试卷（1）

华中科技大学计算机科学与技术学院

“ 算法设计与分析 ”考试试卷（A 卷）

考试方式 闭卷 考试日期 ______ 考试时长 150 分钟

专业班级 ______ 学 号 ______ 姓 名 ______

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核对人
题分	20	12	12	12	14	15	15	100	
得分									

得分	评卷人

一、（每小题 4 分，共 20 分）简答题

解答内容不得超过装订线

1．给出渐进记号 Θ 的定义

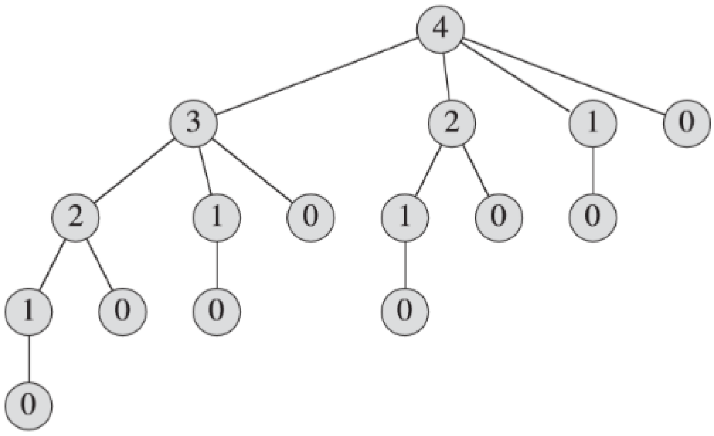
2．简述贪心策略的基本思想。

3．简述 LC-检索的基本思想。

4．试证最短路径的三角不等式性质：

$$\delta(s,v) \leqslant \delta(s,u) + w(u,v)$$

5. 一个递归执行过程如下所示，画出其对应的子问题图。



得分	评卷人

二、（12 分）对给定的两个序列 X 和 Y，记 c[i,j]为前缀序列 X_i 和 Y_j 的一个 LCS 的长度：

$$c[i,j]=\begin{cases}0 & \text{如果}i=0\text{或}j=0\\ c[i-1,j-1]+1 & \text{如果}i,j>0\text{且}x_i=y_j\\ \max(c[i,j-1],c[i-1,j]) & \text{如果}i,j>0\text{且}x_i\neq y_j\end{cases}$$

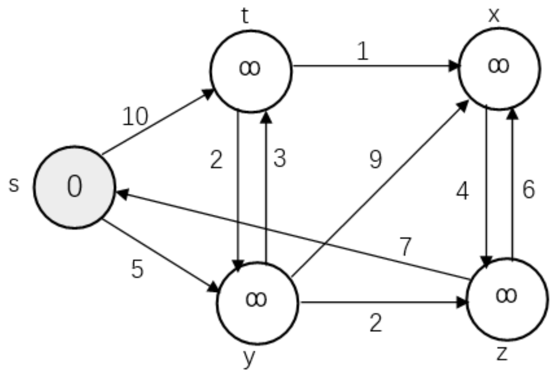
已知序列 X=< 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0>和 Y=<0, 1, 0, 1, 1, 0, 1>，求 LCS(X,Y)。

	j	0	1	2	3	4	5	6	7
i		y_j	0	1	0	1	1	0	1
0	x_i								
1	1								
2	0								
3	0								
4	1								
5	0								
6	1								
7	0								

