(a_1\mp b_1)\operatorname{sh} 2x+(b_1\mp a_1)\operatorname{ch} 2x]+\dfrac{1}{2a}(a_1\pm b_1)x+C$ $\big($integrand rozšíriť výrazom $(\operatorname{ch} x\mp\operatorname{sh} x)\big)$; **34**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\sqrt{2}}+C$; **35**. $\operatorname{arctg} x+\dfrac{\operatorname{arctg} x^3}{3}+C$ $\left(\dfrac{x^4+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\dfrac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{x^2}{x^6+1}\right)$; **36**. $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{x^5-5x}{x^5-5x+1}\right|+C$ $\left(\dfrac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}=(x^4-1)\dfrac{(x^5-5x+1)-(x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}\right)$; **37**. $F(x)+C$, kde $F(x)=$

---

[29] funkcia $f(x)=\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ nemá deriváciu v bode 1, preto metódu per partes možno použiť len na intervaloch $[0,1)$ a $(1,\infty)$, takto nájdená funkcia $x\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}+\operatorname{sgn}(x-1)\cdot(2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x})+C$ je primitívna k funkcii f len na $[0,\infty)\setminus\{1\}$

[30] pre $x\in[0,1]$ je $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\in[0,\pi/2]$, preto $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}=\arcsin\big(\sin(2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\big)=\arcsin\big(2\sin(\operatorname{arctg}\sqrt{x})\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{x})\big)=\arcsin\left(2\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$; podobne pre $x\in[1,\infty)$ je $\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\in[0,\pi/2]$ $\big($uvedené rovnosti možno nájsť aj integrovaním funkcie $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, resp. $-\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, ktorá je deriváciou funkcie $\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ na intervale $[0,1)$, resp. $(1,\infty)\big)$

[31] niektoré vzorce pre hyperbolické funkcie nájdete v pr. I.63 a I.64

$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1/x}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}, & \text{ak} \quad x>0 \\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{ak} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1/x}{\sqrt{2}}, & \text{ak} \quad x<0 \end{cases}$; **38**. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}\,x}{x^2-1}\right|+C$ $\Big($integrand rozšírte výrazom $\dfrac{1}{x^2}$ a použite substitúciu $x-\dfrac{1}{x}=t$; pritom neabudnite, že $\sqrt{x^2}=|x|\Big)$; **39**. $-\ln|x|-\dfrac{1}{4x^4}+C$ $\left(x^4+x^{-4}+2=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2\right)$; **40**. $\dfrac{x}{2}+\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}-\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$ (použite najprv substitúciu $x=t^2$, $t\geq 0$); **41.** ak $a-b\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$: $\dfrac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\dfrac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C$ $\Big($využite rovnosť $1=\dfrac{1}{\sin(a-b)}\sin\big((x+a)-(x+b)\big)=\dfrac{1}{\sin(a-b)}\big(\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)\big)\Big)$; ak $a-b=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$: $(-1)^{k+1}\operatorname{ctg}(x+b)+C$; **42**. ak $a=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$: $\dfrac{1}{\sin x}+(-1)^{k+1}\operatorname{ctg}x+C$; ak $a\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$: $\dfrac{1}{\sin a}\ln\left|\dfrac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C$ $\Big($možno postupovať podobne ako v pr. 49.41, ak najprv použijeme vzorec $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\Big)$[32]; **43**. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right|+C$ (použite substitúciu $x=t+\dfrac{\pi}{4}$); **44**. $-\dfrac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\dfrac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|+C$ $\Big(\sin^2 x=\dfrac{1}{5}[(\sin x+2\cos x)(\sin x-2\cos x)+4]$; $\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$, kde $\sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, teda $\operatorname{tg}\varphi=2\Big)$[33]; **45.** ak $\cos a\neq 0$: $-\dfrac{2}{n\cos a}\cdot\dfrac{\cos^n\frac{x+a}{2}}{\sin^n\frac{x-a}{2}}+C$; ak $a=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, k

$in\mathbf{Z}$: $2(-1)^{n-1}\dfrac{\cos x}{1-\sin x}+C$; ak $a=\dfrac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$: $-2\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+C$; **46**. $F(x)+C$, kde $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ak} \quad x<0 \\ \dfrac{4}{3}x^3, & \text{ak} \quad x\geq 0 \end{cases}$ $\Big($teda $F(x)=\dfrac{2}{3}x^2(x+|x|)\Big)$; **47**. $F(x)+C$, kde $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-x}, & \text{ak} \quad x\geq 0 \\ e^x-1, & \text{ak} \quad x<0 \end{cases}$ (teda $F(x)=\operatorname{sgn}x\cdot(1-e^{-|x|})$); **48**. $-\dfrac{[x]\cos\pi x}{\pi}-\dfrac{1}{2\pi}\left(1-(-1)^{[x]}\right)+C$;

50 ak $P_m^{(n-1)}(a)=0$ $\Big($podľa Taylorovho vzorca je $P_m(x)=P_m(a)+P_m'(a)(x-a)+\cdots+\dfrac{P_m^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m\Big)$;

53 **1**. $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$ $\Big($inverzná funkcia k funkcii sh je daná predpisom $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big)$; **2**. $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$; **3**. $\dfrac{1}{8}x(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$ $\Big($inverzná funkcia k funkcii $y=\operatorname{ch}x$, $x\geq 0$, je daná predpisom $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$;

---

[32] použitím substitúcie $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ by sme dostali výsledok

$$-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^a}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{1-\cos a}\,\sin(x/2)-\sqrt{1+\cos a}\,\cos(x/2)}{\sqrt{1-\cos a}\,\sin(x/2)+\sqrt{1+\cos a}\,\cos(x/2)}\right|+C$$

[33] iná možnosť: integrand rozšíriť výrazom $\sin x-2\cos x$, vtedy dostaneme po úpravách výsledok $-\dfrac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\dfrac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2+\sqrt{5}\,\sin x}{1+\sqrt{5}\,\cos x}\right|+C$

kfunkcii $y = -\operatorname{ch} x\,,\ x \geq 0\,,$ predpisom $y = -\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\Big)$;

$\boxed{\textbf{55}}$ ak $a \neq 0\,,\ c \neq 0\,,$ tak substitúcia $\sqrt{ax+b} = t$ prevedie $\displaystyle\int R\big(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\big)\,dx$ na integrál, ktorý možno nájsť použitím Eulerových substitúcií;

$\boxed{\textbf{56}}$ $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 + C\,,\ x > 0\,;\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} - x^3 - C\,, & \text{ak} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{2} - C\,, & \text{ak} \quad x \geq 0 \end{cases}$;

$\boxed{\textbf{57}}$ napr. $f(x) = \begin{cases} \left(\sin\dfrac{1}{x}\right)'\,, & \text{ak} \quad x \neq 0 \\ \quad 0 \quad\,, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$;

$\boxed{\textbf{58}}$ **1.** f je darbouxovská a prostá $\Longrightarrow$ f je rýdzomonotónna a darbouxovská $\Longrightarrow$ f je spojitá a rýdzomonotónna, preto f^{-1} je spojitá a definovaná na intervale; **2.** použite substitúciu $f^{-1}(x) = t\,.$

2. Riemannov určitý integrál

$\boxed{\mathbf{59}}$ nie; napr. $D_n = \Big\{a\,,\ a+\dfrac{b-a}{n}\,,\ a+\dfrac{b-a}{n-1}\,,\ \dots\,,\ a+\dfrac{b-a}{2}\,,\ b\Big\}$ (samozrejme platí ale obrátená implikácia: ak $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(D_n)=0\,,$ tak $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=\infty\,)$;

$\boxed{\mathbf{60}}$ **1.** ak $D_n = \Big\{0\,,\ \dfrac{1}{n}\,,\ \dfrac{2}{n}\,,\ \dots\,,\ \dfrac{3n-1}{n}\,,\ 3\Big\}$, tak $L(x,D_n) = \dfrac{1}{n}\Big(0+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\dots+\dfrac{3n-1}{n}\Big) =$ [1] $\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{(3n-1)3n}{2} = \dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2n}$; $U(x,D_n) = \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\dots+\dfrac{3n}{n}\Big) = \dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2n}$; pretože $\nu(D_n)=\dfrac{1}{n}\to 0$ pre $n\to\infty\,,$ je podľa dôsledku vety 2 $\underline{\int_0^3} x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} L(x,D_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2n}\Big) = \dfrac{9}{2}$; $\overline{\int_0^3} x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2n}\Big) = \dfrac{9}{2}$; pretože $\underline{\int_0^3} x\,dx = \overline{\int_0^3} x\,dx\,,$ je funkcia $f(x)=x$ riemennovsky integrovateľná na intervale $[0,3]$;

2. ak $D_n = \Big\{0\,,\ \dfrac{1}{n},\ \dots\,,\ \dfrac{n-1}{n}\,,\ 1\Big\}$, tak pre $a>1$ je $L(a^x,D_n) = \dfrac{1}{n}(1+a^{1/n}+\dots+a^{(n-1)/n}) = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}$ [2], $U(a^x,D_n) = \dfrac{1}{n}\,a^{1/n}\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}$, $\underline{\int_0^1} a^x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}\Big) = (a-1)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{a^{1/n}-1}{1/n}} = \dfrac{a-1}{\ln a}$ [3]; $\overline{\int_0^1} a^x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{1}{n}\,a^{1/n}\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}\Big) = \dfrac{a-1}{\ln a}$; pre $a=1$ je $L(1,D_n) = U(1,D_n) = 1$; $\underline{\int_0^1} 1\,dx = \overline{\int_0^1} 1\,dx = 1$; pre $a\in(0,1)$ je $L(a^x,D_n) = \dfrac{1}{n}\,a^{1/n}\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}$, $U(a^x,D_n) = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{a-1}{a^{1/n}-1}$, $\underline{\int_0^1} a^x\,dx = \overline{\int_0^1} a^x\,dx = \dfrac{a-1}{\ln a}$;

3. ak $D_n = \Big\{0\,,\ \dfrac{\pi}{2n}\,,\ \dfrac{2\pi}{2n}\,,\ \dfrac{3\pi}{2n}\,,\ \dots\,,\ \dfrac{(n-1)\pi}{2n}\,,\ \dfrac{\pi}{2}\Big\}$ [4], tak $L(\sin,D_n) = \dfrac{\pi}{2n}\Big(\sin 0 + \sin\dfrac{\pi}{2n} + \sin\dfrac{2\pi}{2n} + \dots + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\Big) = \dfrac{\pi}{2n}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}}$ [5]; $U(\sin,D_n) =$

---

[1] použili sme vzorec $1+2+\dots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

[2] použili sme vzorec $1+q+q^2+\dots+q^{n-1} = \dfrac{q^n-1}{q-1}\,,\ q\neq 1$

[3] pripomeňme, že $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{a^u-1}{u} = \ln a\,,\ a>0$

[4] teda interval $\Big[0,\dfrac{\pi}{2}\Big]$ rozdelíme na n intervalov dĺžky $\dfrac{\pi}{2n}$

[5] použili sme vzorec $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\dots+\sin k\alpha = \Bigg(= \dfrac{1}{\sin(\alpha/2)}\Big(\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha+\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin 2\alpha+\dots+\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin k\alpha\Big) = \dfrac{1}{\sin(\alpha/2)}\Big[\dfrac{1}{2}\Big(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{3\alpha}{2}\Big)+\dfrac{1}{2}\Big(\cos\dfrac{3\alpha}{2}-\cos\dfrac{5\alpha}{2}\Big)+\dots+\dfrac{1}{2}\Big(\cos\dfrac{2k-1}{2}\alpha-\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha\Big)\Big]\Bigg) = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\,,\ \alpha\neq 2m\pi\,,\ m\in\mathbf{Z}$

$\dfrac{\pi\left(\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{4n}\right)}{4n\sin\dfrac{\pi}{4n}}$; $\underline{\int_0^{\pi/2}}\sin x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}}{\dfrac{\sin(\pi/4n)}{\pi/4n}} = 1$ [6];

$\overline{\int_0^{\pi/2}}\sin x\,dx = 1$; teda funkcia sin je riemannovsky integrovateľná na intervale $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

4. najprv dokážte, že pre každé delenie D intervalu $[-2,-1]$ platí $L(f,D) = L(x,D)$, $U(f,D) = U(-x,D)$; ak $D_n = \left\{-2,\ -2+\dfrac{1}{n},\ -2+\dfrac{2}{n},\ \dots,\ -2+\dfrac{n-1}{n},\ -1\right\}$, tak $L(f,D_n) = \dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{2n}{n}-\dfrac{2n-1}{n}-\dots-\dfrac{n+1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n^2}((n+1)+\dots+(2n-1)+2n) =$ [7] $-\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{2n(2n+1)}{2}-\dfrac{n(n+1)}{2}\right) = -\dfrac{3n^2+n}{2n^2}$, $U(f,D_n) = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{2n(2n+1)}{2}-\dfrac{n(n+1)}{2}\right) = \dfrac{3n^2+n}{2n^2}$; $\underline{\int_{-2}^{-1}}f(x)\,dx = -\dfrac{3}{2}$, $\overline{\int_{-2}^{-1}}f(x)\,dx = \dfrac{3}{2}$, teda f nie je riemannovsky integrovateľná na intervale $[-2,-1]$;

61 napr. $f(x) = \begin{cases}\alpha, & \text{ak } x\in\mathbf{Q}\cap[0,1]\\ \beta, & \text{ak } x\in[0,1]\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$;

62 **1.** je (f je spojitá na $[-1,1]$); **2.** je (f je monotónna na $[0,1]$; integrovateľnosť f na $[0,1]$ vyplýva aj z toho, že množina $\{1/2^n; n\in\mathbf{N}\}$ jej bodov nespojitosti má Jordanovu mieru nula); **3.** je (na túto funkciu sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6; funkcia $\overline{f} = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x\in(0,1]\\ 0 & \text{ak } x=0\end{cases}$ je monotónna, a teda riemannovsky integrovateľná na intervale $[0,1]$; integrovateľnosť funkcie $\overline{f}$ na $[0,1]$ vyplýva aj z toho, že množina $\{1/n\,;\ n=2,3,\dots\}$ jej bodov nespojitosti má Jordanovu mieru nula [8]); **4.** je (aj na túto funkciu sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6; pre ľubovoľné $A\in\mathbf{R}$ platí: množina $\{0\}\cup\{1/n\,;\ n\in\mathbf{N}\}$ bodov nespojitosti funkcie $\overline{f}_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x\in(0,2]\\ A, & \text{ak } x=0\end{cases}$ má Jordanovu mieru nula, teda $\overline{f}_A$ je riemannovsky integrovateľná na $[0,2]$); **5.** je (množina $\{0\}\cup\{1/n\,;\ n=2,3\dots\}$ bodov nespojitosti funkcie $f|[0,1]$ má Jordanovu mieru nula); **6.** nie je (pre ľubovoľný uzavretý ohraničený interval $I=[a,b]$ je $\underline{\int_a^b}\chi(x)\,dx = 0$, $\overline{\int_a^b}\chi(x)\,dx = b-a$); **7.** nie je ($f$ totiž nie je ohraničená na intervale $[-1,1]$, pozri tiež poznámku za vetou 4);

63 dokážte, že množina $\{x_n\,;\ n\in\mathbf{N}\}$ má Jordanovu mieru nula;

64 použijeme vetu 3; pretože pre ľubovoľné delenie D intervalu $I=[a,b]$ je $L(r,D)=0$, stačí pre každé $\varepsilon>0$ nájsť také delenie D_ε, pre ktoré $U(r,D_\varepsilon)<\varepsilon$; nech je teda dané $\varepsilon>0$; množina $M := \left\{x\in I\,;\ r(x) > \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\right\}$ je konečná, preto existuje konečný počet po dvoch disjunktných podintervalov $I_1,\ \dots,\ I_n$ intervalu I taký, že súčet ich dĺžok je menší než $\dfrac{\varepsilon}{2}$ a $M\subset\bigcup\limits_{i=1}^n I_i$; ak je delenie D intervalu I vytvorené bodmi a, b a koncovými bodmi intervalov $I_1,\ \dots,\ I_n$ (usporiadanými podľa veľkosti), tak $U(r,D)<\varepsilon$ (pre $x\in I_1\cup I_2\cup\dots\cup I_n$ iste platí

---

[6] pripomeňme, že $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$

[7] použili sme vzorec $1+2+\dots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

[8] keby sme namiesto funkcie $\overline{f}$ zvolili funkciu $\overline{f}_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x\in(0,1]\\ A, & \text{ak } x=0\end{cases}$, kde $A\neq 0$ je dané číslo, bola by množinou bodov nespojitosti funkcie $\overline{f}_A$ množina $\{0\}\cup\{1/n\,;\ n=2,3,\dots\}$, ktorá má tiež Jordanovu mieru nula

$r(x) \le 1$ a pre $x \in I \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$ je $r(x) \le \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, preto $U(r,D) \le 1 \cdot d_1 + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\, d_2$, kde d_1 je súčet dĺžok intervalov $I_1, \ldots, I_n$ a d_2 je súčet dĺžok zvyšných intervalov delenia D (zrejme $d_2 \le (b-a)$), preto $U(r,D) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\,(b-a) = \varepsilon \Big)$;

$\boxed{\mathbf{65}}$ **1.** ak $D_n = \Big\{ -1, -\dfrac{n-1}{n}, -\dfrac{n-2}{n}, \ldots, 0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{2n-1}{n}, 2 \Big\}$ a za ξ_i zvolíme vždy ľavý koncový bod príslušného intervalu, tak $S_n = \dfrac{1}{n}\Big[1 + \Big(\dfrac{n-1}{n}\Big)^2 + \cdots + \Big(\dfrac{1}{n}\Big)^2 + 0^2 + \cdots + \Big(\dfrac{2n-1}{n}\Big)^2 \Big] = \dfrac{1}{n^3}[(n^2 + \cdots + 1^2) + (1^2 + \cdots + (2n-1)^2)] = \dfrac{1}{n^3}\Big(\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \dfrac{1}{6}(2n-1)2n(4n-1)\Big)$ [9], $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$;

2. ak $D_n = \Big\{ a, a + \dfrac{b-a}{n}, a + 2\dfrac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1)\dfrac{b-a}{n}, b \Big\}$ a ξ_i zvolíme podľa návodu, tak $S_n = \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{1}{a\left(a + \frac{b-a}{n}\right)} + \dfrac{1}{\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right)} + \cdots + \dfrac{1}{\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\left(a + n\frac{b-a}{n}\right)} \right) = \dfrac{b-a}{n}\left[\dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a + \frac{b-a}{n}} \right) + \dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{1}{a + \frac{b-a}{n}} - \dfrac{1}{a + 2\frac{b-a}{n}} \right) + \cdots + \dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{1}{a + (n-1)\frac{b-a}{n}} - \dfrac{1}{b} \right) \right] = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$;

$\boxed{\mathbf{66}}$ pretože platí $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} \sin 50\xi_k \Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ aj $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \int_0^3 \sin 50x\, dx \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, je $\left| \int_0^3 \sin 50x\, dx - \sum\limits_{k=1}^{n} \sin 50\xi_k \Delta x_k \right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$; stačí teda nájsť $\delta > 0$ tak, aby z nerovnosti $\Delta x_k < \delta$ vyplývalo $M_k - m_k < \dfrac{0.001}{3}$ $(k = 1, \ldots, n)$; f je spojitá na $[x_{k-1}, x_k]$, preto $M_k = \sin 50\eta_k$, $m_k = \sin 50\vartheta_k$ pre niektoré η_k, $\vartheta_k \in [x_{k-1}, x_k]$; podľa Lagrangeovej vety $M_k - m_k = |M_k - m_k| = |\sin 50\eta_k - \sin 50\vartheta_k| = |50 \cos 50c||\eta_k - \vartheta_k| \le 50|\eta_k - \vartheta_k| \le 50\Delta x_k$; preto stačí zvoliť $\delta = \dfrac{0.001}{150}$;

$\boxed{\mathbf{67}}$ **1.** limitovaný výraz je integrálnym súčtom riemannovsky integrovateľnej funkcie f pri delení $D_n = \Big\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, 1\Big\}$, pritom $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $[0,1]$;

$\boxed{\mathbf{68}}$ napr. Dirichletova funkcia χ, ak v každom čiastočnom intervale každého delenia zvolíme za ξ iracionálne číslo;

$\boxed{\mathbf{69}}$ nie je; $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je totiž normálna postupnosť delení;

$\boxed{\mathbf{70}}$ za daných predpokladov možno nájsť normálnu postupnosť integrálnych súčtov $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $S_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$; príkladom sú Dirichletova funkcia χ a funkcia $f(x) \equiv 0$ (alebo

---

[9] použili sme vzorec $\sum\limits_{i=1}^{N} i^2 = \dfrac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$; vzorce pre $\sum\limits_{i=1}^{N} i^k$ $(k \in \mathbf{N})$ možno odvodiť nasledovne: platí $\sum\limits_{i=1}^{N} i^k = P_{k+1}(N)$, kde $P_{k+1}(N) = a_{k+1}N^{k+1} + a_k N^k + \cdots + a_0$ je polynóm stupňa $k+1$; neznáme koeficienty $a_{k+1}, \ldots, a_0$ nájdeme z podmienok $P_{k+1}(N+1) - P_{k+1}(N) = (N+1)^k$, $P_{k+1}(1) = 1$; iné odvodenie pozri napr. v [27, str. 51]

Dirichletova a Riemannova funkcia);

$\boxed{\mathbf{71}}$ napr. $f(x) = \begin{cases} x-a\,, & \text{ak} \quad x \in \mathbf{Q} \\ -(x-a)\,, & \text{ak} \quad x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{72}}$ súčin áno (ak napr. za jednu z funkcií zvolíme $f(x) \equiv 0$ a druhá bude ľubovoľná ohraničená riemannovsky neintegrovateľná funkcia, iným príkladom je súčin Dirichletovej a Riemannovej funkcie [10]); súčet nie;

$\boxed{\mathbf{73}}$ využite rovnosť $\max\{f,g\} = \dfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ a analogickú rovnosť pre $\min\{f,g\}$;

$\boxed{\mathbf{74}}$ nie (príslušný príklad už musíte nájsť sami);

$\boxed{\mathbf{75}}$ stačí dokázať $f(x_0) > 0$ pre niektoré $x_0 \in [a,b]$ a využiť spojitosť funkcie f; z výroku $\forall\, x \in [a,b] \ : \ f(x) \le 0$ by vyplývalo $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le 0$;

$\boxed{\mathbf{76}}$ **1.** nech x_0 je vnútorný bod intervalu $[a,b]$ (v prípade $x_0 = a$, $x_0 = b$ je dôkaz obdobný); iste existujú $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tak, že $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$, pričom $\forall\, x \in O_\delta(x_0) \ : \ f(x) \ge \varepsilon$ (stačí zvoliť napr. $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ a využiť spojitosť funkcie f v bode x_0); z nerovností $\forall\, x \in [a, x_0 - \delta] \ :$ $f(x) \ge 0$, $\forall\, x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \ : \ f(x) \ge \varepsilon$, $\forall\, x \in [x_0+\delta, b] \ : \ f(x) \ge 0$ vyplýva $\displaystyle\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx \ge 0$, $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \ge 2\delta\varepsilon$, $\displaystyle\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx \ge 0$, teda $\displaystyle\int_a^b = \int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^{b} \ge 2\delta\varepsilon > 0$;

$\boxed{\mathbf{77}}$ **1.** vyplýva z nerovnosti $\forall\, x \in (0,\pi) \ : \ 0 < \dfrac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} < \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$ a z tvrdenia pr. 76.2;

$\boxed{\mathbf{78}}$ **1.** druhý; vyplýva to z nerovnosti $\forall\, x \in (0,1) \ : \ e^{-x}\sin x < e^{-x^2}\sin x$ a z tvrdenia pr. 76.2; **2.** (na obidva porovnávané integrály sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6) druhý; vyplýva to z nerovnosti $\forall\, x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \ : \ \dfrac{\sin x}{x} > 0$, z tvrdenia pr. 76.2 a z aditívnej vlastnosti Riemannovho integrálu $\left(\displaystyle\int_0^\pi = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \right)$;

$\boxed{\mathbf{79}}$ označme $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$, potom f^+, f^- sú spojité funkcie (pozri pr. I.228) a $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$; označme $A := \displaystyle\int_a^b f^+(x)\,dx$, $B := \displaystyle\int_a^b f^-(x)\,dx$; ak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ $\Big($postup pre $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le 0$ je obdobný$\Big)$, tak zo zadania vyplýva $A - B = A + B$, teda $B = 0$; odtiaľ na základe pr. 76.1 vyplýva $f^-(x) = 0$ pre všetky $x \in [a,b]$;

$\boxed{\mathbf{80}}$ napr. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, g je Riemannova funkcia;

$\boxed{\mathbf{81}}$ **1.** $\dfrac{45}{4}$; **2.** $\dfrac{\pi}{3}$; **3.** $\dfrac{\pi}{6}$; **4.** 1 $\Big($využite rovnosť $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\alpha} = \operatorname{ch}\alpha\Big)$; **6.** 2 $\Big($pozor: $\sqrt{x^{2/3}} = |x|^{1/3}\Big)$; **7.** ak $b > a \ge 0$: $b - a$; ak $b > 0 > a$: $b + a$; ak $0 \ge b > a$: $a - b$; to možno „naraz“ zapísať v tvare $|b| - |a|$; **8.** $100\sqrt{2}$ $\Big(\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}|\sin x|\Big)$; **9.** $\ln(n!)$ $(= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n)$; **10.** pre $m = n = 0$ a pre $m \ne \pm n$: 0; pre $m = n \ne 0$: π; pre $m = -n \ne 0$: $-\pi$; **12.** $\dfrac{\pi}{2ab}$;

$\boxed{\mathbf{82}}$ **1a)** funkcia $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je neohraničená na $[-1,1] \setminus \{0\}$, teda nemôže byť riemannovsky

---

[10] pozri tiež pr. 165; nie je ťažké dokázať nasledujúce tvrdenie zovšeobecňujúce obidva uvedené príklady: ak $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $g \ge 0$, pričom $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$, a $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia, tak $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ a $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$

integrovateľná na $[-1,1]$[11] $\left(\text{preto symbol } \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx \text{ nemá zmysel}\right)$;

1b) pretože $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \neq 0$, je (v zmysle poznámky 2 za vetou 6) $\int_{-1}^{1} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' dx = \int_{-1}^{1} -\frac{1}{1+x^2}\, dx$, funkcia $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ je primitívna k funkcii $-\frac{1}{1+x^2}$ len na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, preto na $[-1,1]$ nie sú splnené predpoklady vety 11 (tie sú splnené pri nasledujúcom výpočte:

$$\int_{-1}^{1} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' dx = \int_{-1}^{1} -\frac{dx}{1+x^2} = [-\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}\,;$$

pomocou funkcie $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ možno integrál $\int_{-1}^{1} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' dx$ vypočítať nasledovne:

$$\int_{-1}^{1} = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} = \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right]_{-1}^{0} + \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right]_{0}^{1} = -\frac{\pi}{2}\,,$$

pretože na intervale $[-1,0]$, resp. $[0,1]$ sú v tomto prípade splnené všetky predpoklady vety 11);

1c) funkcia $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x)$ je primitívna k funkcii $\frac{1}{1+2\sin^2 x}$ len na $\mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,;\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, teda na intervale $[0,\pi]$ nie sú splnené všetky predpoklady vety 11; tie sú v tomto prípade splnené len na intervaloch $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, preto

$$\int_{0}^{\pi} = \int_{0}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x)\right]_{0}^{\pi/2} + \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} x)\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,;$$

2. $\frac{2}{3}$ $\left(= \left[\frac{1}{1+2^{1/x}}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{1+2^{1/x}}\right]_{0}^{1}\right.$; pri overovaní predpokladov vety 11 v tomto prípade nezabudnite preveriť, či je funkcia $\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)'$ riemannovsky integrovateľná na $[-1,1]$ $\Big)$;

$\boxed{\mathbf{83}}$ **2**. $\frac{1}{p+1}$ $\left(= \int_0^1 x^p\, dx\right)$; **3**. $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$; **4**. $\ln 2$ $\left(= \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\right)$; **5**. 64 $\left(= \int_0^4 x^3\, dx\right)$; **6**. 2 $\left(= \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}\right)$; **7**. $\frac{\pi}{6}$ $\left(= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\right)$; **8**. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$; **9**. $\frac{4}{e}$ $\left(= e^{\int_1^2 \ln x\, dx}\text{, pozri aj pr. 67.2}\right)$; **10**. $\frac{\ln 3}{3}$ $\left(= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2\, dx}{1+x^3}\right)$;

$\boxed{\mathbf{84}}$ **1**. $0.3125 < I_1 < 0.409\,7\overline{2}$; **2**. $0.493\,055\,055 < I_2 < 0.493\,107\,639$; **3**. $0.126\,100\,97 < I_3 < 0.126\,171\,46$;

$\boxed{\mathbf{85}}$ jednotlivé nerovnosti sú dôsledkom tvrdenia z pr. 76.2 a nasledujúcich nerovností: **1**. $\frac{x^{19}}{\sqrt{2}} < \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}} < x^{19}$, $x \in (0,1)$; **2**. $\frac{4}{9}e^x < \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}e^x$, $x \in (0,1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (stačí nájsť maximum a minimum funkcie $(x+1)(2-x)$, $x \in [0,1]$); **3**. $0 < \frac{e^{-5x}}{x+20} < \frac{e^{-5x}}{20}$, $x \in (0,200]$; **4**. $1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $n \geq 1$;

---

[11] funkcia f má hneď dve „chyby“: nie je definovaná v bode 0 a nie je ohraničená, z nich podstatnejšia je v tomto prípade jej neohraničenosť (porovnaj s poznámkou 2 za vetou 6 a poznámkou za vetou 4)

$\boxed{\mathbf{86}}$ $\displaystyle\int_a^b f''(x)\,dx = f'(b) - f'(a) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3}$;

$\boxed{\mathbf{87}}$ ak $M \subset \{a,b\}$, niet čo dokazovať; ak $M \not\subset \{a,b\}$ a $M \setminus \{a,b\} = \{x_1, \dots, x_n\}$, pričom $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, tak $\displaystyle\int_a^b = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \dots + \int_{x_n}^b = [F(x)]_a^{x_1} + [F(x)]_{x_1}^{x_2} + \dots + [F(x)]_{x_n}^b$;

$\boxed{\mathbf{88}}$ **1.** napr. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)$; menej triviálnym príkladom je Riemannova funkcia r (pri dôkaze faktu, že r nemá na $[a,b]$ primitívnu funkciu, využite tvrdenie z poznámky [19] k pr. 57; **2.** nie, napr. $f = F'$, kde $F(x) = \begin{cases} x^{3/2}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ak } x \in (0,1] \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{89}}$ **2.** 0 $\left(= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^0 \frac{dt}{1+t^2}\right)$; **3.** $\dfrac{1}{6}$; **4.** $2 - \dfrac{\pi}{2}$; **6.** $8 + \dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2}$; **7.** $\dfrac{\pi a^4}{16}$; **8.** $\dfrac{\pi}{4}$ $\Big($použite substitúciu $x = a\sin t$ a potom substitúciu $t + \dfrac{\pi}{4} = z$, pritom využite vzorec $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)\Big)$; **9.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$ $\left(= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{\frac{1+\sqrt{50}}{14}}\right)\right)$; **10.** $\dfrac{4}{3}$ $\Big($pozor: $\sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|\Big)$; **11.** $4n$ $\left(\left|\left(\cos\ln\dfrac{1}{x}\right)'\right| = \dfrac{|\sin\ln x|}{x},\ \text{potom subst. } \ln x = t\right)$;

$\boxed{\mathbf{90}}$ **1a)** áno; **1b)** áno; **1c)** áno (všimnite si, že v pr. 90.1a,b, tj. pre $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, resp. pre $t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, ,,prebieha" funkcia $\sin t$ všetky hodnoty medzi 0 a 1 (teda hodnoty $\sin t$ presne ,,vyplnia" interval $[0,1]$, na ktorom chceme integrovať funkciu $\sqrt{1-x^2}$), zatiaľčo v pr. 90.1c je $\sin\left(\left[0, \dfrac{5\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$; predpoklady vety 12 sú splnené vo všetkých troch prípadoch); **2a)** áno; **2b)** nie $\Big($funkcia $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ nie je spojitá na intervale $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] = \sin\left(\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]\right)$, teda nie sú splnené všetky predpoklady vety 12$\Big)$; **3.** nie (neexistuje $\beta \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo $\sin\beta = 3$, teda pri ľubovoľnej voľbe α, β ,,nevyplnia" hodnoty $\sin t$, $t \in [\alpha,\beta]$, interval $[0,3]$);

$\boxed{\mathbf{91}}$ **1.** funkcia $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ nie je definovaná na celom intervale $[0,\pi]$ (a nemožno ju ani ,,spojite dodefinovať" [12]), preto pri uvedenom výpočte nie sú splnené predpoklady vety 12 $\Big($správny je napr. nasledujúci výpočet:

$$\int_0^\pi = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^\pi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad ^{13}\Big);$$

---

[12] vetu 12 možno totiž použiť aj v prípade, keď funkcia φ síce nie je definovaná v konečnom počte bodov intervalu $[\alpha,\beta]$, ale existuje funkcia $\overline{\varphi}\colon[\alpha,\beta] \to \mathbf{R}$ vyhovujúca predpokladom vety 12 (a teda spojitá) taká, že $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pre všetky $x \in D(\varphi)$ (takto možno použiť napr. substitúciu $t = x^3 \sin\dfrac{1}{x}$ na výpočet integrálu $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)' dx$; presnú formuláciu uvedeného tvrdenia a jeho dôkaz prenechávame čitateľovi)

[13] všimnime si, že pri výpočte integrálov $\int_0^{\pi/2}$ a $\int_{\pi/2}^{\pi}$ používame substitúciu $t = \operatorname{tg} x$ len ako substitúciu pre neurčitý integrál (vetu 12 nemožno použiť), musíme sa teda ,,vracať k pôvodnej integračnej premennej"; nebude to potrebné, ak okrem Riemannovho integrálu zavedieme aj Newtonov integrál (pozri poznámku pred odsekom 2.6) alebo nevlastný Riemannov integrál (pozri napr. [1])

2. funkcia $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$ nie je definovaná na celom intervale $[-1, 1]$ (a bod 0 je jej neodstrániteľný bod nespojitosti), preto nie sú splnené predpoklady vety 12 pri uvedenom výpočte;

$\boxed{\mathbf{92}}$ **1**. použite substitúciu $x = \dfrac{1}{t}$; **2**. použite substitúciu $x = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ $\Big($na integrál na pravej aj ľavej strane rovnosti sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6, ako treba dodefinovať funkcie $\dfrac{\operatorname{arctg}}{x}$ a $\dfrac{t}{\sin t}$, aby boli splnené predpoklady vety 12?$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{93}}$ **1**. $\displaystyle\int_{-k}^{k} = \int_{-k}^{0} + \int_{0}^{k}$, na výpočet $\displaystyle\int_{-k}^{0}$ použite substitúciu $x = -t$; **3a**) použite substitúciu $x = \dfrac{\pi}{2} - t$; **3b**) použite substitúciu $x = \pi - t$;

$\boxed{\mathbf{94}}$ **1**. 0 (vyplýva to z tvrdenia pr. 93.1); **2**. $\dfrac{\pi}{2}$ $\Big($využite, že podľa tvrdenia z pr. 93.1 je $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = 0\Big)$; **3**. $\dfrac{\pi^2}{4}$ (použite pr. 93.3b); **5**. a $\Big(\displaystyle\int_{-a}^{a} = \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a}$, na výpočet $\displaystyle\int_{-a}^{0}$ použite substitúciu $x = -t\Big)$; **6**. 1;

$\boxed{\mathbf{95}}$ **1**. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e}{2}$; **2**. $2 - \dfrac{2}{e}$; **3**. $\dfrac{1}{27}(5e^3 - 2)$; **4**. $\dfrac{1}{(n+1)^2}[(n+1)n^{n+1}\ln n - n^{n+1} + 1]$; **5**. $-\dfrac{2}{13}\cdot(e^{-2\pi} + 1)$; **6**. $\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ $\Big($pre funkcie $f(x) = x$, $g(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$ nie sú splnené predpoklady vety 13 — funkcia $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$ nie je definovaná v bode 0 (a nie je ohraničená na $(0, 3]$, teda nemôže byť riemannovsky integrovateľná na $[0, 3]$), napriek tomu $fg' \in \mathcal{R}[0, 3]$ a platí (2.2) z vety 13, zdôvodnenie prenechávame na čitateľa$\Big)$; **7**. 1 $\Big($v tomto prípade nemožno použiť vetu 13, pretože pre $f(x) = x$, $g(x) = \arccos x$ neplatí $fg' \in \mathcal{R}[0, 1]$, symbol $\displaystyle\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx$ teda nemá zmysel; metódu per partes tu možno použiť len pre neurčité integrály [14]$\Big)$; **8**. $\dfrac{\pi^2}{4} - 2$ (na tento príklad sa vzťahuje podobná poznámka ako na pr. 95.7);

$\boxed{\mathbf{96}}$ **2**. $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (rekurentný vzťah $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ možno odvodiť samostatne alebo použiť substitúciu $x = \cos t$ a využiť riešenie pr. 96.1); **3**. $(-1)^n\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{2k-1}$ $\Big(I_n = \dfrac{1}{2n-1} - I_{n-1}\Big)$; **4**. $(-1)^n\dfrac{n!}{(m+1)^{n+1}}$ $\Big($na integrál $I_{m,n}$ $(m, n \in \mathbf{N})$ sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6; rekurentný vzťah $I_{m,n} = -\dfrac{n}{m+1} I_{m,n-1}$ sme odvodili použitím metódy per partes pre neurčitý integrál — funkcie $f'(x) = x^m$, $g(x) = \ln^n x$ totiž nevyhovujú predpokladom vety 13; rovnosť $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x = 0$ možno dokázať použitím l'Hospitalovho pravidla$\Big)$; **5**. $(-1)^{n+1}\ln\sqrt{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\frac{1}{2k}$ $\Big(I_n = -\dfrac{1}{2n} - I_{n-1}\Big)$;

$\boxed{\mathbf{97}}$ na vyjadrenie integrálu $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ použite n–krát za sebou metódu per partes;

$\boxed{\mathbf{98}}$ **1**. $\dfrac{1}{\sin\alpha}\Big(\operatorname{arctg}\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \operatorname{arctg}\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big)$ $\Big(= \dfrac{\pi}{2\sin\alpha}$, ak použijeme vzorec $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\Big)$; **2**. $\ln\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$; **3**. $\dfrac{14}{15}$; **4**. $\dfrac{29}{270}$; **5**. $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;

[14] aj v tomto prípade by sa podobne ako v riešení pr. 91.1 situácia zjednodušila zavedením Newtonovho alebo nevlastného Riemannovho integrálu, pozri tiež riešenie tohto príkladu v poznámke pred odsekom 2.6

6. $\ln\left(2\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-1}\right)$ $\Big($ak ste použili substitúciu $x = \dfrac{1}{t}$, uvedomte si, že $\sqrt{t^2} = -t$ pre $t < 0$; použitím substitúcie $x = \operatorname{tg} t$ dostaneme výsledok v tvare $\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\operatorname{arctg} 1}{2}\right) - \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\Big)$; **7**. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$; **8**. $2\sqrt{2}\,\pi$; **9**. $2\pi\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; **10**. $\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{a^3b^3}$; **11**. 0; **12**. $\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{(m-1)!!}{m!!}$ pre $m \in \mathbf{N}$ párne, $\pi\dfrac{(m-1)!!}{m!!}$ pre $m \in \mathbf{N}$ nepárne; **13**. $\dfrac{\pi}{6}(1+\sqrt{3})$ $\left(= \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}\text{, pritom } \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\pi/6)}{1+\cos(\pi/6)}}\right)$; **14**. $\dfrac{3}{5}(e^\pi - 1)$; **15**. 0; **16**. $\dfrac{1}{4}\pi e^{\pi/2} - \dfrac{1}{2}$; **17**. $2e-5$; **18**. $\dfrac{\pi^2}{16}$; **19**. $\dfrac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$; **20**. $\dfrac{\pi}{4}$ $\Big(\int_{-1}^{1} = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}$, v prvom z integrálov subst. $x = -t$; po úprave vyjde $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\Big)$; **21**. $\operatorname{arctg}\dfrac{32}{27} - 2\pi$ $\Big(= [\operatorname{arctg} f(x)]_{-1}^{0} + [\operatorname{arctg} f(x)]_{0}^{2} + [\operatorname{arctg} f(x)]_{2}^{3}$; nezabudnite preveriť, či je funkcia $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ riemannovsky integrovateľná na $[-1.3]$, na to stačí vyšetriť jej správanie sa v bodoch 0 a 2 (dobre si rozmyslite, prečo)$\Big)$; **22**. $\dfrac{\pi}{3}$ $\Big(= \left[\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right]_{-2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}$, táto rovnosť ovšem nevyplýva bezprostredne z vety 11, ale z pr. 87 $\Big($rozmyslite si, prečo; vypočítajte $\left(\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right)'$ — nezabudnite pritom, že $\sqrt{(1-x^2)^2} = |1-x^2|\Big)\Big)$; **23**. -1; **24**. $-\dfrac{\pi^2}{4}$; **25**. $14 - \ln(7!)$ $(e^2 \approx 7.39)$.

