UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Toute l'analyse de HLMA101

2019 – 2020

Cours de Sylvain Brochard
Dernière mise à jour le 24 juin 2019

Table des matières

⚠ AVERTISSEMENT ⚠

1. Ce polycopié contient les définitions et résultats les plus importants, ainsi que de nombreux exercices. Ces exercices seront (presque) tous corrigés en amphi. Pour profiter pleinement des corrections, vous êtes invités à essayer de les résoudre par vous-mêmes *avant* d'assister au cours.
2. Certains exercices contiennent des résultats généraux. Ces résultats **font partie du cours**. Vous pourrez les utiliser sans démonstration pour résoudre d'autres exercices en TD ou à l'examen. Comme pour tous les résultats du cours, leur connaissance est exigible à l'examen.
3. À quelques rares exceptions près, les démonstrations des théorèmes, propositions, etc. ne sont pas incluses dans ce polycopié. Elles font elles aussi partie du cours. Là encore, il pourra vous être demandé à l'examen de refaire certaines démonstrations du cours.

1 Rappels élémentaires sur les ensembles de nombres

Les « ensembles de nombres » dont nous parlerons ici sont :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Les notations $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$ sont supposées connues.

1.1 Relation d'ordre

Sur $\mathbb{R}$ (donc aussi sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$), on a une *relation d'ordre* $\leq$ qui permet de comparer les nombres, avec les propriétés :

a) $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$

b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \leq b \text{ et } b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

c) $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a \leq b \text{ et } b \leq a) \Rightarrow a = b$

d) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \text{ ou } b \leq a$

De plus, l'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$:

e) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

f) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \leq b \text{ et } c \geq 0) \Rightarrow ac \leq bc$

⚠ On fera bien attention à la condition $c \geq 0$ dans la propriété f). Une erreur (très) fréquente consiste à multiplier une inégalité par une quantité dont on ne connaît pas le signe. Ceci conduit systématiquement à des absurdités. Si l'on souhaite multiplier l'inégalité $a \leq b$ par un nombre c, il faut distinguer les cas $c \geq 0$ et $c \leq 0$.

Exercice 1.1.1 Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \leq b \text{ et } c \leq 0) \Rightarrow ac \geq bc$.

Exercice 1.1.2 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $-6 \leq x \leq 3$ et $-4 \leq y \leq 5$. Que peut-on en déduire sur le nombre xy ?

Exercice 1.1.3 Démontrer à partir des propriétés a) à f) que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

Exercice 1.1.4 Démontrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ avec les propriétés a) à f) ci-dessus. [Utiliser l'exercice précédent et le fait que -1 est un carré.]

Proposition 1.1.5 (Admis, conséquence de la construction de $\mathbb{R}$)
Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien, autrement dit : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, na \geq b$.

1.2 Valeur absolue

La valeur absolue d'un réel x n'est rien d'autre que sa « distance à zéro », soit encore

$$|x| = \max(x, -x).$$

L'inégalité triangulaire est la plus importante de l'analyse :

Théorème 1.2.1 (Inégalité triangulaire) *Pour tous réels x et y on a*

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

l'égalité n'ayant lieu que si x et y ont même signe.

Exercice 1.2.2 En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$.

Exercice 1.2.3 Montrer que pour tous $x, x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $\delta > 0$,

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,.$$

Exercice 1.2.4 Soient a, b, c trois nombres réels. On suppose que $|a - c| \leq 3$ et que $|b - c| \leq 5$. Montrer que $|a - b| \leq 8$.

1.3 Décimaux et rationnels

Définition 1.3.1 *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

(1) On dit que x est rationnel s'il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

(2) On dit que x est décimal s'il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{p}{10^n}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exercice 1.3.2 Montrer que $\mathbb{Q}$ est stable par somme, par produit et par inverse.

Exercice 1.3.3 Montrer que $\mathbb{D}$ est stable par somme et par produit, mais pas par inverse.

1.4 Partie entière

Définition 1.4.1 *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle* partie entière de x, *et on note $E(x)$ (ou parfois $\lfloor x \rfloor$), l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. L'entier $E(x)$ est donc défini par les inégalités :*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1\,.$$

(L'existence et l'unicité de cet entier sont admises.)

Exercice 1.4.2 Montrer que ces inégalités sont équivalentes à $x-1 < E(x) \leq x$.

Exercice 1.4.3 Déterminer les entiers $E(0,5), E(\pi), E(27)$ et $E(-4,5)$.

Exercice 1.4.4 Tracer le graphe de la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.5 Écriture décimale

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit une suite d'entiers comme suit.

$$\begin{aligned} a_0 &= E(x) \\ a_1 &= E(10.(x-a_0)) \\ a_2 &= E(10^2.(x-a_0-\frac{a_1}{10})) \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= E(10^{n+1}.(x-d_n)) \end{aligned}$$

où l'on a posé $d_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$.

Définition 1.5.1 *L'écriture décimale de x est alors la suite infinie des nombres a_n (pour $n \in \mathbb{N}$). On l'écrit généralement $a_0, a_1a_2a_3a_4\ldots$ lorsque $x \geq 0$. (Dans le cas général, on peut écrire $a_0 + 0, a_1a_2a_3a_4\ldots$.)*

Les propriétés ci-dessous sont admises faute de temps, mais on pourrait les démontrer facilement par récurrence. On admet aussi que l'on peut calculer l'écriture décimale d'un nombre rationnel à l'aide de l'algorithme de division appris à l'école primaire (voir aussi l'exercice 1.5.6 ci-dessous).

Proposition 1.5.2 (admise)

(1) $\forall i \geq 1, a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(2) L'écriture décimale ne peut être égale à une suite infinie de 9 à partir d'un certain rang. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n' \geq n, a_{n'} \neq 9$.

(3) Toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0,\ldots,9\}$ pour $i \geq 1$ et qui vérifie la condition (2) est l'écriture décimale d'un nombre réel, à savoir de

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i 10^{-i} = \lim_{n\to+\infty} d_n.$$

(4) Deux réels sont égaux si et seulement s'ils ont la même écriture décimale.

(5) $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \in \mathbb{D}$ *et* $0 \leq x - d_n < \frac{1}{10^n}$*, autrement dit*

$$d_n \leq x < d_n + \frac{1}{10^n}.$$

On dit que d_n est l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.

Théorème 1.5.3 (admis) *Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $a_0 + 0, a_1 a_2 \dots$ son écriture décimale.*

(1) $x \in \mathbb{D}$ si et seulement si son écriture décimale est nulle à partir d'un certain rang, i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, a_n = 0 \,.$$

(2) $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si la suite (a_n) est périodique à partir d'un certain rang, i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, a_{n+T} = a_n \,.$$

Exercice 1.5.4 D'après 1.5.2 2), l'écriture décimale $3,25749999999\dots$ (avec une suite infinie de 9) n'est pas correcte. Quelle est l'écriture décimale « correcte » de ce nombre ?

Exercice 1.5.5 Quelle est l'écriture décimale du nombre (décimal) $x = \frac{4238430}{10^3}$? Et de $x = -1,63$? Inversement écrire sous la forme $\frac{p}{10^n}$ le nombre $32,492083$.

Exercice 1.5.6 Calculer l'écriture décimale du rationnel $x = \frac{51}{22}$ à l'aide de l'algorithme de division appris à l'école primaire. Vous convaincre que cette écriture décimale est effectivement périodique. Si $x = \frac{p}{q}$ est un rationnel, pouvez-vous majorer la longueur de la période T qui apparaît dans le théorème 1.5.3 ?

1.6 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Les théorèmes ci-dessous sont admis mais on pourrait les démontrer facilement à l'aide des propriétés de l'écriture décimale.

Théorème 1.6.1 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) *Soit $a < b$ deux réels. Alors $\exists r \in \mathbb{Q}, a < r < b$.*

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: quel que soit l'intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$, il y a toujours un rationnel (et même une infinité de rationnels !) dedans. En gros « il y en a partout »...

Théorème 1.6.2 (Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) *Soit $a < b$ deux réels. Alors $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a < r < b$.*

On dit que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: quel que soit l'intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$, il y a toujours un irrationnel (et même une infinité d'irrationnels !) dedans. En gros « il y en a partout »...

Exercice 1.6.3 À votre avis (sans trop justifier...) les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{D}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{D}$ sont-ils denses dans $\mathbb{R}$?