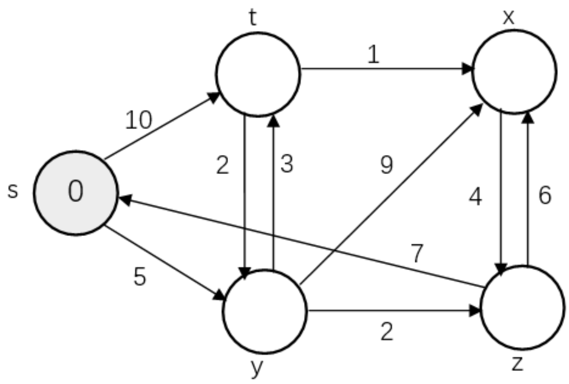
LCS(X, Y)=____。

得分	评卷人

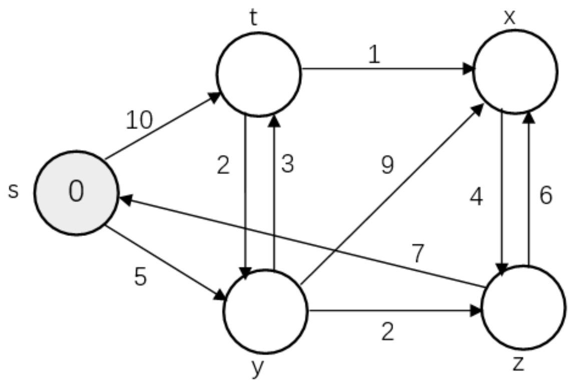
三、（12 分）已知有向图如下面图(a)所示。(1) 执行 Dijkstra 算法求从结点 s 到其它各个结点的最短路径。请在图(b)~图(e)中的各个结点内填写算法第一次至第四次松弛操作后各结点的 d 值，并推导各结点的前驱结点。(2) 如果重置 ω (x, z)=−4，Dijkstra 算法还能正确执行吗？为什么？这种情况下用什么算法可以正确求出 s 到其它各个结点的最短路径？至少写出一个经典算法的名字或其基本思想。



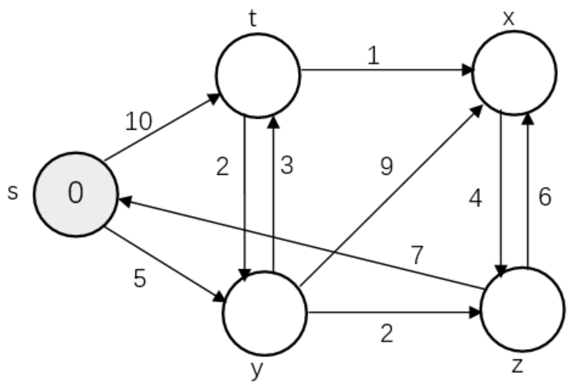
图(a)



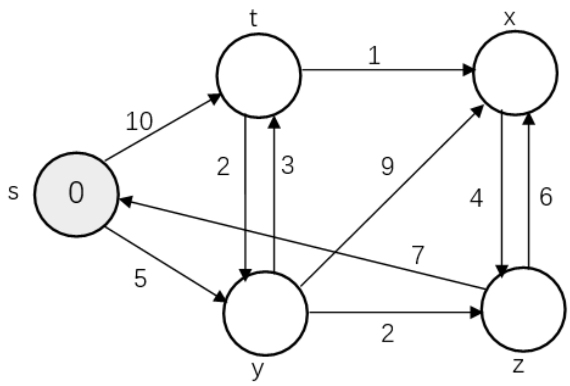
图(b)



图(c)



图(d)



图(e)

前驱结点：t.π=____________，x.π=____________，y.π=____________，z.π=____________。

得分	评卷人

四、（12 分）设 W=(5,7,10,12,15,18)和 M=30，使用过程 SUMOFSUB 找出 W 中和数等于 M 的全部子集并画出所生成的部分状态空间树。

得分	评卷人

五、(14 分) 已知数组 A[1..n]，A 中和最大的非空连续子数组称为 A 的最大子数组。设计一个低复杂度的算法求已知数组 A 中的最大子数组，并分析你所设计的算法的时间复杂度。

