

Práctica sobre operaciones con vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

Ante la falta de deseo, inspiración, no opresión.

Esta es una rutina de ejercicios básicos que complementan al video adjunto del canal de YouTube El Traductor de Ingeniería. Es libre de derechos de autor y puede ser utilizada de apoyo en asignaturas o cursos formales sin permiso alguno. Está dividida en cuatro partes con desafíos de complejidad creciente. Puede enviar sugerencias de carácter académico a: damian.pedraza@ing.unlp.edu.ar. Este documento puede sufrir modificaciones y/o correcciones sin previo aviso. Por favor verificar la versión está utilizando. ¡Manos a la obra!



Figura 1: Video conceptual asociado.

Suma y resta entre vectores

1. Inventa dos vectores \vec{V}_1 y \vec{V}_2 de \mathbb{R}^2 e intenta calcular:
 - a) $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$.
 - b) $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$.
 - c) $\vec{V}_2 + \vec{V}_1$.
 - d) $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$.
 - e) $\vec{V}_1 + \vec{V}_1$.
 - f) $\vec{V}_2 - \vec{V}_2$.
2. Ahora, ¿por qué querrías calcular la suma entre dos vectores? ¿Y la resta? ¿Qué información obtienes al hacer estas operaciones?
3. Dadas las constantes: $a = 3$, $b = 5$, $c = -3$ y $d = 1/2$.
 - a) ¿Cuál es el resultado de cada una de las siguientes operaciones?
 - 1) $(a, b) + (c, d)$
 - 2) $(a, b) - (c, d)$
 - 3) $(d, c) + (-b, -a)$

- 4) $(c, a) - (b, b)$
 - 5) $(a, b) + (a, a) + (d, c)$
 - 6) $(d, d) - (b, a) - (c, c) + (b, a)$
 - 7) $(d, d) - (b, a) - [(c, c) + (b, a)]$
- b) El graficar los vectores del inciso anterior con sus correspondientes vectores resultado puede ayudarte a visualizar qué está sucediendo en cada caso, ¿te animas a hacerlo? Te puede venir muy bien. Nota que al operar con más de dos vectores la representación gráfica se vuelve cada vez más confusa.
- c) ¿Eres capaz de sumar vectores en \mathbb{R}^3 ?
- 1) $(a, b, c) + (a, b, c)$
 - 2) $(b, a, c) - (a, a, c)$
 - 3) $(a, c, b) + (d, 0, a)$
 - 4) $(a, 3, 5) - (0, 8, 2a)$
 - 5) $(-a, 10b, -d) - (-b, -b, -a) + (0, 5, a)$
4. Si tenemos dos vectores de \mathbb{R}^2 : \vec{A} y \vec{B} y los sumamos obtenemos un nuevo vector, llamémoslo \vec{C} . Si a \vec{C} le restamos un vector \vec{D} obtenemos otro, llamémoslo \vec{E} . Si $\vec{E} = (3, 5)$, $\vec{D} = (1, 0)$ y $\vec{B} = (-1, 6)$, ¿cuánto valen las componentes del vector \vec{A} ?
5. A veces es necesario hacer la lectura de una representación gráfica e interpretarla analíticamente para luego hacer algunos cálculos. ¿Puedes redactar algunas ecuaciones o expresiones algebraicas a partir de la Figura 2?
- Aclaración:** El vector \vec{q} tiene su extremo en el punto $(0, 2)$.

Producto por un escalar

1. ¿Por qué querrías calcular el producto entre un escalar y un vector?
2. Si λ es un número real, utilizando las constantes a, b, c y d del ejercicio anterior intenta encontrar el resultado de:
 - a) $\lambda(a, b)$, siendo $\lambda = 3$.
 - b) $\lambda(c, -d)$, siendo $\lambda = -1$.
 - c) $(a, b)\lambda$, siendo $\lambda = 3$.
 - d) $2\lambda(d, a)$, siendo $\lambda = 4$.
 - e) $\lambda(a, a) + \lambda(b, a)$, siendo $\lambda = 1/2$.

3. Si planteamos lo siguiente:

$$\beta(a, b) = (15, 25) \tag{1}$$

es posible que exista un escalar β que haga que se cumpla la igualdad. Si a y b son las constantes reales presentadas al principio, ¿eres capaz de encontrar el valor del escalar β ?

