I) $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ $\quad D_f : x \in [0 ; +\infty[$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ D_f / $a > b$

2) $f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > 0 \quad \sqrt{b} \geq 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

d'où : $f(a) - f(b) = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

si $a > b$ alors $a - b > 0$ $\quad$ donc $f(a) - f(b) > 0$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

On a alors :

$\left.\begin{array}{l} a > b \\ f(a) > f(b) \end{array}\right\}$ d'où f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

II) $f : x \longmapsto mx^2 + 4x + 4$ $\quad D = \mathbb{R}$ $\quad m \in \mathbb{R}^*$

1,5

0,5 a) $m = 2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$

si $m = 2$ $\quad f(x) = 2x^2 + 4x + 4$

$\Delta = 16 - 32 = -16 < 0$

$f(x)$ du signe de 2 $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $m = 2 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad$ Vrai

0,5 b) $m < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ admet 2 racines réelles distinctes

la somme des racines d'un polynôme $ax^2 + bx + c$ est $-\dfrac{b}{a}$

le produit des racines est alors $\dfrac{c}{a}$

$m < 0 \Rightarrow S = \dfrac{-4}{m} > 0$

$P = \dfrac{4}{m} < 0$

$S \neq 0$ donc 2 racines distinctes

donc $m < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ admet 2 racines réelles distinctes $\quad$ Vrai

c) f admet 2 racines réelles distinctes $\Longrightarrow m<0$

contre-exemple $m = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 4$

0,5 $\quad \Delta = 16 - 8 = 8 > 0$ 2 racines distinctes

f admet 2 racines réelles distinctes $\Longrightarrow m<0$ Faux

III) Résoudre dans $\mathbb{R}$

(4) (I_1) : $\dfrac{-2x}{x+2} \leq \dfrac{3x+2}{x-1}$

2 $\quad D_{I_1} = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$

0,5 $\quad D_{I_1} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2 \text{ et } x \neq 1\}$

$x \in D_{I_1}$ $\quad (I_1) \Longleftrightarrow \dfrac{3x+2}{x-1} + \dfrac{2x}{x+2} \geq 0$

$(I_1) \Longleftrightarrow \dfrac{(3x+2)(x+2)+2x(x-1)}{(x-1)(x+2)} \geq 0 \quad x \in D_{I_1}$

$(I_1) \Longleftrightarrow \dfrac{3x^2+8x+4+2x^2-2x}{(x-1)(x+2)} \geq 0 \quad x \in D_{I_1}$

0,5 $\quad (I_1) \Longleftrightarrow \dfrac{5x^2+6x+4}{(x-1)(x+2)} \geq 0 \quad x \in D_{I_1}$

On pose $f(x) = 5x^2+6x+4 \quad x \in D_{I_1}$

0,5 $\quad \Delta = 36 - 80 = -44 < 0$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in D_{I_1}$

On fait un tableau de signes

1

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$5x^2+6x+4$	$+$		$+$		$+$
$(x+2)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{5x^2+6x+4}{(x-1)(x+2)}$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

Conclusion : $\frac{2x}{x+2} < \frac{3x+2}{x-1} \iff x \in]-\infty ; -2[\cup]+1 ; +\infty[$

(I_2) : $-x^4 - x^2 + 20 < 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

On pose $X = x^2 \qquad X \in \mathbb{R}^+$

$(I_2) \iff -X^2 - X + 20 < 0$

$\Delta = 1 + 80 = 81 \qquad \Delta > 0$, 2 racines distinctes

$X_1 = \frac{1+9}{-2} = -5$ impossible car $X \in \mathbb{R}^+$

0,5

$X_2 = \frac{1-9}{-2} = +4$

d'où $(I_2) \iff -(X+5)(X-4) < 0$

$(I_2) \iff -(x^2+5)(x^2-4) < 0$

0,5 $(I_2) \iff -(x^2+5)(x-2)(x+2) < 0$

tableau de signes

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$-(x^2+5)$	$-$		$-$	$-$
$(x-2)$	$-$		$-$ 0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$-$
$-(x^2+5)(x-2)(x+2)$	$-$	0	$+$	$-$