99 podľa vety 11 (uvedomte si, že jej tvrdenie zostane v platnosti aj v prípade $a \geq b$) je $G(x) = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$, kde F je primitívna funkcia k funkcii f (zvlášť si rozmyslite dôkaz rovnosti (2.3) pre $x = \alpha$, $x = \beta$, ak $I = [\alpha, \beta]$, a pre prípady $\varphi(x) = c$, $\varphi(x) = d$, $\psi(x) = c$, $\psi(x) = d$);

100 **1**. $\sin b^2$; **2**. $-\sin a^2$; **3**. 0; **4**. $\sin b^2 - \sin a^2$; **5**. $2(b-a)x\cos x^2$;

101 **1**. $f'(x) = 2x\sqrt{1+x^4}$; **2**. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; **3**. $-\cos(\pi\cos^2 x)\cos x - \cos(\pi\sin^2 x)\cos x$ $(= \cos(\pi\sin^2 x)\cdot(\sin x - \cos x))$;

102 **1.** (globálne) minimum $\dfrac{4}{3} - 15\ln 3 = F(\ln 2)$; **2**. (globálne) minimum $y = -\dfrac{17}{12}$ pre $x = 1$, inflexné body $x = 2$, $x = \dfrac{4}{3}$;

103 **1**. 1 $\Big($rovnosť $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \cos t^2\,dt$, ktorú (okrem iného) musíme overiť pred použitím l'Hospitalovho pravidla, vyplýva zo spojitosti funkcie $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t^2\,dt\Big)$; **2**. $\dfrac{\pi^2}{4}$; **3**. 0 $\Big($pred použitím l'Hospitalovho pravidla tu treba overiť podmienku $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x e^{2x^2}\,dx = \infty$, tá vyplýva z nerovnosti $\displaystyle\int_0^x e^{2x^2}\,dx \geq x$, ktorá je dôsledkom nerovnosti $e^{2x^2} \geq 1$, $x \in [0,\infty)\Big)$;

104 A (použite substitúciu $nx = t$);

105 (predovšetkým si uvedomte, že z podmienky $f \in \mathcal{R}[0,\omega]$ vyplýva riemannovská integrovateľnosť funkcie f na ľubovoľnom uzavretom ohraničenom intervale) **1**. $F(x) = G(x) + K(x-a)$, kde $K = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega f(t)\,dt$, a $G(x) = F(x) - K(x-a)$ je periodická funkcia s periódou ω (ukážte, že tvrdenie pr. 93.2 platí aj za predpokladov uvedených v pr. 105); **2**. ak $K = 0$

(pozri vyjadrenie F v riešení pr. 105.1), tak F je periodická funkcia [15], ak $K \neq 0$, tak $\lim\limits_{x\to\infty} |F(x)| = \infty$, a teda F nemôže byť periodická;

$\boxed{\mathbf{106}}$ **1.** stačí si prezrieť dôkaz tvrdenia a) vety 14 (pozri napr. [24, str. 63]); **2.** vyplýva z pr. 106.1, pretože $\left|\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right| \le L$ pre všetky $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$;

$\boxed{\mathbf{107}}$ **1.** $F'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; **2.** $F'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ $\Big($pri dôkaze prvej z týchto rovností možno postupovať nasledovne: pre $x \in [x_0,b]$ je $F(x) = \displaystyle\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} \overline{f}(t)\,dt$, kde $\overline{f}(t) = \begin{cases} f(t)\,, & \text{ak } \ t \in (x_0,b] \\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(t)\,, & \text{ak } \ t = x_0 \end{cases}$; pre funkciu $\overline{f}$, bod x_0 a interval $[x_0,b]$ sú splnené predpoklady tvrdenia b) vety 14$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{108}}$ využite pr. 107.1;

$\boxed{\mathbf{109}}$ z vety 11 vyplýva: ak existuje primitívna funkcia $\overline{F}:[0,1]\to\mathbf{R}$ k riemannovsky integrovateľnej funkcii $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, tak $\overline{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + C$;

$\boxed{\mathbf{110}}$ **1.** $\dfrac{2}{\pi}$; **2.** $\dfrac{1}{5}$; **3.** $\dfrac{20}{3}$;

$\boxed{\mathbf{111}}$ označme $m := \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M := \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$; uvedené tvrdenie zrejme platí, ak $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$ alebo ak funkcia f je konštantná na intervale $[a,b]$; ďalej iste platí v prípade, keď vnútri intervalu (a,b) leží aspoň jeden z bodov, v ktorých funkcia f nadobúda hodnotu m, a aspoň jeden z bodov, v ktorých f nadobúda hodnotu M (vtedy totiž f — keďže je darbouxovská — musí hodnoty $f(a)$ a $f(b)$, pre ktoré zrejme platí $m \le f(a) \le M$, $m \le f(b) \le M$, nadobúdať aj vnútri intervalu (a,b)); zostáva vyšetriť prípad, keď $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, f je nekonštantná a nadobúda hodnotu m len v niektorom z bodov a, b (prípadne v obidvoch) alebo nadobúda hodnotu M len v niektorom z bodov a, b (prípadne v obidvoch); predpokladajme teda, že $\displaystyle\int_b^a g(x)\,dx > 0$, $f(a) = M$ a $\forall\, x \in (a,b)\ :\ m \le f(x) < M$ (postup v ostatných prípadoch je obdobný); pretože $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$, existujú $c,d \in (a,b)$, $c<d$ tak, že $\forall\, x \in [c,d]\ :\ g(x) > 0$ (pozri pr. 75, resp. 164), súčasne $\forall\, x \in [c,d]\ :\ m \le f(x) < M$; z uvedených nerovností dostávame $\forall\, x \in [c,d]\ :\ mg(x) \le f(x)g(x) < Mg(x)$; z tejto nerovnosti, nerovnosti $\forall\, x \in [a,b]\ :\ mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ a z pr. 76.2 [16] vyplýva $m\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx < M\int_a^b g(x)\,dx$, preto pre číslo μ z vety 15 nemôže platiť $\mu = M = f(a)$; zostalo nám teda ešte uvažovať o hodnote $f(b)$: ak $f(b) \neq m$, $f(b) \neq M$, tak z našich predpokladov vyplýva, že f nadobúda hodnotu $f(b)$ aj vnútri intervalu (a,b) (za týchto predpokladov f musí nadobúdať hodnotu m vnútri (a,b), súčasne $f(a) = M$, ďalej stačí využiť darbouxovskosť funkcie f); ak $f(b) = M$, niet už čo dokazovať; ak $f(b) = m$ a $\forall\, x \in (a,b)\ :\ m < f(x) < M$, možno rovnakým postupom ako predtým dokázať, že pre μ z vety 15 nemôže platiť $\mu = m = f(b)$;

$\boxed{\mathbf{112}}$ integrál je **2.** kladný; **3.** záporný; **4.** kladný $\Big($pozor: pre interval $[0,\pi]$ a funkcie

---

[15]pritom každá perióda funkcie f je aj periódou funkcie F; opačná implikácia nemusí platiť (uvažujte napr. $f = r$, kde r je Riemannova funkcia z pr. 63), nájdenie vzťahu medzi množinou periód funkcie f a množinou periód funkcie F v prípade, že f je spojitá periodická funkcia, prenechávame čitateľovi

[16]tvrdenie pr. 111 zostane v platnosti aj vtedy, keď predpoklad „g je spojitá funkcia“ nahradíme predpokladom „$g \in \mathcal{R}[a,b]$“, na tomto mieste dôkazu musíme potom namiesto pr. 76.2 použiť pr. 162

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$ nie sú splnené predpoklady vety 15 ani tvrdenia z pr. 111 — f je totiž neohraničená na intervale $(0,1]$ [17]; príslušnú nerovnosť možno dokázať podobne ako v poznámke 2 za riešením pr. 112.1$\Big)$; **5**. kladný $\left(\displaystyle\int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} \sin x^2\,dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{2x}(2x\sin x^2)\,dx \right)$; **6.** záporný pre každé $T > \ln\dfrac{\pi}{2}$ $\Big($stačí dokázať $\displaystyle\int_{\ln(\pi/2)}^{T} \cos e^x\,dx < 0$ pre $T = \ln\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k = 1,2,\dots$, a využiť rýdzu monotónnosť funkcie $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(\pi/2)}^{x} \cos e^t\,dt$ na každom z intervalov $\Big[\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi\Big]$, $k = 0,1,2,\dots$ $\Big)$;

113 **2.** 1 $\left(= \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon c_\varepsilon^3 + 1}\right.$, kde $c_\varepsilon \in [0,1]\Big)$; **3**. $f(0)\ln\dfrac{b}{a}$ $\big(c_\varepsilon \in [a\varepsilon, b\varepsilon]$, preto $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon = 0\big)$; **4**. 0 $\Big(\displaystyle\int_0^{\pi/2} = I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon$, pričom $I_1^\varepsilon = \displaystyle\int_0^{\pi/2-\varepsilon/2} \sin^n x\,dx \to 0$ pre $n\to\infty$, $|I_2^\varepsilon| = \left|\displaystyle\int_{\pi/2-\varepsilon/2}^{\pi/2} \sin^n x\,dx\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$; preto platí $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\, N\in\mathbf{N}\ \ \forall\, n > N,\ n\in\mathbf{N}$: $\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx\right|$ $(= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon)$ $< \varepsilon\Big)$ [18];

114 1. riešenie: ak $F\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ je primitívna funkcia k f, tak $F(x) - F(a) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = k(x-a)$, potom $f(x) = F'(x) = (F(a) + k(x-a))' = k$; 2. riešenie: v každom intervale $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ nadobúda f aspoň raz hodnotu k, z toho a zo spojitosti funkcie f vyplýva tvrdenie príkladu;

115 ak $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$, tak $g(x) = 0$ pre všetky $x\in[a,b]$ (pozri pr. 76.1), teda $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ a (2.4) platí pre ľubovoľné $c\in(a,b)$; predpokladajme $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$; ak f je na (a,b) zdola aj zhora neohraničená, tak tam ako hodnoty nadobúda všetky reálne čísla, teda aj číslo $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \Big/ \left(\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx\right)$; ak f je na (a,b) zhora neohraničená, zdola ohraničená a $\displaystyle\inf_{x\in(a,b)} f(x) = m$ (a teda f nadobúda ako hodnoty všetky čísla z intervalu (m,∞)), tak z nerovnosti $\forall\, x\in(a,b)$: $f(x)g(x) \ge mg(x)$ vyplýva $\mu := \left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \Big/ \left(\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx\right) \ge m$, pri dôkaze skutočnosti, že $\mu = f(c)$ pre niektoré $c\in(a,b)$ (zvláštnu pozornosť vyžaduje len prípad $\mu = m$) sa možno inšpirovať úvahami z riešenia pr. 111; postup v ostatných prípadoch, ktoré pre f môžu nastať, je obdobný [19];

---

[17] napriek tomu by nebolo ťažké dokázať, že $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{c}\int_0^\pi \sin x\,dx$ pre niektoré $c\in(0,\pi)$ (všeobecne je to urobené v pr. 115), potom by už bolo možné postupovať rovnako ako v riešení pr. 112.1

[18] pozri tiež pr. 384.2

[19] vhodnou úpravou uvedeného dôkazu získame dôkaz tvrdenia, ktoré dostaneme, ak v pr. 115 predpoklad „g je spojitá funkcia“ nahradíme predpokladom „$g \in \mathcal{R}[a,b]$“; implikáciu $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ vtedy dokážeme nasledovne: $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} f(x_\varepsilon)\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} 0 = 0$, pritom prvá nerovnosť vyplýva z vety 14a), druhá z vety 15 a tretia

$\boxed{116}$ **1.** funkcie g a $\overline{f}$, kde $\overline{f} = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in (a,b) \\ A, & \text{ak } x = a \\ B, & \text{ak } x = b \end{cases}$, vyhovujú predpokladom vety 16;

$\boxed{117}$ **3.** $\displaystyle\int_a^b \sin x^4\,dx = \int_a^b \frac{1}{4x^3}(4x^3 \sin x^4)\,dx$, $0 < a < b$;

$\boxed{118}$ $\displaystyle\left|\int_x^{x^2} \sin e^t\,dt\right| \le \frac{2}{e^x}$ a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$;

$\boxed{119}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - G(c)\int_a^b f'(x)\,dx$, kde $\displaystyle G(x) := \int_a^x g(t)\,dt$ je podľa vety 14 primitívna funkcia k funkcii g; pri ďalších úpravách použite vety 11 a 7;

$\boxed{120}$ **2.** $\dfrac{44}{15}$; **3.** $9.9 - \dfrac{8.1}{\ln 10}$; **4.** $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}$; **5.** $\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **6.** $\sqrt{2} - 1$ $\Big(= \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos y - \sin y)\,dy$, pretože danú množinu možno popísať nerovnosťami $0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}$, $\sin y \le x \le \cos y\Big)$; **7.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ $\Big(\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\left(1 - \dfrac{\sin 2x}{2}\right) \ge 0$ pre $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]\Big)$; **8.** $\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{8}$ $\Big($funkcia $f(x) = \cos \pi x$ je konkávna na $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, funkcia $g(x) = 6x^2 - 5x + 1$ konvexná na $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $f(0) = g(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, preto $f(x) \ge g(x)$ pre všetky $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\Big)$; **9.** πab; **11.** $\dfrac{8}{3}$; **12.** $\dfrac{ab}{6}$; **13.** $\dfrac{\pi}{4}$ $\Big($ak využijeme ekvivalenciu $|y - a| = c \iff (y = a + c \vee y = a - c)$, $c \ge 0$, vidíme, že krivka $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$ je zjednotením grafov funkcií $f_1(x) = \arcsin x + \sqrt{x - x^2}$, $f_2 = \arcsin x - \sqrt{x - x^2}\Big)$; **14.** $\dfrac{1}{2}$ $\Big($uvedená krivka je zjednotením grafov funkcií $f_1 : x = y + 3\sqrt{y} + 2$, $f_2 : x = y - 3\sqrt{y} + 2$, len graf druhej z nich sa pretína s priamkou $x = 0$; útvar, ktorého plošný obsah máme vypočítať, je množina $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,;\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le f_2(y)\}\Big)$; **15.** $6(\pi + \sqrt{3})$ $\Big($daný útvar je na obr. 8, šrafovaním sú vyznačené jeho jednotlivé časti, ktoré možno popísať nerovnosťami typu $a \le y \le b$, $f(y) \le x \le g(y)$; plošný obsah časti daného útvaru ležiacej v 3. a 4. kvadrante sme vypočítali ako rozdiel plošného obsahu polkruhu s polomerom 4 a plošného obsahu nevyšrafovanej časti kruhu $x^2 + y^2 = 16$ ležiacej v 4. kvadrante$\Big)$; **16.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^2 + \dfrac{3a^2}{2}\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \arcsin\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$ $\Big(= a^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3} + \dfrac{3}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$, ak použijeme vzorec z pr. I.87.2$\Big)$;

$\boxed{121}$ $4ab \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\Big(= 4ab \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}$, ak použijeme vzorec $\arcsin x =$[20] $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1, 1)\Big)$;

$\boxed{122}$ **1.** $\dfrac{m-n}{m+n}$; **2.** $4\dfrac{m-n}{m+n}$, ak m, n sú párne; $2\dfrac{m-n}{m+n}$, ak m, n sú nepárne;

---

z implikácie „ak $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $g(x) \ge 0$ pre všetky $x \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$, tak $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx = 0$ pre všetky $\varepsilon \in \left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$"

[20] $= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \arcsin x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin \arcsin x}{\cos \arcsin x}\right) =$

obr. 8.

$\dfrac{m-n}{m+n}$, ak práve jedno z čísel m, n je párne;

$\boxed{\mathbf{123}}$ $\dfrac{9}{4}$;

$\boxed{\mathbf{124}}$ ak $k>0$, $B\equiv(b,kb^2)$, $C\equiv(c,kc^2)$, $c>b$, tak $A\equiv\left(\dfrac{b+c}{2},k\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2\right)$, $P=\dfrac{k}{8}(c-b)^3$;

$\boxed{\mathbf{125}}$ **<u>1</u>.** pre $k=p$ $\Big($závislosť plošného obsahu na čísle k určuje funkcia $P(k)=\dfrac{1}{6}((k-p)^2+4(b-q))^{3/2}\Big)$; **<u>2</u>**. ak ide o normálu v bode $\left(p,\dfrac{p}{2}\right)$ $\Big($v prípade normály v bode $\left(x,\dfrac{x^2}{2p}\right)$, $x>0$, je príslušný plošný obsah $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(x^2+p^2)^3}{px^3}$; z geometrickej interpretácie vyplýva, že stačí uvažovať $x>0\Big)$;

$\boxed{\mathbf{126}}$ **<u>1</u>**. $\dfrac{3}{7}\pi ab^2$; **<u>2</u>**. $\dfrac{\pi h^2b^2}{3a^2}(3a+h)$; **<u>3</u>**. $\dfrac{\pi pqa^2}{p+q}$; **<u>4</u>**. $\dfrac{\pi pqa^2}{q-p}$; **<u>5a</u>**) $\dfrac{16}{15}\pi$; **<u>5b</u>**) $\dfrac{8}{3}\pi$; **<u>6a</u>**) $\dfrac{4}{15}\cdot\pi ab^2$; **<u>6b</u>**) $\dfrac{1}{6}\pi a^2b$; **<u>7</u>**. $36\pi^2$; **<u>8</u>**. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$ $\Big($krivka $x^2-xy+y^2=a^2$ je zjednotením grafov funkcií $f_1(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{4a^2-3x^2}\right)$ a $f_2(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{4a^2-3x^2}\right)$, pritom $f_1(a)=0$, $f_2(-a)=0$, $0\ge f_2(x)\ge f_1(x)$ pre $x\in\left[-\dfrac{2a}{\sqrt{3}},-a\right]$, $|f_2(x)|\le|f_1(x)|$ pre $x\in[-a,0]$, $|f_2(x)|\ge|f_1(x)|$ pre $x\in[0,a]$, $f_2(x)\ge f_1(x)\ge 0$ pre $x\in\left[a,\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right]$; teleso, ktorého objem hľadáme, je teda zjednotením telies, ktoré vzniknú rotáciou okolo osi Ox množín popísaných nasledujúcimi nerovnosťami: $-\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\le x\le -a\wedge|f_2(x)|\le y\le|f_1(x)|$; $-a\le x\le 0\wedge 0\le y\le|f_1(x)$; $0\le x\le a\wedge 0\le y\le|f_2(x)|$; $a\le x\le\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\wedge f_1(x)\le y\le f_2(x)\Big)$; **<u>9</u>**. $\dfrac{\pi}{20}(6\pi+5\sqrt{3})$ $\Big($uvedené krivky sa pretínajú v bodoch $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)\Big)$; **<u>10</u>**. $\dfrac{\pi^3}{2}$; **<u>11</u>**. $\pi a^3\ln 2$; **<u>12</u>**. $48\pi-\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\pi^2$ $\Big($na výpočet $\displaystyle\int x^2\sqrt{\frac{3+3x}{3-x}}\,dx$ možno použiť substitúciu $\sqrt{3-x}=t$ a potom metódu neurčitých koeficientov, pozri text pred pr. 33$\Big)$; **13**. $\pi^3+4\pi \quad \left(=\pi\int_{-1}^{1}\left[\pi^2-\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)^2\right]dx\right)$;

$\boxed{\mathbf{127}}$ $2\pi^2a^2b$;

$\boxed{\mathbf{128}}$ $\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2) \quad \left(=\pi\int_0^h\left(r+\frac{R-r}{h}\,x\right)^2dx\right)$;

$\boxed{\mathbf{129}}$ $\frac{\pi hr^2}{2}$;

$\boxed{\mathbf{130}}$ $\frac{\pi hD^2}{8} \quad \left(\text{ak } f_1(x)=k_1\left(x^2-\frac{D^2}{4}\right),\ f_2(x)=k_2\left(\frac{D^2}{4}-x^2\right),\right.$ kde $k_1>0$, $k_2>0$, tak $h=\frac{D^2}{4}(k_1+k_2)$, $\left.V=2\pi\int_0^{D/2}\left(xk_1\left(\frac{D^2}{4}-x^2\right)+xk_2\left(\frac{D^2}{4}-x^2\right)\right)dx\right)$;

$\boxed{\mathbf{131}}$ $\frac{16}{15}\,\pi ah^2$;

$\boxed{\mathbf{132}}$ **1**. $\frac{8}{27}(\sqrt{1000}-1)$; **2**. $p\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}+\sqrt{2x_0}\,\sqrt{p+2x_0}$ $\left(=\int_{-\sqrt{2px_0}}^{\sqrt{2px_0}}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy\right)$; **3**. $\frac{e^2+1}{4}$; **4**. $2a\ln\frac{a}{a-x_0}-x_0$; **5**. $e-1$; **6**. $\frac{a^2}{2}+a$; **7**. $a\ln\frac{a}{b}$; **8**. $2\sqrt{2}(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})$; **9**. $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$; **10**. $\frac{25}{3}$; **11**. $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$; **12**. $\arcsin\frac{3}{4}$; **13**. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin a}{1-\sin a} \quad \left(=\ln\frac{1+\sin a}{\cos a}=\ln\frac{\cos(a/2)+\sin(a/2)}{\cos(a/2)-\sin(a/2)}=\ln\frac{1+\operatorname{tg}(a/2)}{1-\operatorname{tg}(a/2)}=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\right)$; **14**. $2+2\ln\frac{3}{2}$; **15**. $\frac{\pi+1}{4}$ $\Big($pozor: $\sqrt{x^4-6x^2+9}=3-x^2$ pre $x\in[0,1]\Big)$; **16**. $2a\left(2+\sqrt{3}\ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) \quad \left(=4a\left(1+\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)=2\int_0^{5a/3}a\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}\cdot\frac{dx}{2a-x}\right)$; **17**. $6a \quad \Big(=8\int_{a/\sqrt{8}}^{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{1/3}dx$; daná krivka je súmerná podľa osí $x=\pm y$, $x=0$, $y=0$, stačí preto vypočítať dĺžku krivky $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$, $x\in\left[\frac{a}{\sqrt{8}},a\right]$ [21]; dĺžku krivky $(f(x)=)\ \ y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$, $x\in[0,a]$, nemožno počítať na základe vety 19, pretože f nemá v bode 0 konečnú deriváciu [22];

$\boxed{\mathbf{133}}$ $4 \quad \left(1+\cos t=2\cos^2\frac{t}{2}\right)$;

$\boxed{\mathbf{134}}$ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$ (krivky sa pretínajú v bodoch $(1,1)$ a $(-1,1)$; ak chceme na výpočet dĺžky krivky $y^3=x^2$, $x\in[0,1]$, použiť vetu 19, musíme jej predpis zapísať v podobe $(f(y)=)\ \ x=y^{3/2}$, $y\in[0,1]$, funkcia $g(x)=x^{2/3}$, $x\in[0,1]$ (ktorej grafom je tiež uvedená krivka) nemá totiž konečnú deriváciu v bode 0);

$\boxed{\mathbf{135}}$ $7a \quad \Big(x$–ové súradnice priesečníkov sú riešením rovnice $\left(y^{2/3}=\right)\ x^{2/3}-a^{2/3}=\frac{3}{\sqrt{10}}\,a^{1/3}x^{1/3}\Big)$;

$\boxed{\mathbf{136}}$ $N\equiv\left(m-a\operatorname{th}\frac{m}{a},\frac{a}{\operatorname{ch}(m/a)}\right)$, ak $M\equiv\left(m,a\operatorname{ch}\frac{m}{a}\right)$;

$\boxed{\mathbf{137}}$ použite substitúciu $x=f^{-1}(t)$, potom (podľa vety o derivácii inverznej funkcie) je $f'(x)=\frac{1}{(f^{-1})'(t)}$; z predpokladov ďalej vyplýva, že f je rastúca (pozri pr. I.239), a preto $f'(x)\geq 0$

---

[21] to je časť danej krivky ležiaca v uhle AOB, kde $A\equiv(0,1)$, $O\equiv(0,0)$, $B\equiv(1,0)$

[22] pozri tiež pr. 423.2

pre $x \in [a,b]$ (a teda aj $(f^{-1})'(t) \geq 0$ pre $t \in [f(a), f(b)]$;

$\boxed{\mathbf{138}}$ **1**. $\dfrac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13} + \ln\dfrac{11+3\sqrt{13}}{2}\right)$; **2**. $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,) + \pi\ln\dfrac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}$; **3a**) $\dfrac{2\pi}{3}\cdot \left(\sqrt{2px_0+p^2}\,(2x_0+p) - p^2\right)$ $\left(= 2\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2px_0}} y\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy \right)$[23]; **3b**) $\dfrac{\pi}{4}\Bigg((4x_0+p)\cdot \sqrt{2x_0}\,\sqrt{2x_0+p} - p^2\,\ln\dfrac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{2x_0+p}}{\sqrt{p}}\Bigg)$; **4**. $2\pi a(a-b)$; **5**. $\dfrac{\pi a^2}{8}(7\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2}\,))$; **6**. $\pi\left(\ln\dfrac{a^2+\sqrt{a^4+1}}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{a^4+1}}{a^2}\right)$; **7**. $\dfrac{\pi}{6}(16\ln 3 - 9\ln 2 - 5)$ (pozor: $\ln(x-\sqrt{x^2-1}\,) < 0$ pre $x > 1$); **8**. $\dfrac{\pi}{16}\left(e^4 - \dfrac{1}{e^4} - \dfrac{8}{e^2}\right)$ $\left(\text{nezabudnite preveriť, či } x^2 - 2\ln x \geq 0 \text{ pre } x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]\right)$; **9**. $\dfrac{\pi a^2}{6}(11-9\sqrt{3}\,) + \dfrac{\pi^2 a^2}{3}(2\sqrt{3}-1)$; **10**. $\dfrac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$;

$\boxed{\mathbf{139}}$ $\dfrac{2\pi a^2}{9}(20 - 9\ln 3)$ $\left(= 2\pi\displaystyle\int_{-a\ln 3}^{a\ln 3}\left(\frac{5a}{3} - a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\right)\sqrt{1+\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}\,dx\right)$;

$\boxed{\mathbf{140}}$ $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{2}}(4-\pi)$ $\Big($počítali sme plošný obsah množiny, ktorá vznikne rotáciou oblúka kružnice $x^2+y^2=a^2$ od bodu $A_1 \equiv \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ po bod $A_2 \equiv \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ okolo spojnice bodov A_1 a $A_2\Big)$;

$\boxed{\mathbf{141}}$ $\dfrac{\pi R}{6h^2}((4h^2+R^2)^{3/2} - R^3)$;

$\boxed{\mathbf{142}}$ $a = 0$, $S(0) = 4\pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}\,))$ $\Big($treba nájsť globálne minimum funkcie $S(a) = 2\pi\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x - a|\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx =$

$$= \begin{cases} 4\pi\left(\displaystyle\int_0^{\pi}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx - a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\right), & \text{ak } a \leq -1 \\ 4\pi\left(a\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx - \int_0^{\pi}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\right), & \text{ak } a \geq 1 \\ 4\pi\Big(\displaystyle\int_0^{\arccos a}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx \\ \quad - a\displaystyle\int_0^{\arccos a}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx + a\int_{\arccos a}^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx - , & \text{ak } a \in (-1,1) \\ \displaystyle\int_{\arccos a}^{\pi}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\Big) \end{cases} ;$$

funkcia S je spojitá, rastúca (a lineárna) na $[1,\infty)$, klesajúca (a lineárna) na $(-\infty,-1]$, stačí teda zistiť jej priebeh na $(-1,1)$; $(S|(-1,1))'(a) = \displaystyle\int_{\arccos a}^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx - \int_0^{\arccos a}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$

[23]počítali sme plošný obsah množiny M, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie $f(y) = \dfrac{y^2}{2p}$, $y \in [0, \sqrt{2px_0}\,]$, okolo osi Ox (a použili sme teda vetu 20b); výpočtom integrálu $2\pi\displaystyle\int_0^{x_0} g(x)\sqrt{1+g'^2(x)}\,dx$, kde $g(x) = \sqrt{2px}$, $x \in [0, x_0]$ (rotáciou grafu funkcie g okolo osi Ox vznikne tá istá množina M) by sme síce dostali to isté číslo, ale — pretože funkcia g nevyhovuje predpokladom vety 20a (nemá konečnú deriváciu v bode 0) — veta 20a nás neoprávňuje tvrdiť, že číslo $2\pi\displaystyle\int_0^{x_0} g(x)\sqrt{1+g'^2(x)}\,dx$ je plošným obsahom množiny M

(použili sme vetu o derivácii súčinu a pr. 99), graf funkcie $g(x) = \sqrt{1+\sin^2 x}$, $x \in [0,\pi]$, je súmerný podľa priamky $x = \dfrac{\pi}{2}$, preto $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} g(x)\,dx$, z kladnosti funkcie g vyplýva $\displaystyle\int_0^c g(x)\,dx \ \left(= \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{c} \right) > \int_c^{\pi} g(x)\,dx \ \left(= \int_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{c} \right)$ pre $c \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\displaystyle\int_0^c g(x)\,dx < \int_c^{\pi} g(x)\,dx$ pre $c \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; teda pre $a \in (-1,0)$ je $S'(a) < 0$, pre $a \in (0,1)$ je $S'(a) > 0$; preto funkcia S nadobúda globálne minimum v bode $0\Big)$;

143 pozri návod k pr. 137;

150 **2.** pozri pr. 70;

151 pre každé $n \in \mathbf{N}$ existujú integrálne súčty $S_n^{(1)}$ a $S_n^{(2)}$ funkcie f pri delení D_n také, že $0 \le U(f,D_n) - S_n^{(1)} \le \dfrac{1}{n}$, $0 \le S_n^{(2)} - L(f,D_n) \le \dfrac{1}{n}$; z toho a z predpokladov tvrdenia potom vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} L(f,D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} U(f,D_n)$, ďalej pozri dôsledok vety 2;

152 „a) $\Longrightarrow$ b)“: pre $\eta = \varepsilon\lambda$ existuje delenie $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ také, že $\varepsilon\lambda = \eta > U(f,D_n) - L(f,D_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i = \sum{}' + \sum{}'' \ge \sum{}'' \ge \lambda d$, kde $\sum''$ je súčet tých sčítancov, pre ktoré $\omega(f,[x_{i-1},x_i]) \ge \lambda$;

„b) $\Longrightarrow$ a)“: ak $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ vyhovuje predpokladom tvrdenia b), tak $\Delta_D := U(f,D) - L(f,D) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_1])\Delta x_i = \sum{}' + \sum{}'' \le \lambda(b-a) + \omega(f,[a,b])\varepsilon$, kde $\sum'$, $\sum''$ majú ten istý význam ako predtým; vhodnou voľbou λ, ε vieme dosiahnuť platnosť nerovnosti $\Delta_D < \eta$ pre vopred zadané $\eta > 0$;

153 (nezabudnite dokázať, že funkcia $g_h(x) := |f(x+h) - f(x)|$ je pre dostatočne malé h integrovateľná na $[\alpha,\beta]$) predpokladajme $h > 0$ (pre $h < 0$ je dôkaz obdobný); pre dané $h \in (0, b-\beta)$ existuje delenie $D_h = \{x_0, \ldots, x_n\}$ intervalu $[\alpha,\beta]$ také, že $h \le \nu(D_h) \le 2h$; predpokladajme, že n je párne číslo (pre n nepárne sú úvahy rovnaké, len treba zvoliť iné označenia), označme $x_{n+1} := x_n + h$, $\Delta x_{n+1} := x_{n+1} - x_n$, $D_1 := \{x_0, x_2, x_4, \ldots, x_n\}$, $D_2 := \{x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}\}$, nech D_a, resp. D_b je delenie intervalu $[a,\alpha]$, resp. $[\beta+h, b]$ také, že $\nu(D_a) \le 2h$, $\nu(D_b) \le 2h$, a nech delenie D_h^* intervalu $[a,b]$ je vytvorené deliacimi bodmi delení D_a, D_1, D_2, D_b (zrejme $\nu(D_h^*) \le 2h$); potom $0 \le \displaystyle\int_\alpha^\beta g_h(x)\,dx \le U(g_h, D_h) \le \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1}, x_i + h])\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_{i+1}])\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_{i+1}])(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) = (U(f,D_1) - L(f,D_1)) + (U(f,D_2) - L(f,D_2)) \le 2(U(f,D_h^*) - L(f,D_h^*))$; z vety 2 vyplýva: pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé delenie D intervalu $[a,b]$, pre ktoré $\nu(D) \le \delta$, platí $|U(f,D) - L(f,D)| < \varepsilon$; z toho a z predchádzajúcej nerovnosti vyplýva $\lim\limits_{h\to 0+} \displaystyle\int_\alpha^\beta g_h(x)\,dx = 0$;

154 nepriamo; využijeme pritom tvrdenie: ak $f \in \mathcal{R}(I)$, tak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ existuje uzavretý interval $I^* \subset I$, ktorého dĺžka je menšia ako δ a $\omega(f,I^*) < \varepsilon$ (vyplýva to z dôsledku vety 2 uvedeného v závere riešenia pr. 153 a z nerovnosti $\omega(f,J) \le \omega(f,K)$, ak $J \subset K \subset I$); nech teda $f \in \mathcal{R}[a,b]$, potom $f \in \mathcal{R}[a + \frac{b-a}{4}, b - \frac{b-a}{4}]$ a existuje interval $[a_1,b_1] \subset \left[a + \dfrac{b-a}{4}, b - \dfrac{b-a}{4}\right]$ tak, že $b_1 - a_1 < 1$ a $\omega(f,[a_1,b_1]) < 1$; podobne dostaneme interval $[a_2,b_2] \subset \left[a_1 + \dfrac{b_1-a_1}{4}, b_1 - \dfrac{b_1-a_1}{4}\right]$ taký, že $b_2 - a_2 < \dfrac{1}{2}$, $\omega(f,[a_2,b_2]) < \dfrac{1}{2}$, atď; nech

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$; ukážte, že c je vnútorný bod každého intervalu $[a_n,b_n]$, $n\in\mathbf{N}$, a že z rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty}\omega(f,[a_n,b_n])=0$ vyplýva spojitosť funkcie f v bode c;

155 použijeme vetu 3, nech $\eta>0$, $\vartheta>0$; pre každé $x\in[0,1]\setminus\mathbf{Q}$ existuje jeho δ–okolie $O(x)\subset[0,1]$ také, že $\omega(f,[x-\delta,x+\delta])<\eta$; množinu $[0,1]\cap\mathbf{Q}$ zoraďme do prostej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pre $x=a_n$ označme $O(x):=\left(x-\dfrac{\vartheta}{2^{n+1}},x+\dfrac{\vartheta}{2^{n+1}}\right)$; z otvoreného pokrytia $\{O(x)\,;\,x\in[0,1]\}$ kompaktu $[0,1]$ vyberme konečné podpokrytie $O(x_1)$, ..., $O(x_n)$, nech delenie D intervalu $[0,1]$ je vytvorené deliacimi bodmi 0, 1 a tými krajnými bodmi intervalov $O(x_1)$, ..., $O(x_n)$, ktoré ležia v $[0,1]$; potom $U(f,D)-L(f,D)<\eta+\vartheta\cdot\omega(f,[0,1])$ $\Bigl($pre $I=(a,b)$ označme $\overline{I}:=[a,b]$, $|I|:=b-a$; každý čiastočný interval delenia D je podmnožinou niektorého z intervalov $\overline{O(x_1)}$, ..., $\overline{O(x_n)}$, nech I_1, ..., I_k sú tie čiastočné intervaly delenia D, ktoré sú podmnožinou aspoň jedného intervalu $\overline{O(x_i)}$ takého, že $x_i\notin\mathbf{Q}$, nech I_{k+1}, ..., I_m sú zvyšné čiastočné intervaly delenia D; potom $U(f,D)-L(f,D)=\sum'+\sum''$, kde $\sum':=\sum\limits_{i=1}^{k}\omega(f,\overline{I_i})|I_i|<\eta\cdot(|I_1|+\cdots+|I_k|)\le\eta\cdot1$; $\sum'':=\sum\limits_{i=k+1}^{m}\omega(f,\overline{I_i})|I_i|\le\omega(f,[0,1])\cdot(|I_{k+1}|+\cdots+|I_m|)\le\omega(f,[0,1])\cdot\sup\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\vartheta}{2^i}\,;\,n\in\mathbf{N}\right\}=\omega(f,[0,1])\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\vartheta}{2^i}=\vartheta\cdot\omega(f,[0,1])\Bigr)$[24];

156 stačí dokázať implikáciu „ak B je ohraničená množina a množina B' má Jordanovu mieru nula, tak aj B má Jordanovu mieru nula“;

157 z konvexnosti funkcie f vyplýva nerovnosť (pozri pr. I.453) $f\left(\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)\le\dfrac{1}{n}f\left(g\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)+\cdots+\dfrac{1}{n}f\left(g\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$, pre $n\to\infty$ konverguje pravá, resp. ľavá strana tejto nerovnosti k pravej, resp. ľavej strane nerovnosti (2.7) (využite pr. I.458, nezabudnite dokázať, že $f\circ g\in\mathcal{R}[0,1]$);

158 zvoľte $g=f$ a využite pr. 76.1;

159 pre dané $\varepsilon>0$ existuje interval $[a_\varepsilon,b_\varepsilon]\subset[a,b]$ taký, že $\forall\,x\in[a_\varepsilon,b_\varepsilon]\,:\,M-\varepsilon\le f(x)$, kde $M:=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$; z toho vyplýva

$$[(M-\varepsilon)^n(b_\varepsilon-a_\varepsilon)]^{1/n}\le\left(\int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon}f^n(x)\,dx\right)^{1/n}\le\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n}\le[M^n(b-a)]^{1/n}\,,$$

pritom $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_\varepsilon-a_\varepsilon}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b-a}=1$, preto $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbf{N}\ \ \forall n>N,\ n\in\mathbf{N}\ :$ $\left|\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n}-M\right|<\varepsilon$;

160 nech f nie je identicky nulová; potom f musí aspoň raz zmeniť na intervale $[0,\pi]$ znamienko $\left(\text{pretože }\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=0\right)$; ďalej sporom: nech f zmení na $[0,\pi]$ znamienko len

[24] Riešenie pr 154 a 155 by sa podstatne zjednodušilo použitím *Lebesguovho kritéria riemannovskej integrovateľnosti: Ohraničená funkcia* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *je riemannovsky integrovateľná na* $[a,b]$ *práve vtedy, keď pre každé* $\varepsilon>0$ *existuje najviac spočítateľný systém ohraničených intervalov* $\{(a_i,b_i)\,;\,i\in J\}$ *(kde* $J=\{1,2,\dots,n\}$ *alebo* $J=\mathbf{N}$*) taký, že* $\sup\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}(b_i-a_i)\,;\,k\in J\right\}<\varepsilon$ *a* $M\subset\bigcup\limits_{i\in J}(a_i,b_i)$, *kde* M *je množina bodov nespojitosti funkcie* f (pozri aj [24, str. 157-158]).

raz, a to v bode $a \in (0,\pi)$, potom $0 \neq \int_0^\pi f(x)\sin(x-a)\,dx = \cos a \cdot \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx - \sin a \cdot \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = 0$, čo je spor;

$\boxed{\mathbf{161}}$ uvedieme dve riešenia: 1. nepriamo, nech $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ $\Big($potom $\int_c^d f(x)\,dx = 0$ pre každé $a \le c < d \le b\Big)$; využijeme tvrdenie „ak $f(x) \ge 0$ pre všetky $x \in [\alpha,\beta]$ a $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$, tak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje interval $[\alpha_1,\beta_1] \subset [\alpha,\beta]$ taký, že $\forall\, x \in [\alpha_1,\beta_1] \,:\, f(x) < \varepsilon$" (vyplýva to z pr. 152); $\int_a^b f(x)dx = 0$, preto existuje $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ tak, že $\forall\, x \in [a_1,b_1] \,:\, 0 \le f(x) < 1$; $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = 0$, preto existuje $[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$ tak, že $\forall\, x \in [a_2,b_2] \,:\, 0 \le f(x) < \frac{1}{2}$, atď, pre $c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i,b_i]$ potom platí $f(c) = 0$;

2. z pr. 154 vyplýva, že f je spojitá aspoň v jednom bode $x_0 \in [a,b]$, ďalej možno postupovať ako v riešení pr. 76.1;

$\boxed{\mathbf{163}}$ keby to nebola pravda, bol by každý dolný integrálny súčet funkcie f na intervale $[a,b]$ rovný nule;

$\boxed{\mathbf{164}}$ pozri pr. 70; ak N nie je hustá v $[a,b]$, tak existuje $x_0 \in [a,b]$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $N \cap O_\varepsilon(x_0) = \emptyset$;

$\boxed{\mathbf{165}}$ z pr. 154 vyplýva, že f je spojitá aspoň v jednom bode $x_0 \in [a,b]$, preto existuje interval $[a_1,b_1]$, na ktorom f nemení znamienko, nech napr. $\forall\, x \in [a_1,b_1] \,:\, f(x) > 0$; podľa pr. 163 existuje interval $[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$ taký, že $\inf\limits_{x\in[a_2,b_2]} f(x) > 0$, funkcia $f\chi$ potom nie je spojitá v žiadnom bode intervalu $[a_2,b_2]$, preto podľa pr. 154 $f\chi \notin \mathcal{R}[a_2,b_2]$, ďalej pozri vetu 7 [25];

$\boxed{\mathbf{166}}$ z konkávnosti f vyplýva $f(x) \ge g(x)$ pre $x \in [a,b]$, kde grafom g je spojnica bodov $[a,f(a)]$, $[b,f(b)]$; potom $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$; ďalej pre každé $\xi \in [0,b-a]$ je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+\xi}{2} + \frac{b-\xi}{2}\right) \ge \frac{1}{2}(f(a+\xi) + f(b-\xi))$, preto $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{1}{2}\left(\int_0^{b-a} f(a+\xi)\,d\xi + \int_0^{b-a} f(b-\xi)\,d\xi\right) = \int_a^b f(x)\,dx$ (v prvom integráli subst. $a+\xi = t$, v druhom $b-\xi = z$);

$\boxed{\mathbf{167}}$ uvedieme dva návody: 1. využite nerovnosť $(f')^2 \ge 2f' - 1$; 2. využite nerovnosť $\int_0^1 g^2(x)\,dx \ge \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2$, ktorá vyplýva z pr. 157 [26];

$\boxed{\mathbf{168}}$ $\frac{1}{2}(b-a)(f(b)-f(a))$ $\Big($označme $a_k := a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 0,\dots,n$; potom $\Delta_n := \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(x) - f(a_k))\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f'(\xi_k)(x-a_k)\,dx$, nech $m_k := \min\{f'(x)\,;\, x \in [a_{k-1},a_k]\}$, $M_k := \max\{f'(x)\,;\, x \in [a_{k-1},a_k]\}$, $k = 1,\dots,n$, potom $\sum_{k=1}^{n} m_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} (x-a_k)\,dx \le \Delta_n \le \sum_{k=1}^{n} M_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} (x-a_k)\,dx$, odtiaľ (po výpočte integrálov a vynásobení nerovností číslom n) $L(f',D) = \frac{1}{2}(b-a)\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{b-a}{n} \le n\Delta_n \le \frac{1}{2}(b-a)\sum_{k=1}^{n} M_k \frac{b-a}{n} = U(f',D)$, kde $D = \{a_0,\dots,a_n\}$;

[25] použitím Lebesguovho kritéria (pozri poznámku k pr. 155) možno dokázať všeobecnejšie tvrdenie: ak $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f(x) \neq 0$ pre všetky $x \in [a,b]$ a $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ je ohraničená riemannovsky neintegrovateľná funkcia, tak $fg \notin \mathcal{R}[a,b]$

[26] možno použiť aj nerovnosť z pr. 199

ďalej použite dôsledok vety 2;

169 použite pr. 76.2 a nerovnosti **1.** $\frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} = 1 + x^{20}\frac{1-x^{20}}{1+x^{40}} < 1 + x^{20}(1-x^{21})$ pre $x \in (0,1)$; **2.** $e^{-x^n} > 1 - x^n$, $x \neq 0$ (tá vyplýva z nerovnosti $e^u > 1+u$ pre $u \neq 0$); **3.** $2 < e^x + e^{-x} < e + \frac{1}{e}$ pre $x \in (0,1)$;

170 $\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\,dx > \frac{3\pi}{2}$ $\Big($využite nerovnosť $e^{\sin^2 x} > 1 + \sin^2 x$, $x \in (0,\pi)\Big)$;

172 $\approx \frac{1}{6}10^{12}$ $\left(= 100^6 \int_0^1 x^5\,dx\right)$;

173 **1.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ $\left(S_n \text{ rozšírte výrazom } \frac{\pi}{n} \text{ a využite, že } \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 1\right)$; **2.** $x + \frac{1}{2}$ $\left(= \int_0^1 (x+t)\,dt;\ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n (nx+k) \le S_n \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n (nx+k+1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(x + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}\right)$; **3.** $\frac{1}{\ln 2}$ $\left(S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)},\ \text{kde } S_n^{(1)} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n 2^{k/n},\ |S_n^{(2)}| := \left|\sum_{k=1}^n \frac{1/k}{n(n+1/k)}2^{k/n}\right| \le \frac{2}{n}\right)$; **4.** $\frac{5\pi}{6}$ $\Big($ak na vyjadrenie hodnoty $\sin x$ použijeme Taylorov vzorec so zvyškom v Lagrangeovom tvare, tak $\sin x = x - \frac{x^2}{2}\sin\vartheta$; potom $S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$, kde $S_n^{(1)} := \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$, $|S_n^{(2)}| := \left|\frac{\pi^2}{2n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\sin\vartheta_k^{(n)}\right| \le \frac{\pi^2}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 < \frac{\pi^2}{n}\Big)$; **5.** $\ln 2$; **6.** ∞ $\Big(S_n = n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+k/n} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^n\frac{\sin\vartheta_k^{(n)}}{(n+k)\sqrt{n+k}}$, pritom limita druhého člena je $\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ a limita tretieho člena je $0\Big)$; **7.** ∞ $\Big(S_n = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n\frac{1}{\sqrt{1+k/n}} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n\frac{\sin\vartheta_k^{(n)}}{n+k}$; pri odhade druhého člena využite nerovnosti $\sum_{k=0}^n\frac{1}{n+k} < 2$ a $0 \le \sin\vartheta_k^{(n)} \le \sin\frac{1}{n}$ pre $k = 0,1,\ldots,n\Big)$;

174 **1.** $\frac{\pi}{2}$ $\Big($využite rovnosť $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\cos 2kx = \frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ktorá sa odvodí podobne ako analogická rovnosť z riešenia pr. 60.3$\Big)$; **2.** $\frac{n\pi}{2}$ $\Big($využite rovnosť $\sum_{k=1}^m\sin(2k-1)x = \frac{1-\cos 2mx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 mx}{\sin x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, a výsledok pr. 174.1$\Big)$; **3.** π, ak n je nepárne (pozri pr. 174.1); 0, ak n je párne $\Big($použite substitúciu $x - \frac{\pi}{2} = t$ a pr. 93.1$\Big)$;

175 **1.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; **2.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}\,b}{b^2+1} - \arcsin\frac{\sqrt{2}\,a}{a^2+1}\right)$;

176 **1.** nech $b - a = P$ (dôkaz v ostatných prípadoch prenechávame na čitateľa), označme $M := \sup_{x\in[0,P]}|\varphi(x)|$, $a_k := a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k = 0,1,\ldots,n$; potom $\int_{a_{k-1}}^{a_k}\varphi(nx)\,dx = 0$ (pozri pr. 93.2) a $|I_n| := \left|\int_a^b f(x)\varphi(nx)\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^n f(a_k)\int_{a_{k-1}}^{a_k}\varphi(nx)\,dx + \sum_{k=1}^n\int_{a_{k-1}}^{a_k}(f(x)-f(a_k))\varphi(nx)\,dx\right| \le \sum_{k=1}^n\int_{a_{k-1}}^{a_k}|f(x)-f(a_k)||\varphi(nx)|\,dx \le M\sum_{k=1}^n\int_{a_{k-1}}^{a_k}|f(x)-f(a_k)|\,dx$; z rovnomernej spojitosti f na

$[a,b]$ vyplýva $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \, : \, |a_k - a_{k-1}| < \delta \Rightarrow \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(a_k)| \, dx \le \varepsilon (a_k - a_{k-1})$; celkovo teda $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \ n > N \, : \, |I_n| \le M(b-a)\varepsilon$;

2. tvrdenie najprv dokážte pre konštantnú funkciu f a ľubovoľný interval $[a,b]$, ďalšie úvahy sú podobné ako v riešení pr. 176.1 $\left(\left| \int_a^b f(x) |\sin nx| \, dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \, dx \right| \le \sum_{k=1}^{m} \left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(a_k)| |\sin nx| \, dx + |f(a_k)| \cdot \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\sin nx| \, dx - \frac{2}{\pi}(a_k - a_{k-1}) \right| + \frac{2}{\pi} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(a_k) - f(x)| \, dx \right) \right.$, kde $m \in \mathbf{N}$ je vhodne zvolené číslo, $\left. a_k := a + \frac{k}{m}(b-a), \ k = 0, 1, \ldots, m \right)$;

$\boxed{\mathbf{177}}$ $\frac{3}{2} e^{5/2}$ $\left(\text{na výpočet } \int_{1/2}^{2} e^{x+1/x} \, dx \text{ použite metódu per partes: } u' = 1, \ v = e^{x+1/x}\right)$;

$\boxed{\mathbf{178}}$ pozri pr. 96.2; podľa binomickej vety $(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k}$;

$\boxed{\mathbf{179}}$ $B(m,n) = \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1)$;

$\boxed{\mathbf{180}}$ $I(m,n) = \frac{n-1}{m+1} I(m+2, n-2), \ n \ge 2$, ďalej pozri výsledok pr. 96.1;

$\boxed{\mathbf{181}}$ $\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 < \frac{\pi}{2}, \ n \in \mathbf{N}$;

$\boxed{\mathbf{182}}$ **1.** $K_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ (použite metódu per partes: $u' = \cos nx, \ v = \cos^n x$; k obidvom stranám získanej rovnosti pripočítajte K_n, pri úprave pravej strany využite vzorec $\cos(n-1)x = \cos nx \cos x + \sin nx \sin x$; tak dostanete rekurentný vzťah $2K_n = K_{n-1}, \ n \in \mathbf{N}$); **2.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k(n-k+1)}$ $\left(2L_n = \frac{1}{n} + L_{n+1} \right)$;

$\boxed{\mathbf{183}}$ **1.** na výpočet $\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha x \sin \alpha x \, dx$ použite metódu per partes, integrál na pravej strane získanej rovnosti preveďte na jej ľavú stranu a použite vzorec $\sin(\alpha+1)x = sin \alpha x \cos x + \cos \alpha x \sin x$;

$\boxed{\mathbf{185}}$ funkcia $F(x) := \int_a^x f(t) \, dt - \int_x^b f(t) \, dt$ je spojitá, $F(a) < 0, \ F(b) > 0$;

$\boxed{\mathbf{186}}$ **1.** 2; **2.** 1;

$\boxed{\mathbf{187}}$ $g'(x) = \dfrac{f(x) \int_0^x (x-t) f(t) \, dt}{\left(\int_0^x f(t) \, dt \right)^2} > 0$ pre $x > 0$;

$\boxed{\mathbf{188}}$ primitívna funkcia F k funkcii f je párna, derivácia párnej funkcie je nepárna funkcia;

$\boxed{\mathbf{189}}$ „$\Longrightarrow$“: stačí položiť $\lambda := \min_{x \in [a,b]} f(x)$; „$\Longleftarrow$“: pre primitívnu funkciu F k funkcii f platí $\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \ge \lambda \quad (a \le \alpha < \beta \le b)$, preto $f(x) = F'(x) \ge \lambda, \ x \in [a,b]$;

$\boxed{\mathbf{190}}$ napr. $f(x) = \begin{cases} \sin \ln |x| + \cos \ln |x|, & \text{ak } x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, potom $F(x) = \begin{cases} x \sin \ln |x|, & \text{ak } x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$ (pozri pr. 87);

$\boxed{\mathbf{191}}$ $F(x) = \int_{-1}^{x} (g'(t) - h(t)) \, dt$, kde $g(t) = \begin{cases} t^2 \cos \frac{1}{t}, & \text{ak } t \ne 0 \\ 0, & \text{ak } t = 0 \end{cases}$, $h(t) =$