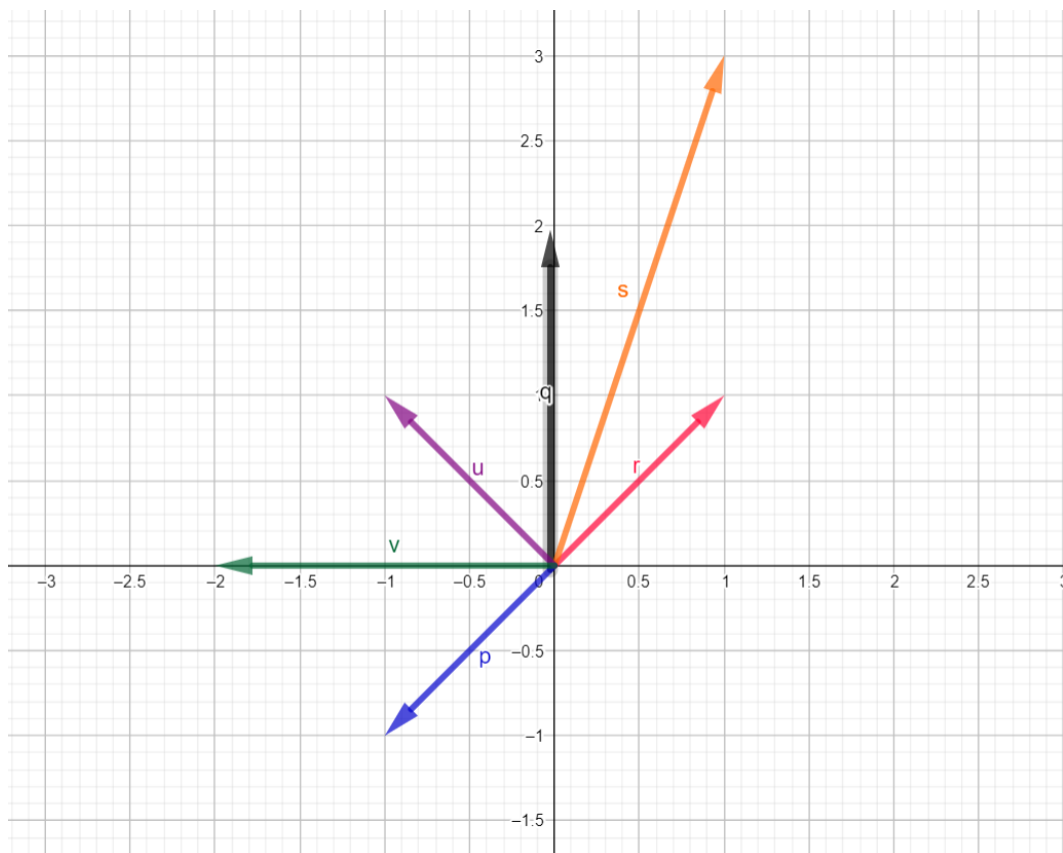


Figura 2: Una colección de vectores del plano.

4. Si $\vec{A} = \alpha \vec{B}$, siendo α un escalar no nulo, y $\vec{B} = (2,3)$, ¿te animas a analizar la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones?
- Para que \vec{A} y \vec{B} tengan sentidos opuestos, *necesariamente* se tiene que cumplir que: $\alpha > 0$.
 - Para que \vec{A} y \vec{B} tengan sentidos opuestos, *necesariamente* se tiene que cumplir que: $\alpha < 0$.
 - Para que \vec{A} y \vec{B} tengan el mismo sentido, *necesariamente* se tiene que cumplir que: $\alpha > 0$.
 - Para que \vec{A} y \vec{B} tengan la misma dirección, *necesariamente* se tiene que cumplir que: $\alpha > 0$.

Producto escalar (o producto punto)

- ¿Por qué estarías interesado en calcular el producto escalar entre dos vectores?
- En el video conceptual vimos que el producto escalar entre dos vectores de \mathbb{R}^2 puede ser calculado de estas dos maneras: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\phi)$ y también: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2$, siendo ϕ el

mínimo ángulo comprendido entre los vectores \vec{A} y \vec{B} ; A_1 y A_2 las componentes del vector \vec{A} ; y B_1 y B_2 las componentes del vector \vec{B} . Entonces podíamos establecer:

$$|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\phi) = A_1B_1 + A_2B_2 \quad (2)$$