2 Parties de $\mathbb{R}$ et leurs bornes

2.1 Intervalles

Définition 2.1.1 *Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de l'un des dix types suivants.*

$$\begin{aligned}
&\varnothing\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}\\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x\}\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}\\
]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x\}\\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq b\}\\
]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < b\}\\
]-\infty,+\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.2 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est un intervalle si et seulement si A est convexe, c'est-à-dire si et seulement si*

$$\forall \alpha, \beta \in A, [\alpha, \beta] \subset A\,.$$

Démonstration. Il est évident qu'un intervalle est convexe. La réciproque ne sera pas faite en cours car il y a trop de cas à traiter (dix). Elle se démontre à l'aide des bornes supérieures et inférieures que nous verrons bientôt. Voir l'exercice 2.3.10 pour deux des cas. Les autres cas sont similaires. □

2.2 Majorants et minorants, maximum et minimum

Définition 2.2.1 *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.*

(1) On dit que m est un majorant de A (ou que m majore A) si $\forall a \in A, a \leq m$.

(2) On dit que m est un minorant de A (ou que m minore A) si $\forall a \in A, m \leq a$.

(3) On dit que m est un plus grand élément de A (pgé) ou un maximum de A, si m est un majorant de A et $m \in A$.

(4) On dit que m est un plus petit élément de A (ppé) ou un minimum de A, si m est un minorant de A et $m \in A$.

Définition 2.2.2 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

- *A est dite majorée si elle a (au moins) un majorant.*
- *A est dite minorée si elle a (au moins) un minorant.*
- *A est dite bornée si elle est majorée et minorée.*

Proposition 2.2.3 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si A a un pgé (resp. un ppé) il est unique. On le note* $\max(A)$ *(resp.* $\min(A)$*).*

Proposition 2.2.4 (admis)

(1) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.

(2) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.

Exercice 2.2.5 Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles majorées ? Sont-elles minorées ? Admettent-elles un maximum ? Un minimum ?

a) $\mathbb{N}$

b) $]-\infty, 2]$

c) $[0, 3]$

d) $]0, 1[$

e) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists n \in \mathbb{N}, x = \frac{1}{2^n}\}$

Exercice 2.2.6 Vrai ou faux ? (Cachez ce qui précède avant de répondre !)

a) Si A admet un maximum, elle est majorée.

b) Si A est majorée, elle admet un maximum.

c) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

d) Toute partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément.

e) Toute partie non vide et finie de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément.

Au fait, faites-vous bien la différence entre un ensemble borné et un ensemble fini ?

2.3 Borne supérieure

Définition 2.3.1 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note* $\mathrm{Majo}(A)$ *l'ensemble des majorants de A et* $\mathrm{Mino}(A)$ *l'ensemble des minorants de A.*

Théorème 2.3.2 (admis, conséquence de la construction de $\mathbb{R}$)
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors $\mathrm{Majo}(A)$ *est un intervalle de la forme* $[m, +\infty[$. *En particulier* $\mathrm{Majo}(A)$ *admet un plus petit élément.*

Définition 2.3.3 (borne supérieure) *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Le plus petit élément de* $\mathrm{Majo}(A)$ *est noté* $\sup(A)$ *et appelé la borne supérieure de A.*

En d'autres termes, $\sup(A)$ est « le plus petit des majorants de A ».

Théorème 2.3.4 (caractérisation de la borne supérieure) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ majorée, non vide, et soit $m \in \mathbb{R}$. Alors il y a équivalence entre :*

(i) $m = \sup(A)$

(ii) m est un majorant de A et $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, m - \varepsilon < a \leq m$.

Exercice 2.3.5 Déterminer $\mathrm{Majo}(A)$ et $\mathrm{Mino}(A)$ dans les cas suivants.

a) $A = [0, 1]$,

b) $A =]0, 2[$,

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists n \in \mathbb{N}, x = \frac{1}{2^n}\}$.

Exercice 2.3.6 Si A n'est pas majorée, déterminer l'ensemble $\mathrm{Majo}(A)$. Cet ensemble admet-il un plus petit élément ? Mêmes questions si A est vide.

Exercice 2.3.7 (borne inférieure) Pour une partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$, donner des énoncés analogues à 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4. Définir ainsi la *borne inférieure* de A, notée $\inf(A)$.

Exercice 2.3.8 Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles $A =]-5, 3]$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists n \in \mathbb{N}^*, x = \frac{1}{n}\}$.

Exercice 2.3.9 (borne supérieure et maximum) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il y a équivalence entre les propriétés suivantes.

1. A est non vide, majorée et $\sup(A) \in A$.
2. A admet un plus grand élément.

Montrer de plus que dans ce cas on a $\max(A) = \sup(A)$.

Exercice 2.3.10 Soit A une partie convexe de $\mathbb{R}$ (voir 2.1.2). On suppose que A est non vide, minorée et non majorée. On note $m = \inf(A)$. Montrer que A est égal à $]m, +\infty[$ ou à $[m, +\infty[$.

3 Rappels élémentaires sur les fonctions d'une variable réelle

3.1 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 3.1.1 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. On dit que :*

- *f est croissante sur A si $\forall x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$*
- *f est strictement croissante sur A si $\forall x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$*
- *f est décroissante sur A si $\forall x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$*
- *f est strictement décroissante sur A si $\forall x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$*

On dit que f est monotone sur A si f est croissante sur A ou décroissante sur A.

Exercice 3.1.2 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont croissantes *et* décroissantes.

Exercice 3.1.3 Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas monotone.

3.2 Parité

Définition 3.2.1 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 (c.à.d. $\forall x \in A, -x \in A$). On dit que*

- *f est paire sur A si $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$.*
- *f est impaire sur A si $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.*

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exercice 3.2.2 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont paires *et* impaires.

Exercice 3.2.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire et croissante. Montrer que f est constante. Existe-t-il une fonction impaire et croissante sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas constante ?

3.3 Fonctions périodiques

Définition 3.3.1 *Soit T un réel NON NUL. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in A, x + T \in A$. On dit que f est périodique de période T (ou encore que f est T-périodique) si*

$$\forall x \in A, f(x+T) = f(x) .$$

Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le graphe d'une fonction périodique de période T est invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$. Bref, il suffit de tracer le graphe sur un intervalle de longueur $|T|$ puis de le « reproduire » vers la droite et vers la gauche. Remarquer que si $T \neq 0$ est une période alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, le nombre nT est encore une période. On essaie en général de trouver la plus petite période strictement positive (quand elle existe, ce qui n'est pas toujours le cas !).

Exercice 3.3.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2-périodique et croissante. Montrer que f est constante.

Exercice 3.3.3 Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est périodique de période 3. Plus généralement montrer que tout $T \in \mathbb{Q}^*$ est une période.

4 Définitions de limites

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

4.1 Limite finie en un point : définition classique

Définition 4.1.1 (« limite classique ») *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une borne de I et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 (ou « converge vers ℓ en x_0 », ou « a pour limite ℓ en x_0 », ou etc.) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exercice 4.1.2
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$. Montrer en utilisant seulement la définition que f tend vers 7 lorsque x tend vers 3.
2. Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ et soit $\ell \neq 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = \dfrac{1}{\ell}$.

Exercice 4.1.3 Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $x_0 \in I$, montrer que $f(x_0) = \ell$. La définition ci-dessus oblige donc la limite (lorsqu'elle existe) à être égale à $f(x_0)$.

Exercice 4.1.4 (Négation) Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

(1) ℓ n'est *pas* une limite de f en x_0 ;

(2) f admet une limite (finie) en x_0 ;

(3) f n'admet pas de limite finie en x_0.

Exercice 4.1.5 Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'a pas de limite en 0. Quels sont les points $x_0 \in \mathbb{R}$ où elle admet une limite ?

Exercice 4.1.6 (« Lemme fondamental ») *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit x_0 un point de I ou une borne de I. On suppose que f tend vers ℓ en x_0.*

(1) Si $\ell > 0$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$.

(2) Si $\ell < 0$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < 0$.

(3) Si $\forall x \in I, f(x) \geq 0$, montrer que $\ell \geq 0$.

