UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES

Examen final, session 1	Durée de l'épreuve : 3h
Date : 13 janvier 2020	Documents autorisés : aucun
L1 – semestre 1	Matériels autorisés : aucun
HLMA101 Algèbre linéaire et analyse 1	

Le sujet comporte ***2 pages*** *et est composé de 8 questions préliminaires et 3 exercices indépendants. La* ***qualité et la précision*** *de la rédaction seront des éléments* ***déterminants*** *de la notation.*

Questions préliminaires. *Dans les questions* ***Q1*** *à* ***Q4*** *(et* ***seulement*** *dans ces questions), aucune justification n'est demandée. Vos réponses doivent être données sur votre copie et pas sur le sujet d'examen.*

Q1. Donner la table de vérité de l'implication.

Q2. Écrire la négation de l'assertion (P) : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Q3. Donner la définition d'une application injective.

Q4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? *(Pour cette question, aucune justification n'est demandée.)*

(a) Si f est injective, alors $n \leq p$.

(b) Si $n = p$ et si f est injective, alors f est surjective.

(c) Si $n \leq p$ et si f est surjective, alors $n = p$.

(d) Si $n \leq p$, alors f est injective.

(e) Si $n = p$ alors f est bijective.

(f) Si f est bijective, alors $n = p$.

Q5. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (**Justifier.**).

(a) Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue en 0 mais qui n'est pas dérivable en 0.

(b) Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = f(1) = 0$ et dont la dérivée ne s'annule pas.

(c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$, alors $\ell > 0$.

Q6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer en utilisant seulement la définition de la dérivabilité que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 2x_0$.

Q7. Démontrer soigneusement l'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, \exists \alpha \in [6, 7[, x = n + \alpha$.

Q8. L'ensemble

$$A = \mathbb{N}^* \cup \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

admet-il un maximum ? Un minimum ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ? Si oui, les déterminer.

Tournez la page, s.v.p.

Exercice 1 Soit k un nombre réel. On considère le système d'équations (d'inconnues x, y, z) :

$$\begin{cases} y + 2kz = 0 \\ x + 2y + 6z = 2 \\ kx + 2z = 1 \end{cases}$$

Étudier l'existence et l'unicité des solutions en fonction de la valeur de k. (On répondra en particulier aux questions suivantes : pour quelle(s) valeur(s) de k le système admet-il une infinité de solutions ? Exactement une solution ? Aucune solution ?)

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le noyau de f (on en donnera une représentation paramétrique).

(b) Donner une représentation paramétrique de l'image de f, puis un système d'équations cartésiennes qui caractérise $\operatorname{Im} f$.

(c) Calculer A^2 et A^3, puis montrer par récurrence que $A^n = A^2$ pour tout entier $n \geq 2$.

(d) Montrer que les applications $f \circ f \circ f \circ f$ et $f \circ f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ sont égales.

Exercice 3 Soit f la fonction d'une variable réelle définie par la formule

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}.$$

(a) Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f. Calculer sa dérivée.

(b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

(c) Étudier les variations de f.

(d) Étudier la convexité de f.

(e) Montrer que f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ et une asymptote verticale dont on déterminera les équations.

(f) Préciser la position du graphe de f par rapport à l'asymptote oblique, puis tracer l'allure du graphe.

(g) On note maintenant g la resctriction de f à $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Justifier l'existence d'une réciproque à $g :]\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$. On notera $g^{-1} : \mathbb{R} \to]\frac{1}{2}, +\infty[$ cette réciproque.

(h) Justifier que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. (On ne demande pas de calculer la dérivée ici.)

(i) Calculer $g^{-1}(1)$ et $(g^{-1})'(1)$ puis donner l'équation de la tangente au graphe de g^{-1} au point d'abscisse $x_0 = 1$.