得分	评卷人

六、（15 分）设货币系统中有 n 种面值的硬币：c_1，c_2，…，c_n；现将总额为 X 的纸币兑换成等额的硬币，要求使用的硬币数最少。问题的解是一向量：($x_1, x_2, \cdots, x_n$)，其中 x_i 表示兑换所使用的面值为 c_i 的硬币的数量。

1）设货币系统有 4 种面值的硬币，(c_1, c_2, c_3, c_4) =(25,10,5,1),单位：分。设计一贪心算法求解上述的兑零问题，并证明你的算法能找到最优解。

2）设计一组硬币面额，使得贪心算法不能保证得到最优解。这组硬币面额应该包含 1 分，使得对每个零钱值都存在找零方案。

得分	评卷人

七、（15 分）快递公司在城市的若干位置设有固定的业务点，由于物流的原因，每天的快件需要先运往总部，然后再从总部发往各业务点。现已知有 n 个业务点（用编号 1~n 表示，编号唯一、不重复）及各业务点在城里的位置和交通，并且对任意两个业务点之间直接可达（即不经过其他业务点）的交通时间进行了测量：如果从业务点 i 可以前往业务点 j，t_{ij}表示从 i 到 j 的直接可达时间，$1 \leqslant i, j \leqslant n$。但由于交通和其他原因，$t_{ij}$未必等于 t_{ji}，甚至可能从业务点 i 不能直接前往业务点 j，反之亦然。

基于上述已知情况，快递公司现在考虑将总部设在哪个业务点才能够以最短的时间将快件全部送达至其它各业务点处（注：总部所在位置本身也是业务点之一，其送达时间可认为是 0）。假设快递员人数足够，并且不计快递员在每个业务点的停留时间。请你设计一个算法帮助公司解决上述问题，即确定总部所在的位置。

要求：给出对该问题的一种分析，以便建立描述该问题的形式模型，然后给出相应的算法（用伪代码描述），并分析算法的时间复杂度。

试卷（2）

华中科技大学计算机科学与技术学院

“ 算法设计与分析 ”考试试卷（A 卷）

考试方式 闭卷 考试日期 ________ 考试时长 150 分钟

专业班级 ________ 学 号 ________ 姓 名 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核对人
分值	20	8	18	12	12	15	15	100	
得分									

分 数	
评卷人	

一、简答题（每小题 5 分，共 20 分）。

解答内容不得超过装订线

1） 给出渐进记号 O 的定义。

2） 什么是贪心选择性？简述贪心策略的基本思想。

3） 设一个数组中有 n 个大小不超过 10000 的非负整数（n<10000），请给出一个最快的方法来判断数组中的元素是否互异。

4） 在启发式搜索（LC-检索）中，为什么引入结点成本估计函数？为了找最小成本的答案结点，一般要求结点成本估计函数应具有什么性质？

分　数	
评卷人	

二、求下列递归式的渐近紧确界（8 分）。

$$T(n) = 2T(n/4) + n^2$$

解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

三、已知 5 个关键字的搜索概率如下表所示，求其最优二叉搜索树的代价并推导树的结构（18 分）。

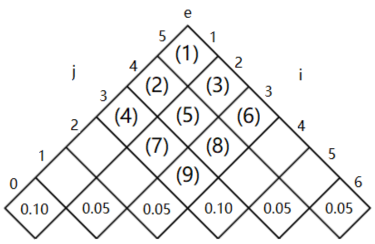
i	0	1	2	3	4	5
p_i		0.20	0.10	0.05	0.10	0.15
q_i	0.10	0.05	0.05	0.10	0.05	0.05

