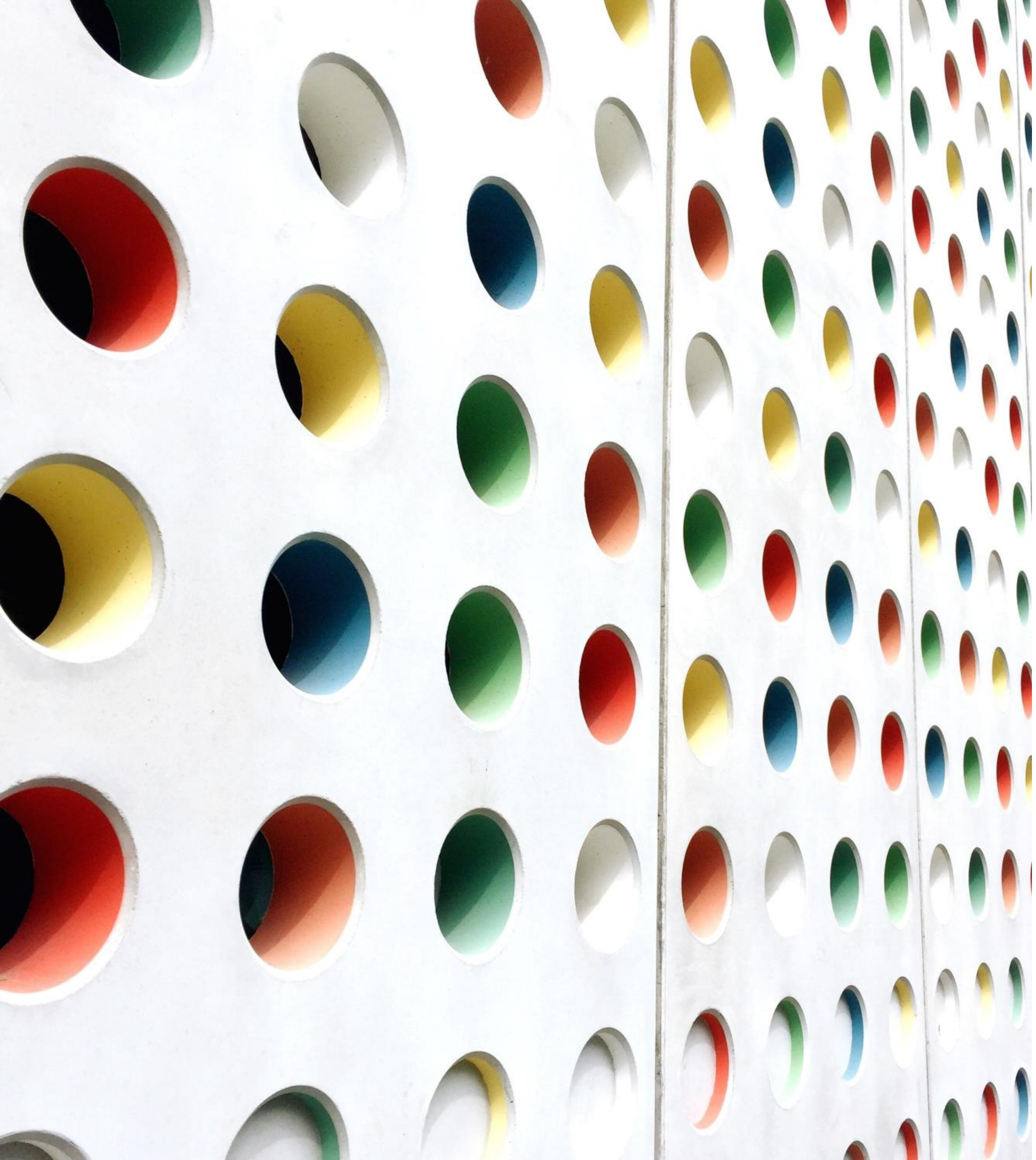


Lenguajes

Contenido

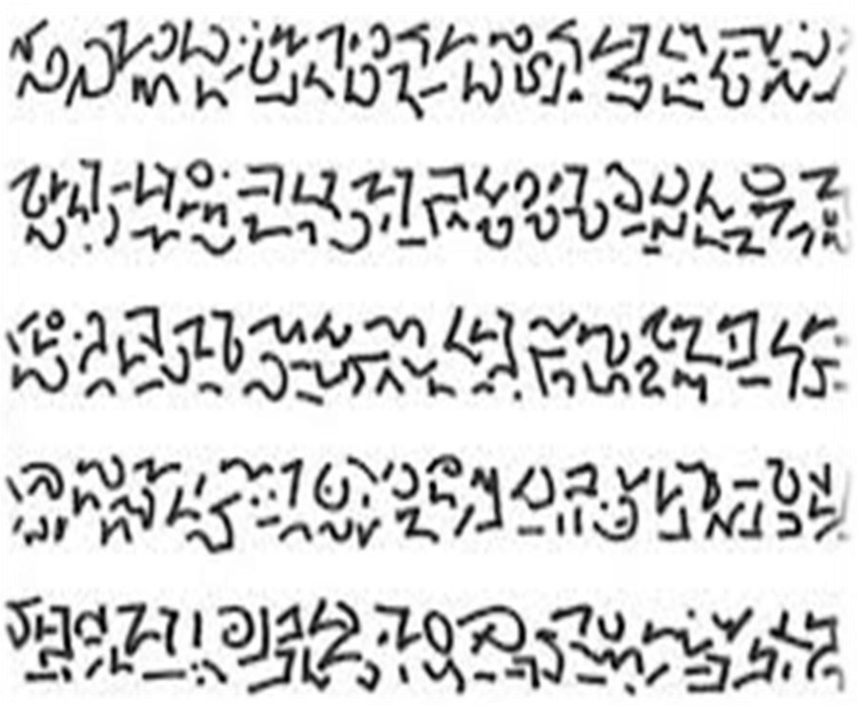
- Lenguaje
- Operaciones entre lenguajes
  - Unión o alternativa
  - Intersección entre lenguajes
  - Concatenación
  - Potencia de un lenguaje
  - Cierre o clausura positiva
  - Cierre u operación estrella (Cerradura de Kleene)
  - Reflexión de lenguajes

Lenguaje

- Un **lenguaje es un conjunto de palabras** *(cadenas) de un determinado alfabeto* $\boldsymbol{\Sigma}$.

- **Formalmente:** Se llama lenguaje sobre un alfabeto a todo subconjunto del lenguaje universal de $\boldsymbol{\Sigma}$.

$$L \subset \mathrm{W}(\Sigma)$$



- En particular, el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de $\mathbf{W(\Sigma)}$ y se llama por ello lenguaje vacío.
- Este lenguaje no debe confundirse con el que tiene como único elemento la palabra vacía $\mathbf{\{\lambda\}}$, que también es un subconjunto (diferente) de $\mathbf{W(\Sigma)}$.
- Para distinguirlos, hay que fijarse en su cardinalidad (número de símbolos).

$$C(\emptyset) = 0$$
$$C(\{\boldsymbol{\lambda}\}) = 1$$

- Obsérvese que tanto $\emptyset$ como $\mathbf{\{\lambda\}}$ son lenguajes sobre cualquier alfabeto.
- Por otra parte, un alfabeto puede considerarse también como uno de los lenguajes generados por él mismo: el que contiene todas las palabras de una sola letra.

Operaciones entre lenguajes

Unión o alternativa de lenguajes

- Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto:

$$\boldsymbol{L_1} \subset \boldsymbol{W}(\Sigma)$$
$$\boldsymbol{L_2} \subset \boldsymbol{W}(\Sigma)$$

- Se denomina unión de los dos lenguajes $\boldsymbol{L_1} \cup \boldsymbol{L_2}$ al conjunto formado por las cadenas que pertenezcan indistintamente a uno u otro de los dos lenguajes.

$$L_1 \cup L_2 = \{x | x \in L_1 \vee x \in L_2\}$$

Propiedades de la unión de lenguajes

1. **Operación cerrada:** la unión de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre dicho alfabeto.