$\begin{cases} 2t\cos\dfrac{1}{t}\,, & \text{ak} \quad t \neq 0 \\ 0\,, & \text{ak} \quad t = 0 \end{cases}$, diferencovateľnosť funkcií $\displaystyle\int_{-1}^{x} g'(t)\,dt$, resp. $\displaystyle\int_{-1}^{x} h(t)\,dt$ vyplýva z vety 11, resp. 14b);

$\boxed{\mathbf{192}}$ **4**. z nerovnosti $f(x+t) > f(y+t)$ pre $x > y$ a z pr. 162 vyplýva $F_\delta(x) = \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,dt > \dfrac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(y+t)\,dt = F_\delta(y)$ pre $x > y$; **6**. platí $|f(x) - F_\delta(x)| \le \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x+t)|\,dt$, z rovnomernej spojitosti funkcie f na intervale $[a-\delta, b+\delta]$ vyplýva $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,x \in [a,b]$: $|t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x+t)| < \varepsilon$;

$\boxed{\mathbf{193}}$ nech $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(a)\,, & \text{ak} \quad x < a \\ f(x)\,, & \text{ak} \quad x \in [a,b] \\ f(b)\,, & \text{ak} \quad x > b \end{cases}$, z pr. 192.2,6 vyplýva, že existuje spojite diferencovateľná funkcia $\overline{f}_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taká, že $\forall\,x \in [a,b]$: $|\overline{f}(x) - \overline{f}_1(x)| < \dfrac{\varepsilon}{n}$ $\Big($a teda $\forall\,x \in [a,b]$: $|f(x) - \overline{f}_1(x)| < \dfrac{\varepsilon}{n}\Big)$; z pr. 192.3,6 $\Big($použitého pre interval $[a,b]$, číslo $\dfrac{\varepsilon}{n}$ a funkciu $\overline{f}_1\Big)$ vyplýva existencia dvakrát spojite diferencovateľnej funkcie $\overline{f}_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pre ktorú platí $\forall\,x \in [a,b]$: $|\overline{f}_1(x) - \overline{f}_2(x)| < \dfrac{\varepsilon}{n}$, atď; pre funkciu $f_\varepsilon := \overline{f}_n|[a,b]$ potom platí $|f(x) - f_\varepsilon(x)| \le |f(x) - \overline{f}_1(x)| + |\overline{f}_1(x) - \overline{f}_2(x)| + \cdots + |\overline{f}_{n-1}(x) - \overline{f}_n(x)| < \varepsilon$;

$\boxed{\mathbf{194}}$ dokážeme prvú nerovnosť (druhá sa dokazuje obdobne); nech $\gamma(x) := \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ $\big($potom $\gamma(x) \le x - a$, teda $a \le \gamma(x) + a \le x\big)$, označme $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)g(t)\,dt$, $G(x) := \displaystyle\int_a^{a+\gamma(x)} f(t)\,dt$, potom $F(a) = G(a)$ a $F'(x) \ge G'(x)$ pre $x \in [a,b]$;

$\boxed{\mathbf{195}}$ označme $A := \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, $c := \sup\{x \in [0,1];\, f(x) \ge A\}$, potom $\displaystyle\int_c^1 f(x)\,dx \le A(1-c)$ $\Big(= (1-c)\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\Big)$, k obidvom stranám tejto nerovnosti pripočítajte $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$;

$\boxed{\mathbf{196}}$ $f(0)$ $\Big(\displaystyle\int_0^1 = \int_0^{1/\sqrt{n}} + \int_{1/\sqrt{n}}^1$, nech $M := \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, potom $\Big|\displaystyle\int_{1/\sqrt{n}}^1\Big| \le \Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) M \cdot \max\limits_{x\in[1/\sqrt{n},1]} ne^{-nx} \to 0$ pre $n \to \infty$, $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{n}} = f(c_n) \cdot \int_0^{1/\sqrt{n}} ne^{-nx}\,dx = f(c_n)(1 - e^{-n}) \to f(0)$ pre $n \to \infty$, pozri aj riešenie pr. 113.3$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{197}}$ predpokladajme, že g je nezáporná funkcia (v ostatných prípadoch stačí položiť $G(x) := g(x) - g(a)$ a z nerovnosti pre f, G odvodiť nerovnosť pre f, G), nech $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = f(c)$, potom $\displaystyle\int_0^c (f(c) - f(x))\,dx = \int_c^1 (f(x) - f(c))\,dx$; nech $\displaystyle\int_0^c (f(c) - f(x))g(x)\,dx = g(c_1)\int_0^c (f(c) - f(x))\,dx$, $c_1 \in [0,c]$; $\displaystyle\int_c^1 (f(x) - f(c))g(x)\,dx = g(c_2)\int_c^1 (f(x) - f(c))\,dx$, $c_2 \in [c,1]$; potom $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (f(x) - f(c))g(x)\,dx = \int_0^c + \int_c^1 = (g(c_2) - g(c_1))\int_c^1 (f(x) - f(c))\,dx \ge 0$;

$\boxed{\mathbf{198}}$ stačí dokázať, že f je monotónna; ak f nie je monotónna, tak existujú $p, q, r \in [a,b]$, $p < q < r$, tak, že pre funkciu $F = f$ alebo funkciu $F = -f$ platí $F(p) < F(q)$, $F(r) < F(q)$; predpokladajme $F = f$; nech $\eta := \min\{f(q) - f(p),\, f(q) - f(r)\}$, nech $a_1 := \sup\{x \in [p,q);\, f(x) \le$

$f(q)-\eta\}$, $b_1 := \inf\{x \in (q,r]\ ;\ f(x) \le f(q)-\eta\}$, potom platí: pre $x \in [a_1,b_1]$ je $f(x) \in [f(q)-\eta, f(q)]$, $f(a_1)=f(b_1)=f(q)-\eta$, pre každé $\vartheta \in [f(q)-\eta, f(q))$ existujú aspoň dve rôzne čísla $c_1, c_2 \in [a_1,b_1]$ také, že $f(c_1)=f(c_2)=\vartheta$; preto f svoju strednú hodnotu na $[a_1,b_1]$ nadobúda aspoň v dvoch rôznych bodoch z $[a_1,b_1]$;

199 označme $F(\lambda) := \int_a^b (\lambda f(x)+g(x))^2\,dx$; potom F je nezáporná kvadratická funkcia, preto jej diskriminant je nekladný;

200 kvadratická funkcia $F(\lambda) := \int_a^b \left(f^2(x) + \lambda\left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right) f(x)g(x) + \lambda^2 g^2(x)\right) dx$ nadobúda nezáporné aj nekladné hodnoty $\left(\left(f(x) - \frac{P}{q}\,g(x)\right)\left(f(x) - \frac{p}{Q}\,g(x)\right) \le 0\right.$ pre všetky $\left. x \in [a,b]\right)$, preto jej diskriminant je nezáporný;

201 ukážte, že pre deriváciu funkcie $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} g(t)\,dt - xf(x)$ platí $F'(x)=0$ pre $x \ge 0$, teda F je konštantná na $[0,\infty)$ [27]; na dôkaz (2.8) zvoľte $f(x)=x^{p-1}$, $x \ge 0$;

202 označme $N_p(f) := \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $N_q(g) := \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/q}$; v nerovnosti (2.8) z pr. 201 položte $u = \frac{|f(x)|}{N_p(f)}$, $v = \frac{|g(x)|}{N_q(g)}$, $x \in [a,b]$, a získanú nerovnosť zintegrujte;

203 **<u>1</u>.** $1 < I < \sqrt{2} \approx 1.414\,213\,562$; **<u>2</u>**. $1.030\,776\,406 \approx \sqrt{1+\frac{1}{2^4}} \le I \le \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.207\,106\,781$ (funkcia $\sqrt{1+x^4}$ je konvexná; ak $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ je spojitá konvexná funkcia, tak pre funkciu $-f$ platí nerovnosť z pr. 166); **<u>3</u>**. $I < 1.1$; **<u>4</u>**. $I \le \sqrt{\int_0^1 (1+x^4)\,dx} = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1.095\,445\,115$.

---

[27] rovnosť $\int_0^a f(t)\,dt = af(a) - \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,dt$ možno dokázať aj použitím metódy per partes $(u'=1,\ v=f(t))$ a potom substitúcie $f(t)=z$, všimnite si tiež veľmi názornú geometrickú interpretáciu tejto rovnosti

3. Číselné rady

$\boxed{\mathbf{204}}$ **1.** napr. $a_n = \dfrac{1}{4n-3}$; **2**. napr. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; **3.** napr. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$; **4.** napr. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}$; **5.** napr. $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$; **6.** napr. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}}$;

$\boxed{\mathbf{205}}$ **1.** $a_n = S_n - S_{n-1}$ pre $n > 1$, $a_1 = S_1$; teda $a_1 = 2$, $a_n = -\dfrac{1}{n(n-1)}$ pre $n > 1$; $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$; **2**. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, $S = 1$; **3**. $a_n = -2\sin\dfrac{\pi}{2n(n-1)}\cos\dfrac{2n^2-1}{2n(n-1)}\pi$ pre $n > 1$, $a_1 = 0$; $S = 0$; **4**. $a_1 = -1$, $a_n = (-1)^n\dfrac{2n-1}{n(n-1)}$ pre $n > 1$; $S = 0$;

$\boxed{\mathbf{206}}$ **1.** $S_n = -\dfrac{2}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\dfrac{2}{3}$, teda rad konverguje; **2**. $S_n = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{2}\cdot\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$, konverguje; **3**. $S_n = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{2}{3}\big((-2)^n - 1\big)$, osciluje; **4**. $S_{2n} = n$, $S_{2n-1} = -n$; osciluje; **5**. $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, preto $S_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, konverguje [1]; **6**. $S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3n+1}\right)$, konverguje; **7**. $S_n = \dfrac{5}{36} - \dfrac{1}{6(n+1)} - \dfrac{1}{6(n+2)} + \dfrac{1}{3(n+3)}$, konverguje $\Big(a_n = \dfrac{1}{6n} - \dfrac{1}{2(n+2)} + \dfrac{1}{3(n+3)}$; S_n možno zapísať v tvare tabuľky

$$S_n = \begin{array}{cccccccccccccc}
\frac{1}{6} & & & & -\frac{1}{2\cdot 3} & + & \frac{1}{3\cdot 4} & & & & & & & + \\
 & + & \frac{1}{6\cdot 2} & & & - & \frac{1}{2\cdot 4} & + & \frac{1}{3\cdot 5} & & & & & + \\
 & & & + & \frac{1}{6\cdot 3} & & & - & \frac{1}{2\cdot 5} & + & \frac{1}{3\cdot 6} & & & + \\
 & & & & & + & \frac{1}{6\cdot 4} & & & - & \frac{1}{2\cdot 6} & + & \frac{1}{3\cdot 7} & + \\
 & & & & & & & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

[1] obr. 9 umožňuje názornú predstavu o konvergencii tohto radu; p, q sú dotýkajúce sa kružnice s polomerom 1, r je ich spoločná dotyčnica, kružnica k_1 sa dotýka kružníc p, q a priamky r, kružnica k_2 sa dotýka kružníc p, q, k_1, atď; potom priemer kružnice k_n má dĺžku $\dfrac{1}{n(n+1)}$

obr. 9.

$$
\begin{array}{cccccccc}
+\dfrac{1}{6(n-3)} & & -\dfrac{1}{2(n-1)} & +\dfrac{1}{3n} & & & & + \\
 & +\dfrac{1}{6(n-2)} & & -\dfrac{1}{2n} & +\dfrac{1}{3(n+1)} & & & + \\
 & & +\dfrac{1}{6(n-1)} & & -\dfrac{1}{2(n+1)} & +\dfrac{1}{3(n+2)} & & + \\
 & & & +\dfrac{1}{6n} & & -\dfrac{1}{2(n+2)} & +\dfrac{1}{3(n+3)} &
\end{array}
$$

a využiť rovnosť $\left.\dfrac{1}{3k}-\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{6k}=0\right)$; **8**. $S_n=1-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$ $\left(=1-\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)$, konverguje; **9**. $S_n=\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$, konverguje $\left(a_n=-\sqrt{\dfrac{n_1}{n}}+\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right)$; **10**. $S_n=\ln\dfrac{(n+1)!}{n!}=\ln(n+1)$, diverguje k $+\infty$; **11**. $S_n=q\,\dfrac{1-q^n}{(1-q)^2}-n\,\dfrac{q^{n+1}}{1-q}$ pre $q\neq 1$ $\big($dokážte rovnosť $S_n-qS_n=q+q^2+\cdots+q^n-nq^{n+1}$ a vyjadrite z nej S_n alebo využite výsledok pr. I.303.1$\big)$, $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pre $q=1$, konverguje pre $|q|<1$, diverguje k $+\infty$ pre $q\geq 1$, osciluje pre $q\leq -1$ $\left(\text{využite, že } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0 \text{ pre } a>1,\right.$ pozri pr. I.192.1a$\big)$; **12**. $S_n=3\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)-\dfrac{n}{2^{n-1}}$ $\big($využite vzorec pre čiastočné súčty geometrického radu a pr. 206.11$\big)$, konverguje; **13**. $S_n=\dfrac{1}{2}\left(\sin\alpha-\sin\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$, konverguje; **14**. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{5}\sin\dfrac{k!\,\pi}{720}$ pre $n\geq 5$, konverguje $(720=6!,\ a_n=0$ pre $n\geq 6)$;

207 z vety 3 vyplýva divergencia radov číslo 1 $\big(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1\big)$, 2 $\big(\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$ [2], $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ neexistuje$\big)$, 4 $\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}\ln\ln n}=1,\right.$ na výpočet $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\ln x}{x}$ možno použiť l'Hospitalovo pravidlo$\Big)$, 5 $\big(\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0.002$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ neexistuje$\big)$; rad číslo 3 spĺňa nutnú podmienku konvergencie, teda len na základe vety 3 nemožno rozhodnúť, či tento rad konverguje alebo diverguje [3];

208 **1.** postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ je vybranou postupnosťou z postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $\big($platí $S_n=s_{p_{n+1}}$, $n\in\mathbf{N}\big)$, z konvergencie postupnosti vyplýva konvergencia každej jej podpostupnosti; **2.** z nezápornosti čísel a_n, $n\in\mathbf{N}$, vyplýva, že $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť; monotónna postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je konvergentná niektorá jej podpostupnosť (toto tvrdenie treba samozrejme dokázať); **3.** napr. $a_n=(-1)^n$, $p_n=2n-1$;

209 $q=\dfrac{1}{5}\big(7-2\sqrt{6}\big)$ $\left(\text{číslo } \dfrac{1}{5}\big(7+2\sqrt{6}\big),\right.$ ktoré je druhým koreňom rovnice $\dfrac{q}{(1-q)^2}=\dfrac{5}{4}$, nemôže byť riešením, pretože pre hľadané q musí platiť $|q|<1$, inak by rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ — a teda aj každý jeho zvyšok — divergoval (pozri vetu 1)$\Big)$;

210 $\Big($predovšetkým si uvedomte, že z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ vyplýva konvergencia každého jeho zvyšku$\Big)$ ak $R_n=aq^{n-1}$, tak $a_n=R_{n-1}-R_n=a(1-q)q^{n-2}$, $n\geq 2$ $\big($pri dôkaze rovnosti $a_n=R_{n-1}-R_n$ nezabudnite, že čísla R_n, $n\in\mathbf{N}$, sú definované ako limity$\big)$;

211 **1.** pretože $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (veta 3), je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca postupnosť nezáporných čísel alebo

---

[2] pretože platí ekvivalencia $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0 \iff \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, je zrejme jedno, či pri vyšetrovaní nutnej podmienky konvergencie hľadáme $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ alebo $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$

[3] charakter tohto radu možno vyšetriť napr. pomocou tvrdenia α) vety 4b, ak využijeme rovnosť $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$

neklesajúca postupnosť nekladných čísel; v prvom prípade platí $0 \le na_{2n} \le a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$, z Cauchyho-Bolzanovho kritéria konvergencie vyplýva $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N}, n > N : a_{n+1} + \cdots + a_{2n} < \varepsilon$, preto platí $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N}, n > N : 0 \le na_{2n} < \varepsilon$, odtiaľ vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$, rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$ vyplýva podobne z nerovností $0 \le (2n+1)a_{2n+1} \le 2(n+1)a_{2n+1} \le 2(a_{n+1} + \cdots + a_{2n+1})$, pre postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} := \{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ teda platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0$, preto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$; v druhom prípade (tj. ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť nekladných čísel) stačí uvažovať postupnosť $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je nerastúca a nezáporná; **2.** nie, napr. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{ak} \quad n \in \{2^m\,;\, m \in \mathbf{N}\} \\ 0, & \text{ak} \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{2^m\,;\, m \in \mathbf{N}\} \end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{212}}$ **1.** táto podmienka nezaručuje konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, vyhovujú jej všetky rady, pre ktoré je splnená nutná podmienka konvergencie (a len také rady), teda napr. aj divergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$; **2.** konverguje $\Big($pre $n = 1$ dostaneme $\lim\limits_{p\to\infty}(a_2 + \cdots + a_{p+1}) = 0$, odtiaľ $\lim\limits_{p\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{p+1}) = a_1$, čo podľa definície súčtu radu znamená $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1\Big)$;

$\boxed{\mathbf{213}}$ **3.** konverguje; **4.** konverguje $\left(a_n \le \dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, **5.** diverguje; **6.** diverguje $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n^{1/2+1/3}}} \text{ je konečná a nenulová}\right)$; **7.** konverguje $\left(\operatorname{arctg} n < \dfrac{\pi}{2}\right)$; **8.** konverguje; **9.** diverguje $\left(a_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1/n} \text{ je nenulová a konečná}\right)$; **10.** konverguje $\Bigg($rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$ majú rovnaký charakter, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}}{\dfrac{3+(-1)^n}{n^2}} = 1$, pritom $\dfrac{3+(-1)^n}{n^2} \le \dfrac{4}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$, a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2}$ konverguje$\Bigg)$; **12.** konverguje $\left(a_n = \dfrac{1}{n^2\left(1 - \dfrac{\ln n}{n^2}\right)}\right.$, pritom $\left.\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} = 0\right)$; **13.** diverguje $\Big(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1/n} = 1$, využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, pozri pr. I.135.2, I.380.1$\Big)$; **15.** konverguje $\left(\text{pripomeňme, že } \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1,\ \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1\right)$; **17.** konverguje $\left(a_n = \dfrac{1}{n^2} - n\left(\dfrac{1}{n^3} - \dfrac{1}{6n^9} + o\left(\dfrac{1}{n^9}\right)\right) = \dfrac{1}{6n^8} + o\left(\dfrac{1}{n^8}\right)\right)$; **18.** konverguje $\Big($využite postupne rovnosti $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$, $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^2 n}{n} = 0$, pozri aj riešenie pr. 213.12$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{214}}$ **1.** $\alpha < 1$ $\left(\ln(n^2+1) - \ln n^2 = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right);\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1/n^{2-\alpha}} \text{ je nenulová a konečná}\right)$; **2.** $\alpha > 0$ $\left(\ln \dfrac{2n+1}{2n-1} = \ln\left(1 + \dfrac{2}{2n-1}\right)\right)$; **3.** $\alpha > \dfrac{1}{2}$ $\left(a_n = 1 - n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right.$, preto $\left.\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{1/n^2}\right)^{\alpha} \text{ je konečná a nenulová}\right)$; **4.** $\alpha > \dfrac{1}{2}$ $\left(a_n = \left|-\dfrac{2}{(n-1)^2} + o\left(\left(\dfrac{2}{n-1}\right)^2\right)\right| = \left|-\dfrac{2}{(n-1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right| =^{4} \dfrac{2}{(n-1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$; **5.** pre každé $\alpha > 0$ $\big($prípad $\alpha = 1$

---

[4]táto rovnosť platí počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$ $\left(\text{ak využijeme, že } o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = o\left(\dfrac{1}{(n-1)^2}\right),\right.$

je zrejmý; pre $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$ je $a_n = e^{\frac{1}{n}\ln\alpha} + e^{-\frac{1}{n}\ln\alpha} - 2 = 1 + \dfrac{\ln\alpha}{n} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\alpha}{n}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ [5] $+ 1 - \dfrac{\ln\alpha}{n} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln\alpha}{n}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 2 = \dfrac{\ln^2\alpha}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\Bigg)$; **<u>6</u>.** pre všetky $\alpha > 0$ $\Bigg($pre $\alpha \neq 1$ je $a_n = \alpha^{1/(n+1)}\big(\alpha^{1/n-1/(n+1)} - 1\big)$, ďalej využite, že $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u - 1}{u} = 1\Bigg)$[6]; **<u>7</u>.** pre všetky $\alpha \in \mathbf{R}$ $\Bigg(a_n = \dfrac{1}{n^{3/2}} \cdot \dfrac{\ln^\alpha n}{\sqrt{n}}$ [7], využite, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^\alpha n}{n^\varepsilon} = 0$ pre každé $\alpha \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0\Bigg)$; **<u>8</u>.** pre $\alpha > 1$ $\Bigg($pre $\alpha \leq 1$ je $\dfrac{\ln n}{n^\alpha} \geq \dfrac{1}{n^\alpha}$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{215}}$ konverguje; postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ čiastočných súčtov je rastúca, jej ohraničenosť zhora[8] vyplýva z nerovností $S_n \leq 2s_n \leq 2s$, kde s_n, resp. s je n–tý čiastočný súčet, resp. súčet radu $\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^2}$;

$\boxed{\mathbf{216}}$ ak $na_n \leq K$, tak $a_n^2 \leq \dfrac{K}{n^2}$;

$\boxed{\mathbf{217}}$ uvedieme dva návody: 1. pre rad $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie $\big($dokážte nerovnosť $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq \max\big\{|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}|, |c_{n+1} + \cdots + c_{n+p}|\big\}$ a využite, že pre rady $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$, $\sum\limits_{n=1}^\infty c_n$ je Cauchyho–Bolzanovo kritérium splnené$\big)$; 2. z konvergencie radov $\sum\limits_{n=1}^\infty c_n$, $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^\infty (c_n - b_n)$, z nerovností $0 \leq a_n - b_n \leq c_n - b_n$, $n \in \mathbf{N}$, a vety 4a) vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^\infty (a_n - b_n)$, z konvergencie radov $\sum\limits_{n=1}^\infty (a_n - b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$;

$\boxed{\mathbf{218}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, preto počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$ platí $0 \leq a_n < 1$; ak $0 \leq a_n < 1$, tak $a_n^2 \leq a_n$; obrátená implikácia neplatí;

$\boxed{\mathbf{219}}$ využite nerovnosti $2|ab| \leq a^2 + b^2$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, $\dfrac{2a}{n} \leq a^2 + \dfrac{1}{n^2}$;

$\boxed{\mathbf{220}}$ $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, n–tý čiastočný súčet má tvar $S_n = \left(\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{n}\right) - \ln(n+1)$; (3.2) dostaneme, ak položíme $C := \sum\limits_{n=1}^\infty \left(\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$ a využijeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = C$;

---

tak $a_n := -\dfrac{2}{(n-1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{2}{(n-1)^2}\left(1 - 2o\left(\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)\Big/\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - 2 \cdot (n-1)^2 o\left(\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)\right) = 1$; odtiaľ už vyplýva, že $a_n < 0$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$, porovnaj tiež s poznámkou za riešením pr. 213.16$\Big)$, pri zápise sme využili rovnosť $-o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

[5]zrejme $o\left(\left(\dfrac{\ln\alpha}{n}\right)^2\right) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

[6]pokiaľ zvolíme postup ako v pr. 214.5, treba použiť rozvoj $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} = o(x^2)$; keby sme využili len rozvoj $e^x = 1 + x + o(x)$, dostaneme $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\ln\alpha + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, čo pre naše potreby nestačí

[7]alebo všeobecnejšie $a_n = \dfrac{1}{n^{2-\varepsilon}} \cdot \dfrac{\ln^\alpha n}{n^\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$

[8]na rovnakej myšlienke je založený dôkaz vety 4a)

$\boxed{\mathbf{221}}$ **1.** konverguje; **2.** konverguje; **3.** konverguje; **4.** diverguje; **7.** konverguje $\Big($pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,,\ a > 0\Big)$; **8.** konverguje $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3\right)$; **9.** diverguje $\Bigg($najprv ukážte, že daný rad má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdots(3n)}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}$, na to použite rovnosť $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\arcsin u}{u} = 1\Bigg)$;

10. konverguje $\left(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{3}\right.$; možno tiež využiť nerovnosť $a_n \le \dfrac{n^3\big(\sqrt{2}+1\big)^n}{3^n}$ a konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\big(\sqrt{2}+1\big)^n}{3^n}$ dokázať pomocou limitného tvaru Cauchyho alebo d'Alembertovho kritéria$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{222}}$ **3.** pri dôkaze rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ využite výsledok pr. 222.1;

$\boxed{\mathbf{223}}$ napr. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{16}, \dots$;

$\boxed{\mathbf{224}}$ napr. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ $\big($alebo všeobecnejšie: každý rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taký, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť kladných čísel a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le 1\big)$;

$\boxed{\mathbf{225}}$ **1.** diverguje; **3.** konverguje, ak $b - a > d$; diverguje, ak $b - a \le d$ $\Bigg($v prípade $b - a = d$ možno použiť tvrdenie b) vety 9 alebo priamo dosadením zistiť, že vtedy má daný rad tvar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a+n\alpha}$, a porovnať ho s harmonickým radom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Bigg)$; **4.** konverguje; **5.** diverguje; **6.** konverguje pre $p > 2$, diverguje pre $p \le 2$ $\big($pre $p = 2$ možno použiť tvrdenie b) vety 9$\big)$; **7.** diverguje $\Bigg($najprv dokážte, že daný rad má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)\cdot 2\cdot 5\cdots(3n+2)}{n!\,(n+1)!\,9^n}\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{226}}$ **1.** napr. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť z riešenia pr. 223; **2.** napr. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ $\big($práve na porovnávaní s týmito radmi je založené Raabeho kritérium$\big)$;

$\boxed{\mathbf{227}}$ **1.** konverguje; **2.** konverguje pre $p > 1$, diverguje pre $0 < p \le 1$; **3.** konverguje pre $p > 1$, diverguje pre $0 < p \le 1$; **4.** konverguje pre $p > 1$, diverguje pre $0 < p \le 1$; **5.** diverguje $\big($využite, že $n! \le n^n$, $n \in \mathbf{N}\big)$; **7.** konverguje $\Bigg($daný rad má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{228}}$ $\big($predovšetkým si uvedomte, že z monotónnosti funkcie f vyplýva jej riemannovská integrovateľnosť na každom uzavretom ohraničenom intervale $I \subset [1,\infty)\big)$ **1.** označme $P_n := S_n - \displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx$; ak využijeme nerovnosti $f(x) \le f(i)$ pre $x \in [i, i+1]$, $i \in \mathbf{N}$, a $f(i) - f(x) \le f(i) - f(i+1)$ pre $x \in [i, i+1]$, $i \in \mathbf{N}$, zistíme, že postupnosť $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca $\Big(P_{n+1} = P_n + f(n+1) - \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx = P_n + \int_{n+1}^{n+2} \big(f(n+1) - f(x)\big)\,dx \ge P_n\Big)$ a zhora ohraničená $\Bigg(P_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(f(i) - \int_i^{i+1} f(x)\,dx\right) = \sum_{i=1}^{n}\int_i^{i+1}\big(f(i) - f(x)\big)\,dx \le \sum_{i=1}^{n}\big(f(i) - f(i+1)\big) = f(1) - f(n+1) \le f(1)\Bigg)$; na obr. 10 je geometrická interpretácia uvedených úvah v prípade spojitej funkcie f $\big($plošný obsah vyšrafovanej plochy je číslo $P_3\big)$;

2. odhad pre S vyplýva z nerovností $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le S_n \le f(1) + \int_1^{n} f(x)\,dx$, postup pre R_k je analogický $\Big($z nezápornosti funkcie f vyplýva, že funkcia $F(t) := \displaystyle\int_1^{t} f(x)\,dx$ je neklesajúca, z nerovností $F(n) \le S_n \le S$ vyplýva, že F je zhora ohraničená, preto existuje konečná $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$, a teda aj $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)\Big)$;

obr. 10.

$\boxed{\mathbf{229}}$ (využite odhad pre R_k z pr. 228.2) **1.** stačí sčítať prvé 4 členy $\left(\dfrac{2}{3\cdot 5^{3/2}}+\dfrac{1}{5^{5/2}}\approx 0.077\,5\,,\ \dfrac{2}{3\cdot 4^{3/2}}+\dfrac{1}{4^{5/2}}\approx 0.114\,6\right)$; **2.** stačí sčítať prvých 13 členov;

$\boxed{\mathbf{230}}$ **1.** napr. $f(x)=\sin^2\pi x\,,\ x\geq 1$; **2.** napr. $f(x)=$ $\begin{cases} 1+nx-n^2\,, & \text{ak}\quad x\in[n-1/n,]\ ,\ n\geq 2\\ 1-nx+n^2\,, & \text{ak}\quad x\in[n,n+1/n]\ ,\ n\geq 2\\ 0 & \text{pre všetky ostatné}\quad x\in[1,\infty)\end{cases}$ (teda grafom f je ,,lomená čiara“, vrcholy ktorej sú určené funkčnými hodnotami $f(1)=0\,,\ f\left(n-\dfrac{1}{n}\right)=0\,,\ f(n)=1\,,\ f\left(n+\dfrac{1}{n}\right)=0\,,\ n\in\mathbf{N}$);

$\boxed{\mathbf{231}}$ **1.** konverguje; **2.** konverguje; **3.** konverguje; **4.** konverguje pre ľubovoľné $\alpha\in\mathbf{R}$; **5.** diverguje; **6.** konverguje; **7.** konverguje $\left(n^{(\ln n)/n}=e^{(\ln n)^2/n}\right)$; **8.** diverguje (preverte nutnú podmienku konvergencie); **9.** konverguje pre $\alpha\geq 0$, diverguje pre $\alpha<0$ (nezabudnite sa presvedčiť, či ide skutočne o rad s nezápornými, resp. nekladnými členmi); **10.** konverguje pre $q>1$, diverguje pre $q\leq 1$; **11.** diverguje; **12.** konverguje; **13.** diverguje; **14.** diverguje; **15.** diverguje (preverte nutnú podmienku konvergencie); **16.** konverguje pre každé $a>0\,,\ b>0\,,\ b\neq 1$ $\left(\log_r s=\dfrac{\ln s}{\ln r}\right)$; **17.** konverguje $\left(a_n=\dfrac{2n+3}{3(2n-1)^3}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right.$; pozor: rovnosť $a_n=-\dfrac{1}{(2n-1)^2}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, ktorú dostaneme, ak použijeme len rozvoj $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$, pre naše potreby nestačí$\Big)$; **18.** diverguje; **19.** konverguje $\left(a_n\text{ najprv rozšírte výrazom }\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\text{ a využite, že }\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/\sqrt{n}+\sqrt{\ln(1+1/n)}}{1/\sqrt{n}}=2\right)$; **20.** diverguje $\left(a_n=\dfrac{1}{ne^k}\right)$; **21.** konverguje $\left(\text{využite, že }\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0\text{ pre každé }k\in\mathbf{R}\right)$; **22.** konverguje; **23.** diverguje (využite, že $\lim\limits_{x\to 0}x^k\ln x=0$ pre $k>0$); **24.** konverguje pre $\alpha<-1$, diverguje pre $\alpha\geq -1$ $\left(\text{pre }\alpha<0\text{ má daný rad rovnaký charakter ako rad }\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^\alpha\ln n\right)$; **25.** konverguje $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(i!)<(n+1)!\right)$; **26.** konverguje pre $\alpha>2$, diverguje pre $\alpha\leq 2$ ($2^n\leq n!\leq n^n$ počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$); **27.** konverguje, ak $\alpha>1$ alebo ak $\alpha=1$ a $\beta>1$; diverguje, ak $\alpha<1$ alebo ak $\alpha=1$ a $\beta\leq 1$; **28.** konverguje pre $\alpha>0$, diverguje pre $\alpha\leq 0$ $\left(\text{pre }\alpha>0\text{ využite, že }\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+n^\alpha\right)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha\ln n+\ln\left(1+1/n^\alpha\right)}{\ln n}=\alpha\right)$;

$\boxed{\mathbf{232}}$ **1a)** konverguje ($c_n\leq a_n+b_n$); **1b)** konverguje; **2a)** diverguje; **2b)** môže divergovať (napr. $a_n = b_n = 1$) aj konvergovať $\Big($napr. $a_n = \big(1-(-1)^n\big)n\,,\ b_n = \big(1+(-1)^n\big)n\Big)$; **3a)** diverguje; **3b)** konverguje;

233 **2a)** konverguje; **2b)** diverguje $\left(\text{pri výpočte } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} \quad (=0) \quad \text{použite substitúciu } \ln n = t\right)$; **2c)** konverguje $\left(\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = \dfrac{n^{4/3}\left(\ln 3 - \dfrac{3\ln n!}{n^{4/3}}\right)}{\ln n}\,,\ \text{pritom } 0 \le \dfrac{\ln n!}{n^{4/3}} \le \dfrac{n\ln n}{n^{4/3}} = \dfrac{\ln n}{n^{1/3}}\,, \text{ preto } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\ln n!}{n^{4/3}} = 0\right)$;

234 **1b)** rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má podľa pr. 208.1,2 rovnaký charakter [9] ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_1 = a_1$, $A_{n+1} = \sum\limits_{n^2+1}^{(n+1)^2} a_n \quad (n \in \mathbf{N})$; pritom $\big($pretože $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel$\big)$ platí $(2n+1)a_{n^2} \ge A_{n+1} \ge (2n+1)a_{(n+1)^2}$, a teda aj $\quad (*) \quad 3na_{n^2} \ge A_{n+1} \ge (n+1)a_{(n+1)^2}$; preto z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n^2}$ $\big($to je dôsledok druhej nerovnosti v $(*)\big)$ a z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n^2}$; **2a)** konverguje $\left(\text{využite pr. 234.1b a Cauchyho kritérium; nezabudnite preveriť, že } \left\{\dfrac{1}{\left(n-\sqrt{n}\,\right)^{\sqrt{n}}}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ je nerastúca postupnosť}\right)$; **2b)** konverguje (vyplýva to napokon aj z porovnania s radom z pr. 233.2a); **2c)** konverguje;

235 nech $q < \dfrac{1}{2}$ $\left(\text{prípad } q > \dfrac{1}{2} \text{ prenechávame čitateľovi}\right)$, z podmienky $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{2n}}{a_n} < \dfrac{1}{2}$ vyplýva, že pre niektoré $M \in \mathbf{N}$ a $\varepsilon > 0$ platí $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \ge M$: $\dfrac{a_{2n}}{a_n} \le q + \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, označme $Q := q + \varepsilon$, zvoľme $N \in \mathbf{N}$ tak, aby $2^N \ge M$; rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=N}^{\infty} A_n$, kde $A_n := \sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_n$ [10], pritom z nerovností $a_{2n} + a_{2n+1} \le 2a_{2n}$, $a_{2n} \le Qa_n \quad (n \ge 2^N)$ vyplýva $A_{n+1} = (a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}+1}) + \cdots + (a_{2^{n+2}-2} + a_{a^{n+2}-1}) \le 2(a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}+2} + \cdots + a_{2^{n+2}-2}) \le 2Q(a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) = 2QA_n \quad (n \ge N)$; rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ teraz stačí porovnať s geometrickým radom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_1(2Q)^{n-1}$ (alebo — čo je to isté — použiť na vyšetrenie jeho konvergencie d'Alembertovo kritérium);

236 **2.** využite, že $|\cos^3 n| \le 1$ a $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$; **3.** $\left|\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)\right| = \begin{cases} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & \text{pre } n \text{ párne} \\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right) & \text{pre } n \text{ nepárne, } n \ne 1 \end{cases}$, preto $\left|\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)\right| \le \ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)$, $n > 1$;

4. $|a_n| = \dfrac{2^n(1+n^2/2^n)}{3^n(1+n^3/3^n)}$, využite, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ pre $a > 1$, $k \in \mathbf{R}$; **6.** $|a_n| = \left|\dfrac{1 - \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2}{n}}{n\sin\dfrac{1}{n}}\right| =$

---

[9] pri tejto úvahe využívame, že rad s nezápornými členmi môže konvergovať alebo divergovať k $+\infty$, ale nemôže oscilovať

[10] z radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sme teda vynechali prvých $2^N - 1$ členov a takto vzniknutý rad sme „uzátvorkovali“, pritom využívame tvrdenie z pr. 208 a vetu 1

$\left|\dfrac{1-\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{3!}\cdot\left(\dfrac{2}{n}\right)^3+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)}{n\sin\dfrac{1}{n}}\right| = \dfrac{\dfrac{2}{3n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\sin\dfrac{1}{n}}$ (posledná rovnosť platí počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$, pozri poznámku [4] k riešeniu pr. 214.4), preto $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{1/n^2}=\dfrac{2}{3}$;

237 vyplýva to z rovností $a_n^+=\dfrac{1}{2}\big(|a_n|+a_n\big)$, $a_n^-=\dfrac{1}{2}\big(|a_n|-a_n\big)$, $a_n=a_n^+-a_n^-$ a z faktu, že nenulový k–násobok konvergentného (divergentného) radu je konvergentný (divergentný) rad, súčet konvergentných radov je konvergentný rad, súčet konvergentného a divergentného radu je divergentný rad;

dôkaz rovnosti (3.3): $\dfrac{S_n^+}{S_n^-}=1+\dfrac{S_n}{S_n^-}$, kde S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^-=\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ je konečná;

238 „$\Longrightarrow$“: ak $|b_n|\le K$, tak $|a_nb_n|\le K|a_n|$, preto $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ absolútne konverguje; „$\Longleftarrow$“: stačí zvoliť $b_n=\operatorname{sgn}a_n$;

239 **1.** konverguje pre $p>0$ (pre $p\le 0$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie); **3.** $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$ [11], konverguje; **4.** konverguje; **5.** konverguje; **6.** diverguje (nie je splnená nutná podmienka konvergencie); **7.** konverguje $\left(\sin\big(\pi\sqrt{n^2+k^2}\big)=\sin\Big(\pi\big(\sqrt{n^2+k^2}-n\big)+n\pi\Big)=(-1)^n\sin\left(\pi\dfrac{k^2}{n+\sqrt{n^2+k^2}}\right)\right)$; **8.** konverguje $\left(\text{ak } f(x):=\dfrac{\ln\ln(x+2)}{\ln(x+1)},\ x>0,\ \text{tak } f'(x)=\dfrac{1-\dfrac{x+2}{x+1}\cdot\dfrac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}\ln\ln(x+2)}{(x+2)\ln(x+1)\ln(x+2)}\right.$, pritom limita čitateľa je $-\infty$ a menovateľ je kladný, preto pre dostatočne veľké x je $\left.f'(x)<0\right)$;

240 $\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ln\left(1-\dfrac{1}{2n+2}\right)$, preto $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ má rovnaký charakter ako $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln a_n}$, pritom $\ln a_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)+\ln a_1$ [12]; rýdza monotónnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva z nerovnosti $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$;

241 stačí sčítať prvých **1.** sto členov; **2.** jedenásť členov $\big(2^{11}\cdot 11^{5/2}\approx 821\,886$, $2^{12}\cdot 12^{5/2}\approx 2\,043\,210\big)$;

242 neplatí, napr. $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$ alebo $a_n=\begin{cases}b_k\,, & \text{ak } n=2k\\ c_k\,, & \text{ak } n=2k-1\end{cases}$, kde $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ je konvergentný rad, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ je divergentný rad vyhovujúci nutnej podmienke konvergencie, $b_n>0$, $c_n>0$ $(n\in\mathbf{N})$, pozri pr. 237.3;

243 **1.** konverguje $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\text{ konverguje podľa Leibnizovho kritéria a }\cos\dfrac{\pi}{n}\nearrow 1\right)$; **2.** konverguje; **3.** konverguje (obor hodnôt postupnosti $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je konečný, preto je táto postupnosť

---

[11] $\cos n\pi=(-1)^n$, $n\in\mathbf{N}$

[12] inou možnosťou dôkazu rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0$ je nerovnosť z pr. I.11.2

ohraničená; ak $f(x) := \dfrac{\ln^{100} x}{x}$, tak $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ a $f'(x) < 0$ pre $x > e^{100}$, ďalej pozri poznámku za vetou 12$\Big)$; **5.** konverguje pre $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ $\Bigg($pre $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ide o harmonický rad, pre $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\Bigg)$; **7.** konverguje $\Bigg($daný rad je rozdielom radov $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\ln^2(n+1)}$ a $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln^2(n+1)}$, ktorých konvergencia vyplýva z Dirichletovho kritéria$\Bigg)$; **8.** konverguje pre $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ $\Bigg($vtedy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln\ln(n+2)}$ konverguje podľa Dirichletovho kritéria a $\cos\dfrac{1}{n} \nearrow 1\Bigg)$, diverguje pre $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ $\Bigg($vtedy ide o rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\ln(n+2)}\cos\frac{1}{n}$ s kladnými členmi, ktorý má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\ln(n+2)}\Bigg)$; **9.** diverguje $\Bigg($daný rad je rozdielom divergentného radu $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ a konvergentného radu $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}\Bigg)$; **10.** konverguje $\Bigg($daný rad je súčtom konvergentných radov $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ a $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos 2n}{n}$, konvergencia druhého z nich vyplýva z Dirichletovho kritéria [13]$\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{244}}$ **1.** Leibnizovo: postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje predpokladu 2 vety 14 a postupnosť čiastočných súčtov radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ je ohraničená; Abelovo: ak $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =: b$, tak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = b\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$, pritom prvý z radov na pravej strane tejto rovnosti konverguje podľa predpokladu 1 vety 13 a konvergencia druhého vyplýva z Dirichletovho kritéria $\Bigg($postupnosť čiastočných súčtov konvergentného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je iste ohraničená$\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{245}}$ **1.** konverguje; **2.** konverguje $\left(\sqrt[n]{n} \searrow 1\right)$; **3.** konverguje (stačí použiť vetu 11); **4.** konverguje; **5.** konverguje, ak $-\dfrac{1}{2} < \sin x \leq \dfrac{1}{2}$; diverguje, ak $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ alebo $|\sin x| > \dfrac{1}{2}$ $\Big($možno použiť vetu 6' alebo 7' a prípad $|2\sin x| = 1$ vyšetriť samostatne$\Big)$; **6.** konverguje; **7.** konverguje; **8.** konverguje $\Bigg($možno použiť Leibnizovo kritérium alebo daný rad zapísať v tvare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\left(1-\frac{100}{n+100}\right)$ a použiť Abelovo kritérium$\Bigg)$; **9.** diverguje $\left(n\text{–tý člen radu rozšíriť výrazom } \sqrt{n} + (-1)^n\right)$; **10.** konverguje; **11.** konverguje $\Bigg($konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ vyplýva z Dirichletovho kritéria, resp. z pr. 244.2$\Bigg)$; **12.** konverguje (pozri riešenie pr. 243.10); **13.** konverguje $\Big($ $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha -$

---

[13]ak S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cos 2k$, tak $S_{2n} = \cos 2 - \cos 4 + \cos 6 - \cos 8 + \cdots - \cos 4n =$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(4k-2) - \sum_{k=1}^{n}\cos 4k = \left(\cos 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos 4k + \sin 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin 4k\right) - \sum_{k=1}^{n}\cos 4k$, pritom $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos 4k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 4k$ možno vyjadriť pomocou vzorcov z riešenia pr. 243.4,5 (pre $x = 4$), odtiaľ už vyplýva ohraničenosť postupnosti $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$; ohraničenosť postupnosti $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva potom napr. z nerovností $|S_{2n-1}| = |S_{2n} + \cos 4n| \leq |S_{2n}| + |\cos 4n| \leq |S_{2n}| + 1$

$\sin^3\alpha$ [14], odtiaľ $\sin^3\alpha = \dfrac{3}{2}\sin\alpha\cdot(1+\cos 2\alpha)-\sin 3\alpha = \dfrac{3}{2}\sin\alpha+\dfrac{3}{4}(\sin 3\alpha-\sin\alpha)-\sin 3\alpha = \dfrac{3}{4}\sin\alpha-\dfrac{1}{4}\sin 3\alpha\Big)$; **14.** konverguje $\left(\sin^4\alpha - \dfrac{3}{8} = \left(\dfrac{1-\cos 2n}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{8} = \cdots = -\dfrac{1}{2}\cos 2n + \dfrac{1}{8}\cos 4n\right)$; **15.** diverguje (pozri pr. 237.3);

$\boxed{\mathbf{246}}$ **1.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1)$, diverguje pre $p \le 0$; **2.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1)$ $\big(n^{1/n} \searrow 1\big)$, diverguje pre $p \le 0$; **3.** konverguje absolútne; **4.** konverguje absolútne; **5.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1)$ $\left(\text{pre } \varepsilon \in (0,p) \text{ je } a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{p-\varepsilon}} \cdot \dfrac{\ln^2 n}{n^\varepsilon}, \text{ pritom } \dfrac{\ln^2 n}{n^\varepsilon} \searrow 1\right)$, diverguje pre $p \le 0$; **6.** diverguje (preverte nutnú podmienku konvergencie); **7.** konverguje relatívne (možno využiť pr. 244.2); **8.** konverguje relatívne (pozri poznámku za riešením pr. 243.6); **9.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1]$; **10.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1]$; **11.** diverguje $\left(\cos^4 n = \left(\dfrac{1+\cos 2n}{2}\right)^2 = \cdots = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos 2n + \dfrac{1}{8}\cos 4n,\right.$ pritom — ako vieme z riešenia pr. 243.5 — rady $\left.\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n} \text{ a } \dfrac{1}{8}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 4n}{n} \text{ konvergujú}\right)$; **12.** konverguje relatívne $\left(\text{rad } \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\cos n|}{\sqrt[4]{n}}\cos\dfrac{1}{n} \text{ má rovnaký charakter ako rad } \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\cos n|}{\sqrt[4]{n}}\right)$; **13.** konverguje relatívne $\left(a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n}} \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2}, \text{ pritom } \sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n}} \searrow 1, \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} \nearrow 1\right)$; **14.** konverguje relatívne $\left(a_n = \dfrac{\sin n}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{1-(\ln n)/n^2}\right)$; **15.** konverguje relatívne $\Big((12k-6)$–ty čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin(n\pi/12)|}{\ln n}$ je väčší ako k–ty čiastočný súčet divergentného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(12n-6)}$, $k \ge 2\Big)$; **16.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in (0,1]$ $\Big($pre $\varepsilon \in (0,p)$ je $a_n = \dfrac{\sin 2n}{n^{p-\varepsilon}} \cdot \dfrac{\ln^2 n}{n^\varepsilon}$, pritom $\dfrac{\ln^2 n}{n^\varepsilon} \searrow 0$; ďalej pre $p \le 1$ je $\dfrac{|\sin 2n|}{n^p}\ln^2 n > \dfrac{|\sin 2n|}{n^p}$, $n > 2$; pre $p > 1$ a $\varepsilon \in (0, p-1)$ je $\left|\dfrac{\sin 2n}{n^{p-\varepsilon}} \cdot \dfrac{\ln^2 n}{n^\varepsilon}\right| \le \dfrac{|\sin 2n|}{n^{p-\varepsilon}}$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}\Big)$;

