1S | Composition de Mathématiques n° 1

le 19 novembre 2013

Durée : 3h calculatrice autorisée

Prénom : NOM :

I 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{2x^2-2x-4}{3x^2-2x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{4}{3x^2-2x-1}\leqslant 1$.

II On pose $f : x\longmapsto \sqrt{x^2-x-6}$ et $g : x\longmapsto \sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3}$.

1) Déterminer les ensembles de définition de f et g.
2) Quel lien existe-t-il entre f et g ?
3) Résoudre les équations suivantes :

   (E) : $f(x)=\sqrt{x+2}$.

   (F) : $f(x)=x+2$.

III Pour chaque question, indiquer sur le sujet si les affirmations proposées sont vraies (V) ou fausses (F).

Aucune justification n'est attendue.

1) Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $\vec{u}\,(-4\,;5)$ et $\vec{v}\,(-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{8})$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.

(P_1) : le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$.

(P_2) : le point P tel que $\overrightarrow{OP}=\vec{u}-4\vec{v}$ a pour couple de cordonnées $(-2\,;\frac{5}{2})$.

(P_3) : le vecteur $3\vec{u}+2\vec{v}$ est colinéaire au vecteur $4\vec{\imath}-5\vec{\jmath}$.

(P_4) : pour tout réel a, le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur

$\vec{w}\,(2a^2-8\,;-\frac{5}{2}a^2+10)$.

2) Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit (d) la droite passant par le point E (7 ; 4) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(-3\,;2)$.

(P_1) : (d) coupe l'axe des abscisses au point de couple de coordonnées (0; 13).

(P_2) : le point F $(-4\,;6)$ appartient à (d).

(P_3) : (d) et la droite d'équation $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}-\sqrt{26}=0$ sont parallèles.

(P_4) : (d) et la droite d'équation $y=\dfrac{-2x+5}{3}$ sont sécantes.

IV Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati de centre O.

On considère les points G et H définis par : $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{AD}$.

1) Construire une figure
2) Démontrer que les points H, G et C sont alignés.
3) Démontrer que, pour tout M du plan, $\overrightarrow{MA}-3\,\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$.
4) Définir les ensembles de points suivants et les construire sur la figure:

   $\mathcal{A}=\{M\in\mathcal{P}\ /\ \overrightarrow{MA}-3\,\overrightarrow{MB}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC}\}$

   $\mathcal{B}=\{M\in\mathcal{P}\ /\ ||\,\overrightarrow{MA}-3\,\overrightarrow{MB}\,||=AC\}$

   $\mathcal{C}=\{M\in\mathcal{P}\ /\ ||\,\overrightarrow{MA}-3\,\overrightarrow{MB}||=2\,MD\}$

   $\mathcal{D}=\{M\in\mathcal{P}\ /\ ||\overrightarrow{MA}-3\,\overrightarrow{MB}\,||=||\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}||\}$

V Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, on note A_m le point de couple de coordonnées $(2m\,;-3)$ et B_m le point de couple de coordonnées $(m^2+1\,;2-m)$ où m désigne un réel.

1) Démontrer que, pour tout réel m, les points A_m et B_m sont des points distincts.
2) Pour tout réel m, on note d_m la droite passant par les points A_m et B_m.

   Démontrer que, pour tout réel m, d_m admet pour équation :

   $(m-5)\,x+(m-1)^2\,y+m^2+4m+3=0$.
3) Pour quelle(s) valeur(s) de m,

   a) d_m passe-t-elle par O ?

   b) d_m est-elle parallèle à la droite Δ d'équation $y=1$?
4) Donner une équation de d_3 et de d_{-1}. Ces deux droites sont-elles parallèles ? Justifier.

   Si la réponse est non, déterminer le couple de coordonnées de leur point d'intersection.

   (on ne demande pas la figure)

Barème possible : I 3,5 pts II 3,5 pts III4 pts IV 4,5 pts V 4,5 pts