1S2 - IE du 30/9/2016 Sujet A

- Ex I) 1) $f(x) = x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)x - \frac{\sqrt{3}}{6}$ $x \in \mathbb{R}$ polynôme degré 2

$$\Delta = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)^2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3} + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3} > 0$$

d'où $x_1 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{-\sqrt{3} - 3}{6}$

$x_2 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3} - 3}{6} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$

$$S = \left\{ \frac{-\sqrt{3} - 3}{6} ; \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right\}$$

- 2) $A(x) = -2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ $x \in \mathbb{R}$ polynôme de degré 2

$\Delta = 4 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-2) = 8 > 0$

d'où $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{8}}{-4} = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{-4} = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{4} = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{-4} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$

d'où $A(x) = -2\left(x - \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)$

tableau de signes

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$x - \frac{1-\sqrt{2}}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - \frac{1+\sqrt{2}}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x - \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$A(x) > 0$ si $x \in \left] \frac{1 - \sqrt{2}}{2} ; \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right[$

$A(x) < 0$ si $x \in \left] -\infty ; \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{1 + \sqrt{2}}{2} ; +\infty \right[$

$A(x) = 0$ si $x \in \left\{ \frac{1 - \sqrt{2}}{2} ; \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right\}$

3) En mettant $A(x)$ sous forme canonique,

$A(x) = -2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$

tableau de variations.

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
variations de A	$-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$ $+\infty$

Ex II) $g : x \longmapsto 2x^3-5x^2+x+2$ fonction polynôme degré 2 $x\in\mathbb{R}$

1) $g(2) = 2\times 2^3 - 5\times 2^2+2+2 = 16-20+2+2=0$

donc 2 est une racine de g.

2) $g(x) = (x-2)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow 2x^3-5x^2+x+2 = ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$

$\Leftrightarrow 2x^3-5x^2+x+2 = ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 & b-2a=-5 \\ c-2b=1 & -2c=2 \end{cases}$ d'où on tire: $a=2$, $b=-1$, $c=-1$

d'où $g(x) = (x-2)(2x^2-x-1)$ ~~forme~~

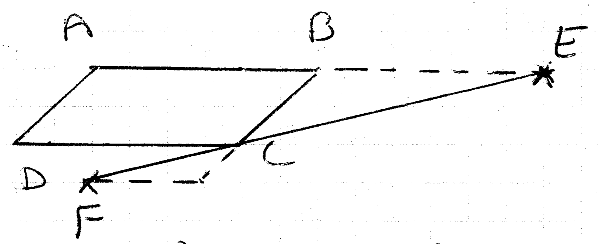
Factorisons $h(x) = 2x^2-x-1$ fonction polynôme degré 2

$\Delta = 1+8 = 9 > 0$ d'où $x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$ $x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

et on a : $h(x) = 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

et donc $g(x) = 2(x-1)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Ex III) 1)



$\vec{AE} = 2\vec{AB}$

$\vec{BF} = \frac{3}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB}$

2) $\vec{CF} = \vec{CB}+\vec{BF} = -\vec{AD}+\vec{BF} = -\vec{AD}+\frac{3}{2}\vec{AD}-\frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AD}-\frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{CF} = -\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}$

3) $\vec{FE} = \vec{FC}+\vec{CB}+\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{AD}-\vec{AD}+\vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{AB}-\frac{3}{2}\vec{AD}$

$\vec{FE} = -3\left(\frac{1}{2}\vec{AD}-\frac{1}{2}\vec{AB}\right) = -3\vec{CF}$ donc C, F, E alignés

Sujet B

Ex I) 1) $f(x)=x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)x-\frac{5\sqrt{3}}{8}$ $x\in\mathbb{R}$ polynôme degré 2

$\Delta=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+4\times\frac{5\sqrt{3}}{8}=\frac{3}{4}+\frac{25}{4}-\frac{10\sqrt{3}}{4}+\frac{10\sqrt{3}}{4}=\frac{28}{4}=7>0$

$x_1=\dfrac{\frac{\sqrt{3}-5}{2}-\sqrt{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{7}-5}{4}$