$\boxed{\mathbf{247}}$ **1.** $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, $\eta_n = \varepsilon_{2n} - \dfrac{1}{2}\varepsilon_n$; **2.** $\sum\limits_{n=1}^{n}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} =$ [15] $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\ln\sqrt{4n} + \dfrac{C}{2} + \eta_n\right) - \dfrac{1}{2}\Big(\ln n + C + \varepsilon_n\Big)\right) = \ln 2$ [16];

---

[14] možno to odvodiť z Moivreovej vety „$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, $n \in \mathbf{N}$“

[15] podľa Leibnizovho kritéria rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje, tj. existuje konečná limita postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov; na nájdenie limity konvergentnej postupnosti stačí nájsť limitu niektorej jej podpostupnosti

[16] rovnosť $(*)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ môžeme odvodiť aj z rovnosti $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ (možno ju dokázať matematickou indukciou), ak na výpočet $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$ použijeme pr. 83.4 alebo pr. I.353; ďalšou možnosťou dôkazu rovnosti $(*)$ je použiť na vyjadrenie hodnoty $\ln 2$ Taylorov vzorec so zvyškom v Lagrangeovom tvare pre funkciu $\ln(1+x)$; túto rovnosť dokážeme znova v pr. 344.1

2a) $\frac{3}{2}\ln 2$ $\left(=\lim_{n\to\infty} S_{3n}{}^{17} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right);\right.$ **2b)** $\frac{1}{2}\ln 2$ [18]; **2c)** 0 $\left(=\lim_{n\to\infty} S_{5n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{k}\right)\right)$;

248 **1.** $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{4n-3}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{2n-1}+\sum_{n=1}^{2k}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\ln\sqrt{4\cdot(2k)}+\frac{C}{2}+\eta_{2k}\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\tau_{2k}\right)\right)$, kde $\tau_s := \sum_{n=1}^{s}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}-\frac{\pi}{4}$; **2a)** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ln 2$; **2b)** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\ln 2$;

249 **1.** $\frac{\pi^2}{12}$; **2.** $\frac{\pi^2}{12}$ $\left(\text{rad } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{ je absolútne konvergentný, pozri vetu 16}\right)$;

250 $S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)>\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k}}+\frac{1}{\sqrt{4k}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\to\infty$ pre $n\to\infty$, teda $\lim_{n\to\infty} S_{3n}=\infty$, preto nemôže existovať konečná $\lim_{n\to\infty} S_n$;

251 konverguje pre $p\ge 1$ (pre $p>1$ je to prerovnanie absolútne konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$, pre $p=1$ pozri pr. 247.2a), diverguje pre $p<1$ (v prípade $p\le 0$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie; pre $p\in(0,1)$ označme P_n n–tý čiastočný súčet daného radu, $S_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$, potom $P_{3n}=S_{2n}+\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(2k+1)^p}\ge S_{2n}+n\frac{1}{(4n)^p}=S_{2n}+\frac{n^{1-p}}{4^p}$, pritom $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ je konečná, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}}{4^p}=\infty$);

252 **1.** ak S_n, resp. S'_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{p(n)}$, tak $|S_n-S'_n|\le \sum_{k=n-c+1}^{n+c}|a_n|$ pre $n\ge c$, pritom $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n-c+1}^{n+c}|a_n|=0$ (vyplýva to z nutnej podmienky konvergencie); **2.** $\ln 2$ (daný rad vznikne prerovnaním radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, pričom sú splnené predpoklady tvrdenia z pr. 252.1, súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pozri v pr. 247.2);

253 **1a)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$; **1b)** $\sum_{n=0}^{\infty}q^{n+1}\frac{n+1}{n+2}$ $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\right.$

---

[17] Pri riešení pr. 247.2a-c,3 a 248 využívame toto tvrdenie (ktoré je špeciálnym prípadom pr. 271): Nech $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, nech $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ a nech $k\in\mathbf{N}$. Ak existuje $\lim_{n\to\infty}S_{kn}$, tak existuje aj $\lim_{n\to\infty}S_n$ a platí $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{kn}$. (Náznak dôkazu: z rovností $S_{kn+1}=S_{kn}+a_{kn+1}$, $S_{kn+2}=S_{kn+1}+a_{kn+2}$, …, $S_{kn+(k-1)}=S_{kn+(k-2)}+a_{kn+(k-1)}$ a z predpokladu $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ vyplýva, že postupnosti $\{S_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_{kn+1}\}_{n=1}^{\infty}$, …, $\{S_{kn+(k-1)}\}_{n=1}^{\infty}$ majú všetky tú istú limitu, preto existuje $\lim_{n\to\infty}S_n$)

[18] špeciálne v tomto prípade možno postupovať aj nasledovne: $S_{3n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(2n-1)}\right)-\frac{1}{4n}=\frac{1}{2}S'_{2n}$, kde S'_{2n} je $2n$–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, potom $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}S'_{2n}=\frac{1}{2}\ln 2$

$1-\dfrac{1}{n+2}\Big)$; **1c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ $\displaystyle\Big(c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\cdot\frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,2^k3^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{n-k} = \frac{1}{n!}(2+3)^n$, posledná rovnosť vyplýva z binomickej vety$\Big)$; **1d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; **2a)** túto rovnosť možno chápať dvoma spôsobmi: ako rovnosť dvoch radov (pričom na pravej strane je v tom prípade rad $1+0+0+\cdots+0+\cdots$) alebo ako rovnosť dvoch čísel; **2b)** (druhú mocninu radu chápeme ako jeho Cauchyho súčin so sebou samým) túto rovnosť možno v prípade $|q|<1$ chápať dvoma spôsobmi ako v pr. 253.2a, v prípade $|q|\geq 1$ je to rovnosť dvoch divergentných radov;

254 ak S_n, resp. S'_n je n–tý čiastočný súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, resp. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ [19], tak $S'_n \geq a_1 S_n$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

255 $c_n :=$ [19] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n+3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n-k+1}}$; ak použijeme nerovnosť $\dfrac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n-k+1}} \geq \dfrac{2}{n+1}$, ktorá vyplýva z nerovnosti $\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}\big(|a|+|b|\big)$, dostaneme $|c_n|\geq\dfrac{2n}{n+1}$; teda rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nespĺňa nutnú podmienku konvergencie;

256 ak $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ je Cauchyho súčin daných radov, tak $c_0 = a_0b_0 = 1\cdot 1 = 1$, pre $n\geq 1$ je

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_nb_{n-k} = a_n + b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_kb_{n-k} = -\Big(\frac{3}{2}\Big)^n + \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1}\Big(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\Big) - \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{3}{2}\Big)^k\Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-k-1}\Big(2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}\Big) = -\Big(\frac{3}{2}\Big)^n + \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1}\Big(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\Big) - \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}2^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n-k+1}}\Big) = -\Big(\frac{3}{2}\Big)^n + \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1}\Big(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\Big) - \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1}\Big(2\sum_{k=0}^{n-2}2^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^k}\Big) = \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1}\Big(-\frac{3}{2} + 2^n + \frac{1}{2^{n+1}} - 2\big(2^{n-1}-1\big) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1-1/2^{n-1}}{1/2}\Big) = \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1}\Big(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}\Big) = \Big(\frac{3}{4}\Big)^n;$$

257 nech $A := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $B := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$, nech $p(1) = (j_1,k_1)$, …, $p(n) = (j_n,k_n)$, nech $j = \max\{j_1,\dots,j_n\}$, $k = \max\{k_1,\dots,k_n\}$; potom $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}|c_m| \leq \Big(\sum_{m=1}^{j}|a_m|\Big)\Big(\sum_{m=1}^{k}|b_m|\Big) \leq AB$, odtiaľ vyplýva konvergencia radu $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}|c_m|$; prerovnanjme a uzátvorkujme rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nasledovne: $a_1b_1 + \big(a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1\big) + \big(a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1\big) + \cdots$ alebo nasledovne: $a_1b_1 + \big(a_1b_2 + a_2b_1\big) + \big(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1\big) + \cdots$, tj. schematicky:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \hline 1 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\ 2 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\ 3 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\ 4 & a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \qquad \text{alebo} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \hline 1 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\ 2 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\ 3 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\ 4 & a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov takto vzniknutého radu $\Big($ktorý má podľa vety 16 a riešenia pr. 208.1

---

[19] treba si uvedomiť, že Cauchyho súčinom radov $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, kde $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_kb_{n-k+1}$

ten istý súčet ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\Big)$ je v prvom prípade $\{A_nB_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$; v druhom prípade dostávame Cauchyho súčin radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ďalej stačí použiť vetu 17 [20];

258 **1**. 0 $\left(\forall x \in [1,\infty) \,:\, 0 \le \dfrac{\ln x}{x-\ln x} \le \dfrac{\ln e}{e-\ln e}\right)$; **2**. $\dfrac{31}{18}$; **3**. $\ln\dfrac{2}{3}$ $\Big(= \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{3}\cdot \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+1)}\,(n^2+n+1)$; $\ln\dfrac{n^3-1}{n^3+1} = \ln\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$, pritom $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1\Big)$; **4**. 1 $\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!\,(k+2)} = \dfrac{(n+2)!-1}{(n+2)!}\right)$; **5**. $\dfrac{\pi}{3}$ $\Big(= \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\sqrt{3}\,\dfrac{n}{n+1}$; využili sme vzorec $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $xy<1$, pozri riešenie pr. I.87.1$\Big)$; **6**. $\dfrac{\pi}{4}$ $\left(= \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}\right)$; **7**. 0 pre $x=0$; $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ $\Big(= \lim_{n\to\infty} \ln\dfrac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}$; využite rovnosti $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{2\sin(x/2)}$, $\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4} = \dfrac{\sin x}{2\cdot 2\sin(x/2)\cdot\cos(x/4)}\cos\dfrac{x}{4} = \dfrac{\sin x}{4\cos(x/4)}$ atď$\Big)$ pre $x \in (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$; **8**. 0 pre $x=0$, $\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x$ $\left(= \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x\right);\ \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2^k}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^k}\right) = -\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\dfrac{x}{2^k}\right)' = -\left(\ln\dfrac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}\right)'\right)$ pre $x\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$;

259 matematickou indukciou vzhľadom na m; pre $m=1$: $a_k = \dfrac{1}{d}\cdot\dfrac{u_{k+1}-u_k}{u_ku_{k+1}} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}}\right)$, teda $\sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_1} - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$; druhý krok indukcie: $\dfrac{1}{u_ku_{k+1}\cdots u_{k+m+1}} = \dfrac{1}{(m+1)d}\cdot\dfrac{u_{k+m+1}-u_k}{u_ku_{k+1}\cdots u_{k+m+1}} = \dfrac{1}{(m+1)d}\left(\dfrac{1}{u_k\cdots u_{k+m}} - \dfrac{1}{u_{k+1}\cdots u_{k+m+1}}\right)$, pritom podľa indukčného predpokladu $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_k\cdots u_{k+m}} = \dfrac{1}{mdu_1\cdots u_m}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_{k+1}\cdots u_{k+m+1}} = \dfrac{1}{mdu_2\cdots u_{m+1}}$;

260 množina bodov nespojitosti funkcie f je podmnožina množiny $\{0\}\cup\left\{\dfrac{1}{n}\,;\, n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}\right\}$ $\big(f$ môže a nemusí byť spojitá v bode $0\big)$, preto podľa vety 5b z odseku 2.1 je $f\in\mathcal{R}[0,1]$, podľa vety 14a z odseku 2.3 platí $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{1/(n+1)}^{1} f(x)\,dx$;

261 $0 \le a_nb_nc_n \le \max\{a_n^3, b_n^3, c_n^3\} \le a_n^3 + b_n^3 + c_n^3$, $n\in\mathbf{N}$;

262 podľa pr. 211.1 je $\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\right) = 0$, preto pre niektoré $k>0$ a počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$ platí $a_n^2 = \left(\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\right)\left(n\,\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\right) \le k\,\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$;

263 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge \dfrac{3}{2}$ pre $n\ge 2$ $\Big($matematickou indukciou: pre $n=2,3$ uvedené tvrdenie platí; ak $a_{n-1} \ge \dfrac{3}{2}\,a_{n-2}$, $a_n \ge \dfrac{3}{2}\,a_{n-1}$, tak $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n \ge \dfrac{3}{2}\,a_{n-2} + \dfrac{3}{2}\,a_{n-1} = \dfrac{3}{2}\,a_n\Big)$;

264 **1.** konverguje $\left(n^{-n/3}\sqrt[3]{n!+1} \le \sqrt[3]{2n^{-n}n!} =: a_n,\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$; **2.** konver-

---

[20] napokon samotnú vetu 17 možno pre absolútne konvergentné rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dokázať týmto postupom pomocou prvého uvedeného prerovnania a uzátvorkovania

guje $\left(\text{daný rad má rovnaký charakter ako rad } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{3^n n!}\right)$; **3.** konverguje $\Bigg(b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+2)^{n+1}}{(2n+2)!}$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e}{4}$, preto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ (pozri pr. 222)$\Bigg)$; **4.** diverguje $\Bigg(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{n^{1/\sqrt{n}}} = \infty$, využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ (pozri poznámku za pr. 224) a fakt, že $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/\sqrt{x}} = 1\Bigg)$; **5.** konverguje pre $p < \frac{1}{2}$, diverguje pre $p \geq \frac{1}{2}$ $\Bigg($pre $p = \frac{1}{2}$ je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) =$[21] $1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8} + no\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, preto $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}\Bigg)$;

6. konverguje pre $q + \frac{p}{2} > 1$, diverguje pre $q + \frac{p}{2} \leq 1$ $\Bigg(\frac{a_n}{a_{n+1}} =$[22] $1 + \frac{1}{n}\left(q + \frac{p}{2}\right) + \frac{1}{8n^2}\big(4q^2 - 4q + 4pq + p^2 - 3p\big) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$[23], preto $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q + \frac{p}{2}$; pre $q + \frac{p}{2} = 1$ je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1 + \frac{1}{4n}(q-1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$, preto pre $q + \frac{p}{2} = 1$, $q < 1$ je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$; prípad $q = 1$, $p = 0$ sa ľahko vyšetrí samostatne[24]$\Bigg)$; **7.** konverguje pre $p(q-1) > 1$, diverguje pre $p(q-1) \leq 1$ $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p(q-1)}{n} + \frac{p(q-1)\big(p(q-1) - q - 1\big)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$; **8.** konverguje $\Bigg($na základe vzorcov $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ možno daný rad napísať v tvare $\sum_{n=2}^{\infty} 2\sin\frac{\pi}{2^n}\Bigg)$; **9.** konverguje; **10.** konverguje pre $\alpha = 0$, diverguje pre $\alpha \neq 0$ $\Bigg($použite vzorec $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, daný rad má rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha n + \beta}{n^2 + \alpha n + \beta}\Bigg)$; **11.** konverguje pre $p > 1$, diverguje pre $p \in (0, 1]$ $\Big(a_n =$

---

[21] $= n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) - 1\right) = n\left(\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) - 1\right) = n\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2n(2n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$

[22] $= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = \left(1 + \frac{q}{n} + \frac{q(q-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$

[23] využili sme, že $\frac{p}{2n+1} = \frac{p}{2n} - \frac{p}{2n(2n+1)} = \frac{p}{2n} - \frac{p}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{pq}{n(2n+1)} = \frac{pq}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} = \frac{p(p-1)}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

[24] Daný rad diverguje aj v prípade $q + \frac{p}{2} = 1$, $q > 1$; túto skutočnosť nemožno dokázať použitím Raabeho kritéria, ale možno ju odvodiť z rovnosti $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}(q-1) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ na základe *Bertrandovho kritéria* (pozri pr. 267) alebo *Gaussovho kritéria*, ktoré možno formulovať nasledovne: *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi, nech existujú konštanty* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ *a ohraničená postupnosť* $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tak, že* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^2}$. *Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, ak* $\lambda > 1$ *alebo* $\lambda = 1$, $\mu > 1$, *a diverguje, ak* $\lambda < 1$ *alebo* $\lambda = 1$, $\mu \leq 1$. (Toto kritérium možno odvodiť z d'Alembertovho, Raabeho a Bertrandovho kritéria, pozri [10, str. 281, §372].)

$1-e^{n\ln\left(1+(\cos(1/n^p)-1)\right)}$, ďalej využite, že $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$, $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$, $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1-\cos u}{u^2}=\dfrac12\Big)$;

12. konverguje pre $p>1$, diverguje pre $p\le1$ $\left(a_n=e^p\left(1-e^{-1/2n+o(1/n)}\right)^p\right)$; **13.** diverguje $\left(a_n=^{25}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\left(e^{2/n+o(1/n)}-1\right)\right)$; **14.** konverguje $\Big($pre $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ je $\arcsin\sin x=x$, preto $\arccos\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}}=\arcsin\sin\arccos\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}}=\arcsin n^{-3/2}\Big)$; **15.** diverguje $\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{n}{n+1}=\arcsin\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n+1}\right)$; **16.** konverguje, ak $p>1$ alebo $p=1$, $q>2$; diverguje, ak $p<1$ alebo $p=1$, $q\le2$ $\Big($pre $p\ne1$ možno použiť Cauchyho kritérium; pre $p=1$ je $a_n=e^{E(n)}$, kde $E(n)=$

$$n\ln\left(\frac{1-q}{n+q}-\frac{(1-q)^2}{2(n+q)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=(1-q)\ln n+\underbrace{\left(-\frac{q}{n+q}-\frac{n\ln n\cdot(1-q)^2}{2(n+q)^2}+n\ln n+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}_{E_1(n)},$$

pritom $\lim\limits_{n\to\infty}e^{E_1(n)}=1\Big)$; **17.** konverguje len pre $a=\dfrac12$ $\left(a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{a}{n}}-\sqrt[4]{1+\dfrac1n+\dfrac{b}{n^2}}\right)=\sqrt{n}\left(\dfrac{2a-1}{4n}-\dfrac{4a^2+8b-3}{32n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right)$; **18.** konverguje; **19.** konverguje len pre $c=0$, $\dfrac{a}{d}<-1$;

20. konverguje len pre $a=\sqrt{bc}$; **21.** konverguje len pre $p>\dfrac12$ $\Big(a_n=\ln\left(1+\left(\dfrac{\sin n^{-p}}{n^p}-1\right)\right)$, využite, že $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$, $\sin\dfrac{1}{n^p}-\dfrac{1}{n^p}=-\dfrac{1}{6n^{3p}}+o\left(\dfrac{1}{n^{3p}}\right)\Big)$; **22.** konverguje len pre $a+b>1$ $\left(a_n=\dfrac{1}{n^{a+b}}\left(\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^{n+a}\right)^{-1}\right)$; **23.** konverguje, ak $c\ln a>0$ alebo ak $c\ln a=0$, $b\ln a>1$; v ostatných prípadoch diverguje $\left(a_n=\dfrac{1}{n^{\ln a\cdot(b+c\ln n)}}\right)$; **24.** konverguje $\left(\displaystyle\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx\le\frac1n\sup_{x\in[0,1/n]}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\le\frac1n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; **25.** konverguje $\left(\displaystyle\int_0^n\sqrt{1+x^4}\,dx>\int_0^n x^2\,dx\right)$; **26.** diverguje $\left(\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2x}{x}\,dx\ge\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin^2x\,dx\right)$; **27.** konverguje $\Big(\displaystyle\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}\,dx\le e^{-\sqrt{n}}$, ďalej pozri návod k pr. 231.21$\Big)$; **28.** konverguje $\Big(\sin x<x$ pre $x>0$, preto $\displaystyle\int_0^{\pi/n}\frac{\sin^3x}{1+x}\,dx\le\int_0^{\pi/n}x^3\,dx\Big)$;

29. konverguje, ak $p>1$ alebo $p=1$, $q>1$ alebo $p=q=1$, $r=1$; diverguje v ostatných prípadoch $\Big($vlastná (nevlastná) $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_3^x\frac{dt}{t\ln^q t(\ln\ln t)^r}$ existuje práve vtedy, keď existuje vlastná (nevlastná) $\lim\limits_{y\to\infty}\displaystyle\int_{\ln 3}^y\frac{dt}{t^q\ln^r t}$ (použite substitúciu $\ln t=z$), podľa vety 10 majú preto pre $q>0$, $r\in\mathbf{R}$ a $q=0$, $r\ge0$ [26] rady $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n(\ln\ln n)^r}$ a $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^q\ln^r n}$ rovnaký charakter$\Big)$; **30.** konverguje $\Big($daný rad

---

[25] $=\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\left(e^{(n+1)\ln(1+1/n)-n\ln\left(1+1/(n+1)\right)}-1\right)=$

[26] len pre $q>0$, $r\in\mathbf{R}$ alebo $q=0$, $r\ge0$ vyhovuje rad $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^q\ln^r n}$ predpokladom vety 10 (nie je ale ťažké dokázať, že uvedené rady majú rovnaký charakter aj pre $q<0$ a pre $q=0$, $r<0$)

má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\ln n}{n\ln^3 n}$, o ktorom možno podobnou úvahou ako v riešení pr. 264.29 ukázať, že má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}\Bigg)$; **31.** konverguje $\Bigg(\ln(e^n+n^2)=n+\ln\left(1+\frac{n^2}{e^n}\right)$, daný rad má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}\Bigg)$; **32.** konverguje len pre $p<-2$; **33.** konverguje $\Big($funkcia $F(x)=x\ln^2 x-2x\ln x+2x$, $x\ge 1$, je primitívna k neklesajúcej nezápornej funkcii $f(x)=\ln^2 x$, $x\ge 1$, preto $f(n)\le F(n+1)-F(n)\le f(n+1)$, odtiaľ $F(n)-F(1)\le f(2)+\cdots+f(n)\le F(n+1)-F(2)$, preto $\dfrac{1}{(\ln 2)^2+\cdots+(\ln n)^2}\le\dfrac{1}{n\ln^2 n-2n\ln n+2n-2}=:b_n$, rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ má rovnaký charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}\Bigg)$; **34.** diverguje $\Bigg($využite, že $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}1/k}{\ln n}=1$, čo vyplýva z pr. 220 alebo z poznámky k pr. 228.1$\Bigg)$; **35.** diverguje $\Bigg(a_n=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\,e^{-E(n)}$, kde $E(n)=\dfrac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$, pritom $\displaystyle\lim_{n\to\infty}E(n)=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=2\ln 2\Bigg)$; **36.** konverguje len pre $p>\dfrac{5}{2}$ $\Bigg($analogicky ako v riešení pr. 264.33 možno odvodiť odhad $\dfrac{2}{3}n^{3/2}\le\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}\le\dfrac{2}{3}\big((n+1)^{3/2}-1\big)\le\dfrac{2^{5/2}}{3}n^{3/2}\Bigg)$;

265 napr. $a_n=\dfrac{1}{\ln n}$;

266 pozri pr. 228.2;

267 **1.** použijeme porovnávacie kritérium v podobe „ak $a_n>0$, $b_n>0$ $(n\in\mathbf{N})$ a počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$ platí $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\ge\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$, tak z konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ vyplýva konvergencia radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$“; zvoľme $q\in(1,p)$, nech $b_n=\dfrac{1}{n\ln^q n}$, potom $\dfrac{b_n}{b_{n+1}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^q=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{q\ln(1+1/n)}{\ln n}+o\left(\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{q\big(1/n+o(1/n)\big)}{\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)$[27] $=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{q}{n\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)=1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\ln n}\left(q+n\ln n\cdot o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)$, súčasne z (3.6) vyplýva $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\ge 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{p}{n\ln n}$ počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$; pretože $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(q+n\ln n\cdot o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)=q<p$, platí počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$ $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\ge 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{p}{n\ln n}\ge 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\ln n}\left(q+n\ln n\cdot o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$, pritom rad $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ konverguje;

2. podľa predpokladu $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\le 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\ln n}$, pre $b_n:=\dfrac{1}{n\ln n}$ platí $\dfrac{b_n}{b_{n+1}}=1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}+\dfrac{\ln(1+1/n)}{n\ln n}$; na dôkaz nerovnosti $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\le\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ počínajúc niektorým $n_0\in\mathbf{N}$ stačí dokázať nerovnosť $x<\ln(1+x)+x\ln(1+x)$, $x>0$ (na to možno použiť napr. vetu 12 pred pr. I.352) a potom položiť $x=\dfrac{1}{n}$;

268 **1.** zvoľme $a\in(A,1)$, z predpokladov nášho tvrdenia vyplýva $(*)\ \exists b_0>1\ \ \forall x>b_0:\ f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)<af(x)$; nech $b_1:=\varphi(b_0),\dots,b_{n+1}:=\varphi(b_n)$, $n\in\mathbf{N}$, potom $b_{n+1}>b_n$ a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ $\Big($sporom: keby $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=b\in\mathbf{R}$, tak by zo vzťahu $b_{n+1}=\varphi(b_n)$ a zo spojitosti funkcie φ vyplývalo $\varphi(b)=b\Big)$; podľa vety 10 stačí dokázať existenciu konečnej $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt$, čo je ekvivalentné s existenciou

---

[27] pretože $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}=1$, je $o\left(\dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)=o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$ pre $n\to\infty$

konečnej $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{b_0}^{b_n} f(t)\,dt$ $\Big($využite, že $F(x) := \int_1^x f(t)\,dt$ je rastúca$\Big)$; podľa $(*)$ a podľa vety o substitúcii pre určitý integrál je $\int_{b_{i+1}}^{b_{i+2}} f(t)\,dt = \int_{b_i}^{b_{i+1}} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt < a\int_{b_i}^{b_{i+1}} f(t)\,dt$, preto $\int_{b_0}^{b_n} f(t)\,dt =$ $\int_{b_0}^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \cdots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} \le \int_{b_0}^{b_1} + a\int_{b_0}^{b_1} + a^2\int_{b_0}^{b_1} + \cdots + a^{n-1}\int_{b_0}^{b_1} = \dfrac{a^n-1}{a-1}\int_{b_0}^{b_1} f(t)\,dt < \dfrac{1}{1-a}\int_{b_0}^{b_1} f(t)\,dt$; teda $\left\{\int_{b_0}^{b_n} f(t)\,dt\right\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená rastúca postupnosť, preto existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{b_0}^{b_n} f(t)\,dt$;

$\boxed{\textbf{269}}$ zrejme $a_1,\dots,a_{p_1} \ge \dfrac{1}{2}$; $a_{p_1+1},\dots,a_{p_2} \in \left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right),\dots,$ $a_{p_{n-1}+1},\dots,a_{p_n} \in \left[\dfrac{1}{2^n},\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$, teda $p_k - p_{k-1}$ je počet prvkov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ležiacich v intervale $\left[\dfrac{1}{2^k},\dfrac{1}{2^{k-1}}\right)$, $k \ge 2$; označme S_n, resp. σ_n n–tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, resp. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k 2^{-k}$; ak využijeme nerovnosť $\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\dfrac{1}{2^m} < \sum\limits_{n=k}^{\infty}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$, $k>1$, dostaneme $\sigma_m = p_1\left(\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^m}\right)+(p_2-p_1)\left(\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^m}\right)+\cdots+(p_m-p_{m-1})\dfrac{1}{2^m} \le$ $p_1 + \dfrac{1}{2}(p_2-p_1)+\cdots+\dfrac{1}{2^{m-1}}(p_m-p_{m-1}) = 2\left(\dfrac{1}{2}p_1+\dfrac{1}{2^2}(p_2-p_1)+\cdots+\dfrac{1}{2^m}(p_m-p_{m+1})\right) \le 2S_{p_m}$; súčasne $\sigma_m \ge (p_2-p_1)\dfrac{1}{2^2}+\cdots+(p_m-p_{m-1})\dfrac{1}{2^m} \ge \dfrac{1}{2}(S_{p_m}-S_{p_1})$; z nerovností $\dfrac{1}{2}(S_{p_m}-S_{p_1}) \le \sigma_m \le 2S_{p_m}$ už vyplýva uvedené tvrdenie [28];

$\boxed{\textbf{270}}$ **1.** diverguje $\Big($$n$–tý člen radu rozšírte $2\sqrt[3]{n}-(-1)^{n+1}$, uvedený rad tak možno zapísať ako súčet konvergentného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2\sqrt[3]{n}}{4\sqrt[3]{n^2}-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2}{\sqrt[3]{n}}\cdot\dfrac{1}{4-1/\sqrt[3]{n^2}}$ a divergentného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4\sqrt[3]{n^2}-1}\Big)$; **2.** konverguje absolútne pre $p>1$, konverguje relatívne pre $p\in(0,1]$, diverguje pre $p\le 0$ $\left(a_n := \dfrac{(-1)^n}{\big(n+(-1)^n\big)^p} =^{29} \dfrac{(-1)^n}{n^p} - \dfrac{1}{n^{p+1}}\left(p+o\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}\right)n^{p+1}\right)\right.$, teda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je pre $p>0$ rozdielom dvoch konvergentných radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}\left(p+o\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}\right)n^{p+1}\right)$ $\Big($druhý z týchto radov je rad s kladnými členmi, ktorý má rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}\Big)$, inou možnosťou je využiť tvrdenie pr. 252.1, pozri tiež riešenie pr. 252.2$\Big)$; **3.** konverguje absolútne pre $p>2$, konverguje relatívne pre $p\in(1,2]$, diverguje pre $p\le 1$ $\left(a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{p/2}} - \dfrac{1}{n^{(p+1)/2}}\left(p+n^{(p+1)/2}o\left(\dfrac{1}{n^{(p+1)/2}}\right)\right)\right)$; **4.** konverguje absolútne pre $p>1$, konverguje relatívne pre $p\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$, diverguje pre $p\le\dfrac{1}{2}$

---

[28] tvrdenie pr. 269 zostane v platnosti, ak predpoklad „$a_{n+1}\ge a_n$, $n\in\mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$“ nahradíme predpokladom „$a_n \ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$“ (každú postupnosť nezáporných čísel s limitou 0 možno prerovnať tak, aby vznikla nerastúca postupnosť s limitou 0, ľubovoľným prerovnaním sa charakter radu s nezápornými členmi nezmení)

[29] $= \dfrac{(-1)^n}{n^p}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)^{-p} = \dfrac{(-1)^n}{n^p}\left(1-p\,\dfrac{(-1)^n}{n^p}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) =$

$\left(a_n = {}^{30}\ \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos(n\pi/2)}{n^{2p}} - \left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^{2p}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right)\right)\right)$, ďalej počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$ platí $\dfrac{|\sin(n\pi/4)|}{2n^p} \le \dfrac{|\sin(n\pi/4)|}{|n^p + \sin(n\pi/4)|} \le \dfrac{2}{n^p}$; pritom pre $p \le 1$ rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n\pi/4)|}{2n^p}$ diverguje $\Bigl($jeho $(2k-1)$–vý čiastočný súčet je väčší ako k–ty čiastočný súčet divergentného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(2n-1)^p}$, $k \ge 2\Bigr)\Bigr)$; **5.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$, diverguje pre $p \le 0$ $\Bigl(a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^p} - \left(\dfrac{1}{2(n+1)^{2p}} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^{2p}}\right)\right)$, $|a_n| = \ln\left(1 + \dfrac{1}{(n+1)^p}\right)$ pre n nepárne, $|a_n| = \ln\left(1 + \dfrac{1}{(n+1)^p - 1}\right)$ pre n párne, teda $\ln\left(1 + \dfrac{1}{(n+1)^p}\right) \le |a_n| \le \ln\left(1 + \dfrac{1}{(n+1)^p - 1}\right)$, $n \in \mathbf{N}\Bigr)$; **6.** konverguje absolútne pre $p \ge 0$, konverguje relatívne pre $p \in (-1, 0)$, diverguje pre $p \le -1$ $\Bigl($uvedomte si, že rad $\displaystyle\sum_{n=|[p]|+1}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}$ je rad so striedavými znamienkami; $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$ pre $p \le -1$, teda vtedy $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ pre $p > -1$, teda $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ je vtedy klesajúca postupnosť, rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ pre $p > -1$ možno dokázať ako v riešení pr. 240$\Bigr)$; **7.** konverguje absolútne pre $p > 2$, konverguje relatívne pre $p \in (0, 2]$, diverguje pre $p \le 0$ $\bigl($pozri pr. 225.6 a návod k pr. 240$\bigr)$; **8.** konverguje absolútne pre $p > 1$, konverguje relatívne pre $p \le 1$ $\Bigl(a_n = \dfrac{\sin nx}{n^\varepsilon}\cdot\dfrac{1}{n^{1-\varepsilon}\ln^p(n+1)}$ pre $\varepsilon \in (0, 1)$, pozri tiež riešenie pr. 246.16; $|a_n| \ge \dfrac{\sin^2 nx}{n\ln^p(n+1)} = \dfrac{1}{2n\ln^p(n+1)} - \dfrac{\cos 2nx}{2n\ln^p(n+1)}$, pritom rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2n\ln^p(n+1)}$ konverguje pre každé $p \in \mathbf{R}\Bigr)$; **9.** konverguje absolútne pre $p > 1$, $q > 1$; konverguje relatívne pre $0 < p = q \le 1$, diverguje v ostatných prípadoch $\Bigl($daný rad konverguje absolútne práve vtedy, keď konvergujú rady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^p}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^q}$, pozri pr. 237; nech $p > q$, $q \in (0, 1)$, označme S_n n–tý čiastočný súčet nášho radu, potom $S_{2n} = P_{2n} + Q_n$, kde P_{2n} je $2n$–tý čiastočný súčet konvergentného radu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$, $Q_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^q}\left(1 - \frac{1}{(2k)^{p-q}}\right)$, pritom — pretože $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{(2k)^{p-q}} = 0$ — rad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^q}\left(1 - \frac{1}{(2k)^{p-q}}\right)$ má rovnaký charakter ako divergentný rad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^q}\Bigr)$;

271 pozri poznámku [17] k riešeniu pr. 247.2a;

272 nech a_{n_k} je posledný člen v k–tej zátvorke, S_n je n–tý čiastočný súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, potom S_{n_k}, S_{n_k+1}, S_{n_k+2}, $\ldots$, $S_{n_{k+1}}$ $(k \in \mathbf{N})$ je konečná monotónna postupnosť, teda hodnoty $S_{n_k+1}, \ldots, S_{n_{k+1}-1}$ „ležia medzi číslami S_{n_k} a $S_{n_{k+1}}$"; ak neexistuje $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}$, tak zrejme neexistuje ani $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$; nech $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} =: S \in \mathbf{R}$: ak $|S_{n_k} - S| < \varepsilon$ a číslo c „leží medzi S_{n_k} a $S_{n_{k+1}}$", tak aj pre c platí $|c - S| < \varepsilon$; analogickú úvahu možno použiť v prípade $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = -\infty$;

273 z každej konvergentnej postupnosti — teda aj z postupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — možno vybrať monotónnu konvergentnú podpostupnosť;

---

[30] $= \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p}\left(1 + \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p}\right)^{-1} = \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p}\left(1 - \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n^p} + o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)\right) =$

$\boxed{\mathbf{274}}$ **1.** konverguje $\left(|a_n| = \left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{\sin^3 n}{6n^2} + o\left(\frac{\sin^3 n}{n^2}\right)\right)\right| = \left|\frac{\sin^3 n}{6n^2}\right|\left|1 + \frac{6n^2}{\sin^3 n}\cdot o\left(\frac{\sin^3 n}{n^2}\right)\right| \le \frac{1}{6n^2}\right.$ počínajúc niektorým $\left. n_0 \in \mathbf{N}\right)$; **2.** konverguje $\left(a_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\pi\frac{n-1}{n^2+1}\right)\right.$, pozri tiež riešenie pr. 239.7$\Big)$; **3.** konverguje $\left(a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi}{n+1}\right)$; **4.** konverguje (možno využiť pr. 244.2); **5.** diverguje $\left(a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8} + no\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right.$, teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rozdielom konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ a radu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ s kladnými členmi, ktorý má rovnaký charakter ako rad $\left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$; **6.** konverguje $\left(a_n = \frac{\sin n}{n} + \sin n\cdot\left(\frac{1}{n+10\sin n} - \frac{1}{n}\right)\right.$; ak pre funkciu $y = \frac{1}{x}$ na intervale s koncovými bodmi $n + 10\sin n$, n použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote, dostaneme $\frac{1}{n+10\sin n} - \frac{1}{\sin n} = -\frac{1}{c^2}\big((n+10\sin n) - n\big) = -\frac{10\sin n}{c^2}$, pričom pre c iste platí $c > n - 10$ $(n > 10)$; preto $a_n = \frac{\sin n}{n} - \frac{10\sin^2 n}{c^2}$, konvergencia radu $\sum_{n=11}^{\infty}\frac{10\sin^2 n}{c^2}$ vyplýva z nerovností $\left. 0 \le \frac{10\sin^2 n}{c^2} \le \frac{10}{(n-10)^2}\right)$; **7.** konverguje $\left(a_n = \frac{\sin n}{\ln\ln n}\cos\frac{1}{n} + \frac{\cos n}{\ln\ln n}\sin\frac{1}{n}\right.$, pritom $\cos\frac{1}{n} \nearrow 1$, $\sin\frac{1}{n} \searrow 1$ a konvergencia radov $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln\ln n}$ a $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{\ln\ln n}$ vyplýva z Dirichletovho kritéria$\Big)$; **8.** konverguje $\Big($podľa Taylorovho vzorca so zvyškom v Lagrangeovom tvare je $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin\vartheta(x)}{24}x^4$, preto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n}{6n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\vartheta_n}{24}\cdot\frac{\sin^4 n}{n^{4/3}}$, pritom konvergencia druhého radu vyplýva z návodu k pr. 245.13 a konvergencia tretieho radu z nerovnosti $\left.\left|\frac{\sin\vartheta_n}{24}\cdot\frac{\sin^4 n}{n^{4/3}}\right| \le \frac{1}{24n^{4/3}}\right)$; **9.** konverguje $\Big(\left|\sin\pi(2+\sqrt{3})^n\right| = \sin\pi(2-\sqrt{3})^n$; z binomického rozvoja vyplýva, že rozdiel $(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n$ je celé číslo$\Big)$; **10.** diverguje $\left(S_{5n} = P_n + Q_n\right.$, kde $P_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k\ln(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)\ln(3k+2)}\right)$ je n–tý súčet radu, ktorého konvergencia vyplýva z Leibnizovho kritéria, a $Q_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+2)\ln(3k+3)}$ je n–tý súčet radu, ktorého divergencia vyplýva z integrálneho kritéria$\Big)$; **11.** konverguje pre $p > \frac{1}{2}$ $\Big($pre $p > 1$ konverguje absolútne, pre $p \le 1$ stačí podľa pr. 272 vyšetrovať konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n := \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k^p}$; pretože $A_n = \frac{1}{n^{2p}} + \cdots + \frac{1}{(n^2+2n)^p} > \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p} > \frac{2n}{3n^{2p}}$, nie je pre $p \le \frac{1}{2}$ splnená nutná podmienka konvergencie; pre $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria: pretože $A_n < \frac{2n+1}{n^{2p}}$, je $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$; pretože podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote je $a_k := \frac{1}{(n^2+k)^p} - \frac{1}{(n^2+2n+1+k)^p} = \frac{p(2n+1)}{c^{p+1}} > \frac{p(2n+1)}{(n^2+2n+1+k)^{p+1}} > \frac{2np}{(n^2+4n+2)^{p+1}}$ pre $k = 0, 1, \ldots, 2n$, a pretože $b := \frac{1}{(n^2+4n+2)^p} + \frac{1}{(n^2+4n+3)^p} < \frac{2}{(n^2+4n+2)^p}$, dostávame $A_n - A_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{2n} a_k\right) - b > (2n +$

1) $\frac{2np}{(n^2+4n+2)^{p+1}}-\frac{2}{(n^2+4n+2)^p}>\frac{4n^2p}{(n^2+4n+2)^{p+1}}-\frac{2}{(n^2+4n+2)^p}=\frac{n^2(4p-2)-8n-4}{(n^2+4n+2)^{p+1}}$, teda pre $p>\frac{1}{2}$ a dostatočne veľké $n\in\mathbf{N}$ je $A_n-A_{n+1}>0$; **<u>12.</u>** diverguje $\Bigl($pre $A_n:=\frac{1}{[e^{n-1}]+1}+\cdots+\frac{1}{[e^n]}$, $n\geq 2$, platí $A_n\geq\frac{[e^n]-[e^{n-1}]}{[e^n]}\geq\frac{e^n-1-e^{n-1}}{e^n}=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e^n}\geq 1-\frac{2}{e}$, teda pre rad $\sum_{n=2}^{\infty}A_n$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie, ďalej pozri pr. 272 a 208.1$\Bigr)$;

275 ak u_n, resp. w_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})S_n$, tak $u_n=a_1S_1+a_2(S_2-S_1)+\cdots+a_n(S_n-S_{n-1})=(a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n=w_{n-1}+a_nS_n$;

276 vyplýva to z pr. 275;

277 označme $a_0:=0$, $b_0:=-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$; z nerovnosti $|a_n|\leq\sum_{i=0}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|$, $n\in\mathbf{N}$, a z predpokladu (ii) vyplýva ohraničenosť postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$; ďalej platí $\lim_{n\to\infty}S'_n=0$, kde S'_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$; odtiaľ na základe pr. 275 vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$;

278 na dôkaz nerovnosti $S_p<1$ stačí daný rad ,,uzátvorkovať“ nasledovne: $1-\left(\frac{1}{2^P}-\frac{1}{3^p}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)-\cdots$[31]; na dôkaz nerovnosti $\frac{1}{2}<S_p$,,uzátvorkujme“ náš rad takto: $\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right)+\cdots$; podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote $\Bigl($použitej pre funkciu $\frac{1}{x^p}$ na intervale $[2n-1,2n]\Bigr)$ je $\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}=\frac{p}{c^{p+1}}$ pre niektoré $c\in(2n-1,2n)$, preto $S_p>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p}{(2n)^{p+1}}$, ďalej stačí použiť nerovnosť $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p}{(2n)^{p+1}}\geq\int_1^{\infty}\frac{p}{(2x)^{p+1}}\,dx$ (pozri pr. 228.2);

279 v prípade $p=m$ možno použiť Dirichletovo kritérium, resp. kritérium z pr. 244.2; pre $p<m$ (prípad $p>m$ je analogický) platí $S_{k(m+p)}=\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\cdots-\frac{1}{2p}\right]-\left(\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{p+m}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(k-1)(p+m)+1}+\cdots+\frac{1}{kp+(k-1)m}-\frac{1}{kp+(k-1)m+1}-\cdots-\frac{1}{(k+1)p+(k-1)m}\right]-\left(\frac{1}{(k+1)p+(k-1)m+1}+\cdots+\frac{1}{k(p+m)}\right)$, pričom súčet čísel v hranatých zátvorkách je čiastočný súčet konvergentného radu (stačí použiť Dirichletovo kritérium, resp. kritérium z pr. 244.2) a súčet čísel v okrúhlych zátvorkách je čiastočný súčet divergentného radu;

280 **<u>1.</u>** pozri pr. 247.3; **<u>2.</u>** napr. nasledujúce prerovnanie: 1 kladný člen, 1 záporný, 1 kladný, 3 záporné, 1 kladný, 5 záporných, …, jeho (n^2+n)–tý čiastočný súčet $\Bigl($ktorý je súčtom prvých n kladných a prvých n^2 záporných členov radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Bigr)$ je podľa pr. 247.1 rovný $-\frac{1}{2}\ln 4n+\frac{1}{2}\varepsilon_n-\eta_{n^2}$;

281 podľa pr. I.173.2 každé prerovnanie postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnú 0, pre postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov prerovnaného radu teda platí $\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n)=0$, tvrdenie pr. 281 potom vyplýva z pr. I.202 (analógia tvrdenia pr. I.202 pre neohraničené postupnosti má rovnaký dôkaz ako pr. I.202);

282 **<u>1.</u>** $\sum_{k=1}^{n}(a_k-\sin a_k)=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$, pritom $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$ (pozri pr. I.156.5),

---

[31] toto je myšlienka dôkazu odhadu pre R_n v Leibnizovom kritériu

súčasne $a_n - \sin a_n = a_n - \left(a_n - \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)\right) = \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)$, preto rady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \sin a_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ majú rovnaký charakter $\Big($uvedomte si, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ je rad s konštantným znamienkom$\Big)$; **2.** $\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$, pritom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, súčasne — pretože $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$ pre $n \to \infty$ a $\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ — má rad $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$ rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$, ktorý má $\left(\text{pretože } 1 - \frac{\sin a_n}{a_n} = \frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2)\right)$ rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$; **3.** konverguje len pre $x \in [-1, 1)$ $\Big($použite vetu 6' z odseku 3.3 a fakt, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$; pre $x = 1$ využite skutočnosť, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je postupnosť s konštantným znamienkom, nerovnosť $|a_n| \ge a_n^2$ a pr. 282.2; pre $x = -1$ využite monotónnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pr. 282.2 a návod k pr. 240$\Big)$;

283 **1.** konverguje $\left(\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{5}{16}\right.$, preto rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ konvergujú$\Big)$; **2.** konverguje (použite pr. I.156.5 a Dirichletovo kritérium, resp. kritérium z pr. 244.2); **3.** diverguje $\Big(\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\big(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená klesajúca postupnosť, jej limita je riešením rovnice $x = \ln(1+x)\big)$; hľadajme $p \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo $\lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1}^p - a_n^p\right)$ je konečná a nenulová: $a_{n+1}^p - a_n^p = \ln^p(1 + a_n) - a_n^p = \left(a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)\right)^p - a_n^p = a_n^p\left(1 - \frac{a_n}{2} + o(a_n)\right)^p - a_n^p = a_n^p\left(1 - \frac{pa_n}{2} + o(a_n)\right) - a_n^p = -\frac{pa_n^{p+1}}{2} + a_n^p \cdot o(a_n)$, odtiaľ vidno, že treba zvoliť $p = -1$; potom $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}$, odtiaľ podľa pr. I.171 vyplýva $\lim_{n\to\infty} \frac{1/a_{n+1} - 1/a_1}{n} \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)\right]\right) = \frac{1}{2}$, preto $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{1/n} = 2$, teda podľa porovnávacieho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje$\Big)$; **4.** konverguje len pre $a = 0$, $a = 1$ $\Big($postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v prípade $a \in (0, 1)$ a postupnosť $\{-a_n\}_{n=2}^{\infty}$ v prípade $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ sú klesajúce postupnosti s limitou 0; podobne ako v riešení pr. 283.3 zistíme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{1/n}$ [32] $= 1$; stačí si uvedomiť, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je pre $a \neq 0$, $a \neq 1$ radom s konštantným znamienkom, a použiť porovnávacie kritérium$\Big)$;