Si $\vec{A} = (a, b)$ y $\vec{B} = (c, d)$,

- ¿Cuánto vale ϕ ?
 - ¿Cuánto vale la magnitud del ángulo que se forma entre \vec{A} y \vec{B} que cumple ser mayor que π radianes y menor que 2π radianes?
3. Dos vectores son ortogonales si el producto escalar entre ambos es nulo, ¿lo recuerdan? Posiblemente lo hayas visto y haya sido difícil creerlo. En la Figura 3 veras algunos vectores. ¿Te animas a averiguar analíticamente cuáles son ortogonales entre sí utilizando el producto escalar?
- Observación curiosa:** A simple vista el vector \vec{v} parece ser ortogonal al vector \vec{w} ... ¿será realmente así, o nuestros ojos nos están engañando? Existe una estrategia exacta para averiguarlo.
4. Dado un vector de \mathbb{R}^2 , uno puede *construir* otro vector que sea ortogonal al primero. La clave es utilizar el producto escalar y un poco la imaginación. Recuerda que lo único que interesa por ahora es que se cumpla la ortogonalidad entre los vectores. ¿Te animas a desarrollar tal destreza?
- Encuentra un vector que sea ortogonal a $\vec{v} = (2, 3)$. Dibújalo.
 - Encuentra dos vectores que sean ortogonales a $\vec{m} = (-1, -6/10)$. Dibújalos.
 - Encuentra un vector que sea ortogonal a \hat{i} . Dibújalo.
 - Encuentra un vector que sea ortogonal a \hat{j} . Para más placer, dibújalo.
 - Encuentra tres vectores que sean ortogonales a $\vec{u} = (1, 4)$. Vamos, animate a dibujarlos.
5. Dados dos puntos del plano P_1 y P_2 , uno puede plantear dos vectores que tienen a P_1 y a P_2 como extremos. Llamémoslos \vec{p}_1 y \vec{p}_2 respectivamente. Hasta acá nada nuevo. Uno puede graficar esta situación y no encontrará nada sorprendente... por ahora.
- ¿Eres capaz de encontrar un vector que tenga su punto inicial en P_1 y su punto final en P_2 ? La resta entre vectores puede serte muy útil. Llama al vector encontrado, \vec{p} .
 - ¿Qué sucede si multiplicas al vector \vec{p} por un escalar? Plantea un caso genérico con un escalar arbitrario t . Llama al vector que obtienes como $\vec{s}(t)$. Indicamos t entre paréntesis para dejar en claro que el vector \vec{s} depende del valor de t elegido. Te quedará $\vec{s}(t) = t\vec{p}$, ¿sí o no?
 - ¡Ahora viene lo chido! (diría Luisillo), ¿qué sucede si sumas el vector \vec{p}_1 con el vector $\vec{s}(t)$? Llama al vector resultante, $\vec{r}(t)$. Nos queda: $\vec{r}(t) = \vec{p}_1 + \vec{s}(t)$. Nuevamente, \vec{r} depende del valor de t elegido por culpa de $\vec{s}(t)$. Piensa qué características mágicas tiene $\vec{r}(t)$. Está claro que para cada t que elija obtendré un \vec{r} distinto. Ahora, ¿qué sucede si grafico \vec{r} para cada uno de los infinitos t posibles? Magia, eso es lo que sucede.
 - Es posible encontrar la ecuación de una recta dado un punto de la recta y un vector paralelo a la misma. ¿Te animas a encontrar la ecuación de la recta de \mathbb{R}^2 que pasa por el punto $(3, 4)$ que tiene dirección $2\hat{i} + \hat{j}$?

