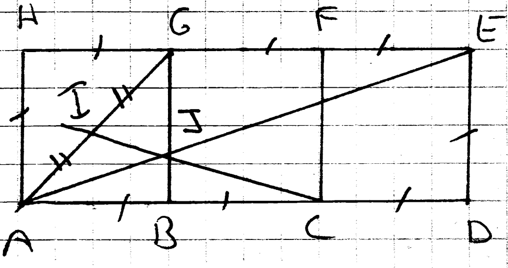
1ère S2 – Correction IE du 06/10/2015

Ex 1)



1ère méthode

Considérons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})$ repère orthonormé car ABGH carré

Déterminons les coordonnées des points :

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$

$A(0;0)$ $B(1;0)$ $H(0;1)$ $G(1;1)$

BCFG et CDEF sont des carrés, donc : $C(2;0)$ $E(3;1)$

Considérons le triangle ADE

$B \in [AD]$, $J \in [AE]$ $(BJ)//(ED)$

donc, d'après le Th. de Thalès dans le triangle ADE, on a :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BJ}{ED} = \frac{AJ}{AE} = \frac{1}{3}$$

On en déduit $AJ = \frac{1}{3}AE$, d'où $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

On en déduit les coordonnées du point J : $J\left(1;\frac{1}{3}\right)$

Calculons les coordonnées du point I, milieu de [AG].

Il vient immédiatement : $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CI}$

On obtient $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-3/2\\1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}-1\\1/3\end{pmatrix}$

On tire $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CJ}$

Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ étant colinéaires, les points I, J, C sont alignés

$2^{ème}$ méthode

$ABGH$, $BCFG$, $CDEF$ sont des carrés.

On a donc : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

I milieu de $[AG]$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH})$

J est l'intersection des droites (BG) et (AE)

Dans le triangle ADE, on a comme précédemment d'après le Th. de Thalès : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}$ (relation de Chasles)

$= -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

$= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ}$

$= -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

$= -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$

$= -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(3\overrightarrow{AB}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$

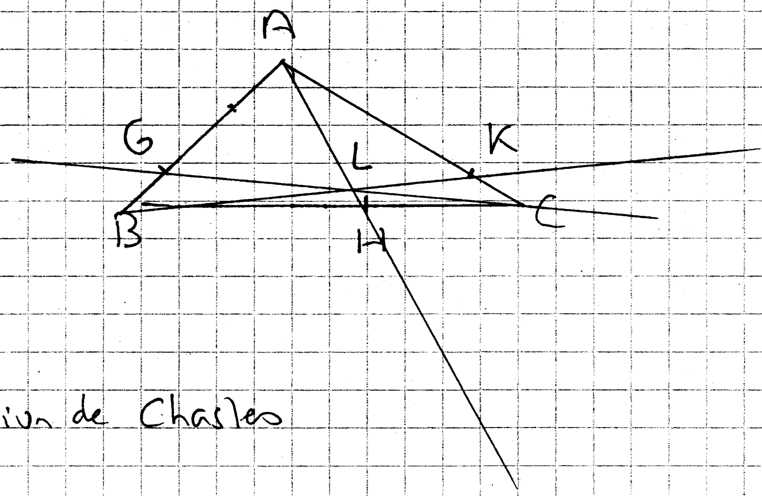
$= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$

Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{CI} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \\ \overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AH} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CJ}$$

les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires, donc I, J, C sont alignés

Ex 11)



1) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB})$ relation de Chasles

d'où $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

On obtient $\boxed{\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$

2) $2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{HB} + 3(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$ (relation de Chasles)

On a $5\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

d'où on tire $\boxed{\overrightarrow{BH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}}$

3) $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

d'après la relation de Chasles: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{KC}$

d'où $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}}$

4) $\overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$

a) d'après la relation de Chasles,

$\overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{LA} + 2(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AC})$

$= 6\overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

Il vient donc, puisque $\overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$

$6\overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ d'où $\boxed{\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

b) $\vec{CL} = \vec{CA} + \vec{AL} = -\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

d'où $\vec{CL} = -\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{CG} = \vec{CA} + \vec{AG} = -\vec{AC} + \vec{AG}$

$= -\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}$

On a donc

$$\begin{cases} \vec{CL} = -\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB} \\ \vec{CG} = -\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB} \end{cases} \Rightarrow \vec{CG} = 2\vec{CL}$$

donc, le point L est le milieu de $[CG]$

5) On a $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

d'après la relation de Chasles, $\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{BH}$

$\vec{AH} = \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{3}{5}(\vec{BA} + \vec{AC})$

$\vec{AH} = \vec{AB} - \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC}$

d'où $\vec{AH} = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}$

On a $\begin{cases} \vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \\ \vec{AH} = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC} \end{cases}$

il vient facilement : $\vec{AH} = \frac{6}{5}\vec{AL}$

les vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{AL}$ sont colinéaires, donc A, L et H sont alignés

6) $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$ (relation de Chasles)

Or $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

d'où $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL}$

d'où $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

On a donc $\begin{cases} \overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BL} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{cases}$

d'où on tire $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BL}$

<u>les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires, donc $L \in (BK)$</u>

7) On sait que $\begin{cases} L \text{ milieu de } [CG] \\ L \in (BK) \\ L \in (AH) \end{cases}$

<u>les droites (CG), (BK) et (AH) sont concourantes en L</u>