284 z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx_0}$ vyplýva ohraničenosť postupnosti $\{a_n e^{-nx_0}\}_{n=1}^{\infty}$, preto pre niektoré $K > 0$ platí $\left|a_n e^{-nx}\right| = \left|a_n e^{-nx_0} \cdot \left(e^{(x_0 - x)}\right)^n\right| \le K\left(\frac{1}{e^{x - x_0}}\right)^n$;

285 použijeme nasledujúce tvrdenie [33]: „ak $0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ a pre čísla $b_1 \ldots, b_n$ platí $|b_1| \le A$, $|b_1 + b_2| \le A$, …, $|b_1 + \cdots + b_n| \le A$, tak $|a_1 b_1 + \cdots a_n b_n| \le 2Aa_n$“; z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-p}$ vyplýva ohraničenosť postupnosti jeho čiastočných súčtov $\left(\left|\sum_{k=1}^{n} a_k k^{-p}\right| \le B\right.$ pre niektoré $B > 0$

---

[32] pre $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosťou záporných čísel, postup z pr. 283.3 preto uplatňujeme na postupnosť $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$

[33] toto tvrdenie sa dokazuje pomocou *Abelovej parciálnej sumácie* (pozri napr. [24, str.135-136, dôkaz Abelovej lemy])

a všetky $n \in \mathbf{N}\Big)$ a — ak je dané $\varepsilon > 0$ — podľa vety 2 $\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N},\, n > N \quad \forall q \in \mathbf{N} \,:\, \big|a_n n^{-p} + \cdots + a_{n+q}(n+q)^{-p}\big| < \dfrac{\varepsilon}{4}$; nech $n > N$, potom $\left|\dfrac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \left|\dfrac{a_1}{1^p}\left(\dfrac{1}{n}\right)^p + \dfrac{a_2}{2^p}\left(\dfrac{2}{n}\right)^p + \cdots + \dfrac{a_N}{N^p}\left(\dfrac{N}{n}\right)^p\right| + \left|\dfrac{a_{N+1}}{(N+1)^p}\left(\dfrac{N+1}{n}\right)^p + \cdots + \dfrac{a_n}{n^p}\cdot 1^p\right| \le 2B\left(\dfrac{N}{n}\right)^p + 2\cdot\dfrac{\varepsilon}{4}\cdot 1^p$, preto pre $n > \max\left\{N, N\left(\dfrac{4B}{\varepsilon}\right)^{1/p}\right\}$ je $\left|\dfrac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$;

286 **1.** ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tak rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ majú rovnaký charakter, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n/(1+a_n)}{a_n} = 1$; ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje alebo sa nerovná 0, možno z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrať podpostupnosť $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ takú, že existuje $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n(k)} =: A \in \mathbf{R}^*$, $A \ne 0$; potom rad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_{n(k)}}{1+a_{n(k)}}$ nespĺňa nutnú podmienku konvergencie $\left(\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{n(k)}}{1+a_{n(k)}} = \begin{cases} 1, & \text{ak } A = \infty \\ \dfrac{A}{1+A}, & \text{ak } A \in \mathbf{R} \end{cases}\right)$; pretože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ je rad s kladnými členmi, vyplýva z divergencie radu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_{n(k)}}{1+a_{n(k)}}$ divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$;

2. pre $p = 1$: ukážeme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ nespĺňa Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie: $\dfrac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \dfrac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \dfrac{a_{n+p}}{S_{n+p}} > \dfrac{a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}}{S_{n+p}} = \dfrac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \dfrac{S_n}{S_{n+p}}$, pritom — pretože $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ — platí $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists p \in \mathbf{N} \,:\, \dfrac{S_n}{S_{n+p}} < \dfrac{1}{2}$;

pre $p > 1$: ak na intervale $[S_n, S_{n+1}]$ použijeme pre funkciu $\dfrac{1}{x^{p-1}}$ Lagrangeovu vetu o strednej hodnote, dostaneme $\dfrac{1}{S_n^{p-1}} - \dfrac{1}{S_{n+1}^{p-1}} = \dfrac{p-1}{c^p}(S_{n+1} - S_n) = \dfrac{(p-1)a_{n+1}}{c^p}$ pre niektoré $c \in (S_n, S_{n+1})$, preto $\dfrac{a_{n+1}}{S_{n+1}^p} \le \dfrac{a_{n+1}}{c^p} = \dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{1}{S_n^{p-1}} - \dfrac{1}{S_{n+1}^{p-1}}\right)$, pritom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{1}{S_n^{p-1}} - \dfrac{1}{S_{n+1}^{p-1}}\right)$ konverguje $\Bigg($jeho n–tý čiastočný súčet je $\dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{1}{S_1^{p-1}} - \dfrac{1}{S_{n+1}^{p-1}}\right)$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty\Bigg)$; v prípade $p < 1$ možno postupovať podobne ako pre $p > 1$ alebo využiť nerovnosť $\dfrac{a_n}{S_n} < \dfrac{a_n}{S_n^p}$ počínajúc niektorým $n_0 \in \mathbf{N}$;

287 **1.** $\dfrac{a_n}{R_n} + \dfrac{a_{n+1}}{R_{n+1}} + \cdots + \dfrac{a_{n+p}}{R_{n+p}} \ge \dfrac{a_n + \cdots + a_{n+p}}{R_n} \to 1$ pre $p \to \infty$, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n}$ nespĺňa Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie; **2.** podobne ako pri riešení prípadu $p > 1$ v pr. 286.2 dostaneme $\sqrt{R_{n+1}} - \sqrt{R_n} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}\, a_n$ pre niektoré $c \in (R_{n+1}, R_n)$, preto $\dfrac{a_n}{\sqrt{R_n}} < 2\big(\sqrt{R_{n+1}} - \sqrt{R_n}\,\big)$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$;

288 nech S_n, resp. P_n je n–tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; potom $S_n = [(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1})] + [(a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1})] + \cdots + [(a_k - a_{k+1}) + \cdots + (a_n - a_{n+1})] + \cdots + [a_n - a_{n+1}] = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n a_{n+1} = P_n - n a_{n+1}$, odtiaľ na základe pr. 211.1 vyplýva: ak existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, tak postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tú istú limitu [34]; nech teraz $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \infty$, nech $m \in \mathbf{N}$ je dané, potom — pretože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ — existuje $N \in \mathbf{N}$ tak, že $a_{N+1} < \dfrac{a_1}{2}, \ldots, a_{N+1} < \dfrac{a_m}{2}$, potom $S_N = (a_1 - a_{N+1}) + (a_2 - a_{N+1}) + \cdots + (a_m - a_{N+1}) + [(a_{m+1} - a_{N+1}) + \cdots + (a_N - a_{N+1})] >$

[34] toto tvrdenie je špeciálny prípad pr. 275 (stačí zvoliť $b_n \equiv 1$)

$\frac{1}{2}(a_1+\cdots+a_m)=\frac{P_m}{2}$ (číslo v hranatej zátvorke je nezáporné, pretože $a_{m+1}\geq a_{m+2}\geq\cdots\geq a_{N+1}$);

289 napr. rad

$$1-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\cdots\underbrace{-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\cdots-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}_{n\text{–krát}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\cdots;$$

konvergenciu tohto radu možno dokázať na základe pr. 272; divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$ vyplýva z pr. 237.3;

290 označme $P_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $S_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{p_k}$; z nerovností $a_{p_k}\geq a_{(k-1)c+1}$, $k\in\mathbf{N}$ (táto nerovnosť vyplýva z nerovnosti $p_k\leq(k-1)c+1$ a monotónnosti postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$) a $ca_{(k-1)c+1}\geq a_{(k-1)c+1}+a_{(k-1)c+2}+\cdots+a_{kc}$, $k\in\mathbf{N}$, dostávame $S_n\geq\sum\limits_{k=1}^{n}a_{(k-1)c+1}\geq\frac{1}{c}[(a_1+\cdots+a_c)+(a_{c+1}+\cdots+a_{2c})+\cdots+(a_{(n-1)c+1}+\cdots+a_{nc})]=\frac{1}{c}P_{cn}$;

291 pozri pr. 287.2;

292 **<u>2.</u>** v pr. 292.1 položte $a_n=x_{n+1}-x_n$, $b_n=y_{n+1}-y_n$, ďalej využite rovnosť $\frac{x_n}{y_n}=\left(\frac{x_n-x_1}{y_n-y_1}\right)\left(1-\frac{y_1}{y_n}\right)+\frac{x_1}{y_n}$; **<u>3a</u>**) $\frac{1}{p}$ [35] $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^{p-1}}{(n+1)^p-n^p}\right.$, pritom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote $(n+1)^p-n^p=pc^{p-1}$ pre niektoré $c\in(n,n+1)$, preto $\frac{(n+1)^{p-1}}{p(n+1)^{p-1}}\leq\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\leq\frac{(n+1)^{p-1}}{pn^{p-1}}$, a teda $\left.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{1}{p}\right)$; **<u>3b</u>**) $\frac{1}{2}$ [36] (ak $x_n:=p1^{p-1}+\cdots+pn^{p-1}-n^p$, $y_n:=pn^{p-1}$, tak

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{pn^{p-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}-n^p\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right)}{pn^{p-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1}-1\right)}=$$

$$=\frac{pn^{p-1}\left(1+\frac{p-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-n^p\left(\left(1+\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right)}{pn^{p-1}\left(\left(1+\frac{p-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)}=$$

$$=\frac{n^{p-2}\left(\frac{p(p-1)}{2}+pno\left(\frac{1}{n}\right)+n^2o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n^{p-2}\left(p(p-1)+pno\left(\frac{1}{n}\right)\right)};$$

<u>4.</u> stačí dokázať, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{S_n}}{\ln S_n-\ln S_{n-1}}=1$ a použiť tvrdenie z pr. 292.1; podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote je $\ln S_n-\ln S_{n-1}=\frac{1}{c_n}(S_n-S_{n-1})=\frac{a_n}{c_n}$ pre niektoré $c_n\in(S_{n-1},S_n)$; c_n možno zapísať v tvare $c_n=S_n-\vartheta_n a_n$, kde $\vartheta_n\in(0,1)$, potom $\frac{\frac{a_n}{S_n}}{\ln S_n-\ln S_{n-1}}=\frac{\frac{a_n}{S_n}}{\frac{a_n}{S_n-\vartheta_n a_n}}=1-\vartheta_n\frac{a_n}{S_n}$;

293 ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, tak existuje konečná nenulová $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ a

[35] pozri tiež pr. 83.2

[36] na výpočet tejto limity možno použiť v prípade $p\geq2$ výsledok pr. 168, ak v ňom zvolíme $f(x)=x^{p-1}$, $a=0$, $b=1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}}{a_{n+1}-a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ má rovnaký charakter ako konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$; ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená, tak nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie: $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} > \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+p+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} = 1-\dfrac{a_n}{a_{n+p+1}} \to 1$ pre $p\to\infty$;

294 z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ a rastu funkcie f vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$, kde $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; ukážeme, že postupnosť $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(a_n)}{n}$ je zhora ohraničená, využijeme pritom Jensenovu nerovnosť ,,ak funkcia f je konkávna na intervale I, $x_i\in I$, $\lambda_i>0$ $(i = 1,\dots,n)$ a $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, tak $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \geq \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$" (pozri aj pr. I.453); potom — pretože $\dfrac{1}{m}\big(f(a_{m+1})+\cdots+f(a_{2m})\big) \leq f\left(\dfrac{1}{m}(a_{m+1}+\cdots a_{2m})\right) \leq f\left(\dfrac{S}{m}\right)$ — je $P_{2^k} \leq f(a_1)+f(a_2)+\dfrac{1}{2}\big(f(a_3)+f(a_4)\big)+\dfrac{1}{4}\big(f(a_5)+\cdots+f(a_8)\big)+\cdots+\dfrac{1}{2^{k-1}}\big(f(a_{2^{k-1}+1})+\cdots+f(a_{2^k})\big) \leq f(a_1)+f(a_2)+f\left(\dfrac{S}{2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{S}{2^{k-1}}\right) \leq f(a_1)+f(a_2)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}}{a_{n+1}-a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ má rovnaký charakter ako konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$; ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená, tak nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium konvergencie: $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} > \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+p+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}} = 1-\dfrac{a_n}{a_{n+p+1}} \to 1$ pre $p\to\infty$;

294 z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ a rastu funkcie f vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$, kde $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; ukážeme, že postupnosť $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f(a_n)}{n}$ je zhora ohraničená, využijeme pritom Jensenovu nerovnosť „ak funkcia f je konkávna na intervale I, $x_i \in I$, $\lambda_i > 0$ ($i = 1,\ldots,n$) a $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, tak $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \ge \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$“ (pozri aj pr. I.453); potom — pretože $\dfrac{1}{m}\big(f(a_{m+1})+\cdots+f(a_{2m})\big) \le f\left(\dfrac{1}{m}(a_{m+1}+\cdots a_{2m})\right) \le f\left(\dfrac{S}{m}\right)$ — je $P_{2^k} \le f(a_1)+f(a_2)+\dfrac{1}{2}\big(f(a_3)+f(a_4)\big)+\dfrac{1}{4}\big(f(a_5)+\cdots+f(a_8)\big)+\cdots+\dfrac{1}{2^{k-1}}\big(f(a_{2^{k-1}+1})+\cdots+f(a_{2^k})\big) \le f(a_1)+f(a_2)+f\left(\dfrac{S}{2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{S}{2^{k-1}}\right) \le f(a_1)+f(a_2)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{S}{2^n}\right)$;

4. Postupnosti a rady funkcií

295 **1**. $\dfrac{x^2}{3}$, $x\ge 0$; **2**. $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ $\big($pre $x\in[0,1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, $f_n(1)=0$ pre všetky $n\in\mathbf{N}\big)$; **3**. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x\ne k\pi/2,\ k\in\mathbf{Z} \\ 1, & \text{ak } x\in\{2k\pi\,;\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\pi/2+2k\pi\,;\ k\in\mathbf{Z}\}\end{cases}$ $\Big(D(f)=\mathbf{R}\setminus\big(\{(2k+1)\pi\,;\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{-\pi/2+2k\pi\,;\ k\in\mathbf{Z}\}\big)\Big)$; **4**. $f(x)=x^5$ $\left(\text{pre } x\ne 0 \text{ je } \lim\limits_{n\to\infty} n^2x^4\sin\dfrac{x}{n^2+n} = x^5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{n^2+n}}{\dfrac{x}{n^2+n}}\cdot\dfrac{n^2}{n^2+n}\,;\ f_n(0)=0 \text{ pre všetky } n\in\mathbf{N}\right)$; **5**. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x\in(0,1] \\ (x-1)\pi/2, & \text{ak } x>1\end{cases}$ $\left(\text{pripomeňme, že } \lim\limits_{u\to\infty}\operatorname{arctg} u = \dfrac{\pi}{2}\right)$; **6**. $\dfrac{\ln x}{2}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{\ln x}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/2n}\dfrac{e^{(\ln x)/2n}-1}{(\ln x)/2n}\,;\ \text{pripomeňme, že } \lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \text{ pre } a>0\right)$; **7**. $f(x)\equiv 0$, $x\ge 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} n^3e^{-nx} = \lim\limits_{y\to\infty} g(y),\ \text{kde } g(y) = \dfrac{y^3}{(e^x)^y},\ y\in\mathbf{R},\ \text{pritom } \lim\limits_{y\to\infty} g(y) \text{ možno nájsť použitím l'Hospitalovho pravidla}\right)$; **8**. $f(x)\equiv 0$, $x>0$ $\left(\text{podobne ako v pr. 295.7 možno } \lim\limits_{y\to\infty} g(y),\ \text{kde } g(y) = \dfrac{x\ln xy}{y},\ y\in\mathbf{R}^+,\ \text{nájsť použitím l'Hospitalovho pravidla}\right)$; **9**. $\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$ (využite, že $\lim\limits_{y\to\infty} y\operatorname{arcctg} y = 1$ — možno to dokázať použitím l'Hospitalovho pravidla alebo použitím substitúcie $\operatorname{arcctg} y = t$) ; **10**. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x\in[0,1] \\ x, & \text{ak } x\in(1,2] \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{ak } x\in(2,\infty)\end{cases}$ $\Big($pre $x\in(0,1)$

je $f_n(x) = \left[\left(1 + x^n + \dfrac{x^n}{2^n}\right)^{1/n}\right]$, $f_n(1) = \sqrt[n]{2}\left[\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^{1/n}\right]$, pre $x \in (1,2)$ je $f_n(x) = x\left[\left(1 + \dfrac{1}{x^n} + \left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right)^{1/n}\right]$, $f_n(2) = 2^{(n+1)/n}\left[\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^{1/n}\right]$, pre $x > 2$ je $f_n(x) = \dfrac{x^2}{2}\left[\left(1 + \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^n + \left(\dfrac{2}{x}\right)^n\right)^{1/n}\right]$, pritom funkcie v hranatých zátvorkách sú neurčité výrazy typu 1^∞, ktorých limity možno vypočítať postupom z pr. I.148$\Big)$; **11**. $\operatorname{sgn} x$ (načrtnite si grafy funkcií f_n); **12**. $f(x) \equiv 0$, $x > 0$;

$\boxed{\mathbf{296}}$ **1.** nech $x < y$, potom z nerovností $f_n(x) \le f_n(y)$, $n \in \mathbf{N}$, vyplýva $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \le \lim\limits_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$; **2.** podobne ako v pr. 296.1 prejdite k limite pre $n \to \infty$ v nerovnosti $f_n(px + qy) \le pf_n(x) + qf_n(y)$, $n \in \mathbf{N}$, kde $x, y \in (a,b)$, $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$;

$\boxed{\mathbf{297}}$ **1.** $x > 1$ (pozri vetu 5 z odseku 3.2); **2.** $|x| > 1$ $\big($použite vetu 6' alebo 7' z odseku 3.3 [1], prípady $x = 1$, $x = -1$ treba vyšetriť samostatne$\big)$; **3**. $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(\left[-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]\right)$; **4**. $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\big[2k\pi, (2k+1)\pi\big]$; **5**. $\mathbf{R}$ (vyplýva to z Leibnizovho kritéria); **6**. $\mathbf{R} \setminus \{-1, -2, -3, \ldots\}$; **7**. $[0, \infty)$; **8**. $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ $\Bigg($možno použiť vetu 6' z odseku 3.3: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{1 + x^{n+1}}\right| = \begin{cases} |x|, & \text{ak } 0 < |x| < 1 \\ 0, & \text{ak } |x| > 1 \end{cases}$ [2], pre $x = 1$ dostávame rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, pre $x = 0$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0\Bigg)$; **9**. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (použili sme Raabeho kritérium a prípady $x = 1$, $x = -1$ sme vyšetrili samostatne); **10**. $\mathbf{R}$ $\left(\left|\dfrac{\cos \pi n x}{n \ln^2(n+1)}\right| \le \dfrac{1}{n \ln^2 n}\right.$ pre $n \ge 2$ a rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ konverguje podľa integrálneho kritéria$\Big)$; **11**. $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z}\}$ $\big($použili sme Dirichletovo kritérium, pre dané $x \ne 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ je postupnosť čiastočných súčtov číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ ohraničená — pozri riešenie pr. 243.5$\big)$; **12**. $x \in (-1, 1)$ $\left(\text{pre } |x| < 1 \text{ je } \left|\dfrac{x^n}{1 - x^n}\right| \le \dfrac{|x|^n}{1 - |x|^n}\right.$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|^n}{1 - |x|^n}$ má podľa tvrdenia α) vety 4b z odseku 3.2 rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n$; pre $|x| > 1$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{298}}$ nech $f_n(x) = a_n x + b_n$, z konvergencie radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n a + b_n)$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b + b_n)$ vyplýva konvergencia radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$; ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n x + b_n) = Ax + B$;

$\boxed{\mathbf{299}}$ toto tvrdenie možno dokázať rovnako ako implikáciu „$\Longleftarrow$“ z vety 2 alebo ho z tejto implikácie odvodiť $\big($zo vzťahov $\sup\limits_{x\in M}|f_n(x) - f(x)| \le c_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in M}|f_n(x) - f(x)| = 0\big)$;

$\boxed{\mathbf{300}}$ **1.** rovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x > 0$ $\left(\sup\limits_{x>0}|f_n(x)| = \dfrac{1}{n}\right)$; **2.** rovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \ge 0$ $\left(|f_n(x)| \le \dfrac{1}{\ln(n+1)}\right.$, $x \ge 0$, ďalej pozri pr. 299$\Big)$; **3.** rovnomerne k $\sin\dfrac{x}{2}$ $\left(\left|\sin\dfrac{1 + nx}{2n} - \sin\dfrac{x}{2}\right| = \left|2 \sin\dfrac{1}{2n}\cos\dfrac{1 + 2nx}{2n}\right| \le 2\sin\dfrac{1}{2n}\right.$, $x \in \mathbf{R}\Big)$; **4.** rovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \ge 1$ $\Big($ak použijeme

---

[1] pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, pozri pr. I.135.2 alebo I.380.1

[2] pritom sme využili tvrdenie „ak $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = \infty$, tak $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0$“

nerovnosť $|\sin u| < |u|$ pre $u > 0$ — pozri riešenie pr. I.352.2 — dostaneme $\left|\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^4}\sin\dfrac{x^2}{\sqrt{n}}\right| < \dfrac{n^2x^4}{\sqrt{n}(1+n^2x^4)} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$; **5.** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$ $\left(\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}\left|\sin\dfrac{x}{n}\right| = 1 \text{ pre každé } n \in \mathbf{N}\right)$; **6.** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \geq 0$ $\Bigg($ pre $x > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\dfrac{\sqrt[4]{x}}{n}}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\cdot 0 = 0$, ale pre každé $n \in \mathbf{N}$ je funkcia f_n neohraničená na M — stačí vypočítať $f_n(x)$ pre $x = n\big((2k+1)\pi\big)^4$, $k \in \mathbf{N}\Bigg)$; **7.** nerovnomerne k $f(x) = x^2$, $x \geq 1$ $\big(\lim\limits_{x\to\infty}|f_n(x) - f(x)| = \infty$ pre každé $n \in \mathbf{N}\big)$; **9a)** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \in [0,10]$ $\left(\sup\limits_{x\in[0,10]}|f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1\right)$; **9b)** rovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \geq 1$ $\big(\sup\limits_{x\in[1,\infty)}|f_n(x)| = f_n(1)\big)$; **10.** konverguje rovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \in (0,1)$ $\big(\sup\limits_{x\in(0,1)}|f_n(x)| = -f_n(1)$, pri hľadaní tohto čísla treba využiť, že $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$ pre každé $n \in \mathbf{N}\big)$; **11a)** rovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1-\delta]$; **11b)** rovnomerne k $f(x) \equiv 1$, $x \in [1+\delta, \infty)$;

11c) nerovnomerne k $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \in [1-\delta, 1) \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ak } x = 1 \\ 1, & \text{ak } x \in (1, 1+\delta] \end{cases}$ $\left(\sup\limits_{x\in[1-\delta,1+\delta]}|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2},\ n \in \mathbf{N}\ ^{3}\right)$;

12. nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \in (0,1)$ $\big(\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1$, preto f_n musí „vyskočiť" z každého ε–pásu okolo funkcie f pre $0 < \varepsilon < 1\big)$; **13.** rovnomerne k $f(x) = |x|$ $\left(0 < \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \dfrac{(x^2 + 1/n^2) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1/n^2} + \sqrt{x^2}} < \dfrac{1/n^2}{1/n} = \dfrac{1}{n}\right)$; **14.** rovnomerne k $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in [0,1] \\ x, & \text{ak } x \in (1,2] \end{cases}$ $\Bigg(|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \leq \sqrt[n]{2} - 1 & \text{pre } x \in [0,1] \\ \sqrt[n]{1+x^n} - x \leq \sqrt[n]{2x^n} - x = x\big(\sqrt[n]{2} - 1\big) \leq 2\big(\sqrt[n]{2} - 1\big) & \text{pre } x \in (1,2] \end{cases}$, teda $|f_n(x) - f(x)| \leq 2\big(\sqrt[n]{2} - 1\big)$ [4]; pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1\Bigg)$; **15.** nerovnomerne k $f(x) \equiv 0$, $x \geq 0$ (načrtnite si grafy funkcií

[3]každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, teda „vyskočí" z ε–pásu okolo funkcie f pre $0 < \varepsilon < 0.5$; na obr. 11 je znázornený tento ε–pás pre $\varepsilon = 0.2$ $\big($a $\delta = 0.5\big)$; v tomto ε–páse nemôže ležať graf žiadnej spojitej funkcie $g\colon[1-\delta, 1+\delta] \to \mathbf{R}$; funkcia g je totiž darbouxovská na $[1-\delta, 1+\delta]$ (pozri vetu 4 pred pr. I.234) a musela by preto nadobúdať všetky hodnoty z intervalu $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $\big($platí totiž $g(x) < \varepsilon$ pre $x \in [1-\delta, 1)$, $g(x) > 1-\varepsilon$ pre $x \in (1, 1+\delta]\big)$, čo ale nie je možné; podobnými úvahami možno dokázať toto tvrdenie (ktoré je špeciálnym prípadom dôsledku vety 7'): „ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých funkcií, $f_n \to g$ na M a $g|M$ má bod nespojitosti 1. druhu, tak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množine M k funkcii g nerovnomerne"

[4]použili sme vlastne túto elementárnu úvahu: „ak $D(f) = M \cup N$, $f_n \rightrightarrows f$ na M a $f_n \rightrightarrows f$ na N, tak

obr. 11.

f_n, $n \in \mathbf{N}$);

$\boxed{\mathbf{302}}$ $|f(x) - f_n(x)| = \frac{1}{n}\big|nf(x) - [nf(x)]\big| < \frac{1}{n}$, $x \in [a,b]$;

$\boxed{\mathbf{303}}$ **1.** platí (pre spojitú funkciu $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ platí implikácia „$|f_n(x)| < \varepsilon$, $x \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \Longrightarrow |f_n(x)| \le \varepsilon$, $x \in [0,1]$“, ktorú možno dokázať nasledovne: pre $a \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$ existuje postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,1] \cap \mathbf{Q}$ taká, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$, potom — ak v nerovnosti $|f_n(a_k)| < \varepsilon$ prejdeme k limite pre $k \to \infty$ a využijeme spojitosť funkcie $|f_n|$ — dostaneme $|f_n(a)| = \lim\limits_{k\to\infty} |f_n(a_k)| \le \varepsilon$; pozri tiež pr. I.231); **2.** neplatí, napr. $f_n(x) = \left(1 - \left|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right)^n$, $x \in [0,1]$ $\quad \left(f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,\ n \in \mathbf{N}\right)$;

$\boxed{\mathbf{304}}$ nepriamo; ak M nie je konečná, tak existuje prostá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, nech $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak} \quad x \in M \setminus \{a_n\} \\ 1, & \text{ak} \quad x = a_n \end{cases}$, potom $f_n \to 0$ na M, ale neplatí $f_n \rightrightarrows 0$ na M;

$\boxed{\mathbf{305}}$ **1a)** konverguje rovnomerne k $S(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| \le q$ $\quad \left(S_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},\ n = 0,1,\dots,\ |S_n(x) - S(x)| = \frac{x^{n+1}}{1-x} \le \frac{q^{n+1}}{1-q},\ |x| \le q\right)$; **1b)** konverguje nerovnomerne k $S(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ (pre každé $n \in \mathbf{N}$ je $|S_n - S|$ neohraničená na $(-1,1)$); **2.** konverguje nerovnomerne k $S(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak} \quad x = 1 \\ 1, & \text{ak} \quad x \in [0,1) \end{cases}$ $\quad \left(S_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} (1-x)x^k = 1 - x^{n+1},\ n = 0,1,2,\dots,\ \sup\limits_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| = 1\right)$;
3. konverguje rovnomerne k $S(x) = 2x$, $x \ge 1$; **4.** konverguje rovnomerne k $S(x) = x$, $x \in [-1,1]$;
5. konverguje rovnomerne k $S(x) = \frac{1}{x+1}$, $x > 0$ $\quad \left(\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right)$;
6. konverguje nerovnomerne k $S(x) \equiv 1$, $x > 0$ $\quad \left(S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x}{\big((n-1)x+1\big)(nx+1)} = 1 - \frac{1}{nx+1},\ \lim\limits_{x\to 0} |S_n(x) - S(x)| = 1\right)$;

$\boxed{\mathbf{306}}$ stačí aplikovať tvrdenie pr. 301 na postupnosť $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ a funkciu g;

$\boxed{\mathbf{307}}$ **1.** nech $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, $S := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$; ak pre $n > n_0$ a všetky $x \in M$ platí $|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, tak z nerovností $|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|S_{n+1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ vyplýva $|f_{n+1}(x)| = |S_{n+1}(x) - S_n(x)| = \big|\big(S_{n+1}(x) - S(x)\big) + \big(S(x) - S_n(x)\big)\big| \le |S_{n+1}(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ pre všetky $n > n_0$ a $x \in M$ (uvedené tvrdenie možno odvodiť aj z vety 3);

2a) bodová konvergencia vyplýva napr. z Cauchyho kritéria; pre každé $n \in \mathbf{N}$ je $\lim\limits_{x\to 0} e^{-nx} = 1$, preto neplatí $e^{-nx} \rightrightarrows 0$ na $(0,\infty)$, a teda podľa pr. 307.1 rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ nekonverguje rovnomerne na $(0,\infty)$; **2b)** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite pre $x \ne 0$ rovnosť $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$ a porovnávacie kritérium; $\forall n \in \mathbf{N}$: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$, preto neplatí $\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n}\right)^2 \rightrightarrows 0$ na $\mathbf{R}$; **2c)** $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{5^{1/3} n^{2/3}}\right) = \frac{5^{5/6}}{6}\, n^{1/6}$, kde $f_n(x) := \frac{\sqrt{nx}}{1 + x^3 n^2}$; **2d)** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite rovnosť $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ a porovnávacie kritérium; pre každé $n \in \mathbf{N}$ je funkcia $f_n(x) := 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$, $x > 0$, neohraničená $\left(\text{stačí vypočítať } f_n\left(\frac{2}{3^n \pi (1+2k)}\right),\ k \in \mathbf{N}\right)$; **2e)** bodová konvergencia vyplýva z nerovnosti $\left|\frac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}}\right| \le \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$; pretože $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin 1}{2}$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$, nemôže platiť $\frac{\sin nx}{(1+nx)\sqrt{nx}} \rightrightarrows 0$ na $(0,\pi)$;

$f_n \rightrightarrows f$ na $M \cup N$“

3. napr. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+1}{n}$ $\big($tento rad dokonca nekonverguje pre žiadne $x \in [0,1]$, porovnaj s pr. 373; na týchto dvoch príkladoch vidno rozdiel medzi termímni ,,nekonverguje rovnomerne" a ,,konverguje nerovnomerne"$\big)$;

$\boxed{\textbf{308}}$ **1.** pre $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ platí $x^2 e^{-(n+1)x^2} + x^2 e^{-(n+2)x^2} + \cdots + x^2 e^{-2nx^2} \geq e^{-2}$; **3.** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite nerovnosť $|\operatorname{arctg} u| \leq |u|$ [5]; pre $x = 2n\pi$ je $\frac{x}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{n+1} + \frac{x}{n+2} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{n+2} + \cdots + \frac{x}{2n} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2n} \geq \pi n \operatorname{arctg} \frac{1}{2n}$, pritom $\lim_{n\to\infty} \pi n \operatorname{arctg} \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$, preto $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \ \forall n \in \mathbf{N},\ n > n_0\ :\ \pi n \operatorname{arctg} \frac{1}{2n} > \frac{\pi}{4}$, teda celkovo $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \ \forall n \in \mathbf{N},\ n > n_0\ \ \exists x > 1\ :$ $\frac{x}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{n+1} + \cdots + \frac{x}{2n} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2n} > \frac{\pi}{4}$; **4.** pri vyšetrovaní bodovej konvergencie využite nerovnosť $\left|\frac{\sin nx}{e^{n^2 x}}\right| \leq \left(\frac{1}{e^x}\right)^{n^2}$ a potom napr. Cauchyho kritérium; pre $x = \frac{1}{n^2}$ je $\frac{\sin(n+1)x}{e^{(n+1)^2 x}} + \frac{\sin(n+2)x}{e^{(n+2)^2 x}} + \cdots + \frac{\sin 2nx}{e^{(2n)^2 x}} \geq \frac{n \sin(1/n)}{e^4}$, pritom $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^4} n \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{e^4}$, ďalej pozri záver riešenia pr. 308.3;

$\boxed{\textbf{309}}$ **1.** ak $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$ pre všetky $x \in (a,b)$, tak (ak v uvedenej nerovnosti prejdeme k limite pre $x \to a+$, $x \to b-$) platí $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$ pre všetky $x \in [a,b]$, preto: ak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ vyhovuje Cauchyho–Bolzanovmu kritériu na (a,b), tak mu vyhovuje aj na $[a,b]$; **2.** uvedený rad diverguje v bodoch $x = 2$, $x = -2$ (nie je splnená nutná podmienka konvergencie), ďalej pozri pr. 309.1 [6]; nezabudnite dokázať bodovú konvergenciu na $(-2,2)$;

$\boxed{\textbf{310}}$ $|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)|$, $x \in M$;

$\boxed{\textbf{311}}$ **1.** $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; **2.** $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; **3.** $|f_n(x)| \leq e^{-\sqrt{n}}$, $x \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$, konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ vyplýva z rovnosti $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = 0$ [7] a z porovnávacieho kritéria; **5.** $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; **6.** $|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n} \leq \frac{a^2}{n \ln^2 n}$, $x \in [-a,a]$, $n = 2,3\ldots$, ďalej použite integrálne kritérium; **8.** $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{e^2 n^2}$; **9.** $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$; **10.** $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}\, n \ln^{3/2}(n+1)}$, pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{3/2}(n+1)}$ použite nerovnosť $\frac{1}{n \ln^{3/2}(n+1)} < \frac{1}{n \ln^{3/2} n}$, $n > 1$ $\Bigg($alebo rovnosť $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \ln^{3/2}(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)\ln^{3/2}(n+1)}}$ a tvrdenie α) vety 4b z odseku 3.2$\Bigg)$ a integrálne kritérium; **11.** $|f_n(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}$, $x \geq 0$, pre $g_n(x) := \frac{\sqrt{x}}{n\sqrt{x^2+n^2}}$ platí $\sup_{x\geq 0} g_n(x) = g_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{3/2}}$, teda $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{3/2}}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$; **12.** $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} f_n(x) = f_n\big(n^{3/2}\big) = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{3/2}}$, pri vyšetrovaní

---

[5]tá vzhľadom na nepárnosť funkcie arctg vyplýva z nerovností $0 \leq \operatorname{arctg} x \leq x$, $x \geq 0$, z ktorých druhú možno dokázať na základe vety 12 pred pr. I.352

[6]pri týchto úvahách by sme namiesto tvrdenia z pr. 309.1 mohli rovnako dobre použiť aj vetu 7' z odseku 4.2

[7]možno to dokázať použitím l'Hospitalovho pravidla na výpočet $\lim_{y\to\infty} g(y)$, kde $g(y) := \frac{y^4}{e^y}$, $y \in \mathbf{R}$

konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ využite rovnosť $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$ (alebo nerovnosť $\operatorname{arctg} u < u$, $u > 0$ — pozri riešenie pr. 308.3) a porovnávacie kritérium;

$\boxed{\mathbf{312}}$ z monotónnosti funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, vyplýva $|f_n(x)| \leq \max\big\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\big\} \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$, $x \in [a,b]$;

$\boxed{\mathbf{314}}$ **1.** pre $f_n(x) \equiv (-1)^n$, $g_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$ sú na M splnené predpoklady vety 6; **3.** pre $f_n(x) \equiv \dfrac{(-1)^n}{n}$, $g_n(x) = x^n$ sú na M splnené predpoklady vety 5;

$\boxed{\mathbf{315}}$ pre $f_n(x) \equiv a_n$, $g_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ sú splnené predpoklady vety 5;

$\boxed{\mathbf{316}}$ **1.** rovnomerne; **2.** rovnomerne; **3.** rovnomerne $\big(M = (-\infty, 0)\big)$; **4.** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie — pozri pr. 307.1; nezabudnite, že treba dokázať bodovú konvergenciu na M); **5.** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie); **6.** rovnomerne $\left(|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2n(4+\ln^2 2n)},\ x \geq 2\right)$; **7.** rovnomerne (možno použiť vetu 5); **8.** rovnomerne (pozri myšlienku riešenia pr. 311.11); **9.** rovnomerne $\Bigg($možno použiť vetu 6, pre $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, je $\sum\limits_{m=1}^{n} \sin x \sin mx = \sin x \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)$, rovnosť $\sum\limits_{m=1}^{n} \sin x \sin mx = \cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)$ platí zrejme aj pre $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; pozri aj pr. 243.4$\Bigg)$; **10a)** rovnomerne $\left(\left|\sum\limits_{m=1}^{n} \sin mx\right| \leq \dfrac{1}{\sin(\varepsilon/2)}\right.$ pre $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, v súvislosti s pr. 316.10b si uvedomte, že $\left.\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \dfrac{1}{\sin(\varepsilon/2)} = \infty\right)$; **10b)** nerovnomerne $\Big($nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium: $\dfrac{\sin(1+1/n)}{n+1} + \dfrac{\sin(1+2/n)}{n+2} + \cdots + \dfrac{\sin(1+n/n)}{n+n} \geq \dfrac{\sin 1}{2}$, $n \in \mathbf{N}$; opäť nezabudnite dokázať bodovú konvergenciu$\Big)$; **11a)** rovnomerne $\left(|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}},\ x \in (0,1)\right)$; **11b)** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie); **12a)** rovnomerne; **12b)** nerovnomerne $\Big($nie je splnené Cauchyho–Bolzanovo kritérium: $\dfrac{n}{(n+1)^2} \sin\dfrac{n^2}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(2n)^2} \sin\dfrac{n^2}{(2n)^2} \geq \dfrac{1}{4} \sin\dfrac{1}{4}$, $n \in \mathbf{N}\Big)$; **13a)** nerovnomerne (nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie); **13b)** rovnomerne $\Big($pri vyšetrovaní konvergencie majorantného radu využite fakt, že $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$ a porovnávacie kritérium$\Big)$; **14.** rovnomerne $\big($využite nerovnosť $|\operatorname{arctg} u| \leq |u|$, $u \in \mathbf{R}$, pozri aj riešenie pr. 308.3$\big)$;

$\boxed{\mathbf{317}}$ **1.** 1 $\left(= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n};\right.$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n^x}$ konverguje rovnomerne napr. na $[0,1]$ [8] podľa Weierstrassovho kritéria$\Big)$ [9]; **2.** $\dfrac{1}{2} \ln 2$ $\Big(= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$, pozri pr. 247.2, pri vyšetrovaní rovnomernej konvergencie na niektorom okolí bodu 1 použite Abelovo kritérium$\Big)$ [10]; **3.** 1 $\left(= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)};\ \left|\dfrac{x^2}{1+n(n+1)x^2}\right| \leq\right.$

---

[8]za množinu M z vety 7' sme mohli v tomto prípade zvoliť napr. aj $(0,\infty)$, $[0,\infty)$ alebo ľubovoľný interval $[0,a]$, $(0,a)$

[9]treba si uvedomiť, že vety 7 a 7' možno použiť aj pri výpočte jednostranných limít, pretože napr. $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ je definovaná rovnosťou $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)|D(f)\cap(a, a+\varepsilon)$

[10]Pri riešení tohto príkladu (aj pr. 317.1) sme vlastne využili tento dôsledok vety 7': *Ak každá z funkcií*

$\frac{1}{n(n+1)}\,,\ x \in \mathbf{R}\Big)$; **4**. 1 $\Big($v tomto prípade nie sme oprávnení použiť vetu 7', rad $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$ bodove konverguje k funkcii $f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{ak } x \in (-1,1) \\ 0\,, & \text{ak } x = 1 \end{cases}$, ale táto konvergencia nie je rovnomerná na žiadnom z intervalov $(\varepsilon, 1)$, kde $-1 < \varepsilon < 1\Big)$;

$\boxed{\mathbf{318}}$ **1**. $D(f) = \left[\frac{1}{e}, e\right]$, každá z fukcií $f_n(x) := \frac{\ln^n x}{n^2}$ je spojitá na $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ podľa Weierstrassovho kritéria, preto podľa dôsledku vety 7' je f spojitá funkcia; **2.** spojitá na $D(f) = [0, \infty)$ $\big($daný rad konverguje rovnomerne na $[0,\infty)$ podľa Weierstrassovho kritéria$\big)$; **3.** spojitá na $\mathbf{R}$ (daný rad konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$); **4.** spojitá na $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $\Big($daný rad konverguje lokálne rovnomerne na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ [11]; ak $[a-\varepsilon\,,\, a+\varepsilon] \subset D(f)$, tak $\left|e^{-n^2x^2}\cos nx\right| < e^{-n^2(|a|-\varepsilon)}$ pre $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\Big)$; **6**. $D(f) = \mathbf{R}$, f nie je spojitá v bode 0 [12] $\Bigg($daný rad je geometrický pre každé pevné x, nie je teda ťažké nájsť jeho súčet: $f(x) = \begin{cases} 1/x\,, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{ak } x = 0 \end{cases}\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{319}}$ $|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$, pri odhade prvej, resp. druhej absolútnej hodnoty vpravo využite fakt, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, resp. spojitosť funkcie f;

$\boxed{\mathbf{320}}$ nech je dané $\varepsilon > 0$, zvoľme $n \in \mathbf{N}$ tak, aby $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $x \in M$; existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikácia $|x-y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $x, y \in M$; potom $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ $\big($špeciálne v prípade $M = [a,b]$ vyplýva tvrdenie pr. 320 z vety 6 pred pr. I.251 a z dôsledku vety 7; v prípade $M = (a,b)$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, z vety 7 a pr. I.255$\big)$;

$\boxed{\mathbf{321}}$ **1.** áno, napr. $f(x) = \frac{1}{n}\chi(x)$, kde χ je Dirichletova funkcia; **2.** áno, napr. $f_n = f$ pre všetky $n \in \mathbf{N}$, kde f je daná nespojitá funkcia;

$\boxed{\mathbf{324}}$ **1**. $\frac{3}{4}$ $\Bigg($podľa Weierstrassovho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ konverguje rovnomerne na $[\ln 2, \ln 5]$, preto podľa vety 8' je $\int_{\ln 2}^{\ln 5}\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 5} ne^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{5^n}\right)\Bigg)$; **2**. π;

$\boxed{\mathbf{325}}$ $\ln 2 - \frac{1}{2}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^{2n-2}(1-t)^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-2}(1-t)^2\,dt\right.$, daný rad je geometrický pre každé $t \in [0,1]$, rovnomernú konvergenciu možno dokázať napr. Weierstrassovým kritériom [13] $\Bigg($pretože $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-2} = e^{-2}$, má majorantný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-2}\frac{1}{n^2}$ rovnaký

$f_n : M \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, je spojitá v bode $a \in M$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na M, tak funkcia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je spojitá v bode a.