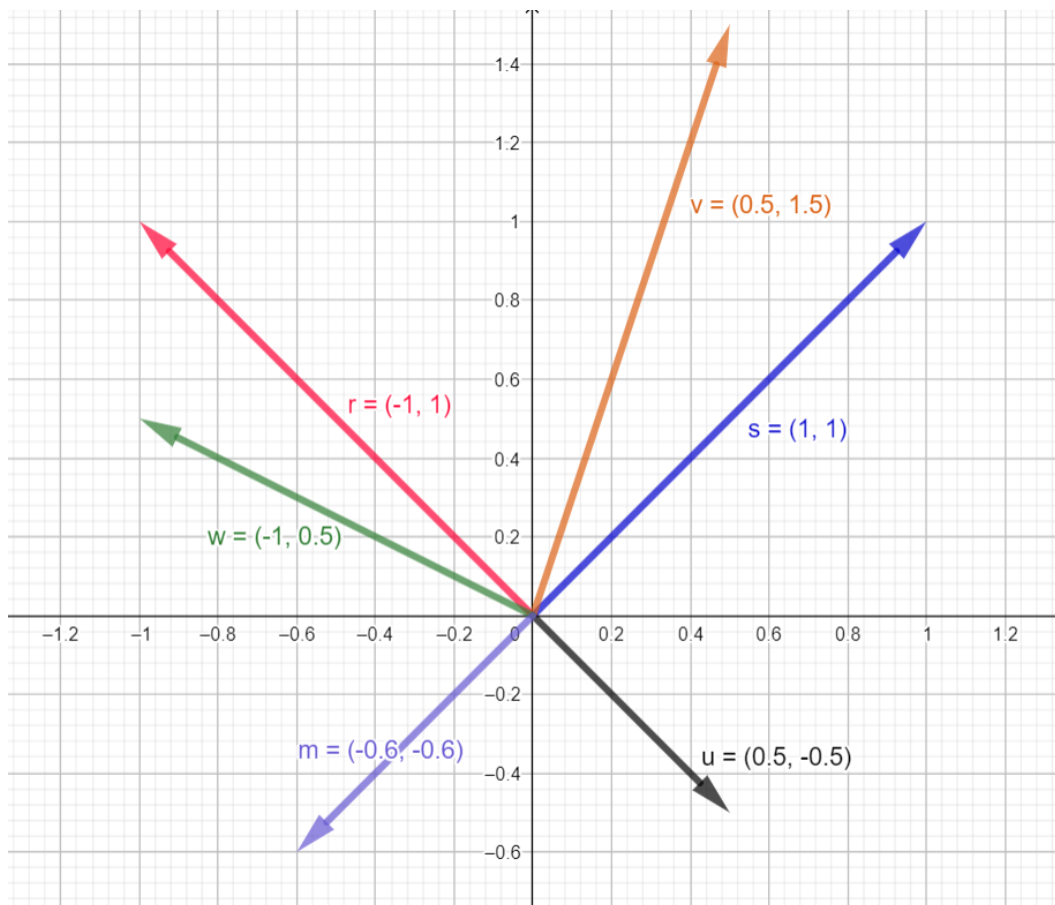


Figura 3: Estudiando la ortogonalidad entre vectores del plano.

Producto vectorial (o producto cruz)

Si el producto escalar fue interesante, el producto vectorial va a volarte la cabeza. El producto vectorial es una operación entre dos vectores que da por resultado un vector. Vimos dos maneras de calcularlo. Aquí pensaremos un poco sobre las limitaciones de cada método.

1. Intenta calcular los siguientes productos vectoriales sin utilizar la definición que emplea un determinante. Recuerda que seguimos trabajando con las constantes del primer ejercicio. Para expresar el resultado, puede ser útil recordar que $\hat{k} = (0, 0, 1)$.
 - a) $(1, 0) \times (0, 1)$
 - b) $(0, 1) \times (1, 0)$
 - c) $(5, -1) \times (0, a)$

$$d) (a, 1) \times (c, d)$$

$$e) (b, a) \times (c, -c)$$

$$f) (d, d) \times (d, d)$$

2. Ahora te propongo calcular nuevamente los productos vectoriales anteriores, pero esta vez utilizando la definición por determinante que vimos en el video. Puede que sea necesario extender algunos vectores a \mathbb{R}^3 considerando la tercera componente nula.

Al final pregúntate, si quieres, ¿qué método te simpatiza más?

3. Lo que viene es tremendo. Imagina que tienes dos vectores de \mathbb{R}^3 : $\vec{p}_1 = (2, 2, 2)$ y $\vec{p}_2 = (-1, 2, 3)$, ¿puedes dibujarlos!. Utilizando todo lo visto hasta ahora eres capaz de encontrar la ecuación del plano que contiene a \vec{p}_1 y a \vec{p}_2 , ¿lo sabías? Pero, ¿qué es la ecuación de un plano del espacio? Bueno, es una ecuación que tiene como máximo tres variables, pueden ser por ejemplo x , y y z , y al reemplazar las variables por las coordenadas de un punto, en caso de que éste pertenezca al plano, sucederá que cumplirán la igualdad, es decir, cumplirán la ecuación. Puedes pensar a la ecuación de un plano como una condición que tienen que cumplir las coordenadas de un punto para que ese punto pertenezca al plano. Al fin y al cabo un plano del espacio es un conjunto de infinitos puntos... todos aquellos que cumplen la ecuación del plano... bah, no me enrollo más. Volvamos al problema planteado. En el video lo explicaremos, pero si te animas a hacerlo puedo recordarte lo siguiente:

- El producto vectorial entre dos vectores da por resultado un vector ortogonal a ambos. Es decir, podemos encontrar un vector que es ortogonal a otros dos en forma simultánea si quisiéramos.
- Si el producto escalar entre dos vectores es cero, entonces esos vectores son ortogonales entre sí.
- El vector $\vec{p} = (x, y, z)$, si dejo x , y y z como variables, será un vector *genérico* con extremo en el punto arbitrario (x, y, z) .
- Un ejemplo de una ecuación de un plano del espacio es: $3x + y - z = 0$. En este caso, el punto $(3, -9, 0)$ cumple la ecuación y por lo tanto pertenece a ese plano.

Ahora es momento de mover el coco y tratar de resolver este fascinante problema. Posta, es fascinante. ¿Por qué es fascinante? Porque fascina. ¿Cómo sabes que fascina? A mi me fascina. Entonces es fascinante.