4.2 Unicité de la limite

Théorème 4.2.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une borne de I. Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si f admet ℓ_1 et ℓ_2 pour limites en x_0, alors $\ell_1 = \ell_2$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose $\ell_1 \neq \ell_2$. On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que les deux intervalles $]\ell_1-\varepsilon, \ell_1+\varepsilon[$ et $]\ell_2-\varepsilon, \ell_2+\varepsilon[$ soient disjoints, par exemple on peut prendre $\varepsilon = \frac{|\ell_1-\ell_2|}{2}$. Par définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in I, |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon\,.$$

De même, il existe un nombre $\delta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in I, |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon\,.$$

Soit $x \in I$ un réel tel que $|x - x_0| < \min(\delta_1, \delta_2)$. (Il existe un tel x car $x_0 \in I$ ou x_0 est une borne de I donc I contient des points aussi proches que l'on veut de x_0.) Alors $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$ et $|f(x) - \ell_2| < \varepsilon$. On en déduit

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \\ &\leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Remarque 4.2.2 Ce théorème justifie la notation $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. En effet, il serait fâcheux d'écrire $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

Remarque 4.2.3 Le théorème dit que si la limite existe, elle est unique. Mais attention, elle n'existe pas toujours !

4.3 Limite finie en un point : variantes

Il arrive souvent que l'on souhaite étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 *d'une certaine manière*. Par exemple on peut exiger que x approche de x_0 sans jamais être égal à x_0 (limite épointée) ou bien en restant toujours inférieur ou égal à x_0 (limite à gauche). On est alors amené à introduire les définitions suivantes. Notez que dans ces définitions, il n'est pas nécessaire que f soit définie sur I tout entier. Par exemple pour une limite épointée en x_0 il suffit que f soit définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

limite (classique)	$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I,$ $\lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert < \varepsilon$
limite (classique) à gauche	$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\leq x_0}} f(x) = \ell$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I\cap]-\infty, x_0],$ $\lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert < \varepsilon$
limite (classique) à droite	$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\geq x_0}} f(x) = \ell$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I \cap [x_0, +\infty[,$ $\lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert < \varepsilon$
limite épointée	$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = \ell$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I \cap \mathbb{R} \setminus \{x_0\},$ $\lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert < \varepsilon$
limite épointée à gauche	$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I\cap]-\infty, x_0[,$ $\lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert < \varepsilon$
limite épointée à droite	$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I\cap]x_0, +\infty[,$ $\lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert < \varepsilon$

Remarque 4.3.1 La seule chose qui change dans la définition est l'ensemble dans lequel x peut varier. Cet ensemble est toujours de la forme $I \cap L$ où L est l'ensemble des réels x qui vérifient la condition imposée sous le signe $\lim\limits_{x \to x_0}$. Par exemple pour une limite épointée à gauche, L est l'ensemble des réels x qui vérifient $x < x_0$, donc $L =]-\infty, x_0[$. Dans la suite de ce cours cet ensemble L sera appelé le *lieu* de la limite considérée. Le lieu de la limite est donc

$L = \mathbb{R}$ pour une limite classique en x_0

$L =]-\infty, x_0]$ pour une limite à gauche en x_0

$L = [x_0, +\infty[$ pour une limite à droite en x_0

$L = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ pour une limite épointée en x_0

$L =]-\infty, x_0[$ pour une limite épointée à gauche en x_0

$L =]x_0, +\infty[$ pour une limite épointée à droite en x_0

Exercice 4.3.2 Déterminer les limites de la fonction « partie entière » en $x_0 = 1$.

Exercice 4.3.3 Il y a des liens logiques étroits entre toutes ces définitions. Voici les exemples les plus importants.

1. Montrer que f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si f tend vers ℓ en x_0 à gauche et à droite. [Plus généralement, si L_1 et L_2 sont deux lieux de limites, alors « $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in L_1}} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in L_2}} f(x) = \ell$ » équivaut à $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in L_1 \cup L_2}} f(x) = \ell$.]
2. Si $x_0 \in I$, montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell$ et $f(x_0) = \ell)$.
3. Si $x_0 \notin I$, montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell$.

4.4 Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition 4.4.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

(i) On suppose que I contient un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

(ii) On suppose que I contient un intervalle de la forme $]-\infty, a]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Exercice 4.4.2 On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Démontrer l'assertion

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

4.5 Limite infinie

Définition 4.5.1 (sens classique) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit x_0 un point de I ou une borne de I. On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq A$$

et on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Exercice 4.5.2 En vous inspirant de la définition précédente, écrire la définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Exercice 4.5.3 De même que ci-dessus, on définit les variantes à gauche, à droite, épointée, épointée à gauche, épointée à droite, ou encore en $+\infty$ ou en $-\infty$. Écrire par exemple la définition de $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = +\infty$ et de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 4.5.4 Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ pour tout $x \neq 1$. Déterminer les limites de f au point 1.

4.6 Quelques remarques sur ces définitions

Remarque 4.6.1 Un petit point de vocabulaire : si f a une limite *finie* $\ell \in \mathbb{R}$ on parle de *convergence*. On dit par exemple que f *converge* vers ℓ. Dans le cas contraire on parle de *divergence*, c'est-à-dire dès qu'il n'existe pas de limite finie. En particulier, si $\lim f(x) = +\infty$ on dit que f diverge vers $+\infty$ (et non « converge »).

Remarque 4.6.2 Il y a huit façons de faire tendre x vers quelque chose (limite classique, à gauche, à droite, épointée, épointée à gauche, épointée à droite, en $+\infty$, en $-\infty$). Dans chacun de ces cas, la limite peut être égale à un réel ℓ, à $+\infty$ ou à $-\infty$. Ceci nous fait un total de $8 \times 3 = 24$ définitions de limites différentes. *Vous devez être capable* d'écrire à la demande n'importe quelle définition de limite. Il ne serait pas raisonnable de chercher à apprendre bêtement par cœur toutes ces définitions (c'est le meilleur moyen de les confondre). Le moyen le plus efficace pour les retenir est de bien en comprendre le sens. Testez votre compréhension sur les exercices 4.6.5 et 4.6.6 ci-dessous.

Remarque 4.6.3 Il y a une certaine souplesse dans ces définitions. Par exemple :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in I,|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in I,|x-x_0|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in I,|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|\leq\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in I,|x-x_0|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|\leq\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in I,|x-x_0|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|\leq 38\varepsilon\end{aligned}$$

Voici un autre exemple :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty &\Leftrightarrow \forall A\in\mathbb{R},\exists B\in\mathbb{R},\forall x\in I,x<B\Rightarrow f(x)>A\\ &\Leftrightarrow \forall A>0,\exists B\in\mathbb{R},\forall x\in I,x\leq B\Rightarrow f(x)>A\\ &\Leftrightarrow \forall A\in\mathbb{R},\exists B\leq 0,\forall x\in I,x\leq B\Rightarrow f(x)\geq A\\ &\Leftrightarrow \dots\end{aligned}$$

Mais attention, on ne peut pas faire n'importe quoi. Par exemple, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ *n'est pas* équivalent à

$$\forall\varepsilon\geq 0,\exists\delta>0,\forall x\in I,|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|\leq\varepsilon \tag{1}$$

ni à

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta\geq 0,\forall x\in I,|x-x_0|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon \tag{2}$$

Exercice 4.6.4 On suppose que $x_0\in I$. L'une des assertions (1) ou (2) est alors simplement équivalente à « $f(x_0)=\ell$ ». Laquelle ? Que signifie l'autre ?

Exercice 4.6.5 Écrire les définitions des énoncés suivants.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)=+\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Exercice 4.6.6 Traduire en termes de limites les assertions suivantes.

1. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in I\cap[x_0-\delta,x_0[,|f(x)-\ell|<\varepsilon$
2. $\forall A\geq 0,\exists\delta>0,\forall x\in I\cap[x_0,+\infty[,|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)\geq A.$

5 Manipulation des limites

5.1 Composition de limites

Théorème 5.1.1 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:J\to\mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que $f(I)\subset J$, de sorte que $g\circ f$ est définie sur I. Soient*

$a, y_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. *On suppose que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = y_0 \textit{ et que } \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell.$$

Alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

Démonstration dans le cas où $a, y_0, \ell \in \mathbb{R}$. Nous traiterons seulement un cas. Vous êtes censé pouvoir faire la preuve par vous-même dans les autres cas. Soit $\varepsilon > 0$. Comme g admet pour limite ℓ en y_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in J, |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - \ell| < \varepsilon. \tag{3}$$

En appliquant la définition de $\lim_{x \to a} f(x) = y_0$ au nombre δ, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, [x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta. \tag{4}$$

Maintenant, pour tout $x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[$ on a $f(x) \in J$ (car on a supposé $f(I) \subset J$) et $|f(x) - y_0| < \delta$ d'après (4). L'assertion (3) donne alors $|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$. $\square$

> **Exercice 5.1.2** (non corrigé) Démontrer le théorème dans le cas où $a = +\infty$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$.