[11] ale nekonverguje rovnomerne na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, pretože $\lim_{x\to 0} e^{-nx^2}\cos nx = 1$, a na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ teda nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie

[12] z vety 7', resp. z jej dôsledku formulovaného v poznámke [10] k riešeniu pr. 317.2 potom vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ nemôže konvergovať rovnomerne na žiadnom okolí bodu 0

[13] alebo — čo je oveľa jednoduchšie — *Diniho kritériom*: *Ak* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť spojitých nezáporných*

charakter ako rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{326}}$ pretože $[a,b]\setminus M\subset D(f)\subset[a,b]$ $\Bigg($rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ môže konvergovať aj v niektorých bodoch množiny $M\Bigg)$, vzťahuje sa na funkciu f poznámka 2 za vetou 6 z odseku 2.1, nech $\overline{f}_n(x):=\begin{cases} f_n(x), & \text{ak } x\in[a,b]\setminus M\\ 0, & \text{ak } x\in M\end{cases}$, $n\in\mathbf{N}$, $\overline{f}(x):=\begin{cases} f(x), & \text{ak } x\in[a,b]\setminus M\\ 0, & \text{ak } x\in M\end{cases}$; potom $\displaystyle\int_a^b\overline{f}_n(x)\,dx=\int_a^b f_n(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^b\overline{f}(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n\rightrightarrows\overline{f}$ na $[a,b]$ (pozri pozn. [4] k riešeniu pr. 300.14) a rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n$ možno integrovať člen po člene;

$\boxed{\mathbf{327}}$ **1**. $f(x):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{2n+2}-x^{2n}\right)=\begin{cases}-x^2, & \text{ak } |x|<1\\ 0, & \text{ak } |x|=1\end{cases}$, podľa vety 6 z odseku 2.1 je $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=-\int_{-1}^{1}x^2\,dx$; pozri tiež pr. 383.1;

$\boxed{\mathbf{330}}$ **1.** rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ konverguje napr. v bode 0 a rad derivácií $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$, na ohraničenom intervale $(-a,a)$ sú teda splnené predpoklady vety 9', rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ možno preto derivovať člen po člene v každom bode $x\in(-a,a)$; táto úvaha platí pre každé $a>0$, preto $f'(x)=-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{3/2}}$; spojitosť funkcie f' vyplýva priamo z dôsledku vety 7'; **2.** rovnomernú konvergenciu radu derivácií na $\mathbf{R}$ možno dokázať Weierstrassovým kritériom, dôkaz rovnomernej konvergencie radu derivácií na každom z intervalov $(-a,a)$ — čo pre naše potreby stačí— je jednoduchší: $\left|\dfrac{2\cdot(-1)^{n+1}x}{(n+x^2)^2}\right|\le\dfrac{2a}{n^2}$, $x\in(-a,a)$; **3.** pri dôkaze rovnomernej konvergencie radu derivácií na $\mathbf{R}$ použite nerovnosť $|\cos nx|\le 1$ a integrálne kritérium;

$\boxed{\mathbf{331}}$ **2a)** $D(f)=(1,\infty)$, rad k–tych derivácií $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^k n}{n^x}$ konverguje rovnomerne na každom intervale (a,∞), kde $a>1$, podľa Weierstrassovho kritéria (k dôkazu konvergencie majorantného číselného radu pozri návod k pr. 214.7); na každom ohraničenom intervale (a,b), kde $a>1$, sú splnené predpoklady tvrdenia z pr. 331.1, a daný rad možno teda k–krát derivovať člen po člene v každom bode $x\in(a,b)$; spojitosť funkcie $f^{(k)}$ vyplýva z jej diferencovateľnosti;

$\boxed{\mathbf{332}}$ nech $F_n:[a,b]\to\mathbf{R}$ je primitívna funkcia k funkcii f_n taká, že $F_n(a)=0$, potom postupnosť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje predpokladom vety 9;

$\boxed{\mathbf{333}}$ **1.** neplatí napr. $I=\mathbf{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x}{2^n}$; **2.** platí, dôkaz sa zakladá na myšlienkach použitých pri riešení pr. 330.1;

$\boxed{\mathbf{334}}$ **2.** pozri pr. 300.13 alebo pr. 192 a 193, ktoré umožňujú skonštruovať postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ požadovaných vlastností k ľubovoľnej spojitej funkcii $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, pre ktorú neexistuje $f'(0)$;

$\boxed{\mathbf{335}}$ **1**. $\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ $\left(a=-1,\ R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}}=\dfrac{1}{3}\right)$; **2**. $(-2,6)$ $\left(a=2,\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=4\right)$; **3**. $(-e^3,e^3)$; **4**. $R=0$, pre mocninové rady s polomerom konvergencie 0 sme pojem intervalu konvergencie nezaviedli; **5**. $(-\infty,\infty)$ pre $a\in(0,1)$, $(-1,1)$ pre $a=1$; pre $a>1$ je $R=0$; **6**. $(2,4)$ $\left(\text{pri výpočte } R \text{ na základe vety 11 využite, že } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}=0\right)$; **7**. $(-e,e)$ $\Big($na

---

funkcií a rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ *konverguje na kompaktnej množine* M *bodove k spojitej funkcii, tak rad* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ *konverguje rovnomerne na* M (pozri [24,str. 134, dôsledok vety 2] alebo [10, odst. 431, veta 2]).

výpočet R možno použiť vetu 12 alebo využiť rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$, pozri poznámku za pr. $224\Big)$; **8**. $(-2^{-1/4}, 2^{1/4})$ [14]; **9**. $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ $\Big($v postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $b_n := \sqrt[n]{|a_n|}$, konvergujú podpostupnosti $\{b_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_{4k-2}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_{4k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{k\to\infty} b_{4k} = \lim\limits_{k\to\infty} b_{2k-1}$, pozri aj riešenie pr. I.160$\Big)$; **10**. $(1,5)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{\sin(n^2/2^n)}{n^2/2^n}} \cdot \dfrac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \dfrac{1}{2}\right)$;

$\boxed{\textbf{336}}$ **1**. $(-1,1)$ pre $p \le 0$, $[-1,1)$ pre $p \in (0,1]$, $[-1,1]$ pre $p > 1$; **2**. $(-3,-1)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt[n]{n})^4 \sqrt[n]{1+3/n^4}}{(\sqrt[n]{n})^3 \sqrt[n]{1+4/n^2}}\right.$, možno tiež použiť vetu $12\Big)$ [15]; **3**. $(-4,4)$ $\Big($divergencia v bodoch $x = 4$ a $x = -4$ vyplýva z vety 6' v odseku 3.3: $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| > 1$, $n \in \mathbf{N}$, kde $b_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$, resp. $b_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\Big)$; **4**. $(-1,1)$ $\left(\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k!]{k!} \; (= \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m}) = 1\right.$, pozri tiež postup v bode a) poznámky [14] k riešeniu pr. $335.8\Big)$; **5**. $\{0\}$ pre $a \in (0,1]$, $\mathbf{R}$ pre $a > 1$ $\Big($možno použiť vetu 12 aj vetu 11: $\sqrt[n]{\dfrac{n!}{a^{n^2}}} = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} \cdot \dfrac{n}{a^n}$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{e}$, pozri poznámku za pr. $224\Big)$; **6**. $[-2,0)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sin\alpha_n)/\alpha_n}{(\sin\alpha_{n+1})/\alpha_{n+1}} \cdot \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\alpha_n}\right.$, kde $\alpha_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, podobne možno pomocou rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} = 1$ nájsť aj $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; v bode 0 má daný rad rovnaký charakter ako rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, konvergencia v bode -2 vyplýva z Leibnizovho kritéria$\Big)$; **7**. $[-2,0]$ $\Big($postupujte ako v pr. 336.6, využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n} = 1$, kde $\alpha_n =$

---

[14] treba si uvedomiť, že postupnosťou $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ koeficientov tohto mocninového radu nie je postupnosť 0,2,4,8,16,…, ale postupnosť 0,0,0,0,2,0,0,0,4,0,0,0,8,0,0,0,16,0,… (pozri tiež poznámku [21] k úvodu odseku 4.3.1), pri hľadaní čísla R možno v tomto prípade zvoliť niektorý z nasledujúcich postupov:

a) použiť priamo vetu 11: postupnosťou $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť $0,0,0,\sqrt[4]{2},0,0,0,\sqrt[8]{4},0,\dots,$ $\sqrt[4n]{2^n},0,0,0,\dots$, ktorej hromadnými hodnotami sú čísla 0 a $\sqrt[4]{2}$ (pozri riešenie pr. I.160), preto $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$;

b) použiť substitúciu $x^4 = t$, ktorou dostaneme mocninový rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n t^n}{n^2}$ s polomerom konvergencie $R_1 = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \dfrac{1}{2}$; podľa definície polomeru konvergencie rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n t^n}{n^2}$ konverguje pre $|t| < R_1$ a diverguje pre $|t| > R_1$, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^{4n}}{n^2}$ konverguje pre $|x^4| < R_1$ a diverguje pre $|x^4| > R_1$;

c) na vyšetrenie konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^{4n}}{n^2}$ použiť d'Alembertovo alebo Cauchyho kritérium (vety 6' a 7' z odseku 3.3, z nich sú napokon odvodené aj vety 11, 12), pozri tiež pr. 339.3

[15] nie ja ťažké dokázať nasledujúce tvrdenie: „ak Q je racionálna funkcia, ktorá je kladná na $[1,\infty)$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[k]{Q(n)}\, x^n$ má polomer konvergencie 1" (vyšetrenie oboru konvergencie tohto radu prenechávame snaživému čitateľovi)

$-\dfrac{4}{3n+2}\Big)$; **8**. $[-1,1)$ $\Big($využite rovnosť $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{a^u-1}{u}=\ln a\,,\ a>0\Big)$; **9**. $\Big(-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\Big)$ $\Big($pre $x=\dfrac{1}{e}\,,\ x=-\dfrac{1}{e}$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie [16]$\Big)$; **10**. $(-1,1)$ $\big($z nerovností $1\le |a_n|\le n$ vyplýva $1\le \sqrt[n]{|a_n|}\le \sqrt[n]{n}$, preto $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ [17]$\big)$; **11**. $\Big[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\Big)$ $\Big(\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{3\sqrt[n]{1+(-2/3)^n}}{\sqrt[n]{n}}$; v prípade $x=-\dfrac{2}{3}$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n3^n}$ súčtom radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\Big(-\dfrac{2}{3}\Big)^n$, z ktorých prvý diverguje a druhý konverguje; postup pre $x=-\dfrac{4}{3}$ je obdobný$\Big)$; **12**. $(-a,a)$; **13**. $\Big(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\Big)$ $\Big($rad $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{2m}$, kde $a_n:=\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$, diverguje v bodoch $\dfrac{1}{4}$ a $-\dfrac{1}{4}$, rad $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{2m-1}$ v týchto bodoch konverguje, preto rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje pre $x=\dfrac{1}{4}$ a $x=-\dfrac{1}{4}\Big)$; **14**. $[-1,1)$ (pozri pr. 240);

$\boxed{\mathbf{338}}$ $R=1$ $\big($konvergencia pre $|x|<1$ vyplýva z vety 10, keby daný rad konvergoval pre niektoré x také, že $|x|>1$, musel by podľa vety 10 konvergovať absolútne v bode 1$\big)$;

$\boxed{\mathbf{339}}$ **1a**) $R=\min\{R_1,R_2\}$ $\Big($rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ konverguje, ak $|x|<R_1\wedge|x|<R_2$ (súčet dvoch konvergentných radov konverguje) a iste diverguje, ak $R_2<|x|<R_1$ (súčet konvergentného a divergentného radu diverguje)$\Big)$; **1b**) $R\ge R_1$ $\big($ak zvolíme $a_n=-b_n$ tak, že rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ má konečný polomer konvergencie, vidíme, že skutočne môže nastať prípad $R>R_1\big)$; **2a**) $r=R^k$, ak $R\in\mathbf{R}_0^+$; $r=\infty$, ak $R=\infty$ $\big($ak $b_n\ge 0$, $n\in\mathbf{N}$, a $\limsup\limits_{n\to\infty}b_n=R\in\mathbf{R}_0^+$, tak $\limsup\limits_{n\to\infty}b_n^k=R^k$: podpostupnosť $\{b_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ totiž konverguje k číslu b práve vtedy, keď $\lim\limits_{s\to\infty}b_{n_s}^k=b^k$ $(k>0)$, preto množina H_1 hromadných hodnôt postupnosti $\{b_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ má tvar $H_1=\{h^k\,;\ h\in H\}$, kde H je množina hromadných hodnôt postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, v prípade $R=\infty$ je postup rovnaký$\big)$; **2b**) $r=\sqrt[k]{R}$, ak $R\in\mathbf{R}_0^+$; $r=\infty$, ak $R=\infty$ (pozri postup b) v poznámke [14] k riešeniu pr. 335.8); **3.** na vyšetrenie konvergencie daého radu použite d'Alembertovo kritérium (veta 6' z odseku 3.3);

$\boxed{\mathbf{341}}$ **1.** podľa vety 10 rad konverguje v bode $x=1$, a teda tam spĺňa nutnú podmienku konvergencie; **2.** podľa vety 11 je $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, preto aspoň jedna podpostupnosť $\Big\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\Big\}_{k=1}^{\infty}$ má limitu väčšiu ako 1 alebo rovnú ∞, potom $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|=\lim\limits_{k\to\infty}\Big(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\Big)^{n_k}=\infty$ $\big($možno tiež dokazovať nepriamo: ak $|a_k|\le K$, $n\in\mathbf{N}$, tak $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\le\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{K}=\lim\sqrt[n]{K}=1\big)$;

$\boxed{\mathbf{342}}$ **2**. $\dfrac{2x}{(1-x)^3}$, $x\in(1,1)$ $\Big($ak $f(x):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$, tak $\int_0^x f(t)\,dt=x^2g(x)$, kde $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$; $\int_0^x g(t)\,dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=-1+\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$; preto $f(x)=\Big(x^2\Big(-1+\dfrac{1}{1-x}\Big)'\Big)'$, $x\in$

---

[16] $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{n^2}\Big/e^n=e^{E(n)}$, kde $E(n)=n^2\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)-n=n^2\Big(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big)-n=n-\dfrac{1}{2}+n^2o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)-n=-\dfrac{1}{2}+n^2o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, preto $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n^2}\Big)^{n^2}\Big/e^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-1/2+n^2o(1/n^2)}=e^{-1/2}$; pripomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty}n^2o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)=0$

[17] pri výpočte polomeru konvergencie R sme mohli tiež využiť vzťah $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\ln n+\varepsilon_n$, kde $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ (pozri pr. 220), potom $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\cdots+1/n}{1+\cdots+1/(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n+\varepsilon_n}{\ln(n+1)+\varepsilon_{n+1}}=1$

$(-1,1)\Big)$; **3.** $\dfrac{2x(6-x)}{(2-x)^3}$, $|x|<2$ $\Big($najprv sme použili substitúciu $\dfrac{x}{2}=t$; nech $f(t):=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)t^n$, zrejme $f(0)=0$, pre $t\in(-1,1)$, $t\neq 0$ je $f(t)=\dfrac{1}{t}\,g(t)$, kde $g(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)t^{n+1}$; pre g dostávame $g(t)=\Big(t^3\Big(-1+\dfrac{1}{1-t}\Big)'\Big)'=\dfrac{t^2(3-t)}{(1-t)^3}$, $|t|<1$, teda pre $t\in(-1,1)$, $t\neq 0$ je $f(t)=\dfrac{t(3-t)}{(1-t)^3}$; pretože pravá strana má pre $t=0$ hodnotu 0, môžeme tento predpis použiť aj pre $t=0\Big)$; **4.** $\dfrac{x(x-3)}{3(x+3)^3}$, $|x|<3$;

$\boxed{\mathbf{343}}$ **1.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$; **2.** 0 pre $x=0$, $\dfrac{1}{4x^2}\Big(2\operatorname{arctg}2x+\ln\dfrac{1+2x}{1-2x}\Big)$ pre $x\in\Big(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\Big)\setminus\{0\}$ (použili sme substitúciu $2x=t$); **3.** $2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$, $|x|\le 1$ (pre body $x=1$, $x=-1$ sme využili poznámku 1 za riešením pr. 343.4);

$\boxed{\mathbf{344}}$ **1.** $\ln 2$; **3.** $\dfrac{3}{2}$ $\Big(=g\Big(\dfrac{1}{3}\Big)$, kde $g(t):=\sum_{n=1}^{\infty} n^2t^n\Big)$; **4.** $2-2\ln 2$ $\Big(=g(1)$, kde $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}\Big)$;

$\boxed{\mathbf{345}}$ **1.** napr. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$; **2.** nech $f_n(x):=\sum_{k=0}^{n}a_nx^n$, $x\in[0,1]$; $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_nx^n$, $x\in[0,1)$; postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je neklesajúca pre každé $x\in[0,1]$, preto $f_n(x)\le f(x)$, $n=0,1,\dots$, $x\in[0,1)$, a $\sum_{k=0}^{n}a_k=\lim_{x\to 1-}f_n(x)\le\lim_{x\to 1-}f(x)=S$, teda $\Big\{\sum_{k=0}^{n}a_k\Big\}_{n=0}^{\infty}$ $\big(=\{f_n(1)\}_{n=0}^{\infty}\big)$ je zhora ohraničená neklesajúca — tj. konvergentná — postupnosť, odtiaľ už na základe poznámky za riešením pr. 344.2 vyplýva dokazované tvrdenie [18]; tento príklad ukazuje, že za istých predpokladov možno implikáciu z poznámky za riešením pr. 344.2 obrátiť;

$\boxed{\mathbf{346}}$ podľa poznámky za riešením pr. 344.2 je $A=\lim_{x\to 1-}f(x)$, $B=\lim_{x\to 1-}g(x)$, kde $f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $g(x):=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$; rad $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ je Cauchyho súčin radov $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, ktoré absolútne konvergujú v každom bode intervalu $(-1,1)$ (pozri vetu 10), preto podľa vety 17 z odseku 3.4 pre každé $x\in(-1,1)$ platí $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=f(x)g(x)$, potom — opäť podľa poznámky za riešením pr. 344.2 — $C=\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=AB$;

$\boxed{\mathbf{347}}$ **1.** derivácia párnej (nepárnej) funkcie (pokiaľ existuje) je nepárna (párna) funkcia, pritom pre nepárnu funkciu g platí $g(0)=0$; **2.** ak f je súčet radu $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, tak $f(x)=0$ pre $x\in[0,\varepsilon)$ (vyplýva to z predpokladov a zo spojitosti funkcie f v bode 0), potom podľa vety 17 je $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{f_+^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{0}{n!}=0$, $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$;

$\boxed{\mathbf{348}}$ **1.** $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\ln^n a}{n!}\,x^n$, $x\in\mathbf{R}$; **2.** $\operatorname{ch}ax=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in\mathbf{R}$; **3.** $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(n+1)!}$, $x\in\mathbf{R}$; **4.** $x\sin 2x\cos 3x=\dfrac{1}{2}x(\sin 5x-\sin x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{5^{2n-1}-1}{2(2n-1)!}\,x^{2n}$, $x\in\mathbf{R}$; **5.** $\sin^3 x=\sin x\cdot$

---

[18] toto tvrdenie možno dokázať aj bez použitia uvedenej poznámky, v takom prípade zostáva dokázať rovnosť $S=\sup\{f_n(1)\,;\,n\in\mathbf{N}\}$, na to okrem predchádzajúceho využijeme ešte skutočnosť, že funkcie f_n ($n=0,1,\dots$) a f sú neklesajúce (pozri pr. 296.1), potom druhá vlastnosť suprema vyplýva z nerovnosti $S-f_n(1)=\big(S-f(1-\delta)\big)+\big(f(1-\delta)-f_n(1-\delta)\big)+\big(f_n(1-\delta)-f(1)\big)\le\big(S-f(1-\delta)\big)+\big(f(1-\delta)-f_n(1-\delta)\big)$ a z tvrdení $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta\in(0,1)\ :\ S-f(1-\delta)<\varepsilon/2$ (ktoré vyplýva z rovnosti $\lim_{x\to 1-}f(x)=S$) a $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta\in(0,1)\ \exists n\in\mathbf{N}\ :\ f(1-\delta)-f_n(1-\delta)<\varepsilon/2$ $\big($to platí, pretože $f_n\to f$ na $[0,1)\big)$

$\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4(2n-1)!}(3^{2n-2}-1)x^{2n-1}$ [19], $x \in \mathbf{R}$; **6**. $\dfrac{1}{a+bx} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}}x^n$, $|x| < \left|\dfrac{a}{b}\right|$; **7**. $\dfrac{5x-4}{x+2} = 5 - 7\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}} = -2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7(-1)^{n-1}}{2^n}x^n$, $|x| < 2$; **8**. $\dfrac{1}{x^2-2x-3} = -\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left((-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$, $|x| < 1$; **9**. $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde $a_n = \begin{cases} 1, & \text{ak } n = 3k,\ k \in \mathbf{N}\cup\{0\} \\ -1, & \text{ak } n = 3k+1,\ k \in \mathbf{N}\cup\{0\} \\ 0, & \text{ak } n = 3k+2,\ k \in \mathbf{N}\cup\{0\} \end{cases}$ $\Big($to možno zapísať aj v tvare $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2\pi(n+1)}{3}\Big)$, $|x| < 1$ $\Big($pre $x \neq 1$ je $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3}\Big)$; **10**. $\dfrac{x}{(1-x^3)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n+1}$, $|x| < 1$ $\Big($Maclaurinov rad funkcie $\dfrac{1}{(1-u)^2}$ môžeme nájsť napr. derivovaním člen po člene Maclaurinovho radu funkcie $\dfrac{1}{1-u}\Big)$; **11**. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} = \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,a^{2n+1}}x^{2n}$, $|x| \le a$; **12**. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$; **13**. $\ln(12-x-x^2) = \left(\ln 3 + \ln\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)\right) + \left(\ln 4 + \ln\left(1+\dfrac{x}{4}\right)\right) = \ln 12 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4^n} - \frac{1}{3^n}\right)x^n$, $x \in [-3, 3)$; **14**. $\ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, kde $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{ak } n = 2k-1 \text{ alebo } n = 4k-2,\ k \in \mathbf{N} \\ -\dfrac{3}{n}, & \text{ak } n = 4k,\ k \in \mathbf{N} \end{cases}$, $x \in (-1, 1]$ $\big($daný rad má polomer konvergencie $R = 1$, pričom je súčtom dvoch radov, z ktorých jeden konverguje v bode $x = 1$ a diverguje v bode $x = -1$ a druhý konverguje v bode $x = 1$ aj v bode $x = -1\big)$; **15**. $(1+x)\ln(1+x) = x + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$, táto rovnosť platí pre $x \in (-1, 1]$, oborom konvergencie uvedeného radu je interval $[-1, 1]$, jeho súčet má v bode -1 hodnotu 0 $\left(= -1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \lim_{x\to -1+}(1+x)\ln(1+x)\right)$, funkciu $(1+x)\ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$, možno teda v bode -1 „spojite dodefinovať“

349 **1**. $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$; **3**. $\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) = \ln a + \dfrac{x}{a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,a^{2n+1}(2n+1)}x^{2n+1}$, $|x| \le a$ $\big($Maclaurinov rad funkcie f' konverguje v bodoch $x = a$, $x = -a$ — pozri riešenie pr. 348.11, preto tam podľa tvrdenia b) vety 16 konverguje aj Maclaurinov rad funkcie f [20]$\big)$; **4**. $f'(x) = \dfrac{x}{1+\dfrac{x^4}{4}}$, $|x| \neq \sqrt{2}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2} = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)2^{2n+1}}$, táto rovnosť platí pre $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, oborom konvergencie uvedeného radu je interval $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ $\Big($funkciu $\operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, možno teda „spojite dodefinovať“ v bodoch $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}\Big)$; **5**. $f''(x) =$

---

[19]$= \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3(-1)^{m+1}}{4(2n+1)!}(3^{2m}-1)x^{2m+1}$, ak položíme $m = n-1$

[20]konvergenciu v bodoch $x = a$, $x = -a$ sme samozrejme rovnako dobre mohli dokázať aj Leibnizovým kritériom

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}=-1+\dfrac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}\,x^{2n+2}$; **6**. $x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$, $|x|\le 1$; **7**. $\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)}$, $x\in\mathbf{R}$ [21]; **8**. $\int_0^x\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$, oborom konvergencie tohto radu je interval $[-1,1]$ (existujú teda konečné limity $\lim_{x\to 1-}f(x)$, $\lim_{x\to -1+}f(x)$ [22]);

350 **1**. $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, kde $b_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$ (nech I je interval konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, potom pre $x\in J:=I\cap(-1,1)$ ($(-1,1)$ je interval konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, tj. Maclaurinovho radu funkcie $\dfrac{1}{1-x}$) konvergujú rady $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ absolútne (veta 10), preto podľa vety 17 z odseku 3.4 konverguje na intervale J ich Cauchyho súčin k funkcii $\dfrac{f(x)}{1-x}$); **2a**) $\ln^2(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x\in[-1,1)$ (najprv nájdite Maclaurinov rad funkcie f', ten má polomer konvergencie $R=1$ (pozri pr. 336.10), preto aj náš rad má ten istý polomer konvergencie (veta 15), konvergencia uvedeného radu v bode -1 vyplýva z Leibnizovho kritéria (pozri tiež pr. I.171, I.172)); **2b**) $(\operatorname{arctg}x)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\right)\dfrac{x^{2n}}{n}$, $|x|\le 1$ (v bodoch 1 a -1 konverguje uvedený rad relatívne, preto jeho polomer konvergencie je $R=1$, pozri riešenie pr. 338);

351 **1**. $\dfrac{1}{(x^2-2x+3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)(x-1)^{2n}}{2^{n+2}}$, $|x-1|<\sqrt{2}$ (podľa návodu stačí nájsť Maclaurinov rad funkcie $f(t+a)=\dfrac{1}{(t^2+2)^2}$: derivovaním člen po člene Maclaurinovho radu funkcie $\dfrac{1}{(2+u)}$ $\left(=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+u/2}\right)$ nájdeme Maclaurinov rad funkcie $\dfrac{1}{(2+u)^2}$ a do neho dosadíme $u=t^2$); **2**. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}}=\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!\,(x-5)^{2n}}{2^{2n+1}\,(2n)!!}$ [23], $|x-5|\le 2$; **3**. $(2x+1)\sin x\sin(x+1)=(\cos 1-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}$, $x\in\mathbf{R}$; **4**. $\ln(x^2-9x+20)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)(x-3)^n$, $x\in[1,5)$ (pre $t\in(-\infty,1)$ je $\ln(t^2-3t+2)=\ln(1-t)+\ln(2-t)$);

352 (pozri tiež riešenia pr. 342, 343) **1**. $e^{x^2}(1+2x^2)$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2)^n}{n!}\right)'=\right.$

---

[21] pripomeňme, že na integrál $\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}\,dt$ sa vzťahuje poznámka 2 za vetou 6 z odseku 2.1

[22] čísla $\int_0^1\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}:=\lim_{x\to 1-}f(x)$, $\int_{-1}^0\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}:=\lim_{x\to -1+}f(x)$ sú tzv. *nevlastné Riemannove integrály*, pozri napr. [1] alebo [10]; z hľadiska Newtonovho integrálu (pozri poznámku za odsekom 2.5) z konvergencie uvedeného radu v bodoch 1 a -1 vyplýva existencia $(N)\int_0^1\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ a $(N)\int_{-1}^0\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$; zrejme v tomto prípade pojmy Newtonovho integrálu $(N)\int_0^1\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left((N)\int_{-1}^0\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\right)$ a nevlastného Riemannovho integrálu $\int_0^1\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left(\int_{-1}^0\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\right)$ splývajú

[23] $=\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!\,(x-5)^{2n}}{2^{3n+1}\,n!}$

$\left(xe^{x^2}\right)'\Big)$; **2**. $\frac{1}{4}e^{x/2}(x+2)^2$ $\Big(= f_1\left(\frac{x}{2}\right) + f_2\left(\frac{x}{2}\right)$, kde $f_2(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, $f_1(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2t^n}{n!} = t\big(t(e^t-1)'\big)'\Big)$; **3**. $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x - \frac{x}{2}\sin x$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2x^{2n}}{(2n)!} = x\left(-\frac{1}{2}x\sin x\right)'\right)$; **4**. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$ $\Big($pre $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$ je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\, x^{2n} = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1\right) dt$, výsledok pre $x=1$, $x=-1$ vyplýva z poznámky 1 za riešením pr. 343.4, resp. poznámky za riešením pr. 344.2 (konvergenciu uvedeného radu v týchto bodoch dokážeme Raabeho kritériom) alebo z pr. 345.2 (kedy konvergenciu v bodoch $x=1$, $x=-1$ netreba samostatne dokazovať)$\Big)$;

353 (pozri tiež riešenie pr. 344) **1**. $2e$; **2**. $3e^2$; **3**. $\frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$ $\Big(= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} - \lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\Big)$; iná možnosť: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = g(1)$, kde $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}\, x^{2n-1}\Big)$; **4**. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$; **5**. $\frac{\pi}{2}$ $\big(= \arcsin 1$, pozri tiež pr. 349.2$\big)$;

354 ak použijeme Lagrangeov tvar zvyšku Taylorovho polynómu, dostaneme $\big($pre pevné $x \in (a,b)\big)$: $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}\big(\vartheta_n(x)\big)}{(n+1)!}\right| |x-x_0|^{n+1} \leq \frac{Mc^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$; pritom $\lim_{n\to\infty} \frac{Mc^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (možno to dokázať postupom z pr. 222);

355 napr. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$;

356 **2**. $1.968\,0 \pm 0.000\,1$ $\Big(\sqrt[4]{15} = 2\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}}$; pri odhade R_n sme použili postup z poznámky za riešením pr. 356.2, $|R_n| \leq \frac{2}{4(n+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k\Big)$; **3**. $0.245\,0 \pm 0.000\,1$; **4**. $0.182\,3 \pm 0.000\,1$; **5**. $2.718\,282 \pm 0.000\,001$ $\big($pri odhade R_n sme použili Lagrangeov tvar zvyšku; postup výpočtu možno ľahko ,,zmechanizovať“: vypočítanú aproximáciu n–tého člena stačí vydeliť číslom $n+1$, aby sme dostali aproximáciu $(n+1)$–vého člena$\big)$;

357 nájdite Maclaurinov rad funkcie $\ln\frac{1+x}{1-x}$ a zvoľte a tak, aby platilo $\frac{1+a}{1-a} = 1 + \frac{1}{n}$; $\ln 2 = 0.693\,147 \pm 0.000\,001$, $\ln 3 = 1.098\,61 \pm 0.000\,01$ $\Big($každý z prvých štyroch členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)5^{2n-1}}$ sme vypočítali s presnosťou 10^{-7}, pre štvrtý zvyšok R_4 tohto radu platí $|R_4| \leq \frac{1}{18\cdot 25^4} < 1.5\cdot 10^{-7}$; pripočítali sme číslo $\ln 2$ vypočítané s presnosťou 10^{-6} a výsledok sme zaokrúhlili na 5 desatinných miest (absolútna chyba, ktorej sme sa tým dopustili, nie je väčšia než $5\cdot 10^{-6}\big)$; pre absolútnu chybu ε takto získanej aproximácie čísla $\ln 3$ platí $\varepsilon \leq 4\cdot 10^{-7} + 1.5\cdot 10^{-7} + 10^{-6} + 5\cdot 10^{-6} = 65.5\cdot 10^{-7} < 10^{-5}\Big)$;

358 **1**. $3.141\ 59 \pm 0.000\ 01$; **2**. $0.309\ 0 \pm 0.000\ 1$ $\Big(\sin 18^\circ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n-1}}{(2n-1)!\,10^{2n-1}}$; čísla $\frac{3.141\,59}{10}$, $-\frac{(3.141\,59)^3}{6\cdot 10^3}$, $\frac{(3.141\,59)^5}{120\cdot 10^5}$ sú aproximáciami čísel $\frac{\pi}{10}$, $-\frac{\pi^3}{6\cdot 10^3}$, $\frac{\pi^5}{120\cdot 10^5}$, ktorých absolútna chyba nie je väčšia ako 10^{-6}, overenie tohto tvrdenia prenechávame čitateľovi$\Big)$;

359 **1**. 1.605 ± 0.001 $\big($pred použitím odhadu $|R_n| \leq |b_{n+1}|$ nezabudnite preveriť monotónnosť postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}\big)$; **2**. 0.905 ± 0.001; **4**. 0.026 ± 0.001 $\Big($podobne ako v poznámke 2 za riešením pr.356.1 — ak naviac ešte využijeme nerovnosť $n! \ge 2^{n-1}$ — možno dokázať odhad $|R_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{k!\,(2k+3)27\cdot 9^k} \le \frac{4}{27} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k\, 9^k\,(2k+3)} \le \frac{4}{27(2n+5)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{18}\right)^k\Big)$;

360 nech r je polomer kružnice; $\triangle OAC$ má plochu $\frac{d}{2} r\cos\vartheta = r\sin\vartheta \cdot r\cos\vartheta = \frac{1}{2}r^2\sin 2\vartheta$, plocha kruhového segmentu zodpovedajúceho uhlu 2ϑ je $r^2\vartheta$, preto $p = r^2\vartheta - \frac{1}{2}r^2\sin 2\vartheta = r^2\left(\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right) = r^2\left(\vartheta - \frac{1}{2}\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{6} + \frac{\vartheta^5}{120} - \cdots\right)\right) = r^2\left(\frac{2\vartheta^3}{3} - \frac{2\vartheta^5}{15} + \cdots\right)$, súčasne $\frac{2}{3}dh = \frac{2}{3}(2r\sin\vartheta)(r - r\cos\vartheta) = \frac{4}{3}r^2\sin\vartheta(1-\cos\vartheta) = \frac{4}{3}r^2\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{6} + \frac{\vartheta^5}{120} - \cdots\right)\left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{24} + \cdots\right)$, ak použijeme Cauchyho súčin radov, dostávame $\frac{2}{3}dh = r^2\left(\frac{2\vartheta^3}{3} - \frac{\vartheta^5}{6} + \cdots\right)$, teda rady pre p a pre $\frac{2}{3}dh$ sa líšia až členmi s ϑ^5, čo slovne vyjadrujeme „s presnosťou do ϑ^5 platí $p \approx \frac{2}{3}dh$“;

361 **1**. $(1,\infty)$ $\Big($pre pevné $x \in \mathbf{R}$ má daný rad rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\Big)$; **2**. $(-2,2)$ $\big($v bodoch $x=2$, $x=-2$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie [24]$\big)$; **3**. $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ (pre $x=-1$ pozri pr. 240); **4**. $(-1,\infty)$ $\Big($pre $x \le -1$ je $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{n-x}{n+1} \ge 1$, pre $x > -1$, $x \notin \mathbf{N}\cup\{0\}$ použite postup z pr. 240$\Big)$; **5.** konverguje na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ pre $|a| > 1$, diverguje v každom bode pre $|a| \le 1$ $\Big($v prípade $x = 0$ alebo $|a| \le 1$ má daný rad rovnaký charakter ako rad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; využite rovnosť $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ — pozri poznámku za pr. 224$\Big)$; **6**. $\mathbf{Z}$ (pozri bod 2 v poznámke [34] k riešeniu pr. 243.4); **7**. $[0,\infty)\cup\{-k\pi\,;\, k\in\mathbf{N}\}$ $\big($v prípade $e^x < 1 \wedge x \ne k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, je $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \infty$ a $\lim_{n\to\infty}\sin nx$ neexistuje$\big)$; **8**. $(0,\pi)$ pre $q > p$ (možno použiť Dirichletovo kritérium), diverguje v každom bode $x \in (0,\pi)$ pre $q \le p$ (nie je splnená nutná podmienka konvergencie); **9**. $\mathbf{R}$ (pozri pr. I.156.5); **10.** diverguje pre každé $x \in \mathbf{R}$ (nie je splnená nutná podmienka konvergencie [25];

362 **1**. $\frac{x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$ $\Bigg(S_n(x) = x\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left|1+x^{2^{k-1}}\right|\right)' = x\left(\ln\left|\frac{1-x^{2^n}}{1-x}\right|\right)'$ pre $x \ne 1$, $x \ne -1$, pre $|x| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} 2^n x^{2^n} = 0$ (subst. $2^n = t$), pre $x \notin [-1,1)$ je $\lim_{n\to\infty} S_n$ nevlastná$\Bigg)$; **2**. $-\operatorname{ctg} x + \frac{1}{x}$ pre $0 < |x| < \pi$, 0 pre $x = 0$ $\left(S_n(x) = -\left(\ln\left|\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\right|\right)'\right.$ pre $\left.0<|x|<\pi\right)$;

363 **1.** platí (použite matematickú indukciu) $K_n(x) := \frac{a_1}{x} - \left(\frac{a_1}{a_2+x} + \cdots + \frac{a_1\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right) =$

---

[24]v prípade $x = 2$ je $\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(e^{2/n}-1\right)^n = \left(\left(1+h(n)\right)^{1/h(n)}\right)^{g(n)}$, kde $h(n) = \frac{n}{2}\left(e^{2/n}-1\right) - 1$, $g(n) = nh(n) = 1 + no\left(\frac{1}{n}\right)$, v prípade $x=-2$ je $\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(e^{-2/n}-1\right)^n = (-1)^n e^{-2}\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(e^{2/n}-1\right)^n$

[25]z nerovností $\cos\cos x > x$ pre $x \in (-\infty, a)$, $\cos\cos x < x$ pre $x \in (a,\infty)$, kde a je jediné riešenie rovnice $\cos\cos x = x$ $\Big($pre $f(x) = \cos\cos x - x$ je $f'(x) \le 0$, pričom $f'(x) = 0$ len pre $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, preto f je klesajúca, ďalej $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < f(0)\Big)$, $|\cos\cos x| \le 1$, $x \in \mathbf{R}$, a z rastu funkcie $\cos\cos x$ na $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vyplýva, že pre každé $y \in [0,1]$ je postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $y_1 = y$, $y_{n+1} = \cos\cos y_n$, ohraničená a monotónna, teda konvergentná, pritom (pozri pr. I.156) $\lim_{n\to\infty} y_n = a$; odtiaľ vyplýva rovnosť $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, kde $x_1 = \cos x$, $x_{n+1} = \cos x_n$ (stačí uvažovať postupnosti $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}\big)$, zrejme $a \ne 0$

$\dfrac{a_1\cdots a_{n+1}}{x(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)} = \dfrac{a_1}{x}\,e^{E(x)}$, kde $E(x) = -\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1+\dfrac{x}{a_k}\right)$, rad $-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{a_k}\right)$ diverguje k $-\infty$ $\left(\text{má rovnaký charakter ako rad } -x\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{a_k}\right)$, preto $\lim\limits_{n\to\infty}K_n(x) = 0$ pre každé $x > 0$; **2**. $\dfrac{1}{x-1} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k!}{(x+1)\cdots(x+k)} = \dfrac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)}$, $x > 1$; z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)}$, $x > 1$, vyplýva rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)} = 0$ pre každé $x > 1$; **3a**) $\dfrac{1}{x}$ $\left(\text{v pr. 363.1 stačí položiť } a_n = \dfrac{1}{n}\right)$; **3b**) $\dfrac{x}{1-x}$ pre $|x| < 1$, $\dfrac{1}{1-x}$ pre $|x| > 1$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^{2^{n-1}}}{1-y^{2^n}} = \dfrac{y}{1-y^2}\left(1+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{y}{1+y^2}\cdot\dfrac{y^2}{1+y^4}+\cdots\right)\right.$, pre $y\in(0,1)$ položte v pr. 363.1 $x = 1$, $a_n = y^{2^{n-1}}$; pre $y > 1$ použite substitúciu $\left.t = \dfrac{1}{y}\right)$; **3c**) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ pre $|x| > 1$, $\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$ pre $|x| < 1$ $\left(f_n(x) = \dfrac{x}{1-x}\left(\dfrac{1}{1-x^n} - \dfrac{1}{1-x^{n+1}}\right)\right)$;

364 z nerovností z pr. 228.2 vyplýva $-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} < F(x) - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x > 0$;

365 **1**. konverguje nerovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ $\left(\lim\limits_{x\to0}\big(f_n(x) - f(x)\big) = \infty,\ n\in\mathbf{N}\right)$; **2**. rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,\alpha]$ $\left(|f_n(x)| \le nx\sin\dfrac{\pi x^n}{2} \le \dfrac{\pi}{2}nx^{n+1} \le \dfrac{\pi}{2}n\alpha^{n+1}\right)$; **3**. rovnomerne k $f(x) = \operatorname{tg}x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$; **4a)** nerovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ $\big(\lim\limits_{x\to0}|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{n},\ n\in\mathbf{N}\big)$; **4b)** rovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 1$; **5**. rovnomerne k $f(x) = \dfrac{\pi x}{2}$, $x > 0$ $\left(|f_n(x) - f(x)| =^{[26]}\ |x|\left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{nx}\right| \le |x|\dfrac{1}{|nx|} = \dfrac{1}{n}\right)$; **6**. nerovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ $\left(\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)| = f_n\left(\sqrt[n]{\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}}\right)\right)$; **7**. nerovnomerne k $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x\ne k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\\ 0, & \text{ak } x = k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}$ (pozri tvrdenie z poznámky [3] k riešeniu pr. 300.11c); **8**. rovnomerne k $f(x)\equiv 0$, $x\ge 0$ $\left(\text{z nerovnosti } \ln(1+x)\le x,\ x > -1,\right.$ vyplýva pre $x\in(-1,0)$: $|\ln(1+x)| \le \dfrac{|x|}{1-|x|}$ [27], pre $x\ge 0$ je $|\ln(1+x)| \le |x| \le \dfrac{|x|}{1-|x|}$; pritom $\left.\left|\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}},\ x\ge 0\right)$; **9a)** nerovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x\in(0,2)$ $\left(\lim\limits_{x\to0+}\big(f(x) - f_n(x)\big) = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x}\left(1 - nx\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)\right) = \infty\right)$; **9b)** rovnomerne k $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 2$; **10**. rovnomerne k $f(x) = \ln x$, $x\in[1,a]$ (ak funkciu e^y zapíšeme pomocou jej Maclaurinovho polynómu a zvyšku v Lagrangeovom tvare a položíme $y = \dfrac{\ln x}{n}$, dostaneme $|f_n(x) - f(x)| = \left|n\big(e^{(\ln x)/n} - 1\big) - \ln x\right| = \left|n\left(1+\dfrac{\ln x}{n}+\dfrac{\ln^2 x}{2n^2}e^{(\vartheta_n\ \ln x)/n} - 1\right) - \ln x\right| \le \dfrac{1}{2n}\ln^2 a\cdot e^{(\ln a)/n}$; pripomeňme, že $\vartheta_n\in(0,1)$); **11**. rov-

---

[26] $= |x|\left|\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}nx - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)\right| = |x|\left|\operatorname{arctg}\big(-\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}nx)\big)\right| =$

[27] $|\ln(1+x)| = \ln\dfrac{1}{1+x} = \ln\left(1 - \dfrac{x}{1+x}\right) \le -\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{|x|}{1-|x|}$, $x\in(-1,0)$

nomerne k $f(x) \equiv 1$, $x \in (0,10)$ $\left(|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{x}{2n\left(1 + \dfrac{\vartheta_n \cdot x}{n}\right)^2},\ x \in (0,10)\right)$; **12a)** rovnomerne k $f(x) = e^x$, $x \in [a,b]$ $\Bigg(|f_n(x) - f(x)| = |e^x|\big|1 - e^{E_1(x)}\big| \le e^b\big(1 - e^{E_2}\big)$, $x \in [a,b]$, kde $E_1(x) = -\dfrac{x^2}{2n} \cdot \dfrac{1}{\left(1 + \vartheta_n \dfrac{x}{n}\right)^2}$, $E_2 = -\dfrac{M^2}{2n} \cdot \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{M}{n}\right)^2}$, pričom $M = \max\{|a|,|b|\}\Bigg)$; **12b)** nerovnomerne k $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = \lim\limits_{x\to\infty} e^x \left(1 - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \Big/ e^x\right) = \infty\right)$;

367 **2.** $n\left(f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right) = f'\left(x + \vartheta_n \dfrac{1}{n}\right)$, kde $\vartheta_n \in (0,1)$, pri odhade $|f_n(x) - f(x)|$, $x \in [a,b]$, využite rovnomernú spojitosť funkcie f' na $[a,b+1]$; **3.** $f_n \to \displaystyle\int_0^1 f(x+y)\,dy$, $x \in [a,b]$; $\left|f_n(x) - \displaystyle\int_0^1 f(x+y)\,dy\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+y)\right) dy\right| \le \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+y)\right| dy$, $x \in [a,b]$, ďalej využite rovnomernú spojitosť funkcie f na intervale $[a, b+1]$: ak platí implikácia $\xi, \eta \in [a, b+1]$, $|\xi - \eta| < \delta \Longrightarrow |f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon$ a $\dfrac{1}{n} < \delta$, tak $\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+y)\right| dy \le \frac{\varepsilon}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$;

368 **1.** platí (funkcia x^α je rovnomerne spojitá na $[0,\infty)$ pre $\alpha \in (0,1]$ (rovnomerná spojitosť na $[0,a]$ vyplýva z vety 6 pred pr. I.251, rovnomerná spojitosť na $[a,\infty)$ z pr. I.342.1), tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : r, s > 0 \wedge |r - s| < \delta \Longrightarrow |r^\alpha - s^\alpha| < \varepsilon$, teda ak $\forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \delta$, tak $\forall n > n_0 : |f_n^\alpha(x) - f^\alpha(x)| < \varepsilon$ [28]); **2.** neplatí (platilo by, keby sme naviac predpokladali napr. ohraničenosť funkcí f, g : $|f_n g_n - fg| \le |f_n||g_n - g| + |g||f_n - f|$);

369 **1a)** konverguje rovnomerne k $f(x) = 1 + x^4$, $x \in [a,b]$ (daný rad je geometrický, teda ľahko možno nájsť jeho súčet aj čiastočné súčty); **1b)** nerovnomerne k $f(x) = \begin{cases} 1 + x^4, & \text{ak } x \in [a,b] \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$ (pozri tvrdenie v poznámke [3] k riešeniu pr. 300.11c); **2.** konverguje rovnomerne; **3.** konverguje rovnomerne $\left(\text{konvergencia majorantného radu } \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{[n/2]!} \text{ vyplýva z konvergencie radov } \sum_{k=1}^\infty \frac{a^{2k}}{k!} \text{ a } \sum_{k=1}^\infty \frac{a^{2k-1}}{(k-1)!}\right)$; **4.** konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$ $\left(\text{majorantný rad je } \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n \ln^{3/2}(n+1)}\right)$; **5.** konverguje nerovnomerne $\left(\text{nie je splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie: } \lim\limits_{n\to\infty} f_n(n) = \dfrac{\pi}{2}\right)$; **6a)** konverguje nerovnomerne na $(0,1)$ $\left(\text{vypočítajte } f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$; **6b)** konverguje rovnomerne na $(1,\infty)$ $\left(\text{majorantným číselným radom je napr. } \displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^2 2n}\right)$; **7a)** konverguje nerovnomerne na $(0,\delta)$ (nekonverguje totiž v bode 0, pozri pr. 309); **7b)** konverguje rovnomerne na (δ,∞); **8.** konverguje nerovnomerne $\big(\text{vypočítajte } f_n(2^{-n})\big)$; **9a)** konverguje rovnomerne na $[\alpha,\infty)$; **9b)** konverguje nerovnomerne na $(0,\infty)$ (daný rad nekonverguje v bode 0 [29]); **10.** konverguje rovnomerne na $[1,\infty)$ (Abelovo kritérium); **11a)** konverguje nerovnomerne na $[0,\delta]$ $\left(\text{pre } x = \dfrac{1}{n^2} \text{ je } \dfrac{nx}{(1+x)\cdots(1+nx)} + \right.$

[28] analogicky možno dokázať tvrdenie „ak postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ kladných funkcií rovnomerne konverguje na (a,b) k ohraničenej funkcii f, tak pre každé $\alpha > 0$ platí $f_n^\alpha \rightrightarrows f^\alpha$“

[29] z neexistencie $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ vyplýva neexistencia $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\sqrt{n}$, preto pre niektorú podpostupnosť $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ postupnosti $\{n\}_{n=1}^\infty$ existuje nenulová $\lim\limits_{k\to\infty} \sin\sqrt{n_k}$, potom $\lim\limits_{k\to\infty} n_k \sin\sqrt{n_k}$ je nevlastná, preto v bode 0 nie je splnená nutná podmienka konvergencie; ďalej pozri pr. 309

$\cdots + \dfrac{(n+n)x}{(1+x)\cdots(1+2nx)} \geq n\dfrac{1/n}{(1+2/n)^{2n}} \to e^{-4}$ pre $n \to \infty\Big)$ [30]; **<u>11b</u>)** konverguje rovnomerne na $[\delta,\infty)$ $\Big($majorantný rad je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\delta)^{n-1}}\Big)$; **<u>12</u>.** konverguje rovnomerne na $\mathbf{R}$ $\Big($použite Abelovo kritérium, ku konvergencii radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ pozri pr. 274.11$\Big)$;

$\boxed{\mathbf{370}}$ $\alpha > 2$ $\big($pre $\alpha > 2$ použite Weierstrassovo kritérium; pre $\alpha < 0$ je $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f_n(x) = \infty$, pre $\alpha = 0$ je $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f_n(x) = 1$, preto pre $\alpha \leq 0$ nie je na $(0,\infty)$ splnená nutná podmienka rovnomernej konvergencie; pre $\alpha \in (0,2]$ nájdite súčet $S(x)$ daného radu (ktorý je geometrický) a využite, že pre $\alpha = 2$ je $\displaystyle\lim_{x\to 0} S(x) = 1 \neq S(0) = 0$, pre $\alpha \in (0,2)$ je $\displaystyle\lim_{x\to 0+} S(x) = \infty\big)$;

$\boxed{\mathbf{372}}$ z konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}$ vyplýva rovnosť $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$, potom $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|a-a_n|}\Big/\frac{1}{|a_n|}\right) = 1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|b-a_n|}\Big/\frac{1}{|a_n|}\right)$, preto rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$ konverguje absolútne v bodoch a, b; ďalej pozri pr. 312;

$\boxed{\mathbf{373}}$ nie, uvažujte napr. $f_n(x) = \dfrac{\sin \pi n x}{n}$;

$\boxed{\mathbf{374}}$ platí;

$\boxed{\mathbf{375}}$ z každého otvoreného pokrytia kompaktu I možno vybrať konečné podpokrytie; ak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na každej z množín $K_1, K_2, \ldots, K_p$, tak rovnomerne konverguje aj na ich zjednotení;

$\boxed{\mathbf{376}}$ **<u>1</u>.** $D(f) = \mathbf{R}$, f je spojitá $\Big($rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1+(x/n)^2}$ konverguje rovnomerne a rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$ lokálne rovnomerne na $\mathbf{R}\Big)$; **<u>2</u>.** $D(f) = \mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$, f je spojitá, $\displaystyle\lim_{x\to n} f(x) = \infty$ pre každé $n \in \mathbf{N}$ $\big($pri vyšetrovaní lokálne rovnomernej konvergencie uvedeného radu možno použiť napr. myšlienku riešenia pr. 372, ďalej pozri poznámku 2 k riešeniu pr. 330.4$\big)$; **<u>3</u>.** $D(f) = \mathbf{R}\setminus\{2k\pi\,;\,k\in\mathbf{Z}\}$, f je spojitá;

$\boxed{\mathbf{377}}$ F má periódu ω;

$\boxed{\mathbf{378}}$ **<u>1</u>.** v každom bode intervalu I má každá z funkcií f_n, $n \in \mathbf{N}$, vlastné jednostranné limity, preto podľa vety 7 aj funkcia f má v každom bode intervalu I vlastné jednostranné limity; **<u>2</u>.** $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } |x| < \dfrac{1}{n\pi} \\ \sin\dfrac{1}{x}, & \text{ak } |x| \geq \dfrac{1}{n\pi}\end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{379}}$ nech je dané $\varepsilon > 0$; f je rovnomerne spojitá na $[a,b]$, preto existuje $\delta > 0$ tak, že $(*)$ $x,y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; rozdeľme interval $[a,b]$ deliacimi bodmi $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ na konečný počet častí, z ktorých každá je kratšia ako δ; platí $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x_m) = f(x_m)$ pre $m = 0,\ldots,k$, preto $(**)$ $\exists N \in \mathbf{N}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > N$ $\forall m \in \{0,1,\ldots,k\}$: $|f_n(x_m) - f(x_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; nech $n > N$ a $x \in [x_m, x_{m+1}]$, $m \in \{0,1,\ldots,k-1\}$, predpokladajme, že funkcia f_n je neklesajúca a $f_n(x) > f(x)$ (postup v ostatných prípadoch je analogický), potom $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_{m+1}) - f(x) = |f_n(x_{m+1}) - f(x)| \leq |f_n(x_{m+1}) - f(x_{m+1})| + |f(x_{m+1}) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\big($v závere sme využili nerovnosti $(*)$ a $(**)\big)$, teda $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbf{N}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > N$ $\forall x \in [a,b]$: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ [31];

---

[30] iná možnosť: $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)\cdots\big(1+(n-1)x\big)} - \dfrac{1}{(1+x)\cdots(1+nx)}$, odtiaľ $S_n(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)\cdots(1+nx)}$, $S(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0 \\ 1, & \text{ak } -x \notin \mathbf{N}\end{cases}$

[31] nie je ťažké dokázať, že ak f je nekonštantná funkcia, tak existuje $M \in \mathbf{N}$ tak, že f_n sú neklesajúce pre všetky $n > M$ alebo f_n sú nerastúce pre všetky $n > M$, potom (pozri pr. 296.1) f je neklesajúca, resp.

