# 组合数学

## 1. 排列与组合

### 1.1 排列

（1）在没有其他条件的情况下，从 个不同元素中选取 个不同的元素的排列数为，当 时，=0

（2）在 个不同元素中选取 个元素的圆排列的个数为

### 1.2 组合

（1）在在没有其他条件的情况下，从 个不同元素中选取r个不同的元素的排列数为，当 时，=0

### 1.3 多重集的排列

（1）设元素互不相同，从无限多重集中选取 个元素的排列数为

（2）设元素互不相同，从有限多重集中选取 个元素，当时，排列数为

（3）设元素互不相同，有限多重集中元素的全排列数为

（4）设元素互不相同，从有限多重集中选取 个元素，至少存在一个时，排列数为

### 1.4 多重集的组合

（1）设元素互不相同，从无限多重集中选取 个元素的组合数为

（2）设元素互不相同，从有限多重集中选取 个元素，当时，组合数为

（3）设元素互不相同，从有限多重集中选取 个元素，至少存在一个时，组合数通过容斥定理或生成函数可以求得

### 1.5 二项式定理

（1）

### 1.6 鸽巢(抽屉)原理

（1）有 个物品放到 个抽屉中，有一个抽屉中至少会有两个物品

### 1.7\* 组合数浅谈

#### 1.7.1 组合数公式

下面是几个组合数公式，可以结合杨辉三角理解

1. （杨辉恒等式）
2. （杨辉三角对称性）
3. （单行和）
4. （单行平方和）
5. （60°斜行和）
6. （30°斜行和等于斐波那契数列）
7. （杨辉三角的一行可以递推）

#### 1.7.2 组合数的求法

在ACM竞赛中，我们常常需要计算 ，可以参考下面几种方法

1. 如果 很小（不超过50），可以用C++的库函数 double tgamma(double x) ，这是一个欧拉积分

在整数点处的取值满足

因此代码可以这么写

ll C(ll n,ll m){  
 return (ll)round(tgamma(n+1)/tgamma(m+1)/tgamma(n-m+1));  
}

效率并不高，但是对于追求手速来说足够了

1. 如果 不大，可以开 的空间，可以利用杨辉恒等式来预处理组合数表

const ll mo=1e9+7;  
ll C[1005][1005];  
void getC(int n){  
 for(int i=0;i<=n;i++){  
 for(int j=0;j<=i;j++){  
 if(j==0 || j==i)  
 C[i][j]=1;  
 else  
 C[i][j]=(C[i-1][j-1]+C[i-1][j])%mo;  
 }  
 }  
}

1. 如果 比较大，可以开 的空间，可以利用前文所述的逆元来求解，当然，要保证 是素数

const ll mo=1e9+7;  
ll C(ll n,ll m){  
 static ll M=0,inv[N],mul[N],invMul[N];  
 while(M<=n){  
 if(M){  
 inv[M]=M==1?1:(mo-mo/M)\*inv[mo%M]%mo;  
 mul[M]=mul[M-1]\*M%mo;  
 invMul[M]=invMul[M-1]\*inv[M]%mo;  
 }  
 else mul[M]=1,invMul[M]=1;  
 M++;  
 }  
 return mul[n]\*invMul[m]%mo\*invMul[n-m]%mo;  
}

上面的代码中用 的复杂度处理了 的逆元，处理 次 的询问的总复杂度为

1. 如果 更大， 是素数，可以用Lucas定理来求解

**Lucas定理** 若 是素数，则

其中

即将 表示成 进制形式

**推论**

ll Lucas(ll n,ll m,ll p){  
 ll ans=1;  
 while(n|m)ans=ans\*C(n%P,m%P)%P,n/=P,m/=P;  
 return ans;  
}

1. 如果 固定，可以利用上面的公式7对 进行递推

## 2. 容斥原理

### 2.1 容斥原理

（1）设是集合 的子集，表示以集合 代表可能发生的事件中的 个子事件，表示子事件发生的个数，则有

### 2.2 错排问题

（1）设表示这n个数的一个排列的错排个数，有

### 2.3 带有禁位的错排问题

（1）n个元素带有禁位的错排数为

式中表示有 个元素在禁位上的个数

## 3. 特殊计数

### 3.1 斐波那契数列

（1）满足递推方程，的数列称为斐波那契数列，为斐波那契数。

（2）斐波那契数列的通项公式为

（3）

### 3.2 Catalan数

（1）Catalan数满足递推方程

（2）前几个Catalan数为1,1,2,5,14,42,132,429,1430,4862

（3）Catalan数的通项公式为

（4）Catalan数的另一个递推公式为

### 3.3 第一类Stirling数

（1）多项式中常数项和的系数称为第一类Stirling数，记为

（2）第一类Stirling数满足

式中表示中任意k个不同的自然数乘积之和。

（3）第一类Stirling数满足递归关系

### 3.4 第二类Stirling数

（1）多项式，，称为第二类Stirling数。

（2）第二类Stirling数满足

（3）第二类Stirling数满足递归关系

（4）第二类Stirling数可以用卷积的方法求，根据（2）得 ，对 与 卷积即可

### 3.5 分拆数

（1）称正整数n分解为r个正整数和的个数为n分解成r的分拆数，记为

（2）=*1*；=*1*；=*1*；=*2*；=*3*

（3）

（4）

### 3.6 分装问题

将n个球放入r个盒子称为分装问题

（1）相同球和相同盒子，n≥r

①没有空盒子：

②可以有空盒子：

（2）相同球和不同盒子

①没有空盒子：

②可以有空盒子：

（3）不同球和相同盒子

①没有空盒子：

②可以有空盒子：

（4）不同球和不同盒子

①没有空盒子：

②可以有空盒子：

## 4. 生成函数

### 4.1 生成函数

对于一个序列，如果这个序列的每一项是幂函数中各不同的的系数，称幂函数是序列的生成函数，也称为母函数。

### 4.2 指数生成函数

对于一个序列，如果这个序列的每一项是幂函数中各不同的的系数，称幂函数是序列的指数生成函数。

### 4.3 利用生成函数求有限多重集的组合

设元素互不相同，从有限多重集中选取r个元素，至少存在一个时，求其组合。

令，中的系数即为所求，这里可能需要快速傅里叶变换

### 4.4 利用指数生成函数求有限多重集的排列

设元素互不相同，从有限多重集中选取r个元素，至少存在一个时，求其排列。

令，中的系数即为所求

## 5. 线性递推数列

### 5.1线性递推方程

其通项公式为

其中是特征方程

的根

是常数，由初值条件决定

### 5.2 非线性递推方程

其通项公式为

其中与上文相同， 为一特解

注：这只是给出了递推方程的一种求通解的理论方法，实际上高次多项式求根以及求递推方程的特解往往是很困难的，在ACM中，若要计算线性递推数列第n项的值，常用矩阵快速幂求解

## 6. Polya计数

### 6.1 Burnside 定理

非等价着色数等于置换群中保持不变的着色的平均数

### 6.2 Polya计数公式