Remarque 5.1.3 Le théorème 5.1.1 ci-dessus est énoncé avec des limites au sens classique. Il existe bien entendu des variantes de ce théorème pour les autres sortes de limites. **Il faut cependant ajouter une hypothèse supplémentaire : il faut supposer que la fonction f prend ses valeurs dans le lieu de la limite de g.** Autrement dit, si L désigne le lieu de la limite de g (voir la remarque 4.3.1 pour la définition du lieu d'une limite), il faut supposer que

$$\forall x \in I, f(x) \in J \cap L.$$

On peut encore reformuler cette hypothèse en disant que pour tout $x \in I$, $f(x)$ doit vérifier la condition éventuellement imposée sous le signe $\lim_{y \to y_0}$ dans la limite de g. Comme vous pourrez le voir dans l'exercice 5.1.5, on ne peut pas s'affranchir de cette hypothèse.

> **Exercice 5.1.4** Énoncer une variante du théorème ci-dessus dans laquelle f admet une limite à gauche en $a \in \mathbb{R}$ et g admet une limite épointée en y_0.
>
> **Exercice 5.1.5** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction nulle et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$. Montrer que $\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} g(y) = 0$, que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, mais que $\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = 1$.

Exercice 5.1.6 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\ln(\frac{x+1}{x-1}))$.

5.2 Opérations sur les limites

Théorème 5.2.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I. Soit a un point de I ou une extrémité de I (éventuellement, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ si ce sont des extrémités de I). Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On suppose que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = \ell'.$$

ALORS :

(i) Si $\{\ell, \ell'\} \neq \{+\infty, -\infty\}$, $f + g$ a pour limite $\ell + \ell'$ en a.

(ii) Si $\{\ell, \ell'\} \neq \{0, \pm\infty\}$, fg a pour limite $\ell\ell'$ en a.

(iii) Si $\ell \neq 0$, $\frac{1}{f}$ a pour limite $\frac{1}{\ell}$ en a.

(iv) Si $\ell = 0$ et $\forall x \in I, f(x) > 0$, $\frac{1}{f}$ a pour limite $+\infty$ en a.

(v) Si $\ell = 0$ et $\forall x \in I, f(x) < 0$, $\frac{1}{f}$ a pour limite $-\infty$ en a.

[On adopte ici les conventions évidentes $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $\ell + (+\infty) = +\infty$ si $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \times (+\infty) = +\infty$ si $\ell > 0$, $\ell \times (+\infty) = -\infty$ si $\ell < 0$, etc.]

Autrement dit, « les limites se comportent bien pour ces opérations, sauf si on tombe sur une forme indéterminée ».

Formes indéterminées :

$$0 \times (\pm\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad \frac{\bullet}{0} \text{ et } \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Lorsque l'on rencontre une forme indéterminée, il faut (essayer de) la lever, c'est-à-dire travailler davantage pour comprendre réellement ce qu'il se passe. Le résultat peut être n'importe quoi : il peut exister une limite finie, il peut exister une limite infinie, il peut ne pas exister de limite.

Remarque 5.2.2 Dans le cas (iv), il suffit en fait de supposer que $f(x) > 0$ « pour tout x assez proche de a ». Par exemple si $a \in \mathbb{R}$, on peut remplacer l'hypothèse $\forall x \in I, f(x) > 0$ par l'hypothèse plus faible

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

Remarque 5.2.3 ⚠ Nous n'allons pas démontrer entièrement le théorème 5.2.1 : il y a trop de cas à traiter. Nous allons seulement faire une petite partie des démonstrations en corrigeant les exercices ci-dessous. *Mais* les démonstrations suivent toutes le même principe et *vous devez être capable* de démontrer n'importe laquelle de ces propriétés, dans n'importe quel cas.

Exercice 5.2.4 Démontrer 5.2.1, (i) dans le cas où $a \in \mathbb{R}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.2.5 (1) Démontrer 5.2.1 (ii) dans le cas où $a = +\infty$ et $\ell = \ell' = 0$.

(2) Démontrer 5.2.1 (ii) dans le cas où $a = +\infty$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. [On pourra utiliser 5.2.1 (i) et appliquer la question (1) aux fonctions $f - \ell$ et $g - \ell'$.]

Exercice 5.2.6 Démontrer 5.2.1 (iii) dans le cas où $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. [On utilisera l'exercice 4.1.2, le Lemme Fondamental 4.1.6 et le théorème de composition des limites.]

Exercice 5.2.7 Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ mais telle que $\frac{1}{f}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 5.2.8 Étudier les limites de $e^x + \frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, de $2 + 4\ln x$ quand x tend vers 0, et de $\frac{e^x}{\sin x}$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures.

5.3 Limites et inégalités

Théorème 5.3.1 (« passage à la limite ») *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I, et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. On suppose que f tend vers ℓ en a, que g tend vers ℓ' en a et que*

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$$

Alors $\ell \leq \ell'$, autrement dit $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

Démonstration. On applique le point (3) du Lemme fondamental 4.1.6 à la fonction $g - f$. Cette fonction est positive ou nulle sur I et tend vers $\ell' - \ell$, donc $\ell' - \ell \geq 0$. $\square$

Remarque 5.3.2 Il y a un énoncé analogue pour des limites à gauche, à droite, épointées, en $\pm\infty$, etc. ou lorsque les limites sont infinies.

Remarque 5.3.3 À la limite l'inégalité est seulement *large*, même si $f(x) < g(x)$ pour tout x. Par exemple, pour $f(x) = \frac{1}{x}$, on a $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$, mais la limite de f en $+\infty$ est 0.

Théorème 5.3.4 (« théorème des gendarmes ») *Soient f, g, h des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ un point de I ou une extrémité de I. On suppose que*

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

et que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Alors $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

Démonstration (cas où $a, \ell \in \mathbb{R}$, à compléter) Il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit $\cdots > 0$. Comme .... = ..., il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in I, |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

De même, comme .... = ..., il existe $\delta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pose $\delta = \min(\ldots, \ldots)$. Alors pour tout $x \in \ldots$ tel que .... on a

$$\begin{cases} f(x) & \leq g(x) \leq & h(x) \\ \ell - \varepsilon & < f(x) < & \ell + \varepsilon \\ \ell - \varepsilon & < h(x) < & \ell + \varepsilon \end{cases}$$

d'où $\ell - \varepsilon < \ldots\ldots < \ell + \varepsilon$. $\square$

Exercice 5.3.5 Fabien propose la démonstration suivante du théorème des gendarmes : « En appliquant le théorème de passage à la limite aux fonctions f et g, on obtient $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ et en l'appliquant aux fonctions g et h on obtient $\lim\limits_{x \to a} g(x) \leq \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, d'où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$. » Son raisonnement est-il correct ?

Exercice 5.3.6 Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$.

5.4 Limites de fonctions monotones

Théorème 5.4.1 *Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors f a des limites (finies ou infinies) en a et b. De plus :*

(1) Si f est majorée sur I, la limite $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$ est finie égale à $\sup(f(I))$.

(2) Si f n'est pas majorée sur I, alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.

(3) Si f est minorée sur I, la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ est finie égale à $\inf(f(I))$.

(4) Si f n'est pas minorée sur I, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$.

Remarque 5.4.2 On a un théorème analogue pour f décroissante.

Exercice 5.4.3 Le résultat est énoncé sur un intervalle *ouvert*. Il serait faux avec des limites *au sens classique* sur un segment $[a, b]$. Donner un contre-exemple.

6 Continuité

6.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 6.1.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque 6.1.2 On a aussi des notions de continuité *à gauche* et *à droite*. Par exemple f est dite continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \leq x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Remarque 6.1.3 La continuité est une notion *locale* : seul le comportement de f *au voisinage de* x_0 importe. Ceci est nouveau par rapport au point de vue du lycée.

Définition 6.1.4 (continuité globale) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.*

Théorème 6.1.5 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions et soit $x_0 \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en x_0 (resp. sur I). Alors :*

(i) Les fonctions $|f|, \lambda f, f + g, fg$ sont continues en x_0 (resp. sur I).

(ii) Si de plus $f(x_0) \neq 0$ (resp. si $\forall x \in I, f(x) \neq 0$) alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 (resp. sur I).

Théorème 6.1.6 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $f(I) \subset J$.*

1. *Soit $x_0 \in I$. On suppose que f est continue en x_0 et que g est continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0.*
2. *Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.*

Démonstration. Ces deux théorèmes sont des applications immédiates des théorèmes sur les limites. □

Exercice 6.1.7 En explicitant la définition de la limite, écrire l'assertion « f est continue en x_0 » à l'aide de quantificateurs.