$\boxed{\mathbf{380}}$ pozri pr. 296.2 a I.458;

$\boxed{\mathbf{381}}$ **1.** napr. $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde f_1 je funkcia s periódou 1, pričom $f_1(x) = |x|$ pre $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $f_n(x) = \frac{1}{4^{n-1}} f_1\left(4^{n-1}x\right)$; spojitosť f vyplýva z rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $\mathbf{R}$; pre $x = \frac{k}{4^m}$ $(k \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ a $n > m$ je $f(x) = 0$; nech $a = \frac{k}{4^m}$, $h = \frac{1}{4^{2m+1}}$, potom $f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{m} \big(f_k(a+h) - f_k(a)\big) + \sum_{k=m+1}^{2m+1} f_k(a+h) \geq -mh + (m+1)h > 0$, analogicky $f(a-h) - f(a) > 0$; pritom pre každý interval I existujú $k \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ tak, že $\frac{k}{4^m} - \frac{1}{4^{2m+1}}, \frac{k}{4^m}, \frac{k}{4^m} + \frac{1}{4^{2m+1}} \in I$;

2. za g možno zvoliť primitívnu funkciu k funkcii $f|[0,1]$, kde f je funkcia z pr. 381.1, pritom využite tvrdenie ,,ak f je konvexná (konkávna) a diferencovateľná na I, tak f' je neklesajúca (nerastúca) na I“ (na jeho dôkaz stačí prejsť k limite pre $z \to x+$, resp. $z \to y-$ v nerovnostiach $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, resp. $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ $\quad (x,y,z \in I,\ x < z < y)$);

$\boxed{\mathbf{382}}$ **1.** napr. $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\operatorname{sgn}(x - a_n)$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť obsahujúca všetky racionálne čísla; uvedený rad konverguje rovnomerne (Weierstrassovo kritérium), každá z funkcií f_n je spojitá v každom iracionálnom čísle, preto aj f je spojitá v každom iracionálnom čísle; funkcia $\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty} f_n$ je spojitá v bode a_k, $\lim_{x\to a_k+} f_k(x) > f_k(a_k) > \lim_{x\to a_k-} f_k(x)$, preto $\lim_{x\to a_k+} f(x) > f(a_k) > \lim_{x\to a_k-} f(x)$;

$\boxed{\mathbf{383}}$ **1.** nech $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, $|f_n(x)| < K$ pre $x \in [a,b)$, $n \in \mathbf{N}$; pretože $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b-\delta]$ pre každé $\delta \in (0, b-a)$ (pozri pr. 375), platí podľa vety 8 $f \in \mathcal{R}[a, b-\delta]$ pre každé $\delta \in (0, b-a)$, súčasne f je ohraničená na $[a,b]$, preto $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (pozri pr. 147 a poznámku 2 za vetou 6 z odseku 2.1); $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_a^{b-\delta} + \int_{b-\delta}^b$, pritom $\int_{b-\delta}^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq 2K\delta$ (ak $|f_n(x)| \leq K$ a $f_n \to f$ na $[a,b)$, tak $|f(x)| \leq K$ na $[a,b)$ a $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2K$); ak pre $n > N$ a $x \in \left[a, b - \frac{\varepsilon}{4K}\right]$ je $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, tak $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ pre $n > N$;

2. napr. $f_n(x) = \begin{cases} 2nx^2, & \text{ak } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \\ 0, & \text{ak } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$;

$\boxed{\mathbf{384}}$ **1.** 0 $\left(x^n \ln x \rightrightarrows 0\right.$ na $(0,1]$, ďalej pozri pr. 301, nezabudnite preveriť integrovateľnosť funkcií $\frac{x^n \ln x}{1+x^2}$ na $\left.[0,1]\right)$; **2.** 0 ($\sin^n x$ konverguje na $[0,1)$ lokálne rovnomerne k 0, pozri pr. 383.1, porovnaj s riešením pr. 113.4); **3.** 0 $\Big($z nerovnosti $\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \leq \frac{nx}{n\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, $x \in (0,1]$, vyplýva rovnomerná ohraničenosť postupnosti $\left\{\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ na $(0,1]$; $\left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{a}}$ pre $x \in [a,1]$, preto

---

nerastúca

$\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \rightrightarrows 0$ na $[a,1]$, $a>0$, možno použiť pr. 383.1 [32]$\Big)$; $\underline{\mathbf{4}}$. 0 $\left(\int_0^{1+1/n} = \int_0^1 + \int_1^{1+1/n}\right.$, pritom $x^n \ln x \rightrightarrows 0$ na $(0,1]$; $|x^n \ln x| \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $x \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$, a preto $\int_1^{1+1/n} x^n \ln x\,dx \le \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$ pre $n \to \infty\Big)$; $\underline{\mathbf{5}}$. 0 $\left(\left\{\frac{1}{1+nx}\right\}_{n=1}^{\infty}\right.$ konverguje na $(0,1]$ lokálne rovnomerne k 0, f je ohraničená, ďalej pozri pr. 301, 383.1$\Big)$;

385 $\ln\dfrac{3}{2}$ (pozri pr. 362.2);

386 $\underline{\mathbf{1}}$. napr.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q} \quad \text{alebo} \quad x=0 \\ 1\,, & \text{ak} \quad x = \dfrac{p}{q}, \quad p\,,q \in \mathbf{N} \quad \text{sú nesúdeliteľné}, \quad p \le q\,, \quad q \in \{1,2,\dots,n\} \\ \dfrac{1}{q-n}\,, & \text{ak} \quad x = \dfrac{p}{q}, \quad p\,,q \in \mathbf{N} \quad \text{sú nesúdeliteľné}, \quad p \le q\,, \quad q > n \end{cases};$$

$f = \chi|[0,1]$ (riemannovská integrovateľnosť funkcie f_n na $[0,1]$ sa dokáže rovnako ako v prípade Riemannovej funkcie χ — pozri pr. 64, nerovnomernú konvergenciu možno dokázať priamo z definície alebo na základe vety 8); $\underline{\mathbf{2}}$. napr. $f_n(x) = x^n\chi(x)$, $x \in [0,1]$, $f(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$;

387 podľa pr. 192 a 193 existuje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojite diferencovateľných monotónnych funkcií taká, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$; potom aj $gf_n \rightrightarrows gf$ na $[a,b]$; podľa pr. 119 $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists c_n \in [a,b]$: $\int_a^b f_n(x)g(x)\,dx = f_n(a)\int_a^{c_n} g(x)\,dx + f_n(b)\int_{c_n}^b g(x)\,dx$; z postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyberme konvergentnú postupnosť $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, nech $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} = c \in [a,b]$, potom $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b f_{n_k}(x)g(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\left(f_{n_k}(a)\int_a^{c_{n_k}} g(x)\,dx + f_{n_k}(b)\int_{c_{n_k}}^b g(x)\,dx\right) = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx$;

388 $\underline{\mathbf{1}}$. $D(f) = \mathbf{R}$, $D(f') = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ $\left(f'_+(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \ne -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = f'_-(0)\right.$; na výpočet $f'_+(0)$, resp. $f'_-(0)$ stačí použiť vetu 9' na intervale $I=[0,1]$, resp. $I=[-1,0]\Big)$; $\underline{\mathbf{2}}$. $D(f) = [0,\infty)$, $D(f') = (0,\infty)$ $\Big(f'(0) = -\infty$: každá z funkcií $g_n(x) := \dfrac{n}{1+n^2}e^{-nx}$ je klesajúca na $(0,\infty)$, preto $g := \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ je nerastúca na $(0,\infty)$, teda existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{x\to0+} g(x)$; keby platilo $\lim\limits_{x\to0+} g(x) \in \mathbf{R}$, musel by rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ konvergovať v bode 0 (vyplýva to z podobných úvah ako v riešení pr. 345.2), čo je spor; preto $\lim\limits_{x\to0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to0+}\big(-g(x)\big) = -\infty$, ďalej pozri pr. I.384.1$\Big)$;

389 využite, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$ konverguje rovnomerne na každom kompaktnom intervale $I' \subset I$ (pozri pr. 375) a vetu 9';

390 pripomeňme, že pre $x \ne 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx$;

391 podľa vety 9 je $\varphi'(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(f^{(n)}(x)\big)' = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$; z rovnosti $\varphi' = \varphi$ vyplýva $\varphi(x) = Ce^x$ $\big(\varphi(x) \equiv 0$ $(= 0\cdot e^x)$ je zrejme riešením rovnice $\varphi' = \varphi$; ak $\varphi(a) \ne 0$ pre niektoré $a \in \mathbf{R}$, uvažujme maximálny interval $I \subset \mathbf{R}$ taký, že $a \in I$, $\varphi(x) \ne 0$ pre $x \in I$ $\big($zo spojitosti funkcie φ vyplýva, že taký interval existuje a je otvorený; ak $I = (b,c)$ a $b \in \mathbf{R}$, tak $\varphi(b) = 0$, podobne $\varphi(c) = 0$ v prípade $c \in \mathbf{R}\big)$; pre $x \in I$ platí $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \big(\ln|\varphi(x)|\big)' = 1$, preto $\ln|\varphi(x)| = x + K$,

---

[32] z uvedeného vyplýva dokonca rovnomerná konvergencia postupnosti $\left\{\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ na $(0,1]$

odtiaľ $|\varphi(x)| = e^K e^x$; φ nemení na I znamienko, preto $\varphi(x) = e^K e^x$ (ak $\varphi(a) > 0$), $x \in I$, alebo $\varphi(x) = -e^K e^x$, $x \in I$; pretože získaná funkcia je nenulová na $\mathbf{R}$, platí $I = \mathbf{R}\big)$;

392 nech $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in I$, $x > a$, nech $K_n \cap (a,x) = \{k_1, \dots, k_m\}$, pričom $k_0 := a < k_1 < k_2 < \dots < k_m < x =: k_{m+1}$; potom (ak použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote) $\big|f_n(x) - f_n(a)\big| \le \sum\limits_{p=0}^{m} \big|f_n(x_{p+1}) - f_n(x_p)\big| = \sum\limits_{p=0}^{m} \big|f_n'(\vartheta_p)\big||x_{p+1} - x_p| \le a_n \sum\limits_{p=0}^{m} |x_{p+1} - x_p| = a_n|x-a|$; analogicky sa postupuje pre $x < a$; odtiaľ $|f_n(x)| \le |f_n(a)| + a_n|x-a|$, z čoho vyplýva rovnomerná konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[b,c]$, kde $b \le a \le c$ $\big(|x-a| \le \max\big\{|b-a|, |c-a|\big\}\big)$; rovnako možno dokázať nerovnosť $\left|\dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right| \le a_n$ pre ľubovoľné $x, x_0 \in I$, $x \ne x_0$, z ktorej na základe vety 7' vyplýva tvrdenie o derivovaní člen po člene;

393 **1.** diferencovateľnosť funkcie f v každom bode $x \in (0,1) \setminus \mathbf{Q}$ vyplýva z pr. 392, pre $x = a_k$ ($k \in \mathbf{N}$) zapíšme funkciu f v tvare $f(x) = \dfrac{|x-a_k|}{3^k} + \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\ne k}}^{\infty} \dfrac{|x-a_n|}{3^n}$, druhý zo sčítancov má deriváciu v bode a_k (pr. 392), prvý má v bode a_k navzájom rôzne jednostranné derivácie;

394 **1**. $[-1,3]$ pre $p > 2$, $[-1,3)$ pre $0 < p \le 2$, $(-1,3)$ pre $p \le 0$ (pozri pr. 225.6 a 270.7); **2**. $\mathbf{R}$ $\left(\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot \dfrac{n}{e^{n^{\alpha-1}}}\right.$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$ — pozri poznámku za pr. $\left.224\right)$; **3**. $(-9,9)$ $\left(\text{postupujte ako v pr. 336.6, využite rovnosti } \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1,\ \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1-\cos u}{u^2} = \dfrac{1}{2}\right)$; **4**. $\mathbf{R}$ pre $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $[-1,1]$ pre $m \in (0,\infty) \setminus \mathbf{N}$, $(-1,1]$ pre $m \in (-1,0)$, $(-1,1)$ pre $m \le -1$ $\left(|f_n(1)| = 1 \text{ pre } m = -1,\ \left|\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)}\right| > 1 \text{ pre } m < -1,\right.$ v prípade $m \in (-1,0)$, $x = 1$ pozri pr. $\left.270.6\right)$; **5**. $\left[-\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a}\right)$ pre $a \ge b > 0$, $\left[-\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{b}\right]$ pre $0 < a < b$ $\left(\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{n} + \dfrac{b^n}{n^2}} = \dfrac{a}{\sqrt[n]{n}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)^{1/n}\right.$ pre $a \ge b$, podobne postupujte pre $\left.b > a\right)$; **6**. $[-4,-2]$ (použite vetu 6' z odseku 3.3); **7**. $[-1,1]$ pre $a > 1$, $(-1,1)$ pre $a \in (0,1]$ $\Big($pri vyšetrovaní konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{-\sqrt{n}}$, $a > 1$, možno použiť porovnávacie kritérium — z rovnosti $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{a^x} = 0$ vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a^{\sqrt{n}}} = 0$ — alebo pr. 234.1b a d'Alembertovo kritérium$\Big)$; **8**. $[-1,1]$; **9**. $(-1,1]$ $\left(\dfrac{f_n(-1)}{f_{n+1}(-1)} = e^E\right.$, kde $E = {}^{33}\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, preto $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{f_n(-1)}{f_{n+1}(-1)} - 1\right) = \dfrac{1}{2}$; $\ln\left|\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)}\right| = -1 + n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, ďalej použite postup z pr. $\left.240\right)$; **10**. $(0,2)$ $\big(\nu(n) = [\log n] + 1$, v bodoch 0 a 2 nie je splnená nutná podmienka konvergencie$\big)$; **11**. $[-1,1]$ $\Big($pri výpočte $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ možno využiť pr. I.206.1; konvergencia radu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n(1)$ vyplýva z konvergencie radov $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{2k+1}(1)$ (Dirichletovo kritérium), $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{4k}(1)$ (Leibnizovo kritérium) a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{4k-2}(1)$; podobne možno postupovať v prípade $x =$

---

[33] $= 1 + n\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 + n\left(-\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{n}{2n^2} - \left(\dfrac{n}{2(n+1)^2} - \dfrac{n}{2n^2}\right) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) =$

$-1\Big)$; **12**. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ $\Bigg(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{2k+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{4k-2}\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{8k-4}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ konvergujú a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{8k}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ diverguje, preto $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n$ diverguje v bode $x=\dfrac{1}{3}$, podobne pre $x=-\dfrac{1}{3}\Bigg)$; **13**. $[-1,1]$ $\Bigg($pre $x=1$ pozri pr. 274.11; konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}$ vyplýva z konvergencie radov $\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k^2,\ k\in\mathbf{N}}}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}$ (Leibnizovo kritérium) a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[k]+k^2}}{k^2}\Bigg)$; **14.** konverguje len v bode 0 $\big($množinou hromadných hodnôt postupnosti $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ je interval $[-1,1]$, pozri [13, str. 74, kap. 2, §2, pr. 6]$\big)$;

$\boxed{\textbf{395}}$ **1.** $R\ \geq\ R_1R_2$ (využite pr. I.206.2; viete uviesť príklad, v ktorom bude platiť $R > R_1R_2$?); **2**. $R=\max\{1,R_1\}$ $\Bigg($ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť, tak $R_1\geq 1$ (pozri pr. 341.2) a z nerovností $0\leq|a_n|\leq K$ dostávame $\dfrac{|a_n|}{1+K}\leq\dfrac{|a_n|}{1+|a_n|}\leq|a_n|$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{1+K}}\leq\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{1+|a_n|}}\leq \limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ $\Bigg($pri výpočte $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{1+K}}$ využite rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{1+K}}=1$ a pr. I.206.1$\Bigg)$; ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená postupnosť, tak $R_1\leq 1$ (pozri pr. 341.1) a existuje podpostupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|=\infty$, potom $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|a_{n_k}|}{1+|a_{n_k}|}=1$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{\dfrac{|a_{n_k}|}{1+|a_{n_k}|}}=1$, súčasne z nerovnosti $\dfrac{|a_n|}{1+|a_n|}<1$ vyplýva $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{1+|a_n|}}\leq 1$, preto $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{1+|a_n|}}=1\Bigg)$; **3**. $R\geq\min\{R_1,R_2\}$ (vyplýva to z vety 17 z odseku 3.4 a z vety 10); ak $a_n>0$, $b_n>0$, $n\in\mathbf{N}$, tak $R=\min\{R_1,R_2\}$ (využite pr. 254; príklad dokumentujúci nerovnosť $R>\min\{R_1,R_2\}$ možno odvodiť z pr. 256);

$\boxed{\textbf{396}}$ **1**. $\mu x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}\,\mu(1^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)\cdots\big((2n-1)^2-\mu^2\big)x^{2n+1}$; $I=\mathbf{R}$, ak $\mu=0$ alebo $\mu\in\{2k+1\,;\,k\in\mathbf{Z}\}$; $I=[-1,1]$ v ostatných prípadoch $\big($platí $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+\mu^2 f(x)=0$, $x\in(-1,1)$, ďalej pozri postup z pr. I.327.6 [34]$\big)$; **2**. $\dfrac{1}{7}\Bigg(\ln 3-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2\cdot 18^n-1}{2n\cdot 9^n}x^{2n}\Bigg)$; $I=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (pri hľadaní intervalu I sme využili poznámku 2 za riešením pr. 348.16); **3**. $-2x^2+2x^4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}\,2^{2n+1}\big(x^{4n+4}-x^{4n+2}\big)$, $I=\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (využili sme výsledok pr. 349.2); **4**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[n/2]}x^{2n+1}}{(2n+1)2^n}$, $I=\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$; **5**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$, $I=(-1,1)$; **6**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, $I=[-1,1]$; **7**. $\ln\pi+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{2^{4n}(4n+1)}$, $I=(-2,2)$; **8**. $\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2(2n+1)}$, $I=[-1,1]$ $\left(f'(x)=\dfrac{1}{2(1+x^2)}\right)$; **9**. $2x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^{2n+1}$, $I=[-1,1]$ $\Bigg(f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{sgn}\,(1-2x^2)$, súčtom uvedeného radu je funkcia

[34] existencia $f^{(n)}(0)$, $n\in\mathbf{N}$ (porovnaj s poznámkou za riešením pr. I.327.6) vyplýva z nasledujúceho tvrdenia (pozri [10, odsek 446]): ak funkcie f, g sú súčty mocninových radov so stredom 0 a $f(0)$ je vnútorný bod množiny $D(g)$, tak funkciu $g\circ f$ možno v niektorom okolí bodu 0 rozložiť do mocninového radu so stredom 0

$S(x) = \left\{ \begin{array}{rl} f(x)\,, & \text{ak} \quad |x| \le 1/\sqrt{2} \\ \pi - f(x)\,, & \text{ak} \quad x \in (1/\sqrt{2}, 1] \\ -\pi - f(x)\,, & \text{ak} \quad x \in [-1, -1/\sqrt{2}) \end{array} \right)$; **10**. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{16n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{16n+1}\,,\ I = (-1,1)$ $\left(f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1-x}{1-x^{16}}\,, & \text{ak} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\} \\ \dfrac{1}{16}\,, & \text{ak} \quad x = 1 \end{array} \right. \right)$;

$\boxed{\mathbf{397}}$ **1.** pri hľadaní Maclaurinovho radu derivácie ľavej strany použite Cauchyho súčin radov; konvergencia v bodoch $x = 1$, $x = -1$ vyplýva z Leibnizovho kritéria, pri dôkaze rovnosti $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} = 0$ využite rovnosť (3.2) z pr. 220; nezabudnite, že treba zdôvodniť, prečo sa pravá strana dokazovanej rovnosti rovná jej ľavej strane; **2.** najprv nájdite Maclaurinov rad funkcie $\ln^2(1+x)$ (pozri pr. 396.5); konvergencia v bode 1 vyplýva z Leibnizovho kritéria podobne ako v pr. 397.1, z rovnosti (3.2) z pr. 220 vyplýva aj divergencia uvedeného radu v bode $x = -1$; **3.** pre $f(x) = \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$ platí $(1+x^2)f'(x) = 1 - xf(x)$, z čoho možno odvodiť rekurentný vzťah $f^{(n+1)}(0) = -f^{(n-1)}(0)$, $n \in \mathbf{N}$; konvergencia v bodoch $x = 1$, $x = -1$ vyplýva z Leibnizovho kritéria (použite postup z pr. 240); pri dokazovaní rovnosti pravej a ľavej strany využite fakt, že Maclaurinove rady funkcií $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ a $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ konvergujú na $(-1,1)$ k týmto funkciám, a vetu 17 z odseku 3.4; **4.** pre $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ platí $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$, z čoho možno odvodiť rekurentný vzťah $f^{(n+1)}(0) = n^2 f^{(n-1)}(0)$, $n \in \mathbf{N}$; **5.** pri hľadaní Maclaurinovho radu derivácie ľavej strany využite výsledok pr. 397.3;

$\boxed{\mathbf{399}}$ $F(x) = 2\pi \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$, $x \in (-1,1)$ [35] $\Bigg($z rovnosti $\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{u^n}{n}$, $u \in [-1,1)$, vyplýva $F(x) = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos^n t}{n}\, dt$; získaný rad konverguje pre pevné $x \in (-1,1)$ rovnomerne na $[0, 2\pi]$, preto $F(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \int_0^{2\pi} \cos^n t\, dt \right) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{n}$ $\Bigg($ využili sme rovnosti $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^n t\, dt = \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^n t\, dt = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt = (-1)^n \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos^n t\, dt$ a výsledok pr. 96.1 spolu s pr. 93.3a$\Bigg)$, potom $F'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{2\pi}{x} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} = -\frac{2\pi}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right), & \text{ak} \quad 0 < |x| < 1 \\ 0\,, & \text{ak} \quad x = 0 \end{array} \right. =$ $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$, pri hľadaní primitívnej funkcie použite substitúciu $1 + \sqrt{1-x^2} = t$ a uvážte, že $F(0) = 0\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{400}}$ **1**. $\operatorname{ch} x$; **2**. x, $x > 0$; **3**. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; **4**. x pre $|x| < 1$, $\dfrac{1}{x}$ pre $|x| \ge 1$ $\Bigg(\dfrac{1}{2} t +$

---

[35]pokiaľ má čitateľ ešte stále pochybnosti o elementárnosti funkcie F $\Bigg($nedôveru môže vzbudzovať definičný obor: definičným oborom elementárnej funkcie $2\pi \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$ je totiž intrval $[-1,1]\Bigg)$, nech si jej predpis zapíše napr. v tvare $\dfrac{x^2-1}{x^2-1}\, 2\pi \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{t^{2n+1}}{2n+2} = \begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}, & \text{ak}\quad 0<|t|\le 1\\ 0\,, & \text{ak}\quad t=0\end{cases} = \dfrac{t}{1+\sqrt{1-t^2}}\Bigg)$; **5**. $\cos\sqrt{x}$ pre $x\ge 0$; $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ pre $x<0$ $\big($pre $x\ge 0$ $(x<0)$ použite substitúciu $x=t^2$ $(x=-t^2)\big)$; **6**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}=$

$\begin{cases}\dfrac14\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right), & \text{ak}\quad x>0\\ 0\,, & \text{ak}\quad x=0\\ \dfrac14\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x}-\cos\sqrt{-x}\right), & \text{ak}\quad x<0\end{cases}$ $\Bigg(=x\big(xg'(x)\big)'$, kde $g(x)=$ $\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1\,, & \text{ak}\quad x\ge 0\\ \dfrac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}-1\,, & \text{ak}\quad x<0\end{cases}\Bigg)$; **7**. $\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-1/3}-1\,,\ \ -2\le x<2$ (k oboru konvergencie daného radu pozri vzorec 5 z úvodu k odseku 4.3.2);

401 **1**. $3-2\ln 2-\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$ $\left(=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^n}{n}-3\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{3n+1}}{3n+1}\right)$; **2**. $\dfrac12-\dfrac{\pi}{4}$ $\left(=\lim_{x\to 1-}\left(x^2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n-1}}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}\right)\right)$; **3**. $-\dfrac12\ln^2 2$ (využite pr. 396.5); **4**. $-\dfrac{\pi^2}{16}$ $\Bigg($rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac13+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\right)x^{2n-1}$ je Cauchyho súčinom radov $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}\Bigg)$;

402 ak $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\rightrightarrows f(x)$ na $\mathbf{R}$, tak z nutnej podmienky rovnomernej konvergencie vyplýva $\exists\, n_0\in\mathbf{N}\ \forall\, n\in\mathbf{N},\ n>n_0\ \forall\, x\in\mathbf{R}\,:\ |a_nx^n|<1$, preto $\forall\, n\in\mathbf{N},\ n>n_0\ :\ a_n=0$;

403 rad $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ má polomer konvergencie $R=\infty$ $\Bigg($zo vzťahov $|a_n|\le\dfrac{M}{n!}$ a $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{M}{n!}}=0$ — pozri pr. I.186.3 alebo poznámku za pr. 224 — vyplýva $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0\Bigg)$, z tvrdenia c) vety 16 vyplýva: pre $x\in(-b,b)$ platí $|f^{(k)}(x)|=\left|\sum_{n=k}^{\infty}\dfrac{n!}{(n-k)!}\,a_nx^{n-k}\right|\le\sum_{n=k}^{\infty}\dfrac{n!}{(n-k)!}\,|a_n||x|^{n-k}\le\sum_{n=k}^{\infty}M\,\dfrac{b^{n-k}}{(n-k)!}=Me^b$, ďalej pozri dôkaz pr. 354;

404 **1a**) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\int_0^1 e^{-x\ln x}\,dx=\int_0^1 e^{-\varphi(x)}\,dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\varphi^n(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\int_0^1\varphi^n(x)\,dx\right)$, kde $\varphi(x)=\begin{cases}x\ln x\,, & \text{ak}\quad x\in(0,1]\\ 0\,, & \text{ak}\quad x=0\end{cases}$ $\Bigg($rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\cdot\varphi^n(x)$ vyplýva z lokálne rovnomernej konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\,z^n$ na $\mathbf{R}$ a z ohraničenosti funkcie $\varphi\Bigg)$, z rekurentného vzťahu $\displaystyle\int_0^1 x^m\ln^n x\,dx=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m\ln^{n-1}x\,dx$ vyplýva $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx=\frac{(-1)^nn!}{(n+1)^{n+1}}$; **1b**) pozri riešenie pr. 399; **2a**) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)^2}$; **2b**) $2-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ $\Bigg(\displaystyle\int_0^1\ln x\ln(1-x)\,dx=-\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\ln x\right)dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac1n\int_0^1 x^n\ln x\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac1n-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$;

rovnomerná konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \ln x$ na $(0,1]$ vyplýva z Weierstrassovho kritéria$\Big)$ [36];

$\boxed{\mathbf{405}}$ $\pi = 3.141\,592\,654 \pm 10^{-9}$, pri dôkaze rovnosti (4.19) sme použili vzorce $2 \operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ pre $\alpha^2 < 1$, $\operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$ pre $\alpha\beta > 0$ (pozri riešenie pr. I.87.1);

$\boxed{\mathbf{406}}$ $\ln 2 = 0.693\,147\,2 \pm 10^{-7}$, $\ln 3 = 1.098\,612\,3 \pm 10^{-7}$, $\ln 5 = 1.609\,437\,9 \pm 10^{-7}$, $\ln 6 = 1.791\,760 \pm 10^{-6}$, $\ln 10 = 2.302\,585 \pm 10^{-6}$ $\Bigg($inverzná matica k matici $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \\ -16 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\ln \frac{9}{10} = -0.105\,360\,516 \pm 10^{-9}$, $\ln \frac{24}{25} = -0.040\,821\,995 \pm 10^{-9}$, $\ln \frac{81}{80} = 0.012\,422\,520 \pm 10^{-9}\Bigg)$;

$\boxed{\mathbf{407}}$ **1**. $2.835\,4 \pm 10^{-4}$ $\left(\int_2^4 e^{1/x}\, dx = \int_2^4 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, x^n}\, dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \int_2^4 \frac{dx}{x^n} \right) \right.$, približnú hodnotu $\ln 2$ pozri v riešení pr. 357$\Big)$; **2**. $8.040\,5 \pm 10^{-4}$ $\left(\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+1/x) + \ln x}{x}\, dx = \int_{10}^{100} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n x^{n+1}} \right) dx + \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x}\, dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \int_{10}^{100} \frac{dx}{x^{n+1}} \right) + \frac{3}{2} \ln^2 10 \right.$, približnú hodnotu $\ln 10$ pozri v riešení pr. 406; treba si uvedomiť, že Maclaurinov rad funkcie $\ln(1+x)$ nekonverguje v žiadnom bode intervalu $[10, 100]$, preto sme použili uvedené úpravy$\Big)$;

[36] dosadením $x = \pi$ do rovnosti z poznámky [37] k pr. 249 možno dokázať rovnosť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (iný spôsob dôkazu tejto rovnosti pozri v [10, odsek 440, pr. 7, alebo odsek 511, pr. 4])

$= -\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ln x\right) dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n \ln x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$; rovnomerná konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \ln x$ na $(0,1]$ vyplýva z Weierstrassovho kritéria$\Big)$ [36];

405 $\pi = 3.141\,592\,654 \pm 10^{-9}$, pri dôkaze rovnosti (4.19) sme použili vzorce $2 \operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ pre $\alpha^2 < 1$, $\operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$ pre $\alpha\beta > 0$ (pozri riešenie pr. I.87.1);

406 $\ln 2 = 0.693\,147\,2 \pm 10^{-7}$, $\ln 3 = 1.098\,612\,3 \pm 10^{-7}$, $\ln 5 = 1.609\,437\,9 \pm 10^{-7}$, $\ln 6 = 1.791\,760 \pm 10^{-6}$, $\ln 10 = 2.302\,585 \pm 10^{-6}$ $\Big($inverzná matica k matici $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \\ -16 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\ln \frac{9}{10} = -0.105\,360\,516 \pm 10^{-9}$, $\ln \frac{24}{25} = -0.040\,821\,995 \pm 10^{-9}$, $\ln \frac{81}{80} = 0.012\,422\,520 \pm 10^{-9}\Big)$;

407 **1**. $2.835\,4 \pm 10^{-4}$ $\left(\int_2^4 e^{1/x} \, dx = \int_2^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, x^n} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \int_2^4 \frac{dx}{x^n}\right),\right.$ približnú hodnotu $\ln 2$ pozri v riešení pr. 357$\Big)$; **2**. $8.040\,5 \pm 10^{-4}$ $\Big(\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx = \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+1/x) + \ln x}{x} \, dx = \int_{10}^{100} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx^{n+1}}\right) dx + \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \int_{10}^{100} \frac{dx}{x^{n+1}}\right) + \frac{3}{2} \ln^2 10$, približnú hodnotu $\ln 10$ pozri v riešení pr. 406; treba si uvedomiť, že Maclaurinov rad funkcie $\ln(1+x)$ nekonverguje v žiadnom bode intervalu $[10, 100]$, preto sme použili uvedené úpravy$\Big)$;

Dodatok. Krivky a funkcie dané parametricky

408 **1**. $\varrho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ $\Big($ak v danej rovnici položíme $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, $\varphi \geq 0$, dostaneme $\varrho^4 = \varrho^2 a^2 \sin 2\varphi$, odtiaľ $\varrho = 0$ (a φ je ľubovoľné) alebo $\varrho^2 = a^2 \sin 2\varphi$; pretože $\varrho \geq 0$, je druhá z týchto rovníc ekvivalentná s rovnicou $\varrho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$; rovnicou $\varrho = 0$ je popísaná množina obsahujúca len bod s pravouhlými súradnicami $x = y = 0$, tento bod je obsiahnutý aj v množine popísanej rovnicou $\varrho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$ (stačí položiť $\varphi = 0$), preto na popis našej krivky stačí rovnica $\varrho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, pritom — pretože body s polárnymi súradnicami (ϱ, φ) a $(\varrho, \varphi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, sú totožné a pretože jednou z period funkcie $a\sqrt{\sin 2\varphi}$ je číslo 2π — sa stačí obmedziť na $\varphi \in [0, 2\pi]$ také, že $\sin 2\varphi \geq 0$, porovnaj tiež s poznámkou [6] k pr. 410.4$\Big)$; **2**. $\varrho = a\sqrt{\sin 4\varphi}$ [1]; **3**. $\varrho = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sin 2\varphi}}{\sqrt{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}} = \frac{a\sqrt{\sin 2\varphi}}{\sqrt{1 + \cos^2 2\varphi}}$ [1]; **4**. krivka je zjednotením polpriamok $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, krivky $\varrho = 0$ $\big($tj. jednobodovej množiny $\{0,0)\}\big)$ a krivky $\varrho = \frac{1}{a(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}$ $\left(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi = \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \left(\sin^2 \varphi - \sin\varphi \cos\varphi + \cos^2 \varphi\right)\right)$;

409 **1.** daná krivka je zjednotením jednobodovej množiny $\{(0, -a)\}$ a krivky s parametrickým vy-

---

[36] dosadením $x = \pi$ do rovnosti z poznámky [37] k pr. 249 možno dokázať rovnosť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (iný spôsob dôkazu tejto rovnosti pozri v [10, odsek 440, pr. 7, alebo odsek 511, pr. 4])

[1] k definičnému oboru pozri poznámku [6] k pr. 410.4

jadrením $x = \dfrac{a(1-t)}{(1+t)^2}$, $y = \dfrac{at(1-t)}{(1+t)^2}$, $t \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$ $\Big($pre každý bod $X \equiv (x,y)$ okrem bodov tvaru $(0,b)$, $b \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, existuje usporiadaná dvojica (x,t) tak, že $X \equiv (x,tx)$; bod tvaru (x,tx), $x \neq 0$, leží na našej krivke práve vtedy, keď $(x+tx)^2 = a(x-tx)$, odtiaľ $x(1+t)^2 = a(1-t)$ (využili sme predpoklad $x \neq 0$) a — pretože pre $t=-1$ neexistuje x riešiace poslednú rovnicu — $x = \dfrac{a(1-t)}{(1+t)^2}$, potom $y = xt = \dfrac{at(1-t)}{(1+t)^2}$; zostáva nájsť body tvaru $(0,b)$ ležiace na našej krivke: dosadením $x=0$ do pôvodnej rovnice dostávame $y^2 = -ay$, teda $y=0$ alebo $y=-a$, z bodov $(0,0)$, $(0,-a)$ len bod $(0,-a)$ nie je popísaný predtým získanými parametrickými rovnicami [2]; **2.** $x = \dfrac{at}{1+t^4}$, $y = \dfrac{at^2}{1+t^4}$, $t \in \mathbf{R}$ $\Big($položili sme $y = tx$; parametrické vyjadrenie danej krivky možno tiež odvodiť z jej rovnice v polárnych súradniciach, ktorá má tvar $\varrho = \dfrac{a\cos^2\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$, odtiaľ $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, a ak získané zlomky rozšírime $\dfrac{1}{\cos^4\varphi}$, je $x = \dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1+\mathrm{tg}^4\varphi}$, $y = \dfrac{a\,\mathrm{tg}^2\varphi}{1+\mathrm{tg}^4\varphi}\Big)$; **3.** $x = 4t(t-1)$, $y = 16t^3(t-1)^2$, $t\in\mathbf{R}$; **4.** $x = \sqrt[7]{\dfrac{(t-1)^3}{t^5}}$, $y = \sqrt[7]{\dfrac{t-1}{t^4}}$, $t \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ (položili sme $x = ty^3$);

$\boxed{\mathbf{410}}$ **1.** elipsa (pre $b \neq d$), resp. kružnica (pre $b = d$): $\dfrac{(x-a)^2}{b^2} + \dfrac{(y-c)^2}{d^2} = 1$; **2.** vetva hyperboly: $x = \sqrt{y^2+1}$ $\Big($inverznou funkciou k funkcii sh je funkcia $\mathrm{Arsh}\,t := \ln\big(t+\sqrt{t^2+1}\big)\Big)$; **3.** úsečka $y = \dfrac{\pi}{2} - x$, $x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)$ $\Big(y = \mathrm{arcctg}\,(\mathrm{tg}\,x)$, $x \in \Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)$, ďalej použite rovnosť $\mathrm{arcctg}\,\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\alpha$ [3]$\Big)$; **4.** priamka p : $y\cos\varphi_0 - x\sin\varphi_0 = d$ $\Big($podľa poznámky [6] k zadaniu stačí uvažovať $\varphi \in (\varphi_0, \varphi_0+\pi)$; daná rovnica je ekvivalentná s rovnicou $d = \varrho\sin(\varphi-\varphi_0) = \varrho\sin\varphi\cos\varphi_0 - \varrho\cos\varphi\sin\varphi_0$, $\varphi \in (\varphi_0,\varphi_0+\pi)$, ktorá — pretože podľa definície polárnych súradníc je $\varrho\cos\varphi = x$, $\varrho\sin\varphi = y$ — popisuje tie body priamky p, ktoré ležia vnútri uhla s vrcholom $(0,0)$, ktorého počiatočné (koncové) rameno zviera s kladným smerom osi Ox uhol φ_0 $(\varphi_0+\pi)$; ľahko zistíme, že vnútri tohto uhla ležia všetky body priamky $p\Big)$; **5.** parabola $y^2 = -4a(x-a)$ $\Big($využite vzťahy $\cos^2\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\cos\varphi)$, $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varrho\cos\varphi = x\Big)$; **6.** parabola $y^2 = 4a(x+a)$;

$\boxed{\mathbf{411}}$ **2.** $x = 2r\cos^4\varphi$, $y = 2r\cos^3\varphi\sin\varphi$, $\varphi \in \Big(-\dfrac{\pi}{2},0\Big)\cup\Big(0,\dfrac{\pi}{2}\Big)$ $\Big($rovnica krivky K v polárnych súradniciach je $\varrho = 2r\cos^3\varphi$, $\varphi \in \Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)\setminus\{0\}$: označme φ veľkosť orientovaného uhla AOB; bod B leží na kružnici $(x-r)^2+y^2 = r^2$ a na priamke $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$, odtiaľ $B \equiv (2r\cos^2\varphi, r\sin 2\varphi)$, $C \equiv (2r\cos^2\varphi, 0)$; z pravouhlého $\triangle$–a OCM, v ktorom poznáme dĺžku prepony, vypočítame veľkosť $|OM|$, polárne súradnice bodu M sú potom $\big(|OM|,\varphi\big)\Big)$;

3. $x = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi + b\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$; krivka K je zjednotením grafov funkcií $x = \dfrac{(a+y)\sqrt{b^2-y^2}}{y}$ a $x = -\dfrac{(a+y)\sqrt{b^2-y^2}}{y}$ $\Big($zvoľme novú súradnicovú sústavu s osami Ox' a Oy' tak, aby platilo $x' = x$, $y' = y+a$; potom os Ox je daná rovnicou $y' = a$; ak φ je smerový uhol priamky p, tak $p \equiv y' = \dfrac{a}{\mathrm{ctg}\,\varphi}$, priesečník priamok Ox a p má súradnice $x' = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $y' = a$ a polárne súradnice (vzhľadom na novú súradnicovú sústavu) $\varrho = \sqrt{x'^2+y'^2} = \dfrac{a}{\sin\varphi}$ a φ; polárne súradnice bodu M sú potom $(\varrho+b,\varphi)$ alebo $(\varrho-b,\varphi)$, odtiaľ $x' = (\varrho+b)\cos\varphi = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi + b\cos\varphi$, $y' = (\varrho+b)\sin\varphi = a + b\sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi)$ alebo $x' = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi - b\cos\varphi$, $y' = a - b\sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi)$; ak využijeme rovnosti $\mathrm{ctg}\,(\varphi+\pi) = \mathrm{ctg}\,\varphi$, $\cos(\varphi+\pi) = -\cos\varphi$, $\sin(\varphi+\pi) = -\sin\varphi$, môžeme písať $x' = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi + b\cos\varphi$, $y' = a + b\sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, odtiaľ $x = x' = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi + b\cos\varphi$, $y =$

---

[2]pokiaľ by sme položili $x = ty$, dostali by sme parametrické vyjadrenie, ktorým by bol popísaný bod $(0,-a)$, ale nebol by ním popísaný bod $(a,0)$ ležiaci tiež na našej krivke

[3]na jej dôkaz stačí na obidve strany aplikovať funkciu ctg

$y' - a = b\sin\varphi$, $\varphi \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$; pre $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, resp. $\varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ je týmito rovnicami parametricky daná funkcia $x = \dfrac{(a+y)\sqrt{b^2-y^2}}{y}$, resp. $x = -\dfrac{(a+y)\sqrt{b^2-y^2}}{y}$; k predpisom týchto funkcií možno prísť aj nasledovne: ak $M_1 \equiv (x_1, y_1)$, $M_2 \equiv (x_2, y_2)$ sú body krivky K, pričom $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, tak (pozri obr. 12) $|M_2B| = |M_1B| = b$, $|BD_1| = y_1$, $|D_2M_2| = |y_2|$, odtiaľ $|M_1D_1| =$

obr. 12.