这里，

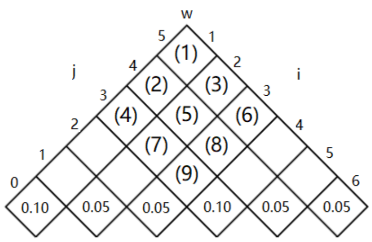
$$e[i,j]=\begin{cases} q_{i-1} & \text{if } j=i-1\,, \\ \min\limits_{i\le r\le j}\{e[i,r-1]+e[r+1,j]+w(i,j)\} & \text{if } i\le j\,. \end{cases}$$

$$w(i,j)=\sum_{l=i}^{j}p_l+\sum_{l=i-1}^{j}q_l\,.$$

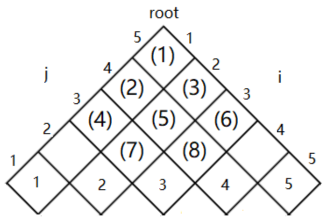
1）请就下面的表 e、w、root 填写计算结果（仅填编号(1)~(9)单元的内容），并给出 w[3,3]和 e[3,3]、w[2,4]和 e[2,4]、w[1,5]和 e[1,5]的具体计算过程。



e 表



w 表



root 表

请将以上编号(1)~(9)单元的计算结果填到下表对应的列中（9 分）。

编号	(9)	(8)	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
e									
w									
root	3								

给出 w[3,3]和 e[3,3]、w[2,4]和 e[2,4]、w[1,5]和 e[1,5]的计算过程（6 分）

（1）w[3,3]：

（2）e[3,3]：

（3）w[2,4]：

（4）e[2,4]：

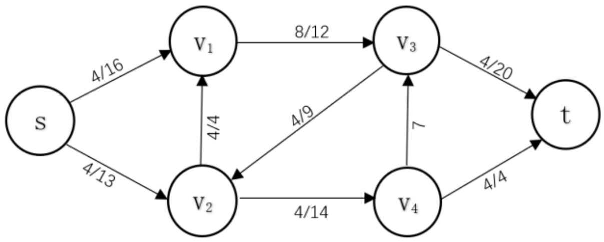
（5）w[1,5]：

（6）e[1,5]：

2）推导并画出该最优二叉搜索树（3 分）：

分　数	
评卷人	

四、用 Ford-Fulkerson 算法求某个流网络 G 的最大流时，某次迭代后得到的流 f 如图所示，边(u,v)上标注的数字含义是：f(u,v)/c(u,v)（12 分）。



流网络 G 和它当前的流 f

1）请画出由流 f 所诱导的图 G 的残存网络 G_f，并在其中找出一条增广路径 p（8 分）。

增广路径 p：________________

p 的残存容量 $c_f(p)$ = ________

2）请画出用 p 所定义的 G_f 中流 f_p 增加 f 的流量后得到的 G 上的新流（4 分）。

解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

五、分数背包问题是指：已知各有重量($w_1, w_2, \cdots, w_n$)和效益值($p_1, p_2, \cdots, p_n$)的 n 件物品，及一个可容纳 M 重量的背包，问怎样装包才能在不超过背包容量 M 的前提下，使得装入背包的物品的总效益最大(这里设所有的 $w_i>0$, $p_i>0$，$1\leqslant i\leqslant n$)。问题的解用向量（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）表示，其中，x_i 表示物品 i 被放入背包的比例，$0\leqslant x_i\leqslant 1$。当物品 i 的一部分 x_i 放入背包，可得到 p_ix_i 的效益，同时会占用 w_ix_i 的重量（12 分）。

1）证明上述背包问题满足最优子结构性。

2）设计一个贪心算法求解分数背包问题，给出算法的伪代码描述，并分析算法的时间复杂度。

分　数	
评卷人	

六、设在多间教室里安排 n 个活动，每个活动都有一个开始时间 s 和结束时间 t，活动 i 的活动时间是 $[s_i, t_i)$，$1 \leq i \leq n$。任意活动都可以在任意教室进行，但任何时间任何两个活动不能在同一间教室里同时进行。

现在希望使用最少的教室完成所有活动。请设计一个低时间复杂度的算法求每个活动的安排（即在哪个教室进行）。请给出算法的描述，并分析你所设计的算法的时间复杂度（15 分）。