2. **Propiedad asociativa:** $(\boldsymbol{L_1} \cup \boldsymbol{L_2}) \cup \boldsymbol{L_3} = \boldsymbol{L_1} \cup (\boldsymbol{L_2} \cup \boldsymbol{L_3})$

3. **Existencia de un elemento neutro:** cualquiera que sea el lenguaje **L**, el lenguaje vacío Ø cumple que $\emptyset \cup \boldsymbol{L} = \mathbf{L} \cup \emptyset = \boldsymbol{L}$

4. **Propiedad conmutativa:** cualesquiera que sean $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$, se verifica que $\boldsymbol{L_1} \cup \boldsymbol{L_2} = \boldsymbol{L_2} \cup \boldsymbol{L_1}$

5. **Propiedad idempotente:** cualquiera que sea **L**, se verifica que $\boldsymbol{L} \cup \boldsymbol{L}$

Intersección de lenguajes

- Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto:

$$\boldsymbol{L_1} \subset \boldsymbol{W}(\Sigma)$$
$$\boldsymbol{L_2} \subset \boldsymbol{W}(\Sigma)$$

- Se denomina intersección de los dos lenguajes $\boldsymbol{L_1} \cap \boldsymbol{L_2}$ al conjunto formado por las cadenas que pertenezcan a ambos lenguajes a la vez.

$$L_1 \cap L_2 = \{x | x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$$

Ejemplo de unión e intersección de lenguajes

Consideremos el alfabeto **Σ = {0, 1}** y los lenguajes:

A = {**λ, 0, 1, 10, 11**}

B = {**λ, 1, 0110, 11010**}

Entonces:

A ∪ B = {**λ, 0, 1, 10, 11**, 0110, 11010}

A ∩ B = {**λ, 1**}

Concatenación

- Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto:

$$L_1 \subset W(\Sigma)$$
$$L_2 \subset W(\Sigma)$$

- Se denomina concatenación de los dos lenguajes $(\mathbf{L_1 L_2})$ al conjunto de todas las cadenas formadas concatenando una palabra del primer lenguaje con una del segundo.

$$L_1 L_2 = \{x_1 x_2 \mid x_1 \in L_1 \wedge x_2 \in L_2\}$$

- La definición anterior sólo es valida si $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$ contienen al menos un elemento.
- Para la concatenación de **L** con el lenguaje vacío $\emptyset$ se tiene que: $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$

Propiedades de la concatenación de lenguajes

1. **Operación cerrada:** la concatenación de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre el mismo alfabeto.

2. **Propiedad asociativa:** $(\boldsymbol{L_1 L_2}) \boldsymbol{L_3} = \boldsymbol{L_1} (\boldsymbol{L_2 L_3})$

3. **Existencia de un elemento neutro:** cualquiera que sea el lenguaje **L**, el lenguaje de la palabra vacía cumple que:

$$\{\boldsymbol{\lambda}\}\mathbf{L} = \mathbf{L}\{\boldsymbol{\lambda}\} = \mathbf{L}$$

Ejemplo de concatenación de lenguajes

$$\mathbf{A} = \{casa\}$$

$$\mathbf{B} = \{perro,\ gato,\ \ pajaro\}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \{casaperro,\ casagato, casapajaro\}$$

Potencia de un lenguaje

- Se denomina potencia ***i-ésima*** de un lenguaje a la operación que consiste en concatenarlo consigo mismo ***i-veces***.

$$\mathbf{L}^{i} = \mathbf{LLL} \ldots \mathbf{L} \quad \textit{(i veces)}$$

- Definiremos también:
  - $L^1 = L$
  - $L^{i+1} = L^iL = LL^i$ (i > 0)
  - $L^iL^j = L^{i+j}$ (i, j > 0)
  - $L^0 = \{\lambda\}$

EJEMPLO

Sea A = {ab} un lenguaje sobre el alfabeto Σ = {a, b}.