Exercice 6.1.8 (Négation) De même, expliciter l'assertion « f n'est pas continue en x_0 ». (On dit dans ce cas que f est *discontinue* en x_0.)

Exercice 6.1.9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 2 et telle que $f(2) = 0$. Montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]2 - \delta, 2 + \delta[$, $-\frac{1}{1000} < f(x) < \frac{1}{1000}$.

Exercice 6.1.10 (prolongement par continuité) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f une fonction définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$.

1. On suppose que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$ existe et est égal à $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut prolonger la fonction f en une fonction continue sur I en posant $f(x_0) = \ell$.

2. Inversement, si f n'admet pas de limite épointée *finie* en x_0, montrer qu'il n'existe pas de fonction continue sur I qui prolonge f.

Exercice 6.1.11 Les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par les formules suivantes admettent-elles un prolongement par continuité en 0 ? $\frac{1}{x}$; $\sin(\frac{1}{x})$; $x\sin(\frac{1}{x})$; $\frac{x}{|x|}$.

Exercice 6.1.12 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Si $x_0 \in [a, b]$ est tel que $f(x_0) < 0$, montrer que f est strictement négative sur un voisinage de x_0, c'est-à-dire que $\exists \delta > 0, \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < 0$. (Penser au Lemme Fondamental !)
2. Soit $F = \{x \in [a, b] \,/\, f(x) \geq 0\}$. On suppose que F est non vide. Montrer que F admet un plus grand élément et un plus petit élément.

6.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 6.2.1 (théorème des valeurs intermédiaires) *Soient a, b des nombres réels et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout réel t compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = t$.*

Démonstration. On se place dans le cas où $t = 0$ et $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. (Le cas général s'en déduit en considérant la fonction $x \mapsto f(x) - t$ ou la fonction $x \mapsto t - f(x)$.) Il faut montrer que f s'annule. On pose

$$A = \{x \in [a, b]/f(x) \leq 0\}.$$

Alors A est non vide (car $a \in A$) donc par 6.1.12 il admet un plus grand élément. Soit $c = \max(A)$. On a $f(c) \leq 0$ car $c \in A$. Montrons par l'absurde que $f(c) = 0$. On suppose $f(c) < 0$ (en particulier $c \neq b$ puisque $f(b) \geq 0$). Par continuité de f en c il existe alors $\delta > 0$ tel que $f(x) < 0$ pour tout $x \in [c, c + \delta[$. Alors $c + \frac{\delta}{2} \in A$ ce qui contredit le fait que c majore A. □

Corollaire 6.2.2 *Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties A de $\mathbb{R}$ telles que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, [\alpha, \beta] \subset A$. On pose $A = f(I)$. Soient $\alpha, \beta \in f(I)$. Par définition de $f(I)$ il existe $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. On peut supposer $a \leq b$. Comme f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires $f(I)$ contient toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. □

Remarque 6.2.3 Le théorème des valeurs intermédiaires donne seulement l'*existence* de solutions à l'équation $f(x) = t$ mais ne dit rien sur le nombre de solutions. A priori il n'y a pas unicité. Nous verrons par la suite que l'étude des variations de la fonction peut permettre d'obtenir ce type d'informations.

Exercice 6.2.4 Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet (au moins) trois solutions dans l'intervalle $[-2, 2]$.

Exercice 6.2.5 (1) En général l'image par f de l'intervalle $[a, b]$ n'est pas égale à l'intervalle $[f(a), f(b)]$. Le TVI donne cependant une inclusion. Laquelle ?

(2) Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en considérant par exemple la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

6.3 Théorème de la « bijection réciproque »

Théorème 6.3.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue et strictement croissante sur I. Alors :*

(i) f est une bijection de I sur $J = f(I)$.

(ii) La réciproque $f^{-1} : J \to I$ est elle aussi continue et strictement croissante.

(iii) L'image $f(I)$ de f est un intervalle de $\mathbb{R}$, de même nature que I, dont les bornes sont les limites de f aux extrémités de I. Autrement dit :

- *Si $I = [a, b]$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.*
- *Si $I =]a, b]$, alors $f(I) =](\lim_{a^+} f), f(b)]$.*
- *Si $I =]-\infty, b]$, alors $f(I) =](\lim_{-\infty} f), f(b)]$.*
- *Si $I = [a, b[$, alors $f(I) = [f(a), \lim_{b^-} f[$.*
- *etc.*

Remarque 6.3.2 Pour $t \in J$, l'équation $f(x) = t$ a alors une *unique* solution $x \in I$.

Remarque 6.3.3 Il y a évidemment un théorème analogue pour f strictement décroissante.

Exercice 6.3.4 On reprend l'exercice 6.2.4. Montrer maintenant qu'il y a *exactement* trois solutions dans $[-2, 2]$. (On pourra utiliser, un peu en avance, le résultat de l'exercice 10.4.2.)

Exercice 6.3.5 ⚠ Si on enlève l'hypothèse de monotonie, tout (ou presque) est faux dans le théorème : f n'est pas forcément bijective ; $f(I)$ est certes un intervalle, mais par forcément de même nature que I, et ses bornes ne sont pas les limites de f en général. Donner des exemples. (Nous verrons malgré tout plus loin que si f est continue sur un *segment* $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est encore un segment, *i.e.* de la forme $[c, d]$.)

La suite de ce paragraphe est consacrée à la preuve du théorème de la bijection réciproque. Elle ne sera faite en amphi que si le temps le permet.

Lemme 6.3.6 *Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction* croissante *sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que $g(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors g est continue sur I.*

Démonstration. Soit $a \in I$. Il suffit de montrer que g admet $g(a)$ comme limite à gauche et à droite. Faisons-le à droite (c'est pareil à gauche...). Si $a = \max(I)$ c'est trivial. Sinon il existe un réel $b \in I$ tel que $a < b$. Alors g est croissante sur $]a, b[$ et minorée par $g(a)$ donc d'après le théorème sur les limites des fonctions monotones g a une limite épointée à droite en a et

$$g(a) \leq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \inf(g(]a, b[)) =: \ell$$

Si l'inégalité était stricte, $g(I)$ ne contiendrait pas les points entre $g(a)$ et ℓ, donc ne serait pas un intervalle. Donc $g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x)$. □

Démonstration du théorème 6.3.1 (i) $f : I \to J = f(I)$ est surjective par définition de J, et injective par stricte croissance, donc bijective.

(ii) Montrons que $f^{-1} : J \to I$ est strictement croissante. Soient $y_1, y_2 \in J$. On veut montrer que $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ou encore (contraposée) que $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \Rightarrow y_1 \geq y_2$. C'est vrai par croissance de f puisque $y_i = f(f^{-1}(y_i))$. Le lemme ci-dessus montre maintenant que f^{-1} est *continue* sur J puisqu'elle est croissante et que son image $I = f^{-1}(J)$ est un intervalle.

(iii) On sait déjà que $f(I)$ est un intervalle d'après le corollaire 6.2.2. Précisons la nature et les bornes de J. On traite seulement la borne de gauche (à droite c'est pareil).

Cas où I est fermé à gauche (i.e. $I = [a, b[$ ou $[a, b] \ldots$) : Pour tout $x \in I$, $f(a) \leq f(x)$ donc l'intervalle J admet $f(a)$ pour plus petit élément. Il est donc fermé à gauche de borne $f(a)$.

Cas où I est ouvert à gauche ($I =]a, b[$ ou $]a, b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) : Soit c la limite épointée à droite en a de f. On utilise le théorème sur les limites des fonctions croissantes. Si f n'est pas minorée, on a $c = -\infty$ et $f(I)$ est un intervalle non minoré donc sa borne gauche est bien $-\infty$. Si f est minorée, $c = \inf(f(I)) \in \mathbb{R}$ donc la borne gauche de $f(I)$ est c. Il reste à montrer que $c \notin f(I)$. Or pour tout $x \in I$, il existe x_1 tel que $a < x_1 < x$. On en déduit $c \leq f(x_1) < f(x)$ donc $f(x) \neq c$ donc $c \notin f(I)$. Dans les deux cas J est ouvert à gauche, de borne $c = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$. □

6.4 Théorème des valeurs extrêmes

Le théorème ci-dessous n'est pas au programme du module HLMA101.

