组合数学

一.排列组合

1.排列

从n个不同的元素中任取$m(m \leq n)$个元素的所有排列的个数,叫做排列数，记作$P(n, m)$或$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

而如果把选出的m个元素放到圆上，就是圆排列,个数为$\frac{n!}{m \cdot (n-m)!}$

2.组合

从n个不同的元素中任取$m(m \leq n)$个元素的方案数,叫做排列数，记作$\binom{n}{m}$或$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

3.多重集排列

设$a_1, a_2 \cdots a_n$是互不相同的元素

(1)从$\{K_1 \cdot a_1, \cdots, K_n \cdots a_n\}$中选$r$个元素作为排列,当满足$\forall i K_i \geq r$时，方案数是$n^r$

(2)从$\{K_1 \cdot a_1, \cdots, K_n \cdots a_n\}$中选所有元素元素作为排列,方案数是$\frac{(K_1 + \cdots + K_n)!}{K_1! \cdots K_n!}$

4.多重集组合

设$a_1, a_2 \cdots a_n$是互不相同的元素

(1)从$\{K_1 \cdot a_1, \cdots, K_n \cdots a_n\}$中选$r$个元素,当满足$\forall i K_i \geq r$时，方案数是$C_{n+r-1}^r$

(2)从$\{K_1 \cdot a_1, \cdots, K_n \cdots a_n\}$中选$r$个元素,不满足$\forall i K_i \geq r$时，一般用DP或者生成函数做

5.二项式定理及其扩展

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i$

$(a+b)^\alpha = \sum_{i=0}^\infty \binom{\alpha}{i} a^{\alpha-i} b^i$,其中$\binom{\alpha}{i} = \frac{(\alpha) \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-i+1)}{i!}$

$(a+b)^{-\alpha} = \sum_{i=0}^\infty \binom{-\alpha}{i} a^{\alpha-i} b^i = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \binom{\alpha+i-1}{i} a^{\alpha-i} b^i$

6.常用组合数公式

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

$C_n^k = C_n^{n-k}$

$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$

$\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^i$

$\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$

$\sum_{i=0}^n C_{x+i}^x = C_{n+x+1}^n$

$F_{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n-1}^1 + \cdots + C_n^n, \quad F_{2n+1} = C_{2n+1}^0 + \cdots + C_{n+1}^n$

二.线性递推

满足$F_n=a_1F_{n-1}+a_2F_{n-2}+\cdots+a_kF_{n-k}$的$F$称作线性递推数列，他有通项公式：

$$F_n=c_1q_1^n+\cdots+c_kq_k^n$$

其中q_i时方程$q^k-a_1q^{k-1}-\cdots-a_kq^0=0$的解，而$c_i$是常数，由初始值决定

一般解不出方程的或者甚至不确定a_i的值但感觉是线性递推的可以直接上BM板子求第n项，复杂度可以$O(k^2\log n)$

三.特殊计数数列

1.斐波那契数列

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},n\ge 2;F_0=0,F_1=1$$
$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n-(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n]$$
$$\gcd(F_i,F_j)=F_{\gcd(i,j)}$$
$$\sum_{i=0}^{n}F(i)=F(n+2)-1$$
$$\sum_{i=0}^{n}F^2(i)=F(n)F(n+1)$$
$$\sum_{i=0}^{n}F(2i-1)=F(2n)$$
$$F(n)=F(m)F(n-m+1)+F(m-1)F(n-m),n\ge m$$
$$F(n)^2+(-1)^n=F(n-1)F(n+1)$$
$$F_{2n}=C_{2n}^0+C_{2n-1}^1+\cdots+C_n^n,\quad F_{2n+1}=C_{2n+1}^0+\cdots+C_{n+1}^n$$

2.卡特兰数

$$C_n=\sum_{i=0}^{n-1}C_iC_{n-i-1},n\ge 2;C_0=C_1=1$$
$$C=1,1,2,5,14,42,132,\cdots$$
$$C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n=C_{2n}^n-C_{2n}^{n-1}=\frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}$$

3.贝尔数

将n个不同的元素划分到任意个集合的方案数

$$Bell_{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Bell_i,n\ge 1;Bell_0=1$$
$$Bell=1,1,2,5,15,52,\cdots$$

4.第一类斯特林数

将n个不同元素构成到k个圆排列的方案数

$$(1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = s(n,k)->s_u(n,k)$$
$$(2)s(n,k)=s(n-1,k-1)+(n-1)\cdot s(n-1,k)$$
$$(3)s(n,k)=\begin{cases} 0 & n<k \\ 1 & n=k \\ 0 & n>0 \wedge k=0 \end{cases}$$
$$(4)s_s(n,k)=(-1)^{n-k}s_u(n,k)$$
$$(5)x^{\overline{n}}=(x)(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)=\sum_{i=1}^{n}s_u(n,i)x^i$$
$$(6)x^{\underline{n}}=(x)(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-k}s_u(n,i)x^i=\sum_{i=1}^{n}s_s(n,i)x^i$$