1

d'où $-x^4 - x^2 + 20 < 0 \iff x \in]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$

IV) $P : x \longmapsto 12x^3 - 8x^2 - 35x + 6 \qquad x \in \mathbb{R}$

a) $P(2) = 12 \times 2^3 - 8 \times 2^2 - 35 \times 2 + 6$

$P(2) = 96 - 32 - 70 + 6$

$P(2) = 0$ 2 est donc une racine évidente de P

b) $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ a, b, c réels

$\iff P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$\iff P(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

Les polynômes sont égaux si les coefficients de chaque terme sont égaux.

$$12x^3 - 8x^2 - 35x + 6 = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b - 2a = -8 \\ c - 2b = -35 \\ -2c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 16 \end{cases} \quad c = -3$$

d'où $P(x) = (x-2)(12x^2 + 16x - 3)$ 0,5

On pose $Q(x) = 12x^2 + 16x - 3$

$$\Delta = 256 + 144 = 400 > 0$$

0,5 $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-16+20}{24} = \dfrac{1}{6} \\ x_2 = \dfrac{-16-20}{24} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

d'où $Q(x) = 12\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (6x-1)(2x+3)$

et on obtient $P(x) = (x-2)(6x-1)(2x+3)$

tableau de signes

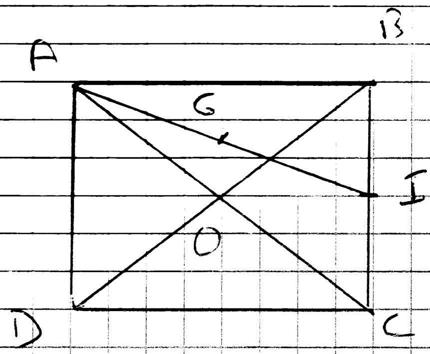
1

x	$-\infty$		$-3/2$		$1/6$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$6x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{6}\right] \cup [2; +\infty[$

V

(5)



AB = 4
AD = 3

$M / \vec{u_M} = 2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}$

1) $\vec{u_M}=\vec{0} \iff 2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$

$\iff 2\vec{AM} = \vec{MB}+\vec{MC}$

$\iff 2\vec{AM} = \vec{MA}+\vec{AB}+\vec{MA}+\vec{AC}$

$\iff 2\vec{AM} = 2\vec{MA}+\vec{AB}+\vec{AC}$

$\iff 4\vec{AM} = \vec{AB}+\vec{AC}$

$\iff \vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{1}{4}\vec{AC}$

1 $\vec{u_M}=\vec{0} \iff \vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{1}{4}\vec{AC}$

2) $\exists\, G / 2\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ figure

donc $2\vec{GA}+\vec{GI}+\vec{IB}+\vec{GI}+\vec{IC}=\vec{0}$

$2\vec{GA}+2\vec{GI}+\vec{IB}+\vec{IC}=\vec{0}$

1 I milieu de [BC] donc $\vec{IB}+\vec{IC}=\vec{0}$

On a finalement, $2\vec{GA}+2\vec{GI}=\vec{0}$, d'où $\vec{GA}+\vec{GI}=\vec{0}$

donc G milieu du segment [AI]

3) Mq $\forall M \in \mathcal{P}$ $2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC} = 4\vec{MG}$

1 $2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC} = 2\vec{MG}+2\vec{GA}+\vec{MG}+\vec{GB}+\vec{MG}+\vec{GC}$

$= 4\vec{MG}+2\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}$

Or $2\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ d'où $2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC} = 4\vec{MG}$

4) $\mathcal{E}\left\{M \in \mathcal{P} \,/\, 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ colinéaires}\right\}$