Théorème 6.4.1 *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes. Autrement dit il existe des nombres $c_{min} \in [a, b]$ et $c_{max} \in [a, b]$ tels que*

$$\forall x \in [a, b], f(c_{min}) \leq f(x) \leq f(c_{max})$$

En particulier l'image de f est un segment.

Démonstration.
• *Étape 1 : f est majorée.*
On raisonne par l'absurde et on suppose f non majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$F_n = \{x \in [a,b] / \ f(x) \geq n\}.$$

L'ensemble F_n est non vide (car f n'est pas majorée) donc admet un maximum d'après 6.1.12. Soit $x_n = \max(F_n)$. Comme $F_{n+1} \subset F_n$ on a $x_{n+1} \leq x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par a) donc elle converge. Soit $\ell \in [a,b]$ sa limite. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geq n$. Ceci contredit la continuité de f en ℓ.

• *Étape 2 : f est bornée.*
En effet, f est majorée d'après l'étape 1, et minorée d'après l'étape 1 appliquée à $-f$.

• *Étape 3 : f atteint ses bornes.*
D'après le théorème des valeurs intermédiaires on sait que $f([a,b])$ est un intervalle, qui est borné par l'étape 2. Si $f(I)$ ne contenait pas l'une de ses bornes, par exemple $f(I) =]c,d]$, alors la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)-c}$ serait continue sur $[a,b]$ mais non bornée, ce qui contredirait l'étape 2. □

7 Limites et continuité des fonctions usuelles

7.1 Fonctions polynômes

Une fonction polynôme est une fonction du type

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \end{cases}$$

où $a_0, \ldots, a_d$ sont des réels fixés. Si $a_d \neq 0$, l'entier d est le *degré* du polynôme.

Proposition 7.1.1 *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$. Si $a_d > 0$, alors*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \textit{et} \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \ \textit{si } d \textit{ est pair} \\ -\infty \ \textit{si } d \textit{ est impair} \end{cases}$$

7.2 Fractions rationnelles

Ce sont les fonctions du type $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont des fonctions polynômes. Le domaine de définition de $\frac{P}{Q}$ est $\mathcal{D}_{\frac{P}{Q}} = \mathbb{R} \setminus Z(Q)$ où $Z(Q) = \{t \in \mathbb{R} / Q(t) = 0\}$ est le lieu d'annulation de Q. La fonction $\frac{P}{Q}$ est continue sur son domaine de définition. On sait calculer les limites en $\pm\infty$ et en les points de $Z(Q)$.

Exercice 7.2.1 Déterminer les limites en $\pm\infty$ et en $x_0 = 2$ de la fraction rationnelle
$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{(x-2)^2(2x+3)} + \frac{1}{(x-2)^2}\,.$$

7.3 Fonctions racines $n^{\text{ièmes}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est impair on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$. Si n est pair on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n$. (Avez-vous noté la différence ?) Dans les deux cas la fonction f_n est strictement croissante (sur $\mathbb{R}$ si n est impair, seulement sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair !) et continue. Le théorème de la bijection réciproque assure alors que la réciproque de f_n est continue et strictement croissante. On note $\sqrt[n]{\ }$ cette réciproque.

Proposition 7.3.1

(1) Si n est impair la fonction $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$.

(2) Si n est pair la fonction $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Exercice 7.3.2 Rappeler l'allure du graphe des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ et en déduire l'allure du graphe des fonctions « racine carrée » et « racine cubique ». Quels sont les domaines de définition et de continuité de ces fonctions ?

Exponentielle et logarithme népérien

La définition de ces fonctions demande un peu de travail. Il y a plusieurs possibilités. On peut commencer par définir la fonction exponentielle par un problème de Cauchy (c'est-à-dire une équation différentielle + une condition initiale) OU par une équation algébrique OU par une série entière. On définit ensuite la fonction logarithme comme étant la réciproque de l'exponentielle. Une autre possibilité est de commencer par définir le logarithme (par une équation algébrique OU comme primitive de la fonction inverse OU par une série entière) puis de définir l'exponentielle comme étant la réciproque du logarithme. Comme aucune de ces constructions n'est réellement abordable avec les outils dont nous disposons à l'heure actuelle, nous admettrons leur existence et nous nous contenterons de rappeler certaines de leurs propriétés.

7.4 Logarithme népérien

La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle vérifie l'équation fonctionnelle
$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)\,.$$

Exercice 7.4.1 En utilisant les propriétés du logarithme rappelées ci-dessus, démontrer que

(i) $\ln(1) = 0$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n\ln(a)$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

7.5 Exponentielle

La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est la bijection réciproque du logarithme. En particulier on a $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(\exp x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \exp(a + b) = \exp(a). \exp(b)\,.$$

Ses limites à l'infini sont $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Théorème 7.5.1 (Croissances comparées) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

(1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty$

(2) $\lim_{x\to-\infty} x^n \exp x = 0$

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$

(4) $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^n = 0$.

On retiendra que, dans toutes les situations, « $\exp(x)$ l'emporte sur x, et x l'emporte sur $\ln(x)$ ».

Exercice 7.5.2 Dans le théorème des croissances comparées, montrer que les limites (2), (3) et (4) peuvent se déduire de la première par un changement de variable. (En fait, chacune des quatre limites peut se déduire de n'importe laquelle des trois autres.) Il suffira donc de démontrer la première pour les obtenir toutes.

7.6 Fonctions puissances

On cherche à définir a^α pour un *réel* quelconque α et pas seulement un entier. On s'inspire de la formule $\ln(a^n) = n\ln(a)$, connue pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. En prenant l'exponentielle on obtient $a^n = \exp(n\ln a)$. On généralise cette expression.

Définition 7.6.1 *Pour $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose*

$$a^\alpha = \exp(\alpha \ln a)\,.$$

Ceci définit deux familles de fonctions : on peut faire varier a, ou α. Pour étudier la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé) ou la fonction $g_a : x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ fixé) on reviendra toujours à la définition ci-dessus, c'est-à-dire $f_\alpha(x) = \exp(\alpha\ln(x))$ dans le premier cas et $g_a(x) = \exp(x\ln(a))$ dans le second.

Exercice 7.6.2 Montrer que pour tout $a > 0$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$a^{\alpha+\beta} = a^{\alpha}.a^{\beta} \text{ et } (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

Exercice 7.6.3 On pose $e = \exp(1)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$. [Ceci justifie la notation usuelle de l'exponentielle.]

Exercice 7.6.4 Pour tout $a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et que $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

7.7 Fonctions trigonométriques

Soit $x \in \mathbb{R}$. On place sur le cercle trigonométrique le point M associé au réel x (c.à.d. que x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$). L'abscisse du point M se note $\cos x$, son ordonnée $\sin x$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$ est paire, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$ est impaire, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.7.1 On rappelle la notation $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. On admet que $e^{ia+ib} = e^{ia}.e^{ib}$. Retrouver à partir de cette relation les formules de trigonométrie bien connues :

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \ldots \\ \sin(a + b) &= \ldots \\ \cos(2x) &= \ldots \end{aligned}$$

Exercice 7.7.2 (fonction tangente) Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $\cos x \neq 0$, on peut définir $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. La fonction $x \mapsto \tan x$ est appelée la fonction tangente. Déterminer son domaine de définition. Montrer qu'elle est impaire, π-périodique et continue sur D_{tan}. Déterminer les limites en $-\frac{\pi}{2}$ à droite et en $\frac{\pi}{2}$ à gauche.

7.8 Trigonométrie hyperbolique

On rappelle que $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Par analogie, on définit les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notées respectivement ch et sh, par

$$\text{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \text{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La fonction ch est paire et continue sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{ch}\,(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \text{ch}\,(x) = +\infty$. La fonction sh est impaire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites à l'infini sont $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sh}\,(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{sh}\,(x) = -\infty$.

Exercice 7.8.1 De même que pour les fonctions cos et sin, il existe pour ch et sh un certain nombre de « formules de trigonométrie hyperbolique ». À titre d'exemple, démontrer les formules suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \text{ch}\, x + \text{sh}\, x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\text{ch}\, x + \text{sh}\, x)^n = \text{ch}\,(nx) + \text{sh}\,(nx)$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ch}\,(a+b) = \text{ch}\,(a)\text{ch}\,(b) + \text{sh}\,(a)\text{sh}\,(b)$.

Exercice 7.8.2 (tangente hyperbolique) On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th, par $\text{th}\,(x) = \frac{\text{sh}\,(x)}{\text{ch}\,(x)}$. Quel est son domaine de définition ? Montrer qu'elle est impaire et continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer ses limites à l'infini.