5.第二类斯特林数

n个不同元素划分到恰好k个非空集合的方案数（n个不同小球放入k个相同盒子，不能有空盒）

$$(1)\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = S(n,k)$$
$$(2)S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$$
$$(3)s(n,k)=\begin{cases} 0 & n<k \\ 1 & n=k \\ 0 & n>0 \wedge k=0 \end{cases}$$
$$(4)x^n=\sum_{i=0}^{n}S(n,i)x^{\underline{i}}$$
$$(5)Bell_n=\sum_{i=1}^{k}S(n,i)$$

关于斯特林数，建议阅读https://www.cnblogs.com/lking123/p/13308661.html

6.伯努利数

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=0,n\geq 1;B_0=1$$
$$B=1,-\frac{1}{2},\frac{1}{6},0,\frac{1}{30},\cdots$$
$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{n-1}i^k=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}C_{k+1}^{i}B_i n^{k+1-i}$$

四.容斥与反演

1.容斥

设A_i是几何S的子集，则有：

$$|A_1\cup A_2\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cdots\cap A_n|$$

2.二项式反演

若函数f和g满足

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i)$$

那么

$$g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$$

3.莫比乌斯反演

一般不用函数f和g来推，而是用$\sum_{d|n}\mu(i)=[n=1]$直接套，具体怎么玩就在数论里学啦

4.子集反演

就是容斥，总之若

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S}g(T)$$

则:

$$g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$$

5.斯特林反演

并不会

五.生成函数和多项式

1.多项式

不用多说了吧，就是$F(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$这种的，多项式除了有加减法外，还有乘法，除法，求导，积分，求逆元，开k次根，还能成为指数($e^{F(x)}$)或对数($\ln F(x)$),总之有很多黑科技。而$[x^n]F(x)$表示这个多项式的x^n项系数

重点：多项式乘法

$$F(x)*G(x)=(\sum_{i\geq 0}f_ix^i)*(\sum_{i\geq 0}g_ix^i)=\sum_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{i}f_jx^j\cdot g_{i-j}\cdot x^{i-j}$$

2.FFT和NTT

就是用来算卷积的,或者说是多项式乘法,也就是在$O(n\log n)$时间里对每个$i\in[0,n)$,求$C_i=\sum_{j=0}^{i}A_j*B_{i-j}$

3.生成函数

分为一般生成函数（OGF）（也叫母函数）和指数生成函数（EGF）

一般生成函数:

对于一个数列$\{a_0,a_1,a_2\cdots\}$来说，他的生成函数就是$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$这样的一个幂级数

比如斐波那契数列$\{1,1,2,3,5,\cdots\}$就是$Fib(x)=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots$

一般来说幂级数可以是一个正常函数的展开，比如(用泰勒展开或者等比数列求和都可以简单证明):

$$\{1,1,1,1\cdots\} => 1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$$

常见的还有:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$
$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2x^2 + \cdots$$

而斐波那契数列的生成函数也是有对应的函数的:

$$Fib(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots$$
$$x^2Fib(x) = 0 + 0x + x^2 + x^3 + 2x^4 cdots$$
$$xFib(x) + x^2Fib(x) = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots$$
$$1 + xFib(x) + x^2Fib(x) = Fib(x)$$
$$Fib(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

怎么求生成函数并不是很重要,重要的是利用生成函数解决问题.

一道经典背包题:

有许多小球，其中重量为1g、2g、3g、5g的分别有3、2、1、2个，球上**没有**标号，也就是相同重量的球之间没有差别，问有多少种方案可以拿出k克重的球。

直接dp可能大家都会了，就是对于每种重量的小球，枚举一次用几个

但现在考虑另一种dp，令$dp[1g][i]$表示只用1g的球拿出重量为i的方案数，$dp[2g][i]$也类似，显然

$$dp[1g] = \{1,1,1,1,0,0\cdots\}$$
$$dp[2g] = \{1,0,1,0,1,0,0,0\cdots\}$$
$$dp[1g+2g][i] = \sum_{j=0}^{i} dp[1g][j] * dp[2g][i-j]$$

上面这个式子很像多项式乘法，事实上，给$dp[1g]$和$dp[2g]$分别做一个生成函数:

$$F_{1g}(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$
$$F_{2g}(x) = 1 + x^2 + x^4$$

注意其中x^n项的系数就表示取出重量为n的方案数

$$F_{1g+2g}(x) = F_{1g} * F_{2g} = (1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + x^6 + x^7$$

F_{1g+2g}就是只拿1g和2g重的球的方案数了，而问题的答案就是$F_{1g} * F_{2g} * F_{3g} * F_{4g}$的k次方项系数

用母函数求解通项公式:

以卡特兰数为例:

$$C(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \cdots = \sum_{i\geq 0} C_i x^i$$

$$\sum_{i\geq 0} C_i x^i = 1 + \sum_{i\geq 1} C_i x^i = 1 + \sum_{i\geq 1}\sum_{j=0}^{i-1} C_j C_{i-j-1} x^i$$

$$= 1 + x\sum_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{i} C_j C_{i-j} x^i = 1 + xC(x) * C(x)$$