解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

七、机器的可靠性问题：设一种机器由 n 个不同的部件组成，每个部件有 m 种不同的选型方案，每种方案又有不同的成本和可靠性。设部件 i 的选型为 j 的方案，成本是 c_{ij}，故障率性是 q_{ij} （1≤i≤n,1≤j≤m）。

试设计一个搜索算法求在总成本不超过 C 的情况下可靠性最高的机器设计。要求给出限界函数的定义和算法的伪代码描述。（15 分）

试卷（3）

华中科技大学计算机科学与技术学院

“ 算法设计与分析 ”考试试卷（A 卷）

考试方式 闭卷　考试日期 ＿＿＿＿＿＿　考试时长 150 分钟

专业班级 ＿＿＿＿＿＿学　号 ＿＿＿＿＿＿姓　名 ＿＿＿＿＿＿

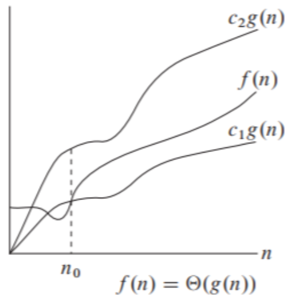
题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核对人
分值	20	8	21	12	14	10	15	100	
得分									

分　数	
评卷人	

一、简答题（1、2 小题每小题 4 分，3、4 小题每小题 6 分，共 20 分）。

解答内容不得超过装订线

1） 已知 g(n)是 f(n)的一个渐近紧确界，f(n)和 g(n)的函数关系如下图所示，请说明该图所反映出的相关性质。



$f(n) = \Theta(g(n))$

2） 什么是结点成本估计函数？在$\widehat{C}(x) = f(h(x)) + g(x)$中，h(x)的作用和意义是什么？

3） GREEDY_ACTIVITY_SELECTOR（活动选择问题的贪心算法）的设计思想是什么？

已知 10 个活动{a_1，a_2，⋯, a_{10}}的集合 S，每个活动的开始时间 s_i 和结束时间 f_i 如下:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	1	3	0	5	3	5	8	7	2	12
f_i	3	5	6	7	9	9	11	12	14	17

给出一个用 GREEDY_ACTIVITY_SELECTOR(s,f)算法求解该活动选择问题所得到的解。

4） 对给定的流网络 G 和流量 f，在由 f 所诱导的 G 的残存网络 G_f 中将存在哪些边？如何计算它们的残存容量？相比 Ford-Fulkerson 算法，Edmonds-Karp 算法的不同之处是什么？带来了什么改进？

分　数	
评卷人	

二、（8 分）求下列递归式的渐近紧确界。

要求：写出必要的计算过程。

$$\boldsymbol{T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}}$$

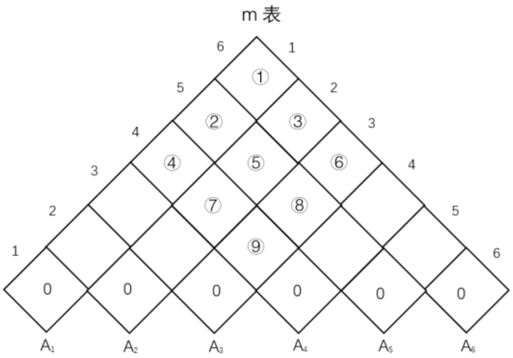
分　数	
评卷人	

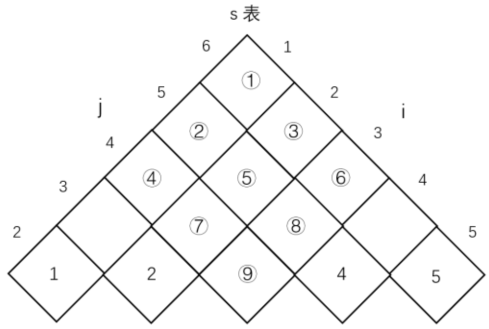
三、（21 分）矩阵链乘问题：已知矩阵规模序列⟨5,14,9,12,5,10,17⟩，求该矩阵链乘问题的最优括号化方案。