8 Dérivabilité

8.1 Définitions

Définition 8.1.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée la dérivée de f en x_0.

Proposition 8.1.2 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un réel a et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ et*

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x).$$

Dans ce cas le réel a est nécessairement égal à $f'(x_0)$.

On peut interpréter cette proposition en disant que la fonction affine $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est une *approximation* de f au voisinage de x_0. L'« erreur » commise lors de cette approximation est $(x - x_0)\varphi(x)$.

Définition 8.1.3 La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$ est appelée la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$.

Définition 8.1.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est appelée la (fonction) dérivée de f.*

Exercice 8.1.5 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en 3 et que $f'(3) = 6$.

Exercice 8.1.6 (dérivable implique continue) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Montrer que si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Exercice 8.1.7 Définir une notion de dérivée à gauche et de dérivée à droite en un point x_0. Montrer que f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les dérivées à gauche et à droite sont égales.

Exercice 8.1.8 Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0. Étudier ses dérivées à gauche et à droite.

Exercice 8.1.9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 8.1.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

8.2 Opérations sur les dérivées

Théorème 8.2.1 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en x_0. Alors :*

(i) Les fonctions λf, $f + g$ et fg sont dérivables en x_0. De plus,

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0)\\ (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0)\\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

(ii) Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Remarque 8.2.2 Le théorème a une version « globale » : remplacer « dérivable en x_0 » par « dérivable sur I ».

Théorème 8.2.3 (dérivée d'une composée) *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions (avec I, J intervalles) telles que $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)\,.$$

Théorème 8.2.4 (dérivée de la réciproque) *Soit $f : I \to J$ une bijection. Soit $x_0 \in I$. Notons $y_0 = f(x_0)$. On suppose que f est dérivable en x_0. Alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable au point y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas :*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exercice 8.2.5 Démontrer 8.2.1 (i).

Exercice 8.2.6 Montrer que l'on peut retrouver facilement la formule du théorème 8.2.4 à partir de celle du théorème 8.2.3 (en admettant la dérivabilité de f^{-1}). Indication : dériver l'une des relations $(f \circ f^{-1})(y) = y$ ou $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

9 Étude des fonctions usuelles (partie 1)

9.1 Polynômes et fractions rationnelles

On sait quand ils sont dérivables et on sait calculer leurs dérivées.

Exercice 9.1.1 Calculer par exemple les dérivées des fonctions $f : x \mapsto 3x^3 - 4x^2 + 1$ et $g : x \mapsto \frac{x^3+2x-1}{x^2-3x+2}$.

9.2 Exponentielle et logarithme

Proposition 9.2.1

(1) La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

(2) La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$.

Exercice 9.2.2 En utilisant le théorème de dérivation d'une réciproque, déduire le point (2) du point (1).

9.3 Fonctions puissances et racines $n^{\text{ièmes}}$

Exercice 9.3.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Si α est un entier $n \in \mathbb{N}$, on remarquera que l'on retrouve la formule de dérivation bien connue de $x \mapsto x^n$.

Exercice 9.3.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque pour déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. [On distinguera les cas n pair et n impair.] Comparer avec la formule de dérivation de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ vue ci-dessus.

9.4 Fonctions trigonométriques

On admet que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \cos x \\
\cos'(x) &= -\sin x
\end{aligned}$$

Exercice 9.4.1 Étudier la dérivabilité de la fonction tangente.

9.5 Trigonométrie hyperbolique

Exercice 9.5.1 Montrer que les fonctions $\operatorname{ch}, \operatorname{sh}$ et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}'(x) &= \operatorname{sh}(x) \\
\operatorname{sh}'(x) &= \operatorname{ch}(x) \\
\operatorname{th}'(x) &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)
\end{aligned}$$

10 Théorème des accroissements finis et applications

10.1 Recherche d'extrema

Lemme 10.1.1 (Lemme des extrema locaux) *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable et soit $c \in]a, b[$ un point où f admet un maximum, c'est-à-dire tel que*

$$\forall x \in]a, b[,\ f(c) \geq f(x)\,.$$

Alors $f'(c) = 0$.

Exercice 10.1.2 Montrer que le lemme des extrema locaux est vrai aussi si l'on remplace « maximum » par « minimum ».

Exercice 10.1.3 Le lemme des extrema locaux est-il encore valable si l'on remplace l'intervalle ouvert $]a, b[$ par un intervalle fermé $[a, b]$? [On pourra considérer la fonction définie par $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.]

Exercice 10.1.4 Pour $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable et $c \in]a, b[$ le lemme des extrema locaux dit que si f admet un extremum en c, alors $f'(c) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

10.2 Le théorème des accroissements finis

Lemme 10.2.1 (Lemme de Rolle) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 10.2.2 (Théorème des Accroissements Finis) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exercice 10.2.3 Interpréter graphiquement le lemme de Rolle et le théorème des accroissements finis.

Exercice 10.2.4 Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier que la conclusion du TAF *n'est pas valable* (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de $c \in]a,b[$ tel que etc.) et préciser à chaque fois pourquoi le TAF ne s'applique pas (quelle est l'hypothèse manquante).

a) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.
b) $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = E(x)$.
c) $h : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 10.2.5 Démontrer le lemme de Rolle en utilisant le TAF.

Exercice 10.2.6 Démontrer le TAF en utilisant le lemme de Rolle. *Indication :* On pourra introduire la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - (x-a).\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

10.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème 10.3.1 (Inégalité des accroissements finis) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leq M$. Alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq M.|b - a|.$$

Corollaire 10.3.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose que f' est nulle sur I, c'est-à-dire que $\forall x \in I, f'(x) = 0$. Alors f est constante.*

Démonstration. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Alors le segment $[x,y]$ est inclus dans I (car I est un intervalle, donc est convexe). D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(x) - f(y)| \leq 0 \times |x - y| = 0$. Donc $f(x) = f(y)$. □

Exercice 10.3.3 Démontrer l'IAF en utilisant le TAF.

Exercice 10.3.4 Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

10.4 Variations

Théorème 10.4.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

(1) f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.

(2) f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$.

Exercice 10.4.2 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$. Montrer que f est strictement croissante sur $[a, b]$. La réciproque est-elle vraie ?

11 Étude des fonctions usuelles (partie 2) : trigonométrie inverse

11.1 Fonction Arcsinus

La fonction sinus est continue, dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \sin'(x) = \cos(x) > 0$. D'après 10.4.2, sinus est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. D'après le théorème de la bijection réciproque, la fonction sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$ et sa réciproque, que nous appellerons Arcsinus et noterons $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, est continue et strictement croissante. Par définition, on a

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \arcsin(\sin x) = x$$
$$\forall y \in [-1, 1],\ \sin(\arcsin y) = y.$$

Exercice 11.1.1 (1) En utilisant le théorème de dérivation d'une réciproque, montrer que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $\forall y \in]-1, 1[$,

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(2) Montrer que arcsin est impaire.

(3) Tracer le graphe de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et celui de arcsin sur $[-1, 1]$.

11.2 Fonction Arccosinus

Exercice 11.2.1 Montrer que la fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Montrer que sa réciproque arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall y \in]-1, 1[, \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Exercice 11.2.2 Montrer que $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$. [On commencera par montrer que cette fonction est constante !]

11.3 Fonction Arctangente

La fonction tangente réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée arctangente et notée arctan. La fonction arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est impaire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est même dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus,

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 11.3.1 Montrer que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$. Et pour $x < 0$?

12 Comportement asymptotique

12.1 Asymptotes verticales

Définition 12.1.1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que (le graphe de) f admet une asymptote verticale en x_0 si* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} |f(x)| = +\infty$.

La droite « asymptote au graphe de f » est alors la droite (verticale) d'équation $x = x_0$.

Exercice 12.1.2 Étudier les asymptotes verticales des fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.
2. $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x}$.
3. $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Exercice 12.1.3 Y a-t-il un lien logique entre les énoncés « f admet une asymptote verticale en x_0 » et « f admet une tangente verticale en x_0 » ?

12.2 Asymptotes obliques

Définition 12.2.1 *Soit I un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet une asymptote (oblique) en $+\infty$ s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0\,.$$

La droite asymptote est alors la droite d'équation $y = ax + b$.

Exercice 12.2.2 Donner une interprétation graphique de cette définition. Définir de manière analogue la notion d'asymptote oblique en $-\infty$.

Proposition 12.2.3 *On suppose que f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$. Alors*

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

Méthode de recherche des asymptotes en $+\infty$

① On étudie la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$.