$x_2=\dfrac{\frac{\sqrt{3}-5}{2}+\sqrt{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{7}-5}{4}$

$S=\left\{\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{7}-5}{4};\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{7}-5}{4}\right\}$

2) $A(x)=3x^2-2x-\frac{1}{3}$ $x\in\mathbb{R}$ fonction polynôme degré 2

$\Delta=4+4\times3\times\frac{1}{3}=8=(2\sqrt{2})^2>0$

$x_1=\frac{2+2\sqrt{2}}{6}=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ $x_2=\frac{2-2\sqrt{2}}{6}=\frac{1-\sqrt{2}}{3}$

tableau de signes.

x	$-\infty$		$(1-\sqrt{2})/3$		$(1+\sqrt{2})/3$		$+\infty$
$x-\frac{1-\sqrt{2}}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{1+\sqrt{2}}{3}$		$-$		$-$	0	$+$	
$3\left(x-\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$A(x)>0$ si $x\in\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right[\cup\left]\frac{1+\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$

$A(x)<0$ si $x\in\left]\frac{1-\sqrt{2}}{3};\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right[$.

$A(x)=0$ si $x\in\left\{\frac{1-\sqrt{2}}{3};\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right\}$

3) En mettant $A(x)$ sous forme canonique

$A(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$

tableau de variations

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
variations de A	$-\infty$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

Ex II) $g : x \longmapsto 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ fonction polynôme degré 2

1) $g(1) = 3 \times 1^3 - 4 \times 1^2 + 2 - 1 = 3 - 4 + 2 - 1 = 5 - 5 = 0$

donc 1 est une racine de g

2) $g(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) \iff 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$

$\iff 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

$\iff \begin{cases} a = 3 & b - a = -4 \\ c - b = 2 & -c = -1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = +1 \end{cases}$

et donc $g(x) = (x-1)(3x^2 - x + 1)$

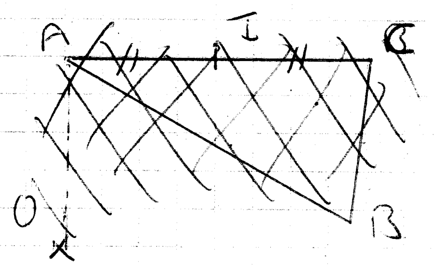
Factorisons $h(x) = 3x^2 - x + 1$ fonction polynôme degré 2 $x \in \mathbb{R}$

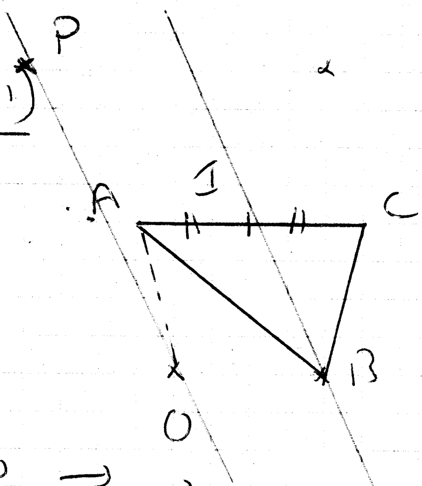
$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$

h n'admet pas de racines

donc $g(x) = (x-1)(3x^2 - x + 1)$

Ex III)





1) I milieu de [AC] donc $\vec{IA} + \vec{IC} = \vec{0}$

$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OI} + \vec{IA} + \vec{OI} + \vec{IC}$

$= 2\vec{OI} + \underbrace{\vec{IA} + \vec{IC}}_{\vec{0}}$

d'où $\vec{OA} + \vec{OC} = 2\vec{OI}$

$\vec{OP} = \vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OC}$

2) $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OC} - 2\vec{OB}$

$= 2\vec{OI} - 2\vec{OB}$

$= 2(\vec{BO} + \vec{OI})$

d'où $\vec{OP} = 2\vec{BI}$ $\vec{OP}$ et $\vec{BI}$ colinéaires, donc

$(OP) \parallel (IB)$