DM 1ère S2 3 novembre 2016

3

Ex 1) $A(x) = ax^2 + bx + c$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

$\Delta > 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

a) discriminant positif, donc $A(x)$ admet 2 racines distinctes

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Soit S la somme et P le produit des racines :

0,5 $S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a}$

$S = -\frac{b}{a}$

$P = x_1 \times x_2 = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$

0,5 $P = \frac{c}{a}$ donc $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

b) $(E) : 15x^2 + 11x - 2013 = 0$

$\Delta = 11^2 + 4 \times 15 \times 2013 > 0$, l'équation a donc 2 solutions

1 $\left.\begin{array}{l} P = -\frac{2013}{15} < 0 \\ S = -\frac{11}{15} < 0 \end{array}\right\}$ donc les racines sont de signe contraire

c) Existe-t-il un triangle de périmètre 17 cm et d'aire 17 cm^2 ?

soit $A = L \times \ell$ $P = 2(L + \ell)$

1 d'où $\left\{\begin{array}{l} L \times \ell = A \\ L + \ell = \frac{P}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L + \ell = \frac{17}{2} \\ L \times \ell = 17 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} L : \text{longueur du rectangle} \\ \ell : \text{largeur du rectangle} \end{array}\right.$

On cherche donc 2 longueurs L et ℓ, positives, solutions de l'équation $(E) : x^2 - (L + \ell)x + L \times \ell = 0$

soit $(E) : x^2 - \frac{17}{2}x + 17 = 0$

On pose $h(x) = x^2 - \frac{17}{2}x + 17$

$$\Delta = \frac{17^2}{4} - 4 \times 17 = \frac{17^2 - 16 \times 17}{4} = \frac{17}{4}$$

$\Delta > 0$, donc 2 racines distinctes

$$x_1 = \frac{\frac{17}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}}{2} = \frac{17 + \sqrt{17}}{4} \qquad x_2 = \frac{\frac{17}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}}{2} = \frac{17 - \sqrt{17}}{4}$$

$x_1 > x_2$ donc $L = \frac{17+\sqrt{17}}{4}$ $\ell = \frac{17-\sqrt{17}}{4}$

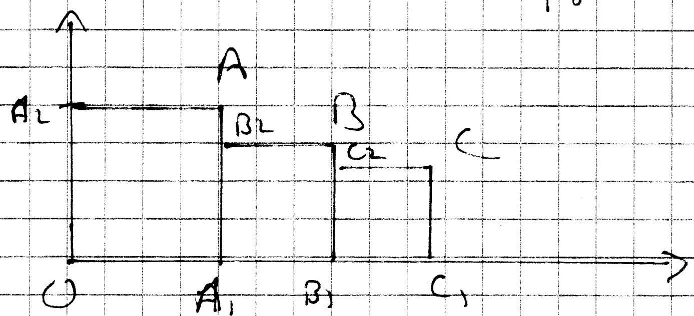
---

vérification : $P = 2(L + \ell) = 2 \times \frac{17 + \sqrt{17} + 17 - \sqrt{17}}{4} = 2 \times \frac{17}{2} = 17$

$$A = L \times \ell = \frac{(17+\sqrt{17})(17-\sqrt{17})}{16} = \frac{17^2 - 17}{16} = 17$$

Ex II

4



carré OA_1AA_2 de côté 1

1 carré $A_1B_1BB_2$ de côté k $0 < k < 1$

carré $B_1C_1CC_2$ de côté k^2 $0 < k < 1$

les coefficients de réduction du 1er au 2ème carré et du 2ème carré au 3ème carré étant égaux

Les points O, A_1, A_2 ne sont pas alignés, et forment donc un repère $(O, \vec{OA_1}, \vec{OA_2})$

dans ce repère, déterminons les coordonnées des points

$O(0;0)$ $A_1(1;0)$ $A_2(0;1)$ $A(1;1)$

1 $B_1(1+k;0)$ $B_2(1;k)$ $B(1+k;k)$

$C_1(1+k+k^2;0)$ $C_2(1+k;k^2)$ $C(1+k+k^2;k^2)$

déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OA_2})$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1+K-1 \\ K-1 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} K \\ K-1 \end{pmatrix}$$

1

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1+K+K^2-1 \\ K^2-1 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} K+K^2 \\ K^2-1 \end{pmatrix}$$

critère de colinéarité :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ colinéaires $\Leftrightarrow K(K^2-1)-(K-1)(K+K^2)=0$

1

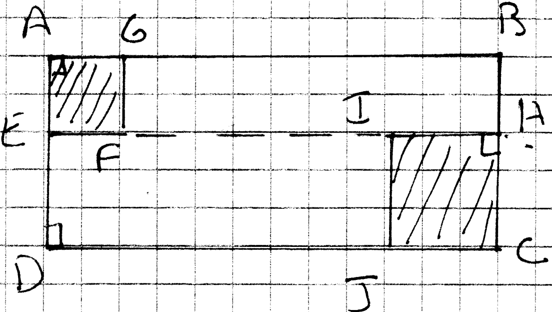
$$\begin{aligned} K(K^2-1)-(K-1)(K+K^2) &= K(K^2-1)-K(K-1)(K+1) \\ &= K(K^2-1)-K(K^2-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

les points A, B et C sont alignés

Ex III

3



ABCD rectangle

AB = 8 AD = 4

AG = AE = x

HC = IH = $4-x$

l'aire de la zone restante est :

$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AGFE} - \mathcal{A}_{IHCJ}$

$\mathcal{A}(x) = 32 - x^2 - (4-x)^2$

$\mathcal{A}(x) = 32 - x^2 - 16 + 8x - x^2$

1,5 $\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 8x + 16$

Mettons $\mathcal{A}(x)$ sous forme canonique :

$\mathcal{A}(x) = -2(x^2 - 4x) + 16$

1 $\quad = -2\left[(x-2)^2 - 4\right] + 16$

$\mathcal{A}(x) = -2(x-2)^2 + 24$

<u>Tableau de variation de $\mathcal{A}$</u>

1,5

x	0		2		4
var. de $\mathcal{A}$		$\nearrow$	24	$\searrow$	

Pour que l'aire restante soit maximale, on construit deux parterres de fleurs carrés de côté 2.

l'aire de la zone restante atteint alors sa valeur maximale : 24