- S'il n'y a pas de limite finie, alors f n'a pas d'asymptote.
- S'il existe une limite finie, on note $a \in \mathbb{R}$ cette limite et on passe à l'étape ②.

② On étudie la limite en $+\infty$ de $f(x) - ax$.

- S'il n'y a pas de limite finie, alors f n'a pas d'asymptote.
- S'il existe une limite finie, on note $b \in \mathbb{R}$ cette limite. Alors f admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$.

Exercice 12.2.4 La proposition 12.2.3 et la méthode qui suit sont-elles encore valables en remplaçant « $+\infty$ » par « $-\infty$ » ?

Exercice 12.2.5 Rechercher les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \frac{3x^2+2+\sin(x)}{x+1}$
2. $g(x) = x + \ln(x)$

13 Dérivées d'ordre supérieur, convexité

13.1 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 13.1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est une fois dérivable si f est dérivable.*
2. *On dit que f est deux fois dérivable si f est dérivable et f' est dérivable. On note alors f'' la fonction dérivée de f' et on l'appelle la dérivée seconde de f.*
3. *On dit que f est trois fois dérivable si f est deux fois dérivable et f'' est dérivable. On note alors $f^{(3)}$ la dérivée de f'' et on l'appelle la dérivée troisième de f.*
4. *Plus généralement pour $k \geq 3$ on dit que f est k fois dérivable si f est $k-1$ fois dérivable et $f^{(k-1)}$ est dérivable. On note alors $f^{(k)}$ la dérivée de $f^{(k-1)}$ et on l'appelle la dérivée k-ième de f.*

Proposition 13.1.2 *Soient f et g des fonctions k fois dérivables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. *Les fonctions λf, $f+g$, fg, $g \circ f$ sont k fois dérivables. De plus :*

$$(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$$
$$(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$$

2. *La fonction $\frac{1}{f}$ est k fois dérivable en tout point où f ne s'annule pas.*

Démonstration. Récurrence facile (non détaillée en amphi). □

Remarque 13.1.3 Pour la dérivée k-ième de fg on a la formule de Leibniz (qui se démontre aussi facilement par récurrence) :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} f^{(j)} g^{(k-j)} .$$

En revanche pour $(g \circ f)^{(k)}$ ou $(\frac{1}{f})^{(k)}$ il n'y a pas de formule simple. Pour les calculer on dérive k fois successivement.

Remarque 13.1.4 Encore un peu de vocabulaire :

- Une fonction dérivable k fois est dite « de classe D^k ».
- Une fonction de classe D^k dont la dérivée k-ième est continue est dite « de classe C^k ».
- Une fonction dérivable autant de fois que l'on veut est dite « de classe C^∞ » ou « lisse ».

Exercice 13.1.5 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f' n'est pas continue en 0.
3. En déduire que f est de classe D^1 mais n'est pas de classe C^1.

Exercice 13.1.6 Vrai ou faux ?

1. Toute fonction de classe D^k est de classe C^k.
2. Toute fonction de classe C^k est de classe D^k.
3. Toute fonction de classe D^{k+1} est de classe C^k.

13.2 Fonctions convexes : définition

Définition 13.2.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si*

$$\forall (x_0, x_1) \in I^2, \forall t \in [0,1], f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

On dit que f est concave sur I si

$$\forall (x_0, x_1) \in I^2, \forall t \in [0,1], f((1-t)x_0 + tx_1) \geq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

Exercice 13.2.2 Soient $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_0 < x_1$. Montrer que la fonction $t \mapsto (1-t)x_0 + tx_1$ est une bijection strictement croissante de $[0,1]$ vers $[x_0, x_1]$. Interpréter graphiquement la définition 13.2.1.

Exercice 13.2.3 Montrer que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Exercice 13.2.4 Montrer que si f et g sont convexes (resp. concaves) alors $f+g$ l'est aussi.

Remarque 13.2.5 f est convexe si et seulement si la partie du plan située *au-dessus* du graphe de f est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

13.3 Caractérisation de la convexité par le taux d'accroissement

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ fixé. On définit une fonction $T_{f,a} : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ par

$$T_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pour tout $x \in I \setminus \{a\}$.

Proposition 13.3.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Il y a équivalence entre :*

(1) f est convexe.

(2) Pour tout $a \in I$, la fonction $T_{f,a} : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
(3) Pour tous $a, x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < a < x_2$, $T_{f,a}(x_1) < T_{f,a}(x_2)$.

Exercice 13.3.2 Graphiquement, que représente le nombre $T_{f,a}(x)$?

Exercice 13.3.3 Montrer que pour tous $a, x \in I$ tels que $x \neq a$ on a $T_{f,a}(x) = T_{f,x}(a)$.

Exercice 13.3.4 On suppose que f est dérivable en $a \in I$.

1. Montrer que l'on peut prolonger la fonction $T_{f,a}$ par continuité en posant $T_{f,a}(a) = f'(a)$.
2. Si f est convexe, montrer que la fonction $T_{f,a}$ ainsi obtenue est croissante sur I. En particulier, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,
$$(x < a \Rightarrow T_{f,a}(x) \leq f'(a)) \quad \text{et} \quad (x > a \Rightarrow T_{f,a}(x) \geq f'(a)) .$$
Interpréter géométriquement.

⚠ *Le but des exercices ci-dessous est de démontrer la proposition 13.3.1. Faute de temps, ils ne seront probablement pas corrigés en amphi. Le lecteur sérieux est cependant invité à les chercher par lui-même.*

Exercice 13.3.5 On considère trois réels $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$.

1. Déterminer en fonction des x_i un réel $t \in [0, 1]$ tel que $x_2 = (1 - t)x_1 + tx_3$.
2. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (i) $f(x_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_3)$
   (ii) $T_{f,x_1}(x_2) \leq T_{f,x_1}(x_3)$
   (iii) $T_{f,x_2}(x_1) \leq T_{f,x_2}(x_3)$
   (iv) $T_{f,x_3}(x_1) \leq T_{f,x_3}(x_2)$
   Interpréter graphiquement toutes ces inégalités.

Exercice 13.3.6 En utilisant l'exercice 13.3.5 et sans faire de calculs supplémentaires, démontrer la proposition 13.3.1.

13.4 Caractérisation de la convexité par la dérivée ou la dérivée seconde

Théorème 13.4.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.*

Théorème 13.4.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :*

1. f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.

2. f est concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I.

Définition 13.4.3 *Un point d'inflexion est un point où la fonction change de convexité. Si f est deux fois dérivable, sa dérivée seconde s'annule en un tel point.*

Exercice 13.4.4 Sous les hypothèses du théorème 13.4.1, montrer que f est concave si et seulement si f' est décroissante.

Exercice 13.4.5

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction affine, c'est-à-dire une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que f est à la fois convexe et concave.
2. Réciproquement, si f est à la fois convexe et concave, montrer que f est nécessairement une fonction affine.

Exercice 13.4.6 Étudier la convexité et les points d'inflexion des fonctions suivantes : $x^2, x^3, \ln(x), \exp(x), \frac{1}{x}, ax^2 + bx + c$.

Exercice 13.4.7 Montrer que la fonction sinus est concave sur $[0, \pi]$. En déduire que

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x\,.$$

13.5 Position par rapport aux tangentes et asymptotes

Théorème 13.5.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable en un point $x_0 \in I$. Alors*

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)\,.$$

Théorème 13.5.2 *Soit $f : [A, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe admettant une asymptote d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$. Alors*

$$\forall x \in [A, +\infty[, f(x) \geq ax + b\,.$$

Exercice 13.5.3 On suppose f dérivable en x_0. Rappeler l'équation de la tangente à f en x_0, puis interpréter géométriquement les théorèmes 13.5.1 et 13.5.2.

Exercice 13.5.4 Pouvez-vous énoncer des variantes des théorèmes 13.5.1 et 13.5.2 pour des fonctions concaves ? Des asymptotes en $-\infty$?

Exercice 13.5.5 (Preuve du théorème 13.5.1) Utiliser le résultat de l'exercice 13.3.4 pour démontrer le théorème 13.5.1. [On pourra distinguer les trois cas $x < x_0, x = x_0$ et $x > x_0$.]

Exercice 13.5.6 Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \leq x$. [On rappelle que la fonction sinus est concave sur $[0, \pi]$ par 13.4.7.]

Exercice 13.5.7 Étudier la convexité et les asymptotes de la fonction $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$.

Exercice 13.5.8 (extrait de l'examen de janvier 2019) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est nulle.