提示：对 n 个矩阵的链<$A_1,A_2,\cdots,A_n$>，记 m[i,j] 为计算矩阵链 $A_{i,j}$ 所需的标量乘法运算次数的最小值：

$$m[i,j]=\begin{cases}0 & \text{if } i=j\ ,\\ \min\limits_{i\le k<j}\{m[i,k]+m[k+1,j]+p_{i-1}p_kp_j\} & \text{if } i<j\ .\end{cases}$$

算法要计算的 m 表和 s 表如下：





1)请分别将以上 m 表和 s 表中编号①~⑨单元的计算结果填到下表对应的单元格中。(9 分）

编号	(9)	(8)	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
m									
s									

2）给出其中 m[3,4]和 s[3,4]、m[2,5]和 s[2,5]、m[1,6]和 e[1,6]的计算过程。(9 分）

（1）m[3,4]、s[3,4]：

（2）m[2,5]、s[2,5]：

（3）m[1,6]和 e[1,6]

解答内容不得超过装订线

3）推导该矩阵链乘的最优括号化方案，要求写出推导过程。（3 分）

分　数	
评卷人	

四、（12 分）已知有向图如以下图 a 所示，执行 Bellman-Ford 算法求源点 s 到其它各结点的最短路径。请在图 b～图 e 中的各个结点内填写算法第一次至第四次松弛操作后各结点的 d 值。设每次松弛操作对边的处理次序都是：(t,x)、(t,y)、(t,z)、(x,t)、(y,x)、(y,z)、(z,x)、(z,s)、(s,t)、(s,y)。