$\sqrt{b^2 - y_1^2}$, $|BD_2| = \sqrt{b^2-y_2^2}$, ďalej $|AC_1| = a + y_1$, $|AC_2| = a + y_2$, $|C_2M_2| = |x_1|$, $|C_1M_1| = |x_2|$; z podobnosti $\triangle AC_2M_2 \sim \triangle M_2D_2B$, $\triangle AC_1M_1 \sim \triangle BD_1M_1$ vyplýva $\dfrac{|AC_2|}{|M_2D_2|} = \dfrac{|C_2M_2|}{|D_2B|}$ a $\dfrac{|AC_1|}{|BD_1|} = \dfrac{|C_1M_1|}{|D_1M_1|}$, odtiaľ $\dfrac{a+y_i}{|y_i|} = \dfrac{|x_i|}{\sqrt{b^2-y_i^2}}$, $i = 1, 2$; teda pre súradnice x, y bodu M ležiaceho na krivke K platí $(a+y)\sqrt{b^2-y^2} = |xy|$, tj. $(a+y)^2(b^2-y^2) = x^2y^2\Big)$;

$\boxed{\textbf{412}}$ **1.** ak cykloida vznikla pri kotúľaní sa kružnice s polomerom a po osi Ox a leží na nej bod $(0,0)$, tak jej parametrické vyjadrenie je $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1-\cos\varphi)$ $\Big($nech S je stred kružnice, M ten jej bod, ktorého pohyb sledujeme, nech φ je uhol, ktorý zviera polomer SM s polomerom SD, kde D je bod dotyku kružnice a osi Ox; potom $S \equiv (a\varphi, a)$, $\vec{u} := M - S \equiv \left(a\cos\left(-\varphi - \dfrac{\pi}{2}\right), a\sin\left(-\varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, $M = S + \vec{u}\Big)$;

3. nech $S \equiv (0,0)$ je stred kružnice, M je koniec nite, D je bod, v ktorom sa napnutá niť dotýka kružnice; ak je niť namotaná v smere pohybu hodinových ručičiek a pred začatím rozmotávania platí $M = D \equiv (R, 0)$, tak parametrické vyjadrenie evolventy kruhu je $x = R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$, $y = R(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$, $\varphi \geq 0$ $\Big($ak úsečka MS zviera s kladným smerom osi Ox uhol φ, tak $D \equiv (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, dĺžka rozmotanej nite je $R\varphi$, potom pre $\vec{u} := M - D$ platí $\vec{u} = R\varphi \cdot (\sin\varphi, -\cos\varphi)$ $\big($vektor $(\sin\varphi, -\cos\varphi)$ dĺžky 1 je zrejme kolmý na vektor $M - S \equiv (R\cos\varphi, R\sin\varphi)\big)\Big)$;

$\boxed{\textbf{413}}$ **1.** $\varphi(u) = \varphi(v) \Longrightarrow \psi(u) = \psi(v)$, $u, v \in I$; **2.** nutná a postačujúca podmienka je $\varphi\big(\chi(J)\big) = \varphi(I)$ spolu s podmienkou z pr. 413.1, podmienka $\chi(J) = I$ spolu s podmienkou z pr. 413.1 je len postačujúca;

$\boxed{\textbf{414}}$ **1.** dôkaz urobíme pre rastúcu funkciu φ; keďže $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, stačí dokázať implikáciu $x \to a- \Longrightarrow \varphi^{-1}(x) \to \beta-$ a využiť vetu o limite zloženej funkcie; z rýdzej monotónnosti funkcie φ a z rovnosti $\lim\limits_{t\to\beta-} \varphi(t) = a$ vyplýva, že a je hromadný bod množiny $\varphi(I)$, tj množiny $D(\varphi^{-1})$ $\big($pritom $a \notin D(\varphi^{-1})\big)$; nech je dané ľavé okolie (ε, β) bodu β, nech $\delta = \varphi(\varepsilon)$, potom — keďže φ aj φ^{-1} sú rastúce funkcie — je $\delta < a$ a platí $x \in (\delta, a) \cap D(\varphi^{-1}) \Longrightarrow \varphi^{-1}(x) \in (\varepsilon, \beta)$, čo bolo treba dokázať;

2. $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, pri dôkaze spojitosti funkcie φ^{-1} možno postupovať podobne ako pri riešení pr. 414.1;

3. nech φ je nekonštantná funkcia (pre konštantnú funkciu φ je tvrdenie zrejmé); nech a je vnútorný bod množiny $D(f)$, tj. intervalu $\varphi(I)$, nech $M := \{t \in I\,;\, \varphi(t) = a$ a φ je nekonštantná na každej množine $O(t) \cap I$, kde $O(t)$ je okolie bodu $t\}$, nech M_1 (M_2) je množina tých $t \in M$, pre ktoré existuje okolie $O(t)$ tak, že $\forall x \in I \cap O(t) : \varphi(x) \geq a$ $\big(\forall x \in I \cap O(t) : \varphi(x) \leq a\big)$, nech $M_3 := M \setminus (M_1 \cup M_2)$; ak $M_3 \neq \emptyset$, zvoľme $\alpha \in M_3$ pevne; nech je dané $\varepsilon > 0$, zo spojitosti funkcie φ vyplýva $\exists \eta > 0$ $\forall t \in (\alpha-\eta, \alpha+\eta) \cap I : \big|\psi(t) - \psi(\alpha)\big| < \varepsilon$; množina $\varphi\big((\alpha-\eta,\alpha+\eta)\cap I\big)$ obsahuje niektoré δ–okolie bodu a, potom $|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$; ak $M_3 = \emptyset$, zvolíme $\alpha_1 \in M_1$ a $\alpha_2 \in M_2$ a predchádzajúcim postupom dokážeme spojitosť funkcie f v bode a sprava a zľava; podobne možno postupovať, ak bod $a \in \varphi(I)$ nie je vnútorný bod intervalu $\varphi(I)$;

4. nie;

$\boxed{\textbf{415}}$ funkcia $y = f'(x)$ je daná parametricky rovnicami **1.** $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)\,e^t$, $y = \dfrac{t^2}{t^2-1}$, $t \in (1,\infty)$; **2.** $x = \operatorname{ctg} 2t$, $y = \sin^3 t \cdot (4\cos^2 t + 3)$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$\boxed{\textbf{416}}$ body cykloidy ležiace na osi Ox zodpovedajú hodnotám parametra $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; pre $\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, má rovnica dotyčnice v bode $\big(a(\varphi - \sin\varphi), a(1-\cos\varphi)\big)$ parametrické rovnice $x = a(\varphi - \sin\varphi) + ta(1-\cos\varphi)$, $y = a(1-\cos\varphi) + ta\sin\varphi$, $t \in \mathbf{R}$ $\left(\text{odtiaľ } y = a(1-\cos\varphi) + \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} \cdot \big(x - a(\varphi - \sin\varphi)\big)\right)$; pre dané φ má stred vytvárajúcej kružnice cykloidy súradnice $(a\varphi, a)$ (pozri riešenie pr. 412.1), preto najvyšším (najnižším) bodom tejto kružnice je bod $(a\varphi, 2a)$ $\big($bod $(a\varphi, 0)\big)$;

$\boxed{\textbf{417}}$ **1.** krivku možno zadať parametrickými rovnicami $x = \alpha(\varphi) := f(\varphi)\cos\varphi$, $y = \beta(\varphi) := f(\varphi)\sin\varphi$; smerový vektor dotyčnice v bode $\big(\alpha(\varphi), \beta(\varphi)\big)$ $\Big($spojnice bodov $(0,0)$ a $\big(\alpha(\varphi),\beta(\varphi)\big)\Big)$ je $u \equiv (u_1, u_2) = \big(\alpha'(\varphi), \beta'(\varphi)\big)$ $\big(v \equiv (v_1, v_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)\big)$, potom $\cos\omega = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$;

2. treba nájsť uhol, ktorý zvierajú dotyčnice daných kriviek v priesečníku týchto kriviek; smerové vektory týchto dotyčníc sú $(\cos 1 - \sin 1, \cos 1 + \sin 1)$, $(-\cos 1 - \sin 1, \cos 1 - \sin 1)$; uvedené krivky sa pretínajú pod pravým uhlom;

$\boxed{\textbf{418}}$ funkcia $y = f'(x)$ je daná parametricky rovnicami **2.** $x = e^t \sin t$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^t \sin^3(t+\pi/4)}$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$; **3.** $x = \dfrac{t^2 - 2t - 5}{(t+5)^2}$, $y = \dfrac{(55-t)(t+5)^3}{36(t+1)^3 t}$, $t \in (1,\infty)$; **4.** $x = f'(t)$, $y = \dfrac{1}{f''(t)}$, $t \in I$;

$\boxed{\textbf{419}}$ **1.** uvedenými rovnicami je parametricky daná funkcia $f(x) = x^2$; funkcie $\varphi(t) = 2t + |t|$, $\psi(t) = 5t^2 + 4t|t|$ nie sú diferencovateľné v bode 0 $\big($v tomto prípade možno vetu 1 pou ziť na výpočet jednostranných derivácií $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, pretože funkcia $f|[0,\infty)$, resp. $f|(-\infty, 0]$ je daná parametricky rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \geq 0$, resp. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \leq 0\big)$;

2. pre $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ je funkcia f' daná parametricky rovnicami $x = \varphi(t) := t - \dfrac{t}{1+t^2}$, $y = \psi(t) := \dfrac{3+t^2}{1+t^2}$, $t \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$; funkcia $\varphi(t) = t - \dfrac{t}{1+t^2}$ je rastúca a spojitá, preto φ^{-1} je tiež rastúca a spojitá, a teda $\lim\limits_{x\to 0} \varphi^{-1}(x) = 0$; potom $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = \lim\limits_{t\to 0}\psi(t) = 3$, preto podľa pr. I.384.1 je $f'(0) = 3$;

3. $f'(0) = 3$, argumentácia je rovnaká ako v pr. 419.2;

$\boxed{\textbf{420}}$ **1.** celý dôkaz urobíme pre $\varphi'(a) > 0$; najprv dokážeme túto lemu: *nech J je interval, $\varphi : J \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia, a je vnútorný bod intervalu J; nech existuje vlastná $\varphi'(a) > 0$, nech existujú rastúce funkcie $r, s : J \to \mathbf{R}$ spojité v bode a také, že $b := r(a) = \varphi(a) = s(a)$ a $\forall t \in I : s(t) \leq \varphi(t) \leq r(t)$, nech Φ je pravé inverzné zobrazenie k funkcii φ* [4]*, potom funkcia Φ má v bode b deriváciu a platí $\Phi'(b) = \dfrac{1}{\varphi'(a)}$* $\Bigg($dôkaz: dokážeme, že $\lim\limits_{\tau\to b} \Phi(\tau) = a$: pre $\tau \in \varphi(J)$ je $r^{-1}(\tau) \leq \Phi(\tau) \leq s^{-1}(\tau)$, inverzné funkcie r^{-1}, s^{-1} k rýdzomonotónnym funkciám r, s sú spojité a bod b je hromadný bod ich definičného oboru (vyplýva to zo spojitosti funkcií r, s v bode a), preto $\lim\limits_{\tau\to b} r^{-1}(\tau) = r^{-1}(b) = a = \lim\limits_{\tau\to b} s^{-1}(\tau)$, a teda aj $\lim\limits_{\tau\to b}\Phi(\tau) = a$; ak na výpočet $\lim\limits_{\tau\to b} \dfrac{\Phi(\tau) - \Phi(b)}{\tau - b}$ použijeme substitúciu $\Phi(\tau) = t$, dostaneme $\Phi'(b) = \lim\limits_{\tau\to b} \dfrac{\Phi(\tau)-\Phi(b)}{\tau - b} = \lim\limits_{t\to a} \dfrac{t-a}{\varphi(t) - \varphi(a)} = \dfrac{1}{\varphi'(a)}\Bigg)$; z definície derivácie vyplýva $\exists O_1(a)$ $\forall t \in$

---

[4] tj. $\forall \tau \in \varphi(J) : \varphi\big(\Phi(\tau)\big) = \tau$

$O_1(a) \setminus \{a\}\ :\ \left|\dfrac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} - \varphi'(a)\right| \le \dfrac{\varphi'(a)}{2}$, odtiaľ $(*)$ $\exists O_1(a)$ $\forall t \in O_1(a)$: $\varphi(a) + \varphi'(a)(t-a) - \dfrac{\varphi'(a)}{2}\,|t-a| \le \varphi(t) \le \varphi(a) + \varphi'(a)(t-a) + \dfrac{\varphi'(a)}{2}\,|t-a|$; nech $O_2(a) := O_1(a) \cap O(a)$, potom interval $\varphi\big(O_2(a)\big) \subset D(f)$ obsahuje niektoré okolie bodu $\varphi(a)$ $\big($z nerovností $(*)$ vyplýva, že v $O_2(a)$ nadobúda φ hodnoty väčšie než $\varphi(a)$ aj menšie než $\varphi(a)$, pritom φ je spojitá, a teda darbouxovská na $O_2(a)\big)$, pritom $\Big(f|\varphi\big(O_2(a)\big)\Big)(x) = \psi\big(\Phi(x)\big)$, kde Φ je pravé inverzné zobrazenie k funkcii $\varphi|O_2(a)$; pre funkciu $\varphi|O_2(a)$ sú splnené predpoklady našej lemy $\Bigg($stačí položiť $r(t) = \begin{cases} \varphi(a) + \dfrac{3}{2}\,\varphi'(a)(t-a)\,, & \text{ak } \ t \in O_2(a)\,,\ t \ge a \\ \varphi(a) + \dfrac{1}{2}\varphi'(a)(t-a)\,, & \text{ak } \ t \in O_2(a)\,,\ t \le a \end{cases}$, podobne pre $s(t)$, pozri nerovnosti $(*)\Bigg)$, potom podľa vety o derivácii zloženej funkcie je $f'\big(\varphi(a)\big) = \Big(f|\varphi\big(O_2(a)\big)\Big)'\big(\varphi(a)\big) = \psi'\Big(\Phi\big(\varphi(a)\big)\Big) \cdot \Phi'\big(\varphi(a)\big) = \dfrac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}$;

2. nech $A := \left\{\dfrac{1}{n}\ ;\ n = 3,4,5,\dots\right\}$, $B := \left\{1 - \dfrac{1}{n}\ ;\ n = 3,4,5,\dots\right\}$, položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} t\,, & \text{ak} \quad t \in (-1,1) \setminus (A \cup B) \\ t^2 + t\,, & \text{ak} \quad t \in A \\ 1 - t\,, & \text{ak} \quad t \in B \end{cases}, \qquad \psi(t) = \begin{cases} t\,, & \text{ak} \quad t \in (-1,1) \setminus (A \cup B) \\ t^2 + t\,, & \text{ak} \quad t \in A \\ t - 1\,, & \text{ak} \quad t \in B \end{cases},$$

potom $f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{ak} \quad x \in (-1,1) \setminus (A \cup B) \\ -x\,, & \text{ak} \quad x \in A \end{cases}$ $\Bigg($pri overovaní tohto príkladu využite, že žiadny prvok $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, nepatrí do A, z rovnosti $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n}$ vyplýva totiž $m = n - 1 + \dfrac{1}{n+1} \notin \mathbf{N}\Bigg)$;

421 **1.** obr.13 [5]; **2.** obr. 14; **4.** obr.15; **5.** obr. 16, rovnica v polárnych súradniciach je $\varrho = a|\cos 2\varphi|$; **6.** obr. 17, daná krivka je zjednotením priamok $x = 0$, $y = x$, $y = -x$ $\Big($teda v polárnych súradniciach polpriamok $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ — hodnoty φ sme našli riešením rovníc $\cos\varphi = 0$ a $\cos 2\varphi = 0\Big)$ a krivky $\varrho = \dfrac{a}{\cos\varphi\cos 2\varphi}$, uvedené priamky sú pritom asymptotami tejto krivky;

obr. 13. $\varrho = \varphi$ (*Archimedova špirála*)

[5] v obr. 13-30 sú jednotky dĺžky na osiach Ox a Oy rovnaké a sú vyznačené len na osi Ox; k priamkam, ktoré sú asymptotami zobrazených kriviek, je pripísaná ich rovnica

obr. 14. $\varrho = \dfrac{1}{\varphi}$ (*hyperbolická špirála*)

obr. 15. $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$ (*Bernoulliho lemniskáta*)

obr. 16. $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2$

$\boxed{\mathbf{422}}$ [6] **1.**

t	$\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$	$\left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$	$[0,1]$	$[1,\infty)$
x	$-\infty \quad -\dfrac{21}{16}$	$-\dfrac{21}{16} \quad 0$	$0 \quad -3$	$-3 \quad \infty$
y	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 0$	$0 \quad -1$	$-1 \quad \infty$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

grafy funkcií f_2 a f_3 (f_3 a f_4) majú spoločnú jednostrannú dotyčnicu v bode $(0,0)$ $\big($v bode $(-3,-1)\big)$, obr. 18;

[6]nasledujúce tabuľky sú zostavené takto: nech parametrické vyjadrenie danej krivky je $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; potom v prvom riadku tabuľky sú jednotlivé intervaly, v ktorých funkcie φ', ψ' ani $\left(\dfrac{\varphi'}{\psi'}\right)'$ nemenia znamienko (v riešení pr. 422.4 a 422.7 intervaly, v ktorých funkcie φ', ψ' nemenia znamienko), v druhom (treťom) riadku sú funkčné hodnoty, resp. príslušné jednostranné limity funkcie $x=\varphi(t)$ $\big($funkcie $y=\psi(t)\big)$ v krajných bodoch týchto intervalov; rýdzomonotónnu funkciu danú parametrickými rovnicami $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, kde t prebieha i–ty z týchto intervalov, budeme označovať f_i; symbol $\cup$ ($\cap$) v poslednom riadku hovorí, že funkcia f_i je konvexná (konkávna)

obr. 17. $x(x^2-y^2)=a(x^2+y^2)$

obr. 18. $x=5t^2+2t^5\ ,\ y=3t^2+2t^3$

<u>2</u>.

t	$(-\infty,0]$	$[0,1]$	$\left[1,\frac{4}{3}\right]$	$\left[\frac{4}{3},\infty\right)$
x	$-\infty$ $\quad 0$	$0 \quad 1$	$1 \quad \frac{8}{9}$	$\frac{8}{9} \quad -\infty$
y	$+\infty$ $\quad 0$	$0 \quad 1$	$1 \quad \frac{32}{27}$	$\frac{32}{27} \quad -\infty$
	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$

obr. 19;

<u>3</u>. z rovností $\varphi(-t)=-\varphi(t)\ ,\ \psi(-t)=\psi(t)$ vyplýva, že krivka je súmerná podľa osi $Oy\ ,$ stačí sa preto obmedziť na $t\in[0,\infty)\ ;$

t	$\left[0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$	$\left[\sqrt{\frac{2}{3}},1\right]$	$[1,\infty)$
x	$0 \quad \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad 2$	$2 \quad -\infty$
y	$0 \quad \frac{16}{9}$	$\frac{16}{9} \quad 2$	$2 \quad -\infty$
	$\cup$	$\cap$	$\cap$

obr. 20;

obr. 19. $x = 2t - t^2\,,\ y = 2t^2 - t^3$ obr. 20. $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$

4.

t	$(-\infty, 0)$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$	$\left[\frac{3}{5}, 1\right]$	$[1, \infty)$
x	$\infty \quad 0$	$0 \quad -1$	$-1 \quad -\frac{24}{25}$	$-\frac{24}{25} \quad 0$	$0 \quad \infty$
y	$-\infty \quad 0$	$0 \quad \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \quad \frac{1728}{3125}$	$\frac{1728}{3125} \quad 0$	$0 \quad \infty$

obr. 21;

6. položili sme $y = tx$;

t	$(-\infty, 0]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[1, \frac{3}{2}\right]$	$\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$
x	$+\infty \quad 0$	$0 \quad \infty$	$-\infty \quad -\frac{18}{16}$	$-\frac{18}{16} \quad -1$	$-1 \quad -\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{8} \quad -\infty$
y	$-\infty \quad 0$	$0 \quad \infty$	$-\infty \quad -\frac{54}{64}$	$-\frac{54}{64} \quad -1$	$-1 \quad -\frac{27}{16}$	$-\frac{27}{16} \quad -\infty$
	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

grafy funkcií f_1 a f_2 majú spoločnú jednostrannú dotyčnicu v bode $(0, 0)$, obr. 22;

7.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1]$	$\left[1, \frac{4}{3}\right]$	$\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right]$	$\left[\frac{5}{2}, \infty\right)$
x	$0 \quad \infty$	$-\infty \quad 0$	$0 \quad \sqrt[7]{\frac{9}{1024}}$	$\sqrt[7]{\frac{9}{1024}} \quad \sqrt[7]{\frac{108}{3125}}$	$\sqrt[7]{\frac{108}{3125}} \quad 0$
y	$0 \quad -\infty$	$-\infty \quad 0$	$0 \quad \sqrt[7]{\frac{27}{256}}$	$\sqrt[7]{\frac{27}{256}} \quad \sqrt[7]{\frac{24}{625}}$	$\sqrt[7]{\frac{24}{625}} \quad 0$

na výpočet $(f_2)'_-(0)$, $(f_3)'_+(0)$, $(\overline{f}_1)'_+(0)$, $(\overline{f}_5)'_+(0)$, kde $\overline{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x)\,, & \text{ak} \quad x \in D(f_1) \\ 0\,, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$, $\overline{f}_5(x) = \begin{cases} f_5(x)\,, & \text{ak} \quad x \in D(f_5) \\ 0\,, & \text{ak} \quad x = 0 \end{cases}$, použijeme jednostranné verzie tvrdenia z pr. I.384.1: $(f_2)'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0-} f_2'(x) = \lim\limits_{t \to 1-} \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \infty$, $(f_3)'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+} f_3'(x) = \lim\limits_{t \to 1+} \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \infty$, $(\overline{f}_1)'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+} \overline{f}\,'_1(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f_1'(x) =$

obr. 21. $4y^2 = 4x^2y + x^5$ obr. 22. $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$

$\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = 0$, $(\overline{f}_5)'_+(0) = \lim\limits_{x\to0+} \overline{f}\,'_5(x) = \lim\limits_{x\to0+} f'_5(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = 0$ (spojitosť funkcií $\overline{f}_1$ a $\overline{f}_5$ v bode 0, ktorá je jedným z predpokladov tvrdenia z pr. I.384.1, vyplýva z pr. 414.1); obr. 23;

8. daná krivka K je súmerná podľa bodu $(0,0)$ $\big((x,y) \in K \Longrightarrow (-x,-y) \in K\big)$, stačí preto skúmať krivku $x^5 + y^5 = xy^2$, $x \geq 0$; ak položíme $y = tx$, dostaneme $x = \varphi(t) = \dfrac{|t|}{\sqrt{1+t^5}}$, $y = \psi(t) = \dfrac{t|t|}{\sqrt{1+t^5}}$; čísla v druhom a treťom riadku tabuľky sú zaokrúhlené na 3 desatinné miesta;

t	$\left(-1, -\sqrt[5]{6-\frac{10}{\sqrt{3}}}\right]$	$\left[-\sqrt[5]{6-\frac{10}{\sqrt{3}}}, 0\right]$	$\left[0, \sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right]$	$\left[\sqrt[5]{\frac{2}{3}}, \sqrt[5]{4}\right]$	$\left[\sqrt[5]{4}, \infty\right)$
x	∞ $\quad$ 0.845	0.845 $\quad$ 0	0 $\quad$ 0.714	0.714 $\quad$ 0.590	0.590 $\quad$ 0
y	$-\infty$ $\quad$ -0.628	-0.628 $\quad$ 0	0 $\quad$ 0.659	0.659 $\quad$ 0.779	0.779 $\quad$ 0
	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cap$

všimnite si, že hoci $\varphi'(0)$ ani $\psi'(0)$ neexistujú, možno rovnosť $(f_2)'_+(0) = 0$ odvodiť z vety 1 $\big($na výpočet $(f_2)'_+(0)$ totiž stačí existencia $\varphi'_+(0) \neq 0$ a $\psi'_+(0)\big)$, rovnako z vety 1 vyplýva rovnosť $(f_3)'_+(0) = 0$; podobne ako v riešení pr. 422.7 možno dokázať, že $(\overline{f}_5)'_+(0) = \infty$, kde $\overline{f}_5(x) = \begin{cases} f_5(x), & \text{ak } x \in D(f_5) \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$; obr. 24;

9. daná krivka K je súmerná podľa priamky $y = x$ $\big((x,y) \in K \Longrightarrow (y,x) \in K\big)$, položili sme $y = tx$;

t	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0]$	$\left[0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$	$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right]$	$\left[\sqrt[3]{2}, \infty\right)$
x	0 $\quad$ ∞	$-\infty$ $\quad$ 0	0 $\quad$ $\sqrt[3]{4}\,a$	$\sqrt[3]{4}\,a$ $\quad$ $\sqrt[3]{2}\,a$	$\sqrt[3]{2}\,a$ $\quad$ 0
y	0 $\quad$ $-\infty$	∞ $\quad$ 0	0 $\quad$ $\sqrt[3]{2}\,a$	$\sqrt[3]{2}\,a$ $\quad$ $\sqrt[3]{4}\,a$	$\sqrt[3]{4}\,a$ $\quad$ 0
	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$

podobne ako v riešení pr. 422.7 možno dokázať rovnosti $(\overline{f}_1)'_+(0) = -\infty$, $(\overline{f}_5)'_+(0) = +\infty$, kde $\overline{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{ak } x \in D(f_i) \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, $i = 1, 5$; tieto rovnosti možno odvodiť aj zo symetrie krivky K podľa priamky $y = x$, z ktorej vyplýva, že $\overline{f}_1$ $(\overline{f}_5)$ je inverzná funkcia k funkcii f_2 (f_3); obr. 25;

obr. 23. $y^5 + x^4 = xy^2$

obr. 24. $x^5 + y^5 = xy^2$

10. daná krivka K je súmerná podľa osi Ox $\big((x,y) \in K \Longrightarrow (x,-y) \in K\big)$ a podľa osi Oy $\big((x,y) \in K \Longrightarrow (-x,y) \in K\big)$ — a teda aj podľa bodu $(0,0)$ — a podľa osi $y = x$ $\big((x,y) \in K \Longrightarrow (y,x) \in K\big)$; stačí teda skúmať krivku danú parametrickými rovnicami $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (pozri aj pr. 411.1);

t	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	
x	a	0
y	0	a
	$\cup$	

obr. 26;

obr. 25. $x^3 + y^3 = 3xy$ (*Descartesov list*)

obr. 26. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (*asteroida*)

11. týmito rovnicami je parametricky daná funkcia $y = f(x)$ $\big($funkcia $\varphi(t) = a(t - \sin t)$ je rastúca$\big)$, ktorá má periódu $2\pi a$ $\big($vyplýva to z geometrického popisu cykloidy — pozri pr. 412.1 — a z rovností

$\varphi(t+2\pi) = \varphi(t) + 2\pi a$, $\psi(t+2\pi) = \psi(t)\big)$; stačí uvažovať $t \in [0, 2\pi]$, táto krivka je súmerná podľa priamky $x = a\pi$;

t	$[0, \pi]$	$[\pi, 2\pi]$
x	$0 \quad a\pi$	$a\pi \quad 2a\pi$
y	$0 \quad 2a$	$2a \quad 0$
	$\cap$	$\cap$

$f'_+(2ka\pi) = +\infty$, $f'_-(2ka\pi) = -\infty$, $k \in \mathbf{Z}$; obr. 27;

<u>12</u>. daná krivka je súmerná podľa osi Ox $\big($funkcia $\varrho = a(1+\cos\varphi)$ je nepárna$\big)$; pretože $\varrho = a(1+\cos\varphi)$ je nepárna funkcia a jej periódou je číslo 2π , stačí skúmať krivku $\varrho = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$, jej parametrické rovnice sú $x = \alpha(\varphi) := \varrho\cos\varphi = a(\cos\varphi + \cos^2\varphi)$, $y = \beta(\varphi) := \varrho\sin\varphi = a\sin\varphi(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$, potom $\alpha'(\varphi) = -2a\sin\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}$, $\beta'(\varphi) = 2a\cos\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}$; $\left(\dfrac{\alpha'(\varphi)}{\beta'(\varphi)}\right)' = \dfrac{3(1+\cos\varphi)}{(\sin\varphi + \sin 2\varphi)^2}$;

φ	$\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$	$\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$	$\left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$
x	$2a \quad \dfrac{3a}{4}$	$\dfrac{3a}{4} \quad -\dfrac{a}{4}$	$-\dfrac{a}{4} \quad 0$
y	$0 \quad \dfrac{3\sqrt{3}\,a}{4}$	$\dfrac{3\sqrt{3}\,a}{4} \quad \dfrac{\sqrt{3}\,a}{4}$	$\dfrac{\sqrt{3}\,a}{4} \quad 0$
	$\cap$	$\cap$	$\cup$

obr. 28;

obr. 27. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (*cykloida*)

obr.28. $\varrho = 1 + \cos\varphi$ (*kardioida*)

<u>13</u>. z rovnakých príčin ako v pr. 422.12 je daná krivka súmerná podľa osi Ox a stačí uvažovať krivku $\varrho = 1 + 2\cos\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$;

φ	$[0, a]$	$[a, b]$	$[b, c]$	$[c, \pi]$
x	$3 \quad a_1$	$a_1 \quad -\dfrac{1}{8}$	$-\dfrac{1}{8} \quad c_1$	$c_1 \quad 1$
y	$0 \quad a_2$	$a_2 \quad b_2$	$b_2 \quad c_2$	$c_2 \quad 0$
	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

kde $a = \arccos\dfrac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 0.936$, $b = \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) \approx 1.823$, $c = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{33}+1}{8}\right) \approx 2.574$, $a_1 = \dfrac{\sqrt{33}+15}{16} \approx 1.297$, $c_1 = \dfrac{15-\sqrt{33}}{16} \approx 0.578$, $a_2 = \dfrac{\big(3+\sqrt{33}\,\big)\sqrt{15+\sqrt{33}}}{16\sqrt{2}} \approx 1.760$, $b_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{8} \approx 0.484$, $c_2 =$

$\dfrac{(3-\sqrt{33})\sqrt{15-\sqrt{33}}}{16\sqrt{2}} \approx -0.369$; obr. 29;

14.

t	$(-\infty, 0]$	$[0, \infty)$
x	$\infty \quad 1$	$1 \quad \infty$
y	$\infty \quad 1$	$1 \quad \infty$
	$\cup$	$\cap$

funkcie f_1 a f_2 majú spoločnú jednostrannú dotyčnicu v bode $(1,1)$, obr. 30;

obr. 29.
$\varrho = 1 + 2\cos\varphi$
(*Pascalova závitnica*)

obr. 30.
$x = t + e^{-t}$,
$y = 2t + e^{-2t}$

$\boxed{\textbf{423}}$ **1**. $2a\pi^2$; **2**. $6a$ $\Big($zvolili sme parametrické vyjadrenie $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} 3a|\sin t\cos t|\,dt = 12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt\Big)$; **3**. $\dfrac{\operatorname{ch}^{3/2}2T - 1}{2}$ $\Big(= \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^T \operatorname{sh}2t\sqrt{\operatorname{ch}2t}\;dt\Big)$; **4**. 8 $\Big(= \displaystyle\int_{-1}^1 2t^2(3+5t^2)\,dt\Big)$; **5**. $\ln\pi$ $\Big(= \displaystyle\int_1^\pi \frac{dt}{t}\Big)$; **6**. $8a$ $\Big(= 2a\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big|\;d\varphi\Big)$; **7**. $\dfrac{3}{2}a\pi$ $\Big(= \displaystyle\int_0^{3\pi} a\sin^2\frac{\varphi}{3}\;d\varphi\Big)$; **8**. $\dfrac{1}{2}(4 + \ln 3)$ $\Big(= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3\Big(\varrho + \frac{1}{\varrho}\Big)\;d\varrho$; parametrické vyjadrenie je $x = \varrho\cos\varphi(\varrho)$, $y = \varrho\sin\varphi(\varrho)$, odtiaľ $x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = \varrho^2\varphi'^2(\varrho) + 1\Big)$; **9**. $\operatorname{sh} R$ $\big(1 + \operatorname{sh}^2\varrho = \operatorname{ch}^2\varrho\big)$; **10**. T $\Big($parametrické vyjadrenie je $x = \varrho(t)\cos\varphi(t)$, $y = \varrho(t)\sin\varphi(t)$, odtiaľ $x'^2(t) + y'^2(t) = \varrho'^2(t) + \varrho^2(t)\varphi'^2(t)$; $2\cos^2\dfrac{t}{2} = 1 + \cos t\Big)$;

$\boxed{\textbf{424}}$ bod $\left(\dfrac{a(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}, \dfrac{3a}{2}\right)$ $\Big($prvý oblúk cykloidy zodpovedá hodnotám $t \in [0, 2\pi]$; treba nájsť $T \in [0, 2\pi]$, pre ktoré $\dfrac{F(T) - F(0)}{F(2\pi) - F(T)} = \dfrac{1}{3}$, kde $F(t) := \displaystyle\int_0^t\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = 2a\int_0^t \sin\frac{t}{2}\,dt, t \in [0, 2\pi]\Big)$;

$\boxed{\textbf{425}}$ zvoľme $t > 0$, nech $M \equiv \left(t, \dfrac{t^2}{4a}\right)$, zrejme $M \in p$; nech $p(t)$ je obraz kotúľajúcej sa paraboly p v okamihu, keď sa jej os Ox dotýka v bode M; parabolu $p(t)$ možno získať z paraboly p nasledujúcou postupnosťou transformácií: posunutie o vektor $\left(0, \dfrac{t^2}{4a}\right)$ $\Bigg($ bod $\left(0, -\dfrac{t^2}{4a}\right)$ je priesečník dotyčnice d k parabole $x^2 = 4ay$ v bode $\left(t, \dfrac{t^2}{4a}\right)$ s osou $Oy\Bigg)$, otočenie o uhol $\operatorname{arctg} \dfrac{t}{2a}$ okolo bodu $(0,0)$ v smere hodinových ručičiek $\Bigg($tento uhol zviera dotyčnica d s osou Ox; pri tejto transformácii je obrazom bodu s polárnymi súradnicami (ϱ, φ) bod $\left(\varrho, \varphi - \operatorname{arctg} \dfrac{t}{2a}\right)$, preto — pozri aj riešenie pr. 428.4 — obrazom bodu (x,y) je bod (x_1, y_1), kde $x_1 = \varrho \cos\left(\varphi - \operatorname{arctg} \dfrac{t}{2a}\right) = \dfrac{2ax}{\sqrt{t^2+4a^2}} + \dfrac{yt}{\sqrt{t^2+4a^2}}$, $y_1 = \varrho \sin\left(\varphi - \operatorname{arctg} \dfrac{t}{2a}\right) = \dfrac{2ay}{\sqrt{t^2+4a^2}} - \dfrac{tx}{\sqrt{t^2+4a^2}}\Bigg)$, posunutie o vektor $\left(s - \dfrac{t\sqrt{t^2+4a^2}}{2a}, 0\right)$, kde s je dĺžka oblúka paraboly $x^2 = 4ay$ medzi bodmi $(0,0)$ a $\left(t, \dfrac{t^2}{4a}\right)$ $\Bigg(\dfrac{t\sqrt{t^2+4a^2}}{2a}$ je dĺžka úseku dotyčnice d medzi bodom dotyku a priesečníkom s osou $Oy\Bigg)$; obrazom bodu $(0,a)$ pri týchto transformáciách je bod $\big(x(t), y(t)\big)$, kde $x(t) = a \ln \dfrac{t + \sqrt{t^2+4a^2}}{2a}$, $y(t) = \dfrac{\sqrt{t^2+4a^2}}{2}$, $t > 0$, tieto rovnice parametricky popisujú pohyb ohniska pri kotúľaní sa paraboly „doprava“, pri kotúľaní sa „doľava“ vznikne krivka súmerná s našou podľa osi Oy; inverzná funkcia k funkcii $x = a \ln \dfrac{t + \sqrt{t^2+4a^2}}{2a}$ je funkcia $t = a\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$;

$\boxed{\textbf{426}}$ **1**. $\dfrac{8}{15}$ $\left(= \int_1^2 |x'(t)| y(t)\, dt - \int_0^1 |x'(t)| y(t)\, dt = -\int_0^2 x'(t) y(t)\, dt\right.$; daný útvar je „zhora“, resp. „zdola“ ohraničený grafom funkcie danej parametricky rovnicami $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$, $t \in [1,2]$, resp. $t \in [0,1]$, pozri riešenie pr. 422.2 a obr. 19$\Big)$;

2. $1 - \dfrac{\pi}{4}$ $\Bigg(= -2\int_0^1 x'(t) y(t)\, dt$; pre naše potreby postačujúci náčrtok krivky K získame, ak využijeme, že K je súmerná podľa osi Ox, pre $t \geq 0$ je funkcia $x = \dfrac{1}{1+t^2}$ klesajúca, a ak zistíme, kedy funkcia $y = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}$ nadobúda kladné, nulové a záporné hodnoty; pri výpočte uvedeného integrálu možno dvakrát použiť metódu per partes: najprv $u' = 2t\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^3}$ (na nájdenie funkcie u použijeme substitúciu $z = 1+t^2$) a $v = 2t$, potom $u' = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ a $v = t\Bigg)$;

3. $\dfrac{a^2\pi(4\pi^2+3)}{3}$ $\Bigg(= -\int_0^{2\pi} x'(t) y(t)\, dt$; ak si načrtneme danú krivku, zistíme, že náš útvar pozostáva z útvaru ohraničeného grafmi funkcií f_1 a f_2 a z útvaru ohraničeného grafmi funkcií f_3 a f_4, kde $f_1, \dots, f_4$ sú funkcie dané parametricky rovnicami $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, pričom t postupne prebieha intervaly $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, c\right]$, $\left[c, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, kde $c \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ je riešenie rovnice $\varphi(c) = a$; potom $\int_a^{\pi a/2} \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, dx + \int_{-3\pi a/2}^{a} \big(f_3(x) - f_4(x)\big)\, dx = \left(-\int_0^{\pi/2} x'(t)y(t)\, dt - \int_{\pi/2}^{c} x'(t)y(t)\, dt\right) + \left(-\int_c^{3\pi/2} x'(t)y(t)\, dt - \int_{3\pi/2}^{2\pi} x'(t)y(t)\, dt\right)\Bigg)$;

4. $\dfrac{3\pi a^2}{8}$ $\left(= 4 \cdot \dfrac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\, dt\right)$;

5. $\dfrac{3\pi a^2}{2}$ $\left(=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\big(a(1+\cos\varphi)\big)^2\,d\varphi\right)$;

6. $\dfrac{\pi a^2}{4}$ $\left(=n\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}(a\sin n\varphi)^2\,d\varphi\right),\ \text{pre } a=1\,,\ n=5 \text{ je daná krivka znázornená na obr. 16}\right)$;

7. $\dfrac{a^2(\pi-1)}{4}$ $\left(=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2}(a\cos\varphi)^2d\varphi+\dfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0}\big(a(\cos\varphi+\sin\varphi)\big)^2\,d\varphi\,;\right.$ $\cos\varphi+\sin\varphi=\sqrt{2}\,\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)$, teda krivka $\varrho=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$ vznikne otočneím krivky $\varrho=\sqrt{2}\,a\cos\varphi$ okolo bodu $(0,0)$ o uhol $\dfrac{\pi}{4}$ proti smeru hodinových ručičiek$\Big)$;

8. $\dfrac{3+\sqrt{3}\,\pi-\ln 4}{6}$ $\left(=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/3}\big(f^{-1}(\varphi)\big)^2\,d\varphi=\dfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}r^2f'(r)\,dr\right.$ (použili sme substitúciu $f^{-1}(\varphi)=r$, odtiaľ $\varphi=f(r)$)$\Big)$;

9. $\dfrac{a^2}{4}\left(\operatorname{arctg}t_0-\dfrac{t_0}{1+t_0^2}\right)$ (funkcia $\alpha(t):=t-\operatorname{arctg}t$ je rastúca, preto rovnicami $\varrho=\beta(t):=\dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $\varphi=\alpha(t)$ je parametricky daná kladná funkcia $\varrho=f(\varphi)=\beta\big(\alpha^{-1}(\varphi)\big)$, potom $P=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\alpha(t_0)}f^2(\varphi)d\varphi=\dfrac{1}{2}\int_0^{\alpha(t_0)}\beta^2\big(\alpha^{-1}(\varphi)\big)\,d\varphi=\dfrac{1}{2}\int_0^{t_0}\beta^2(t)\alpha'(t)\,dt=\dfrac{a^2}{4}\int_0^{t_0}t\cdot\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt\Big)$;

10. $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$ $\left(=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{a^2\,d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}=a^2\int_0^{\pi}\dfrac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}=a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\right.$, pozri pr. 93.2 a 45.21$\Big)$;

$\boxed{\textbf{427}}$ $a^2\left(\dfrac{\pi}{6}+1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(=4\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/6}\dfrac{a^2}{2}\,d\varphi+\dfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi\right)\right)$;

$\boxed{\textbf{428}}$ **1a**) $\dfrac{32\pi ab^2}{105}$; **1b**) $\dfrac{32\pi a^2b}{105}$; **2a**) $\dfrac{3\pi a^3}{4}$; **2b**) $\dfrac{768\pi a^3}{35\sqrt{3}}$ $\left(=2\left(2\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}x(t)y(t)x'(t)\,dt\right)\right)$; **3a**) $\dfrac{64\pi}{35}$ (daný útvar je ohraničený grafmi funkcií f_1, f_2 daných parametrickymi rovnicami $x=\alpha(t):=2t-t^2$, $y=\beta(t):=4t-t^3$, kde $t\in[0,1]$, resp. $t\in[1,2]$; $V=\pi\displaystyle\int_{\alpha(2)}^{\alpha(1)}f_2^2(x)\,dx-\pi\int_{\alpha(0)}^{\alpha(1)}f_1^2(x)\,dx=\pi\left(\int_1^2\beta^2(t)\alpha'(t)\,dt-\int_0^1\beta^2(t)\alpha'(t)\,dt\right)\Big)$; **3b**) $\dfrac{64\pi}{105}$ $\left(=\pi\left(\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}}\alpha^2(t)\beta'(t)\,dt-\int_2^{2/\sqrt{3}}\alpha^2(t)\beta'(t)\,dt\right)\right)$; **5**. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$ $\left(=\dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}\big(a(1+\cos\varphi)\big)^3\sin\varphi\,d\varphi\right)$; **6**. $\dfrac{\pi^2a^3}{4}$ $\left(=2\dfrac{2\pi}{3}\cdot\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(a\sqrt{\cos 2\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)}\right)^3\sin\varphi\,d\varphi=^{7}\ \dfrac{8\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\big(1-2\sin^2t\big)\cos t\,dt\,;\right.$ **7**. $\pi a^3\left(\dfrac{14}{3}-\ln 4\right)$ (vyjadrite danú krivku najprv v polárnych súradniciach (pozri pr. 421.6), potom $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$; hľadané V je objemom telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi Ox útvaru ohraničeného osou Ox, priamkou $x=3a$ a krivkou danou parametricky rovnicami $x=\dfrac{a}{\cos 2\varphi}$, $y=\dfrac{a\operatorname{tg}\varphi}{\cos 2\varphi}$, $\varphi\in\left[0,\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}\right]$; $V=\pi\displaystyle\int_0^{[\arccos(1/3)]/2}y^2(t)x'(t)\,dt=\pi a^3\int_{1/3}^{1}\dfrac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}\cdot\dfrac{1}{\cos^4 2\varphi}\cdot 2\sin 2\varphi\,d\varphi$, ďalej použite substitúcie $\cos 2\varphi=$

$^{7}\!=\dfrac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^{3/2}2t\,(\sin t+\cos t)\,dt=\dfrac{8\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\cos^{3/2}2t\cos t\,dt=\dfrac{8\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\big(1-2\sin^2t\big)\cos t\,dt$, použili sme substitúciu $\varphi-\dfrac{\pi}{4}=t$ a pr. 93.1

$u\,,\ u=\dfrac{1}{t}\,,\ t+1=z\Big)\,;$

$\boxed{\mathbf{429}}$ **1a**) $\dfrac{12\pi a^2}{5}\,;$ **1b**) $\dfrac{3}{5}\,\pi a^2\big(4\sqrt{2}-1\big)$ $\Big($hľadané S je plošný obsah plochy vytvorenej rotáciou krivky $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a\big(\sin^3 t+\cos^3 t\big)\,,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a\big(\sin^3 t-\cos^3 t\big)$ okolo osi $Ox\Big)\,;$ **2a**) $\dfrac{64\pi a^2}{3}$ $\Big(=8\pi a^2\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big|\cos^3\frac{t}{2}\Big|\,dt=16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^3\frac{t}{2}\,dt\Big)\,;$ **2b**) $16\pi^2a^2$ $\Big(=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=4\pi a^2\cdot\int_0^{2\pi}\Big(t\Big|\cos\frac{t}{2}\Big|-\sin t\Big|\cos\frac{t}{2}\Big|\Big)\,dt\,,$ pritom $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin t\Big|\cos\frac{t}{2}\Big|\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\Big|\cos\frac{t}{2}\Big|\,dt=0$ (pozri pr. 93.1,2); $\displaystyle\int_0^{2\pi}t\Big|\cos\frac{t}{2}\Big|\,dt=$[8] $2\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\frac{z}{2}\,dz\Big)\,;$ **3**. $\dfrac{32\pi a^2}{5}$ $\Big(=2\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\varrho(\varphi)\sin\varphi\,\sqrt{\varrho'^2(\varphi)+\varrho^2(\varphi)}\,d\varphi\Big)\,;$ **4**. $\dfrac{\pi p^2}{12\sqrt{5}}\cdot\Big(7\sqrt{2}-8+3\ln\big(1+\sqrt{2}\big)\Big)$ $\Big($otočenie okolo bodu $(0,0)$ o uhol $\operatorname{arctg}2$ v smere hodinových ručičiek je popísnaé rovnicami $\overline{x}=\dfrac{x}{\sqrt{5}}+\dfrac{2y}{\sqrt{5}}\,,\ \overline{y}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}-\dfrac{2x}{\sqrt{5}}\,,$ kde $(\overline{x},\overline{y})$ je obraz bodu $(x,y)\,;$ obrazom oblúka paraboly $y^2=2px\,,\ y\in[0,p]\,,$ je krivka $x=\dfrac{t^2}{2\sqrt{5}\,p}+\dfrac{2t}{\sqrt{5}}\,,\ y=\dfrac{t}{\sqrt{5}}-\dfrac{t^2}{\sqrt{5}\,p}\,,\ t\in[0,p]\Big)\,;$

$\boxed{\mathbf{430}}$ $\dfrac{\pi a^2}{6}\Big(4+\sqrt{2}+\ln\big(1+\sqrt{2}\big)\Big)$ $\Big($nech diagonála D je spojnicou bodov $A\equiv(0,0,a)$ a $B\equiv(a,a,0)\,,$ nech $P\subset\mathbf{R}^3$ je plášť kocky, nech K_x je rovina kolmá na D prechádzajúca daným bodom $x\in D\,;$ treba vypočítať plošný obsah plochy, ktorá vznikne rotáciou okolo osi Ox grafu funkcie danej parametricky rovnicami $x(t)=|XA|=\sqrt{3}\,at\,,\ y(t)=\max\big\{|XY|;Y\in P\cap K_x\big\}=\begin{cases}\sqrt{6}\,at\,, & \text{ak}\quad t\in\Big[0,\dfrac{1}{3}\Big]\\[2mm] a\sqrt{6t^2-6t+2}\,, & \text{ak}\quad t\in\Big[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\Big]\\[2mm] \sqrt{6}\,a(1-t)\,, & \text{ak}\quad t\in\Big[\dfrac{2}{3},1\Big]\end{cases}$: ak $|XM|=\max\big\{|XY|\,;\,Y\in P\cap K_x\big\}\,,$ tak M je priesečníkom niektorej z hrán kocky s rovinou $K_x\,;$ ak $X\equiv\big(ta,ta,(1-t)a\big)\,,\ t\in[0,1]\,,$ tak $K_x\equiv x+y-z+a(1-3t)=0\,,$ priesečníky roviny K_x s hranami kocky sú: pre $t\in\Big[0,\dfrac{1}{3}\Big]$: $\big(0,0,(1-3t)a\big)\,,\ (3ta,0,a)\,,\ (0,3ta,a)\,;$ pre $t\in\Big[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\Big]$: $\big((3t-1)a,0,0\big)\,,\ \big(a,0,(2-3t)a\big)\,,\ \big(a,(3t-1)a,a\big)\,,\ \big((3t-1)a,a,a\big)\,,\ \big(0,a,(2-3t)a\big)\,,\ \big(0,(3t-1)a,0\big)\,;$ pre $t\in\Big[\dfrac{2}{3},1\Big]$: $\big(a,(3t-2)a,0\big)\,,\ \big(a,a,(3-3t)a\big)\,,\ \big((3t-2)a,a,0\big)\Big)\,.$

---

[8] $\displaystyle=\int_{-\pi}^{\pi}(z+\pi)\Big|\cos\frac{z+\pi}{2}\Big|\,dz=\int_{-\pi}^{\pi}z\Big|\sin\frac{z}{2}\Big|\,dz+\pi\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sin\frac{z}{2}\Big|\,dz=$