$A^0 = \{\lambda\}$

$A^1 = A = \{ab\}$

$A^2 = A \cdot A^1 = \{abab\}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \{ababab\}$

Ejemplo de potencia de un lenguaje

$\mathrm{L} = \{ab, cd\}$

$\mathrm{L}^2 = \{\mathrm{ab} \cdot \mathrm{ab},\ \mathrm{ab} \cdot \mathrm{cd},\ \mathrm{cd} \cdot \mathrm{ab},\ \mathrm{cd} \cdot \mathrm{cd}\}$

$\mathrm{L}^2 = \{\mathrm{abab},\ \mathrm{abcd},\ \mathrm{cdab},\ \mathrm{cdcd}\}$

$$\mathrm{L}^3 = \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{L} = \begin{Bmatrix} \mathrm{abab} \cdot \mathrm{ab},\ \mathrm{abab} \cdot \mathrm{cd}, \\ \mathrm{abcd} \cdot \mathrm{ab},\ \mathrm{abcd} \cdot \mathrm{cd}, \\ \mathrm{cdab} \cdot \mathrm{ab},\ \mathrm{cdab} \cdot \mathrm{cd}, \\ \mathrm{cdcd} \cdot \mathrm{ab},\ \mathrm{cdcd} \cdot \mathrm{cd} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{ababab},\ \mathrm{ababcd}, \\ \mathrm{abcdab},\ \mathrm{abcdcd}, \\ \mathrm{cdabab},\ \mathrm{cdabcd}, \\ \mathrm{cdcdab},\ \mathrm{cdcdcd} \end{Bmatrix}$$

Cierre o clausura positiva

- La operación de cierre positivo de un lenguaje **L** es otro lenguaje $\mathbf{L}^{+}$ obtenido uniendo el lenguaje **L** con todas sus potencias posibles, excepto $\mathbf{L}^{\mathbf{0}}$.

$$\boldsymbol{L}^{+} = \{\boldsymbol{L}\} \cup \{\boldsymbol{LL}\} \cup \{\boldsymbol{LLL}\} \cup \cdots = \bigcup_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{n}}$$

- Ninguna clausura positiva contiene la palabra vacía, a menos que dicha palabra este en **L**.

- Puesto que el alfabeto $\boldsymbol{\Sigma}$ es también un lenguaje sobre $\boldsymbol{\Sigma}$, puede aplicársele esta operación.

$$\boldsymbol{\Sigma}^{+} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\Sigma}) - \{\boldsymbol{\lambda}\}$$

Cierre u operación estrella (Cerradura de Kleene)

- La operación cierre de un lenguaje **L** es otro **L*** obtenido uniendo el lenguaje **L** con todas sus potencias posibles, incluso $\mathbf{L}^{\mathbf{0}}$.

$$\mathbf{L}^{*} = \{\boldsymbol{\lambda}\} \cup \{\mathbf{L}\} \cup \{\mathbf{LL}\} \cup \{\mathbf{LLL}\} \cup \cdots = \bigcup_{\mathbf{n=0}}^{\infty} L^{n}$$

- Puesto que el alfabeto **Σ** es también un lenguaje sobre **Σ**, puede aplicársele esta operación.

$$\boldsymbol{\Sigma^* = W(\Sigma)}$$

Identidades de cierres

$$L^{*} = L^{+} \cup \{\lambda\}$$

$$L^{+} = L\,L^{*} = L^{*}\,L$$

Cerradura estrella y Cerradura positiva

Sea el lenguaje A = {a}

$\mathbf{A^0}$ = {λ}

$\mathbf{A^1}$ = {a}

$\mathbf{A^2}$ = {aa}

$\mathbf{A^3}$ = {aaa}

$\mathbf{A^*}$ = {λ, a, aa, aaa, ….}

$\mathbf{A^+}$ = {a, aa, aaa, …..}

Sea el lenguaje B = {ab, cd}

$\mathbf{B^0}$ = {λ}

$\mathbf{B^1}$ = {ab, cd}

$\mathbf{B^2}$ = {abab, abcd, cdab, cdcd}

$\mathbf{B^3}$ = {ababab, ababcd, abcdab, abcdcd, cdabab, cdabcd, cdcdab, cdcdcd}

$\mathbf{B^*}$ = {λ, ab, cd, abab, abcd, cdab, cdcd, ababab, ababcd, …}

$\mathbf{B^+}$ = {ab, cd, abab, abcd, cdab, cdcd, ababab, ababcd, …}

Reflexión de lenguajes

- Sea **L** un lenguaje cualquiera.
- Se llama *lenguaje reflejo* o *inverso* de **L**, y se representa con:

$$L^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in L\}$$

- Es decir, es el lenguaje que contiene todas las palabras inversas de **L**.

EJEMPLO

Sea A = {dog, abc}

A^{-1} = {god, cba}