NMO Mock Test

National Math Olympiad Training Camp
Dinajpur Math Club

3 February, 2025

All answers must be accompanied with proper solutions. Maximum attainable marks is 84.

Problem 1. (6 points) Niloy has a magical tree that grows i leaves on the i-th year. Each leaf lives for exactly 6 years. Find the minimum value of n ($n \geq 7$) such at the end of the n-th year, the number of leaves in Niloy's tree is a perfect square.
নিলয়ের একটি জাদুকরী গাছ আছে যা i-তম বছরে iটি পাতা জন্মায়। প্রতিটি পাতা ঠিক 6 বছর বাঁচে। n ($n \geq 7$) এর সর্বনিম্ন মান বের কর যাতে n-তম বছরের শেষে নিলয়ের গাছে পাতার সংখ্যা একটি বর্গসংখ্যা হয়।

Problem 2. (6 points) $\triangle ABC$ is an isoscles triangle such that $AB = BC$. E is a point on side AB and the foot of the perpendicular from E to BC is D. It is given that $AE = DE$. Find $\angle DAC$
$\triangle ABC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যেখানে $AB = BC$। E বিন্দুটি AB বাহুর উপর অবস্থিত এবং E থেকে BC বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু হল D। দেওয়া আছে যে $AE = DE$। $\angle DAC$ নির্ণয় কর।

Problem 3. (6 points) In celebration for his birthday, Suhit wrote the numbers $1, 2, 3, \dots 2024$ on the board. In one move he can erase any two numbers a, b from the board and write the sum $a + b$ instead. After some time, all the numbers on the board became equal. What is the minmum number of moves Suhit could make to achieve this?
সুহিত তার জন্মদিন উপলক্ষ্যে বোর্ডে $1, 2, 3, \dots 2024$ সংখ্যাগুলি লিখেছে। সে যেকোনো দুটি সংখ্যা a, b মুছে ফেলে এবং তাদের যোগফল $a + b$ লিখে। এরকম বারবার করার পর, বোর্ডের সব সংখ্যা সমান হয়ে যায়। সুহিত সর্বনিম কতগুলো মুভে এটি করতে পারবে?

Problem 4. (8 points) Integers a, b, c, d satisfy $a + b + c + d = 0$. Show that

$$n = (ab - cd) \cdot (bc - ad) \cdot (ca - bd)$$

is a perfect square.
a, b, c, d চারটি পূর্ণসংখ্যা যাতে $a + b + c + d = 0$ হয়। দেখাও যে

$$n = (ab - cd) \cdot (bc - ad) \cdot (ca - bd)$$

একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

Problem 5. (10 points) Given a positive integer n, find the proportion of the subsets of $\{1, 2, 3, 4 \dots, 2n\}$ such that their smallest element is odd.
একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n দেওয়া আছে। $\{1, 2, 3, 4 \dots, 2n\}$ এই সেটের যেসব উপসেটের ক্ষুদ্রতম উপাদান বিজোড়, তাদের অনুপাত নির্ণয় কর।

Problem 6. (10 points) Let ABC be an equilateral triangle, and P be a point on the circumcircle of the triangle but distinct from A, B and C. The lines through P and parallel to BC, CA, AB intersect the lines CA, AB, BC at M, N and Q respectively. Prove that M, N and Q are collinear .
ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং P বিন্দুটি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত কিন্তু A, B এবং C থেকে পৃথক। P বিন্দু দিয়ে BC, CA, AB এর সমান্তরাল সরলরেখাগুলি CA, AB, BC বাহুগুলিকে যথাক্রমে M, N এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে M, N এবং Q সমরেখ।

Problem 7. (10 points) In fire-service training, there are two ladders of equal height to climb a 20-foot-high building, one of which has 34 rungs and the other has 49 rungs. Two fire service personnel started climbing the building using two ladders. During climbing, they have to shift a fire pipe from one to another. They want the fire pipe to change hands at the lowest distance possible between them. On which rung they should be on their respective ladder to do this?
ফায়ার সার্ভিস প্রশিক্ষণে, একটি 20 ফুট উঁচু বিল্ডিংয়ে উঠার জন্য দুটি সমান উচ্চতার মই আছে, যার একটিতে 34 ধাপ এবং অন্যটিতে 49 ধাপ রয়েছে। দুজন ফায়ার সার্ভিস কর্মী দুটি মই ব্যবহার করে বিল্ডিংয়ে উঠতে শুরু করে। উঠার সময় তাদের একটি ফায়ার পাইপ একে অপরের কাছে হস্তান্তর করতে হবে। তারা চায় যে ফায়ার পাইপটি তাদের মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্বে হস্তান্তরিত হোক। এটি করার জন্য তাদের নিজ নিজ মইয়ের কোন ধাপে থাকা উচিত?

Problem 8. (12 points) Prove that a number of the form $44\ldots41$ (An odd number of 4s followed by a single 1) cannot be perfect square.
প্রমাণ কর যে $44\ldots41$ আকারের সংখ্যা (একটি বিজোড় সংখ্যক 4 এর পরে একটি 1) কখনোই পূর্ণবর্গ সংখ্যা হতে পারে না।

Problem 9. (16 points) Let A, B, C, D be four distinct points on a line, in that order. The circles with diameters AC and BD intersect at X and Y. The line XY meets BC at Z. Let P be a point on the line XY other than Z. The line CP intersects the circle with diameter AC at C and M, and the line BP intersects the circle with diameter BD at B and N. Prove that the lines AM, DN, XY are concurrent.
A, B, C, D যথাক্রমে একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত চারটি ভিন্ন বিন্দু। AC এবং BD ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY সরলরেখা BC কে Z বিন্দুতে ছেদ করে। Z ব্যতীত XY সরলরেখার উপর P একটি বিন্দু। CP সরলরেখা AC ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তকে C এবং M বিন্দুতে ছেদ করে, এবং BP সরলরেখা BD ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তকে B এবং N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে AM, DN, এবং XY সরলরেখাগুলি সমবিন্দু।