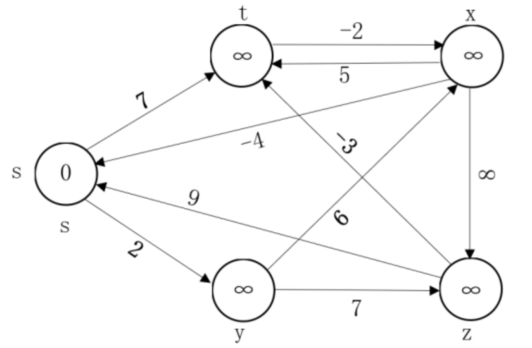


图 a

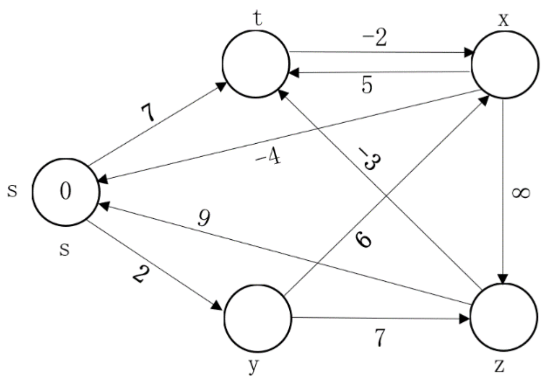


图 b

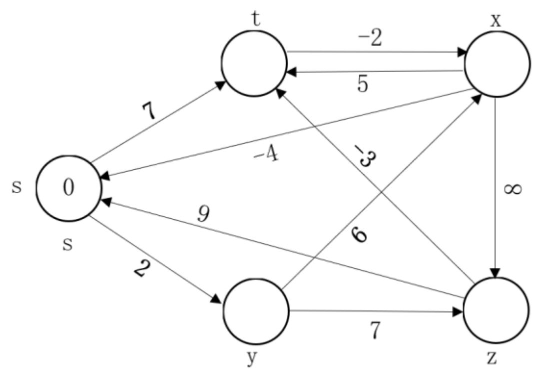


图 c

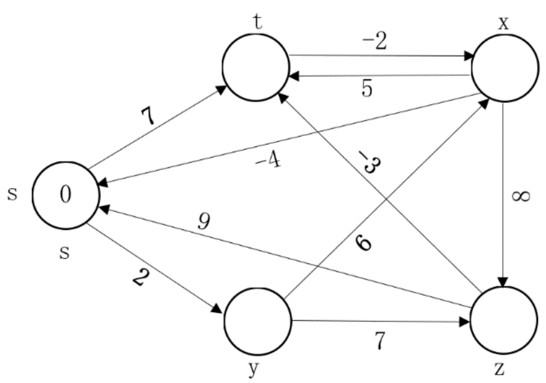


图 d

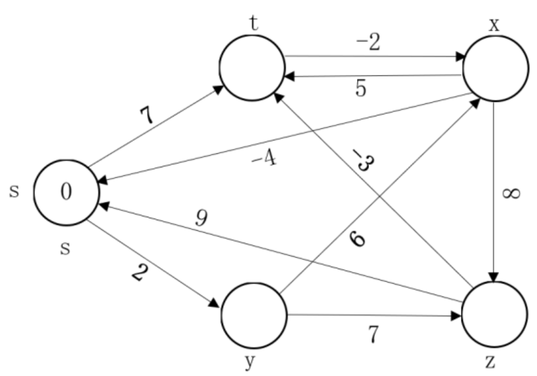


图 e

分　数	
评卷人	

五、（14 分）。给定两个集合 A 和 B。各包含 n 个正整数。你可以按需要任意重排每个集合。重排后，令 a_i 为集合 A 的第 i 个元素，b_i 为集合 B 的第 i 个元素。于是你得到回报 $\prod_{i=1}^{n} a_i^{b_i}$ 。设计一个贪心算法最大化你的回报（只描述算法思想，不要求伪代码描述）。证明你的算法是正确的，并分析运行时间。

解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

六、（10 分）0/1 背包问题是指：已知各有重量($w_1, w_2, \cdots, w_n$)和效益值($p_1, p_2, \cdots, p_n$)的 n 件物品，及一个可容纳 M 重量的背包，一件物品在背包有足够剩余容量时可以选择装或不装，但如果装，就必须装入它的全部，不能只装它的一部分(注：没有足够剩余容量时不能装)。问怎样装包才能在不超过背包容量 M 的前提下，使得装入背包的物品的总效益最大（这里设所有的 $w_i>0$, $p_i>0$，$1\leqslant i\leqslant n$)。问题的解用向量（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）表示，其中，x_i表示物品 i 被放入背包的比例（对于 0/1 背包问题，x_i的取值只能是 1 或者 0)，物品 i 对背包效益的贡献是 p_ix_i，同时占用 w_ix_i的重量。

记 $f_i(X)$为在背包有剩余容量 X 时，只考虑物品 1～i 装包所能带来的最大效益，则 $f_n(M)$即为对容量为 M 的背包，n 件物品装包所可能带来的最大效益。

1）证明 0/1 背包问题满足最优子结构性。

2）请写出基于 $f_i(X)$的状态转移方程。

分　数	
评卷人	

七、（15 分）将 n 个作业分配给 k 个处理机并行处理。任意作业 i（$1 \leq i \leq n$）的开始时间和结束时间不限，但一旦开始，将以不可抢占方式运行 r_i 时间，然后结束。

（1）请使用分支-限界法设计一个算法，求将这 n 个作业分配给 k 个处理机并使得完成全部作业总用时最短的调度方案，即从 t_0 时刻开始执行第一个作业，到最后一个作业完成的时刻，总用时最少的调度方案，要求给出算法的伪代码描述。

（2）如果用回溯法求解该问题，试从时间和空间两个角度分析两种算法的异同和优劣（不要求具体写出回溯算法，仅从性质上讨论二者的异同即可）。

解答内容不得超过装订线