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$$

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$C(0) = C_0 = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{i} (-4x)^i$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2i-3}{2})}{i!}(-4)^i x^i$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2i-3)}{2^i i!}(-1)^{2i-1} 4^i x^i$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-2)!}{2^i i!\cdot(2\cdot 4\cdots(2i-2))} 4^i x^i$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-2)!}{2^i i!\cdot 2^{i-1}\cdot(i-1)!} 4^i x^i$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\cdot(2i-2)!}{i!(i-1)!} x^i$$

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1 - 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\cdot(2i-2)!}{i!(i-1)!}x^i}{2x}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-2)!}{i!(i-1)!} x^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-2)!}{i\cdot(i-1)!(i-1)!} x^{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} C_{2i-2}^{i-1} x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{2i}^{i}}{i+1} x^i$$

$$C_n = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1}$$

指数生成函数:

对于一个数列$\{a_0, a_1, a_2\cdots\}$来说，他的生成函数就是$\hat{F}(x) = a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + \cdots$这样的一个幂级数,实际上$F(x)$也是$\{\frac{a_0}{0!}, \frac{a_1}{1!}, \frac{a_2}{2!}, \cdots\}$的一般生成函数

比如$\{1,1,1,1,1\cdots\} => 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$

经典例题:

用红黄蓝绿给n个格子染色，要求红色和绿色必须是偶数个，求方案数。

由于问题是排列数，为了避免重复的问题，所以选用指数生成函数

于是构造指数型生成函数

$$r(x) = g(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$y(x) = b(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

然后把他们乘起来：

$$r(x) * g(x) * y(x) * b(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2 e^{2x}}{4} = \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{4}$$
$$= \frac{1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(4x)^i - 2(2x)^i}{i!}}{4} = \frac{1}{4} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4^i - 2^{i+1}}{4} \cdot \frac{x^i}{i!}$$

于是答案就是$\frac{4^n - 2^{n+1} + [n==0]}{4}$

用来快速求伯努利数：

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = 0, n \geq 1; B_0 = 1$$
$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i$$
$$\hat{B}(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{B_i x^i}{i!} = 1 + \sum_{i \geq 1} \frac{B_i x^i}{i!}$$
$$= 1 + \sum_{i \geq 1} \frac{x^i}{i!} \cdot (-\frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i+1}{j} B_j)$$
$$= 1 - \sum_{i \geq 1} \frac{x^i}{(i+1)!} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(i+1)!}{j!(i+1-j)!} B_j$$
$$= 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{B_j x^j}{j!} * \frac{x^{i-j}}{(i+1-j)!}$$
$$= 1 - \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{i} \frac{B_j x^j}{j!} * \frac{x^{i+1-j}}{(i+2-j)!}$$
$$= 1 - x \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{i} \frac{B_j x^j}{j!} * \frac{x^{i-j}}{(i+2-j)!}$$
$$= 1 - xB(x)T(x)$$

$$T(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{(i+2)!}$$
$$x^2 T(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{x^{i+2}}{(i+2)!} = \sum_{i \geq 2} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!} - 1 - x = e^x - 1 - x$$
$$T(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$
\begin{aligned}
B(x) &= 1 - xB(x)\frac{e^x-1-x}{x^2} \\
xB(x) &= x - B(x)(e^x-1-x) \\
B(x) &= \frac{x}{e^x-1} \\
&= \frac{x}{\sum_{i\ge 0}\frac{x^i}{i!}-1} \\
&= \frac{x}{\sum_{i\ge 1}\frac{x^i}{i!}} \\
&= \frac{1}{\sum_{i\ge 1}\frac{x^{i-1}}{i!}} \\
&= \frac{1}{\sum_{i\ge 0}\frac{x^i}{(i+1)!}}
\end{aligned}
$$

接下来只要多项式求逆就可以$O(N\log N)$预处理出伯努利数,注意得到的n次项系数并不是伯努利数，因为这是指数生成函数，所以还要乘$n!$

六.Polya计数

具体的证明不是很会，主要是用来求环上本质不同的染色方案

首先基本的定义

置换:

置换是一个满射函数f，用前n个正整数组成的集合作为定义域和值域，简单理解就是n个人站成一排，经过一次置换后，第i个人变到了p_i位置上。一般用一个$2\times n$的矩阵表示

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{bmatrix}
$$

由于置换是一个满射，所以显然p是一个排列

比如一个大小为4，可以翻转的环（或者可以称为正方形），就有一下几种置换:

$$
\text{旋转：}\{1,2,3,4\},\{2,3,4,1\},\{3,4,1,2\},\{4,1,2,3\} \\
\text{翻转：}\{1,3,2,4\},\{2,1,4,3\},\{3,2,1,4\},\{4,3,2,1\}
$$

这8个置换可以称作置换群

burnside引理:

$$
\text{方案数} = \frac{\sum_{\text{置换群}f}\text{有多少种染色方案使得，经过置换后颜色也不会变}}{\text{置换群大小}}
$$

Polya定理:

$$
\text{方案数} = \frac{\sum_{\text{置换群}f}\text{颜色数}c^{\text{置换上有多上个环}}}{\text{置换群大小}}
$$