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$ donc

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires $\iff \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MG}$ colinéaires

donc M est sur la droite $(MG) \parallel (BC)$

$\left.\begin{array}{l}(BC) \perp (AB) \\ (MG) \parallel (AB)\end{array}\right\} \Rightarrow (MG) \perp (AB)$

La droite (MG) est $\parallel$ à (BI) donc à (BI) et passe par le milieu de $[AI]$, elle passe donc, d'après le Th de la droite des milieux par le milieu du segment $[AB]$.

donc M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

5) $\mathcal{X} = \left\{M \in \mathcal{P} \,/\, \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = AB\right\}$

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$

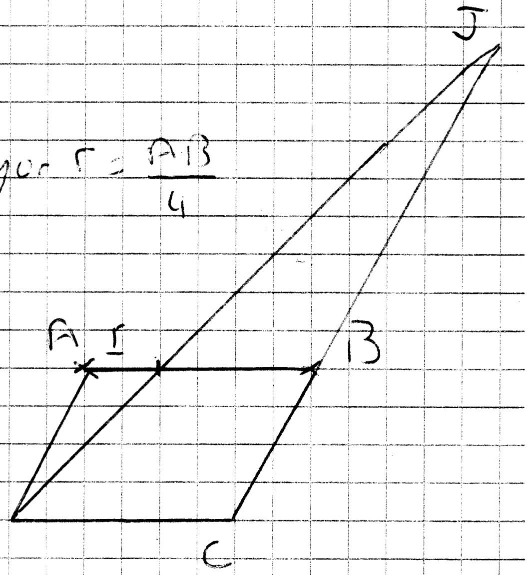
d'où $\mathcal{X} = \left\{M \in \mathcal{P} \,/\, \|4\overrightarrow{MG}\| = AB\right\}$

$\iff \mathcal{X} = \left\{M \in \mathcal{P} \,/\, \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{AB}{4}\right\}$

$\mathcal{X}$: Cercle de centre G et de rayon $r = \frac{AB}{4}$

VI) ③ $ABCD$ parallélogramme non aplati.

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\qquad \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ}$



$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ} \iff \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ}$

$\iff \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ}$

$\iff \overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{CB}$

$\vec{DI} = \vec{DA} + \vec{AI}$

$\vec{DI} = \vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{DI} = \vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{DC}$

$\vec{DJ} = \vec{DC} + \vec{CJ}$

$\vec{DJ} = \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BJ}$

$\vec{DJ} = \vec{DC} + \vec{CB} + 2\vec{CB}$

$\vec{DJ} = \vec{DC} + 3\vec{CB}$

$\vec{DJ} = 3\left(\vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{DC}\right)$

On a donc $\vec{DJ} = 3\vec{DI}$

les points D, I, J sont alignés

VIII) $K \in \mathbb{N}$ $\quad P_K : \{2K^2 \geq (K+1)^2\}$

2

a) $P_0 : \{2 \times 0^2 \geq (0+1)^2\}$ faux

0,5 $\quad P_1 : \{2 \times 1^2 \geq (1+1)^2\}$ faux

$P_2 : \{2 \times 2^2 \geq (2+1)^2\}$ faux

0,5 b) P_K est vraie pour 1, pour 3

c) P_K vraie $\iff 2K^2 - (K+1)^2 \geq 0$

$\iff 2K^2 - K^2 - 2K - 1 \geq 0$

$\iff K^2 - 2K - 1 \geq 0$

1 $\quad \Delta = 4 + 4 = 8 = 2\sqrt{2}$

$K_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

$K_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$

K	0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$K^2 - 2K - 1$		$-$	0	$+$	

donc $K^2 \geq (K+1)^2$ pour $K \geq 1+\sqrt{2}$

Or $K \in \mathbb{N}$, donc $K \geq 3$

$P_K : \{2K^2 \geq (K+1)^2\}$ vraie pour $K \geq 3$